

UNIVERSITE DE LIMOGES
Ecole Doctorale ED 521 Sciences et Ingénierie pour l'Information
Laboratoire XLIM – UMR CNRS Université de Limoges 7252
Année : 2014

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Signal Image et Automatique

présentée et soutenue par

David GROSSOLEIL

le 17 juin 2014.

Etude de l'hybridation d'énergie humaine, synthèse de commandes minimisant l'énergie consommée par un vélo à assistance électrique.

Thèse dirigée par Dominique MEIZEL, Professeur.

JURY :

Rapporteurs :

M. Thierry-Marie GUERRA, Professeur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis,
M. Pascal RAY, Professeur, Directeur de l'IFMA (Clermont-Ferrand).

Examineurs :

M. Luc JAULIN, Professeur, ENSTA Bretagne,
M. Francis PAPON, Ingénieur en Chef des Ponts, des Eaux et des Forêts, HDR, IFSTTAR
(Champs sur Marne),
M. Vincent PATELOUP, Maître de Conférences, Université de Limoges,
M. Jean-Yves SALLE, Professeur, CHU de Limoges,
M. Pierre-Olivier VANDANJON, Chargé de recherches à l'IFSTTAR (Nantes).

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Pr. Dominique Meizel, qui a su me proposer ce sujet original. Il m'a laissé une grande liberté pour organiser mon travail. J'ai apprécié sa disponibilité et ses conseils avisés.

J'adresse mes remerciements aux membres de mon jury de thèse. J'ai eu plaisir à échanger avec eux lors de la soutenance. Ils m'ont permis d'élargir mes perspectives de travail autour de ce sujet passionnant.

Je remercie le Conseil Scientifique de l'Université de Limoges qui m'a accordé pendant 3 ans une décharge d'un tiers de service. Sans cela, je n'aurais pas pu mener de front ce travail de recherche et mon service d'enseignement.

Je salue également mes collègues de l'ENSIL et plus particulièrement ceux de la spécialité Mécatronique. Ils m'ont soutenu et conseillé tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier enfin ma famille pour son soutien. Je pense à ma chère épouse qui a patiemment relu ce mémoire et s'est émerveillée devant la poésie de la « vitesse de confort », de « l'algorithme A étoile » et de « l'élagage précoce ».

Je dédie cette thèse à mes parents, trop tôt disparus.

Table des Matières

INTRODUCTION GENERALE	9
1. CHAPITRE 1 : POSITION DU PROBLEME	11
1.1 CONTEXTE ET ENJEUX DE LA PRATIQUE DU VELO	12
1.1.1 <i>Les ancêtres du vélo.....</i>	<i>12</i>
1.1.2 <i>Evolution de la pratique du vélo.....</i>	<i>13</i>
1.1.3 <i>Le vélo face aux enjeux climatiques.....</i>	<i>14</i>
1.1.4 <i>Se maintenir en forme dans une société sédentaire</i>	<i>16</i>
1.1.5 <i>Le renouveau du vélo.....</i>	<i>17</i>
1.2 LE VELO A ASSISTANCE ELECTRIQUE	21
1.2.1 <i>Le cadre législatif du VAE.....</i>	<i>21</i>
1.2.2 <i>Les différentes architectures de VAE.....</i>	<i>21</i>
1.2.3 <i>Commande d'un VAE</i>	<i>23</i>
1.2.4 <i>Les VAE utilitaires.....</i>	<i>23</i>
1.3 LE VELO COMME SUJET D'ETUDE	25
1.3.1 <i>Le vélo, un objet de recherche médical</i>	<i>25</i>
1.3.2 <i>La recherche de la performance cycliste</i>	<i>26</i>
1.3.3 <i>Le VAE étudié comme sujet d'Automatique.....</i>	<i>27</i>
1.4 PROBLEMATIQUE DE LA THESE.....	29
2. CHAPITRE 2 : MODELISATIONS	31
2.1 INTRODUCTION	32
2.1.1 <i>Définition du système et des frontières</i>	<i>32</i>
2.1.2 <i>Spécifications du modèle</i>	<i>33</i>
2.1.3 <i>Principes de construction de l'architecture.....</i>	<i>34</i>
2.2 MODELE MECANIQUE DU VELO	35
2.2.1 <i>Structure du modèle.....</i>	<i>35</i>
2.2.2 <i>Energie cinétique.....</i>	<i>37</i>
2.2.3 <i>Puissance de la gravité.....</i>	<i>38</i>
2.2.4 <i>Modélisation du contact pneu chaussée</i>	<i>39</i>
2.2.5 <i>Puissance aérodynamique</i>	<i>40</i>
2.2.6 <i>Puissances internes au système</i>	<i>41</i>
2.2.7 <i>Loi du mouvement.....</i>	<i>43</i>
2.3 CALIBRATION MECANIQUE	44
2.3.1 <i>Dispositif expérimental.....</i>	<i>44</i>
2.3.2 <i>Mesure directe de paramètres</i>	<i>45</i>
2.3.3 <i>Protocole expérimental de mesure des frottements</i>	<i>47</i>
2.3.4 <i>Résultats.....</i>	<i>49</i>
2.4 MODELISATION DE L'ASSISTANCE ELECTRIQUE.....	50
2.4.1 <i>Choix de modélisation pour l'assistance électrique</i>	<i>50</i>

2.4.2	<i>Relation électrique</i>	51
2.4.3	<i>Relation mécanique</i>	52
2.5	CALIBRATION ELECTRIQUE	53
2.5.1	<i>Dispositif expérimental</i>	53
2.5.2	<i>Protocole expérimental</i>	54
2.5.3	<i>Résultats</i>	57
2.6	MODELE DE COMPORTEMENT DU CYCLISTE.....	59
2.6.1	<i>Le modèle de muscle de Hill</i>	59
2.6.2	<i>Type de modèles de pédalage</i>	61
2.6.3	<i>Mesure de la fonction de pédalage</i>	62
2.6.4	<i>Proposition de modèles de pédalage</i>	64
2.6.5	<i>Influence du dérailleur</i>	68
2.6.6	<i>Influence de l'assistance électrique</i>	70
2.6.7	<i>Analyse de la variabilité interpersonnelle</i>	72
2.6.8	<i>Construction d'un modèle de cycliste</i>	76
2.6.9	<i>Calibration des modèles de cyclistes</i>	79
2.7	CONCLUSION	82
3.	CHAPITRE 3 : SYNTHESES DE COMMANDES	83
3.1	INTRODUCTION	84
3.1.1	<i>Optimisation de l'autonomie des véhicules hybrides</i>	84
3.1.2	<i>Optimisation de l'autonomie des véhicules mono énergie</i>	85
3.1.3	<i>Principe du Maximum</i>	85
3.1.4	<i>Programmation Dynamique</i>	86
3.1.5	<i>Méthodologie proposée</i>	87
3.2	OPTIMISATION DE L' AUTONOMIE AVEC DES HYPOTHESES ACADEMIQUES	88
3.2.1	<i>Ecriture du problème sous forme d'une équation d'état</i>	88
3.2.2	<i>Définition du problème d'optimisation</i>	89
3.2.3	<i>Profil d'altitude</i>	90
3.2.4	<i>Construction du hamiltonien</i>	91
3.2.5	<i>Conditions nécessaires à l'optimalité</i>	92
3.2.6	<i>Identification de la commande optimale par la méthode de tir</i>	93
3.2.7	<i>Résultats d'optimisation</i>	96
3.2.8	<i>Influence du comportement humain</i>	97
3.2.9	<i>Amélioration de l'autonomie du vélo</i>	98
3.3	OPTIMISATION DE L' AUTONOMIE EN CONDITIONS REALISTES	100
3.3.1	<i>Réécriture du problème d'optimisation sous forme discrétisée</i>	100
3.3.2	<i>Problèmes de cheminement à coût minimal</i>	103
3.3.3	<i>Implémentation de l'Algorithme A* pour la minimisation d'énergie</i>	105
3.3.4	<i>Construction d'une heuristique énergétique</i>	107
3.3.5	<i>Résultats de l'algorithme A*</i>	109
3.3.6	<i>Résultats comparés à la méthode exacte</i>	112
3.3.7	<i>Efficacité de l'heuristique</i>	114
3.3.8	<i>Définition de conditions réalistes</i>	116

3.3.9	<i>Résultat d'optimisation dans des conditions réalistes</i>	120
3.3.10	<i>Influence de la commande optimale sur le comportement du cycliste</i>	123
3.3.11	<i>Amélioration de la vitesse de calcul de l'algorithme A*</i>	124
3.4	CONCLUSION	126
	CONCLUSION GENERALE	127
	ANNEXE : EXEMPLES DE CHEMINEMENT A COUT MINIMAL	131
	<i>Algorithme de Dijkstra</i>	132
	<i>Algorithme A*</i>	133
	BIBLIOGRAPHIE	135

Introduction générale

Le vélo est un objet technologique qui a connu une histoire très riche au cours du XX^{ème} siècle. D'abord bourgeois à sa création, il devient dans les années 30 le mode de transport des ouvriers. La démocratisation de la voiture pendant les trente glorieuses a entamé une baisse continue de la pratique du vélo utilitaire. Seul le vélo sportif, professionnel et amateur, garde encore un engouement populaire.

Les problèmes environnementaux actuels, tels le réchauffement climatique et la raréfaction des énergies fossiles suscitent un intérêt renouvelé pour la pratique du vélo comme une alternative à la voiture individuelle. En effet, le vélo est le mode de transport qui présente la meilleure efficacité énergétique par kilomètre parcouru, supérieure même à la marche. L'activité physique modérée qu'il nécessite a également un effet bénéfique sur la santé du cycliste.

Conscients de ces bénéfices pour la société, les pays du nord de l'Europe ont encouragé avec succès la pratique du vélo depuis les années 80. Aux Pays Bas, la part modale atteint 27% des déplacements en ville. A contrario, en France, cette pratique stagne à seulement 3%. Le développement récent des aménagements cyclables et des vélos en libre-service facilite la pratique du vélo dans les grandes villes mais ne provoque pas encore un report modal massif de la voiture vers le vélo.

Ce travail de recherche s'intéresse au vélo à assistance électrique (VAE) qui pourrait engager une rupture technologique dans le domaine des transports urbain. En effet le VAE permet de garantir un trajet sans effort excessif et une vitesse moyenne de 20km/h même sur un parcours vallonné. Il peut donc se substituer efficacement à la voiture individuelle sur des parcours allant jusqu'à 10km.

Le VAE est un véhicule hybride dans lequel le moteur musculaire humain est assisté d'un moteur électrique alimenté par une batterie. Le cycliste possède un libre arbitre, il peut pédaler quand bon lui semble et à l'intensité qu'il désire. La commande du VAE doit donc agir en bonne intelligence de cette source de puissance versatile.

Cette thèse étudie l'hybridation d'énergie humaine mise en jeu dans le VAE. L'originalité du travail réside dans la modélisation du comportement d'un cycliste non sportif pédalant sur un VAE. Le modèle proposé permet de mener à bien une synthèse de

commande permettant de satisfaire deux objectifs contradictoires, maximaliser l'autonomie du VAE tout en garantissant le confort du cycliste.

Le premier chapitre présente la construction de la problématique. Il rappelle le contexte sociétal, les enjeux de la pratique du vélo et le cadre législatif du VAE. Une étude bibliographique synthétise les travaux de recherche qui traitent de l'analyse des performances des cyclistes et des améliorations menées sur la commande des VAE.

Le deuxième chapitre présente la construction d'un modèle de VAE. Les modèles mécaniques et électriques sont calibrés au moyen d'un VAE instrumenté. Le modèle humain est construit en s'appuyant sur une étude bibliographique et calibré grâce à une expérimentation menée sur un panel de cyclistes.

Le troisième chapitre détaille la synthèse de commandes minimisant l'énergie consommée. La commande optimale exacte est calculée dans un cas académique. Cette commande permet de valider la synthèse d'une commande discrétisée. La commande discrétisée est ensuite appliquée dans un cas réaliste.

Chapitre 1 : Position du problème

Résumé du Chapitre 1

Ce chapitre présente la construction de la problématique de la thèse. Dans un bref rappel historique, on étudie le glissement sociologique de la pratique du vélo, qui d'abord « bourgeois » à sa création, devient un mode de transport « ouvrier ». La massification de la voiture individuelle dans les années 1970 fait ensuite décliner la pratique du vélo en ville et le cantonne à une pratique sportive et de loisir.

Les préoccupations environnementales du réchauffement climatique et de la pénurie à venir des énergies fossiles suscitent un intérêt renouvelé pour la pratique du vélo en substitution de la voiture individuelle. Les bénéfices du vélo se mesurent également sur l'amélioration de la santé des cyclistes. L'activité physique modérée engendrée par le vélo apparaît comme une méthode simple et efficace pour lutter contre certaines maladies en fort développement dans des sociétés de plus en plus sédentaires.

Cependant, il n'est pas naturel de remplacer le confort d'un déplacement en automobile par un déplacement en vélo qui peut paraître aux premiers abords dangereux et fatigant. Certaines villes ont commencé avec succès à réaménager leurs voiries de manière à faire cohabiter en bonne intelligence voitures et les modes de déplacements actifs : marche et vélo.

Pour ce qui concerne l'aspect « fatigant » du vélo, le Vélo à Assistance Electrique apparaît comme une innovation technologique qui pourrait bien susciter l'engouement. L'assistance électrique permet de lisser l'effort du cycliste dans les montées ou par vent de face. Cependant comme tout véhicule électrique, la batterie constitue un enjeu important car elle est l'élément le plus couteux du véhicule et dimensionne son rayon d'action.

La gestion de l'assistance électrique apparaît comme un sujet de recherche pertinent car elle assure la satisfaction du cycliste en termes de confort et d'autonomie du véhicule. L'étude de la littérature sur le thème du VAE propose de nombreuses améliorations en vue de renforcer le confort. L'autonomie du vélo est mesurée mais n'est pas optimisée. Le comportement du cycliste reste quant à lui difficile à modéliser. Cette étude vise à construire un modèle de cycliste calibré afin de synthétiser une commande qui minimise l'énergie consommée tout en garantissant le confort du cycliste.

1.1 Contexte et enjeux de la pratique du vélo

1.1.1 Les ancêtres du vélo

L'invention du vélo résulte d'une amélioration continue du vélocipède, inventé par le Baron Karl Drais von Sauerbronn en 1817, en Prusse. De nos jours on utilise plus couramment le mot « draisienne » à la place de vélocipède en hommage à son inventeur. Le mot « vélocipède » est celui qui fut choisi en traduction du mot allemand « Laufmaschine » (littéralement machine à courir), lors du dépôt de brevet en France en 1818. Ce véhicule en bois à deux roues alignées est propulsé par les pieds du conducteur qui poussent directement le sol. Le conducteur est assis sur une selle, à la différence de la trottinette sur laquelle le conducteur se tient debout. La draisienne est d'ailleurs toujours commercialisée actuellement mais plutôt destinée aux petits enfants afin qu'ils s'initient à l'équilibre nécessaire à la pratique du vélo.

Autour des années 1861 à 1863, Pierre et Ernest Michaux, deux forgerons français, modifièrent une draisienne pour lui ajouter des pédales en prise directe sur la roue avant. Cette invention prit le nom très éphémère de « michaudine ». Cette modification, bien que permettant au conducteur de ne plus toucher le sol avec ses pieds, avait comme inconvénient de pas permettre d'atteindre des vitesses importantes.

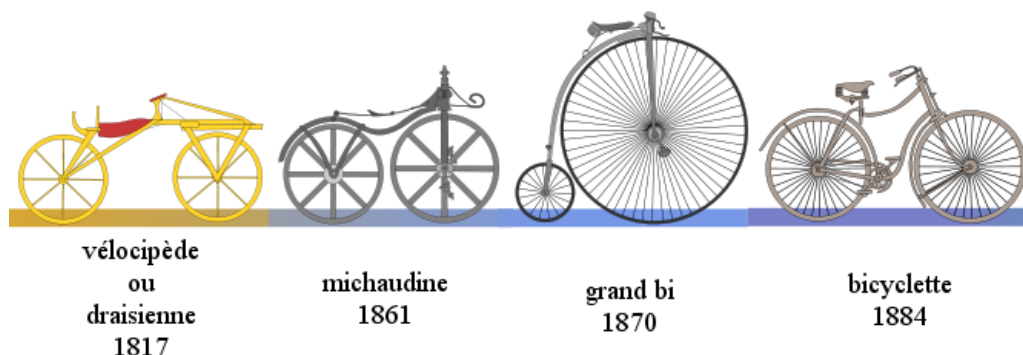


Figure 1-1 : la bicyclette et ses ancêtres.

La solution d'augmenter le diamètre de la roue avant jusqu'à 1m50 donna naissance en 1870 au « grand bi », ce bicycle caractéristique, rapide, mais difficile à enfourcher.

En 1876-1879, Harry John Lawson inventa le « safety bicycle » en ajoutant une transmission par chaîne entre les pédales et la roue arrière. Cette innovation permit de réduire la taille des roues tout en maintenant une vitesse satisfaisante. Cette invention prit le nom de « bicyclette » dans sa traduction française et le conducteur de bicyclette devint un « cycliste ».

L'invention du pneumatique de John Boyd Dunlop en 1889 fut déclinée en 1891 en pneumatique démontable par Édouard et André Michelin. Ceci permit à la bicyclette de gagner en confort et en tenue de route. La bicyclette fut ensuite complétée par deux nouvelles inventions le dérailleur (1895) et par la roue libre (1897).

Au cours du XX^{ième} siècle, le nom bicyclette fut progressivement remplacé dans le langage courant par le mot « vélo », diminutif du vélocipède, son ancêtre. Il faut noter que dans le code de la route et dans les textes officiels français, même récents, le mot vélo n'est que très peu employé et on lui préfère encore bicyclette voire le mot « cycle ».

L'article R311-1 du code de la route définit le cycle comme suit :

« 6.10. Cycle : véhicule ayant au moins deux roues et propulsé exclusivement par l'énergie musculaire des personnes se trouvant sur ce véhicule, notamment à l'aide de pédales ou de manivelles ».

1.1.2 Evolution de la pratique du vélo

Le livre de Catherine Bertho Lavenir [Bertho 2011], décrit une évolution de la pratique du vélo en France en plusieurs périodes sociologiques. La bicyclette fut d'abord utilisée par une élite bourgeoise. Cette invention concomitante à celle de l'automobile était synonyme de progrès par rapport à la traction animale. La marche à pieds, quant à elle, restait réservée aux prolétaires.

Entre les années 1918 et 1939, la production de masse de la bicyclette fit baisser les prix de ce véhicule et le rendit accessible aux ouvriers. La bicyclette était un moyen de transport important dans la première moitié de ce siècle, et a culminé pendant la guerre vers 1943. La diffusion de l'automobile dans les années 1950 fit apparaître le vélo comme un mode de transport rétrograde en comparaison de la voiture symbole du progrès. La pratique du vélo utilitaire comme mode de transport décline tandis que celle sportive se développe.

A partir de 1970, la massification de la circulation automobile induit une augmentation considérable du nombre de cyclistes tués. La pratique du vélo diminue fortement pour atteindre son minimum en France dans les années 1990. Le mode de transport des enfants pour aller à l'école évolue considérablement. Le vélo et la marche, ont été majoritairement remplacés par l'accompagnement par les parents en voiture.

Francis Papon s'interroge dans ses travaux sur l'éventualité d'un « renouveau de la pratique du vélo » [Papon 2012]. Il utilise notamment les résultats de l'enquête nationale sur les transports de 2007-08 et des modèles de population française afin d'estimer un historique du mode principal de déplacement (figure1-2).

On constate une augmentation continue du déplacement en voiture ou en moto. La marche et le vélo ne cessent de décroître. La pratique du vélo a atteint son étiage dans les années 1990 à 2000 ce qui corrobore les observations sociologiques de Catherine Bertho Lavenir.

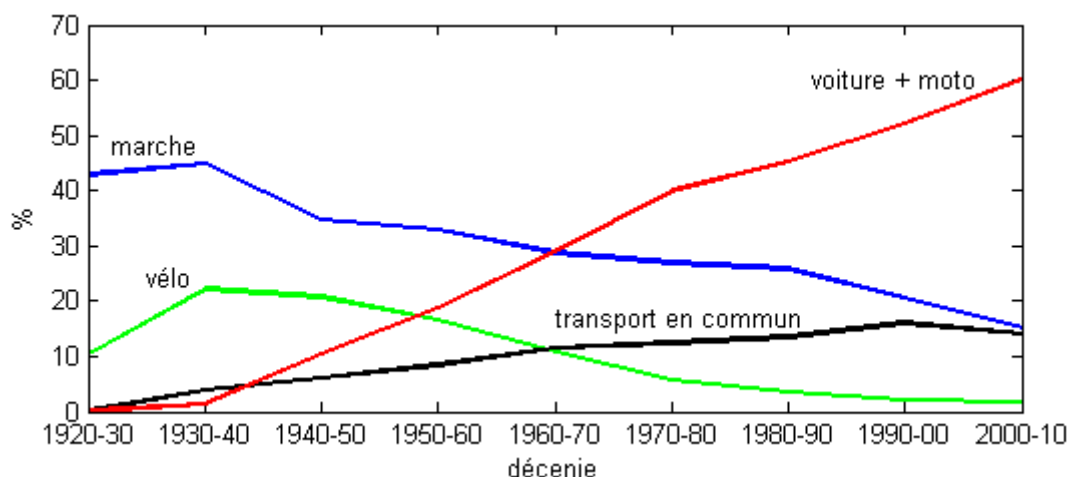


Figure 1-2 : estimation de l'évolution de la répartition modale du moyen de transport principal en France entre 1920-2008, Source : [Papon 2012]

1.1.3 Le vélo face aux enjeux climatiques

Les rapports successifs du Groupement d'Experts Internationaux sur le Climat [GIEC 2007] et [GIEC 2013] mettent en évidence une corrélation entre le réchauffement climatique et les émissions de Gaz à Effets de Serre (GES). La hausse de température la plus probable si l'activité humaine évolue selon le scénario tendanciel se situe autour de +4°C. Une telle augmentation a pour conséquence une augmentation de la fréquence et de l'amplitude des phénomènes climatiques violents (cyclone, inondations, sécheresse, incendies). Le niveau moyen de la mer s'est élevé de 18cm en 100ans sous l'effet cumulé de la dilatation thermique des océans et de la fonte des glaciers terrestres (figure 1-3).

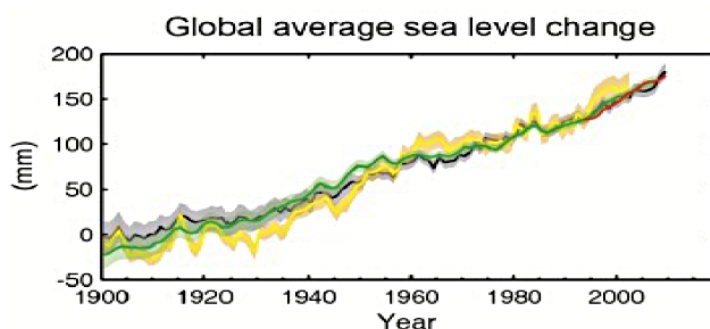


Figure 1-3 : niveau de la mer moyen à l'échelle mondiale, extrait de [GIEC 2013]

Le GIEC préconise à l'échelle mondiale une réduction de 50% des émissions de GES par rapport à l'année de référence 1990 pour limiter le réchauffement à 2°C. Cette réduction ne se fera pas de manière identique sur le globe. Les pays développés doivent s'engager à faire un effort supérieur à ceux en voie de développement.

En 2005 la France s'est fixé comme objectif de diviser par 4 ses émissions de GES par rapport à 1990, cet objectif est souvent appelé « Facteur 4 ». L'article 2 de la loi n°2005-781 du 13 juillet 2005 de programme fixant les orientations de la politique énergétique précise : « la lutte contre le changement climatique est une priorité de la politique énergétique qui vise à diminuer de 3 % par an en moyenne les émissions de gaz à effet de serre de la France ».

Cet objectif à long terme se décline en deux points de passage définis par le Grenelle de l'environnement : en 2020 une baisse de 23,1% des émissions de GES par rapport à 1990 et en 2030 une baisse de 31.9% [MEDDTL 2011]. Sur la figure 1-4, on constate que bien que les émissions de GES baissent en France depuis 2000, cette baisse n'est pas suffisante pour respecter les objectifs du facteur 4. Les deux points de passage du Grenelle semblent atteignables si les efforts continuent.

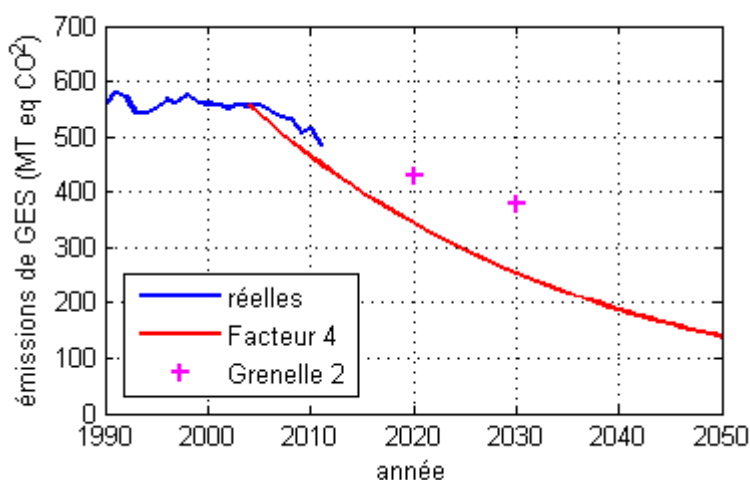


Figure 1-4 : évolution des émissions de GES en France comparée au facteur 4 et aux préconisations du Grenelle.

Les actions de réductions des émissions de GES se déclinent sur plusieurs secteurs d'activités. Les transports constituent le secteur français le plus émissif avec 29% des émissions. Au sein des transports, le véhicule particulier est majoritaire avec 54% des émissions. Un déplacement sur deux en voiture se fait sur une distance moins de 3 km. L'une des pistes envisagées est de substituer dans les trajets quotidiens l'usage de la voiture individuelle par les transports en commun et le vélo. Dès 1996 la loi n°96-1236 du 30

décembre 1996, loi sur l'air et l'utilisation rationnelle de l'énergie (LAURE), préconise « le développement des transports collectifs et des moyens de déplacement économes et les moins polluants, notamment l'usage de la bicyclette et la marche à pied ».

La pratique du vélo peut sembler une réponse insignifiante par rapport aux enjeux du réchauffement climatique, cependant si l'on s'y penche de plus près l'impact du vélo peut se mesurer. Un français produit en moyenne annuelle 5,5T de CO₂. Supposons qu'il utilise le vélo en substitution de sa voiture pour effectuer 2000 km/an sur un trajet court domicile travail. Il parcourt par exemple 10km aller-retour 200 jours par an. Sa voiture émet en moyenne 170g de CO₂ par kilomètre [IFP 2009]. Il économise donc 340 kg de CO₂, ce qui correspond à 6% de ses émissions totales. Cette économie n'est pas négligeable et une politique massive d'incitation à faire du vélo en substitution du véhicule individuel pourrait faire ainsi baisser significativement les émissions de GES.

1.1.4 Se maintenir en forme dans une société sédentaire

La société occidentale se « sédentarise », c'est-à-dire que la pratique d'activités physiques baisse au profit d'activités passives : travail de bureau, ordinateur, téléphone, télévision. Enfants et adolescents utilisent de moins en moins la marche à pied et le vélo pour aller à l'école (§1.1.2), les actifs occupent d'avantage des métiers à faible activité physique. Parallèlement à cela les troubles de la santé liés à la sédentarité se multiplient : obésité, diabète et maladies cardiovasculaires. La remise en activité physique des personnes est donc un enjeu sanitaire important.

Les travaux d'Élisabeth Piot André s'interrogent sur les moyens à mettre en œuvre pour obtenir une augmentation de l'activité physique des patients [Piot 2010]. L'une des solutions décrite est de prescrire de l'activité physique (marche, vélo, natation) à des patients souffrants d'obésités ou de diabète. Cette activité permet à moyen terme une amélioration mesurable de l'état de santé et une diminution de la prise de médicaments.

Le rapport du professeur Jean-François Toussaint [Toussaint 2008] indique que bien que l'offre de pratique sportive récréative s'accroît, cette pratique ne représente en moyenne que 7% des dépenses énergétiques d'une journée moyenne. La première proposition qu'il émet dans sa synthèse est de « tirer parti de l'environnement direct en développant les moyens de transport actifs (marche et vélo) facilités par des plans de déplacement spécifiques depuis le domicile vers l'ensemble des lieux de vie : l'école, l'université ou l'entreprise, et intégrés dans les plans de déplacements urbains »

L'Organisation Mondiale pour la Santé (OMS) a publié également un outil d'évaluation dénommé HEAT [Kahlmeier 2013]. Ce logiciel estime les bénéfices économiques induits par des personnes sédentaires qui se mettent à pratiquer le vélo dans

leur déplacement quotidiens. Les pouvoirs publics peuvent ainsi chiffrer les économies de dépenses de santé induites par la pratique du vélo. Le guide méthodologique de HEAT précise : « ..., il est plus facile d'intégrer un déplacement à pied ou à vélo à un agenda déjà chargé qu'une activité de loisir supplémentaire. »

Le Plan National Vélo utilise HEAT pour analyser la situation en France [Goujon 2012]. La part modale de vélo est faible à 3% mais elle engendre déjà 5,6 milliards d'euros d'économie de dépense de santé. Ses économies pourraient atteindre plus de 15 milliards d'euros avec une part modale du vélo de l'ordre de 10 % à 12 %.

1.1.5 Le renouveau du vélo

La pratique du vélo a baissé dans toute l'Europe au cours du XX^{ième} siècle. Cependant dans les pays du Nord cette tendance s'est inversée au cours des années 80 [Papon 2012]. La part modale du vélo atteint dans les villes des niveaux importants : 27% aux Pays-Bas, 18% au Danemark, 15% en Allemagne.

En France la part modale du vélo reste faible à 3%. Cependant dans certaines villes la pratique du vélo atteint des niveaux importants : 15% à Strasbourg, 8% à Bordeaux, 6% à Grenoble et à Nantes [Goujon 2012].

Ceci est dû en partie à une politique de construction d'aménagements cyclables de qualité. En 2008 l'état Français accompagne ce mouvement en publiant le décret du 30 juillet 2008, dit décret du « code de la rue ». Ce décret instaure notamment :

- la création du principe de prudence,
- la généralisation des double sens cyclable en zone 30,
- la création des zones de rencontre.

Le principe de prudence, précise que « le conducteur doit, à tout moment, adopter un comportement prudent et respectueux envers les autres usagers des voies ouvertes à la circulation. Il doit notamment faire preuve d'une prudence accrue à l'égard des usagers les plus vulnérables. » Ce principe qui semble aller de soi, sert principalement à réduire les incivilités dont sont victimes les piétons et les cyclistes : klaxon, refus de priorité, etc...

La généralisation du double sens cyclable indique que, dans une zone 30, la circulation des vélos se fait par principe dans les deux sens y compris si la rue est à sens unique pour les voitures. Le double sens cyclable facilite la circulation des vélos et renforce la sécurité par une vision réciproque des usagers entre eux.

La zone de rencontre est une solution innovante pour l'aménagement des centres ville. Elle permet la circulation des voitures, des piétons et des cyclistes à une vitesse inférieure à 20km/h. La délimitation entre chaussée et trottoir disparaît. Tous les usagers

circulent au même endroit en cédant la priorité à l'usager le plus vulnérable. On parle de zone de circulation apaisée.



Figure 1-5 : contre sens cyclable (à gauche) et zone de rencontre (à droite)

Début 2014, Frédéric Cuvillier, secrétaire d'Etat en charge des transports présente le Plan d'Actions pour les Mobilités Actives (PAMA). Ce plan comporte 19 mesures qui visent à développer efficacement la pratique de la marche et du vélo en France. Ce plan encourage notamment à renforcer l'inter-modalité entre vélo et transports en commun, permettre aux villes de fixer la limitation de vitesse réglementaire à 30km/h ou bien tester une indemnité kilométrique de 25c€/km pour les travailleurs qui se rendent sur leur lieu de travail à vélo.

La construction d'aménagements cyclables pour être efficace doit s'accompagner d'une valorisation de l'usage du vélo et de mise en place de services dédiés au vélo. En 2005 Lyon et Villeurbanne lancent le premier système de vélos en libre-service français : « Vélo'V ». Ce système fonctionne avec des stations réparties dans la ville dans lesquelles l'usager peut venir retirer et déposer un vélo de ville à 3 vitesses. Les stations mémorisent les heures de retrait et de dépôt de chaque vélo, ce qui permet de réaliser des études statistiques à grande échelle [Maizia 2008].

Le flux journalier moyen est de 60 000km.voyageur. La distance moyenne parcourue est de 2,4km à une vitesse moyenne de 13km/h. La figure 1-6 montre également des pics de trafic aux heures classiques de trajet domicile/travail à 8h, 12h, 14h et 18h. Ceci laisse supposer que l'utilisation du vélo en libre-service se fait bien pour des raisons utilitaires et non de loisir.

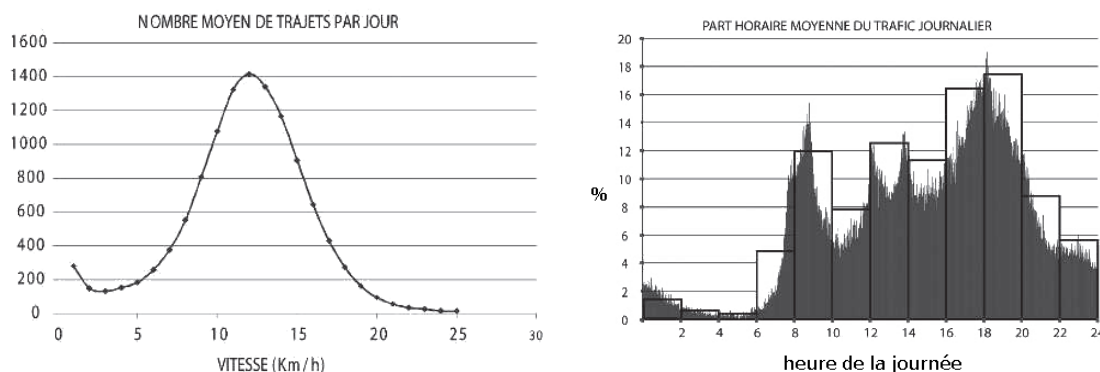


Figure 1-6 : vitesse moyenne et répartition horaire de l'utilisation des vélos en libre service Vélo'V à Lyon / Villeurbanne d'après [Maizia 2008].

Le vélo, considéré dans les années 70 comme rétrograde (§1.1.2), symbolise désormais pour une certaine partie de la population une image de modernité retrouvée. Il apparaît comme un mode de transport écologique, mais qui a contrario des transports en commun n'impose ni horaire, ni point de passage obligé.

Le vélo à pignon fixe aussi appelé « fixie », illustre cette liberté retrouvée. Inventé dans les années 80, en Amérique du nord, le fixie fut utilisé par des sociétés de livraison express qui délivraient des petits paquets urgents dans la ville, quelles que soient les conditions de circulation. Sans dérailleur, ni roue libre, ni freins, le cycliste doit pédaler fort et bloquer ses jambes pour freiner avec la roue arrière. Ce vélo qui s'apparente au vélo de piste est destiné à des pratiquants en bonne forme physique. Les passionnés de fixie prennent plaisir à construire eux même leur vélo en achetant ou en récupérant des pièces sur des vélos anciens. Dans le principe, chaque vélo est unique à l'image de son propriétaire. Les annonceurs publicitaires (figure 1-7) associent le vélo fixie à leur marque afin de véhiculer une image de liberté face aux contraintes de circulation de la ville.



Figure 1-7 : publicité télévisée dans laquelle un groupe de pratiquants de fixie se donne rendez-vous grâce à un smartphone. Les vélos sont fluorescents afin de les rendre bien visibles de nuit.

Un autre type de vélo commence à reconquérir les villes : le vélo à assistance électrique (VAE). A l'opposé du fixie, le VAE intègre de nombreux équipements qui le rendent confortable pour la ville : garde boue, porte bagage, carénage de chaîne, freins puissants, position relevée. L'assistance électrique permet de rouler entre 20 et 25km/h sans transpirer. Il permet d'envisager des déplacements urbains rapides et faciles dans des villes vallonnées ou ventées. Le relief d'une ville est la raison principale qui ralentit le développement du vélo en ville, loin devant, la météo ou le risque de vol [Goujon 2012]. Le VAE constitue donc un potentiel important de transfert modal de la voiture vers le vélo. En 2010, le VAE représentait 10% des ventes de vélos aux Pays Bas contre 1,3% en France mais la croissance de ce marché est extrêmement rapide. En France, les ventes sont passées de 10 000 en 2007 à 38 000 en 2010.

Le VAE concentre des technologies nouvelles : batterie aux lithium, moteur électrique à haut rendement et, pour certains, ordinateur de bord. Les designers s'approprient ce concept afin d'esquisser une image du véhicule du futur. Il est intéressant de noter que les constructeurs automobiles se sentent concernés par cette innovation. Ils se livrent à cet exercice de style et proposent des modèles à l'effigie de leur marque (figure 1-8).



Figure 1-8 : exemple d'étude de design de VAE réalisé par des constructeurs automobiles.

1.2 Le vélo à assistance électrique

1.2.1 Le cadre législatif du VAE

Le vélo nécessite une activité physique du cycliste. Lorsqu'il s'agit de vélo sportif, cette activité peut être recherchée. Dans le cadre de déplacement de la vie de tous les jours, cet effort physique doit rester modéré. Le fait d'arriver transpirant à un rendez-vous professionnel est jugé socialement inacceptable. Il est possible de ne pas transpirer en vélo en utilisant judicieusement son dérailleur. Cependant dans le cas de trajet longs, pentus ou ventés, le cycliste qui voudrait ne pas transpirer est obligé d'utiliser des rapports de réduction importants et ainsi de rouler très lentement. Il est possible d'adjoindre au cycliste une autre motorisation qui l'assiste dans les zones difficiles du parcours. On désigne ce dispositif comme une « assistance », car le vélo ne peut pas rouler sans un effort du cycliste.

Le vélo à assistance électrique (VAE) est défini dans le code de la route par l'article R311-1 : « 6.11. Cycle à pédalage assisté : cycle équipé d'un moteur auxiliaire électrique d'une puissance nominale continue maximale de 0,25 kilowatt, dont l'alimentation est réduite progressivement et finalement interrompue lorsque le véhicule atteint une vitesse de 25 km/h, ou plus tôt si le cycliste arrête de pédaler. »

Le vélo à assistance électrique ne constitue pas une nouvelle catégorie de véhicule qui se situerait entre les vélos et les cyclomoteurs. Le VAE appartient à la classe des vélos, c'est-à-dire qu'il ne nécessite aucun permis, aucune immatriculation. Il n'est pas soumis à l'obligation du port du casque, et il peut circuler sur les pistes cyclables.

La puissance du VAE reste donc modeste comparée à celle du cyclomoteur électrique qui lui peut atteindre les 4kW. La vitesse maximum d'assistance limitée à 25km/h ne signifie pas que le VAE ne peut pas la dépasser. Sur plat un cycliste avec un bon vélo peut atteindre les 30 km/h sans assistance et plus de 50 km/h dans les descentes. La commande de l'assistance se coupe donc à 25 km/h et si le cycliste désire aller plus vite, il peut légalement le faire mais à la force des jambes uniquement. Bien entendu le cycliste doit respecter aussi les limitations de vitesse imposées sur la route qu'il emprunte.

1.2.2 Les différentes architectures de VAE

Le VAE se décompose en deux parties, une partie cycle, très similaire à celle d'un vélo classique et une partie assistance électrique qui comporte :

- une batterie,
- un moteur électrique,
- un contrôleur.

Le moteur électrique peut s'accoupler directement à l'une des roues. Dans ce cas on utilise couramment des moteurs montés dans les moyeux que l'on désigne par « moteur-roue ». Une autre solution plus rare consiste à utiliser un galet qui frotte soit sur le pneu soit sur la jante. On se rapproche alors du fameux «vélo Solex®». Tous ces montages permettent d'envisager d'utiliser le moteur comme frein régénératif dans les descentes [Muetze 2007].

Il est également possible d'insérer le moteur dans la transmission du vélo soit au niveau du pédalier soit au niveau de la chaîne. Ce système permet de bénéficier des rapports de transmission du dérailleur. La vitesse de moteur est synchronisée avec les jambes du cycliste. La puissance mécanique du moteur passe par la chaîne et la roue libre ce qui ne permet pas s'envisager l'utilisation de frein régénératif dans les descentes. La figure 1-9 détaille des exemples d'architectures de VAE.

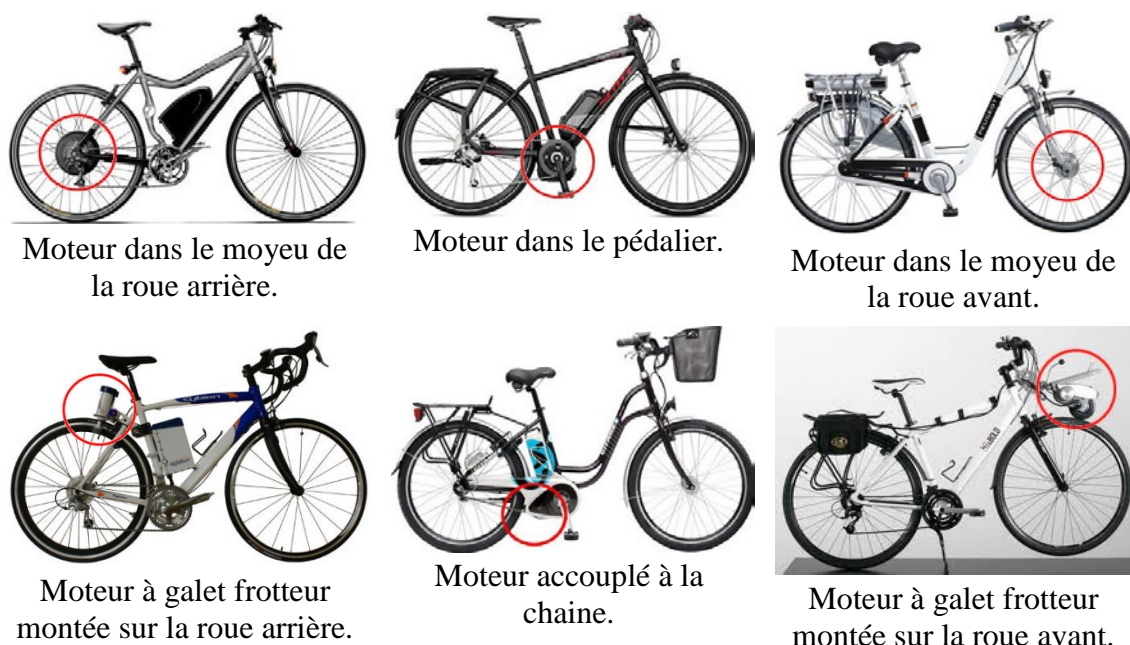


Figure 1-9 : différentes architectures de VAE, le moteur est désigné par une cercle rouge.

