

UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE n° 521 – Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

FACULTE des Sciences et Techniques
XLIM - Département Ondes et Systèmes Associés

Année : 2013

Thèse N° 27-2013

Thèse
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Limoges

Discipline : Electronique des Hautes Fréquences, Photonique et systèmes

Présentée et soutenue par

Olivier MAURICE

Le 5 septembre 2013

Introduction d'une théorie des jeux dans des topologies dynamiques

Thèse dirigée par Alain REINEIX

JURY :

Président :

Mr Pierre GUILLON

Professeur Émérite

Université de Limoges, XLIM, Dépt. « MINACOM », Limoges

Rapporteurs :

Mr Georges ALQUIE

Professeur Emérite

Université Pierre & Marie Curie, LEE, Paris

Mr Belahcène MAZARI

Professeur

CESI Ecole d'Ingénieurs, Mont Saint Aignan

Examineurs :

Mr Philippe DURAND

Maître de Conférences

CNAM – Département Mathématiques, Paris

Mr Pascal LHOSTE

Professeur – Directeur de l'ENSGSI

Université de Lorraine, Nancy

Mr Michel NEY

Professeur

GET – ENST Bretagne – LEST, Brest

Mr Alain REINEIX

Directeur de Recherche C.N.R.S.

Université de Limoges, XLIM, Dépt. « O.S.A. », Limoges

Invités :

Mr Frédéric HELIODORE

Ingénieur

ALSTOM Grid, La Défense

Mr Gérard LABAUNE

Ingénieur

GERAC, Le Barp

Mr Jean TIROLE

Professeur, Directeur Scientifique

IEI, Univ. Toulouse 1 Capitole, Toulouse

Mr Vincent BRINDEJONC

Ingénieur

THALES Avionics, Meudon la Forêt

Table des matières

Table des matières	4
0.1 Introduction	12
I Analyse tensorielle des réseaux non linéaires	13
1 Notations, concepts fondamentaux en ATR	17
1.1 Introduction au chapitre 1	17
1.2 Notation de l'indice muet généralisée	17
1.2.1 Convention d'Einstein sur la sommation	17
1.2.2 Nouvelle convention pour les fonctions non linéaires	17
1.2.3 Variance	18
1.3 Représenter la réalité	18
1.4 Choix et nature des variables, orientation et principe de la modélisation	19
1.5 Assimilation de l'organe a un élément de topologie cellulaire, dimension du système	20
1.6 Espace primal	20
1.7 Développement des branches	20
1.7.1 Développement sur les bords de faces	21
1.7.2 Du flux aux forces électromotrices	22
1.7.3 Auto-réaction du champ sur une maille	24
1.7.4 Caractérisation d'un organe primitif sur une maille	24
1.7.5 Source de branche et propriété de branche	24
1.7.6 Présence d'un potentiel de jauge	26
1.7.7 Métrique Lagrangienne dans l'espace des mailles	26
1.7.8 Développement sur les frontières, maille virtuelle & diagramme de Roth complété	27
1.7.8.1 Equation de l'espace complet	28
1.7.8.2 Détermination de la connectivité branches mailles dans l'espace complet	29
1.7.9 Caractérisation intrinsèque et comportement dans le système couplé	31
1.7.9.1 Organe avec source propre	31
1.7.9.2 Format hypercomplexe retenu	31
1.7.9.3 Exemple de caractérisation avec source propre	32
1.7.9.4 Méthode de substitution	32
1.7.9.5 Cas des organes sans sources propres	33
1.7.9.6 Conclusion sur la caractérisation	33
1.7.9.6.1 Passage en linéaire, premier contact avec l'émergence	34
1.8 Conclusion du chapitre 1	34
1.9 Références du premier chapitre	34
2 Champs actif versus réactif	37
2.1 Introduction au chapitre 2	37
2.2 Champ réactif	37
2.3 Champ actif	40
2.4 Incidence topologique de la nature du champ et séparation des composantes	40
2.5 Espace des moments lié aux branches - connexion d'espace	41
2.5.1 Espace des moments liés aux mailles	42

2.5.2	Pertes par rayonnement	43
2.5.3	Champ quantique et réseau	43
2.5.4	Chaîne de résonateurs	44
2.5.5	Théorème de réciprocité	46
2.5.6	Principe d'équivalence	47
2.6	Résumé des éléments de graphe présents dans l'ATR étendue	48
2.7	Caractérisation en rayonné	48
2.7.1	Méthodologie générale de caractérisation d'un organe	49
2.8	Conclusion du chapitre 2	49
2.9	Références du chapitre 2	51
3	Ondes guidées	53
3.1	Introduction au chapitre 3	53
3.2	Ondes guidées suivant le modèle de Branin	53
3.2.1	Ligne de propagation par mode unique	54
3.2.2	Vitesse infinie et lien direct	55
3.2.2.1	Equivalence topologique	55
3.2.2.2	Comportement asymptotique	56
3.3	Interaction entre objets dans un guide ou une cavité	57
3.3.1	Topologie commune	57
3.3.2	Méthode de modélisation générale, choix de format	57
3.3.2.1	Exemple avec l'utilisation d'une ligne	57
3.3.2.2	Détermination des modes	61
3.3.2.3	Méthode de résolution pour les cas compliqués	62
3.4	Modification des trajectoires de l'espace libre en espace contraint	63
3.4.1	Tout champ a son dual	63
3.4.2	De l'espace libre à l'espace contraint	64
3.5	Rayonnement d'une ligne ouverte	64
3.6	Modification des trajectoires du champ, gestion des pertes par rayonnement	69
3.6.1	Modification des cordes virtuelles du modèle de Branin	69
3.6.2	Modification de la résistance de rayonnement	70
3.6.3	Exemple illustratif	70
3.6.4	Propagation multimodale	74
3.6.5	Rappel sur l'expression générale de l'impédance	75
3.6.6	Exemple de propagation non linéaire en format réel simple	75
3.6.6.1	Déduction de la métrique à partir des fonctions de Laplace en temporel et co- vecteur des sources généralisé	75
3.6.6.2	Programmation de l'onde de Peregrine	76
3.7	Conclusion sur le chapitre 3	76
3.8	Références du chapitre 3	77
4	Interactions relativistes	79
4.1	Introduction au chapitre 4	79
4.2	Rappel des principes de la relativité restreinte et application dans l'ATR	79
4.2.1	Perception des phénomènes statiques	80
4.2.1.1	4-vitesse	81
4.2.1.2	4-potentiel et vision de la statique	82
4.3	Interprétation des flux de réseaux	82
4.3.1	Un réseau ne peut appartenir qu'à un seul référentiel	83
4.3.2	Bilan de transformation pour un flux fermé	83
4.3.2.1	Transformation des termes de pertes	85
4.3.2.2	Transformation des termes d'énergie potentielle	86
4.3.2.3	Transformation des termes d'énergie magnétique	86
4.4	Rayonnement des particules en mouvement	87
4.5	Référentiels en mouvements relatifs accélérés	88
4.5.1	Un peu d'histoire	89