L'énergie embarquée sur le VAE est stockée dans une batterie intégrée au cadre ou fixée au porte bagage. La quantité d'énergie stockée peut varier de 200Wh à 500Wh selon les modèles [Timmermans 2009]. La technologie des batteries au plomb est progressivement remplacée par des bases lithium afin d'alléger la masse embarquée. La recharge de la batterie se fait à partir d'un chargeur qui se branche sur une prise de courant. La recharge de la batterie par un freinage régénératif permet d'étendre l'autonomie du vélo mais ne peut pas à elle seule recharger entièrement la batterie.

1.2.3 Commande d'un VAE

Le contrôleur électronique régule la puissance électrique qui transite de la batterie vers le moteur. Le contrôleur garantit le respect des limitations prescrites dans l'article R311-1 du code de la route. Un capteur détecte le pédalage du cycliste afin d'activer l'assistance uniquement lorsque celui-ci pédale. Un autre capteur mesure la vitesse du vélo afin de couper l'assistance au-delà des 25 km/h. Le contrôleur régule l'alimentation du moteur afin que sa puissance mécanique ne dépasse pas les 250W.

La loi française laisse donc une liberté importante dans la stratégie de contrôle de la puissance d'alimentation du moteur. On trouve majoritairement 3 différentes lois de commande disponibles sur les vélos du commerce [Timmermans 2009] :

- commande tout ou rien, l'assistance se déclenche à son maximum lorsque le pédalage est activé.
- commande proportionnelle à la vitesse de pédalage.
- commande proportionnelle au couple de pédalage.

Certains modèles de VAE utilisant une commande en couple proposent un tableau de bord qui permet de faire varier le gain de l'asservissement. Usuellement ce gain est affiché comme le rapport entre le couple moteur de l'assistance et couple de pédalage. Ce gain est exprimé en pourcent et peut varier de 0% (vélo sans assistance) à 250% (vélo avec une assistance très importante). Le cycliste peut donc moduler l'assistance comme un compromis entre la facilité de pédalage et l'autonomie de la batterie.

1.2.4 Les VAE utilitaires

Le VAE est également envisagé comme un véhicule de transport de charges lourdes ou de passagers en milieu urbain.

Les postiers par exemple réalisent un trajet relativement court avec des arrêts fréquents. Le transport du courrier en vélo dans des villes vallonnées peut se révéler difficile. L'étude [Timmermans 2008] valide le dimensionnement de VAE destinés aux postiers. L'outil proposé permet de dimensionner la batterie en fonction de la charge transportée, du dénivelé et de la distance parcourue. En 2008 la poste française s'est équipée de 7000 VAE pour remplacer les vélos classiques sur les tournées les plus difficiles (figure 1-10).

Dans les centres villes où la circulation des automobiles est contrainte, le vélo-taxi constitue une opportunité de transporter des personnes sur de courtes distances. Ces tricycles à assistance électrique sont conduits par un chauffeur qui pédale à l'avant. Deux passagers peuvent prendre place à l'arrière du véhicule. Ils ne pédalent pas et sont

protégés de la pluie par un toit (figure 1-10). Les larges surfaces disponibles permettent à des annonceurs d'y apposer des publicités. Certaines villes touristiques utilisent le vélo-taxi comme un moyen de visiter les lieux d'intérêts en circulant à faible vitesse. Le chauffeur peut alors servir de guide à ses clients.



Figure 1-10 : exemples de VAE utilitaire, VAE de postier en France, vélo-taxi à Toulouse

1.3 Le vélo comme sujet d'étude

Le vélo est un sujet qui passionne les scientifiques, Francis Papon énumère dans ses travaux les différents domaines de recherche qui s'intéressent au vélo : physique, médecine, statistique, économie, sociologie, psychologie, géographie, ingénierie, urbanisme, histoire [Papon 2012]. Nous détaillerons dans cette partie, les informations bibliographiques nécessaires à l'élaboration de la problématique d'amélioration de la commande des VAE.

1.3.1 Le vélo, un objet de recherche médical

Le vélo est un instrument qui a permis aux médecins d'étudier aisément les mécanismes musculaires et cardio/respiratoires. Ceci provient du fait que le pédalage génère une puissance mécanique importante et qu'il est facile de concevoir des protocoles expérimentaux reproductibles en laboratoire. Pour cela on utilise couramment un ergomètre, c'est-à-dire un vélo d'appartement instrumenté dans lequel il est possible de régler le couple résistant ressenti par le cycliste. Il faut distinguer ici, les exercices physiques en deux catégories, le sprint et l'endurance.

Le sprint est un exercice à puissance maximale dont la durée ne dépasse généralement pas 1 à 3 minutes selon le degré d'entraînement de la personne. Le transport de l'oxygène ne se fait pas assez vite pour pouvoir alimenter les muscles [Jeukendrup 2000]. On parle donc d'un effort anaérobie car il a lieu en l'absence d'oxygène. Une fois les réserves énergétiques anaérobiques épuisées, la personne se voit contrainte de réduire son effort sous l'effet de la fatigue pour récupérer. Les exercices anaérobiques permettent de déterminer la puissance maximale développée par un cycliste [Vandewalle 1985]. Ce paramètre est caractéristique d'un individu, il dépend de sa condition physique de son sexe et de sa corpulence. Si l'on répète des exercices à puissance maximale avec un faible temps de récupération, on constate une diminution progressive de la puissance maximale anaérobie développée [Buttelli 1996]. Ceci met en évidence la fatigue musculaire.

A contrario du sprint l'exercice d'endurance se fait à une puissance modérée. L'oxygène inspiré a le temps d'être métabolisé par les muscles pour produire de la puissance mécanique, on parle alors de métabolisme aérobie. Il est possible grâce à un gazomètre apposé sur le visage du cycliste, de mesurer la quantité d'oxygène consommée \dot{V}_{O_2} . Cette quantité est usuellement exprimée en litre par minute. En utilisant les relations chimiques du cycle aérobie, la puissance chimique consommée par le métabolisme est proportionnelle à la consommation d'oxygène [Jeukendrup 2000].

Connaissant les puissances entrantes et sortantes, on établit le rendement du métabolisme aérobie. Le rendement métabolique peut donc être étudié en fonction de la puissance mécanique demandée et de la vitesse de pédalage adoptée. L'étude de John J. Seabury fait référence dans le domaine [Seabury 1977]. Elle met en évidence l'existence d'une cadence de pédalage optimale qui assure le meilleur rendement aérobie. Cette fréquence optimale de pédalage augmente progressivement avec la puissance mécanique demandée (40 tr/min à 0W, 60 tr/min à 200W). Ces travaux ont été confortés par des études plus récentes [Belli 2002] avec une cadence qui maximise le rendement métabolique à 60tr/min à 150W.

1.3.2 La recherche de la performance cycliste

Le vélo, dès son invention, a passionné les foules en tant que discipline sportive. Les enjeux médiatiques et financiers de ce sport, ont poussé les coureurs, les entraîneurs et les équipementiers à augmenter la performance sportive. Le dopage est l'un des phénomènes qui a été le plus mis en avant par les médias, cependant le cyclisme sportif a bénéficié d'avancées toutes aussi efficaces mais autorisées.

Le matériel tout d'abord a fait de grands progrès. Les cadres en matériaux composites sont optimisés pour être plus légers tout en assurant une rigidité ou une souplesse qui sied au coureur. Les pédales automatiques et les chaussures actuelles permettent de régulariser l'effort fourni tout au long du tour de pédalier [Capmal 1997]. La performance cycliste est fortement liée à l'aérodynamique du cycliste et de son vélo. Sur plat, à 50km/h, la puissance aérodynamique représente 90% des pertes mécaniques. Il est possible d'optimiser l'aérodynamique du cycliste en travaillant sur sa posture en soufflerie ou avec des techniques photographiques [Debraux 2011]. Les pneus ont également été optimisés pour assurer une adhérence importante tout en minimisant les pertes énergétiques dues à la résistance au roulement [Lafford 2000].

En ce qui concerne l'entraînement et la compétition, le choix d'une cadence de pédalage optimale entraîne une controverse dans la littérature. Il est clairement démontrée que la vitesse de pédalage qui maximise le rendement métabolique se situe vers 60 tr/min (§1.3.1), cependant lorsque l'on observe des cyclistes professionnels ceux-ci adoptent naturellement en compétition des cadences de pédalages bien plus élevées (85tr/min à 95tr/min). Le choix d'une cadence de pédalage résulte d'un compromis plus large que la simple économie d'énergie. L'étude [Abiss 2009] indique que les cadences de pédalages élevées augmentent la puissance musculaire développée et augmentent la résistance à la fatigue neuromusculaire. Le cycliste en compétition doit fournir une puissance importante

qui doit durer tout au long de l'épreuve, il adopte donc une cadence qui maximise la performance dans son ensemble et ne cherche pas uniquement à économiser ses forces.

1.3.3 Le VAE étudié comme sujet d'Automatique

La loi de contrôle du moteur d'un VAE du commerce peut être aisément modifiée sans changer son architecture générale, cadre, moteur, batterie. Ce système a donc fait l'objet d'études d'Automatique qui visent à améliorer ses performances. L'intérêt du problème se situe notamment dans l'interaction homme machine. La modélisation du comportement de l'humain sur le vélo et la notion de confort sont questionnés dans les études ci-dessous.

Un état de l'art des VAE a été réalisé en 2005 [Muetze 2007]. A cette époque, le marché du VAE est déjà bien développé en Chine et au Japon, en revanche, il est balbutiant aux USA et en Europe. Les vélos électriques ne sont pas régents de la même façon selon leur pays de vente. L'article distingue les vélos électriques lourds qui peuvent rouler jusqu'à 45km/h avec 750W de puissance et les vélos à assistance électrique qui eux développent des puissances plus modestes 250W jusqu'à 25km/h. L'étude utilise un vélo à assistance électrique instrumenté pour lister les pistes d'amélioration du dispositif. Dans un premier temps, un plan d'expérience mené sur les frottements permet de classer leur importance relative. Le poids du cycliste et la pente apparaissent comme les facteurs les plus importants. Une seconde expérience vise à mesurer le comportement d'un cycliste pédalant sur un VAE. Quatre cyclistes effectuent un parcours urbain de 16 à 26 minutes. Les résultats montrent une grande dispersion des résultats avec puissances moyennes produites par le cycliste variant de 35,6W à 179W et des vitesses moyennes sur le parcours de 8,7km/h à 20,9km/h.

L'étude de [Fan 2010] constate que les commandes de VAE proportionnelles à la puissance du cycliste peuvent se révéler insuffisantes dans les montées. L'article détaille la modélisation électromécanique du VAE. Le frottement aérodynamique est négligé devant l'effort de la gravité. Les paramètres du moteur à courant continu sont identifiés par une réponse fréquentielle à une tension d'entrée en bruit blanc. La résistance au roulement et la gravité sont considérées comme une perturbation inconnue a priori. Un observateur robuste estime cette perturbation afin d'annuler le couple résultant induit par celle-ci. Le cycliste ressent donc un effort résistant faible car le couple de la résistance au roulement et de la gravité sont compensés par le moteur électrique.

Le VAE est envisagé avec une approche inédite dans l'article [Spagnol 2012]. Le VAE décrit est un modèle qui ne se recharge pas sur une prise secteur. La batterie est uniquement chargée par des phases de frein régénératif. Le moteur électrique assiste le cycliste dans les phases d'accélération et en montée. Le moteur recharge la batterie sur plat, en descente et au freinage. La consommation d'énergie du cycliste est étudiée par un gazomètre portable embarqué sur le vélo. Le protocole d'essai se fait sur une piste de 400m. Le cycliste réalise 11 fois une séquence qui comporte : un démarrage, un pédalage à 22km/h sur 100m, une phase de freinage et une pause de 10 secondes. Ce protocole est réalisé avec assistance et sans assistance. L'énergie mécanique consommée pour réaliser les deux tests est identique, cependant, la loi de commande proposée permet d'augmenter le rendement physiologique du cycliste en réduisant sa consommation d'oxygène de 30%.

L'étude [Chang 2012] vise à réguler la vitesse de croisière quelles que soient les conditions. Comme le comportement du cycliste est difficile à modéliser, il est ici considéré comme une perturbation du système au même titre que le vent, ou la pente. Un observateur estime cette perturbation afin de la compenser par le couple moteur. La simulation présentée pour valider le contrôleur propose un modèle de comportement du cycliste. Le couple développé par le cycliste en fonction de la vitesse du vélo est décrit par un $\frac{1}{4}$ de cosinus. Le couple est maximum à vitesse nulle et diminue, jusqu'à s'annuler lorsque le vélo atteint la vitesse désirée.

1.4 Problématique de la thèse

La pratique du vélo comme moyen de transport quotidien permet d'effectuer une activité physique modérée. Ceci a pour effet d'améliorer significativement la santé de celui qui le pratique (§ 1.1.4). Cette activité peut s'insérer facilement dans un emploi du temps chargé si elle se substitue à un trajet court en voiture individuelle. Ce report modal de la voiture vers le vélo permet également d'envisager des réductions importantes d'émissions de gaz à effet de serre (§ 1.1.3). La pratique du vélo apparaît donc comme intéressante pour la société mais elle reste faible en France comparativement aux pays d'Europe du Nord.

On peut donc s'interroger sur les leviers qui permettraient d'augmenter significativement la pratique de ce moyen de transport. La sécurité de circulation est la préoccupation principale des personnes qui envisagent de se déplacer en ville à vélo. La construction d'aménagements cyclables permet de répondre en partie à ce problème (§1.1.5). La seconde raison la plus souvent invoquée est le dénivelé et la longueur du trajet domicile travail. Dans ces cas, le vélo à assistance électrique permet à la fois d'augmenter la vitesse moyenne de déplacement et de ne pas ressentir la difficulté des pentes les plus raides. Cependant pour que le VAE se développe il faut que celui-ci réponde au mieux aux attentes des utilisateurs potentiels.

Le confort apporté par l'assistance électrique est immédiatement ressenti par l'utilisateur. En revanche, l'autonomie de la batterie est difficile à appréhender. Cette peur de la panne de batterie peut constituer un frein au développement du VAE. Afin de satisfaire ce compromis entre autonomie et confort, il est possible d'agir sur la loi de commande de l'assistance électrique.

Ce travail de thèse traite donc de l'optimisation du rayon d'action du VAE tout en garantissant le confort du cycliste. La méthodologie s'appuie sur la Commande Optimale du système dynamique constitué du cycliste et de son VAE. Le Chapitre 2 détaille la construction des modèles physiques décrivant le VAE et le comportement du cycliste. Le Chapitre 3 met en œuvre différentes techniques de Commande Optimale qui permettent de résoudre le problème de minimisation d'énergie consommée sous contraintes.

Chapitre 2 : Modélisations

Résumé du Chapitre 2

Ce chapitre présente la construction détaillée des différents modèles utilisés. La planification énergétique du VAE requiert de prendre en compte des phénomènes variés relevant de la Mécanique, de l'Electronique, de l'Automatique et de la Physiologie. On s'appuiera sur une méthodologie multi-physiques en utilisant la puissance comme grandeur permettant de caractériser les échanges entres les composants du système.

Le vélo est modélisé en utilisant les lois de la Mécanique. Chaque source de frottement est calibrée par des tests menés en roulage sur un VAE instrumenté. L'assistance électrique est modélisée par un moteur à courant continu alimenté par une tension variable. Cette tension constituera la commande que l'on cherche à optimiser. La calibration électrique est menée sur un banc d'essai spécialement conçu pour le « moteur roue » du VAE.

La modélisation du comportement humain du cycliste sur le vélo s'appuie dans un premier temps sur une analyse bibliographique qui suggère d'envisager le cycliste comme une source de couple. Les mesures menées sur un panel de cyclistes montrent que le cycliste régule son pédalage grâce au dérailleur à une cadence de pédalage de prédilection appelée FFC (Freely Choosen Cadence). Il en résulte une certaine régularité sur le couple et la puissance produite par le cycliste. Le cycliste cesse également de pédaler à une vitesse qui lui semble suffisante : la vitesse de confort. La présence de l'assistance électrique n'affecte pas la FFC et la vitesse de confort en revanche, elle fait baisser en moyenne de 32% le couple produit par le cycliste.

On propose de modéliser le cycliste comme une source de puissance régulée. Cette puissance s'annule lorsque le cycliste dépasse sa vitesse de confort. Ce modèle est calibré avec les résultats mesurés sur le panel de cyclistes. La confrontation modèle/mesures donne de bons résultats quel que soit le type de comportement du cycliste.

2.1 Introduction

La conception du modèle général du vélo électrique et de son cycliste s'appuie sur la méthodologie du cycle en V. Dans un premier temps les spécifications du modèle sont présentées, à la suite de quoi l'architecture du modèle est détaillée sous forme de composants spécifiques qui communiquent entre eux. Chaque composant est construit puis calibré individuellement par un test unitaire. L'ensemble des composants est par la suite implémenté dans l'architecture générale afin de procéder au test d'intégration. Les performances de la modélisation sont alors comparées aux spécifications dans les tests de validations.

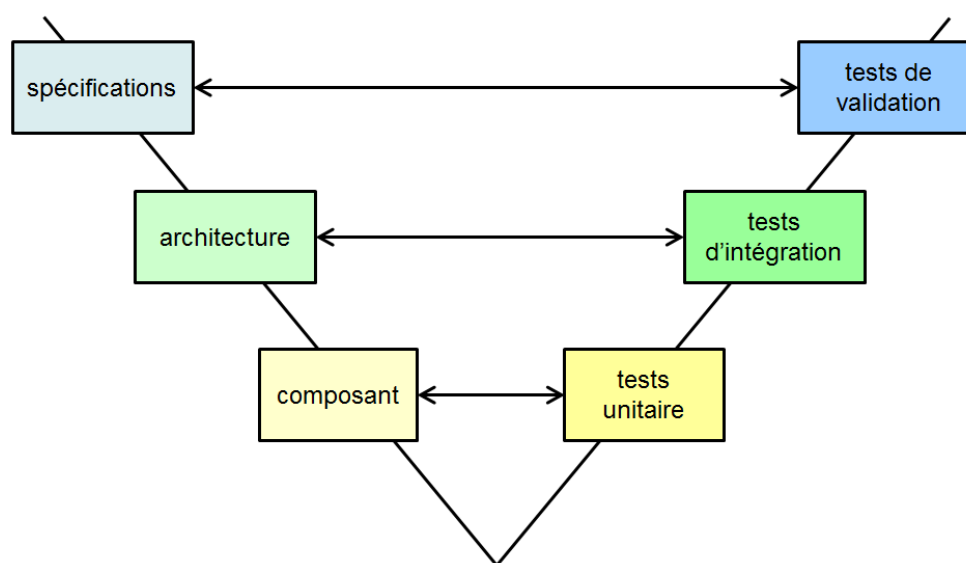


Figure 2-1 : méthodologie du cycle en V appliquée à la construction du modèle de cycliste se déplaçant sur un vélo électrique.

2.1.1 Définition du système et des frontières

Le système étudié est constitué d'un vélo électrique utilisé par un cycliste. Ce système évolue sur une infrastructure routière dans des conditions d'adhérences satisfaisantes. Le système Σ est défini comme l'ensemble des éléments en mouvement par rapport au sol. Il est possible de distinguer 3 composants principaux dans le système :

- une partie mécanique : le vélo,
- une partie électrique : l'assistance électrique,
- une partie humaine : la ou le cycliste.

La frontière entre le système et l'environnement passe par le sol et l'air qui entourent le système. La gravité traverse la frontière en agissant à distance sur l'ensemble des composants du système. Le cycliste est à la fois modélisé comme un réservoir

d'énergie chimique et une source de puissance mécanique. Le dérailleur est un organe qui adapte le couple délivré par le cycliste à la situation rencontrée. Il se situe à l'interface du composant cycliste et du composant vélo. Le dérailleur est commandé par une action du cycliste dont la stratégie reste à identifier.

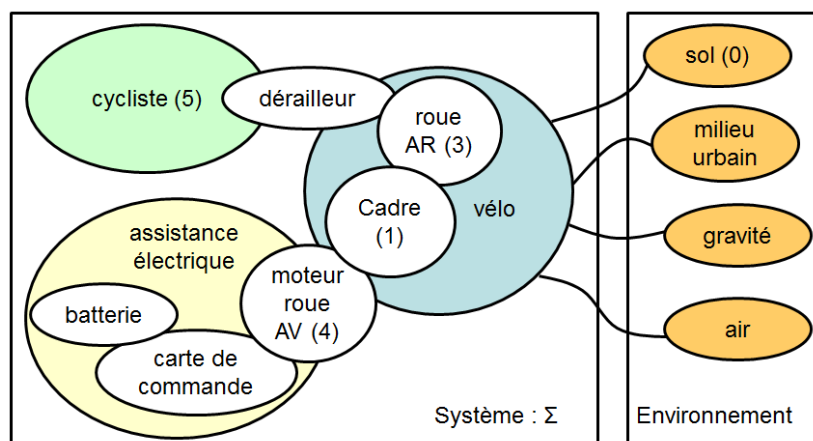


Figure 2-2 : schéma de définition du système vélo électrique et de ses interactions avec l'environnement.

La batterie constitue la source d'énergie artificielle embarquée. L'ensemble carte de commande et moteur électrique transforme l'énergie électrique de la batterie en énergie mécanique.

2.1.2 Spécifications du modèle

Les spécifications du modèle du vélo électrique sont exprimées en utilisant une terminologie de conception mécanique. On s'attachera à respecter les critères des fonctions principales du modèle :

- fournir un outil de compréhension du réel faisant interagir des domaines scientifiques variés : Mécanique, Electronique, Automatique, Physiologie.
- spécifier les contraintes d'utilisation et prédire l'évolution de critères d'optimisation permettant de mener à bien une démarche de Commande Optimale.

Fonction	Critère
fournir un outil de compréhension du réel	données instantanées : vitesse, puissance, rapport de transmission
spécifier les contraintes d'utilisation et prédire l'évolution de critères	données intégrées sur le parcours : vitesse moyenne, énergie consommée

Tableau 2-1 : fonctions réalisées par le modèle.

2.1.3 Principes de construction de l'architecture

L'ensemble de la modélisation repose sur une démarche multi-physiques inspirée de la modélisation par Bond-Graphs [Karnopp 2000]. Le système global est détaillé en différents composants élémentaires. Le modèle interne de chaque composant s'appuie sur des disciplines différentes : la Mécanique, l'Electronique, l'Automatique ou la Physiologie. Les composants peuvent échanger entre eux de la puissance ou de l'information.

Le concept de transfert de puissance permet d'assurer la transversalité entre les différentes disciplines rencontrées. Il est possible alors de connecter au vélo aussi bien un moteur musculaire humain qu'un moteur électrique. L'échange de puissance entre deux composants résulte du produit d'une force généralisée et d'un flux généralisé. Les forces généralisées utilisées dans cette étude sont les actions mécaniques, les tensions électriques, et les potentiels chimiques. Les flux généralisés, quant à eux, sont constitués des mouvements mécaniques, des courants électriques et des flux de molécules et d'ions. Les lois physico-chimiques qui modélisent les échanges de flux et de forces entre composants sont basées sur des bilans d'énergie.

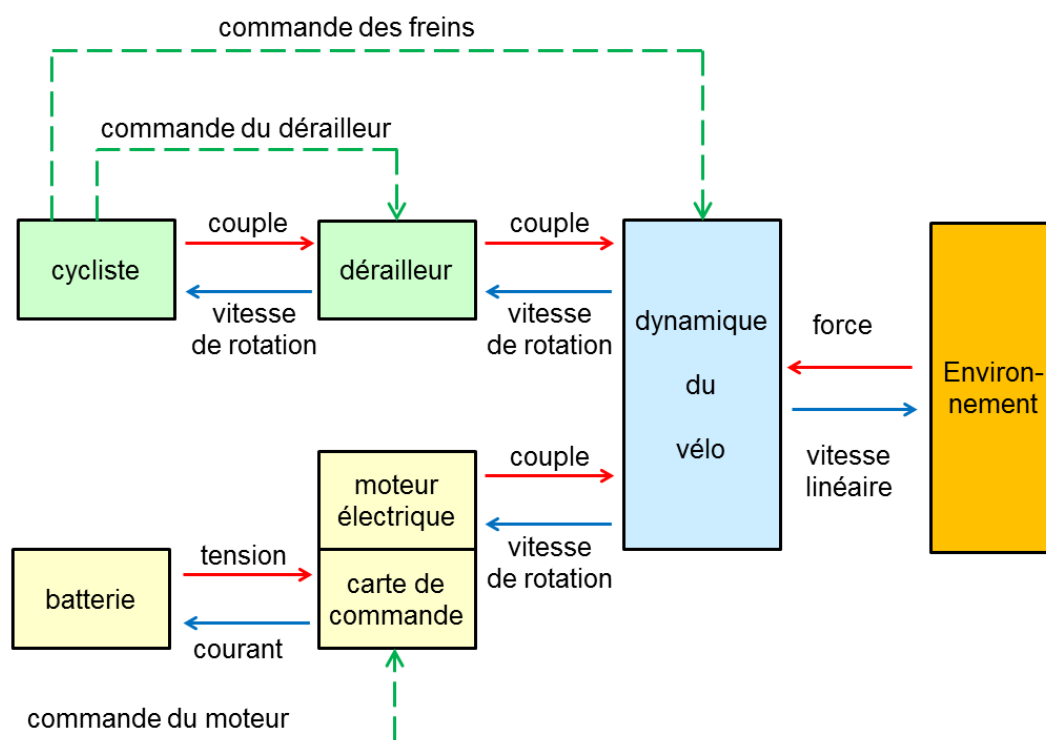


Figure 2-3 : schéma multi-physiques général du système. Les flèches rouges représentent les forces généralisées. Les flèches bleues représentent les flux généralisés. Les flèches vertes représentent les informations.

2.2 Modèle mécanique du vélo

Le système comporte de nombreuses pièces. Les mouvements sont parfois complexes comme par exemple la cinématique des membres du cycliste. L'intérêt de la modélisation se porte davantage sur la transmission de puissance entre les éléments que sur les efforts articulaires. Si on considère les deux roulements sans glissement aux points de contact entre les pneus et la chaussée, la mobilité du système est réduite à un seul degré de liberté. Une démarche de résolution par le théorème de l'énergie cinétique est donc la plus appropriée.

Cette méthodologie de résolution s'appuie sur 4 grandes étapes :

- Calcul de l'énergie cinétique du système ramenée à une seule variable cinématique,
- calcul des puissances extérieures au système,
- calcul des puissances intérieures au système,
- application du théorème de l'énergie cinétique.

2.2.1 Structure du modèle

Les virages du parcours sont négligés car ils ne provoquent aucune perte d'énergie. Le parcours est donc envisagé comme un trajet une ligne droite sur un circuit vallonné (figure 2-4).

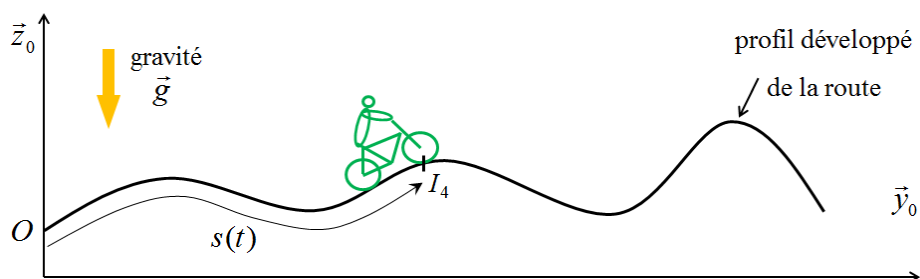


Figure 2-4 : schéma du parcours sur lequel va évoluer le vélo électrique.

L'origine O est choisie au niveau du sol au début du parcours. La direction horizontale vers l'avant est notée \vec{y}_0 et la direction verticale ascendante est notée \vec{z}_0 . Le point de contact I_4 entre la roue avant et le sol est considéré comme le point de référence du vélo qui coïncide avec l'origine O à l'instant initial. L'abscisse curviligne du vélo est définie selon le déplacement du point I_4 par rapport à l'origine O dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le vélo se déplace en deux dimensions dans le repère $R_0 \equiv (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ qui sera considéré

comme un référentiel galiléen. Le repère $R_1 \equiv (G_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ est attaché au cadre (1) (figure 2-5).

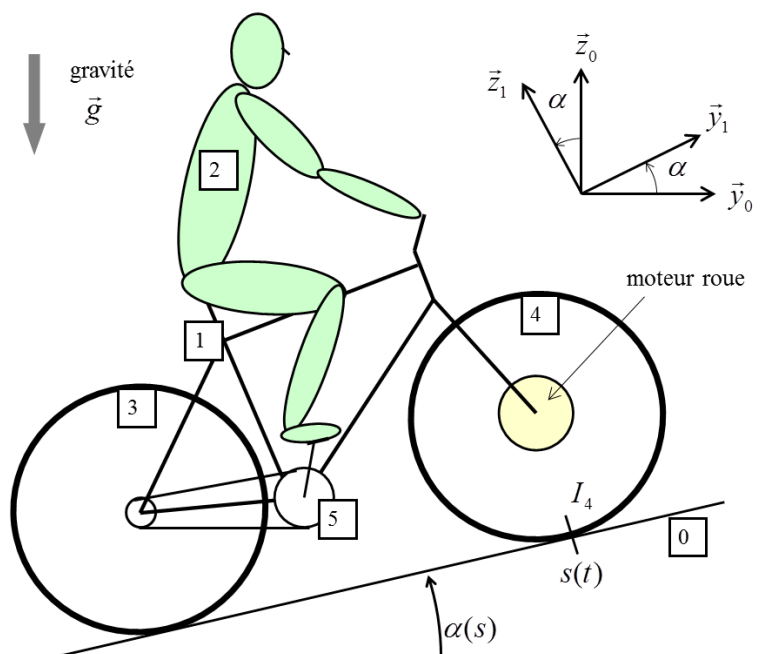


Figure 2-5 : schéma mécanique du vélo et de son cycliste.

Le vélo suit la route et s'oriente donc avec elle selon la pente locale. L'angle entre le repère mobile R_1 et R_0 est noté $\alpha(s)$. La vitesse géométrique du point I_4 dans le repère R_0 sera considérée comme la vitesse de translation de référence $V(t)$. Toutes les vitesses linéaires des autres pièces seront calculées en fonction de celle-ci.

$$V(t) = \vec{V}_{I_4/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{ds}{dt}(t) \quad (2.1)$$

Dans des conditions normales de fonctionnement la roue avant (4) roule sans glisser sur le sol au point I_4 . La vitesse de rotation de la roue (4) $\omega_{4/0}$ est prise comme vitesse de rotation de référence du système $\omega(t)$. On relie alors les deux vitesses de référence $V(t)$ et $\omega(t)$ grâce au rayon extérieur de la roue R_r .

$$\omega(t) = \omega_{4/0} = \frac{V(t)}{R_r} \quad (2.2)$$

2.2.2 Energie cinétique

Le cadre (1) se déplace selon un mouvement plan qui possède une composante de translation rapide et une composante de rotation lente. En effet, la contribution de la rotation à l'énergie cinétique est négligeable devant celle de la translation [Esnault 2009]. Dans la suite, on fera donc l'hypothèse que le cadre du vélo se déplace en translation. Tous les points du cadre se déplacent donc à la même vitesse. La vitesse du centre de gravité $\vec{V}_{G1 \in 1/0}$ est exprimée à partir de la vitesse de référence, ce qui permet de calculer l'énergie cinétique du cadre (1).

$$E_{1/0}(t) = \frac{1}{2} m_1 V^2(t) \quad (2.3)$$

Contrairement au cadre (1), les roues du vélo (3) et (4) tournent à des vitesses importantes. L'énergie cinétique des roues 3 et 4 est calculée sans négliger leur rotation propre. Les roues sont supposées équilibrées, leur centre de gravité coïncide avec les centres des deux liaisons pivot avec le cadre. Les vitesses des centres de gravité des roues seront donc identiques à celle du cadre. L'énergie cinétique des roues s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E_{3/0}(t) &= \frac{1}{2} m_3 V^2(t) + \frac{1}{2} J_3 \omega^2(t) \\ E_{4/0}(t) &= \frac{1}{2} m_4 V^2(t) + \frac{1}{2} J_4 \omega^2(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le cycliste exécute sur le vélo un mouvement de pédalage. Des études posturales étudient la manière dont les membres transmettent des efforts aux pédales [Sim 1989]. L'inertie de rotations des membres est jugée négligeable devant l'énergie cinétique de translation :

$$\begin{aligned} E_{2/0}(t) &= \frac{1}{2} m_2 V^2(t) \\ E_{5/0}(t) &= \frac{1}{2} m_5 V^2(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'énergie cinétique du système complet $\Sigma = \{1,2,3,4,5\}$ se déduit par sommation des différentes énergies cinétiques (2.3), (2.4), (2.5) :

$$E_{\Sigma/0}(t) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) V^2(t) + \frac{1}{2} (J_3 + J_4) \omega^2(t) \quad (2.6)$$

Afin de simplifier les notations, on définit la masse totale du système m et d'inertie équivalente du système J :

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \\ J &= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)R_r^2 + J_3 + J_4 \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant la relation cinématique de roulement sans glissement, on peut exprimer l'énergie cinétique du système complet grâce à une seule variable cinématique :

$$E_{\Sigma/0}(t) = \frac{1}{2} J \omega^2(t) \quad (2.8)$$

2.2.3 Puissance de la gravité

La gravité exerce une puissance mécanique sur le système. Cette puissance se calcule en effectuant sur chaque pièce le produit du torseur de l'action de la gravité par le torseur cinématique. La mise en facteur du terme de vitesse est obtenue en remarquant que les centres de gravité des pièces ont tous la même vitesse.

$$P_{\vec{g} \rightarrow \Sigma/0} = \sum_{i \in \Sigma} \left\{ \begin{matrix} m_i \vec{g} \\ 0 \end{matrix} \right\}^{Gi} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{i/0} \\ \vec{V}_{Gi \in i/0} \end{matrix} \right\}^{Gi} = \sum_{i \in \Sigma} m_i \vec{g} \cdot \vec{V}_{Gi \in i/0} = -mgR_r \omega(t) \sin(\alpha) \quad (2.9)$$

Il est alors nécessaire de réaliser une mesure de pente pour connaître a priori celle-ci tout au long du parcours. Des outils tels que le GPS, le logiciel Google Earth© ou un théodolite permettent de mesurer l'altitude. La méthode employée ici pour calculer la pente consiste dans un premier temps à un mesurage de l'altitude $h(s_k)$ tout au long du parcours avec un certain échantillonnage $\{s_k\}$. Ce relevé échantillonné est ensuite interpolé puis différentié pour estimer la pente définie à chaque point d'abscisse s .

$$\sin(\alpha) = \frac{dh}{ds} \quad (2.10)$$

2.2.4 Modélisation du contact pneu chaussée

La modélisation énergétique utilisée nécessite de prendre en compte les pertes induites au contact pneu/chaussée. Le pneu se déforme et la résultante des efforts de la chaussée (0) sur le pneu (4) se décale vers l'avant (figure 2-6). L'effort pneu/chaussée ne passe pas par le point de roulement sans glissement I_4 mais par un nouveau point appelé B.

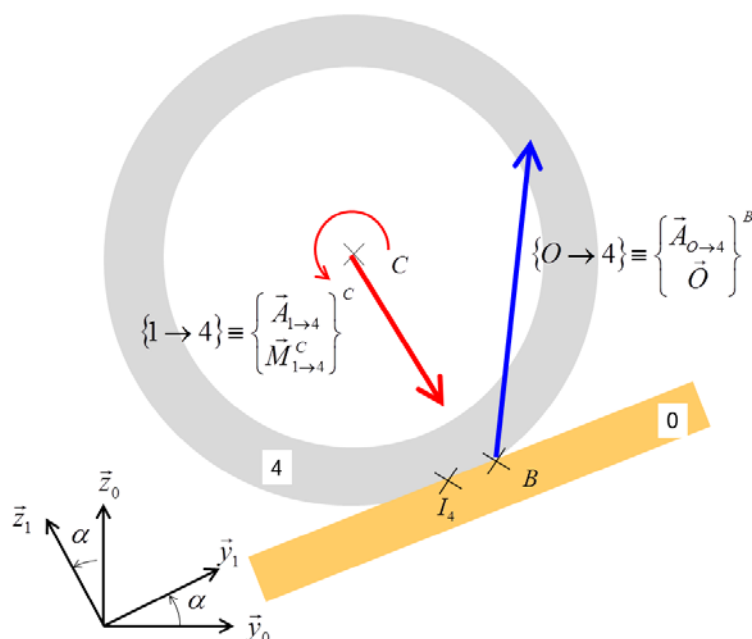


Figure 2-6 : schéma des efforts agissant sur la roue

La puissance perdue au contact pneu chaussée se calcule en réalisant le produit du torseur des actions mécaniques du sol (0) vers le pneu (4) avec le torseur cinématique du mouvement du pneu (4) par rapport au sol (0). Il est commode de réduire les torseurs au point B pour réaliser ce calcul :

$$P_{0 \rightarrow 4/0} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{A}_{0 \rightarrow 4} \\ \bar{0} \end{array} \right\}^B \otimes \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Omega}_{4/0} \\ \bar{V}_{B \in 4/0} \end{array} \right\}^B = \bar{A}_{0 \rightarrow 4} \cdot \bar{V}_{B \in 4/0} = \bar{A}_{0 \rightarrow 4} \cdot \omega(t) I_4 B \bar{z}_1 \quad (2.11)$$

La puissance perdue au pneu fait apparaître un terme de longueur $I_4 B$. Il faut noter que cette expression n'est valable qu'en marche avant, car si le sens de rotation de la roue change, la position du point B passe à l'arrière du pneu. Il faudrait donc en toute rigueur introduire une fonction signe sur le terme $\omega(t)$. Nous considérerons que le vélo ne reculera jamais dans notre étude pour ne pas alourdir la formulation.

La longueur I_4B dépend du type de pneu et de sa pression de gonflage. Ce coefficient est usuellement appelé coefficient de roulement. Les fabricants de pneus utilisent un coefficient adimensionnel noté C_r :

$$C_r = \frac{I_4B}{R_r} \quad (2.12)$$

Ce coefficient sera identique pour la roue arrière 3, on en déduit la puissance du sol sur la roue 3 :

$$P_{0 \rightarrow 3/0} = \vec{A}_{0 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 R_r C_r \omega(t) \quad (2.13)$$

Les termes de projection selon la normale au sol \vec{z}_1 des efforts du sol sur les pneus restent quant à eux à expliciter. Pour cela on isole le système complet Σ en lui appliquant le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur la normale au sol \vec{z}_1 on obtient :

$$m \frac{d}{dt} \vec{V}_{G\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{z}_1 = \vec{A}_{0 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_1 + \vec{A}_{1 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_1 + m \vec{g} \cdot \vec{z}_1. \quad (2.14)$$

La projection de l'accélération selon la normale au sol est nulle car le vélo ne décolle pas du sol. On peut donc utiliser cette expression dans le calcul de puissance de perte aux pneus.

$$P_{0 \rightarrow 3/0} + P_{0 \rightarrow 4/0} = (\vec{A}_{0 \rightarrow 3} + \vec{A}_{0 \rightarrow 4}) \cdot \vec{z}_1 R_r C_r \omega(t) = -mg R_r C_r \cos(\alpha) \omega(t) \quad (2.15)$$

2.2.5 Puissance aérodynamique

Les frottements aérodynamiques constituent une perte importante de puissance sur le système. Afin de les modéliser, il faut dans un premier temps vérifier le type de régime d'écoulement grâce au nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{LV}{\nu} \quad (2.16)$$

La longueur L représente la plus petite dimension transverse à l'écoulement. Dans le cas d'un vélo et de son cycliste il est possible de mesurer l'ordre de grandeur de cette

dimension : $L = 0.6m$. La constante $\nu = 1,57.10^{-5} m^2.s^{-1}$ représente la viscosité cinématique de l'air prise sans des conditions de température standard à 20°C. La vitesse du vélo est variable, faisant varier le nombre de Reynolds par la même occasion. Afin de statuer sur le type d'écoulement il est possible d'estimer la vitesse minimum d'un vélo $V_{\min} = 1m.s^{-1}$. Avec ces estimations on trouve un nombre de Reynolds de l'ordre de $R_e \approx 3.10^4$. Or la limite entre le régime laminaire et le régime turbulente se trouve autour de $R_e \approx 1.10^3$. Donc l'écoulement autour du vélo sera turbulent, quelle que soit sa vitesse. On peut alors exprimer la puissance perdue par la traînée aérodynamique en régime turbulent :

$$P_{a \rightarrow \Sigma / 0} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \|\vec{V}_{1/0} - \vec{V}_{W/0}\| \left((\vec{V}_{1/0} - \vec{V}_{W/0}) \cdot \vec{V}_{1/0} \right) \quad (2.17)$$

Où $\rho \approx 1.2kg.m^{-3}$ représente la masse volumique de l'air, S la surface frontale perpendiculaire à l'écoulement, C_x le coefficient de forme qui dépend de la posture du cycliste et $\vec{V}_{W/0}$ la vitesse du vent par rapport au sol. La prise en compte du vent est difficile car il faudrait mesurer avec précision son intensité et sa direction tout au long du parcours. De plus, en toute rigueur, une variation de l'angle d'incidence du vent induit une variation du coefficient de forme C_x . La vitesse du vent sera donc considérée nulle dans les modèles et les simulations. On supposera comme dans le paragraphe §2.2.4 que le vélo ne recule pas. La puissance aérodynamique s'écrit alors :

$$P_{a \rightarrow \Sigma / 0} = -\frac{1}{2} \rho S C_x V^3(t) = -\frac{1}{2} \rho S C_x R_r^3 \omega^3(t) \quad (2.18)$$

2.2.6 Puissances internes au système

L'inventaire des puissances extérieures au système étant complet, il s'agit maintenant de calculer l'ensemble des puissances internes au système $\Sigma = \{1,2,3,4,5\}$, également appelées puissances des inter-efforts. On compte deux sources de puissances : le cycliste et le moteur électrique. Le reste sera modélisé soit comme des pertes de puissances dues aux frottements soit comme des liaisons parfaites qui ne dissipent pas de puissance.

Le moteur roue est constitué de deux parties en rotation l'une par rapport à l'autre. Le stator bobiné est solidaire du cadre (1). Le rotor à aimants permanents est solidaire de la roue avant (4). On définit le couple moteur comme le couple agissant du stator (1) vers

le rotor (4) $T_m(t) = \vec{M}_{1 \rightarrow 4}^{G4} \cdot \vec{x}_1$. La puissance mécanique du moteur $P_m(t)$ s'identifie à la puissance des inter-efforts entre (1) et (4) :

$$P_m(t) = P_{4 \leftrightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1 \rightarrow 4} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 4}^{G4} \end{array} \right\}^{G4} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}^{G4} = T_m(t) \omega(t) \quad (2.19)$$

Le cycliste (2) produit de la puissance mécanique humaine $P_c(t)$. Il transmet cette puissance au pédalier (5). Le cycliste est donc modélisé comme un « moteur humain équivalent ». Le cycliste (2) est encastré avec le cadre (1). Le cycliste (2) correspond donc au « stator du moteur humain » tandis que le pédalier jouera le rôle de « rotor du moteur humain ». On définit le couple de pédalage du cycliste (2) vers le pédalier (5) $T_c(t) = \vec{M}_{2 \rightarrow 5}^{G5} \cdot \vec{x}_1$ ainsi que la vitesse de rotation du pédalier par rapport au cycliste $\omega_c(t) = \vec{\Omega}_{5/2} \cdot \vec{x}_1$ appelée par la suite vitesse de pédalage. Il est possible alors de calculer la puissance des inter-efforts entre le cycliste et le pédalier :

$$P_c(t) = P_{5 \leftrightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 5}^{G4} \end{array} \right\}^{G5} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{5/2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}^{G5} = \vec{M}_{2 \rightarrow 5}^{G5} \cdot \vec{\Omega}_{5/2} = T_c(t) \omega_c(t) \quad (2.20)$$

Cette puissance n'est pas exprimée en fonction de la variable cinématique de référence $\omega(t)$, il faut donc introduire le rapport de transmission de la chaîne $k(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_c(t)}$ pour obtenir une expression de la puissance du cycliste en fonction de variable cinématique de référence :

$$P_{5 \leftrightarrow 2} = \frac{1}{k(t)} T_c(t) \omega(t) \quad (2.21)$$

Le pédalier (5) échange de la puissance avec la roue arrière (3). Cette puissance transite par la chaîne et le dérailleur. Les interactions dans une transmission par chaîne sont complexes mais il est possible de modéliser cette perte de manière macroscopique par l'introduction d'un rendement de chaîne constant : η_t [Martin 1998]. La puissance des inter-efforts entre le pédalier (5) et la roue (3) s'écrit alors :

$$P_{5 \leftrightarrow 3} = -\frac{(1-\eta_t)}{k(t)} T_c(t) \omega(t) \quad (2.22)$$

Le reste des interactions du système est constitué de deux liaisons pivot (3/1) et (5/1) et d'une liaison encastrement (2/1). Toutes ces liaisons sont supposées parfaites et par conséquent les puissances des inter-efforts qui en découlent sont nulles.

2.2.7 Loi du mouvement

Le théorème de l'énergie cinétique est appliqué au système $\Sigma = \{1,2,3,4,5\}$ dans mouvement par rapport au référentiel Galiléen R_0 . La dérivée de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des puissances extérieures et intérieures.

$$\frac{d}{dt} E_{\Sigma/0} = \sum_{i \in \Sigma} P_{ext \rightarrow i/0} + \sum_{i < j \in \Sigma} P_{i \leftrightarrow j} \quad (2.23)$$

En substituant dans (2.23) les expressions des puissances (2.9), (2.15), (2.18), (2.21) et (2.22) il vient :

$$J \frac{d\omega}{dt}(t) = T_m(t) + \frac{\eta_t}{k(t)} T_c(t) - mgR_r [\sin(\alpha) + C_r \cos(\alpha)] - \frac{1}{2} \rho S C_x R_r^3 \omega^2(t) \quad (2.24)$$

Le terme de motorisation électrique T_m est détaillé dans le paragraphe §2.4. Le comportement du cycliste qui permet de connaître le couple humain T_c et le rapport de transmission choisi k est modélisé dans le paragraphe §2.6.

2.3 Calibration mécanique

2.3.1 Dispositif expérimental

Afin de calibrer les différents modèles, il est nécessaire d'instrumenter un vélo électrique. Les vélos électriques du commerce, bien que performants, ne sont pas les plus adaptés pour mener à bien une expérimentation. Du fait de leur architecture, les cartes électroniques sont souvent inaccessibles à toute mesure. Le choix s'est donc porté sur un vélo classique de type VTT, sur lequel un kit d'assistance électrique a été monté. Le kit comporte un moteur roue avant, une carte de commande, une batterie, un capteur de pédalage et un capteur de frein.

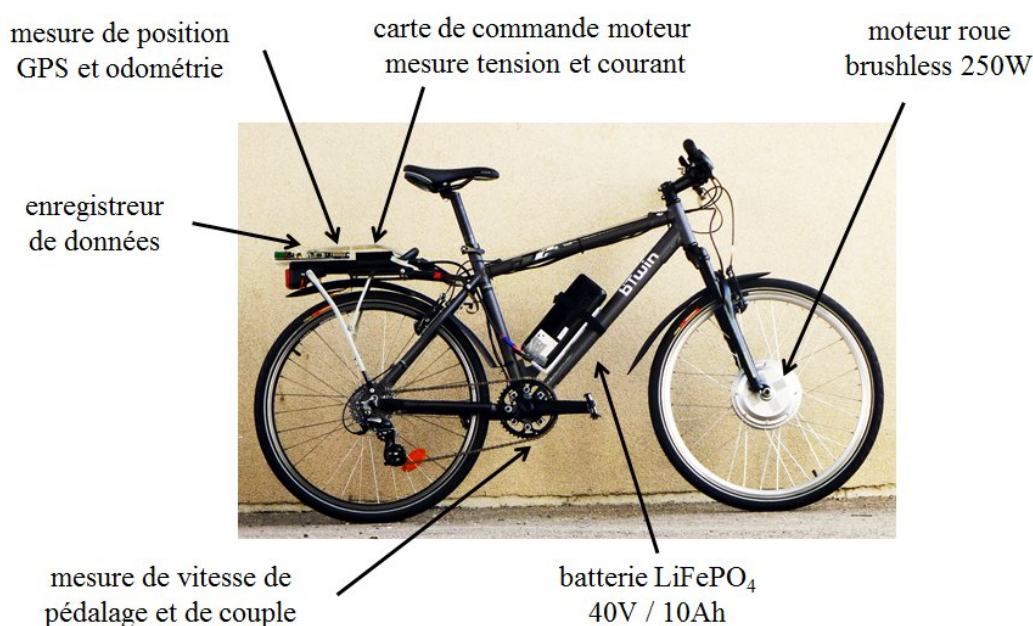


Figure 2-7 : schéma du vélo instrumenté

Ce genre de kit présente l'avantage, de conférer une très grande modularité au système. Le moteur choisi peut supporter 20A sous 40V soit 800W électrique, il délivre alors près de 500 W mécanique. La carte électronique assure le bridage à 250W de la puissance mécanique conformément à la législation.

Afin de mesurer la dynamique du vélo, différents capteurs ont été installés :

- Un GPS renseigne la position avec une précision de quelques mètres. Ce capteur sert principalement à identifier les zones de mesure sur le parcours.
- Un capteur odométrique mesure la rotation de la roue arrière grâce à 4 aimants équirépartis sur les rayons. Ce capteur permet de mesurer l'abscisse curviligne parcourue et par différentiation d'estimer la vitesse.

- Les données sont traitées par un DSP et enregistrées sur un support SD CARD. La fréquence d'échantillonnage du GPS est réglée sur 1Hz par construction. La fréquence d'échantillonnage du capteur œdométrique est réglée à 100Hz ce qui est largement suffisant compte tenu du temps de réponse du système mécanique.

2.3.2 Mesure directe de paramètres

Il est possible de mesurer indépendamment certains paramètres mécaniques du vélo. La masse du vélo et du cycliste m est mesurée par une balance précise à +/- 0.1kg.

Le rayon de la roue R_r est obtenu par une mesure odométrique sur un parcours de référence. Les pneus sont gonflés à une pression de référence de 5 bars. Le cycliste parcourt 50 m en ligne droite. L'odomètre fournit le nombre de tours de roue enregistrés. On en déduit alors le rayon de la roue avec une précision estimée à 1mm.

La mesure d'inertie des roues avant (4) et arrière (3) peut se faire par une méthode de pendule (figure 2-8). Pour cela il faut appuyer la jante de la roue (3) sur une pique (0) de manière à réaliser une liaison pivot de centre O décalé du centre de gravité G_3 d'une longueur OG_3 .

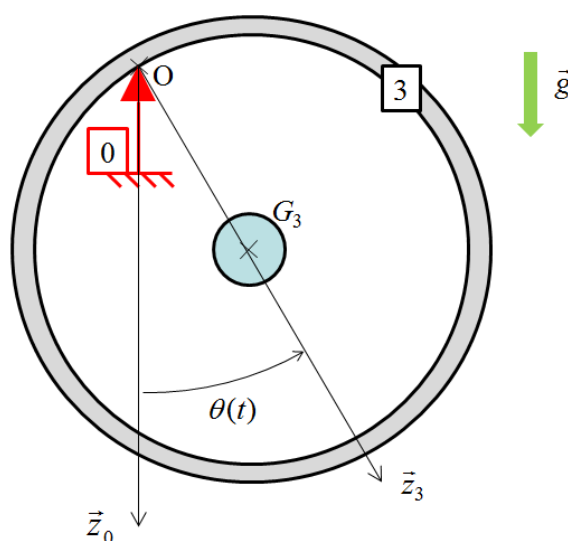


Figure 2-8 : principe de mesure de l'inertie d'une roue par la méthode du pendule.

La jante peut alors osciller sous l'effet de la gravité d'un angle $\theta(t)$ autour du point O . On supposera les frottements négligeables devant le couple de la gravité. En appliquant le Théorème du Moment Dynamique à la roue par rapport au référentiel galiléen, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left[J_3 + m_3(OG_3)^2 \right] \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -m_3gOG_3 \sin(\theta(t)) \quad (2.25)$$

Si on fait l'hypothèse d'oscillations selon des petits angles, cette équation se résout par une solution harmonique dont la fréquence s'exprime :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_3gOG_3}{J_3 + m_3(OG_3)^2}} \quad (2.26)$$

La masse m_3 la longueur OG_3 et la fréquence d'oscillation sont mesurées et il est alors possible d'obtenir une expression explicite de l'inertie de la roue (3) :

$$J_3 = \frac{m_3gOG_3}{(2\pi f)^2} - m_3(OG_3)^2 \quad (2.27)$$

La surface frontale des véhicules est usuellement mesurée par des logiciels de CAO. Dans le cas d'un vélo il est relativement difficile d'obtenir la modélisation 3D du cycliste. La méthode développée par [Debraux 2011] utilise une photographie de face qui une fois traitée permet d'extraire la surface frontale. Une photo du cycliste sur le vélo est prise de face avec une longue focale (>100mm), (figure 2-9). La photo est traitée en niveaux de gris afin de faire apparaître la silhouette par un filtre à seuil. Les points noirs représentent le cycliste et le vélo, les points blancs représentent le fond. On extrait alors la surface frontale par comptage des points noirs de la matrice.



Figure 2-9 : mesure de la surface frontale par technique photographique.

Le rendement des transmissions par chaîne de vélo a été étudié de manière poussée dans [Spicer 2000]. Ce rendement dépend de la géométrie de l'enroulement, de l'état de lubrification et de la puissance transmise. L'étude montre que ce rendement varie entre 88% et 98%. Nous prendrons dans notre étude une valeur moyenne $\eta = 95\%$.

2.3.3 Protocole expérimental de mesure des frottements

Certains paramètres ne peuvent être identifiés par une mesure directe :

- le coefficient de roulement des pneus C_r ,
- le coefficient de forme C_x .

La méthode utilisée va s'appuyer sur des mesures dynamiques du vélo en décélération en roue libre. Les phénomènes de résistance au roulement et aérodynamique voient leur répartition changer en fonction de la vitesse. A faible vitesse, la résistance au roulement est majoritaire tandis qu'à vitesse élevée, c'est le frottement aérodynamique qui devient prépondérant. Le test va se dérouler sur une route plate sans vent. Le cycliste, ne pédale pas et le moteur électrique n'est pas alimenté. L'équation du mouvement (2.24) devient alors :

$$J \frac{d\omega}{dt}(t) = -T_f - mgR_r C_r - \frac{1}{2} \rho S C_x R_r^3 \omega^2(t) \quad (2.28)$$

Le couple de frottement sec du moteur $T_f = 0.7 N.m$ est une constante qui est déterminée dans le paragraphe §2.5.2. On pose alors 2 constantes A et B afin de simplifier les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\rho S C_x R_r^3}{2J} \\ B = \frac{T_f + mgR_r C_r}{J} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

L'accélération est une fonction polynomiale d'ordre 2 de la vitesse de rotation.

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = -A\omega^2(t) - B \quad (2.30)$$

Le logiciel Mapple© fournit une intégrale première de cette équation différentielle dans laquelle t_{CI} est une constante d'intégration à déterminer qui permet de régler la condition initiale de vitesse de l'essai :

$$\omega(t) = -\sqrt{\frac{B}{A}} \tan\left(\sqrt{AB}(t-t_{CI})\right) \quad (2.31)$$

Une recherche sur les paramètres (A, B) qui minimise l'erreur quadratique entre le modèle et les mesures donne les résultats présentés dans la figure (2-10). Chaque mesure est réalisée sur la même piste plate de 300m de long. Comme cette piste est trop courte pour observer une décroissance de vitesse complète, plusieurs mesures sont réalisées avec des vitesses initiales différentes (32rad/s, 20rad/s, 15rad/s). Chaque jeu de données possède donc sa propre constante t_{CI} afin de régler la bonne condition initiale.

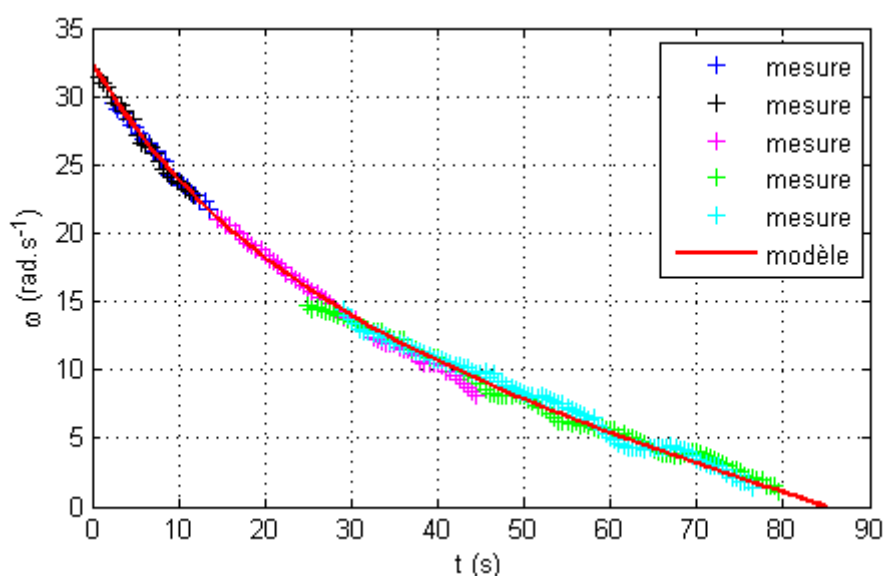


Figure 2-10 : Profil de vitesse de décélération en roue libre, comparaison entre mesures et modèle.

On constate que le modèle de frottement choisi permet de caractériser très fidèlement le comportement du vélo.

On notera que la forme de l'évolution temporelle de la vitesse est différente de celles des systèmes du 1^{ier} ou du 2nd ordre. En particulier, la courbe croise l'ordonnée 0 rad/s avec une pente non nulle. Cette pente est caractéristique de la décélération constante due aux frottements secs qui deviennent prépondérants à vitesse faible.

2.3.4 Résultats

L'ensemble des résultats de calibrage des paramètres du modèle mécanique est synthétisé dans le tableau (2-2).

paramètre	symbole	valeur	précision	méthode de calibration
rayon de la roue	R_r	0,317m	$\pm 1mm$	mesure odométrique sur 50m
masse totale	m	117kg	$\pm 0,1kg$	mesure par balance
surface frontale	S	1,02m ²	$\pm 0,02m^2$	mesure photographique
coefficient de forme	C_x	0,5	$\pm 0,04$	mesure en décélération
coefficient de roulement	C_r	4,8kg.T ⁻¹	$\pm 0,4kg.T^{-1}$	mesure en décélération
inertie de la roue arrière	J_3	0,12kg.m ²	+ 0,01kg.m ² - 0,015kg.m ²	mesure par pendule
inertie de la roue avant	J_4	0,12kg.m ²	+ 0,01kg.m ² - 0,015kg.m ²	mesure par pendule
inertie équivalente du vélo	J	12kg.m ²	$\pm 0,01kg.m^2$	synthèses de mesures d'inertie
rendement de la chaîne	η_t	95%	+3% -8%	donnée bibliographique

Tableau 2-2 : liste des paramètres calibrés du modèle mécanique.

L'inertie équivalente du vélo est principalement due à la masse du cadre et à celle du cycliste. L'inertie des roues ne représente que 2% de l'inertie totale.

2.4 Modélisation de l'assistance électrique

2.4.1 Choix de modélisation pour l'assistance électrique

La batterie employée est un modèle au lithium fer phosphate, en abrégé LiFePO_4 . La modélisation des batteries utilisent classiquement un modèle de Thévenin équivalent [Tremblay 2009]. Ce modèle se caractérise par une tension à vide et une résistance interne qui évoluent avec l'état de charge de la batterie. Dans cette étude, les essais et les simulations seront menés avec un état de charge faiblement variable. La tension à vide et la résistance interne de la batterie seront donc supposées constantes toute au long du trajet.

Le moteur employé est un moteur synchrone sans balai à aimants permanent. Les bobines sont solidaires du stator et câblées en trois phases. Les aimants sont solidaires du rotor et leur champ magnétique traverse les bobines. Pour que l'alimentation soit efficace, le courant parcourant les bobines est à tout instant perpendiculaire au champ magnétique généré par les aimants. Le synchronisme de l'alimentation des phases est assuré par trois capteurs à effets hall qui mesurent la position relative des aimants par rapports aux bobines.

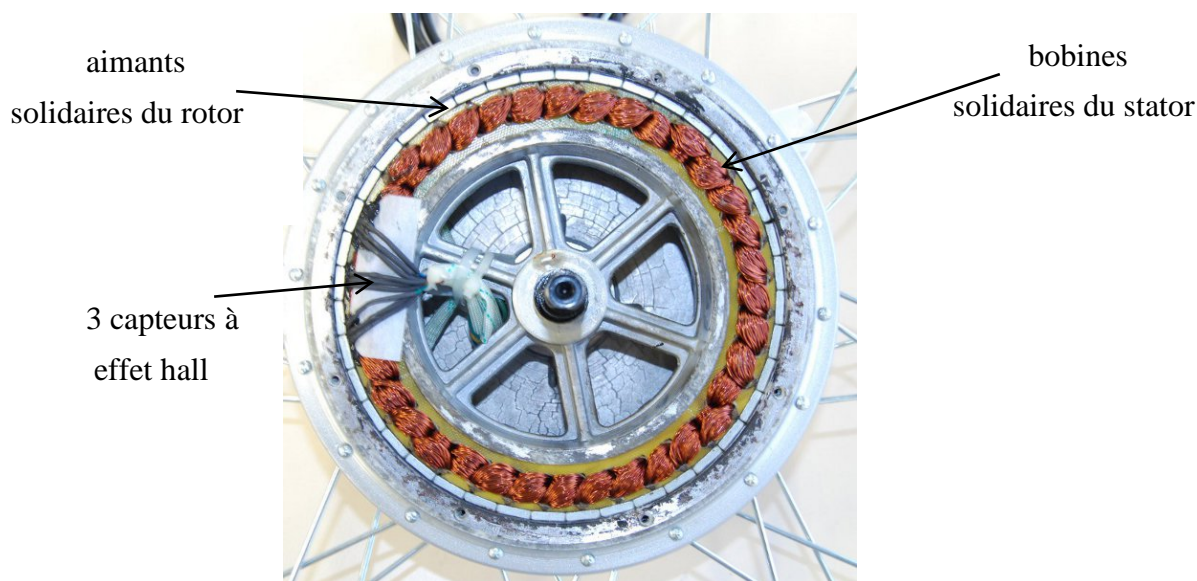


Figure 2-11 : photo du moteur roue avant démonté.

Ce moteur fonctionne donc sur le même principe que les moteurs à courant continu à la différence qu'ici la commutation des phases est gérée de manière électronique. Le moteur roue est modélisé comme un moteur à courant continu à aimants permanents.

La carte de commande fonctionne par hachage à haute fréquence de la tension d'alimentation. Au vu de l'approche énergétique employée, il n'est pas nécessaire de tenir compte des composantes hautes fréquences ($>1\text{kHz}$) de ce signal. Le moteur se comporte

comme un filtre passe bas, on s'intéressera donc à la valeur moyenne de la tension d'alimentation $u(t)$.

2.4.2 Relation électrique

La batterie délivre une tension $u_b(t)$ qui dépend de la tension à vide la batterie $u_b(0)$, du courant qui la traverse $i(t)$ et de la résistance interne de la batterie R_i :

$$u_b(t) = u_b(0) - R_i i(t) \tag{2.32}$$

Bien que cette résistance interne soit faible $R_i \approx 0,1\Omega$, elle n'est pas négligeable. En effet, lors d'un appel de courant important, la tension batterie chute de quelques volts.

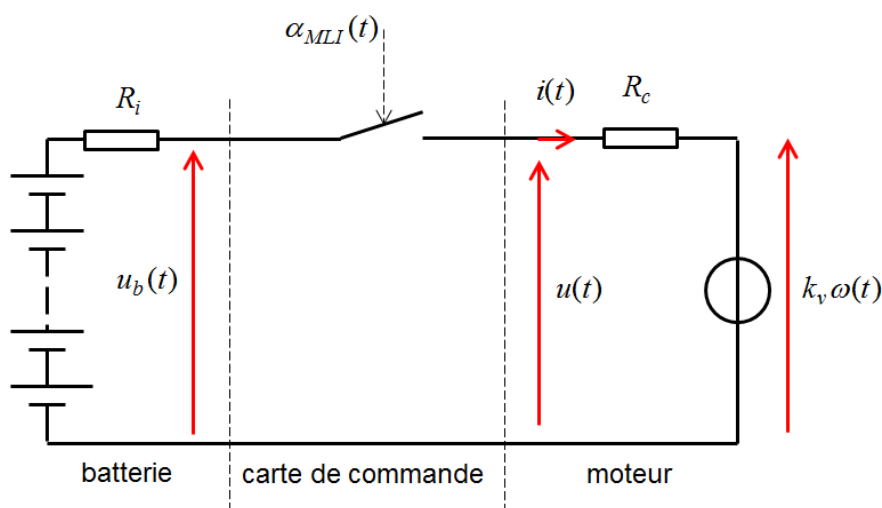


Figure 2-12 : schéma électrique équivalent de l'assistance électrique

La carte de commande fonctionne selon le principe de la modulation de largeur d'impulsion (MLI). Cette technique de hachage permet d'abaisser la tension avec un rendement proche de 100%. La tension d'alimentation du moteur est commandée par le rapport cyclique $\alpha_{MLI}(t)$ dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

$$u(t) = \alpha_{MLI}(t) u_b(t) \tag{2.33}$$

Le schéma électrique du moteur (figure 2-12) comporte une source de tension contre-électromotrice, une résistance série R_c et une inductance série. L'inductance ne dissipe pas d'énergie. Elle n'est donc pas prise en compte dans le modèle. La tension

contre électromotrice est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur $\omega(t)$. Le coefficient de proportionnalité est appelée constante de vitesse k_v . La loi des mailles permet d'écrire la relation entre les tensions du circuit :

$$u(t) = R_c i(t) + k_v \omega(t) \quad (2.34)$$

2.4.3 Relation mécanique

Le couple moteur est dû au moment qu'exercent les forces de Laplace sur les bobinages. Ce couple magnétique est proportionnel au courant d'alimentation $i(t)$. Le coefficient de proportionnalité est appelé constante de couple k_i .

A ce couple magnétique est retranché le couple de frottement interne du moteur. L'expression du frottement est a priori dépendante du type de phénomène mécanique mis en jeu : frottement sec, laminaire ou turbulent. Le couple de frottement interne $T_f(\omega)$ dépend donc de la vitesse de rotation. L'expression exacte de cette fonction sera identifiée dans le paragraphe §2.5 dédié à la calibration électrique.

L'expression complète du couple moteur est obtenue en retranchant le couple de frottement au couple magnétique :

$$T_m(t) = k_i i(t) - T_f(\omega) \quad (2.35)$$

Le couple moteur peut alors s'exprimer en fonction de la commande et de la vitesse de rotation du moteur :

$$T_m(t) = k_i \frac{u(t) - k_v \omega(t)}{R_c} - T_f(\omega) \quad (2.36)$$

2.5 Calibration électrique

2.5.1 Dispositif expérimental

Afin de calibrer l'ensemble carte de commande et moteur électrique, il convient de disposer d'un banc moteur pouvant à la fois générer un couple résistant mais également de mesurer avec précision ce couple. La difficulté réside dans le fait que le moteur roue ne possède pas d'arbre de sortie. Il n'est donc pas possible de l'accoupler à un banc moteur du commerce. Il existe des bancs à rouleaux destinés à entraîner les cyclistes, mais le couple résistant n'est pas mesurable.

Le banc moteur présenté ici a été entièrement conçu et réalisé sur mesure pour cette étude. Son principe de fonctionnement s'appuie sur celui d'un treuil qui remonte verticalement des masses marquées (figure 2-13).

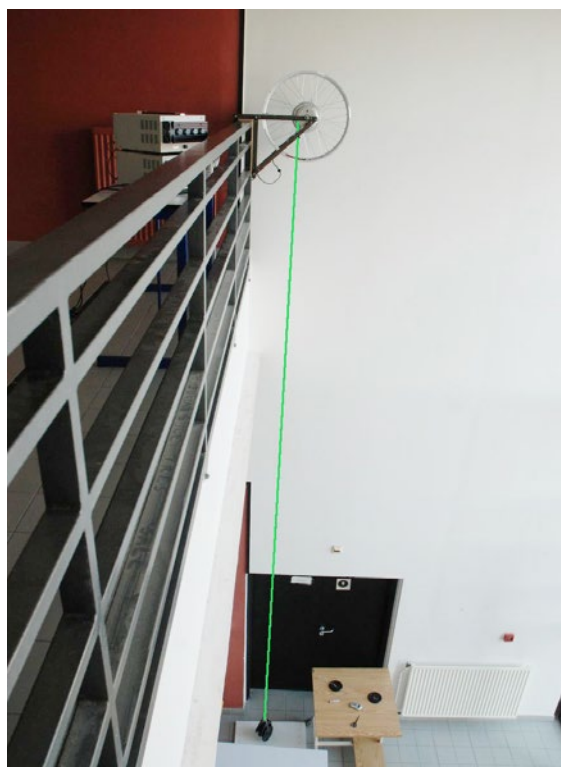


Figure 2-13 : photo du banc d'essai moteur à treuil, la cordelette est surlignée en vert.

En utilisant la gravité terrestre, il est possible simultanément d'exercer un couple constant et d'estimer celui-ci avec précision. Une cordelette s'enroule autour d'une poulie encastree dans le rotor du moteur. Des masses marquées sont accrochées à cette cordelette. Le couple exercé par la cordelette sur la poulie est calculé à partir, du poids des masses marquées et du rayon de la poulie. Le rayon de la poulie a été choisi pour que l'enroulement se fasse dans de bonnes conditions sur une seule couche. En effet, il ne faut

pas de chevauchement dans l'enroulement pour éviter une variation imprévisible du rayon d'enroulement qui engendrerait une variation de couple.

Même si on a été conduit à le négliger (§2.4.1), l'usage d'une batterie, implique une variation de la tension à vide et de la résistance interne en fonction de l'état de charge. Pour faire des tests dans des bonnes conditions expérimentales de reproductibilité, l'alimentation de la carte de commande est donc réalisée par une source de tension stabilisée pouvant débiter au maximum 30A sous 40V.

Les mesures disponibles sont la tension d'alimentation $u(t)$, le courant $i(t)$ et la vitesse de rotation du moteur $\omega(t)$. Le couple de la charge $T_m(t)$ est quant à lui calculé à partir de la masse treuillée et du rayon de la poulie.

2.5.2 Protocole expérimental

La résistance des bobinages est mesurée en premier en alimentant une paire de phases et en mesurant le courant qui les traverse. Les mesures des trois résistances interphases sont moyennées de manière à estimer la résistance équivalente du modèle du moteur à courant continu : $R_c = 0,52\Omega$

La première mesure réalisée sur le banc moteur vise à déterminer la constante de couple k_i . Elle se déroule à tension d'alimentation constante $u = 40V$. Chaque mesure de courant est réalisée en régime permanent. Le nombre de masses remontées est augmenté progressivement pour faire varier le courant de 0,5A à 8A.

La vitesse de rotation évolue rapidement vers son régime établi ω_{\max} , le couple de frottement interne est alors constant. En régime stationnaire, le couple moteur s'exprime donc par une relation affine du courant :

$$T_m(i) = k_i i - T_f(\omega_{\max}) \quad (2.37)$$

On constate une bonne corrélation modèle mesure (figure 2-14). La dispersion provient du fait que le courant n'est pas tout à fait stable lors de la mesure. Une régression linéaire, permet d'identifier la pente de la droite $k_i = 1.42 N.m.A^{-1}$. L'ordonnée à l'origine caractérise le frottement interne à vitesse max $T_f(\omega_{\max})$.

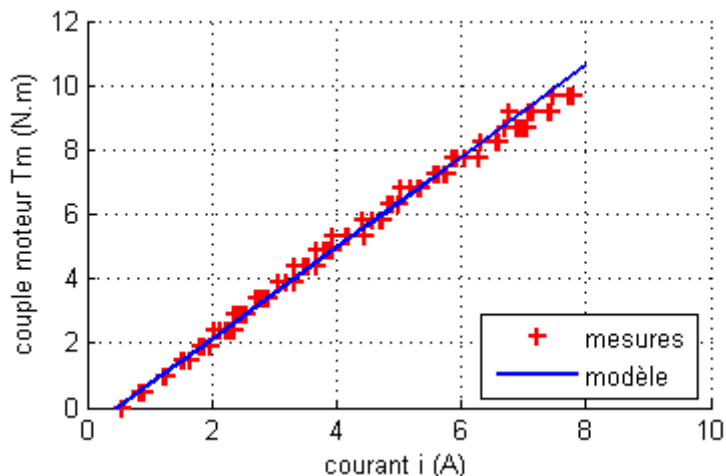


Figure 2-14 : mesure du couple moteur en fonction du courant.

Une seconde mesure réalisée à vide permet d’identifier le coefficient de vitesse k_v (figure 2-15). Le couple résistant est nul, et la tension d’alimentation est progressivement augmentée de 22 V à 40V. On mesure alors la vitesse de rotation et le courant. La tension apparaît comme une fonction affine de la vitesse :

$$u(\omega) = k_v \omega + R_c i \tag{2.38}$$

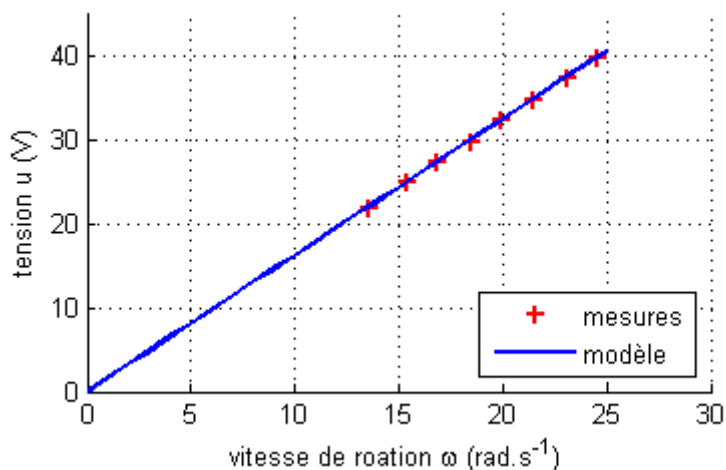


Figure 2-15 : mesure de la tension d’alimentation en fonction de la vitesse de rotation à vide.

Il faut noter que le terme $R_c i$ est très petit (50mV) devant la tension d’alimentation (22V à 40V). Le bruit de mesure est très faible car les mesures de tension et de vitesse

sont plus faciles à réaliser. La régression linéaire donne un coefficient directeur de la droite de : $k_v = 1,62V.rad^{-1}.s$

Cette mesure à vide permet également de faire une estimation du couple de frottement interne du moteur. En appliquant la relation mécanique du moteur (2.35) à vide en régime permanent, on constate que le couple magnétique équilibre exactement le couple de frottement.

$$T_f(\omega) = k_i i \tag{2.39}$$

Il est donc possible de tracer l'évolution du couple de frottement interne en fonction de la vitesse de rotation (figure 2-16).

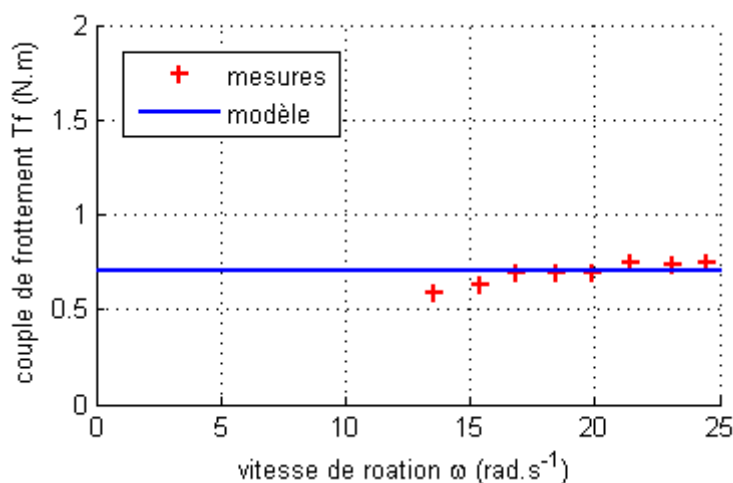


Figure 2-16 : Mesure du couple de frottement en fonction de la vitesse

Les points de mesure montrent une variation de couple faible, de l'ordre de +/- 0,1N.m. Le frottement interne du moteur est donc modélisé par un frottement sec constant $T_f = 0,7N.m$. Ce frottement interne du moteur peut donc être comparé par analogie à la résistance au roulement des pneus : $mgR_r C_r = 1,7N.m$. On constate donc que le frottement dans les pneus est prépondérant mais que le frottement interne du moteur ne peut pas être négligé.

2.5.3 Résultats

Les résultats de calibrations électriques sont synthétisés dans le tableau 2-3 :

paramètre	symbole	valeur	précision	méthode de calibration
tension à vide de la batterie	$u_b(0)$	40V	+0,3V -6V	mesure directe
résistance interne de la batterie	R_i	0,1Ω	+0,05Ω -0Ω	mesure en roulage
résistance du moteur	R_c	0,52Ω	±0,1Ω	mesure directe
constante de couple	k_i	1,42N.A ⁻¹	±0,06N.A ⁻¹	mesure sur banc en charge
constante de vitesse	k_v	1,62V.rad ⁻¹ .s	±0,004V.rad ⁻¹ .s	mesure sur banc à vide
frottement interne	T_f	0.7N.m	+0,1N.m -0,05N.m	mesure sur banc à vide

Tableau 2-3 : liste des paramètres calibrés du modèle électrique.

Le modèle électrique doit permettre de calculer le couple moteur en fonction du courant. Ce point a été vérifié dans la courbe (2.14). Mais le modèle doit également permettre de calculer la puissance électrique consommée :

$$P_e = u \frac{u - k_v \omega}{R_c} \quad (2.40)$$

et la puissance mécanique produite.

$$P_m = k_i \frac{u - k_v \omega}{R_c} - T_f \quad (2.41)$$

On compare ces deux quantités du modèle et les mesures réalisées sur banc avec une charge croissante (figure 2-17).

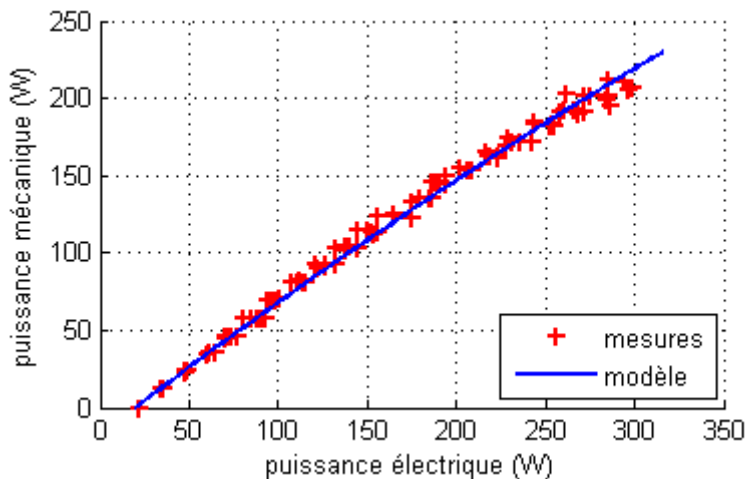


Figure 2-17 : puissance mécanique fournie en fonction de la puissance électrique consommée.

Le modèle calibré permet d’estimer les puissances mises en jeu dans le moteur. Il est possible de calculer l’énergie électrique consommée par le vélo électrique en intégrant la puissance électrique sur un parcours donné.

On utilisera le critère de minimisation de l’énergie consommée pour maximaliser l’autonomie du VAE dans le chapitre 3.

2.6 Modèle de comportement du cycliste

2.6.1 Le modèle de muscle de Hill.

Lorsque l'on cherche à modéliser le comportement mécanique des muscles, la plupart des publications se réfèrent aux travaux d'Archibald Vivian Hill. Celui-ci obtient en 1922 le prix Nobel de physiologie pour ces travaux sur la production chaleur dans les muscles conjointement avec Otto Fritz Meyerhof. Hill est le premier à introduire pour le muscle un modèle mécanique comportant un ressort travaillant dans un milieu visqueux. Ceci implique que la vitesse d'exécution d'un mouvement induit une force antagoniste à la force motrice des muscles. La force résultante d'un muscle décroît donc avec la vitesse d'exécution du mouvement.

En 1935 Fenn met au point des expérimentations complémentaires pour chercher une relation plus précise de la force développée par le muscle en fonction de la vitesse d'exécution du mouvement [Fenn 1935]. Il réalise deux jeux de données : un sur le muscle sartorius de la grenouille et un sur le muscle quadriceps du chat. Les muscles sont disséqués et reliés à des dispositifs mécaniques permettant d'exercer des charges constantes dites isotoniques. Les contractions sont provoquées par des stimuli électriques. Les charges sont progressivement augmentées et les vitesses de réalisation de la contraction sont mesurées (figure 2-18).

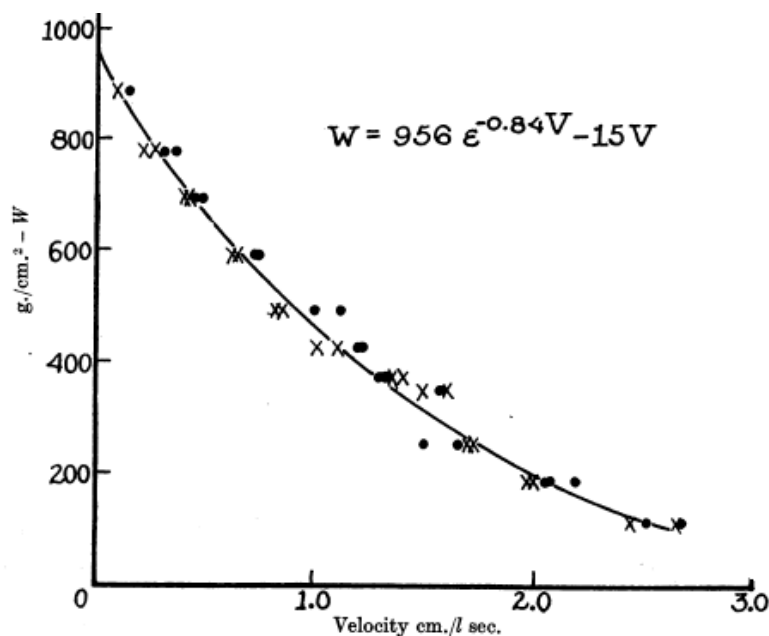


Figure 2-18 : extrait de la publication [Fenn 1935], pression de contraction W d'un quadriceps de chat en fonction de la vitesse V . Comparaison entre 2 mesures (charges croissantes \times et charges décroissantes \bullet) et le modèle exponentiel en trait continu.