4.5.2	Premiers concepts en énergie	90
4.5.3	Equations de Lagrange	90
4.5.4	Etude des termes de l'équation de Lagrange non holonomique	93
4.5.5	Influence du format	94
4.5.6	Les équations de Lagrange dans les circuits électriques	94
4.5.7	Notion de géodésiques	95
4.5.8	Synthèse du problème	96
4.5.9	Transformation de l'équation de Lagrange, puis de l'équation de Kron	96
4.5.9.1	Formes de Pfaffian	97
4.5.9.2	Sommet dans l'espace des mailles	97
4.5.9.3	Expression de l'équation de Lagrange des grandeurs transformées	97
4.5.10	Détermination des propriétés de l'espace-temps : trajectoire des cordes	98
4.5.10.1	Courbure au niveau d'une maille	99
4.5.10.2	Démonstration classique de la courbure appliquée aux lignes de champ magnétique	101
4.5.11	Considération essentielle sur l'hypothèse de non courbure à l'échelle d'un réseau	105
4.5.12	Quelques considérations topologiques	105
4.6	Conclusion du chapitre 4	106
4.7	Références du chapitre 4	106
5	Mécanique quantique	109
5.1	Introduction au chapitre 5	109
5.2	Relations fondamentales de la mécanique quantique	109
5.2.1	Méthode des opérateurs	109
5.3	Seconde quantification	112
5.4	Incertitude d'Heisenberg vue sous le jour de la topologie de Branin	112
5.5	Mécanique quantique enfouie dans une propriété de branche	113
5.5.1	Exemple d'une section soumise à un champ électrique	114
5.5.2	Réseaux quantiques	114
5.5.3	Le puit de potentiel carré	115
5.5.3.1	Lagrangien positif	115
5.5.3.2	Lagrangien négatif	116
5.6	Insertion du temps et cordes quantiques	116
5.7	Processus de rayonnement	117
5.8	Une autre façon de faire de la mécanique quantique	118
5.9	Conclusion du chapitre 5	119
5.10	Références du chapitre 5	120
6	Méthodologie générale de l'ATR	121
6.1	Introduction au chapitre 6	121
6.2	Diakoptique de branches sur réseau linéaire	121
6.3	Diakoptique perturbative par cordes	123
6.4	Utilisation du complément de Schur	124
6.5	Diakoptique non linéaire	125
6.5.1	Modélisation d'un phénomène de snap-back	125
6.5.2	Implémentation directe	126
6.5.3	Projection sur un ensemble de domaines contigus	126
6.5.3.1	Continuité	128
6.5.3.2	Contrainte	128
6.5.3.3	Résultats	128
6.5.4	Diakoptique non linéaire par usage de la projection sur des domaines contigus	129
6.5.4.1	Diakoptique par rajout de mailles virtuelles	130
6.5.4.2	Passage à des fonctions non linéaires	130
6.5.4.3	Généralisation dans une Diakoptique de branche	132
6.5.4.4	Relativité d'échelle et Diakoptique	133
6.6	Expression généralisée d'une métrique non holonomique pour la multiphysique	133
6.7	Méthodologie de caractérisation d'un élément non linéaire	135

6.7.1	Méthodologie statique	135
6.7.2	Méthodologie dynamique	135
6.8	Définition d'échelles, Diakoptique et multiéchelles	135
6.9	Conclusion du chapitre 6 : Résolution de l'équation tensorielle non linéaire	137
6.10	Références du chapitre 6	138
7	Groupes de transformations	141
7.1	Introduction au chapitre 7	141
7.2	Notions basiques de groupe	141
7.3	Transformations présagées	141
7.3.1	Transformations géométriques	142
7.3.1.1	Transformations sur la connexion spatiale et les moments : groupe \mathcal{T} en translations	142
7.3.1.2	Rotations	142
7.3.2	Transformations opérant sur la structure des réseaux	143
7.3.2.1	Changement de sens ou modification de signes	143
7.3.2.2	Suppression de branches	144
7.3.2.3	Adjonction de branches, de mailles	144
7.3.3	Transformations de formats	145
7.3.4	Transformations de métriques	146
7.3.4.1	Métriques linéaires	146
7.3.4.2	Métriques non linéaires	147
7.3.5	Transformations de domaines - ou transformations modales	147
7.3.6	Transformations d'environnements	148
7.4	Conclusion du chapitre 7	149
7.5	Références du chapitre 7	149
II	Mécanisme des Gamma matrices & tenfolds	151
8	Tenfolds	153
8.1	Introduction au chapitre 8	153
8.2	Définition d'un tenfold	153
8.3	Définition d'un transformateur	153
8.4	Opérations sur les tenfolds	154
8.5	Conclusion du chapitre 8	154
9	Gamma matrices	155
9.1	Introduction au chapitre 9	155
9.2	Propagateur	155
9.2.1	Oscillateur	156
9.2.2	Propagateur stationnaire	156
9.2.3	Diffuseur	156
9.2.4	Regroupeur	156
9.2.5	Retourneur	157
9.2.6	Entrelaceur	157
9.2.7	Autres propagateurs	157
9.3	Horloge des événements	157
9.4	Arbre d'évolution	157
9.4.1	Croissance de l'arbre	157
9.4.2	Dégénérescence de l'arbre	159
9.5	Phases de vie	160
9.6	Conclusion du chapitre 9	162
9.7	Références du chapitre 9	162

III	Introduction à la théorie des jeux	163
10	Bases de la théorie des jeux	165
10.1	Introduction au chapitre 10	165
10.2	Le dilemme du prisonnier	165
10.3	Arbres de Kuhn en stratégies pures	166
10.3.1	Arbre de Kuhn en information parfaite	166
10.3.2	Arbre de Kuhn en information imparfaite	168
10.3.3	Arbre de Kuhn avec joueur hasard	168
10.3.4	Méthodes de résolution	168
10.3.4.1	Méthode de résolution à rebours	168
10.3.4.2	Méthode des meilleures réponses	169
10.4	Equilibre de Nash	169
10.5	Stratégies mixtes	170
10.5.1	Dilemme du prisonnier revu en propagateur pondéré - principes de représentation	170
10.5.2	Trajectoires pour un jeu non simultané avec échanges d'informations	172
10.6	Equilibre parfait en processus de Markov	174
10.6.1	Processus stochastique	175
10.6.2	Processus à variables indépendantes	175
10.6.3	Processus d'essais indépendants	175
10.6.4	Processus markovien	175
10.6.5	Premières projections dans l'espace CG	176
10.6.6	Vers l'équilibre parfait dans un processus de Markov	176
10.6.6.1	Hypothèses	176
10.6.6.2	Equilibre de Nash parfait en sous-jeu	177
10.6.6.3	Equilibre parfait en processus de Markov	178
10.6.6.4	Transposition du MPE dans l'espace CG	178
10.7	Implémentation d'un processus de Markov dans le formalisme des tenfolds	178
10.8	Conclusion du chapitre 10	179
10.9	Références du chapitre 10	180
IV	Modéliser la complexité : une théorie des jeux dans une topologie dynamique	181
11	Trajectoires dans l'espace Choix - Gain	183
11.1	Introduction au chapitre 11	183
11.2	Propagateur et espace CG	183
11.3	Incidence de l'AE	185
11.4	Horizon	186
11.5	Algorithme d'évolution	186
11.6	Conclusion du chapitre 11	186
11.7	Références du chapitre 11	187
12	Principe MPE dans l'espace CG : bords et optima	189
12.1	Introduction au chapitre 12	189
12.2	Futur vu d'un état	189
12.2.1	Projection d'ordre n avec connaissance complète et acteur rationnel	190
12.2.1.1	Projection du premier ordre déterminée par l'évolution sur le dernier tenfold	191
12.2.1.1.1	Partitionnement de l'histoire.	191
12.2.1.1.2	Groupe(s) de transformations disponible(s).	192
12.2.1.1.3	Espérance de gain des acteurs.	192
12.2.1.1.4	Conclusion.	192
12.3	Processus de Markov d'ordres élevés	193
12.3.1	Petits et grands modes	193
12.3.2	Conditions initiales sur les grands et petits modes, échelles	193
12.3.3	Formulation mathématique du problème	194

12.4	Découverte de l'AE : passage du chemin à la trajectoire de société	195
12.5	Topologies de l'AE	198
12.5.1	Topologies en nappes	198
12.5.1.1	Exemple illustratif.	199
12.5.1.2	Avancées à l'aveugle dans l'espace CG	201
12.5.2	Topologies avec zones d'évitement	202
12.5.2.1	Mécanisme de couplage	202
12.5.2.2	Coefficient de couplage	203
12.5.2.3	Comportement dans l'espace gain-contrainte	203
12.5.2.4	Probabilité de versement	204
12.5.2.5	Début de mécanisme	204
12.5.2.6	Algorithme du programme	205
12.5.2.6.1	Présentation des résultats	205
12.5.3	Traduction des conditions initiales	207
12.5.4	Présence de petits et de grands modes	207
12.6	Conclusion du chapitre 12	208
12.7	Références du chapitre 12	209

V Application 211

13	Description du jeu	213
13.1	Introduction au chapitre 13	213
13.2	Règle du jeu	213
13.3	Eléments du jeu	213
13.3.1	Carte de puissance	214
13.3.2	RSIL	214
13.3.3	Alimentation et charge	215
13.3.4	Constitution de la chaîne de puissance	215
13.3.5	Ajout du filtre	220
13.3.6	Gains déterministes et en fonction des intérêts propres pour les deux responsables hardware et CEM	220
	Cas d'une première trajectoire que nous appellerons "classique"	220
	Trajectoires de bords	221
	Situation de conflit	222
13.3.7	Représentation des trajectoires	222
13.3.7.1	Résultats pour la trajectoire classique	223
13.3.7.2	Résultats pour les trajectoires de bords	224
13.3.7.3	Résultats dans la situation de conflit	225
13.3.8	Analyse : présence d'un "horizon de Nash" ?	226
13.3.8.1	Evolution avec ou sans mémoire	226
13.3.8.2	Algorithme d'évolution	227
13.3.8.3	Tracés des trajectoires particulières	228
13.3.8.4	Représentation dans l'espace des transformations	230
13.4	Recherche d'un horizon de Nash pour JC et la société solidaire	231
13.4.1	$P(G_j \gamma_i)_\epsilon$	232
13.4.2	$P(\gamma_i)_\epsilon$	232
13.4.3	Recherche du chemin optimum vers l'horizon de Nash	233
13.5	Première conclusion sur le chapitre 13	235
13.6	Analyse sur l'arbre complet	235
13.6.1	Mécanismes d'évolution de l'AE	235
13.6.2	Projection de l'AE complet sur l'espace CG	237
13.6.3	Horizon de Nash	238
13.6.4	Equilibre parfait pour une stratégie markovienne	238
13.7	Du caractère au propagateur et à la croissance	238
13.8	Seconde conclusion sur le chapitre 13	239

13.9	Références du chapitre 13	239
VI	Conclusion générale	241
VII	Glossaire	245
VIII	Annexe A : photon et champ classique	249
IX	Annexe B : lois par domaines sur une variété	259
X	Annexe C : du modèle de Branin	267
XI	Annexe D : Modélisation multiéchelle, multiphysique	273
XII	Annexe E : Concept de similarité	277
XIII	Annexe F : Coefficient de couplage	282
XIV	Annexe G : Modélisation analytique de cavités tordues	287
XV	Annexe H : Points de vue	291
XVI	Publications	294
XVII	Soutenance	297