Fenn identifie un modèle exponentiel à 3 paramètres (W_0, a_F, k_F) pour décrire la pression développée W (force par unité de surface de muscle) en fonction de la vitesse d'exécution V . Le modèle exponentiel de Fenn s'écrit :

$$W = W_0 e^{-a_F V} - k_F V \quad (2.42)$$

Le paramètre k_F représente le coefficient de frottement visqueux proposé par Hill. Le paramètre a_F , appelé coefficient de perte de force est un terme que Fenn a rajouté pour une meilleure corrélation entre mesures et modèle. Il ne parvient pas à justifier ce terme autrement que par sa validité opérationnelle. La quantité w_0 correspond à la pression maximale isométrique, c'est-à-dire la force maximale développable ramenée à la section du muscle.

En 1938 Hill publie un article [Hill 1938] qui fait toujours référence dans le domaine. Il améliore encore la méthode de mesure de contraction isotonique des muscles en y ajoutant une mesure de température de surface. Grâce à ce dispositif et à un modèle de diffusion de la chaleur il estime la production de chaleur du muscle. En parallèle, il réalise des mesures mécaniques de vitesse et de force avec un protocole similaire à Fenn (figure 2-19).

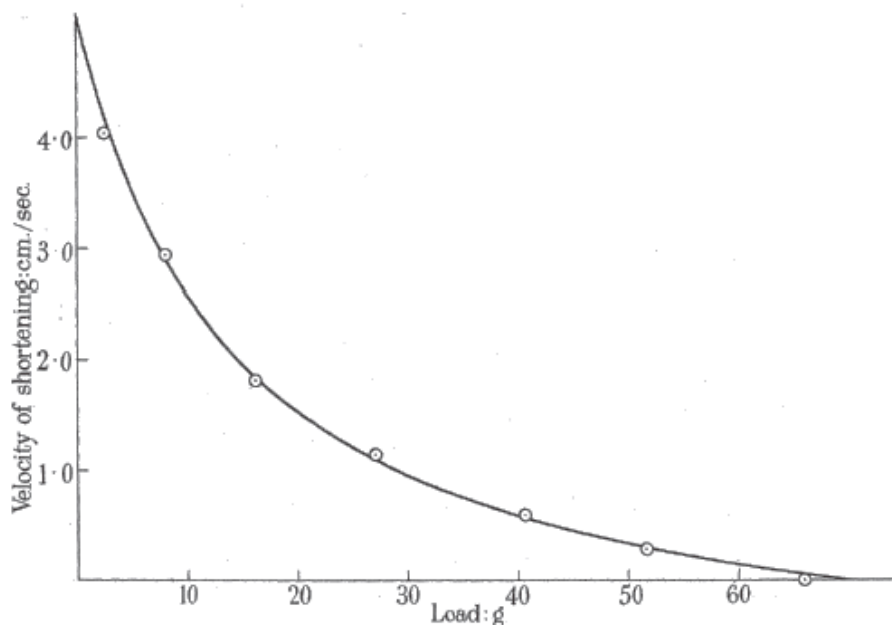


Figure 2-19 : extrait de la publication [Hill 1938], force de contraction F d'un sartorius de grenouille en fonction de la vitesse V . Comparaison entre les mesures o et le modèle hyperbolique en trait continu. $(F + 14,35)(V + 1,03) = 87,6$

Il conclut que la production de puissance mécanique dans le muscle est corrélée à une production de chaleur. La chaleur produite est caractéristique d'un paramètre a_H appelé coefficient de chaleur de contraction, homogène à une force de frottement sec. Il identifie alors une relation à trois paramètres (F_0, a_H, b_H) pour décrire la force développée par le muscle F en fonction de la vitesse d'exécution V :

$$(F + a_H)(V + b_H) = (F_0 + a_H)b_H \quad (2.43)$$

La forme de cette fonction est une hyperbole dont les asymptotes se trouvent en $V = -b_H$ et $F = -a_H$. F_0 représente la force maximale isométrique.

Hill utilise les mesures de Fenn en complément de ses propres mesures. Il conclut que le modèle hyperbolique possède une très bonne corrélation avec l'ensemble des mesures, meilleure que celle obtenue avec le modèle exponentiel de Fenn. Le modèle de Hill est donc celui qui actuellement fait référence car il tient compte des pertes internes et de la production de chaleur qui en découle.

2.6.2 Type de modèles de pédalage

La construction d'un modèle de pédalage peut se faire à différentes échelles. Les modèles microscopiques s'appuient sur la cinématique et la dynamique du squelette humain [Sim 1989]. Un certain nombre de muscles sont pris en compte pour « motoriser » le squelette. Il est possible alors grâce aux équations de la mécanique de mettre en mouvement le squelette en commandant chaque muscle et d'estimer par exemple la vitesse maximum de pédalage.

Les modèles macroscopiques s'intéressent au pédalage en tant que moteur humain équivalent. D'un point de vue causal, on suppose que le cycliste synchronise sa vitesse de pédalage sur la vitesse d'avance du vélo via le dérailleur. Il peut choisir alors d'exercer un couple plus ou moins fort sur les pédales. On retrouve alors un formalisme qui ressemble à celui du modèle Hill. La vitesse de pédalage en entrée commande le couple de pédalage en sortie. Des études réalisées avec des cyclistes sur des ergomètres [Vandewalle 1985], [Seck 1995], [Capmal 1997] ne retrouvent pas explicitement la forme hyperbolique du modèle de Hill mais une forme affine. Les cyclistes testés travaillent au maximum de leur capacité sur un temps court (7s à 45s). Les vitesses de pédalages étudiées sont très élevées (150 tr/min) et les puissances développées sont importantes (1000 W). Ces études sont représentatives de sportifs qui effectuent un sprint, elles ne s'appliquent pas a priori à des cyclistes urbains qui pédalent sans se fatiguer.

2.6.3 Mesure de la fonction de pédalage

Afin de combler ce manque de données sur les cyclistes urbains, une expérimentation a été menée sur un panel de 14 volontaires. Le couplemètre utilisé est un modèle de marque SRM© dans sa version « recherche » qui est réputé précise à 0,5% [Martin 1998]. Ce couplemètre mesure le couple transmis entre les pédales et le plateau. La cadence de pédalage est mesurée via un aimant solidaire du cadre. La fréquence d'échantillonnage est réglée à son maximum 2Hz.

Dans les premiers essais, le dispositif, ne permettait pas de mesurer des fréquences de pédalage faible (<40tr/min). Ceci est dû à la fréquence d'échantillonnage du dispositif. Pour un coureur cycliste, cette limitation n'est pas gênante puisque qu'il emploie des vitesses de pédalage supérieures à 60 tr/min. Dans notre étude par contre cette limitation est problématique car des cyclistes non entraînés peuvent choisir naturellement des vitesses de pédalage faibles. Le dispositif de mesure de vitesse de pédalage a été modifié pour pallier ce problème. L'aimant unique a été remplacé par une couronne de 3 aimants équirépartis (figure 2-20). La vitesse mesurée est donc virtuellement multipliée par 3 ce qui permet de mesurer des vitesses de pédalages jusqu'à 15tr/min. La division par 3 est opérée en post traitement des données.

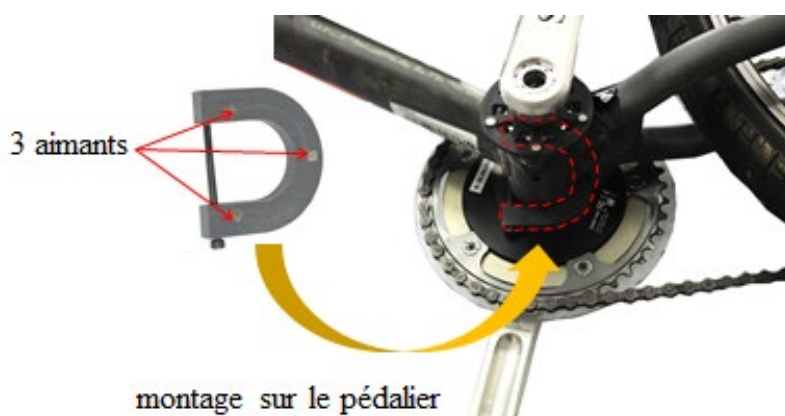


Figure 2-20 : photo du montage de la couronne modifiée pouvant accueillir 3 aimants.

Lorsqu'il roule, un cycliste change de rapport de transmission en fonction des conditions de roulage qu'il rencontre. Il maintient ainsi naturellement une fréquence de pédalage relativement constante dans le temps. Cette cadence de pédalage est désignée par ses initiales anglaises FCC « Freely Chosen Cadence ». La FCC fait l'objet de nombreuses études afin d'augmenter les performances des cyclistes professionnels [Brisswalter 2000], [Belli 2002] et [Abbiss 2009].

Pour forcer le cycliste à explorer une plage de fréquences de pédalage plus large que sa FCC, il est nécessaire de lui fixer plusieurs contraintes :

- Faire un parcours en légère montée pour empêcher le cycliste d'utiliser la roue libre.
- Demander au cycliste de pédaler « sans se fatiguer, sans transpirer », pour un usage du vélo en tant que moyen de transport urbain.
- Faire un départ arrêté afin d'explorer les fréquences de pédalage faibles.
- Imposer les rapports de transmission afin de forcer la cycliste à explorer des zones de pédalages basse vitesse qui ne lui sont pas naturelles.

Afin de réunir ces conditions, on se place sur un parking en montée à 2% long de 75m. Un cycliste réalise 6 fois le parcours avec un rapport de transmission imposé par l'expérimentateur. On mesure la puissance mécanique, la cadence de pédalage et la vitesse du vélo. Le rapport de transmission est recalculé à partir de la cadence et de la vitesse du vélo. Les résultats sont présentés sur la figure (2-21).

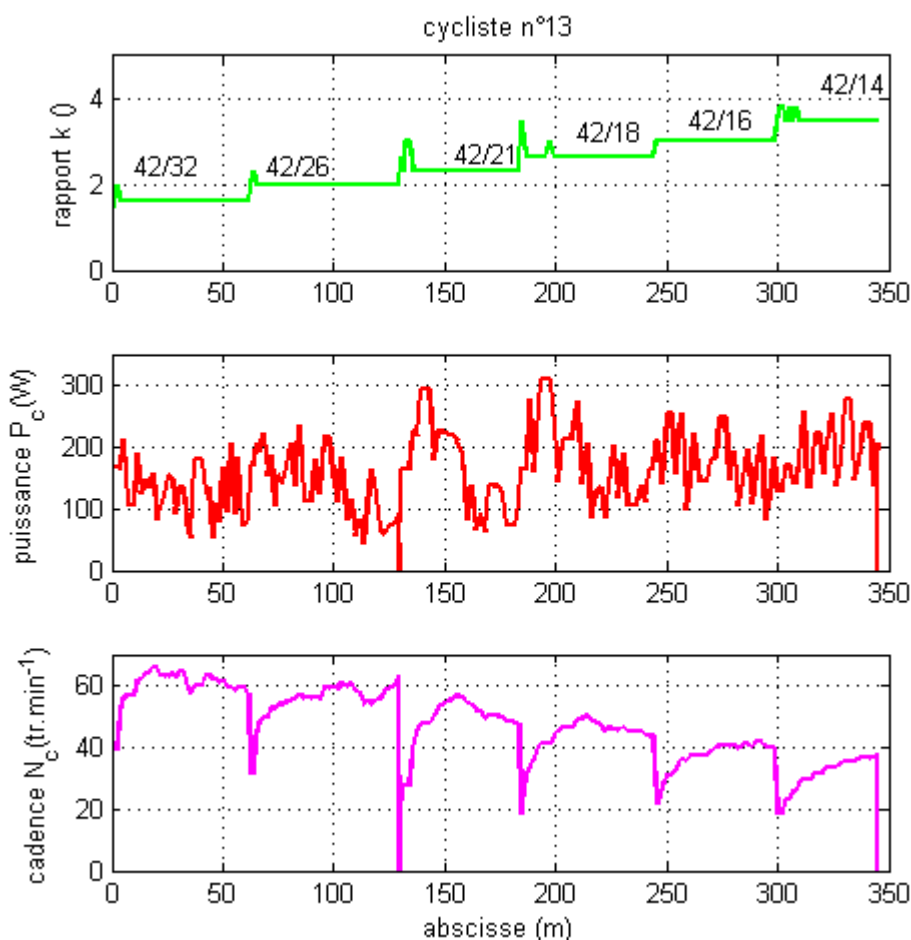


Figure 2-21 : mesures de puissance et de cadence de pédalage réalisées sur une pente de 2% en imposant 6 rapports de transmission.

On constate que la mesure de puissance est fortement bruitée, ce qui est comparable aux mesures présentées dans [Muetze 2007]. La mesure du rapport de transmission fonctionne bien à l'exception des transitoires dans lesquels on observe un dépassement ponctuel. La cadence de pédalage montre des montées en vitesse de plus en plus lentes, avec une valeur finale de plus en plus faible. Ceci s'explique par le fait que l'inertie équivalente et la charge équivalente ressenties par le cycliste au travers de la chaîne de transmission sont de plus en plus fortes.

Ce protocole permet donc d'explorer une gamme de cadence de pédalage large. A partir de la mesure de puissance et de la cadence, il est possible de calculer le couple de pédalage du cycliste (2.21). On trace alors les résultats dans le plan (cadence, couple) afin d'identifier si une tendance se dessine (figure 2-22).

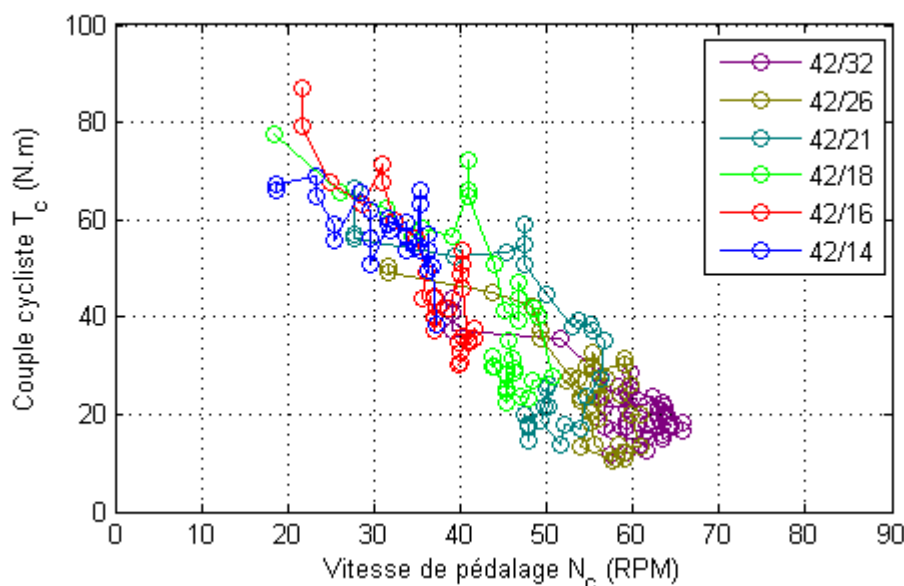


Figure 2-22 : couple exercé par le cycliste n°13 en fonction de la vitesse de pédalage.

Pour des rapports de transmission faibles (42/32 et 42/26), le cycliste parvient rapidement à converger vers la cadence de pédalage qu'il préfère autour de 60 tr/min. Les rapports de transmissions élevés (42/14 et 42/16) forcent le cycliste à pédaler à cadence faible autour de 30 tr/min.

2.6.4 Proposition de modèles de pédalage

Ce paragraphe vise à décrire le comportement du cycliste par un modèle qui exprime le couple T_c en fonction de la cadence N_c . Un premier modèle est construit en s'inspirant de l'expression de Hill (2.43). Il dépend de 3 paramètres : a_H le décalage de couple, b_H le

décalage de cadence et c_H une puissance de référence. Ces paramètres sont calibrés en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le modèle et les mesures. Le couple du cycliste s'exprime en fonction de la cadence avec l'expression hyperbolique :

$$T_c(N_c) = \frac{c_H}{N_c + b_H} - a_H \quad (2.44)$$

D'autre part les mesures indiquent une corrélation importante $|r_{13}| = 0,80$ entre le couple et la cadence. Il est donc naturel de proposer un second modèle qui décrit le couple comme une fonction affine de la cadence. Ce modèle possède deux paramètres : le couple maximum développable T_c^{\max} et la vitesse maximale de pédalage N_c^{\max} . Les deux paramètres sont calibrés par la méthode des moindres carrés. Le couple du cycliste est alors décrit par l'expression :

$$T_c(N_c) = T_c^{\max} \frac{N_c^{\max} - N_c}{N_c^{\max}} \quad (2.45)$$

Pour comparer la performance des deux modèles proposés, on se propose de choisir comme indicateur l'écart type σ de l'erreur entre le modèle et les mesures. Les mesures réalisées sur le cycliste n°13 sont comparées au modèle de Hill et au modèle affine sur la figure 2-23.

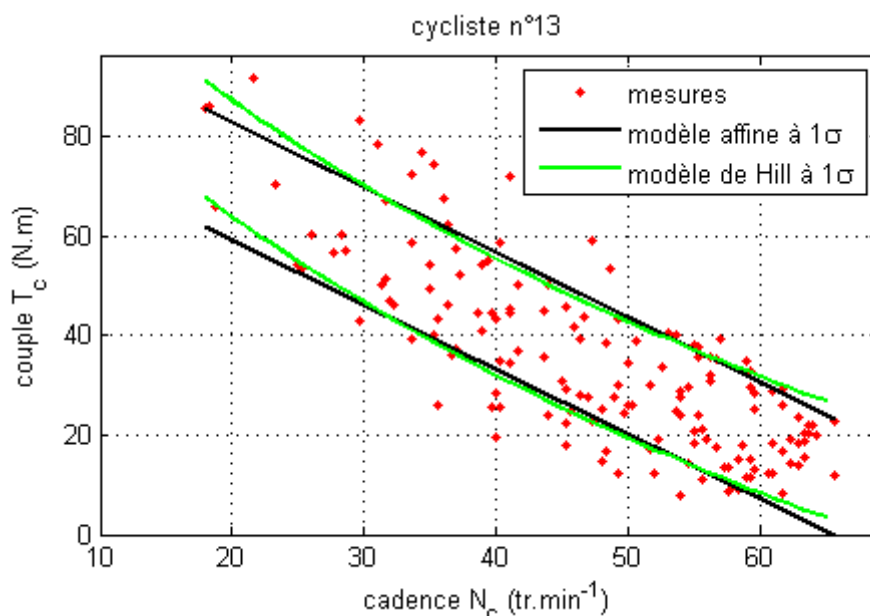


Figure 2-23 : couple exercé par le cycliste n°13 en fonction de la cadence de pédalage, comparaison des mesures avec le modèle affine et le modèle de Hill.

Les modèles sont présentés sous la forme d'une bande centrée sur la valeur nominale et large de plus ou moins un écart type. On constate que les deux modèles diffèrent peu. Les largeurs des bandes sont sensiblement les mêmes.

Afin de vérifier si cet effet constaté auprès du cycliste 13 est présent chez les autres cyclistes, on compare dans le tableau 2-4, les modèles calibrés sur le panel de 14 cyclistes.

cycliste n°	coefficient de corrélation couple / cadence	écart type du modèle de Hill (N.m)	écart type du modèle affine (N.m)	différence des erreurs de modèles
1	-0,64	6,9	7,4	-6,67 %
2	-0,60	16,0	16,3	-1,84 %
3	-0,61	13,5	13,5	0,30 %
4	-0,69	12,8	12,8	0,16 %
5	-0,67	18,1	18,4	-1,69 %
6	-0,80	11,7	11,5	1,21 %
7	-0,69	8,5	8,6	-0,58 %
8	-0,46	10,2	10,2	0,00 %
9	-0,50	6,2	6,2	0,00 %
10	-0,78	7,6	8,1	-6,16 %
11	-0,86	13,1	13,1	0,23 %
12	-0,70	12,7	12,8	-1,32 %
13	-0,80	11,7	11,8	-0,93 %
14	-0,62	9,9	10,4	-3,96 %
moyenne	-0,67	11,34	11,49	-1,52 %

Tableau 2-4 : synthèses pour les 14 cyclistes des écarts types de l'erreur entre les mesures et les modèles de Hill et affine.

En moyenne, les mesures montrent une bonne corrélation entre couple et cadence 0,67. Seuls les cyclistes n°8 et n°9 présentent une corrélation plus faibles <0,5. On remarque qu'en moyenne la différence des erreurs entre les deux modèles est faible, -1.52%. Cette différence est supérieure en valeur absolue à 2% pour seulement 3 cyclistes : n°1, n°10 et n°14. Pour ceux-ci la forme de la fonction de Hill présente une courbure importante (figure 2-24), pour tous les autres le modèle de Hill se superpose avec le modèle affine.

Il n'est donc pas nécessaire de faire appel au Modèle de Hill qui comporte 3 paramètres contre seulement 2 pour le modèle affine. On modélisera donc le

comportement du cycliste qui pédale sans dérailleur par une fonction affine. Cette conclusion est similaire aux études [Vandewalle 1985], [Seck 1995], [Capmal 1997].

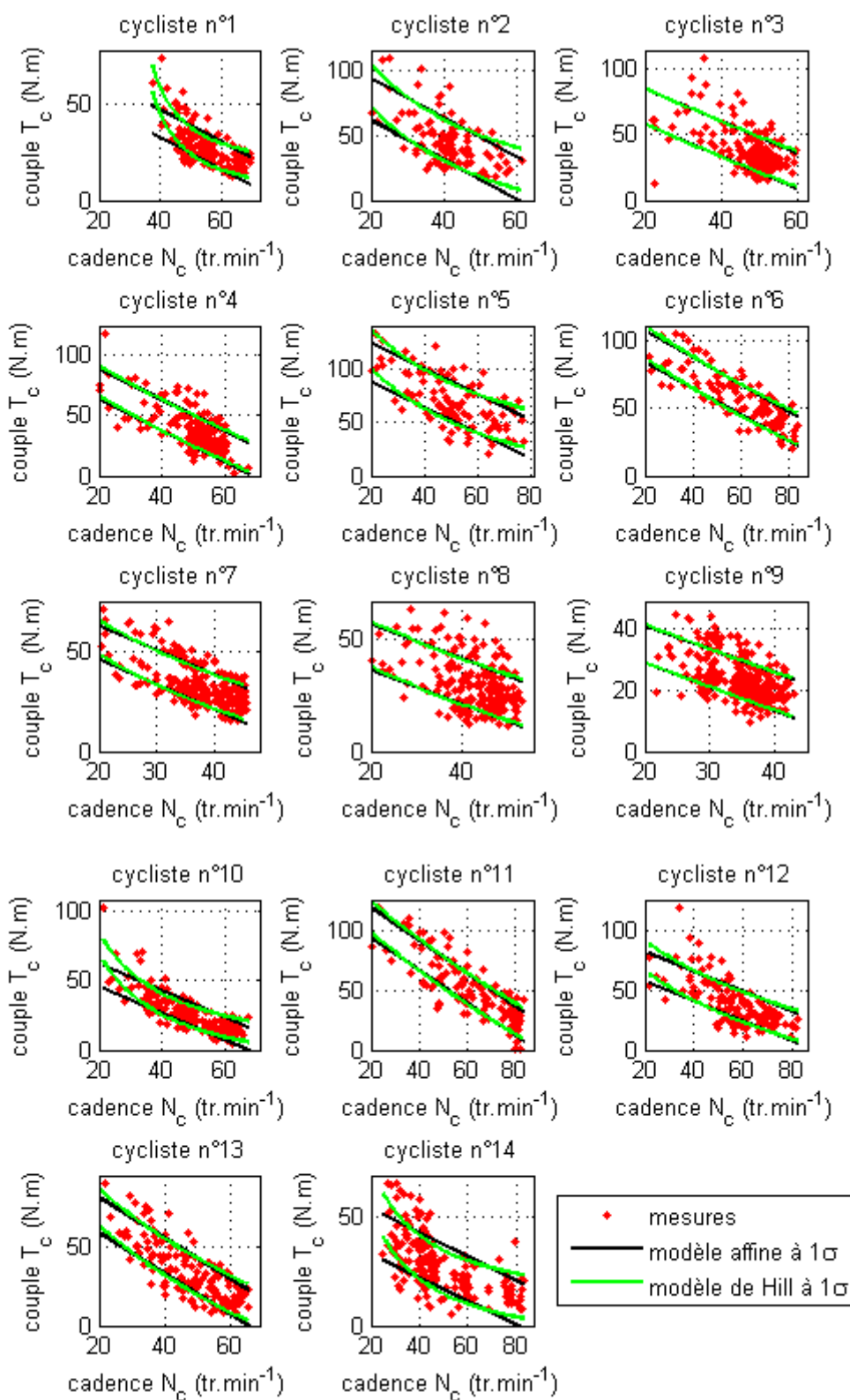


Figure 2-24 : comparaison des mesures avec les modèle de Hill et le modèle affine pour les 14 cyclistes du panel.

2.6.5 Influence du dérailleur

Le cycliste possède sur son vélo un dérailleur qui lui permet d'adapter son « régime moteur » en fonction de la vitesse du vélo, du vent et de la pente. Afin d'analyser la stratégie de changement de vitesse, le cycliste réalise un aller-retour sur un circuit vallonné de 1620m. Ce parcours en impasse se situe en zone cyclable limitée à 30 km/h afin d'assurer la sécurité des participants. Le profil de l'aller comporte une zone relativement plate de 200m puis une zone de montée de 400m et une zone plate de 200m. Au milieu du parcours le cycliste fait demi-tour sur la chaussée et emprunte le même chemin au retour.

Le relevé d'altitude a été réalisé avec un GPS différentiel. La pente moyenne sur l'aller est de 1,2% et la pente maximale de 2,5%. La figure 2-25 présente la photo aérienne et le profil d'altitude du parcours.

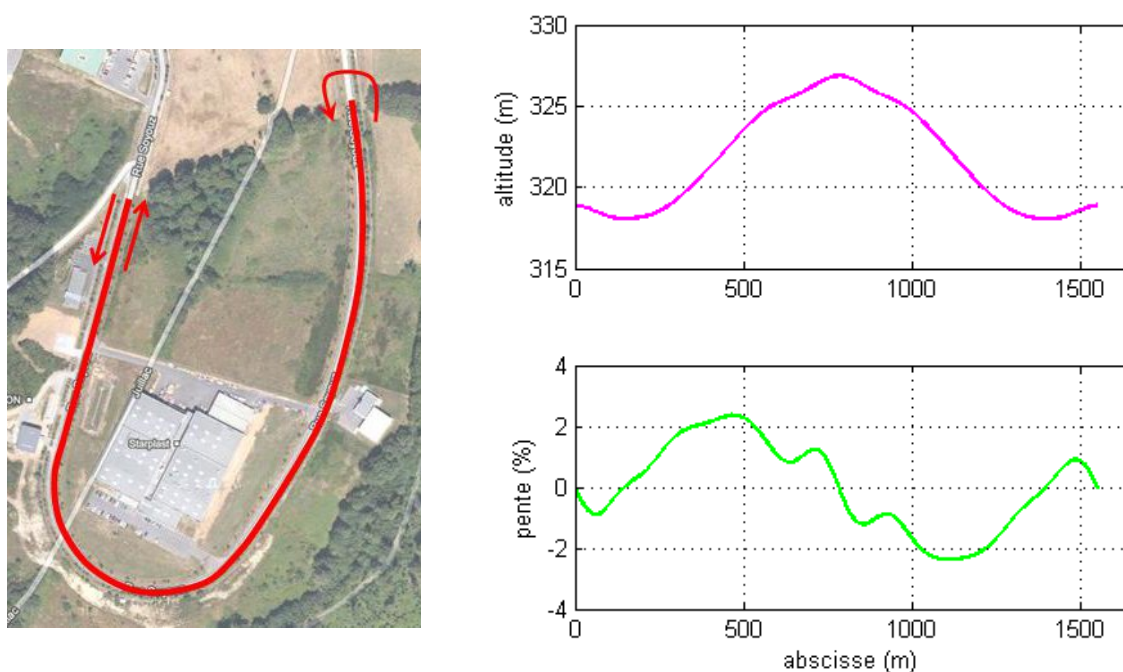


Figure 2-25 : photo aérienne du parcours de test, mesures d'altitude et de pente aller-retour en fonction de l'abscisse curviligne.

Pour cet essai, les consignes données au cycliste sont cette fois :

- pédaler « sans se fatiguer, sans transpirer »,
- changer de vitesse « selon son besoin ».

Les résultats de cet essai sont synthétisés dans la figure (2-26). On constate toujours, une mesure de puissance très bruitée. La cadence de pédalage est en revanche faiblement variable. Le cycliste change de vitesse de manière à maintenir une cadence proche de sa

cadence de prédilection (FFC). On constate également que le cycliste arrête de pédaler très localement vers 800m là où il doit faire demi-tour. Il cesse également de pédaler dans la descente. Cet arrêt de pédalage peut s'expliquer par le fait que le cycliste a atteint une vitesse qu'il juge suffisante. Nous appellerons par la suite cette vitesse, la vitesse de confort v^{\max} .

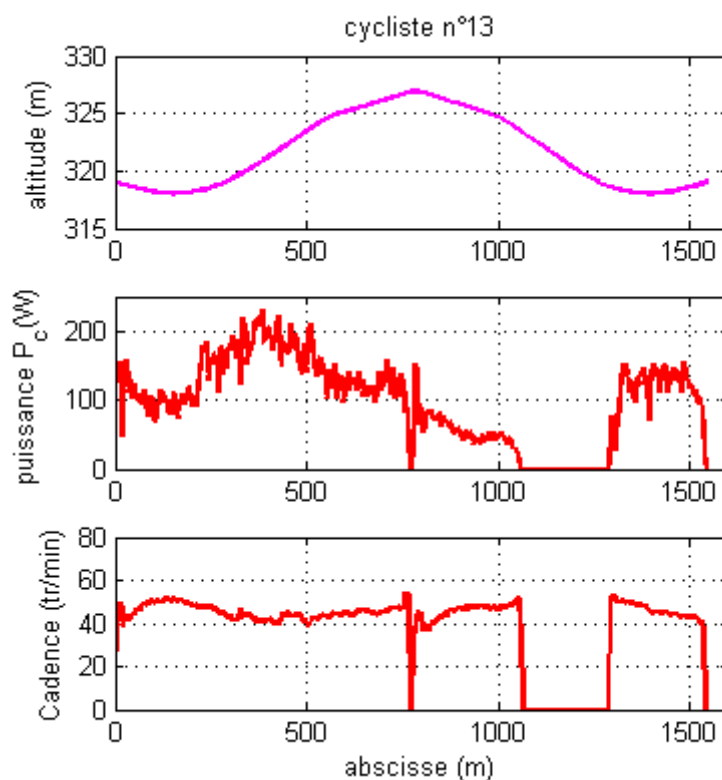


Figure 2-26 : mesure de puissance et de cadence du cycliste en fonction de l'abscisse.

Afin de comparer ces mesures avec le modèle affine, les résultats de mesures sont tracés dans le plan (N_c, T_c) (figure 2-27). Les droites noires matérialisent l'intervalle du modèle affine à ± 1 écart-type. Le rectangle matérialise l'intervalle de population qui contient 80% des points de mesure en rejetant les points qui appartiennent au premier et au dernier décile [Govaert 2003]. Ce rectangle a une base étroite, ce qui signifie que la dispersion des cadences mesurées est faible (8 tr/min). Le cycliste utilise le dérailleur pour maintenir sa cadence de pédalage autour de sa FFC.

On synthétise le comportement du cycliste n°13 en faisant la moyenne des points qui appartiennent à l'intervalle rectangulaire. La FFC se situe à 45,1 tr/min pour un couple moyen de 25,4 N.m. Ce point se situe en dessous du modèle affine. Plus de la moitié des points mesurés sortent de l'intervalle du modèle affine. On peut donc en conclure que le modèle affine ne permet pas de représenter des conditions naturelles de pédalage d'un cycliste.

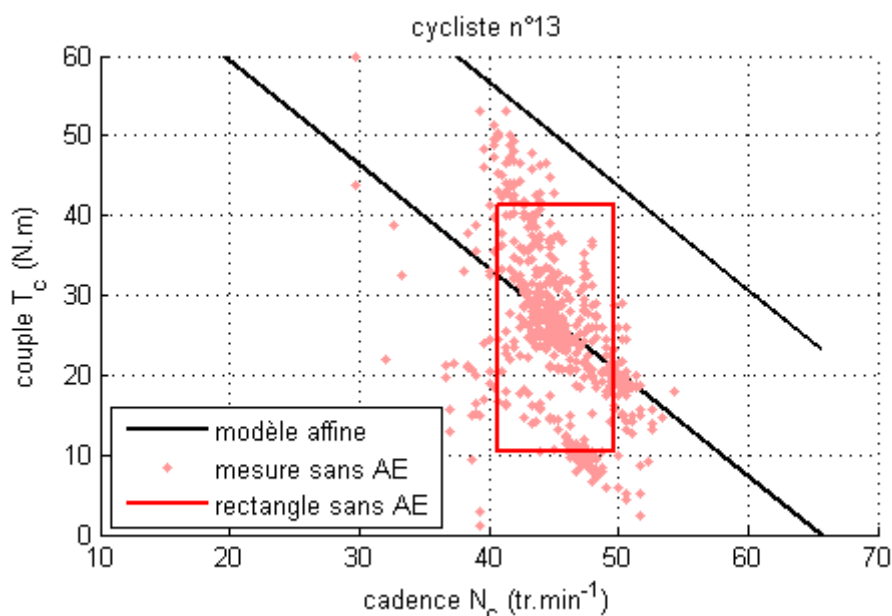


Figure 2-27 : couple exercé par un cycliste en fonction de la cadence de pédalage, comparaison entre les mesures avec dérailleur et le modèle affine.

2.6.6 Influence de l'assistance électrique

L'expérience sur le circuit urbain (§2.6.5) est reproduite cette fois avec l'assistance électrique. Cette assistance est de type « tout ou rien », elle se déclenche lorsque le cycliste pédale et se coupe lorsqu'il arrête de pédaler ou qu'il freine.

La figure 2-28 présente les mesures de puissance et de cadence réalisées avec assistance électrique, elles sont comparées à celles réalisées sans assistance. On remarque en début de parcours (20 à 200m) que le cycliste pédale sans produire de puissance. Il tourne les jambes « dans le vide » de manière à déclencher l'assistance dans la partie plate du parcours. On remarque également à cet endroit que la cadence de pédalage varie beaucoup. Le cycliste ne parvient pas à réguler son pédalage sans charge mécanique.

Dès que la pente augmente, le cycliste commence à produire de la puissance afin de compléter l'assistance. Dans la partie du parcours qui descend, le cycliste cesse de pédaler de manière assez semblable à celle qu'il adoptait lorsque l'assistance n'était pas activée.

L'assistance électrique ne modifie pas la vitesse de confort.

La puissance moyenne développée par le cycliste chute notablement. Le pic de puissance passe de 200W à 100W. En revanche, la cadence de pédalage augmente et se régularise. Dans la zone où la pente est la plus forte, le cycliste parvient grâce à

l'assistance électrique à maintenir une cadence à 55 tr/min alors qu'elle chutait à 40 tr/min sans assistance.

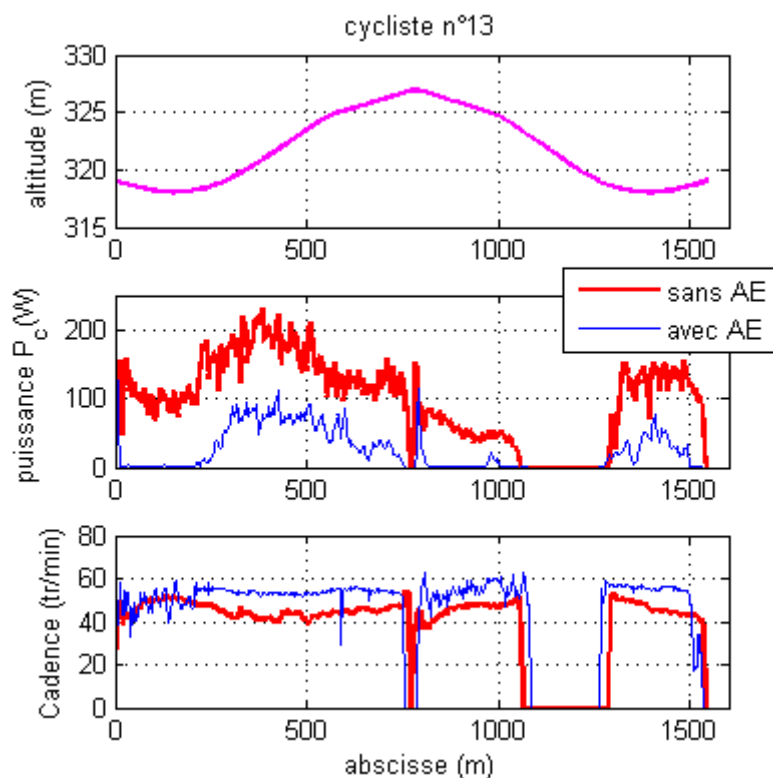


Figure 2-28 : mesure de puissance et de cadence du cycliste n°13 en fonction de l'abscisse, comparaison avec et sans assistance électrique.

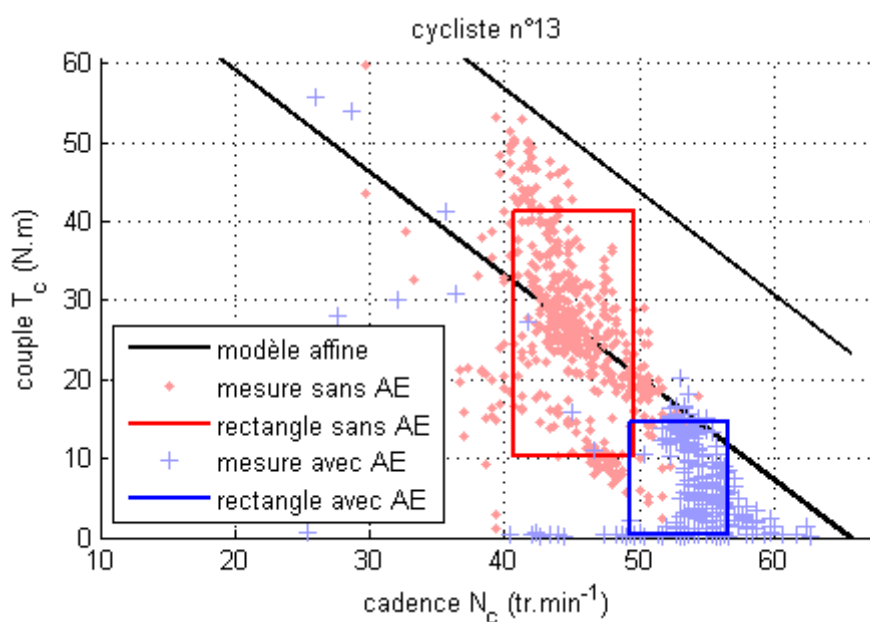


Figure 2-29 : couple exercé par un cycliste en fonction de la vitesse de pédalage, comparaison des mesures avec dérailleur et le modèle affine calibré.

On trace dans le plan (N_c, T_c) les mesures réalisées avec assistance électrique (figure 2-29). Ces mesures sont comparées au modèle affine et aux mesures réalisées sans assistance. La moyenne des points avec assistance électrique s'est déplacée vers le point (54,2 tr/min, 6,4 N.m). Ce cycliste utilise l'assistance électrique pour augmenter sa FCC et baisser notablement le couple moyen développé.

Les mesures sont encore une fois bien en dessous du modèle affine. Les dispersions des mesures ont également évolué. **La dispersion en cadence est stable, tandis que la dispersion en couple a fortement baissé.** Il apparaît donc que le cycliste change radicalement de comportement lorsqu'il pédale avec une assistance électrique.

2.6.7 Analyse de la variabilité interpersonnelle

Un panel de 14 cyclistes volontaires a été recruté pour étudier la variabilité des comportements humains. Ce panel est constitué de 11 hommes et de 3 femmes, âgés de 21 à 60 ans. Parmi ces personnes, seul le cycliste n°6 pratique le vélo quotidiennement pour aller travailler mais aucun ne le pratique de manière sportive. Le tableau 2-5 détaille le couple maximal identifié pour le modèle affine en fonction de la morphologie des individus.

cycliste n°	âge	sexe	taille (m)	poids (kg)	couple maximal (N.m)
1	21	h	1,75	75	73
2	40	h	1,90	75	107
3	33	h	1,75	65	97
4	23	h	1,80	72	103
5	52	h	1,88	84	124
6	22	h	1,76	57	114
7	30	h	1,73	73	78
8	24	f	1,58	58	60
9	43	f	1,65	52	51
10	20	h	1,75	65	73
11	22	h	1,78	83	136
12	34	h	1,76	66	100
13	43	h	1,73	58	97
14	60	f	1,68	56	54
moy	33,4		1,75	67,1	90,6

Tableau 2-5 : synthèse pour les 14 cyclistes du couple maximal identifié avec le modèle affine en fonction de la morphologie

La morphologie et le sexe de l'individu induisent une variabilité de sa capacité musculaire. L'étude [Vandervalle 1985] suggère de rapporter les couples des cyclistes à la masse de l'individu pour pouvoir les comparer entre eux. La figure 2-30 présente le couple maximal du modèle affine en fonction de la masse du cycliste. On constate une tendance nette du couple maximal qui augmente avec la masse du cycliste. Le cycliste n°6 qui pratique le vélo quotidiennement sort de la tendance en développant un couple important par rapport à sa masse.