0.1 Introduction

Les topologies principalement cellulaires font l'objet de nombreux travaux, soit pour leur emploi dans des problématiques précises, soit pour développer des capacités à cet outil qui répond déjà à de nombreux besoins en simulations ou en modélisations. Les topologies cellulaires adressent en général des structures de graphes avec leurs sommets et leurs branches ou arêtes. La théorie des graphes donne déjà les outils pour caractériser les graphes, leur associer des trajets optimaux, etc. La topologie donne une profondeur supplémentaire aux graphes en leur associant des propriétés de similitudes entre graphes, et en donnant les liens fondamentaux entre les structures des graphes et des grandeurs liées comme des potentiels, des flux, etc. Cette association est utilisée dans de nombreux domaines : électricité, réseaux sociaux, droit, économie, et, domaine qui nous intéressera plus que les autres : l'analyse tensorielle des réseaux. Pourquoi y adjoindre une théorie des jeux ? Tout d'abord l'idée en soit n'est pas nouvelle. Les travaux de Matthew O.Jackson[MOJ] montrent déjà, appliqués à des études sociologiques et financières, l'intérêt de représentations en graphes sus tendues à une théorie des jeux. Cependant les graphes ici sont "classiques" : constitués de sommets et de branches. Ceux avec lesquels nous travaillons sont enrichis d'espaces supplémentaires : mailles, moments, cordes, mailles virtuelles. Nous allons utiliser ces graphes pour nous doter d'une représentation du problème que l'on veut modéliser. Rattaché à l'analyse tensorielle des réseaux, ce graphe va engendrer une équation tensorielle et va pouvoir évoluer comme autant de transformations appliquées aux éléments de cette équation. Pour suivre ces évolutions, on encapsule les réseaux et leurs graphes dans des jonctions d'un arbre de l'évolution. L'outil des "gamma matrices" développé avec le Pr Alain Reineix prend en charge cette encapsulation. Et c'est là qu'intervient le jeu : car toute évolution peut être vue comme un jeu. Jeu pour l'optimisation, pour la décision, pour l'appât du gain, pour défier, pour autant de ces concepts très abstraits qui sont les bases des comportements humain et animal. A chercher à coupler théorie des jeux et analyse tensorielle des réseaux on en est venu tout naturellement à chercher à modéliser la complexité. Car qu'est-ce que la complexité si ce n'est avant tout ce subtil mélange de rationnel et d'irrationnel, de déterminisme et d'émergence ? Sans prétendre être parvenu à proposer une méthode complète de modélisation de la complexité, on espère que la méthode proposée ici en donnera de sérieuses pistes. Elle a en tout cas pu être testée sur des problèmes de compatibilité électromagnétique, champ premier de nos compétences.

Avant d'aborder la complexité nous allons parler des quatre domaines qui, couplés, permettront d'élaborer notre méthode :

- l'analyse tensorielle des réseaux non linéaires et la représentation par graphes étendue ;
- la technique des gamma matrices ;
- la représentation par tenfolds ;
- la théorie des jeux.

Partant des deux premiers outils nous définirons l'espace des tenfolds et leur algèbre pour ensuite montrer comment la méthode proposée basée sur ces objets peut prendre en charge une théorie des jeux inscrite dans des topologies dynamiques et de là, modéliser des phénomènes complexes. Pour ce dernier chapitre, nous abordons la complexité au travers d'une application.

Première partie

Analyse tensorielle des réseaux non linéaires

Préambule

L'analyse tensorielle des réseaux élaborée par Gabriel Kron en 1939 raccroche la physique des potentiels (tensions, courants, ...) et des réseaux électromagnétiques ou électromécaniques à des tenseurs et leur algèbre, conférant ainsi à l'étude de ces réseaux tout l'arsenal de la topologie. On peut citer Balasubramanian, Lynn et Sen Gupta dans l'introduction de "differential forms on electromagnetic networks " : *Kron was among the first to demonstrate engineering applications of combinatorial topology and differential geometry. He adapted much of the tensor calculus, such as the concept of transformation, groups, invariance, parallelism, affine connection and curvature and applied this these to the electrodynamic analysis of electrical circuits and machines*[BLSG].

En général, l'analyse tensorielle des réseaux (ATR ou en Anglais, "TAN" : Tensoriel Analysis of Networks) ou "méthode de Kron" est présentée pour des fonctions linéaires entre les différences de potentiels aux branches et les flux dans ces branches. Kron l'a avant tout appliquée à des machines électriques, des circuits électriques, mais rapidement, s'apercevant que la démarche pouvait s'appliquer à toute une catégorie de problèmes, il tenta de l'utiliser dans des domaines très variés : mécanique quantique, fluides, etc. A tel point que certains lui reprochaient de vouloir tout résoudre par sa méthode. Et c'est vrai que la tentation est grande ! Pourtant c'est un paradoxe puisque la méthode de Kron ne résout rien en elle-même, elle permet "seulement" d'établir les équations tensorielles d'un problème. La résolution concrète de ces équations, souvent numérique, est une étape supplémentaire et non triviale souvent qu'il faut ajouter à la méthode pour parvenir à une résolution complète du problème abordé.

La tentation est grande parce que l'on s'aperçoit que la méthode de Kron permet, une fois que l'on a passé le cap de sa maîtrise, de représenter la pensée de l'ingénieur - elle permet de poser le problème dans des termes mathématiques. En compatibilité électromagnétique, un expérimentateur peut être rapidement frustré de ne pas pouvoir essayer de prédire les résultats de ses expérimentations. Les outils nummérique disponibles, quoiqu'on en dise, sont d'un usage difficile et l'implémentation d'une vraie expérience dans ces outils n'est pas une opération anodine. On peut souvent simuler une partie de l'expérience, obtenir une cartographie de champ, un potentiel sur une résistance, etc. Mais pour l'expérimentateur, le problème est de calculer l'ensemble, incluant les antennes, les électroniques, les structures, etc. Ce n'est sûrement pas par hasard que la méthode de Kron est présentée dans le "Angot"[ANGOT], ouvrage de mathématiques pour l'ingénieur.

Ces expériences mettent souvent en œuvre des antennes et des interactions rayonnées en champ lointain. On peut vouloir exploiter dans les équations des relations comportementales permettant de représenter une fonction électronique complète, entre son entrée et une observable de sortie qui peut être pratiquement n'importe quoi. Dans la méthode de Kron, des couplages entre bobinages, créant des fonctions extradiagonales dans une matrice impédance, sont représentés par des lignes entre les branches qui portent les bobinages et ne sont pas plus évoquées que cela par Kron. Pourtant ces éléments ne sont pas des composantes classiques de graphes. On décide d'étendre leur usage à des interactions d'antennes ou des transports d'information et on appelle ces lignes des "cordes" reliant des branches ou des mailles. Cet additif permet de présenter l'application de la méthode de Kron aux problèmes de CEM, même si certains aspects demandent encore à être formalisés mathématiquement. C'est l'approche présentée dans l'ouvrage "Compatibilité électromagnétique des systèmes complexes"[CESC] sorti en 2007 et préfacé par Jean-Claude Boudenot, malheureusement disparu, mais qui avait pressenti le potentiel de la méthode de Kron pour la CEM.

La formalisation des outils développés pour la CEM dans le cadre des approches mathématiques modernes est en cours et des travaux tendent à suggérer la généralisation des cordes comme des foncteurs entre des catégories[MRDD]¹. Depuis l'ATR a fait son chemin et de nombreux articles en CEM font état de son usage mais aussi des thèses, dont celle menée par Samuel Leman encadré par le professeur Bernard Demoulin[SLBD]

1. Le choix du nom de *corde* n'est pas forcément heureux. En Français, on peut confondre avec les cordes de la théorie des cordes. En Anglais, le choix de prendre *Chord* permet de lever cette ambiguïté. Peut-être faudra-t-il revenir sur ce nom pour retenir foncteur ?

qui a participé de façon significative à la promotion de cette nouvelle démarche. Alain Reineix a développé des modèles pour les cavités : ce cas qui paraissait inaccessible à l'analytique sauf pour des géométries simples ! On sait maintenant que les cavités, les plans de masse, peuvent être vus comme des modifications des propagations et du "noyau de Green" des fonctions d'interactions originellement définies en espace libre. Et de nombreux autres auteurs contribuent maintenant à son enrichissement en modèles. Je citerais Maxime Breant qui a montré l'usage de transformations à deux opérateurs pour traduire les branchements effectués sur des réseaux. On sait aujourd'hui incorporer tout modèle, expérimental, numérique, analytique dans la méthode, en faisant ainsi une théorie pour la CEM. En développant dans le cadre de cette thèse la méthode de Kron appliquée à des interactions non linéaires on généralise sa présentation en profitant de réflexions menées avec le professeur Yuri Sohor de l'institut de Pskov en Russie - de nouvelles sources de développement et de généralisation mathématiques à venir ! Notons que déjà, Papin et Kauffman soulignaient le besoin de définir un tenseur fondamental qui ne soit pas forcément symétrique ni linéaire[PK].

Certains pourraient penser que l'on prétend modéliser toute la physique par une seule méthode et de critiquer et chercher les points de faiblesses dans cette démarche. Au risque de se répéter, la méthode de Kron et les développements présentés dans cette thèse n'ont d'autres buts que d'aider à la mathématisation d'une réalité perçue, symbolisée sous la forme du dessin d'un graphe. Nul besoin d'y chercher des défauts, des erreurs, les fonctions utilisées sont les fonctions fournies par chaque métier de la physique. Et le graphe, avec un peu d'habitude, est un morphisme du système d'équations tensorielles correspondant. La démarche est identique à celle des diagrammes de Feynman ou aux représentations diagrammatiques de Penrose.

Chapitre 1

Notations, concepts fondamentaux en ATR

1.1 Introduction au chapitre 1

Nous présentons dans ce chapitre les notions essentielles de l'ATR pour la suite de la thèse dont le choix de la notation indicielle. J'ai choisi cette notation suivant l'exemple de Penrose[RP]. On aborde les grands principes de l'ATR : espace primal, dual, invariant, métrique, etc.

1.2 Notation de l'indice muet généralisée

Un indice placé à droite des symboles permet par convention d'identifier la nature de l'objet sous-jacent et son organisation[AE]. Il peut être en haut, en bas, décalé ou pas ou s'il y en a plusieurs, dans différentes positions dans une liste. Happ[HH] avait proposé d'utiliser un point pour marquer la position ligne ou colonne à laquelle se réfère un indice lorsque l'on implémente le tenseur en matrice. On avait repris ce principe qui semblait pratique. Cela a été assez critiqué par la communauté CEM ou par les mathématiciens pour son originalité. Pourquoi comparer tenseurs et matrices? En fait Papin et Kauffman[PK] font le détail de l'implémentation matricielle des tenseurs (on reprend ici leurs mots). Car il y a bien un moment où il faut programmer ces objets. Et certaines astuces, certes peu élégantes formellement, sont bien pratiques parfois pour rendre la programmation plus robuste. Nous utiliserons ici la notation indicielle classique (celle utilisée par Penrose, Feynman, Landau, Einstein,...) mais pour répondre aux spécificités de la non linéarité, on l'enrichit un petit peu.

On notera parfois ∂_a l'opérateur dérivée partielle par rapport à a .

Un exposant ou indice entre parenthèses fait référence à une valeur de paramètre de l'objet indicé.

Un exposant ou indice entre accolades pointe un domaine, un mode auquel appartient l'objet indicé.

L'usage du "bullet" (\bullet) permet d'indiquer la place que prend une variable dans un opérateur.

On fera souvent appel au symbole p pour pointer l'opérateur de Laplace.

1.2.1 Convention d'Einstein sur la sommation

Lorsque l'on réalise le produit d'un tenseur (ramené à ses composantes) par un vecteur (sous forme de tableau en colonne de ses composantes) on somme le produit des matrices sur l'indice qui pointe les colonnes de la matrice. On écrit par exemple : $A_b = \sum_n M_{bn} V^n$. Dans la convention d'Einstein, la sommation sur l'indice n est implicite[AE]. On écrit simplement : $A_b = M_{bn} V^n$. Suite à cette convention on peut se donner quelques règles. L'objet résultat a un ou plusieurs indice(s) qui n'est (ne sont) pas répété(s) dans l'autre membre de l'égalité. Les indices gardent l'ordre d'apparition qu'ils ont dans le produit. Lorsque l'on inverse un tenseur, l'ordre des indices s'inverse et leur position passe de bas en haut ou de haut en bas. Par exemple :

$$a_\mu = t_{\mu\nu\alpha} b^\nu c^\alpha \quad u^a = y^{ab} v_b \Rightarrow v_b = g_{ba} u^a \quad k_{af}^d = j_a l_f h^d$$

1.2.2 Nouvelle convention pour les fonctions non linéaires

La convention de l'indice muet sous-entend que l'on peut écrire un objet comme somme de produits d'autres objets. Par exemple en écrivant : $v_a = z_{ab} i^b$, si l'on travaille dans un espace des branches (défini plus tard) à 2 dimensions et que i^b représente les flux de branches, cela revient au développement suivant :

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2 \\ v_2 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2 \end{cases}$$