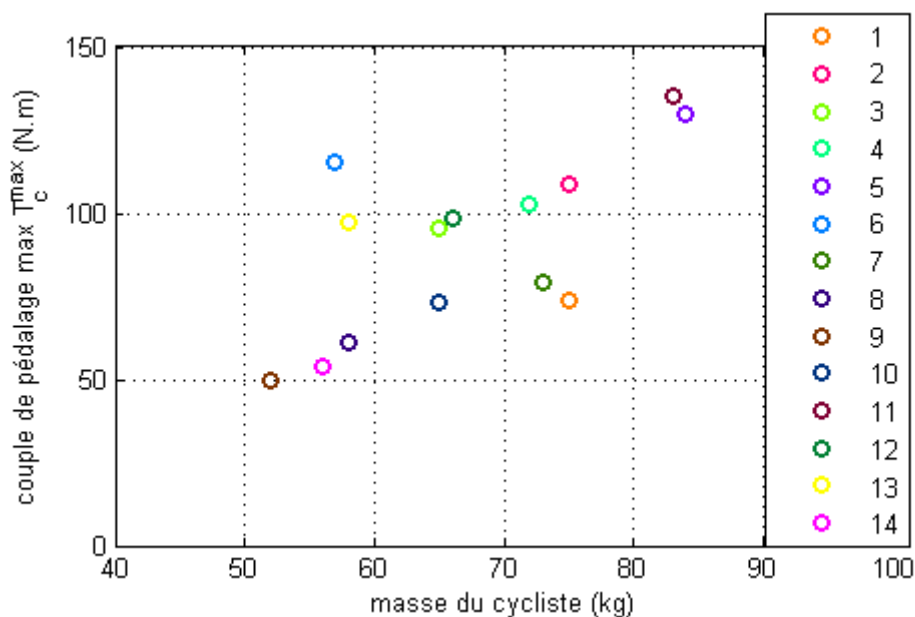


Figure 2-30 : couple maximum du modèle affine T_c^{\max} en fonction de la masse du cycliste.

La figure 2-31 synthétise les résultats obtenus par les tests de roulage effectués avec dérailleur. Les 14 cyclistes ont pédalé sur le circuit décrit dans §2.6.5 avec et sans assistance électrique. Les résultats sont présentés sous forme de l'intervalle rectangulaire contenant 80% de la population des points de mesure. Les rectangles obtenus avec et sans assistance sont comparés au modèle affine présenté sous forme de deux droites à plus ou moins un écart type de la valeur nominale.

On remarque qu'en général les rectangles n'ont pas le même centre avec et sans assistance. Le cycliste déplace son point de fonctionnement moyen à la fois en cadence et en couple. La variation de cadence reste faible.

La FFC n'est pas sensiblement affectée par l'assistance électrique.

Le comportement des cyclistes est modifié par la possibilité d'utiliser le dérailleur. Les rectangles de populations sortent généralement de l'intervalle du modèle affine. Le

comportement des cyclistes modélisé par une droite affine s'éloigne donc trop du comportement normal du cycliste lorsqu'il pédale avec un dérailleur pour en tirer des conclusions générales.

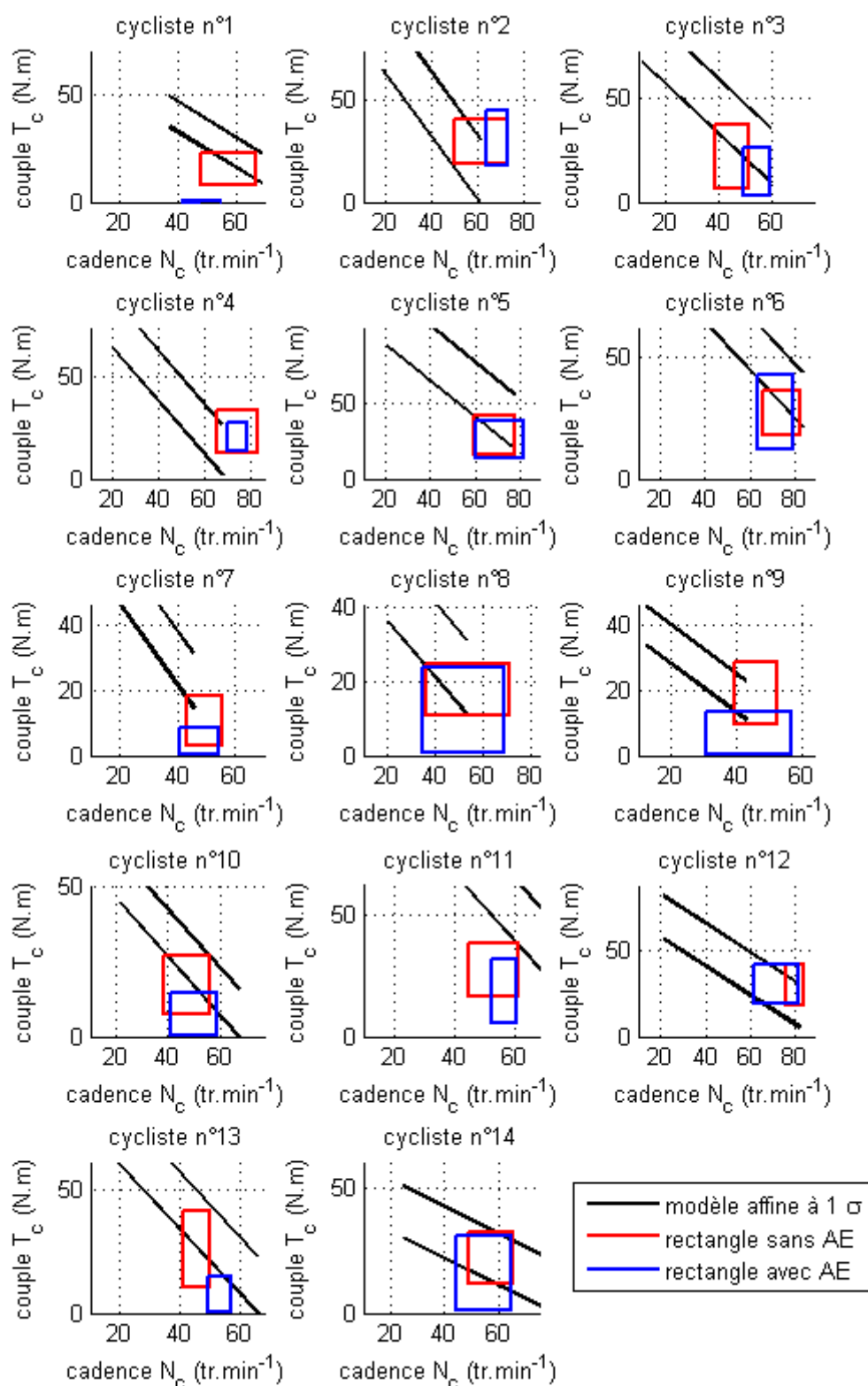


Figure 2-31 : comparaison du modèle affine et des dispersions de mesures.

Afin d’analyser l’influence de l’assistance électrique, on s’intéresse à 3 paramètres qui résument le comportement du cycliste lorsqu’il roule avec un dérailleur : le couple moyen \bar{T}_c , la FCC et la vitesse de confort v^{\max} . Ces trois paramètres sont détaillés dans le tableau 2-6 avec et sans assistance.

cycliste n°	sans assistance			avec assistance		
	\bar{T}_c (N.m)	FCC (tr/min)	v^{\max} (km/h)	\bar{T}_c (N.m)	FCC (tr/min)	v^{\max} (km/h)
1	15,5	57,3	17	0,3	48,8	15
2	30,1	62,7	34	30,3	67,9	37
3	22,6	46,4	23	12,1	56,3	28
4	23,3	73,4	32	19,2	73,7	30
5	29,3	72,0	33	22,8	70,7	33
6	29,0	74,1	39	31,4	70,4	39
7	11,6	51,4	16	3,1	49,1	24
8	17,5	58,2	30	9,5	56,4	26
9	19,4	46,7	24	4,1	47,1	26
10	17,6	46,1	20	5,1	52,4	26
11	27,0	53,9	28	18,1	56,6	28
12	26,6	81,6	35	34,2	74,1	35
13	25,4	45,1	22	6,4	54,2	25
14	20,9	57,1	35	17,9	57,6	25
moy	22,6	59,0	27,7	15,3	59,7	28,4

Tableau 2-6 : comparaison des données significative du comportement des cyclistes avec et sans assistance électrique.

En moyenne, les cyclistes utilisent une FCC de 59 tr/min. La présence de l’assistance électrique ne modifie pas sensiblement ce résultat (59,7 tr/min). On retrouve le résultat cité dans [Abbiss 2009] qui note que la cadence de pédalage la plus économique d’un point de vue énergétique se situe entre 50 et 60 tr/min lorsque le cycliste pédale à une puissance modérée (<200W). Ce résultat est cohérent avec le protocole de mesure utilisé ici où on demande au cycliste de pédaler sans se fatiguer. On peut donc supposer que l’humain régule la commande du dérailleur afin de minimiser l’énergie consommée.

La présence de l’assistance électrique modifie le couple moyen produit. En moyenne, il baisse de 32%.

Seuls 3 cyclistes sur 14 maintiennent ou augmentent leur effort (n°2, n°6 et n°12). L'assistance électrique joue son rôle en réduisant l'intensité de l'activité physique du cycliste.

La vitesse de confort sans assistance électrique se situe en moyenne à 27.7 km/h. Cette valeur n'est pas affectée sensiblement (+2%) par la présence l'assistance électrique. Ce paramètre est lié à la sensation de sécurité qui est ressentie par le cycliste sur le vélo à vitesse élevée or l'assistance se coupe à 25km/h.

On note un cas limite, le cycliste n°1, qui se contente en présence d'assistance électrique de tourner les jambes pour activer l'assistance en produisant un couple moyen très faible (0,3 N.m). Il possède une vitesse de confort très faible de 15km/h. Il se satisfait donc d'une vitesse réduite que l'assistance électrique est capable seule d'assurer.

2.6.8 Construction d'un modèle de cycliste

Les paragraphes §2.6.4, et 2.6.7 ont permis de dégager des tendances qui caractérisent le comportement du cycliste dans des conditions variées de roulage. On peut synthétiser les conclusions suivantes :

- Lors du test sans dérailleur, le comportement de tous les cyclistes peut être modélisé par une droite affine dans le plan couple, cadence. Cette conclusion est en accord avec les études [Vandewalle 1985], [Seck 1995], [Capmal 1997]. Il est possible également d'utiliser un modèle de Hill mais il n'apporte pas plus de précision que le modèle affine.
- Lors des tests sur route, tous les cyclistes utilisent le dérailleur pour maintenir leur vitesse de pédalage la plus constante possible. On retrouve ici la notion de FCC introduite dans [Seck 1995]. La FFC n'est pas modifiée par la présence de l'assistance électrique. Elle est choisie par le cycliste afin d'assurer un mouvement qui a la plus grande efficacité énergétique [Abbiss 2009].
- L'assistance électrique modifie le couple moyen produit par les cyclistes. Ils pédalent en moyenne moins fort (-32%). On note également que le cycliste n°1 a utilisé le vélo comme scooter électrique. Il a tourné les jambes pour déclencher l'assistance mais n'a pas produit de couple.
- Les cyclistes arrêtent de pédaler lorsqu'ils atteignent une vitesse de confort V^{\max} . La présence de l'assistance électrique ne modifie pas sensiblement la vitesse de confort choisie par les cyclistes.

Ces mesures n'ont pas permis de dégager une expression explicite du couple du cycliste lorsqu'il roule avec un dérailleur. En revanche elles ont montré une certaine constance dans la puissance produite par le cycliste.

On fera l'hypothèse que le cycliste est une source de puissance mécanique.

Dans le modèle mécanique présenté au paragraphe §2.2.7, on privilégiera pour exprimer le couple sur la roue arrière une notation qui fait intervenir la puissance du cycliste $P_c(t)$.

Le terme $T_{5 \rightarrow 3} = \frac{\eta_t}{k(t)} T_c(t)$ est remplacé par $T_{5 \rightarrow 3} = \eta_t \frac{P_c(t)}{\omega(t)}$.

Ceci permet de s'affranchir de la gestion du rapport de réduction choisi $k(t)$ par le cycliste. L'information sur ce rapport de réduction est contenue dans le terme de rotation de la roue $\omega(t)$ mais n'a pas besoin d'être explicité plus précisément. On définit la vitesse de rotation de la roue du vélo qui correspond à la vitesse de confort $\omega^{\max} = \frac{V^{\max}}{R_r}$.

Le modèle de puissance le plus simple que l'on puisse faire est un modèle dans lequel le cycliste pédale à puissance nominale P_c^{nom} . Cette hypothèse induit un couple infini lorsque la vitesse du vélo tend vers 0. Il faut donc borner l'expression de la puissance pour les vitesses faibles. Pour cela on utilisera la fonction $\omega \rightarrow \tanh(\omega)$ qui permet à la fois de brider la puissance à 0 lorsque la vitesse de pédalage est nulle mais qui tend rapidement vers 1 lorsque la vitesse augmente.

En plus de cette contrainte au démarrage, les cyclistes cessent de pédaler lorsque le vélo atteint leur vitesse de confort. On utilisera de même pour tenir compte de ce phénomène la fonction $\omega \rightarrow -\frac{\tanh(\omega - \omega^{\max}) + 1}{2}$. Cette fonction possède une valeur proche de 0 lorsque la vitesse est inférieure à la vitesse de confort et tend rapidement vers -1 lorsque la vitesse de confort est franchie.

La puissance cycliste s'exprime donc en pondérant la puissance nominale du cycliste par la somme de ces deux fonctions tangentes hyperboliques.

$$P_c(\omega) = P_c^{\text{nom}} \left(\tanh(\omega) - \frac{\tanh(\omega - \omega^{\max}) + 1}{2} \right) \quad (2.46)$$

La figure 2-32 présente 2 exemples de cyclistes. Le cycliste n°6 qui possède une grande puissance $P_c^{\text{nom}} = 220W$ et une vitesse de confort élevée $V^{\max} = 39km/h$ et le cycliste n°13 qui possède une puissance plus modeste $P_c^{\text{nom}} = 100W$ et une vitesse de confort moyenne $V^{\max} = 25km/h$.

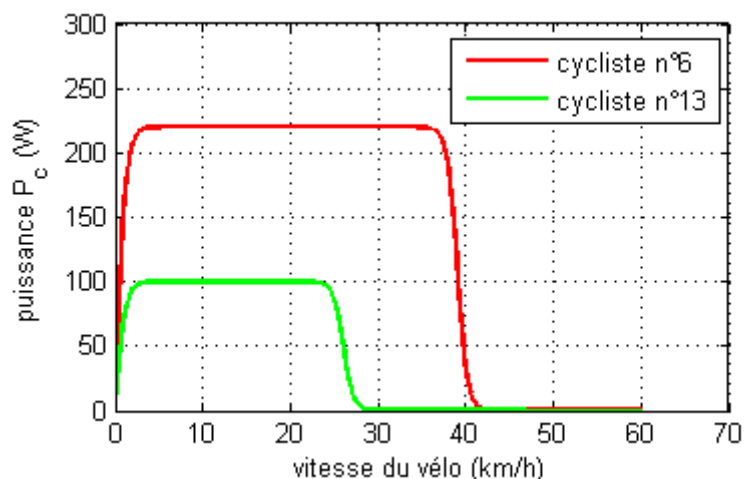


Figure 2-32 : puissance cycliste en fonction de la vitesse du vélo, comparaison entre le cycliste n°6 et n°13.

A partir de l'expression de la puissance du cycliste (2.46), on définit un modèle du couple du cycliste ramené à la roue, exprimé en fonction de la rotation de la roue :

$$T_{5 \rightarrow 3}(\omega) = \eta_t \frac{P_c^{nom}}{\omega} \left(\tanh(\omega) - \frac{\tanh(\omega - \omega^{max}) + 1}{2} \right) \quad (2.47)$$

La figure 2-33 présente une illustration du modèle de couple pour le cycliste n°13. On compare ce modèle avec la courbe d'iso puissance que l'on aurait obtenue si le cycliste pédalait toujours à puissance nominale.

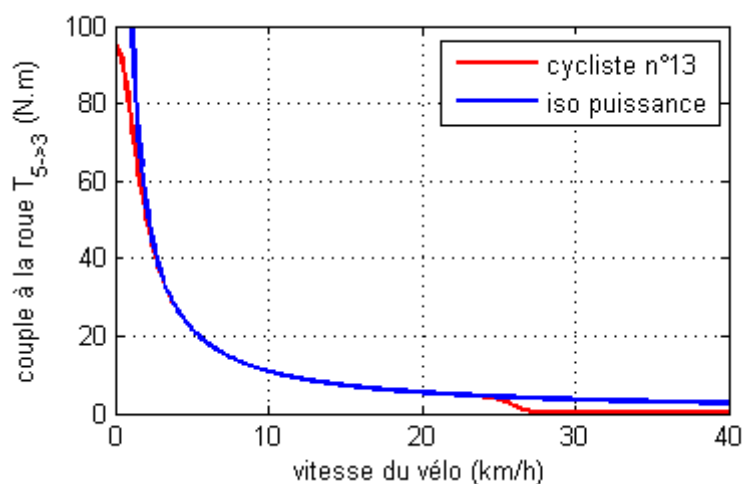


Figure 2-33 : modèle de couple développé à la roue en fonction de la vitesse du vélo, comparaison du modèle du cycliste n°13 avec la courbe d'iso puissance.

La courbe d'iso puissance est une hyperbole, elle diverge en 0 et ne permet pas de représenter fidèlement le comportement d'un cycliste. Le modèle pondéré par les tangentes hyperboliques permet d'obtenir un couple de démarrage de 95N.m, qui est une valeur réaliste par rapport aux mesures réalisées. Lorsque la vitesse de confort est franchie le couple décrit par le modèle de cycliste tend rapidement vers 0.

2.6.9 Calibration des modèles de cyclistes

Le modèle de cycliste choisi dépend de deux paramètres la puissance nominale et la vitesse de confort. Les mesures de puissance réalisées permettent de calibrer ces deux paramètres pour l'ensemble des 14 cyclistes. Les figures 2-34 à 2-36 présentent la comparaison entre modèle et mesures pour 3 cyclistes ayant choisi des vitesses de confort différentes : faible 15km/h, moyenne 25km/h et forte 39km/h.

Les cyclistes réalisent un demi-tour au milieu du parcours à 810m. Pour négocier ce demi-tour, ils sont obligés de ralentir et de freiner environs 30m avant cet endroit. Le freinage est employé également en fin de parcours à 1620 m pour s'arrêter sur la ligne d'arrivée. Le modèle ne tient pas compte du freinage, il ne pourra donc pas y avoir une bonne corrélation entre mesures et modèle sur les 30m qui précèdent le milieu et à la fin du parcours.

Le cycliste n°1 choisit une vitesse de confort faible à 15km/h (figure 2-34). Il produit deux pics de puissance, un au démarrage et un au milieu du parcours lorsqu'il fait demi-tour. Le reste du temps, il pédale sans produire de puissance. Le modèle parvient bien à décrire ce comportement qui est pourtant un cas limite de l'utilisation d'un VAE.

Le cycliste n°6 choisit une vitesse de confort forte à 39km/h (figure 2-35). Le modèle prévoit une puissance constante tout au long du parcours. La mesure montre des variations significatives de la puissance autour de cette valeur moyenne.

Le cycliste n°13 choisit une vitesse de confort moyenne à 25km/h (figure 2-36). Le modèle prévoit l'arrêt du pédalage sur les 200 premiers mètres. L'augmentation de la puissance qui a lieu dans la montée entre 200m et 750m est bien retranscrite par le modèle. Le cycliste cesse ensuite de pédaler dans la partie descendante du parcours. Le modèle prévoit également la reprise de pédalage en fin de parcours vers 1300m.

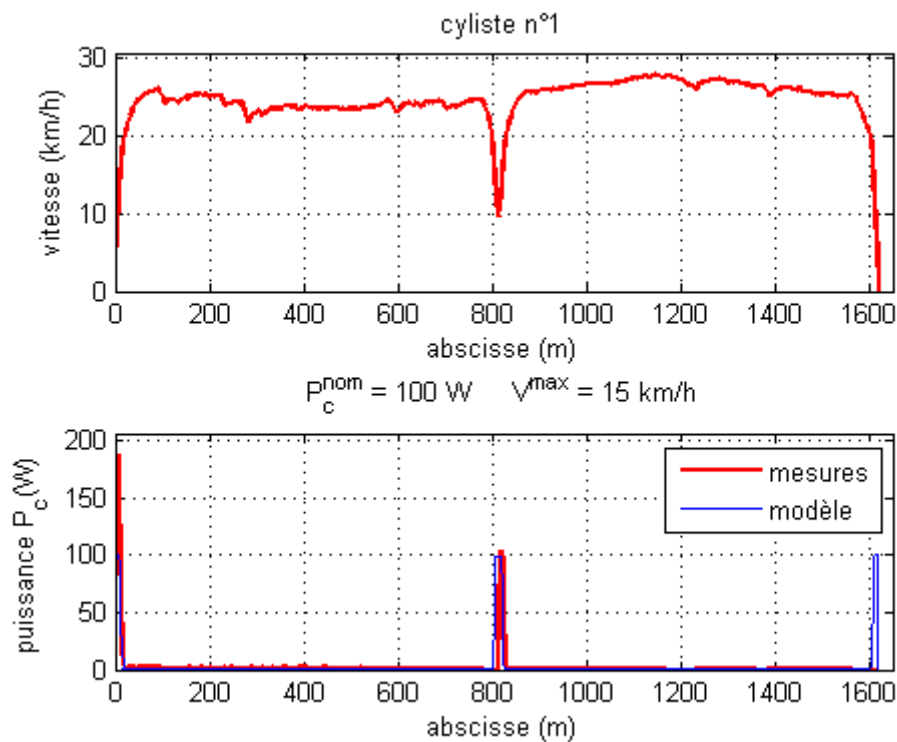


Figure 2-34 : comparaison entre le modèle et les mesures pour le cycliste n°1.

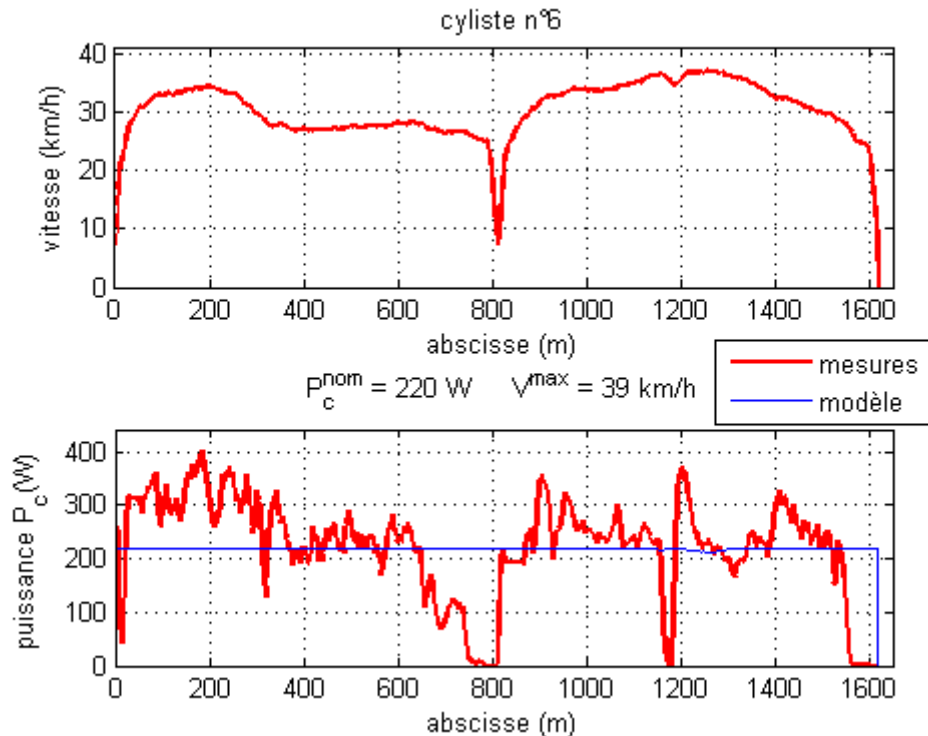


Figure 2-35 : comparaison entre le modèle et les mesures pour le cycliste n°6.

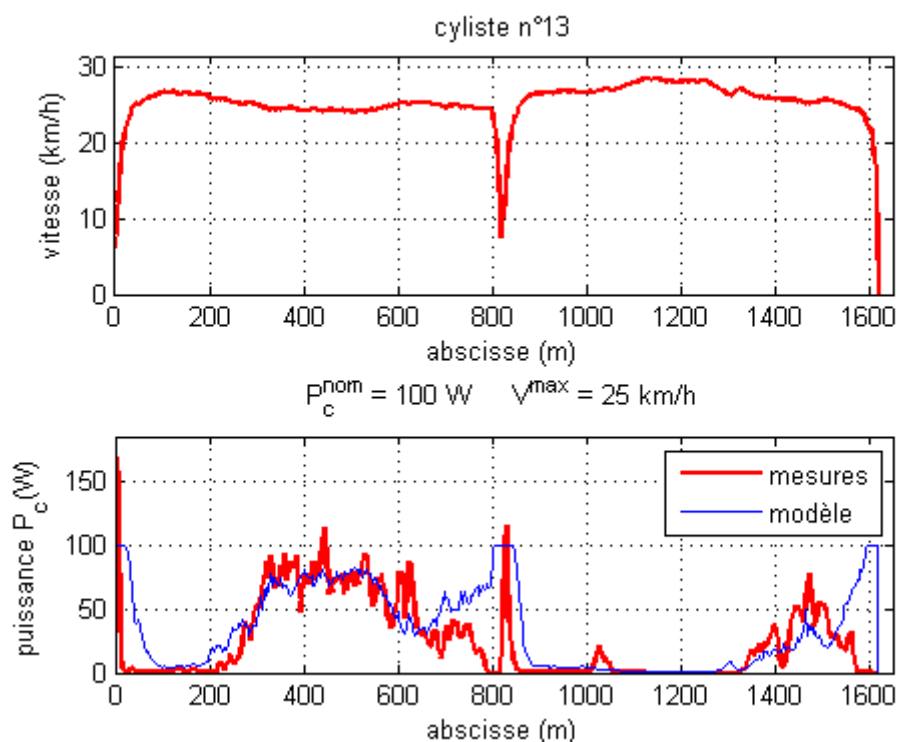


Figure 2-36 : comparaison entre le modèle et les mesures pour le cycliste n°13.

Le modèle proposé permet de prévoir le comportement des cyclistes tout au long du parcours en se basant uniquement sur la vitesse du vélo. Le modèle est plus précis pour les cyclistes choisissant une vitesse de confort faible à moyenne. Pour les vitesses de confort fortes, le modèle parvient à décrire un comportement moyen, mais ne prévoit pas les pics de puissance.

Ce modèle est donc suffisant pour effectuer de la planification énergétique car on cherchera à optimiser l'intégrale de la puissance qui n'est pas affectée par ces pics ponctuels de puissance.

2.7 Conclusion

La planification énergétique de la commande du VAE nécessite un modèle capable de simuler la dynamique du vélo et de prévoir les échanges de puissance entre les composants. La modélisation proposée s'appuie sur une démarche multi-physiques afin de pouvoir faire cohabiter dans un même modèle des grandeurs électriques, mécaniques et physiologiques.

La partie mécanique du modèle tient compte de la résistance au roulement des pneus, de la résistance aérodynamique et de la gravité. L'ensemble des paramètres d'inertie et des sources de frottement ont été calibrés par des mesures en statique et en roulage au moyen d'un VAE instrumenté.

L'assistance électrique a été modélisée comme un moteur à courant continu. La tension d'alimentation constitue la commande du système qui sera optimisée dans le chapitre 3. Les paramètres électro-mécaniques ont été calibrés sur un banc spécifiquement conçu pour le moteur roue.

La modélisation du comportement du cycliste sur le VAE s'appuie à la fois sur une étude bibliographique et une campagne de mesures menée auprès de 14 cyclistes non sportifs. L'étude a montré que la présence du dérailleur induit chez tous les cyclistes une régulation de la cadence de pédalage autour d'une valeur spécifique, la FFC. La présence de l'assistance électrique ne modifie pas sensiblement cette cadence, en revanche elle permet au cycliste de réduire de manière importante son effort. Chaque cycliste possède également une vitesse de confort qu'il juge suffisante. Lorsque la vitesse du vélo dépasse cette vitesse, le cycliste cesse de pédaler et laisse le vélo avancer en roue libre.

Le modèle proposé considère le cycliste comme une source de puissance régulée autour d'une valeur nominale. Cette puissance est pondérée par des fonctions tangentes hyperboliques afin d'assurer à la fois un couple réaliste à faible vitesse et d'annuler l'effort lorsque la vitesse du vélo atteint la vitesse de confort. Ce modèle parvient à retranscrire la puissance mécanique produite par les cyclistes testés. Il est d'autant plus précis que la vitesse de confort du cycliste est faible. Ce modèle est adapté à la planification énergétique.

Chapitre 3 : Synthèses de commandes

Résumé du chapitre 3

Le modèle de cycliste construit dans le chapitre 2 est utilisé pour mener à bien une démarche de Commande Optimale qui minimise d'énergie électrique consommée sur un trajet donné, sous contrainte d'une vitesse moyenne imposée.

Dans un premier temps une commande optimale exacte est synthétisée avec des hypothèses académiques en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin. Elle permet une économie d'énergie électrique de 24,8% par rapport à une commande constante, représentative de la commande d'un VAE du commerce.

Dans un deuxième temps une discrétisation de l'état et de la commande permet de réécrire le problème comme la recherche du chemin de coût minimal dans un graphe. On choisit l'algorithme A* d'exploration des graphes qui mène une recherche « en profondeur d'abord ». Cet algorithme s'appuie sur une heuristique qui permet d'explorer en premier les sommets les plus prometteurs. L'heuristique proposée est basée sur une approche énergétique, elle permet une convergence rapide vers le chemin optimal. La solution obtenue par la méthode discrétisée converge vers la solution exacte.

La méthode discrétisée ayant été validée, on l'applique à un problème réaliste. La commande est bridée en puissance, en courant et en vitesse de manière à tenir compte des contraintes technologiques et légales. Le profil d'altitude du trajet est mesuré sur un parcours réel. L'algorithme A* synthétise une commande qui économise 12% d'énergie. La commande optimisée ne modifie pas sensiblement le comportement du cycliste.

On propose également d'accélérer le temps de calcul de l'algorithme A* en rejetant plus rapidement les commandes qui ne respectent pas la contrainte de vitesse moyenne. Cette méthode économise en moyenne 18% de temps de calcul.

3.1 Introduction

3.1.1 Optimisation de l'autonomie des véhicules hybrides

Le vélo électrique est un véhicule hybride qui fait appel à un moteur musculaire assisté d'un moteur électrique. De nombreuses études visent à minimiser la consommation d'énergie de véhicules hybrides thermiques et électriques. Ces travaux peuvent s'appliquer à des voitures [Delprat 2004], [Koot 2005], [Musardo 2005], [Kim 2011] ou à des poids lourds [van Keulen 2010], [Lin 2003]. Le moteur thermique convertit l'énergie chimique du carburant en énergie mécanique de manière irréversible. Le moteur électrique alimenté par sa batterie constitue une source d'énergie réversible embarquée qui permet différentes stratégies d'économie d'énergie :

- la coupure du moteur thermique à l'arrêt,
- le roulage en tout électrique,
- l'usage du moteur électrique en génératrice dans les descentes et au freinage,
- le déplacement du point de fonctionnement du moteur thermique là où il a le meilleur rendement.

Certaines études [Lin 2003], [Koot 2005], [Kim 2011], [Musardo 2005] utilisent des profils de vitesse normalisés (USA, Japon, UE) afin de contraindre le véhicule à suivre une trajectoire connue à l'avance. Cette trajectoire peut également avoir été mesurée dans des conditions réelles de roulage [Delprat 2004]. L'étude [van Keulen 2010] s'attache à intégrer les équations du mouvement de manière explicite afin de construire un profil de vitesse qui s'adapte aux limitations de vitesses légales imposées sur un parcours réel.

La dynamique du véhicule étant connue, il est alors possible de construire la consigne de puissance grâce aux équations de la mécanique. Dans le cas de véhicules hybrides parallèles les deux chaînes de puissances s'additionnent. Pour une même demande de couple, il est possible de répartir cette demande sur les deux sources d'énergie. C'est cette répartition de puissance (Power Split) qui fait l'objet d'une optimisation. Les fonctions de coût choisies sont majoritairement basées sur la consommation de carburant mais elles peuvent également tenir compte des émissions de gaz polluants et de particules fines [Koot 2005]. En plus de la répartition de puissance, certaines études optimisent également le choix des rapports de la boîte de vitesses [Delprat 2004].

Dans les véhicules hybrides électriques la batterie permet de stocker une grande quantité d'énergie. Si le véhicule roule en tout électrique, il ne consomme pas de carburant mais il vide sa batterie. Il est donc nécessaire d'imposer que l'état de charge de la batterie à l'arrivée soit identique à celui du départ. Cette contrainte se formule en imposant une intégrale du courant qui doit être nulle sur le trajet [Koot 2005], [Delprat 2004].

3.1.2 Optimisation de l'autonomie des véhicules mono énergie

Du point de vue de l'assistance électrique, le vélo électrique peut être modélisé comme un véhicule purement électrique. En effet, il n'est ni possible, ni souhaitable de commander le comportement du cycliste. Le cycliste peut être considéré comme une perturbation qui a tendance à faire avancer le vélo à son rythme personnel, de même qu'une descente ou un vent arrière. La maximalisation de l'autonomie du VAE passe alors par l'élaboration d'une commande optimale pour le seul moteur électrique. Ceci implique la connaissance des conditions d'utilisation du VAE, à savoir le profil d'altitude du parcours et un modèle de comportement du cycliste.

Il est possible d'optimiser l'autonomie d'une large variété de véhicules terrestres mono énergie : voiture essence ou diesel [Schwarzkopf 1977], poids lourd diesel [Hellström 2009], trains électriques [Vašak 2009] ou trains diesel [Howlett 2009]. Contrairement à la gestion d'énergie dans les véhicules hybrides, il n'est pas possible d'imposer un profil de vitesse au véhicule. En effet la vitesse détermine explicitement la commande de puissance et il n'est alors plus possible d'optimiser quoi que ce soit.

Ces problèmes imposent un horizon de calculs qui se caractérisent par une certaine distance à parcourir dans un temps donné, sur un profil donné. Le problème d'optimisation formalise la distance à parcourir comme une contrainte de forme intégrale. Cet horizon peut constituer un trajet entier [Vašak 2009]. Dans ce cas il s'agit d'un train qui doit relier deux gares distantes de 9,8km en respectant les horaires prévus.

3.1.3 Principe du Maximum

La gestion d'énergie d'un véhicule terrestre peut s'écrire comme un problème de Commande Optimale. Ces problèmes visent à définir une commande (débit de carburant, puissance d'un moteur électrique, rapport de transmission) qui minimise un objectif (consommation d'énergie, émissions de gaz polluants), en respectant des contraintes instantanées, (limite de puissances, limite de vitesse légale) et des contraintes intégrales (distance parcourue, état de charge de la batterie).

La Commande Optimale s'appuie sur le calcul variationnel [Borne 2013]. Cette méthodologie est basée sur l'utilisation d'une nouvelle variable, le hamiltonien qui réunit dans une même quantité : la dynamique du système, le critère à minimiser, et les contraintes intégrales. Cette démarche introduit des nouvelles variables a priori inconnues sous la forme d'un état adjoint de même taille que l'état du système.

Le « Principe du Maximum » de Pontryagin, énonce que, si la commande appliquée maximise à chaque instant le Hamiltonien, alors cette commande est optimale. Ceci induit

des conditions nécessaires d'optimalité qui s'écrivent comme un système d'équations différentielles couplées faisant intervenir, l'état, la commande et l'état adjoint. La difficulté de la démarche réside dans le fait que la plupart du temps ces équations différentielles ne s'intègrent pas de manière triviale.

Si la commande apparaît de manière linéaire dans le Hamiltonien, la commande optimale est de type « bang-bang », c'est-à-dire qu'elle oscille entre son minimum et son maximum admissible [Howlett 2009], [Kim 2011].

Si la commande apparaît sous forme quadratique dans le Hamiltonien, la commande s'explique analytiquement en fonction de l'état et de l'état adjoint. Il est possible alors dans certains cas de calculer la commande optimale de manière littérale [Schwarzkopf 1977].

Dans les cas où le modèle ne permet pas de simplifications du Hamiltonien, il est possible de réaliser une intégration en temps discret avec un outil numérique [Delprat 2004].

3.1.4 Programmation Dynamique

La Programmation Dynamique est une technique numérique d'optimisation qui est basée sur le principe d'optimalité de Bellman [Borne 2013]. Ce principe énonce que « toute sous partie d'un chemin optimal est optimale ». La Programmation Dynamique traite des problèmes décisionnels dans lesquels il existe une succession d'étapes à franchir. A chaque étape une décision être prise en respectant des contraintes. Chaque décision engendre un coût.

Le problème consiste alors à chercher une suite des décisions optimales qui minimisent le coût total des décisions. Le Principe de Bellman permet de réécrire le problème d'optimisation global comme une succession de problèmes de complexité réduite. La résolution est confiée à un outil numérique qui va procéder à des tests successifs pour résoudre les différentes étapes du problème. Compte tenu de la technologie de résolution, la taille du problème grandit avec le nombre d'étapes de décisions.

Si l'on veut utiliser la programmation dynamique pour optimisation l'autonomie de véhicule, il convient de réduire le problème à un nombre fini d'étapes et de décision. Dans [Lin 2003], [Hellström 2009] et [Koot 2005], le temps est uniformément discrétisé afin de définir un nombre fini d'étapes. A chaque étape la commande est choisie parmi un jeu fini de commandes possibles. Les commandes qui ne respectent pas les contraintes du problème sont rejetées. Le problème de commande optimal est donc reformulé en une recherche d'une liste finie de point de passage de la commande.

3.1.5 Méthodologie proposée

Nous proposons d'étudier le problème de maximisation de l'autonomie du vélo en deux étapes.

Dans un premier temps (§3.2), nous ferons des hypothèses académiques sur le VAE en omettant certaines contraintes et en définissant l'altitude du parcours de manière analytique. Ceci permettra d'appliquer le Principe du Maximum pour obtenir **une commande optimale exacte qui nous servira de référence.**

Dans un deuxième temps (§3.3), nous résoudrons un problème réaliste avec des hypothèses moins fortes. Il sera tenu compte de toutes les contraintes présentes sur le système et le profil d'altitude d'un parcours sera issu d'une mesure. Pour cela nous utiliserons une discrétisation du problème posé. Nous appliquerons une méthode discrétisée de recherche, l'Algorithme A*, qui s'inspire de la programmation dynamique mais qui s'appuie sur une heuristique afin de réduire significativement le temps de calcul.

Les résultats obtenus avec la méthode discrétisée seront validés par confrontation avec la méthode exacte.

3.2 Optimisation de l'autonomie avec des hypothèses académiques

Dans cette section, nous proposons de rappeler les éléments des sections 2.2 et 2.4 sous des formes propres à la position d'un problème de Commande Optimale.

3.2.1 Ecriture du problème sous forme d'une équation d'état

On choisit de paramétrer la position du vélo sur son parcours en ramenant toutes les variables à la roue du moteur électrique. On pose donc :

- l'angle du moteur : $x_1(t) = \frac{s(t)}{R_r}$,
- la vitesse du moteur : $x_2(t) = \omega(t)$,
- le vecteur d'état du système est noté : $\vec{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.¹

On définit également des variables et des paramètres intermédiaires afin d'alléger les notations :

- le couple de la gravité : $T_g(x_1) = mgR_r \sin(\alpha)$, cette variable dépend de la pente du circuit, en faisant un changement de variable, on l'exprime en fonction de la première coordonnée du vecteur d'état,
- le couple de frottement sec équivalent : $T_0 = mgR_r C_r + T_f$. La pente étant supposée faible, on assimile ici $\cos(\alpha) \approx 1$.
- le coefficient de couple aérodynamique : $k_a = \frac{1}{2} \rho S C_x R_r^3$

L'équation de propagation de l'état Φ s'écrit alors en utilisant le théorème de l'énergie cinétique (2.24) et le modèle de cycliste (2.45) :

$$\Phi \equiv \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{J} \left[k_i \frac{u - k_v x_2}{R_c} + \frac{\eta_t P_c(x_2)}{x_2} - T_0 + T_g(x_1) - k_a (x_2)^2 \right] \end{cases} \quad (3.1)$$

¹ On privilégiera une écriture des vecteurs avec une flèche conformément à l'usage en Mécanique, en Automatique les flèches sont classiquement omises.

3.2.2 Définition du problème d'optimisation

La circulation en vélo à assistance électrique pose la question d'un compromis dans le dosage de l'assistance. Une assistance trop forte accroît certes le confort du cycliste mais elle pénalise l'autonomie de la batterie. Afin d'optimiser l'autonomie de la batterie, la commande de l'assistance électrique est envisagée comme un problème d'optimisation sous contraintes. Le cycliste doit effectuer un trajet donné en un temps donné. La vitesse moyenne est représentative d'un trajet domicile travail.

Le temps final de l'essai est fixé à t_f , limite supérieure d'exécution de la mission. Le temps est donc contenu dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$. On souhaite minimiser l'énergie consommée par le moteur électrique. On exprime le critère d'optimisation sous forme intégrale avec (2.40) :

$$E_e = \int_{t_0}^{t_f} P_e(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{u^2(t) - k_v x_2(t) u(t)}{R_c} dt \quad (3.2)$$

La condition initiale sur l'état est supposée nulle, abscisse nulle et vitesse nulle. Le vélo réalise un départ arrêté :

$$\bar{x}(t_0) \equiv \begin{cases} x_1(t_0) = 0 \\ x_2(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A priori la condition finale de l'état peut être libre, mais on souhaite faire une optimisation qui assure que le vélo arrive à la fin du parcours s_f . On ajoute une contrainte sur la position, que l'on exprime sous forme intégrale :

$$x_1(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} x_2(t) dt \geq \frac{s_f}{R_r} \quad (3.4)$$

Le problème d'optimisation P1 est donc défini comme suit :

Chercher la commande optimale u^* qui vérifie :

- dans un temps défini dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$,
- le vecteur d'état \bar{x} admettant comme condition initiale $\bar{x} = \vec{0}$, progressant selon Φ (3.1),
- minimise le critère d'énergie électrique consommée E_e , (3.2)
- sous contrainte d'une distance parcourue minimale $x_1(t_f) \geq \frac{s_f}{R_r}$.