Les couplages z_{12} et z_{21} se reportent sur les équations comme des sources qui viennent modifier les flux découplés i^1 et i^2 . Mais si les comportements ne sont pas linéaires, il faut traduire le fait que la source v_1 va s'écrire comme une certaine fonction du flux i^1 complétée du couplage avec le flux i^2 . On attend donc une expression de la forme : $v_1 = \text{fonction}(i^1, i^2)$, idem pour v_2 . A l'échelle d'un système on se retrouve avec N équations de ce type, formant un vecteur de fonctions[BGLM]. Pour faire apparaître cette forme, on propose la notation suivante : l'indice des variables sur lesquelles s'applique la fonction z_a pour la source v_a est noté comme pour un symbole mais sur la parenthèse qui suit le symbole de la fonction portant l'indice de source. Ainsi, l'expression précédente devient : $v_a = z_a(i^b)$. Dans le cas linéaire, cette expression se réduit à $v_a = z_{ab}(i^b)$, qui est plus rigoureuse que la première, car z est bien un opérateur, par exemple une dérivée temporelle portant sur le flux i^b [ANGOT][PK].

1.2.3 Variance

Lorsque l'on se réfère à un vecteur, on parle de vecteur contravariant. Au contraire les covecteurs sont covariants. Cette notion de variance se réfère à une matrice de changement de bases. Partant d'un espace vectoriel de référence, appelé "primal" on développe sur la base de cet espace un vecteur quelconque \vec{I} en écrivant : $\vec{I} = I^a \vec{u}_a$, l'ensemble des vecteurs \vec{u}_a étant la base de l'espace considéré. Par l'écriture I^a on pointe donc les composantes du vecteur \vec{I} .

On peut ensuite créer un espace dual, par exemple une forme linéaire en intégrant sur la base : $\hat{u}^a = \int_a \vec{d}\vec{a} \cdot \vec{u}_a$. Un covecteur développé sur la base duale s'écrit : $\hat{v} = v_a \hat{u}^a$. Si l'on applique un changement de bases, par exemple : $\vec{v}_b = \Lambda_b^a \vec{u}_a$. On s'aperçoit que l'application de la matrice de changement de bases Λ aux composantes du covecteur est directe : $\Lambda_b^a v_a$, alors que pour les composantes du vecteur, on doit utiliser la matrice inverse : $\Lambda_a^b I^a$. Cette différence entre l'emploi de la matrice directe ou inverse est à l'origine des dénominations de vecteur covariant (utilisant la matrice directe) ou contravariant (utilisant la matrice inverse). Au-delà de cette différence, et nous y reviendront, la variance joue un rôle essentiel dans la reconnaissance des natures intrinsèques des objets manipulés. Lorsque l'on obtient un vecteur dans un calcul tensoriel, on sait que l'on pointe un flux, un courant, une impulsion, etc. Alors que si on obtient un covecteur, on a un effort (une tension, une force électromotrice, une force, etc.).

1.3 Représenter la réalité

La réalité n'a de sens que dans un référentiel donné. On pense ici à celui de l'ingénieur face à son problème. La réalité est pour lui un ensemble de mécanismes, de pièces, d'interactions volontaires ou non qui, regroupés, forment un système en phase de conception ou en phase d'étude. **Cet assemblage de pièces peut être effectivement découpé en pièces distinctes dont on considère qu'elles ont une existence propre**, indépendamment de l'assemblage. Une réalité consiste alors en un système fabriqué à partir d'un ensemble d'organes (ou composants ou équipements) qui sont ensuite couplés. De ces couplages émerge l'existence du système. Il existe donc un premier découpage possible d'un système en ses constituants. Certains de ces constituants peuvent être à leur tour morcelés. On procède ainsi jusqu'à arriver à un ensemble d'organes qu'il ne soit plus possible de séparer en constituants, sans porter atteinte à l'intégrité de l'organe lui-même. On entend par porter atteinte le fait de réaliser une opération de découpage irréversible. Par exemple, on peut démonter un circuit électronique puis arriver aux composants. Si j'essaie de séparer les broches d'une résistance de la partie résistive, je ne pourrais pas le faire sans casser la résistance. Je ne suis plus capable ensuite de la reconstituer. La résistance est donc un organe élémentaire d'un système électronique. On peut objecter que la résistance à un moment donné a été elle-même fabriquée à partir d'éléments plus petits. C'est vrai et il y a eu une succession de transformations que nous considérons comme irréversibles et qui ont conduit à cet organe élémentaire, lui-même issu à un moment donné de matériels plus petits. Un processus similaire peut être utilisé pour fabriquer un système. C'est à dire considérer le système à son montage et non à son démontage. On voit ici déjà poindre une notion de systémique : on peut être capable de fabriquer un système à partir de briques élémentaires, puis ne plus être capables de le démonter sans le casser. Le montage a alors fait appel à des transformations irréversibles. La notion d'organe n'existe dans ce cas qu'avant l'obtention du système.

Définitions :

1. On appelle **système** un ensemble d'organes couplés qui est à même de réaliser des fonctions sociales, etc., définies dans un certain référentiel (point de vue). Un système est un ensemble de fonctions.
2. On appelle **organe** toute partie d'un système qui prend en charge une partie seulement des fonctions et qui ne peut être subdivisé sans dégrader l'une des fonctions portée par l'organe, toujours dans un certain référentiel.

A une échelle d'observation donnée et pour un domaine d'observation donné il existe donc des organes indivisibles constituant le système. On suit en cela exactement le premier principe de Descartes. A "une échelle et un domaine donnés" signifie que le modèle que l'on considère, la vue que l'on a de l'organe dépendent des instruments que l'on utilise pour le voir. Le domaine (rayons X, radiofréquences, mécanique, etc.) et l'échelle (millimètre, centimètre, etc.) choisis vont dimensionner le domaine et l'échelle du modèle que l'on va élaborer pour une réalité et doivent donc être en cohérence avec l'usage que l'on veut faire ensuite de ces modèles. Caractériser ou modéliser un organe va consister à mener une expérience où l'on stimule l'organe donné suivant une excitation bien définie, pour mesurer ses réponses avec des détecteurs bien définis également. On associe par ce biais à chaque organe une fonction de variables (dont nous traitons ensuite) qui traduit mathématiquement la mesure effectuée.

Définitions :

1. A tout système S on fait correspondre par identification un ensemble E_S dont les éléments sont les organes O_n du système dans les domaines d'observations définis : $E_S = \{O_1, O_2, \dots, O_n\}$.
2. A chaque organe O_n on fait correspondre par mesure une fonction f_n de variables x_k qui caractérise l'organe : $mesure \leftarrow O_n \rightarrow f_n$.
3. Un organe est fait d'un ensemble de volumes homogènes en propriétés pris séparément, et soudés entre eux par des liens divers. Chaque volume constitue une variété et l'assemblage des volumes qui conduit à l'organe est appelé **squelette**.
4. Il y a changement d'échelle lorsque le découpage d'une variété ou d'un squelette implique la non conservation des lois physiques appliquées aux espaces affines associés à ces variétés.

L'assemblage d'organe peut engendrer une nouvelle fonction qui peut être vue comme une émergence, pouvant avoir des propriétés non contenues dans les organes séparés.

Finalement, vu d'un certain référentiel (le système comme l'organe prennent des apparences différentes suivant l'observateur et l'observation. Par exemple une salade est vue différemment par le paysan, le consommateur, le biologiste, l'escargot, ...) l'organe fournit une heuristique suffisante pour atteindre le niveau d'information que l'on attend à une échelle donnée, et pour un référentiel donné.

1.4 Choix et nature des variables, orientation et principe de la modélisation

Les variables sont rattachées aux observables de la mesure. Si l'on effectue une mesure d'électricité, on choisira une variable i représentant l'amplitude d'un flux d'électricité dans l'organe sous des conditions de mesures précisées. Si l'on effectue une caractérisation multiphysique, par exemple conjointement électrique et thermique, on explorera un domaine défini par deux variables i et T pour toutes les combinaisons possibles de ces deux variables. Considérons de nouveau notre résistance. On peut faire en sorte de mesurer son comportement vis à vis d'un courant qui la traverse en fonction du temps. Disant cela, on se donne une première contrainte qui est de définir les points où l'on va injecter le courant. Désignant deux points, on oriente l'organe, c'est à dire qu'on lui associe une direction privilégiée d'écoulement de flux et des ports d'accès. On devra vérifier que son comportement est identique suivant la polarité de l'injection : à savoir si l'écoulement s'effectue dans un sens ou dans l'autre de la direction choisie.

Principe :

Modéliser un organe consiste à injecter un flux - un débit (de charge, de masse, ...) au cours du temps au travers de cet organe et d'en extraire une fonction de ces injections qui constitue le modèle de l'organe. D'une manière générale un organe se modélise sous la forme d'une fonction non linéaire f telle que :

$$\text{sorties} = f(\text{entrées})$$

On peut aussi appliquer un effort sur un organe et mesurer le flux qui le traverse. Simplement on part ici de la quantité duale au lieu dans le premier cas de partir de la quantité primale.

1.5 Assimilation de l'organe a un élément de topologie cellulaire, dimension du système

Si nous sommes capable de réaliser l'expérience précédente, nous pouvons représenter l'organe de façon symbolique par un élément de topologie cellulaire : une branche. Les sommets de la branche sont les points d'injection des variables de caractérisation (incluant le temps). La branche est orientée et on l'associe à une fonction qui est le modèle de l'organe. Une topologie cellulaire est une topologie raccrochée à des éléments de sommets, branches, mailles.

Ainsi, à l'ensemble E_S d'un système correspond un ensemble de branches, éléments de l'espace T_1 des formes de dimension 1 ouvertes (en topologie cellulaire, on associe pour les formes de base une dimension 0 aux sommets, 1 aux branches et 2 aux surfaces, 3 aux volumes, etc.[TDG] Les formes qui sont des combinaisons linéaires des formes de base sont appelées des chaînes[WHIT]). De fait un système composé de N organes sera associé à un espace des branches de dimension N . Cet espace, T_1 est pourvu d'une base sur les composantes de laquelle sont projetés les flux (au sens large) de branches. On notera C_1 les éléments cycles de chaînes qui sont des assemblages de branches formant un parcours clos (sans sommet non connecté à deux branches). C_2 sera une surface close par un bord.

1.6 Espace primal

Soit \mathbf{a}_k les vecteurs de la base de T_1 , à l'issue de la mesure sur les branches, on développe une fonction z pour chaque branche qui s'applique aux composantes de \mathbf{a}_k que sont les flux imprimés sur la branche pendant la caractérisation :

$$\forall k \in [0, N], z : \mathbf{a}_k \left\{ \begin{array}{l} b^k \\ t^k \\ \dots \end{array} \right\}, \mathbf{a}_k \rightarrow z(b^k, t^k, \dots) \quad (1.1)$$

L'objet \mathbf{a}_k est une mathématisation abstraite d'une branche qui est un élément de représentation symbolique d'une réalité perçue et dessinée par un graphe et ses éléments géométriques.

Les composantes du vecteur flux sur \mathbf{a}_k sont des hypercomplexes¹ réduits en général à deux termes (ils deviennent de simples complexes) : un flux et le temps. Si cette hypothèse se confirme il faudra préciser la nature des hypercomplexes utilisés. Ce problème ne se pose pas dans le cas linéaire et l'on peut considérer les composantes de \mathbf{a}_k comme des réels ou des complexes simples. La fonction de caractérisation s'applique aux parties du nombre hypercomplexe en facteur de chaque vecteur \mathbf{a}_k .

Définition :

On appelle **espace primal** ou **espace naturel**, l'espace T_1 associé à la base \mathbf{a}_k [CJP].

1.7 Développement des branches

Toute branche a_k peut être développée comme combinaison linéaire de bords de faces f_j et de branches ayant une existence intrinsèque \bar{a}_k [MRDD], soit :

$$T_1 \ni \mathbf{a}_k = \delta_k^m \bar{\mathbf{a}}_m + \partial_k^j \mathbf{f}_j, \bar{\mathbf{a}}_k \in T_1, \mathbf{f}_j \in C_2 \quad (1.2)$$

On note T_n l'espace des ouverts de dimension n et C_n l'espace des fermés de dimension n . Tous les éléments de ces espaces sont des chaînes. L'objet ∂_k^j est un opérateur de bord, à ne pas confondre avec l'opérateur de dérivation partielle. Cet opérateur fait correspondre une ligne fermée à une surface, etc.