On note que la contrainte d'une distance minimale parcourue en un temps donné est équivalente à imposer une vitesse moyenne minimale sur le parcours.

Le problème P1 constitue une étape théorique de validation qui ne tient pas compte encore de toutes les contraintes auxquelles est soumis le système.

3.2.3 Profil d'altitude

On choisit pour commencer un parcours synthétisé analytiquement pour assurer la dérivabilité du profil d'altitude.

$$z(x_1) = z_0 \left[\sin\left(\frac{x_1}{\theta_1}\right) + \cos\left(\frac{x_1}{\theta_2}\right) \right] \quad (3.5)$$

Les 3 constantes sont choisies respectivement à $z_0 = -1m$, $\theta_1 = 240rad$, $\theta_2 = 160rad$. La longueur du parcours est arbitrairement fixée à 1km. Le profil d'altitude comprend une succession variée de montées et de descentes. La pente maximum est de 3,3%, ce qui reste raisonnable même sans assistance électrique.

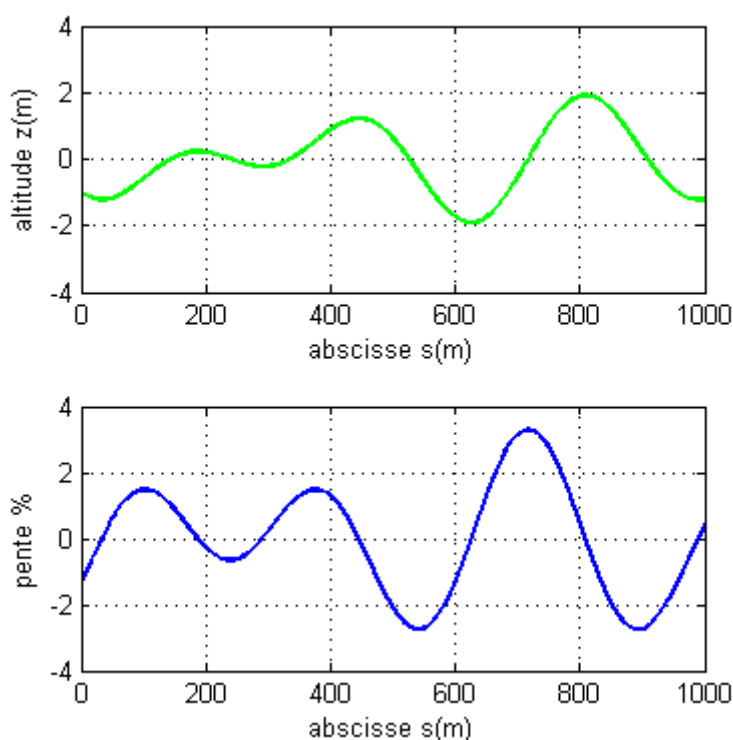


Figure 3-1 : profil d'altitude et pente décrite de manière analytique en fonction de l'abscisse du parcours.

3.2.4 Construction du hamiltonien

La Commande Optimale s'appuie sur le calcul variationnel. Cette méthodologie est basée sur l'introduction d'une nouvelle variable le hamiltonien $H(u, \bar{x}, \bar{\lambda}, t)$ qui réunit dans une même quantité la dynamique du système, le critère à minimiser et les éventuelles contraintes intégrales.

Les paragraphes §3.2.4 et §3.2.5 présentent les point clés de la démarche. Pour plus de détails on pourra se référer au chapitre 6 de l'ouvrage [Borne 2013]. Le hamiltonien du problème P1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H(u, \bar{x}, \bar{\lambda}, t) = & -\frac{u^2}{R_c} + \frac{k_v}{R_c} x_2 u \\
 & + \gamma x_2 \\
 & + \lambda_1 x_2 \\
 & + \lambda_2 \frac{1}{J} \left[\frac{k_i}{R_c} u - \frac{k_i k_v}{R_c} x_2 + \frac{\eta_t P_c(t)}{x_2} - T_0 + T_g(x_1) - k_a(x_2)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le terme $-\frac{u^2(t)}{R_c} + \frac{k_v}{R_c} x_2(t)u(t)$ correspond à l'opposé de la puissance. Le hamiltonien étant maximum, l'énergie consommée sera alors minimale.

Le terme $\gamma x_2(t)$ est proportionnel à la vitesse, il permet de respecter la contrainte de distance parcourue minimale. Le paramètre γ reste à calibrer en fonction de la distance parcourue souhaitée.

On introduit également un état adjoint composé de deux coordonnées variables dans le temps : $\bar{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$. L'état adjoint assure le respect de la dynamique du système en imposant la vérification à chaque instant de l'équation de propagation.

Le hamiltonien vérifie par construction le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{dx_2}{dt} \end{cases} \tag{3.7}$$

3.2.5 Conditions nécessaires à l'optimalité

La maximisation du hamiltonien induit des conditions nécessaires sur l'état adjoint. Ces conditions prennent la forme d'un système d'équations différentielles qui permettent de calculer l'évolution de l'état adjoint.

$$\Psi^{\Delta} \equiv \begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Il est possible de détailler de façon explicite les équations de ce système car les fonctions utilisées sont différentiables :

$$\Psi^{\Delta} \equiv \begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{mgz_0\lambda_2}{J} \left[\frac{1}{\theta_1} \cos\left(\frac{x_1}{\theta_1}\right) - \frac{1}{\theta_2} \sin\left(\frac{x_1}{\theta_2}\right) \right] \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{k_v}{R_c} u - \gamma - \lambda_1 + \lambda_2 \frac{1}{J} \left(\frac{k_i k_v}{R_c} + 2\alpha x_2 - \eta_t \frac{\frac{\partial P_c}{\partial x_2} x_2 - P_c}{(x_2)^2} \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

La commande $u(t)$ apparaît comme une forme quadratique dans le hamiltonien (3.6). Il est donc possible de déduire la commande optimale par une dérivée partielle :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{R_c} u + \frac{k_v}{R_c} x_2 + \frac{k_i}{JR_c} \lambda_2 = 0 \quad (3.10)$$

On obtient donc une expression explicite de la commande optimale en fonction de l'état et de l'état adjoint. On suppose dans ce problème simplifié que la commande n'est soumise à aucune contrainte, il n'est pas nécessaire d'introduire des fonctions de saturation.

$$u = Y(x_2, \lambda_2) = \frac{k_v}{2} x_2 + \frac{k_i}{2J} \lambda_2 \quad (3.11)$$

L'expression de la commande optimale est donc parfaitement explicitée, la difficulté réside dans le fait que la deuxième coordonnée de l'état adjoint $\lambda_2(t)$ n'est pas connue. Le paragraphe §3.2.6 explicite la méthode de détermination de l'ensemble des variables du système et par conséquent de la construction de la commande optimale exacte.

3.2.6 Identification de la commande optimale par la méthode de tir

La méthode de tir, « shooting method » dans sa traduction anglaise, consiste à trouver une commande optimale uniquement en recherchant les bonnes conditions initiales du problème et en laissant évoluer l'état et l'état adjoint selon la progression qui leur est propre.

La méthode de tir est une analogie au tir d'artillerie. L'artilleur règle l'angle de tir et la quantité de poudre avant de déclencher le tir. Une fois l'obus dans l'air, il n'est plus possible de le commander. Ce sont les conditions initiales qui détermineront si l'obus atteint sa cible ou non. Le tir suivant peut être réajusté en fonction des résultats du tir précédent. La méthode de tir s'applique aux systèmes donc les équations différentielles n'ont pas de solutions explicites connues.

L'évolution du modèle est régie par un système de 4 équations différentielles couplées non linéaires (3.1) et (3.9) et d'une équation linéaire qui définit la commande (3.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(u, x_1, x_2) \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = \Psi_1(x_1, \lambda_2) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \Psi_2(u, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ u = Y(x_2, \lambda_2) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

A notre connaissance, il n'est pas possible de trouver l'ensemble des solutions de ce système de manière analytique. On utilisera un outil numérique d'intégration permettant de calculer de manière approchée l'évolution du système en fonction du temps. Ce système a besoin pour débiter son calcul de 4 conditions initiales, 2 pour l'état $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ et de 2 pour l'état adjoint $(\lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0))$.

Dans la définition du problème de commande P1, la condition initiale de l'état a été fixée à $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$. Le problème de commande optimale se résume donc à trouver 2 conditions initiales pour l'état adjoint qui minimise l'énergie consommée tout en respectant la contrainte de distance parcourue.

Le respect de la contrainte de distance minimale parcourue introduit un paramètre γ qui reste à identifier. Ce paramètre intervient dans la fonction de propagation de l'état adjoint Ψ_2 sous la forme d'un terme $\lambda_1(t) + \gamma$. Le paramètre γ apparaît donc comme une composante continue qui s'ajoute à la variable $\lambda_1(t)$. Etant donné qu'il faut également

trouver la conditions initiale $\lambda_1(t_0)$, il existe une famille de solutions identiques qui vérifient $\lambda_1(t_0) + \gamma = cst$. On fixera donc arbitrairement $\gamma = 0$ et on cherchera uniquement la condition initiale $\lambda_1(t_0)$ qui garantit le respect de la distance minimale parcourue.

La mise en pratique de la méthode de tir utilise le logiciel Matalab Simulink®. Le synoptique du schéma bloc d'intégration des équations différentielles est présenté en figure (3-2). En entrée, on fixe les deux constantes d'intégrations $\lambda_1(t_0)$ et $\lambda_2(t_0)$ et en sortie, on analyse le critère de l'énergie consommée E_e et la contrainte de distance parcourue x_1 . La méthode d'intégration utilisée est de type Runge-Kutta avec un pas d'intégration de 10ms.

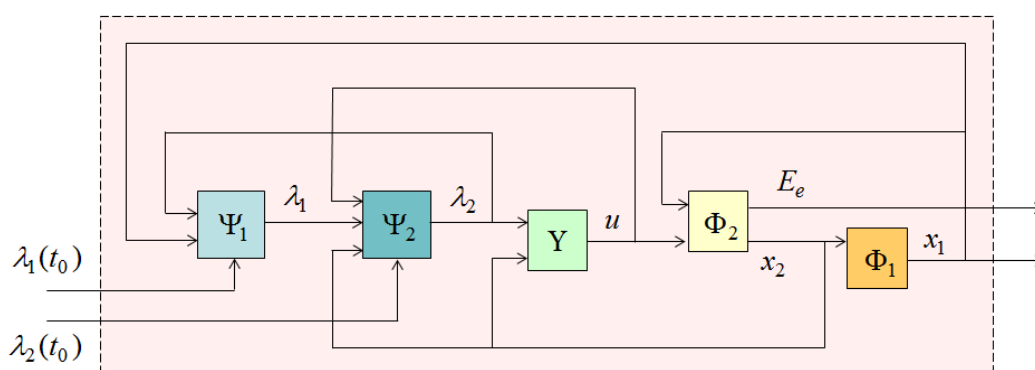


Figure 3-2 : schéma bloc permettant de calculer le critère et la contrainte en fonctions des conditions initiales de l'état adjoint.

Les résultats de la recherche sont représentés sous la forme d'une carte de couleurs figure 3-3. Cette carte représente l'évaluation du critère $E_e(\lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0))$ en fonctions des deux conditions initiales sur l'état adjoint. Le plan est séparé deux zones, une zone blanche dans laquelle la contrainte de distance n'est pas respectée, et une zone de dégradé de couleurs qui indique la valeur du critère énergétique. La zone de couleur en bleu indique une énergie consommée faible. Cette zone se situe sur la frontière qui sépare le plan en deux.

La minimisation de l'énergie est obtenue en saturant la contrainte, qui est assez naturel dans un problème d'optimisation sous contrainte.

La figure 3-4 présente le critère énergétique tracé le long de la frontière. Cette courbe possède un minimum global autour de $\lambda_2(t_0) \approx 40$ et plusieurs minima locaux. On constate sans le démontrer la courbe est monotone décroissante jusqu'à son minimum global. Les minima locaux sont tous situés pour des valeurs de $\lambda_2(t_0)$ supérieures à 50.

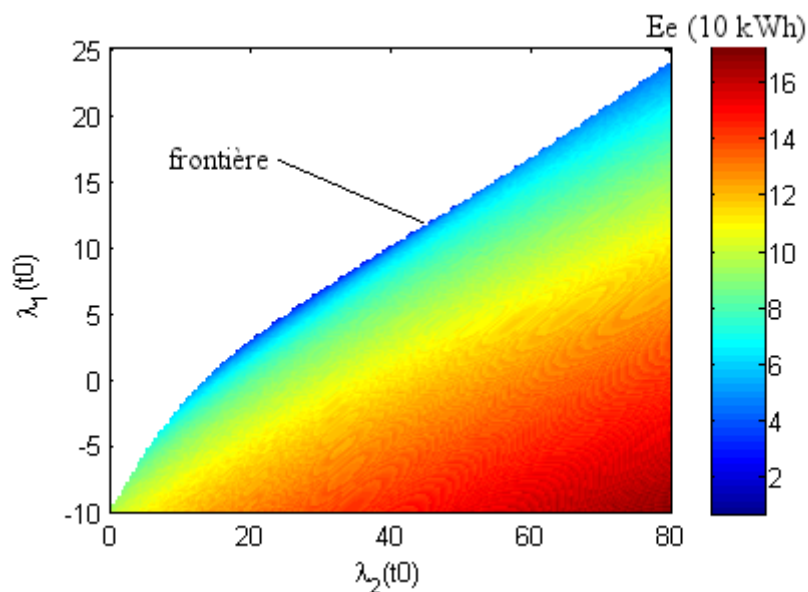


Figure 3-3 : exemple de cartographie du critère énergétique en fonction des conditions initiales de l'état adjoint. Le dégradé de couleurs indique la valeur du critère là où la contrainte de distance est respectée. La zone blanche représente le lieu dans lequel la contrainte de vitesse moyenne n'est pas respectée.

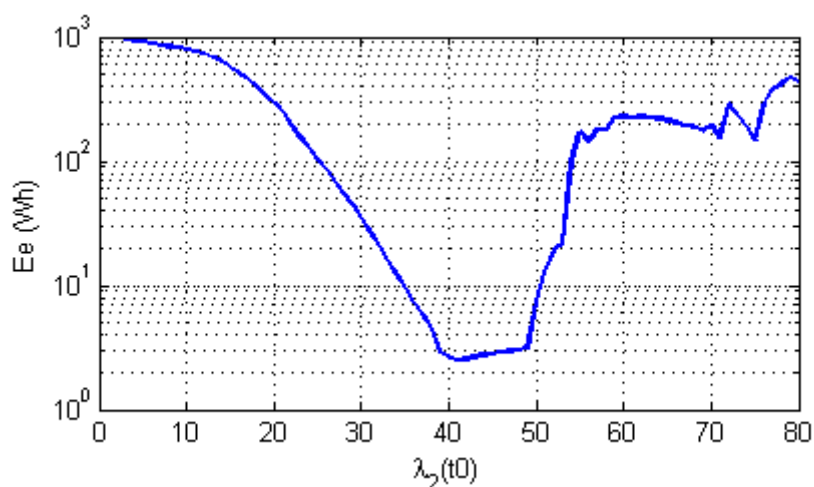


Figure 3-4 : critère énergétique tracé selon la frontière qui respecte exactement le critère de vitesse moyenne.

La méthode de recherche du minimum global se déroule en deux phases :

- identification du lieu des points de la frontière par dichotomie sur $\lambda_1(t_0)$,
- recherche du minimum le long de la courbe frontière par une méthode de descente suivant $\lambda_2(t_0)$ en partant $\lambda_2(t_0) = 0$.

Ainsi, la méthode converge vers le minimum global sans explorer la zone qui contient les minima locaux.

3.2.7 Résultats d'optimisation

Le résultat est présenté pour un cycliste dans la moyenne du panel développant une puissance moyenne de 100W pour une vitesse de confort de 28,4km/h. Le temps de trajet est fixé à 160s soit une vitesse moyenne de 22.8 km/h, ce qui est réaliste pour la conduite d'un VAE.

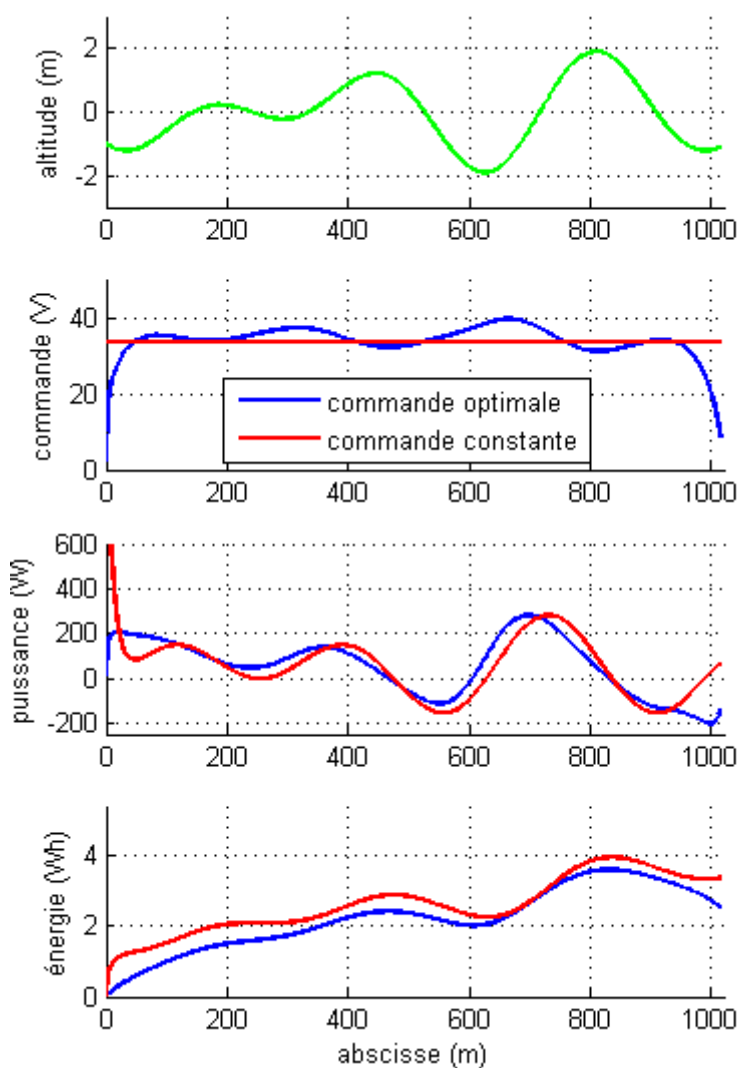


Figure 3-5 : comparaison de la performance de commande optimale par rapport à la commande constante

Afin de quantifier le gain d'autonomie, on synthétise une commande représentative d'un VAE du commerce u_{cst} qui asservit l'assistance sur la vitesse de pédalage du

cycliste. Du fait que le cycliste régule son pédalage à une vitesse pratiquement constante, la commande du commerce est également constante. On réglera cette constante pour que la vitesse moyenne du vélo soit identique à celle fixée pour réaliser la commande optimale.

La figure 3-5 présente la comparaison des résultats entre la commande optimale et la commande constante.

La commande optimale varie avec le profil d'altitude. La commande atteint son maximum vers 650m, juste avant la pente la plus raide du parcours à 700m. Cette anticipation, provient du fait que la commande optimale prend en compte l'intégralité du parcours.

Les deux commandes utilisent du frein régénératif dans les descentes à 550m et 900m. Ce frein régénératif se traduit par une puissance électrique négative.

La commande optimale consomme 2,52 Wh contre 3,35 Wh pour la commande constante. Ceci est dû à une meilleure utilisation du frein régénératif en fin de parcours et à une meilleure gestion de la puissance au démarrage. Le pic de consommation de la commande constante au démarrage atteint 2154W contre seulement 11W pour la commande optimale.

3.2.8 Influence du comportement humain

Le cycliste garde toujours son libre arbitre lorsqu'il pédale sur le VAE. Il peut choisir de pédaler moins fort, voire de ne pas pédaler du tout. De plus, son état de forme peut changer et la fatigue engendrer une baisse de performance. On va donc s'intéresser à l'évolution de la commande optimale en fonction de 3 états de forme du cycliste :

- cycliste en pleine forme, puissance nominale 100W,
- cycliste fatigué, puissance nominale 50W,
- cycliste épuisé, puissance nominale 0W.

Le tableau 3-1 et la figure 3-6 présentent les résultats de la commande optimale en fonction de l'état de fatigue du cycliste.

Etat de forme du cycliste	Commande moyenne (V)	Energie électrique consommée (Wh)	Energie cycliste produite (Wh)
Normal 100W	33,6	2,52	4,43
Fatigué 50W	34,5	5,13	2,21
Epuisé 0W	35,4	7,91	0

Tableau 3-1 : évolution de la commande optimale et de la consommations énergétique en fonction de l'état de fatigue du cycliste

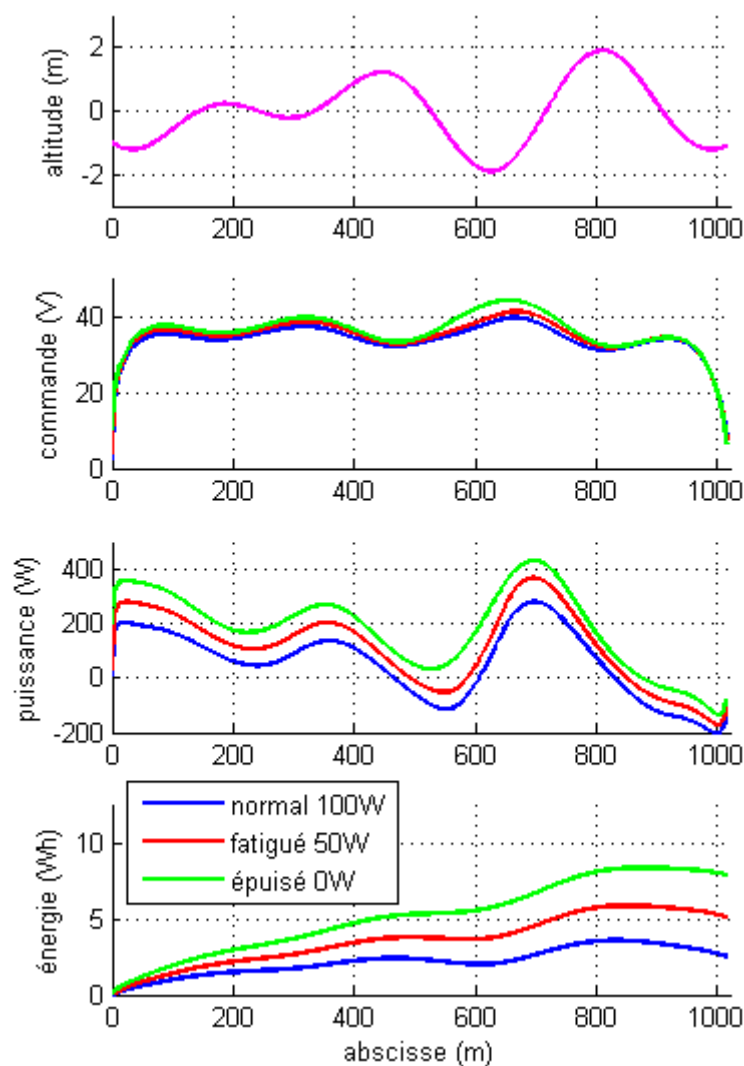


Figure 3-6 : évolution des performances de la commande optimale en fonction de l'état de fatigue du cycliste.

On constate que l'algorithme de tir est efficace pour calculer la commande optimale quel que soit le comportement du cycliste. La variation de commande est faible de l'ordre de +5% tandis que l'énergie électrique consommée augmente de manière significative +216%.

3.2.9 Amélioration de l'autonomie du vélo

La méthodologie de la Commande Optimale a été introduite afin d'améliorer l'autonomie de la batterie du vélo. On prendra comme référence la quantité d'énergie consommée par la commande constante et on s'intéresse à l'augmentation de l'autonomie

induite par la commande optimale. Cette comparaison a été faite en faisant varier la puissance du cycliste de 0W à 100W. Les résultats sont tracés sur la figure 3-7.

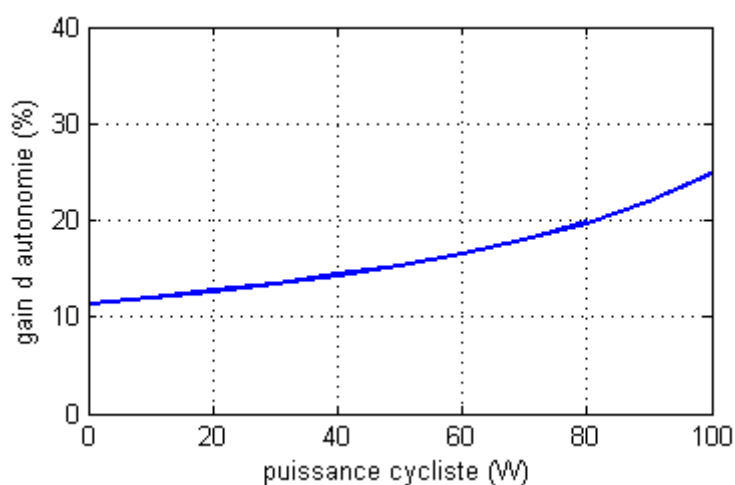


Figure 3-7 : augmentation de l'autonomie de la batterie due à la commande optimale en fonction de la puissance du cycliste.

Lorsque le cycliste ne pédale pas, soit parce qu'il est épuisé, soit parce qu'il ne le désire pas, la commande optimale permet d'augmenter l'autonomie de 11,4%. En revanche lorsque le cycliste pédale à 100W la commande optimale permet d'augmenter le rayon d'action du vélo de 24,8%.

La commande optimale est d'autant plus efficace que la puissance moyenne du cycliste augmente.

Cette amélioration est substantielle mais ne s'applique que dans un cas académique. On s'attachera donc dans la section suivante à utiliser des hypothèses moins fortes afin de se rapprocher de conditions d'utilisation du VAE plus réalistes. Le profil d'altitude sera issu de mesures topographiques. La commande de l'assistance électrique respectera la législation et tiendra compte des limitations technologiques imposées par le moteur.

3.3 Optimisation de l'autonomie en conditions réalistes

Le paragraphe §3.2 a permis de synthétiser une commande optimale en utilisant des hypothèses académiques :

- fonctions continues et dérivables,
- aucune contrainte imposée à la commande.

L'objectif applicatif de ces recherches est de réaliser une carte de contrôle qui soit réellement installée sur un VAE. Il est donc nécessaire de s'intéresser à la prise en compte de l'ensemble des contraintes afin de définir une commande optimale plus réaliste.

Pour représenter un parcours réel, on utilise les Systèmes d'Informations Géographiques (SIG) [Bordin 2002]. Ils s'appuient sur une représentation discrétisée des itinéraires routiers. La description du profil d'altitude du trajet provient d'une séquence de points géo-référencés.

Le VAE est soumis à des contraintes légales. La commande doit limiter la puissance à 250W et se couper lorsque la vitesse du vélo dépasse 25km/h.

La commande du moteur est également soumise à des contraintes technologiques. Le courant doit être bridé à 20A pour ne pas endommager les bobinages du moteur. La tension de la batterie limite la commande maximale également la commande maximale à 40V. Enfin, le contrôleur dont nous disposons, ne permet pas de frein régénératif, le courant d'alimentation est toujours positif ou nul.

3.3.1 Réécriture du problème d'optimisation sous forme discrétisée

Ce paragraphe vise à réécrire le problème d'optimisation de manière à prendre en compte l'ensemble des contraintes. La méthodologie employée s'appuie sur les travaux de planification de trajectoire appliquée aux robots [Latombe 1991]. Le but est de trouver une trajectoire reliant une configuration initiale à une configuration finale en respectant un grand nombre de contraintes. L'objectif en Robotique est bien souvent de trouver une trajectoire admissible, le critère à optimiser ne servant qu'à guider la recherche. Dans le cas présent, la minimisation de l'énergie consommée est également importante.

L'une des possibilités envisagée pour résoudre ce problème très complexe est de discrétiser l'espace d'état et l'espace de commande afin de réduire la recherche à un nombre fini de possibilités. Cette méthode est également encouragée par la description discrétisée du profil d'altitude.

Nous choisissons dans un premier temps de discrétiser le temps avec un pas de temps uniforme Δt :

$$t_k = t_0 + k\Delta t \quad \text{pour} \quad k \in \left\{0; 1; \dots; k_f = \frac{t_f - t_0}{\Delta t}\right\} \quad (3.13)$$

L'espace d'état admissible est également discrétisé de manière uniforme :

$$\bar{x}_k = \begin{cases} x_{1,k} \in \{0; \Delta x_1; \dots; x_1^{\max}\} \\ x_{2,k} \in \{0; \Delta x_2; \dots; x_2^{\max}\} \end{cases} \quad (3.14)$$

A chaque pas de temps t_k , l'état continu $\bar{x}(t_k)$ est arrondi à l'état discret le plus proche \bar{x}_k . La longueur du parcours x_1^{\max} détermine la borne sup de l'angle moteur. La vitesse maximale, quant à elle, dépend de la commande maximale et de la descente maximale. Une borne supérieure de vitesse angulaire $x_2^{\max} = 50 \text{rad.s}^{-1}$ est suffisante. Elle correspond à une vitesse linéaire du vélo de 57km/h. Des erreurs d'arrondi sont commises à la fois sur l'angle moteur et sur la vitesse angulaire.

Afin d'approximer la commande optimale, nous choisissons de commander le système avec une fonction continue, affine par morceaux. A chaque pas de temps t_k , on attribue un point de passage de la commande u_k , choisi parmi une liste prédéfinie de valeurs $u_k \in \{0, \Delta u, \dots, u_{\max}\}$. La commande est donc parfaitement définie par la liste des points de passage : $\{u_0, u_1 \dots u_{k_f}\}$:

$$t \rightarrow u(t) \equiv \begin{cases} k \in \{0, 1, \dots, k_f - 1\} \\ u(t) = u_k + \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} (t - t_k) \quad t \in [t_k; t_{k+1}] \end{cases} \quad (3.15)$$

La figure 3-8 présente un exemple possible de commande affine par morceaux. La fonction de commande appartient maintenant à un espace dénombrable ce qui restreint considérablement l'espace de recherche.

Bien que fini, le nombre de commandes possibles augmente très rapidement avec la discrétisation. Le problème d'optimisation se résume à trouver une séquence de points de passage de la commande qui minimise la fonction de coût énergétique tout en satisfaisant l'ensemble des contraintes.

A chaque pas de temps t_k , un nouveau point de passage de la commande u_{k+1} est choisi. La commande est donc parfaitement définie dans l'intervalle $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Les équations différentielles de propagation de l'état sont intégrées numériquement de manière atteindre le temps t_{k+1} . L'état atteint $\bar{x}(t_{k+1})$ est arrondi à l'état discrétisé le plus proche \bar{x}_{k+1} .

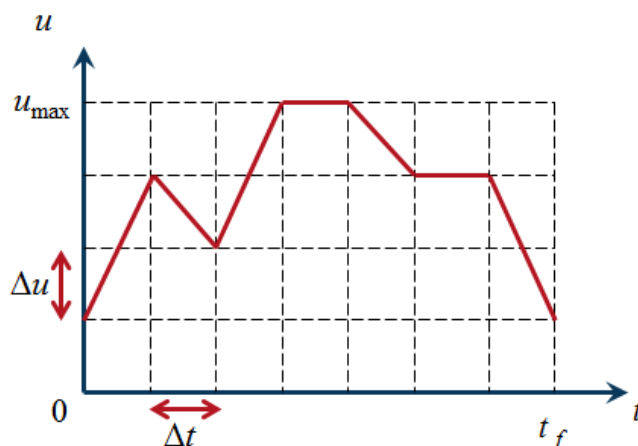


Figure 3-8 : exemple de commande affine par morceaux définie par ces points de passages

On identifie l'évolution de l'état discrétisée à un cheminement dans un graphe valué $G(X, U, v)$ [Carlier 2014] dans lequel :

- X est l'ensemble qui contient les sommets du graphe, il s'agit ici de l'ensemble des états discrétisés $X = \{\bar{x}_k\}$ (3.14),
- U est une partie de $X \times X$ dont les éléments sont appelés arcs, dans le cas présent elle est constituée de l'ensemble des commandes discrétisées $u(t)$ dans l'intervalle de temps $t \in [t_k; t_{k+1}]$ (3.15),
- v est une application de U dans \mathbb{R} appelée fonction de coût, dans le problème discrétisé on utilise l'énergie nécessaire pour aller d'un sommet à son successeur pour valuer les arcs. On pourra aussi parler de fonction de coût.

$$v_{x_k \rightarrow x_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_e(t) dt \quad (3.16)$$

Avec ce formalisme, l'énergie consommée par l'assistance électrique pendant le trajet qui relie le début du parcours \bar{x}_0 à la fin du parcours \bar{x}_f se calcule en sommant les valuations rencontrées tout au long du trajet :

$$E_e = \sum_{k=0}^{k_f-1} v_{x_k \rightarrow x_{k+1}} \quad (3.17)$$

La figure 3-9 présente un exemple très simple de graphe. Les carrés représentent les sommets, les flèches représentent les arcs. Le graphe est construit dynamiquement en partant de l'état initial et en appliquant à celui-ci l'ensemble des commandes discrétisées possibles.

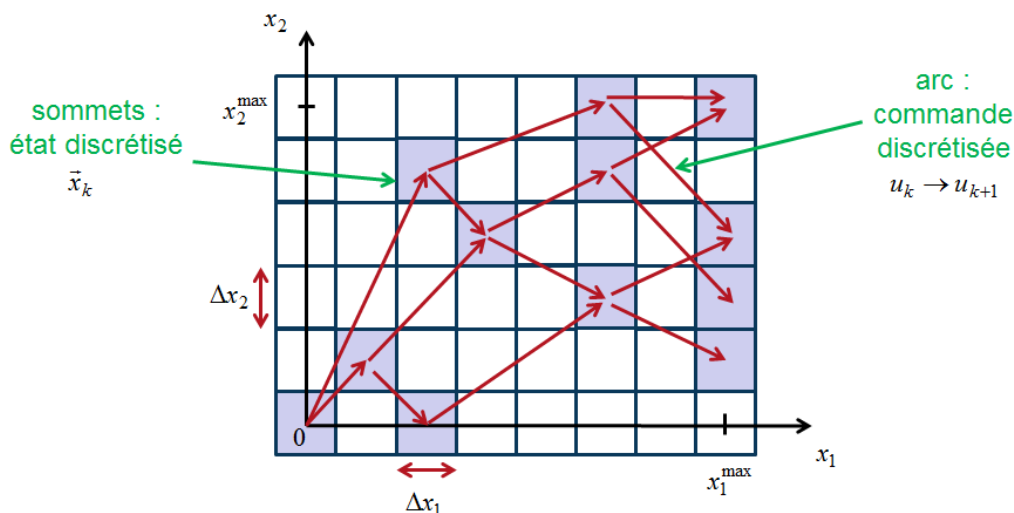


Figure 3-9 : exemple simplifié de graphe représentant l'évolution de l'état discrétisé en fonction des commandes possibles.

Le nombre d'arcs dans le graphe se déduit en dénombrant l'ensemble des commandes discrétisées possibles.

$$n_{arc} = \left(\frac{u_{max}}{\Delta u} + 1 \right)^{\left(\frac{t_f}{\Delta t} + 1 \right)} \quad (3.18)$$

3.3.2 Problèmes de cheminement à coût minimal

Le problème de commande optimale P1 peut s'écrire sous forme discrétisée comme la recherche du chemin dans le graphe qui,

- partant de l'état \bar{x}_0 ,
- atteint un sommet dont l'abscisse est x_1^{max} (respect de la contrainte),
- minimise le coût total du chemin (3.17) (minimise l'énergie dépensée).

Ce type de problème est appelé « problème de cheminement dans un graphe à coût minimal ». Les méthodes de résolution de ce type de problèmes utilisent classiquement le principe de Bellman (§ 3.1.4) réécrit dans le cas d'un graphe valué : « tout sous-chemin d'un chemin de valeur minimale est un chemin de valeur minimale ».

Il est également démontré [Carlier 2014] qu'« il existe un chemin de valeur minimale, si et seulement si, le graphe ne possède pas de cycle de coût strictement négatif ». Le graphe construit par la commande discrétisée, ne possède pas de cycle. En effet le vélo progresse en permanence sur le parcours en marche avant et ne peut pas faire marche arrière. De plus, si un cycle existait, il serait dissipatif. On en conclut l'existence d'au moins un chemin de valeur minimale.

Le problème de recherche de chemin à coût minimal dans un graphe possède une méthodologie classique publiée en 1959 connue sous le nom d'Algorithme Dijkstra du nom son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra. L'algorithme développe d'abord les sommets qui sont le plus proche du point de départ. Le graphe est exploré « en largeur d'abord ». Cet algorithme est efficace pour trouver le chemin de coût minimal mais relativement lent et gourmand en ressource de stockage mémoire lorsque le graphe est grand car il explore tous les arcs du graphe.

Nous proposons ici de mettre en œuvre l'algorithme A^* (prononcé A étoile) [Hart 1968]. Cet algorithme développe en premier les nœuds qui sont les plus proches de l'arrivée. Ceci est impossible car il faudrait connaître a priori le chemin optimal. Pour pallier cette méconnaissance, on suppose qu'il existe en chaque sommet S une fonction appelée heuristique $h(S)$ qui estime a priori le coût du chemin restant à parcourir pour rallier l'arrivée.

Pour chaque sommet atteint par l'algorithme, le coût $g(S)$ du départ au sommet S est calculé. Une fonction de priorité $f(S) = h(S) + g(S)$ est alors évaluée pour chaque nœud visité. Cette fonction permet de choisir à chaque étape le sommet le plus « prometteur » qui sera exploré en premier. Il possède la quantité $f(S)$ la plus petite. Cette recherche va donc explorer le graphe « en profondeur d'abord ». Lorsque l'algorithme atteint un sommet « arrivée », il s'arrête. En conséquence l'algorithme A^* se termine plus rapidement que celui de Dijkstra car il n'explore pas tous les arcs du graphe.

La recherche de cheminement de l'algorithme A^* est d'autant plus rapide que l'heuristique est proche de la solution optimale. De plus, il est démontré dans [Hart 1968] que : **si pour tout sommet, l'heuristique est une borne inférieure du coût minimal pour atteindre la fin du graphe, alors si une solution existe, l'algorithme la trouve, le chemin obtenu est de coût minimal.** Nous nous placerons toujours dans ce cas.

Un exemple simple de problème de cheminement est traité avec les algorithmes de Dijkstra et A* en annexe.

3.3.3 Implémentation de l'Algorithme A* pour la minimisation d'énergie

Dans notre problème, les sommets sont définis par un état discrétisé \bar{x}_k . On notera $\bar{x}_{père}$ le sommet père, antécédent du sommet fils noté \bar{x}_{fils} . Chaque sommet père engendre n fils $(\bar{x}_{fils}^1, \bar{x}_{fils}^2, \dots, \bar{x}_{fils}^n)$, qui sont calculés à partir des n valeurs de commandes possibles $\{u_1, u_2 \dots u_n\}$. Le calcul des sommets fils se fait à partir des conditions initiales du sommet père par intégration d'équation de propagation de l'état Φ (3.1). L'énergie consommée pour aller du sommet père vers le sommet fils représente le coût de l'arc $E_e(\bar{x}_{père} \rightarrow \bar{x}_{fils})$. L'origine du graphe se trouve à l'état initial \bar{x}_0 . Tous les sommets dont l'abscisse est supérieure à la fin du parcours, c'est-à-dire qui respecte de la contrainte de vitesse moyenne minimale sont admissibles comme sommets « arrivée ».

Pour implémenter l'algorithme on définit plusieurs attributs à un sommet :

- l'adresse du sommet père qui l'a engendré par le plus court chemin rencontré : $père(\bar{x}_k)$, sauf pour le sommet origine qui n'a pas de père.
- la commande discrétisée à l'instant t_k : $u_k(\bar{x}_k) = u(t_k)$
- le coût minimal rencontré du départ jusqu'au sommet : $g(\bar{x}_k)$,
- l'heuristique qui estime le coût entre ce sommet et l'arrivée : $h(\bar{x}_k)$,
- la valeur de la fonction de priorité du sommet : $f(\bar{x}_k) = g(\bar{x}_k) + h(\bar{x}_k)$.

A l'initialisation de l'algorithme on ouvre 2 listes contenant des adresses de sommets :

- P une liste chaînée, qui contient tous les sommets rencontrés qui n'ont pas encore engendré de fils. Cette liste est ordonnée par f croissant. Au commencement de l'algorithme cette liste contient uniquement le sommet initial : \bar{x}_0 .
- Q une liste non classée qui contient tous les sommets qui ont engendré des fils. Au commencement de l'algorithme cette liste est vide.

Le cœur de l'algorithme A* est constitué d'une boucle unique :

Tant le premier élément de P n'est pas un sommet « arrivée » ou que P n'est pas vide, faire :

Etape 1 : le premier élément de la liste P est mémorisé en tant que sommet père $\bar{x}_{père}$. Cet élément est retiré de P et on l'insère dans Q .

Etape 2 : Le sommet père est propagé pour engendrer ses n sommets fils. Pour chaque fils on calcule l'énergie qu'il a fallu pour l'engendrer $g(\bar{x}_{fils}) = g(\bar{x}_{père}) + E_e(\bar{x}_{père} \rightarrow \bar{x}_{fils})$

Etape 3 : Un sommet fils est jugé éligible si il respecte la contrainte de vitesse moyenne imposée, et s'il n'a jamais été rencontré auparavant $\bar{x}_{fils} \notin P \cup Q$, ou bien si ce fils a déjà été rencontré $\bar{x}_{fils} \in P$ mais qu'il vient d'être engendré par un chemin plus court qu'auparavant.

Etape 4 : Pour chaque fils jugé éligible. On mémorise l'adresse de son sommet père : $père(\bar{x}_{fils}) = \bar{x}_{père}$. On calcule son heuristique $h(\bar{x}_{fils})$ et sa fonction de priorité $f(\bar{x}_{fils}) = g(\bar{x}_{fils}) + h(\bar{x}_{fils})$. Le sommet fils est alors inséré dans P par ordre croissant de f .

A la fin de la boucle, si la liste P n'est pas vide, le premier élément qu'elle contient est le dernier sommet du chemin optimal \bar{x}_{kf}^* . On construit alors le chemin optimal complet en remontant la liste des sommets « père » jusqu'au sommet de départ avec la formule de récurrence.

$$\text{Pour } k \in [0, k_f - 1] \quad \bar{x}_k^* = \bar{x}_{père}(\bar{x}_{k+1}^*) \quad (3.19)$$

On obtient donc la liste des sommets qui constituent le chemin à coût minimal $\{\bar{x}_k^*\}$. On construit ensuite les points de passage de la commande optimale discrétisée :

$$u_k^* = u_k(\bar{x}_k^*) \quad (3.20)$$

La commande optimale est alors parfaitement définie avec la liste des points de passage $\{u_k^*\}$ et la formule de construction (3.15). Il est alors possible de rejouer la progression de l'état soumis à la commande optimale afin de visualiser les profils de vitesse, de puissance ou d'énergie.

A la fin de la boucle, si la liste P est vide, il n'y a pas de solution. Cela peut se produire si le moteur et le cycliste manquent de puissance pour garantir la contrainte de vitesse moyenne. **L'algorithme A* peut aussi prouver l'absence de solution satisfaisant la contrainte intégrale du problème.**

3.3.4 Construction d'une heuristique énergétique

L'efficacité de l'algorithme A* dépend de la qualité de l'heuristique utilisée. Ce paragraphe détaille la manière dont peut être construite une heuristique adaptée à la minimisation d'énergie. Cette heuristique s'appuie sur les relations mécaniques qui existent entre les puissances mécaniques, les énergies potentielles et le travail. L'heuristique doit être une borne minimale de l'énergie nécessaire pour aller du sommet \bar{x}_k à un des sommets « arrivée » \bar{x}_f afin de garantir l'optimalité du chemin trouvé (§3.3.2). On déduit une expression de l'heuristique avec (3.2) :

$$h(u_k) \leq \int_{t_k}^{t_f} P_e(t) dt \quad (3.21)$$

Dans un premier temps on utilise le rendement du moteur $\eta_{mot}(t)$ pour remplacer la puissance électrique du moteur par la puissance mécanique. Ce rendement moteur est bornée par une limite technologique : η_{mot}^{\max} .

$$h(u_k) \leq \frac{1}{\eta_{mot}^{\max}} \int_{t_k}^{t_f} P_m(t) dt \leq \int_{t_k}^{t_f} \frac{P_m(t)}{\eta_{mot}(t)} dt \quad (3.22)$$

On exprime la puissance mécanique du moteur avec le théorème de l'énergie cinétique intégré sur le parcours (2.24). La différence d'énergie cinétique $E_{\Sigma/0}$ est égale aux travaux qui s'exercent sur le système. On fait apparaître classiquement le travail de la gravité comme une énergie potentielle U_g .

$$E_{\Sigma/0}(\bar{x}_f) - E_{\Sigma/0}(\bar{x}_k) = \int_{t_k}^{t_f} P_m(t) dt + W_r(\bar{x}_k) + W_a(\bar{x}_k) + \eta_t W_c(\bar{x}_k) + U_g(\bar{x}_k) - U_g(\bar{x}_f) \quad (3.23)$$

Le terme d'énergie cinétique a déjà été rencontré (2.8) et il s'exprime ici dans sa forme discrétisée :

$$E_{\Sigma/0}(\bar{x}_f) - E_{\Sigma/0}(\bar{x}_k) = \frac{1}{2} J [(x_{2,f})^2 - (x_{2,k})^2] \quad (3.24)$$

La résistance au roulement (2.15) et les frottements internes du moteur (2.35) ont été rassemblés en un couple de frottement équivalent T_0 . Le travail de ce couple possède une intégrale première explicite.

$$W_r(\bar{x}_k) = \int_{t_k}^{t_f} -T_0 x_2(t) dt = -T_0 (x_{1,f} - x_{1,k}) \quad (3.25)$$

Le travail de la résistance à l'air (2.18) n'est pas calculable car la vitesse du vélo n'est pas connue.

$$W_a(\bar{x}_k) = \int_{t_k}^{t_f} -k_a [x_2(t)]^3 dt \quad (3.26)$$

On cherche donc à borner cette quantité. Pour cela on introduit la vitesse moyenne \bar{x}_2 sur le trajet à venir.

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{t_f - t_k} \int_{t_k}^{t_f} x_2(t) dt = \frac{x_{1,f} - x_{1,k}}{t_f - t_k} \quad (3.27)$$

En notant $\Delta x_2(t)$ l'écart à la moyenne, il est possible de développer le cube :

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_f} [x_2(t)]^3 dt &= \int_{t_k}^{t_f} [\bar{x}_2 + \Delta x_2(t)]^3 dt \\ &= \int_{t_k}^{t_f} [\bar{x}_2]^3 dt + 3\bar{x}_2^2 \int_{t_k}^{t_f} \Delta x_2(t) dt + \int_{t_k}^{t_f} [3\bar{x}_2 + \Delta x_2(t)] [\Delta x_2(t)]^2 dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

En remarquant que l'intégrale de l'écart à la moyenne est nulle $\int_{t_k}^{t_f} \Delta x_2(t) dt = 0$ et que le produit $[3\bar{x}_2 + \Delta x_2(t)] [\Delta x_2(t)]^2$ est toujours positif, le travail aérodynamique admet donc une borne supérieure :

$$W_a = -k_a \int_{t_k}^{t_f} [x_2(t)]^3 dt \leq -k_a \int_{t_k}^{t_f} [\bar{x}_2]^3 dt = -k_a (t_f - t_k) [\bar{x}_2]^3 = -k_a \frac{(x_{1,f} - x_{1,k})^3}{(t_f - t_k)^2} \quad (3.29)$$

Le travail musculaire du cycliste est borné car la puissance du cycliste (2.46) est bornée par P_c^{nom} :

$$\eta_t W_c(\bar{x}_k) = \eta_t \int_{t_k}^{t_f} P_c \leq \eta_t P_c^{nom} (t_f - t_k) \quad (3.30)$$

L'énergie potentielle de gravité se calcule à partir de l'expression des altitudes des sommets.

$$U_g(\bar{x}_k) - U_g(\bar{x}_f) = mg[z(x_{1,k}) - z(x_{1,f})] \quad (3.31)$$

Le rendement du moteur électrique peut être trivialement majoré par 100%. Cependant on peut obtenir un majorant plus petit en utilisant un majorant du couple moteur (2.35) $T_m(t)k_i i(t) - T_f \leq k_i i(t)$ et un minorant de la tension du moteur (2.34) $u(t) = R_c i(t) + k_v x_2(t) \geq k_v x_2(t)$.

$$\eta_{mot}(t) = \frac{P_m(t)}{P_e(t)} = \frac{T_m x_2(t)}{u(t)i(t)} = \frac{[k_i i(t) - T_f] x_2(t)}{[R_c i(t) + k_v x_2(t)] i(t)} \leq \frac{k_i}{k_v} \quad (3.32)$$

En substituant (3.24), (3.25), (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), dans (3.22) on construit la fonction heuristique.

$$h_1(\bar{x}_k) = \frac{k_v}{k_i} \left[-\frac{1}{2} J(x_{2,k})^2 - mg[z(x_{1,k}) - z(x_{1,f})] + T_0(x_{1,f} - x_{1,k}) + k_a \frac{(x_{1,f} - x_{1,k})^3}{(t_f - t_k)^2} - \eta_t P_c^{\max}(t_f - t_k) \right] \quad (3.33)$$

3.3.5 Résultats de l'algorithme A*

Afin de valider la méthode de recherche du chemin optimal par l'algorithme A*, il est nécessaire de la tester sur un problème dont la solution exacte est connue. On choisit de se placer dans un premier temps dans le cas du problème P1 dont la solution optimale a été trouvée dans le paragraphe §3.2.7. Le cycliste est supposé en forme et développe une puissance de 100W.

La méthode discrétisée nécessite de choisir la taille de 4 quanta,

- deux pour l'état : la position Δx_1 et la vitesse Δx_2 ,
- deux pour la commande : le temps Δt et la tension Δu .

La quantification de l'état n'intervient pas a priori sur la qualité de la solution. Il suffit que cette quantification soit suffisante pour rendre les erreurs d'arrondi assez petites pour ne pas influencer le choix des chemins dans le graphe.

Une quantification de vitesse réglée à $\Delta x_2 = 0.25 \text{ rad.s}^{-1}$ pour une vitesse maximale de $x_2^{\text{max}} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ donnent des résultats satisfaisants. Afin que l'erreur commise sur la position soit comparable à celle commise sur la vitesse, les pas d'échantillonnage Δx_1 et Δx_2 respectent la relation.

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Delta t \tag{3.34}$$

On propose dans un premier temps une discrétisation grossière de la commande afin d'obtenir un graphe de petite taille qui puisse être représenté (figure 3-10) :

- $\Delta u = 10V$ pour $u_{\text{max}} = 40V$ soit 5 possibilités de commande à chaque instant de décision.
- $\Delta t = 40s$ pour $t_f = 160s$ soit 5 instants de décision.

Le graphe qui résulte de cette discrétisation comporte théoriquement 3125 arcs. On utilise le logiciel Matlab© pour exécuter l'algorithme A*.

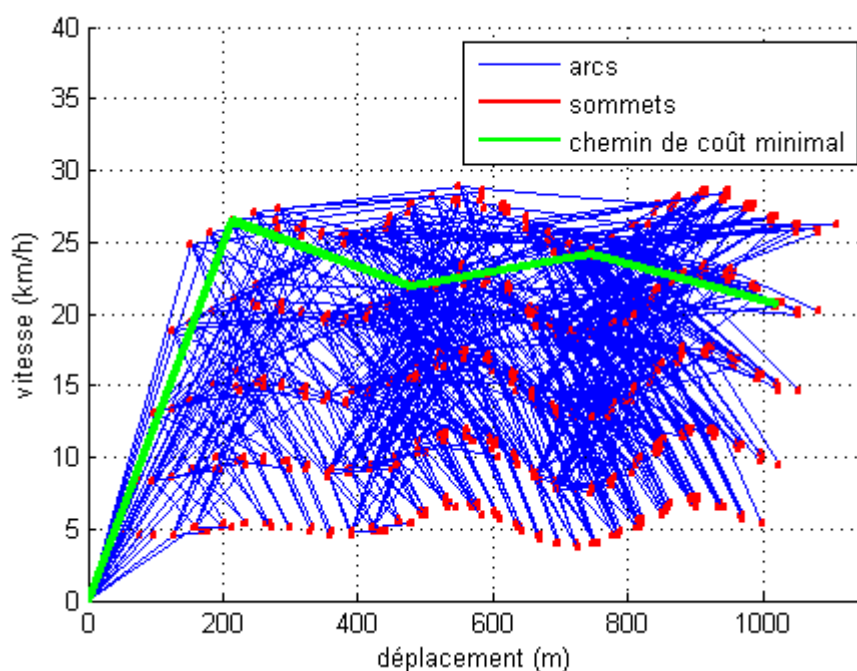


Figure 3-10 : graphe représenté dans l'espace d'état, obtenu après exécution de l'algorithme A*.

On constate que les sommets explorés se situent sur 5 niveaux de vitesses différents qui correspondent aux 5 niveaux de tension possibles, en effet plus la commande est importante plus le VAE roule vite.

Parmi les 3125 arcs seuls 660 ont été explorés. La fonction heuristique remplit donc bien son rôle pour exécuter une recherche « en profondeur d'abord ». Notamment, on remarque que les sommets qui possèdent une vitesse basse (autour de 5km/h) n'ont pas été propagés car ils étaient jugés moins « prometteurs » par la fonction heuristique.

La figure 3-11 présente les performances de l'assistance électrique sur le parcours obtenus avec la commande discrétisée.

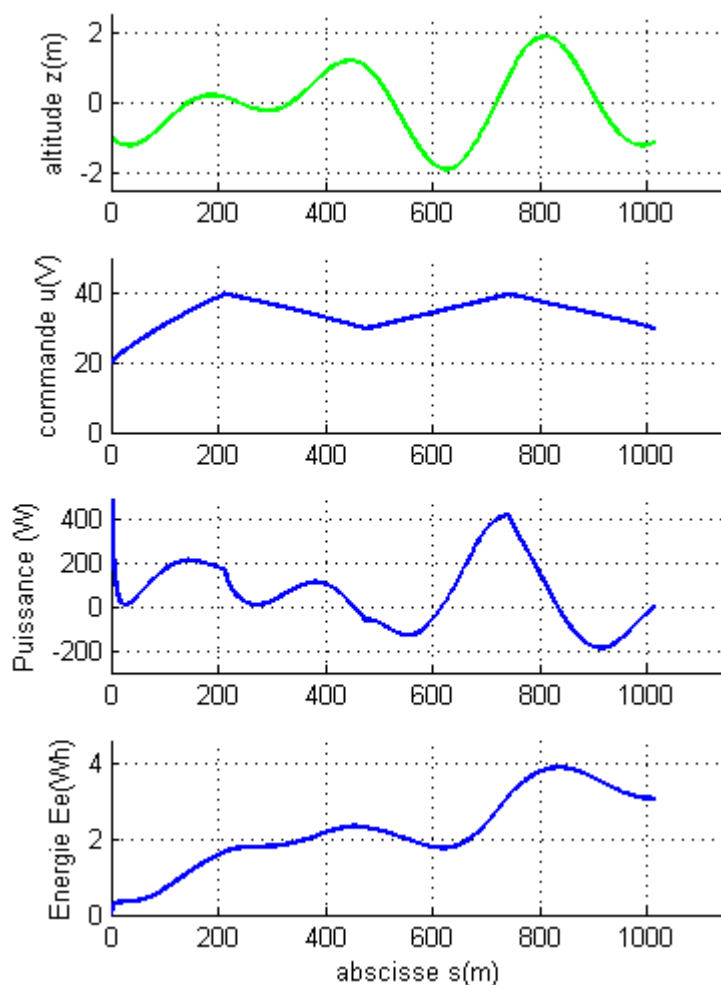


Figure 3-11 : résultats de l'algorithme A*, évolution de la commande, de la puissance et de l'énergie consommée par l'assistance électrique en fonction de l'abscisse.

On constate que la commande assure un démarrage progressif en début de parcours en passant de 20V à 40V sur les 200 premiers mètres. Le pic de puissance électrique au démarrage est de courte durée. Le frein régénératif est utilisé dans les descentes et en fin

de parcours. La consommation électrique sur le parcours est de 3,07Wh soit une économie de 8,4% par rapport à la commande constante calculée dans 3.2.7.

3.3.6 Résultats comparés à la méthode exacte

On cherche dans ce paragraphe à trouver une discrétisation de la commande qui permette d'obtenir une solution qui se rapproche le plus possible de la commande exacte trouvée dans §3.2.7.

Le choix de la discrétisation de la commande est critique car il conditionne la qualité de la solution. Plus la discrétisation est fine plus la fonction affine (3.15) aura de degrés de liberté pour s'approcher de la commande optimale. En revanche cette amélioration s'accompagne d'une augmentation exponentielle du nombre d'arcs à explorer (3.18) et donc du temps de calcul. Le choix d'une discrétisation résulte donc d'un compromis entre précision et durée du calcul.

On choisit de faire une recherche exhaustive sur :

- 7 pas de discrétisation pour le temps $\Delta t \in \{5s ; 8s ; 10s ; 16s ; 20s ; 32s ; 40s\}$
- 7 pas de discrétisation pour la commande $\Delta u \in \{1,6V ; 2V ; 2,5V ; 4V ; 5V ; 8V ; 10V\}$

En croisant toutes les combinaisons on obtient 49 possibilités. La figure 3-12 présente la consommation d'énergie en fonction du temps de calcul.

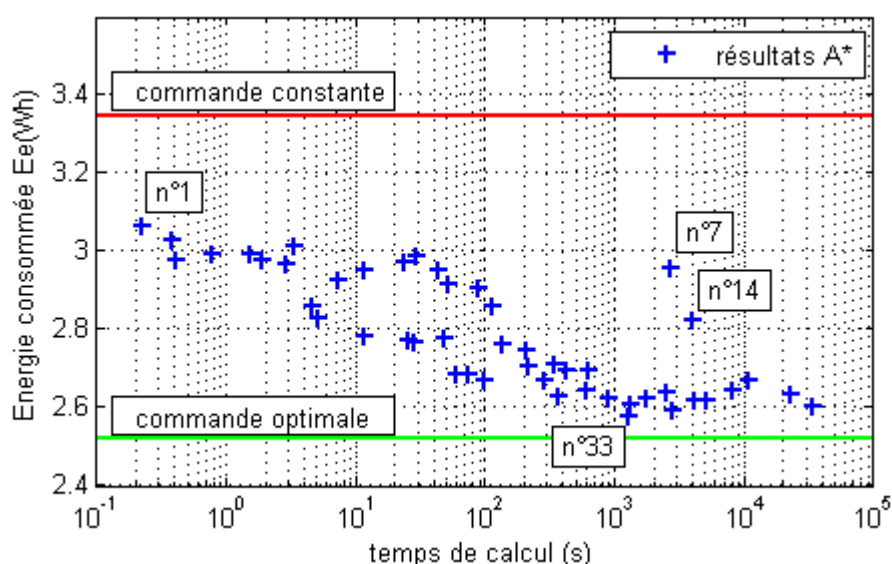


Figure 3-12 : énergie consommée en fonction du temps de calcul, chaque résultat de l'algorithme A* est marqué d'une croix bleue, l'énergie consommée par la commande constante est tracée en rouge et celle de la commande optimale en vert.

Le point n°1 indique le calcul grossier présenté dans §3.3.5. Les calculs successifs montrent qu'en augmentant la discrétisation de la commande, la consommation d'énergie baisse tendanciellement alors que le temps de calcul augmente. Il existe quelques points aberrants (n°7, n°14) qui pour un temps de calcul important, n'améliorent pas significativement l'autonomie du VAE. Ces points sont rencontrés pour une discrétisation du temps très fine (5s) et une discrétisation de la tension très grossière (8V à 10V).

On choisit de présenter la commande qui donne le meilleur résultat, le n°33. Cette discrétisation utilise les pas suivants :

- $\Delta u = 2,5V$ pour $u_{\max} = 40V$ soit 17 possibilités de commande à chaque instant de décision.
- $\Delta t = 10s$ pour $t_f = 160s$ soit 17 instants de décision.

La figure 3-13 présente les résultats de l'algorithme A* comparés à ceux obtenus avec la solution exacte §3.2.7.

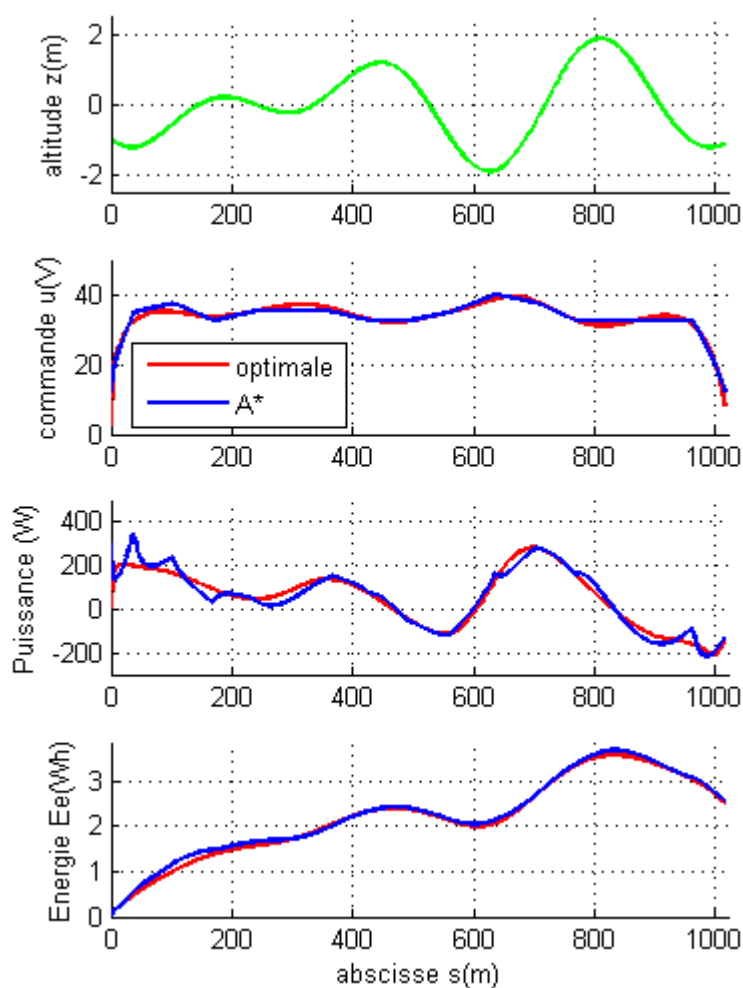


Figure 3-13 : commande synthétisée par l'algorithme A* comparée à la commande optimale.

Le graphe qui résulte de cette discrétisation comporte un nombre d'arcs très importants $n_{arc} = 17^{17} \approx 8,3 \times 10^{20}$. Cependant l'algorithme A* ne va en explorer que $n_{exp} \approx 3,1 \times 10^6$ ce qui permet d'obtenir un calcul de durée raisonnable de 14min33s².

On constate que **la commande discrétisée calculée par l'algorithme A* ressemble fortement à la commande optimale.**

Le pic de consommation au démarrage reste modéré à 350W. Le frein régénératif est utilisée en fin de parcours (700m 1000m) ce qui permet de faire baisser substantiellement la consommation. La commande discrétisée consomme 2.58Wh contre 2,52Wh pour la commande optimale exacte, soit 2,15% d'écart.

Si on compare les performances de la commande discrétisée à la commande constante qui elle consomme 4,43 Wh, on constate une économie d'énergie de 23%.

L'algorithme A* approxime efficacement la commande optimale qui permet de minimiser l'énergie consommée.

3.3.7 Efficacité de l'heuristique

Afin d'observer la performance la méthode, il est possible de comparer la fonction heuristique à la fonction cible qu'elle est censée estimer. Pour cela on réalise un post traitement après convergence de l'algorithme A*. A chaque instant, il est possible de calculer l'énergie réelle restant à consommer pour atteindre la fin du parcours. On compare cette valeur avec l'heuristique sur la figure 3-14.

L'heuristique est évaluée en 17 sommets du graphe définissant le chemin optimal trouvé par l'algorithme A*. Sur chaque sommet, on constate que l'heuristique est proche de la fonction cible mais toujours par valeur inférieure. La distance entre les deux courbes semble à peu près constante.

L'heuristique bascule dans le négatif à 350m car l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravité sont a priori suffisantes pour rallier l'arrivée. Le maximum local de l'heuristique vers 650m tient compte de la montée à venir et donc d'une énergie importante restant à consommer. A contrario le minimum de l'heuristique vers 820m est obtenu sur le point le plus haut du parcours. En ce point l'énergie potentielle est suffisante pour rallier l'arrivée et le surplus d'énergie peut être utilisé comme frein régénératif.

² Ce temps de calcul peut paraître prohibitif pour des applications réelles mais rappelons ici que nous n'avons pas travaillé l'efficacité du codage de l'algorithme. Des algorithmes similaires sont utilisés dans des appareils portables de type navigations et des smartphones.

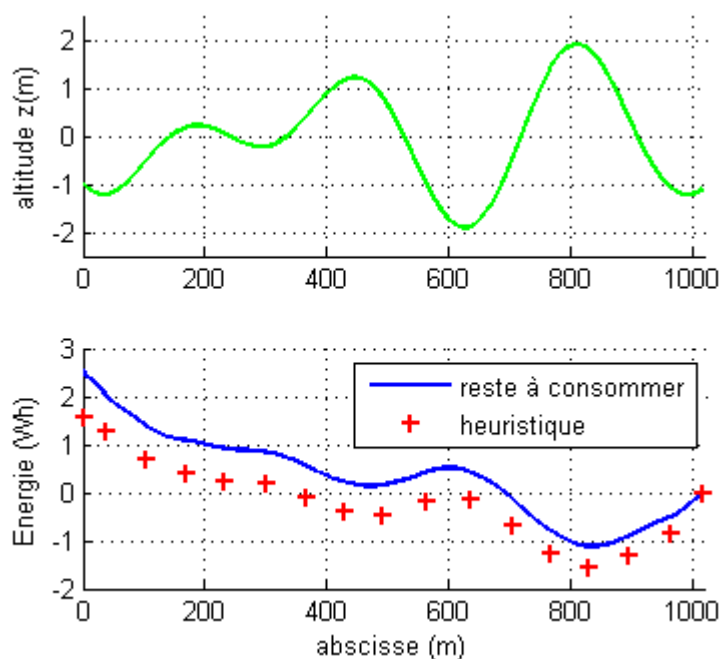


Figure 3-14 : comparaison de la fonction heuristique avec l'énergie restant à consommer.

L'heuristique tient compte fidèlement des phénomènes énergétiques réellement mis en jeu dans VAE.

La qualité de l'heuristique se manifeste également dans temps de calcul gagné par l'algorithme A* par rapport à l'algorithme de Dijkstra. Il n'est pas possible de mener à bien l'algorithme de Dijkstra dans le cas de grands graphes car le temps de calcul est prohibitif. Cependant il est possible d'estimer le temps de calcul de l'algorithme de Dijkstra T_{sim}^{Dijk} en supposant que le temps de calcul de chaque algorithme est proportionnel au nombre d'arcs explorés. L'algorithme de Dijkstra explore tous les arcs du graphe n_{arc} que l'on calcule avec (3.18). L'algorithme A* ne va explorer qu'un certain nombre d'arcs n_{exp} . Cette quantité est mesurée par un comptage lors de l'exécution de l'algorithme A*. Le temps de calcul de l'algorithme de Dijkstra est alors estimé par une relation de proportionnalité :

$$T_{sim}^{Dijk} = T_{sim}^{A*} \frac{n_{arc}}{n_{exp}} \quad (3.35)$$

La figure 3-15 représente le temps de calcul estimé de l'algorithme de Dijkstra en fonction du temps de calcul mesuré de l'algorithme A*.

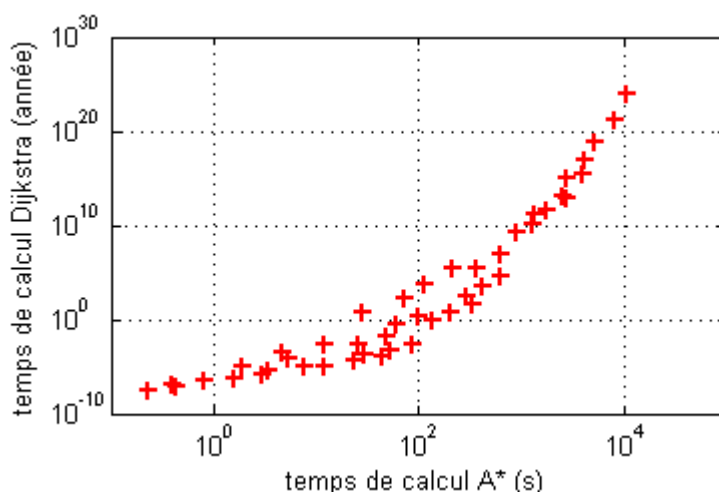


Figure 3-15 : comparaison du temps de calcul effectif de l'algorithme A* par rapport à une estimation du temps de calcul de l'algorithme de Dijkstra.

Le gain de temps obtenu par l'algorithme A* est pharaonique car pour un algorithme A* qui dure moins d'une 1 heure, il faudrait des milliards d'années de calcul avec l'algorithme de Dijkstra !

3.3.8 Définition de conditions réalistes

La synthèse de commande par l'algorithme A* a montré ses performances dans un cas académique. Ce paragraphe vise à appliquer cette méthode dans un cas réaliste. On introduit un nouveau profil d'altitude qui cette fois résulte d'une campagne de mesures réalisées avec un GPS différentiel. Le circuit choisi est une boucle de 920m qui présente un profil d'altitude varié (figure 3-16).

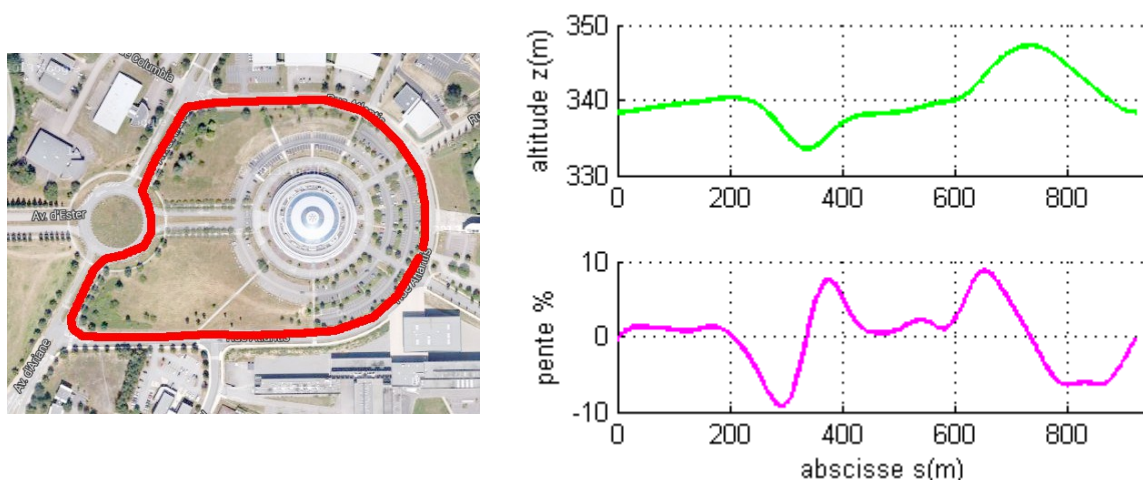


Figure 3-16 : photo aérienne et profil d'altitude du parcours de test autour de la technopole d'ESTER à Limoges.

La mesure d'altitude qui est initialement réalisée avec un échantillonnage temporel à 20Hz est rééchantillonnée en fonction de l'abscisse curviligne avec un pas de 1 mètre. La pente est obtenue en supposant une évolution de l'altitude linéaire entre deux points de mesure. Elle atteint au maximum +8,7% en montée et au minimum -9.3% en descente. Le profil de pente est donc désormais décrit par une fonction constante par morceaux qui présente des discontinuités à chaque pas d'échantillonnage (figure 3-17).

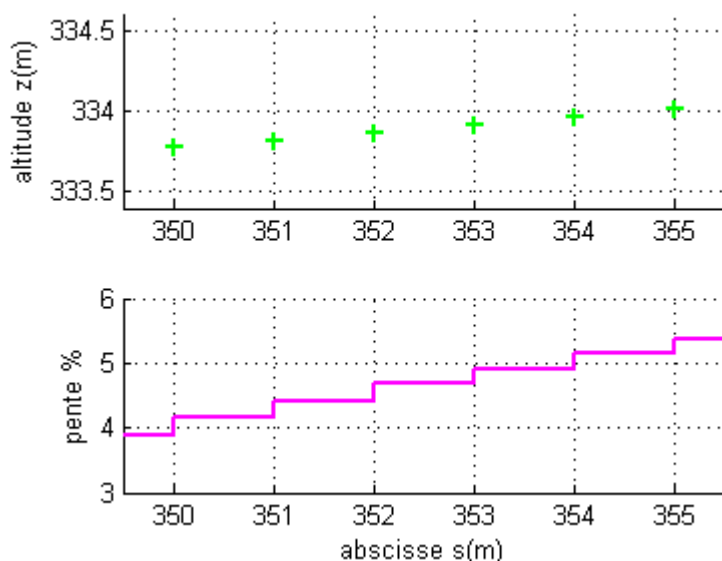


Figure 3-17 : zoom sur les mesures d'altitude et sur la pente estimée.

Ces discontinuités font diverger l'intégration des conditions nécessaires d'optimalité (3.8) du hamiltonien, ce qui rend la démarche de commande optimale exacte impossible.

On introduit également toutes les contraintes légales et technologiques qui s'appliquent au VAE. La législation impose une puissance mécanique bornée à $P_m^{\max} = 250W$. L'assistance doit également se couper lorsque le VAE dépasse les 25km/h. On définit la vitesse de rotation seuil $x_2^{leg} = 21,9rad / s$ qui correspond à 25km/h.

$$\begin{cases} x_2(t) < x_2^{leg} & P_m \leq P_m^{\max} \\ x_2(t) \geq x_2^{leg} & P_m \leq 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

En substituant l'expression de la puissance (2.41) dans (3.36), il est possible de borner la commande dans un intervalle qui dépend de la vitesse du VAE :

$$\begin{cases} x_2(t) < x_2^{leg} & u(t) \leq \left(\frac{P_m^{max}}{x_2(t)} + T_f \right) \frac{R_c}{k_i} + k_v x_2(t) \\ x_2(t) \geq x_2^{leg} & u(t) \leq k_v x_2(t) \end{cases} \quad (3.37)$$

Le moteur ne doit pas être alimenté avec un courant supérieur à $i^{max} = 20A$ pour ne pas endommager les bobinages. De plus la carte de commande du moteur ne permet pas de réaliser un freinage régénératif. En conséquence le courant ne peut pas être négatif. Ces deux contraintes se traduisent par :

$$0 \leq i(t) \leq i^{max} \quad (3.38)$$

En substituant l'expression du courant (2.34) dans (3.38) on peut borner la commande par :

$$k_v x_2(t) \leq u(t) \leq R_c i^{max} + k_v x_2(t) \quad (3.39)$$

On réunit les contraintes (3.37) et (3.39), en définissant un intervalle de commande admissible $U^{adm}(x_2)$ qui dépend de la vitesse du VAE.

$$u \in U^{adm}(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < x_2^{leg} & k_v x_2 \leq u \leq \min \left[\left(\frac{P_m^{max}}{x_2} + T_f \right) \frac{R_c}{k_i} + k_v x_2, k_v x_2 + R_c i^{max} \right] \\ x_2 \geq x_2^{leg} & u = k_v x_2 \end{cases} \quad (3.40)$$

La figure 3-18 présente la commande admissible en fonction de la vitesse du VAE. On distingue 3 zones :

- jusqu'à 10km/h la commande sature le courant à 20A,
- de 10 à 25km/h la commande sature la puissance mécanique à 250W,
- au-delà de 25km/h la commande impose un courant nul.

On constate que la commande dépasse la tension maximale d'alimentation de la batterie (40V). Lorsque le VAE roule à une vitesse supérieure à 25km/h, les transistors de la carte de commande s'ouvrent pour annuler le courant. La tension aux bornes du moteur se confond alors avec la tension contre-électromotrice qui est proportionnelle à la vitesse

de rotation du moteur. En conséquence, la tension de commande pourra atteindre des valeurs importantes aux vitesses élevées, bien supérieures à la tension de la batterie puisque celle-ci est physiquement déconnectée du moteur.

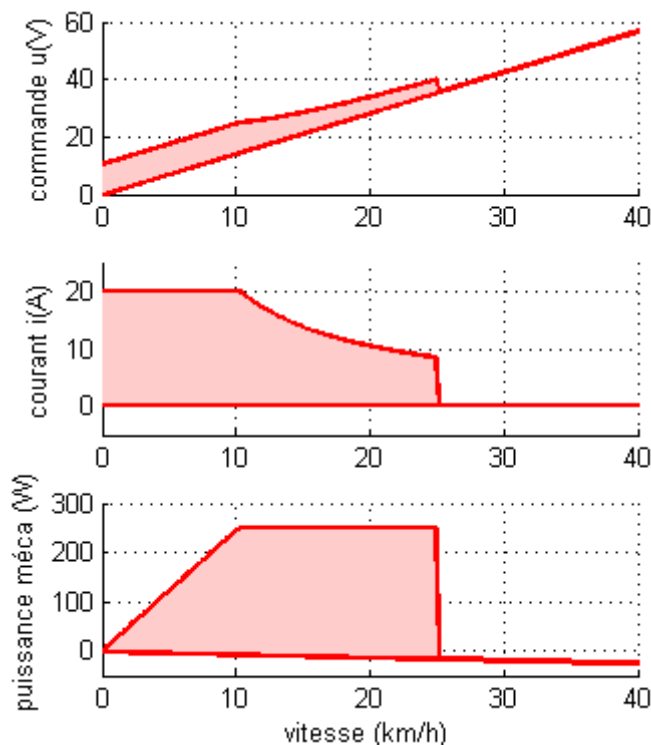


Figure 3-18 : commande admissible en rouge en fonction de la vitesse du VAE.

On définit un nouveau problème d'optimisation P2 qui ajoute les contraintes légales et techniques à la contrainte de distance parcourue imposée :

Chercher la commande optimale u^* qui vérifie :

- dans un temps défini dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$,
- le vecteur d'état \bar{x} admettant comme condition initiale $\bar{x} = \bar{0}$ et progressant selon Φ (3.1),
- minimise le critère d'énergie électrique consommée E_e (3.2),
- sous contrainte d'une distance parcourue minimale $x_1(t_f) \geq \frac{s_f}{R_r}$,
- sous contrainte d'une commande admissible $\forall t \in [t_0, t_f] \quad u^*(t) \in U^{adm}(x_2(t))$.

3.3.9 Résultat d'optimisation dans des conditions réalistes

On se place sur le parcours réel présenté au §3.3.8. On choisit arbitrairement un temps de parcours de 280s et une vitesse moyenne réaliste de 20,5km/h. Les capacités du cycliste restent inchangées avec une puissance au nominale de 100W pour une vitesse de confort de 28,4km/h. La commande u est bornée par une fonction $B(u)$ qui la contraint à appartenir à l'intervalle admissible U^{adm} .

$$u \rightarrow B(u) = \max \left(\min \left[u; \left(\frac{P_m^{\max}}{x_2} + T_f \right) \frac{R_c}{k_i} + k_v x_2; k_v x_2 + R_c i^{\max} \right]; k_v x_2 \right) \quad (3.41)$$

Il est nécessaire de reconsidérer l'heuristique car cette fois le frein régénératif n'est pas possible. Si l'énergie nécessaire pour atteindre l'arrivée devient négative, il ne sera pas possible de soustraire cette quantité à l'énergie consommée. On définit donc une nouvelle heuristique h_2 qui n'est jamais négative.

$$h_2(\bar{x}_k) = \max(h_1(\bar{x}_k); 0) \quad (3.42)$$

On choisit 7 pas de discrétisation pour le temps $\Delta t \in \{7s ; 10s ; 14s ; 20s ; 28s ; 35s ; 40s\}$ et 7 pas de discrétisation pour la commande $\Delta u \in \{1,6V ; 2V ; 2,5V ; 4V ; 5V ; 8V ; 10V\}$. La commande optimale synthétisée par l'algorithme A* est comparée à la commande constante représentative des VAE du commerce. La figure 3-19 représente l'énergie consommée en fonction du temps de calcul.

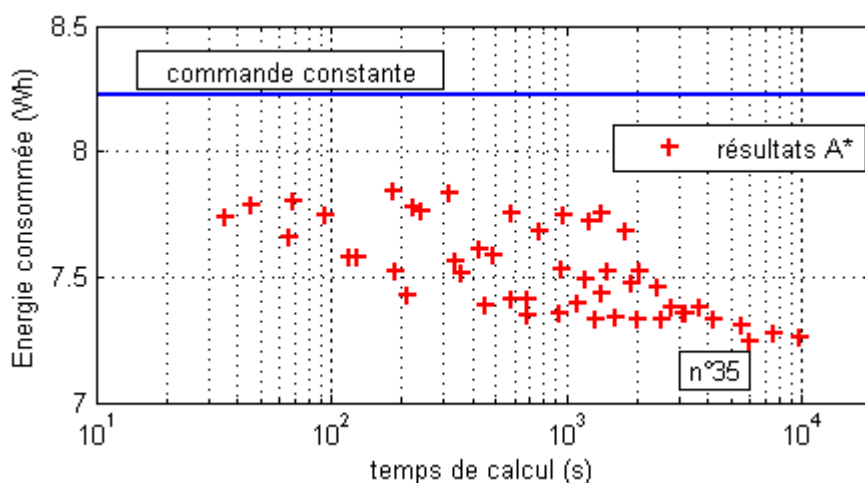


Figure 3-19 : énergie consommée en fonction du temps de calcul. La droite bleue représente l'énergie consommée par la commande constante.

L'algorithme A* permet dans tous les cas de figure d'économiser de l'énergie.

La meilleure performance est obtenue avec la discrétisation n°35 ($\Delta t = 7s$ et $\Delta u = 2,5V$). La figure 3-20 compare les performances de la commande optimale et celles de la commande constante.

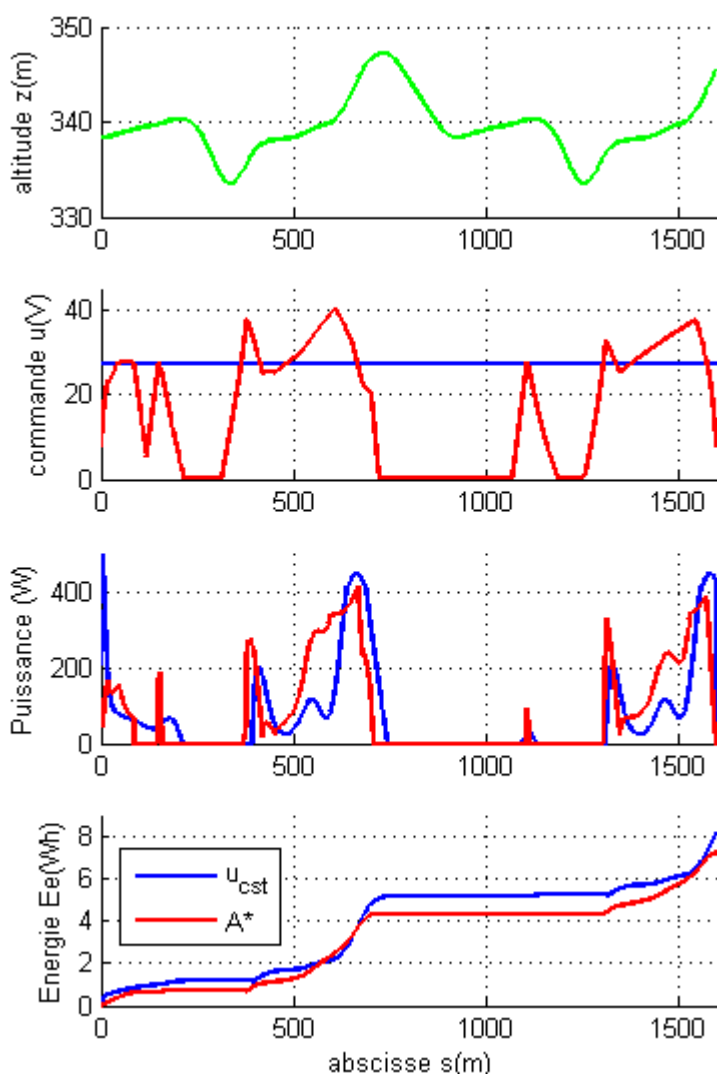


Figure 3-20 : comparaison des performances de la commande optimale obtenue avec l'algorithme A* et de la commande constante.

On constate que la borne $B(u)$ (3.41) permet à la commande constante de limiter le pic de consommation électrique à 500W au démarrage. Le pic de consommation de la commande optimale est, quant à, lui très faible (<200 W). La puissance de la commande optimale est nettement supérieure à la commande constante dans les montées. A contrario, la commande optimale se coupe dans les descentes. L'arrivée est anticipée par la

commande optimale qui coupe la puissance sur les derniers mètres du parcours. L'énergie consommée par la commande optimale est de 7,24Wh contre 8,23Wh.

La commande optimale discrétisée permet une économie d'énergie de 12%.

La figure 3-21 compare l'heuristique à l'énergie restant à consommer jusqu'à la fin du parcours. On constate que comparativement à la figure 3-14, l'écart initial entre les courbes est important. En revanche cet écart se réduit tout au long du parcours et vient tangenter la courbe réelle à partir de 1300m.

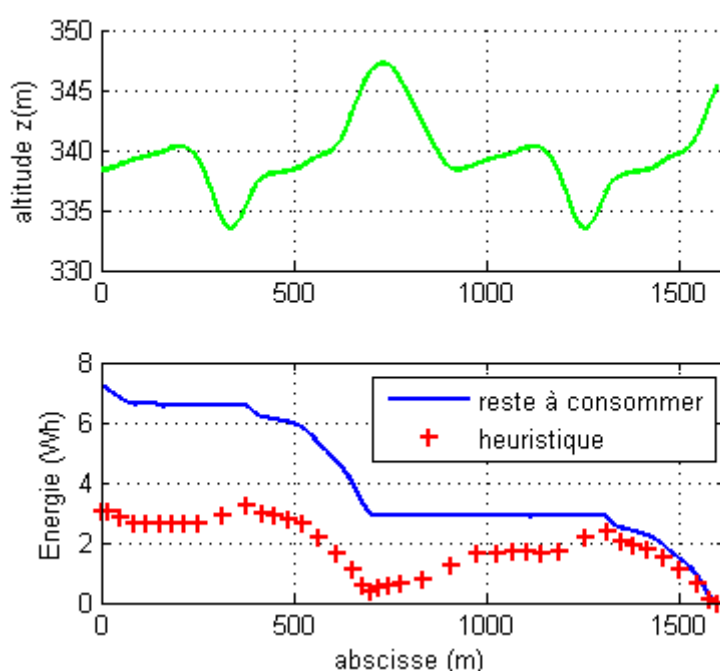


Figure 3-21 : comparaison de l'heuristique est de l'énergie restant à consommer en fonction de l'abscisse et de l'altitude.

En comparant le profil d'altitude à l'heuristique on constate une bonne corrélation entre les deux quantités. L'heuristique atteint un minimum local à 750m là où l'énergie potentielle de gravité est maximale.

La présence des contraintes sur la commande n'affecte pas la performance de l'heuristique.

3.3.10 Influence de la commande optimale sur le comportement du cycliste

La commande optimale améliore significativement la consommation d'énergie électrique (-12%). Il convient de vérifier que cette économie ne se fait pas au détriment du cycliste qui serait obligé de compenser la baisse d'assistance électrique. La figure 3-22 présente le comportement du cycliste en présence d'une commande constante et de la commande optimale discrétisée générée par l'algorithme A*.

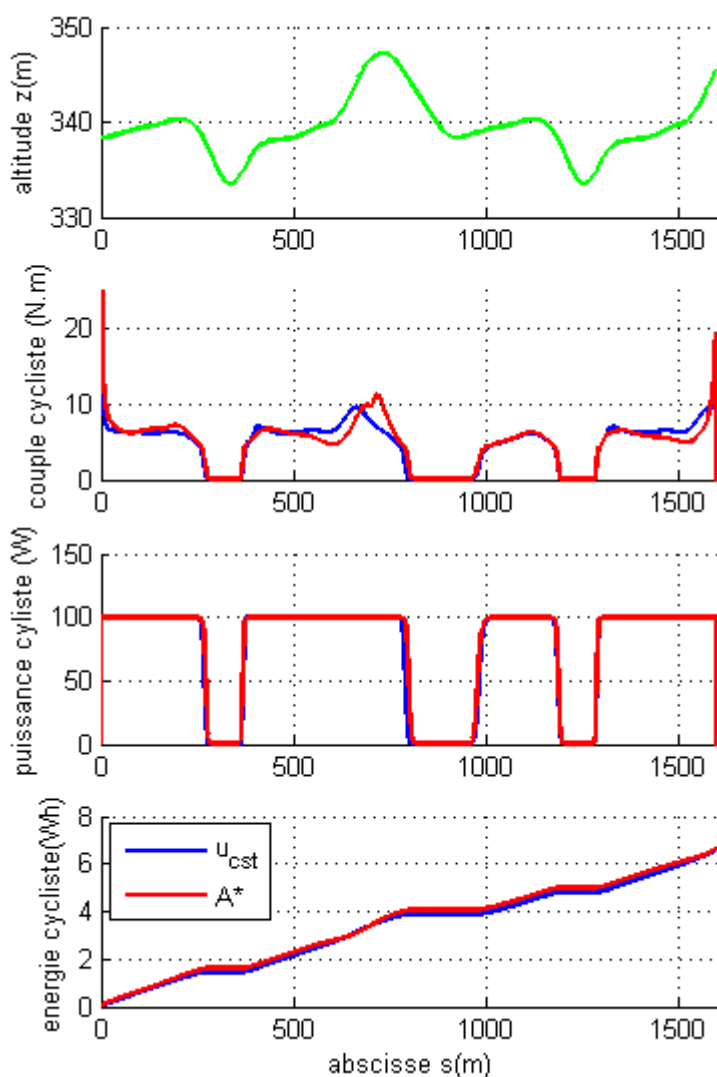


Figure 3-22 : comparaison du comportement du cycliste en fonction de l'assistance électrique.

On constate que la commande optimale ne modifie pas significativement le comportement du cycliste. Le cycliste maintient une puissance musculaire à 100W dans les montées et sur plat. Il cesse de pédaler dans les descentes. L'énergie humaine produite

en présence de la commande constante est de 6,62 Wh contre 6,66Wh avec la commande optimale soit une légère augmentation de 0,7%.

La commande optimale ne modifie pas sensiblement le comportement du cycliste.

3.3.11 Amélioration de la vitesse de calcul de l'algorithme A*

Bien que l'aboutissement de l'algorithme A* soit assuré par la fonction heuristique, on peut rechercher à augmenter la vitesse de calcul par un élagage précoce des branches du graphe qui ne peuvent pas satisfaire la contrainte intégrale de vitesse moyenne.

Le bridage de la commande limite la vitesse du VAE. Si la commande est trop faible sur la première partie du parcours, il se peut que le retard accumulé ne permette pas de rejoindre l'arrivée du parcours dans le temps imparti. On retrouve ici la morale de la célèbre fable de La Fontaine le Lièvre et la Tortue : « rien ne sert de courir, il faut partir à point ».

On intègre ce raisonnement dans l'exploration du graphe menée par l'algorithme A*. Chaque fois d'un sommet \bar{x}_k est atteint, on compare le temps qu'il reste pour finir le parcours $t_f - t_k$ avec le temps qu'il faudrait pour rejoindre l'arrivée en saturant la commande $t_{xk \rightarrow xf}^{u=u_{\max}}$.

- Si $t_f - t_k \geq t_{xk \rightarrow xf}^{u=u_{\max}}$ le VAE peut encore arriver à l'heure, on classe \bar{x}_k dans la liste des sommets à explorer.
- Si $t_f - t_k < t_{xk \rightarrow xf}^{u=u_{\max}}$ le sommet est trop en retard on ne le classe pas.

La zone dans laquelle le retard est irrattrapable est représentée en rouge sur la figure 3-23.

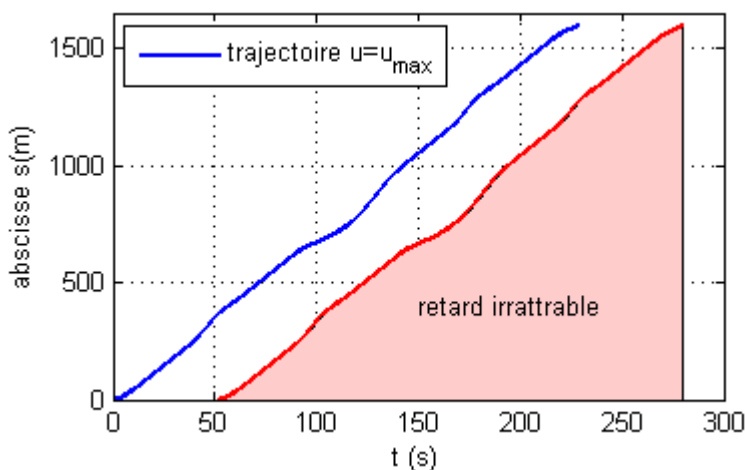


Figure 3-23 : évolution de l'abscisse en fonction du temps.

Les sommets qui ne sont pas en retard se situent dans le couloir entre la courbe bleue qui sature la commande et la zone rouge.

La quantité $u_{xk \rightarrow xf}^{\max}$ est calculée avant le début l'algorithme A* par une progression de l'état en présence d'une commande saturée. Ce calcul dure moins d'un dixième de seconde. L'algorithme A* se déroule ensuite normalement en rejetant un certain nombre de sommets jugés trop lents. Ces sommets ne se propagent pas et n'engendrent pas de sommets fils qui seraient également en retard. Ce test rejette donc un ensemble de sommets sans même les avoir explorés.

Afin de mesurer l'efficacité de cette méthode, on réalise deux fois l'algorithme A*, une première fois de manière classique et une seconde fois en rejetant les sommets trop en retards. Les résultats de comparaison entre les deux méthodes sont tracés sur la figure 3-24. On constate que le pourcentage d'arcs non explorés atteint en moyenne 21%.

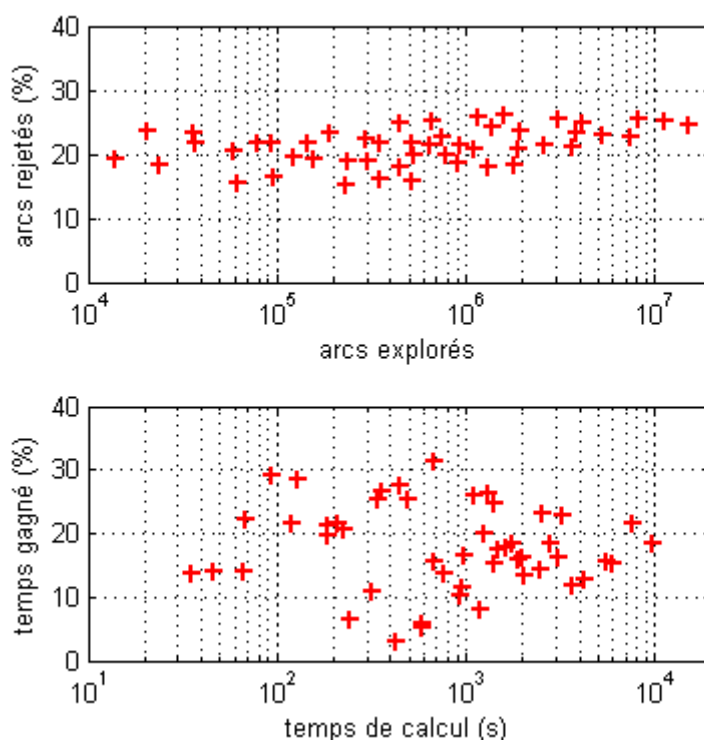


Figure 3-24 : pourcentage d'arcs rejétés et temps de calcul gagné par la méthode du rejet des sommets trop lents.

La méthode de rejet des sommets en retard réduit le temps de calcul en moyenne de 18%.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté différentes méthodes qui permettent la synthèse de commandes minimisant l'énergie consommée par le VAE. La mission consiste à rouler sur un parcours donné, en un temps donné, avec une contrainte intégrale qui garantit une vitesse moyenne minimale de l'ordre de 20km/h.

Dans le cas d'hypothèses réalistes, le VAE roule sur un parcours dont le profil d'altitude est décrit par une fonction discrétisée. Des contraintes instantanées imposent de brider la commande dans un intervalle admissible afin de garantir le respect de la législation sur les VAE et de ne pas endommager le moteur.

La méthodologie proposée s'appuie sur une discrétisation de l'état et de la commande afin de pouvoir prendre en compte le profil d'altitude et l'ensemble des contraintes instantanées du problème. Cette discrétisation mène à la réécriture du problème de Commande Optimale en un problème de cheminement à coût minimal dans un graphe.

L'algorithme A* proposé pour chercher le chemin de coût minimal s'appuie sur une fonction heuristique. Cette fonction est construite par un raisonnement énergétique sur le VAE. Elle permet d'estimer a priori une borne inférieure de l'énergie nécessaire pour aller d'un état discrétisé à l'arrivée. Dans ces conditions, si l'algorithme A* trouve une solution, celle-ci est optimale.

Les résultats montrent que la commande optimale discrétisée s'approche très fortement de la solution optimale exacte calculée sans contrainte.

Lorsque l'on introduit les contraintes instantanées et le profil d'altitude discrétisé, la solution trouvée par l'algorithme A* est systématiquement meilleure que la commande constante, représentative d'un VAE du commerce. L'économie d'énergie électrique atteint au maximum 12%. Le comportement du cycliste n'est pas affecté par la commande discrétisée, le confort du cycliste est ainsi garanti.

La fonction heuristique proposée permet d'obtenir un temps de calcul réalisable (quelques minutes) comparativement à l'algorithme de Dijkstra qui lui est irréalisable dans le cas de grands graphes (des milliards d'années).

Le temps de calcul de l'algorithme A* est également accéléré par l'élagage précoce des sommets du graphe qui ne respectent pas a priori la contrainte de vitesse moyenne. Le gain de temps de calcul obtenu par élagage est en moyenne de 18%.

Conclusion générale

Résultats

La planification énergétique d'un VAE requiert un modèle calibré du vélo et de son cycliste. Les grandeurs mécaniques et électriques ont été calibrées sur un VAE instrumenté et au moyen d'un banc de test spécialement conçu pour le moteur roue.

L'originalité du travail réside dans la construction du modèle de comportement humain sur le VAE. L'étude bibliographique nous a conduits à analyser le comportement du cycliste en prenant comme variable d'entrée la vitesse de rotation des pédales. Le cycliste est alors considéré comme une source de couple ou de puissance. Une expérimentation menée auprès de 14 cyclistes a permis d'identifier des tendances générales représentatives du comportement des cyclistes :

- Lorsqu'il est autorisé à utiliser le dérailleur, le cycliste régule sa vitesse de pédalage autour de la cadence qu'il préfère : la FFC. Il en résulte une certaine régularité du couple et de la puissance produite.
- Le cycliste cesse de pédaler lorsqu'il atteint une vitesse qu'il juge suffisante : la vitesse de confort.
- La présence d'assistance électrique, ne modifie ni la FFC ni la vitesse de confort, en revanche elle fait baisser le couple moyen produit (- 32% en moyenne).

Nous proposons de modéliser le cycliste comme une source de puissance régulée qui s'annule lorsque la vitesse du vélo dépasse la vitesse de confort. Ce modèle comporte deux paramètres : la puissance nominale et la vitesse de confort. Après calibration, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de l'ensemble des cyclistes du panel. Le modèle est plus précis pour les cyclistes ayant choisi des vitesses de confort faible ou moyenne. Pour les cyclistes ayant choisi des vitesses de confort fortes, le modèle décrit la puissance moyenne produite sans prévoir les pics de puissance. Ce modèle est adapté à la planification énergétique.

Dans deuxième temps on se propose d'utiliser le modèle calibré pour synthétiser une commande qui minimise la consommation d'énergie électrique sur un parcours donnée sous contrainte d'une vitesse moyenne imposée.

Un premier problème qui ne comporte pas de contraintes instantanées est résolu par une démarche de Commande Optimale qui s'appuie sur le « Principe du Maximum de Pontryagin ». Cette commande optimale exacte sert de référence pour la suite.

Un second problème, plus réaliste cette fois, est construit en tenant compte d'un profil d'altitude réel et des contraintes légales et techniques qui s'appliquent à la commande. La démarche choisie pour résoudre ce problème s'appuie sur une discrétisation de l'état et de la commande. Le problème se réécrit alors comme le cheminement à coût minimal dans un graphe.

La recherche du chemin à coût minimal est réalisée par l'algorithme A*. Il s'appuie sur une fonction heuristique qui accélère le temps de calcul, et garantit que si une solution est trouvée, elle est optimale. La fonction heuristique construite ici tient fidèlement compte de tous les phénomènes énergétiques mis en jeu dans le VAE.

On utilise le problème de référence qui ne comporte pas de contrainte pour comparer les résultats de la commande discrétisée à ceux de la commande optimale exacte. Les résultats étant très proches, on conclut au bon fonctionnement de la méthode discrétisée.

Dans le cas où les contraintes sont mises en place, la commande discrétisée est comparée à une commande constante, représentative de la performance d'une commande d'une VAE du commerce. Les résultats montrent une économie d'énergie de 12%. Cette économie ne se fait pas au dépend du cycliste qui n'est pas perturbé par le changement de commande.

Enfin on améliore encore la vitesse de calcul de l'algorithme A* en élaguant des sommets du graphe qui ne respectent pas a priori la contrainte de vitesse moyenne. Le gain de temps obtenu atteint en moyenne 18%.

Perspectives

La synthèse de commande optimale présentée permet de construire une consigne en boucle ouverte pour l'assistance électrique du VAE. On peut ensuite implémenter cette commande sur le VAE instrumenté et réaliser une expérimentation afin de mesurer des économies d'énergie réelles sur le parcours de test. Comme le cycliste conserve son libre arbitre, il peut s'écarter légèrement du comportement modélisé. Ces perturbations imposent de monter sur le VAE un régulateur en boucle fermée qui garantisse que le VAE suive bien la trajectoire voulue.

Le premier calcul de commande optimale se fait hors ligne avec un ordinateur fixe. L'asservissement est assuré par un régulateur embarqué relativement simple à fabriquer. La réalisation d'un ordinateur de bord pour VAE qui calculerait la commande optimale en ligne est en revanche une perspective à plus long terme.

Les hypothèses de l'usage du VAE en ville prennent en compte la pente et une vitesse moyenne imposée mais ne tiennent pas compte des conditions de circulation. Il est possible avec la commande discrétisée d'introduire de nouvelles contraintes telles des limitations de vitesse dues à des virages serrés ou à des limitations légales à 20 ou 30km/h. On pourra aussi prévoir des missions avec des arrêts obligatoires à des panneaux stop ou à des feux rouges.

La modélisation de comportement humain s'est appuyée sur un panel de 14 cyclistes. D'un point de vue statistique, cet échantillon est relativement petit. Il est possible d'étendre le panel de manière à vérifier si les conclusions restent valables à plus grande échelle. On pourra aussi s'intéresser à la variation des paramètres d'un même individu en fonction de l'heure de la journée ou de la saison. Il devient possible alors d'évaluer en ligne l'état de forme du cycliste en mesurant l'écart de son comportement avec son comportement nominal.

Enfin la méthodologie de synthèse de commande discrétisée permet de s'adapter à d'autres problèmes. En effet le raisonnement qui a permis de construire la fonction heuristique repose sur des hypothèses communes à tous les véhicules terrestres. Il est donc possible d'envisager la synthèse de commande minimisant l'énergie pour une large gamme de véhicules : voitures, poids lourds ou trains.

Annexe : exemples de cheminement à coût minimal

On cherche à déterminer le chemin routier le plus court entre Nancy et Bordeaux. On utilise ce problème pour comparer le fonctionnement des algorithmes de Dijkstra et A*. La figure 4-1 illustre cet exemple.

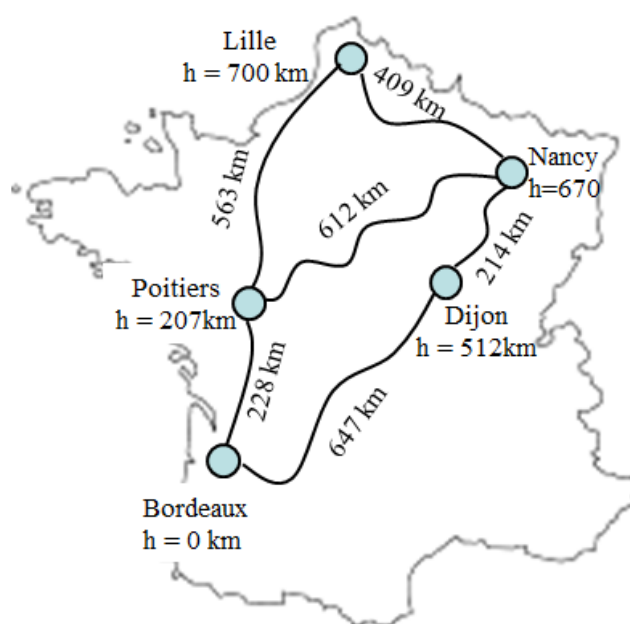


Figure 4-1: illustration de l'utilité de l'heuristique dans l'algorithme A*, les distances réelles sont indiquées sur le long des routes. La distance à vol d'oiseau est notée sous le nom de la ville.

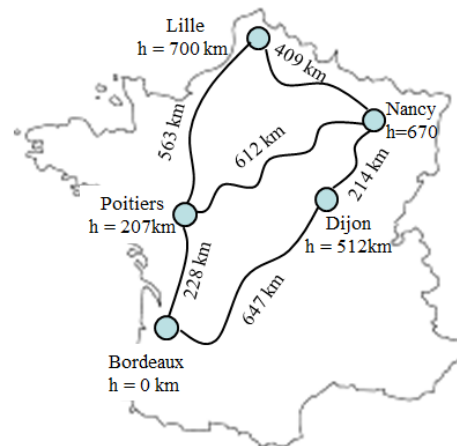
Si l'on souhaite aller de Nancy à Bordeaux, faut-il passer par Dijon, Poitiers ou Lille ? La possibilité de passer par Lille est intuitivement exclue par l'esprit humain car il semble que l'on s'éloigne du but. Cette intuition est utilisée par l'algorithme A*. Pour cela il faut construire une fonction heuristique qui minore, le coût pour aller du sommet courant au sommet arrivée : Bordeaux.

Dans le cas de cheminement routier, la distance à vol d'oiseau est une heuristique intéressante car elle est évidemment plus courte que le cheminement par la route et relativement précise lorsqu'il y a peu de virages.

Algorithme de Dijkstra

Cet algorithme propage en premier le sommet qui est le plus proche du départ. Il réalise une recherche « en largeur d'abord ».

On utilise une liste S qui contient les sommets atteints par l'algorithme. Chaque sommet mémorise son sommet « père » et g le chemin de coût minimal qui le relie au sommet origine. On propage les sommets de S par ordre croissant de g . Les sommets sont tous propagés une fois et une fois seulement.



Rappel de la figure 4-1

Départ $S = \{ \text{Nancy}(g = 0) \}$

Itération 1 : propagation du sommet Nancy, découverte de Dijon, Lille et Poitiers.

$S = \{ \text{Nancy}(g = 0), \text{Dijon}(g = 214), \text{Lille}(g = 409), \text{Poitiers}(g = 612) \}$

Itération 2 : propagation du sommet Dijon, découverte de Bordeaux.

$S = \{ \text{Nancy}(g = 0), \text{Dijon}(g = 214), \text{Lille}(g = 409), \text{Poitiers}(g = 612), \text{Bordeaux}(g = 863) \}$

Itération 3 : propagation du sommet Lille, le nouveau chemin pour aller à Poitiers n'est pas meilleur, S est inchangée.

$S = \{ \text{Nancy}(g = 0), \text{Dijon}(g = 214), \text{Lille}(g = 409), \text{Poitiers}(g = 612), \text{Bordeaux}(g = 863) \}$

Itération 4 : propagation du sommet Poitiers, le nouveau chemin pour aller à Bordeaux est meilleur. Le père de Bordeaux devient Poitiers. Mise à jour de S .

$S = \{ \text{Nancy}(g = 0), \text{Dijon}(g = 214), \text{Lille}(g = 409), \text{Poitiers}(g = 612), \text{Bordeaux}(g = 840) \}$

Tous les sommets ont été propagés, fin de l'algorithme.

Le chemin de coût minimal est reconstruit en cherchant les pères successifs du sommet « arrivée ». Le père de Bordeaux est Poitiers. Le père de Poitiers est Nancy.

Le Chemin de coût minimal est alors : Nancy \rightarrow Poitiers \rightarrow Bordeaux pour un coût de 840km.

L'algorithme de Dijkstra a effectué 4 itérations.

Algorithme A*

Cet algorithme propage en premier le sommet qui est le plus proche de l'arrivée. Il réalise une recherche « en profondeur d'abord ».

La liste P contient les sommets à propager, classés par ordre croissant de la fonction de priorité $f = g + h$. La liste Q contient les sommets déjà propagés.

$$\text{Départ } P = \left\{ \text{Nancy} \begin{pmatrix} g = 0 \\ h = 670 \\ f = 670 \end{pmatrix} \right\}, \quad Q = \{ \}.$$

Itération 1 : propagation du sommet Nancy, découverte de Dijon, Lille et Poitiers.

$$P = \left\{ \text{Dijon} \begin{pmatrix} g = 214 \\ h = 512 \\ f = 726 \end{pmatrix}, \text{Poitiers} \begin{pmatrix} g = 612 \\ h = 207 \\ f = 819 \end{pmatrix}, \text{Lille} \begin{pmatrix} g = 409 \\ h = 700 \\ f = 1109 \end{pmatrix} \right\}, \quad Q = \{ \text{Nancy} \}$$

Itération 2 : propagation du sommet Dijon, découverte de Bordeaux.

$$P = \left\{ \text{Poitiers} \begin{pmatrix} g = 612 \\ h = 207 \\ f = 819 \end{pmatrix}, \text{Bordeaux} \begin{pmatrix} g = 863 \\ h = 0 \\ f = 863 \end{pmatrix}, \text{Lille} \begin{pmatrix} g = 409 \\ h = 700 \\ f = 1109 \end{pmatrix} \right\}, \quad Q = \{ \text{Nancy, Dijon} \}$$

Itération 3 : propagation du sommet Poitiers, le nouveau chemin pour aller à Bordeaux est meilleur. Le père de Bordeaux devient Poitiers.

$$P = \left\{ \text{Bordeaux} \begin{pmatrix} g = 840 \\ h = 0 \\ f = 840 \end{pmatrix}, \text{Lille} \begin{pmatrix} g = 409 \\ h = 700 \\ f = 1109 \end{pmatrix} \right\}, \quad Q = \{ \text{Nancy, Dijon, Poitiers} \}$$

Le premier élément de P est le sommet « arrivée », fin de l'algorithme.

Le chemin de coût minimal est reconstruit en cherchant les pères successifs du sommet « arrivée ». Le père de Bordeaux est Poitiers. Le père de Poitiers est Nancy.

Le chemin de coût minimal est alors : Nancy \rightarrow Poitiers \rightarrow Bordeaux pour un coût de 840km.

L'algorithme A* a effectué 3 itérations, soit une de moins que l'algorithme de Dijkstra. Le sommet Lille n'a pas été propagé conformément à l'intuition humaine.

Bibliographie

[Abbiss 2009] Abbiss C.R., Peiffer J.J., Laursen P.B., *Optimal cadence selection during cycling*, International SportMed Journal, 2009, vol. 10, n°1, p. 1-15.

[Belli 2002] Belli A., Hintzy F., *Influence of pedalling rate on the energy cost of cycling in humans*, European Journal of Applied Physiology, 2002, n°88, p. 158-162.

[Bertho 2011] Bertho Lavenir C., *Voyages à vélo, du vélocipède au Vélib'*, Paris bibliothèques, 2011.

[Bordin 2002] Bordin P., *SIG : Concepts Outils et Données*, Hermès Science, 2002.

[Borne 2013] Borne P., Popescu D., Filip F. G., Stefanoiu D., *Optimisation en sciences de l'ingénieur méthodes exactes*, Lavoisier, 2013.

[Brisswalter 2000] Brisswalter J., Hausswirth C., Smith D., Vercruyssen F., Vallier J.M., *Energetically optimal cadence vs. freely-chosen cadence during cycling : effect of exercise duration*, International SportMed Journal, 2000, n°21, vol 1, p. 60-64.

[Buttelli 1996] Buttelli O., Seek D., Vandewalle H., Jouanin J.C., Monod H., *Effect of fatigue on maximal velocity and maximal torque during short exhausting cycling*, European Journal of Applied Physiology, 1996, n°73, p. 175-179.

[Capmal 1997] Capmal S., Vandewalle H. *Torque-velocity relationship during cycle ergometer sprints with and without toe clips*. European Journal of Applied Physiology, 1997, n°76, p. 375-379.

[Carlier 2014] Carlier J., *Recherche Opérationnelle Optimisation*, base de données moodle UTC, 2014, http://moodle.utc.fr/file.php/141/Cours_SC_PDF/Polycopie.pdf

[Chang 2012] Chang S.B., Chen P.C., Chuang H.S., Hsiao C.C., *Velocity control with disturbance observer for pedal-assisted electric bikes*, *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 2012, vol. 50, n°11, p. 1631-1651.

[Debraux 2011] Debraux P., Grappe F., Manolova A. V., Bertucci W., *Aerodynamic drag in cycling: methods of assessment*, *Sports Biomechanics*, 2011, n°10, p. 197-218.

[Delprat 2004] Delprat S., Lauber J., Guerra T.M. and Rimaux J., *Control of a Parallel Hybrid Powertrain: Optimal Control*. IEEE Transactions on vehicular technology, 2004, vol. 53, n°3.

[Esnault 2009] Esnault F., *Boîtes de vitesses : énoncé des principes, Construction Mécanique transmission de puissance*. Tome 2. 3^{ième} édition, Dunod, 2009, p. 125-134.

[Fan 2010] Fan X., Tomizuka M., *Robust disturbance observer design for a power-assist electric bicycle*, Proc. American Control Conference, 2010, p. 1166-1171

[Fenn 1935] Fenn W.O., Marsh B.S., *Muscular force at different speeds of shortening*. *Journal of Physiology*. 1935, n°85, vol. 3, p. 277–297.

[GIEC 2007] Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat, *Changements Climatiques 2007 Rapport de synthèse*, 2007.

www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4_syr_fr.pdf

[GIEC 2013] Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat, *Changements climatiques 2013 : Les éléments scientifiques*, 2013.

www.ipcc.ch/report/ar5/wg1/#.UpL6EeIgr2q

[Goujon 2012] Goujon P. groupe de travail pour le développement de l'usage du vélo, *Plan National Vélo*, 2012.

www.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/PNV15022012.pdf

[Govaert 2003] Govaert G., *Analyse des données*, Hermès / Lavoisier , 2003.

[Hart 1968] Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B., *A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths*, IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. 1968, vol. 4, n°2, p. 100–107.

[Hellström 2009] Hellström E., Ivarson M., Åslund J., Nielsen L., *Look-ahead control for heavy trucks to minimize trip time and fuel consumption*, Control Engineering Practice, 2009, vol. 17, p. 245-254.

[Hill 1938] Hill A.V., *The heat of shortening and dynamics constants of muscles*. Proc. Royal Society London Biological Sciences, 1938, n°126, p. 136–195.

[Howlett 2009] Howlett P.G., Pudney P.J., Vu X., *Local energy minimization in optimal train control*, Automatica, 2009, Vol. 45, p. 2692-2698.

[IFP 2009] Institut français du pétrole, *Les émissions de gaz à effet de serre des transports, 2009*.

http://www.ifpenergiesnouvelles.fr/content/download/67679/1470174/version/2/file/Panorama2009_07-GES_transport.pdf

[Jeukendrup 2000] Jeukendrup, A.E., Craig, N.P., & Hawley, J.A., *The Bioenergetics of World Class Cycling*, Journal of Science and Medicine in Sport, 2000 dec vol. 3, n°4, p. 414-433.

[Kahlmeier 2013] Kahlmeier S., Cavill N., Dinsdale H., Rutter H., Götschi T., Foster C., Kelly P., Clarke D., Oja P., Fordham R., Stone D., Racioppi F., *Outil d'évaluation économique des effets sanitaires (HEAT) liés à la pratique du vélo et à la marche*, Organisation mondiale de la santé, 2013.

www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0003/195744/e96097F.pdf

[Karnopp 2000] Karnopp, D.C., Margolis D.L., Rosenberg, R.C., *System dynamics : modeling and simulation of mechatronic systems*, New York : Wiley, 2000.

[van Keulen 2010] van Keulen T., de Jager B., Foster D., Steinbuch M., *Velocity trajectory optimization in Hybrid Electric trucks*, Proc. American Control Conference, 2010, p. 5074-5079.

[Kim 2011] Kim T.S., Manzie C., Sharma R., *Two Stage Optimal Control of a Parallel Hybrid Vehicle with Traffic Preview*. Proc. 18th IFAC World Congress Milano, 2011 vol. 18, p. 2115-2120.

[Koot 2005] Koot M., Kessels J.T.B.A., de Jager B., Heemels W.P.M.H., van den Bosch P.P.J., Steinbuch M., *Energy management strategies for vehicular electric power systems*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2005, vol. 54, n°3, p. 771-782.

[Lafford 2000] Lafford J. *Rolling resistance of bicycle tyres*. Human Power technical journal of the IHPVA, 2000, n°50, p. 14-18.

[Latombe 1991] Latombe J.C., *Robot motion planning*. Springer, 1991.

[Lin 2003] Lin C.C., Peng H, Grizzle, J.W., Kang J.M., *Power management strategy for a parallel hybrid electric truck*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2003, Vol. 11, n°6, p. 839-849.

[Martin 1998] Martin J.C., Miliken D.L., Cobb J.E., McFadden K.L., Coggan A.R. *Validation of a mathematical model for road cycling power*. Journal of applied biomechanics, 1998, n°14, p. 276-290.

[Maizia 2008] Maizia M., Dubedat E., *Analyse quantitative d'un service de vélos en libre-service : un système de transport à part entière*, Flux, 2008, vol. 1, n° 71, p. 73-77.

[MEDDTL 2011] Ministère de l'Écologie, du Développement durable, des Transports et du Logement, *Plan Climat de la France actualisation 2011*, 2011.
www.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/Plan-climat-france-2011.pdf

[Muetze 2007] Muetze A., Tan C. Y., *Electric bicycle a performance evaluation*. IEEE Industry application magazine, juil-août 2007, p. 12-21.

[Musardo 2005] Musardo C., Rizzoni G., Staccia B., *A-ECMS : An Adaptive Algorithm for Hybrid Electric Vehicle Energy Management*, 44th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), and European Control Conference (ECC), 2005, p. 1816-1823

[Papon 2012], Papon F., *Le retour du vélo comme mode de déplacement*, Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, université Paris Est, 2012.

[Piot 2010] Piot André E., *Moyens pour obtenir une augmentation de l'activité physique de nos patients*, Thèse de doctorat en Médecine, Faculté Mixte de Médecine et de Pharmacie de Rouen, 2010.

[Schwarzkopf 1977] Schwarzkopf A.B., Leipnik R.B., *Control of highway véhicules for minimum fuel consumption over varying terrain*, Transportation research, 1977, Vol. 11, p. 279-286.

[Seabury 1977] Seabury J.J., Adams W.C., Ramey M.R., *Influence of Pedalling Rate and Power Output on Energy Expenditure During Bicycle Ergometry*, Ergonomics, 1977, vol. 20, n°5, p. 491-498.

[Seck 1995] Seck D., Vandewalle H., Decrops N., Monod H. *Maximal power and torque-velocity relationship on a cycle ergometer during the acceleration phase of a single all-out exercise*. European Journal of Applied Physiology, 1995, n°70, p. 161-168.

[Sim 1989] Sim E., Ma B., Levine W.E., Zajac F.E., *Some Results on the Neuromuscular Controls Involved in Pedaling a Bicycle at Maximum Speed*, American Control Conference (ACC), 1989, p. 338-343.

[Spagnol 2012] Spagnol P., Alli G., Spelta C., Lisanti P., Todeschini F., Savaresi S. M., Morelli A., *A full hybrid electric bike: how to increase human efficiency*, Proc. American Control Conference (ACC), 2012, p. 2761-2766

[Spicer 2000] Spicer J.B., Richardson C.J., Ehrlich M.J., Bernstein J.R., Fukuda M., Terada M. *On the efficiency of bicycle chain drive*. Human Power technical journal of the IHPVA, 2000, n°50, p. 3-9.

[Timmermans 2008] Timmermans J.M., Nietvelt J., Lataire P., Van Mierlo J., Matheys J., and Jan Cappelle J., *New Electric Postmen Helper Development and Evaluation*, The World Electric Vehicle Journal, 2008, vol. 2, n°1, p.3-9.

[Timmermans 2009] Timmermans J.M., Matheys J., Lataire P., Van Mierlo J. Cappelle J., *A Comparative Study of 12 Electrically Assisted Bicycles*. World Electric Vehicle Journal, 2009, vol. 3.

[Toussaint 2008] Toussaint J.F., *Retrouvé sa liberté de mouvement*, Rapport du Plan National de prévention par l'Activité Physique ou Sportive, Ministère de la Santé, 2008.

<http://www.irbms.com/rubriques/DOCUMENTS/rapport-toussaint-pnaps-retrouver-sa-liberte-de-mouvement.pdf>

[Tremblay 2009] Tremblay O., Dessaint L.A. *Experimental validation of a battery dynamic model for EV Applications*. World Electric Journal, 2009, n°3.

[Vandewalle 1985] Vandewalle H., Pérès G., Heller J., Monod H. *All out anaerobic capacity tests on cycle ergometers A comparative study on men and women*. European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology, 1985, n°54, p. 222-229.

[Vašak 2009] Vašak M., Baotić M., Perić N., Bago M., *Optimal rail route energy management under constraints and fixed arrival time*, Proc. European Control Conference (ECC), 2009, p. 2972- 2977.

Résumé :

Le vélo est un mode de transport qui offre les avantages conjoints de limiter l'effet de serre et d'améliorer la santé des cyclistes. Le vélo à assistance électrique (VAE) pourrait engager une rupture technologique qui encouragerait un report modal massif de la voiture individuelle vers ce mode de transport vertueux. L'objectif de ces travaux est d'améliorer la commande des VAE avec l'objectif contradictoire de maximiser leur autonomie tout en garantissant le confort du cycliste. Ce problème est formulé comme un problème de Commande Optimale minimisant l'énergie consommée sous contrainte de vitesse moyenne imposée. La méthodologie s'appuie sur une modélisation multiphysiques du VAE et de son/sa cycliste. Un VAE instrumenté permet de calibrer un modèle électromécanique. Le modèle de comportement énergétique humain est construit à partir d'une étude bibliographique et de mesures effectuées sur un panel de 14 cyclistes volontaires. L'action motrice humaine est modélisée comme une source de puissance régulée. La synthèse de commande s'appuie dans un premier temps sur le Principe du Maximum de Pontryagin afin de synthétiser une solution de référence avec des hypothèses académiques. Une méthodologie discrétisée est ensuite présentée avec des hypothèses moins fortes. Elle s'appuie sur le Principe de Bellman. Le problème est reformulé comme la recherche du chemin à coût minimal dans un graphe. Le chemin Optimal est trouvé grâce à l'Algorithme A* et une heuristique énergétique bien adaptée. Une méthode d'élagage précoce des commandes trop lentes permet de réduire le temps de calcul de 18%. Les résultats montrent que la commande optimale économise 12% d'énergie et n'affecte pas le comportement du cycliste.

Abstract:

Bicycle is a transportation mean whose major advantages with respect to individual cars are to decrease greenhouse effect and to improve the health of the rider. Electrically assisted bicycles (EAB) may impulse a technological breakthrough that would encourage massive modal shift from private car use to this virtuous transportation mode. The objective of this work is to improve the control of the assistance of the EAB with the conflicting objectives to maximize their autonomy while ensuring the rider comfort. This problem is formulated as an Optimal Control problem that minimizes the energy consumed under the constraint of an imposed average speed. The methodology is based on a multi-physics modeling of EAB and its rider. An instrumented EAB is used to calibrate an electro-mechanical modeling. The human behavior modeling is designed thanks to a literature study and measurements achieved on 14 cyclists. The human power behavior is modeled as a regulated power source. Control design is first based upon the Pontryagin's Maximum Principle in the context of academic assumptions, it yields a reference solution. With weaker but more realistic assumptions, the control design is based on the Bellman's Principle applied to a sampled problem. The problem is thus reformulated as finding an optimal path in an energy valued graph. The optimal path is found by an A* algorithm assisted by a well-adapted heuristic function. Moreover, a 18% reduction of the computation time is obtained by using an ad-hoc pruning method. Results show that the optimal control saves 12 % of energy and does not affect the cyclist's behavior.