Cette relation est fondamentale. Tout d'abord elle montre que toute branche s'écrit comme un développement de phénomènes extérieurs à la branche : les faces, plus un phénomène sur la frontière qui peut être extérieur mais dont le domaine d'application est égal à celui de la branche. Les branches étant orientées, les bords de faces et les faces le sont aussi ainsi que les branches aux interfaces. La figure "composantes de branches" montre deux faces (1 et 2) et une frontière (3) appartenant à une même branche (4).

1. On entend ici par hypercomplexes les éléments d'une algèbre complexe étendue, soit de type Cayley-Dickson soit simplement un ensemble de termes complexes rattachés chacun à une dimension particulière.

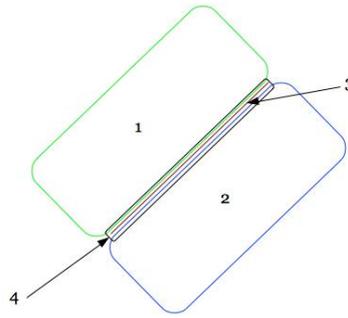


Figure “composantes de branches”.

Les dimensions des espaces des sommets, des branches et des mailles (bords de faces) sont liées par la relation d’Euler-Poincaré appliquée aux chaînes. Soit M le nombre de mailles, B le nombre de branches, N le nombre de sommets et R le nombre de réseaux connexes indépendants, on a :

$$M = B - N + R \tag{1.3}$$

C’est Léonhard Euler qui en 1752 énonça la formule mathématique reliant le nombre de côtés, sommets et faces dans un polyèdre de genre “0”, c’est à dire convexe, dépourvu d’ouvertures. Dans un mémoire inédit, Descartes a formulé la même relation littéralement. Mais dans les deux cas la formulation donnait la caractéristique C telle que : $C = F - B + N$, portant sur le nombre de faces F et non sur leurs bords. En prenant le bord des faces en topologie cellulaire, on diminue de 1 la caractéristique qui donne alors non plus le genre (nombre de trous créés par le retrait d’une face) mais le nombre de réseaux connexes.

1.7.1 Développement sur les bords de faces

En faisant abstraction pour l’instant de la frontière on peut décomposer les branches sur les bords de faces. Le bord d’une face étant de fait une somme de branches devient une chaîne[WHYT] de l’espace C_1 de ce qui constitue les cycles dans un graphe (un cycle est une suite fermée de branches). Nous ne chercherons pas pour l’instant à comprendre plus avant le sens de ces cycles de flux d’un vecteur que nous noterons k^ν avec un indice Grec (nous verrons ultérieurement l’importance de ce vecteur) comme usuellement, faisant référence aux composantes du vecteur cycle \vec{k} dans la base de C_1 : \vec{c}_ν . Les termes k^ν peuvent aussi être hypercomplexes.

Il est alors remarquable qu’en multipliant simplement ce vecteur par un scalaire on trouve une dimension de force magnétomotrice (fmm) ou autrement dit une impulsion (au sens large c’est à dire le produit d’une masse pesante ou d’une charge par une vitesse ou d’un débit par une distance). Il est dès lors naturel de définir un dual à l’espace C_1 : C_1^* qui ait pour base les covecteurs $s^{*\mu}$ et des covecteurs de composantes F_μ qui ont la dimension d’une fmm². Si les flux de mailles (cycles) ont une signification encore obscure, la fmm a un sens physique précis. On dispose donc là d’un objet concret auquel on peut se raccrocher pour continuer le développement autour des bords de faces.

La fmm ou impulsion peut être reliée en physique à un flux. Considérons par exemple l’équation de Gauss-Ostrogradski[MDP] :

$$\oint \mathbf{ds} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{q}$$

En multipliant les deux termes par une vitesse v on trouve qv en second terme, le premier étant le produit vitesse flux du champ. Or qv est le produit d’une masse généralisée par une vitesse, soit aussi un débit par une distance donc une fmm.³ Cependant comme dans la relation originelle de Gauss-Ostrogradski on met en

2. C’est François Dubois qui a remarqué ce point important déjà lors de la rédaction du livre[CESC] et l’a précisé lors des travaux commun autour de l’article[MRDD].

3. Si l’on veut généraliser cette relation il faut écrire :

$$\oint \mathbf{ds} \cdot \mathbf{f} = \alpha q$$

(f est un champ quelconque). Ainsi écrit, α est un tenseur, l’inverse de la permittivité diélectrique ou μc^2 (c étant la célérité et μ le tenseur de perméabilité) ou la gravitation quand q est une charge ou une masse. En multipliant par une vitesse on oriente implicitement ce qui au départ aurait pu être un scalaire.

relation des grandeurs de dimensions différentes : le terme de gauche fait intervenir une 2-forme quand celui de droite dans notre formalisme implique une 1-forme⁴. Soit encore que l'on veut relier un élément de C_2 avec un élément de C_1^* . Pour relier ainsi le débit de flux du champ à une fmm il faut faire appel à un opérateur de Hodge et se doter d'une métrique[BOS][BLSG]. L'opérateur de Hodge, généralisé par Flanders[BLSG], permet de faire la connexion entre une p-forme et une (p-n)-forme dont la première est duale. Pour faire apparaître de façon claire le rôle de la métrique, on peut exprimer la 2-forme qu'est le flux comme une intégrale d'une 1-forme qu'est le potentiel vecteur. Suivant Whitney on écrit :

$$\Phi^j = \oint_{\sigma} d\sigma \cdot A^j \Rightarrow \Phi^j = \sigma \cdot A^j \quad (1.4)$$

Notons que nous choisissons ici de prendre un potentiel vecteur contravariant, ce qui sort un peu de l'usuel. En même temps cela permet d'avoir une démarche similaire pour obtenir le champ magnétique covariant et retrouver les forces électromotrices ainsi que le tenseur du champ covariant également : on doit se doter d'une métrique sur laquelle nous reviendrons pour passer du flux à la fém.

Notre relation sur la fmm prend la forme :

$$F_j = R_{jk} (\sigma \cdot A^k) = R_{jk} \Phi^k \quad (1.5)$$

R est un tenseur bien connu des électrotechniciens appelé réductance. Il se décline comme le produit de l'inverse de la perméabilité multiplié par un facteur géométrique (on peut lui adjoindre le bord σ fois la longueur sur laquelle travaille le flux divisé par sa section). La réductance est de la forme :

$$R_{jk} = \frac{\alpha}{\mu} \quad (1.6)$$

en appliquant les règles de l'algèbre tensorielle. Si l'on multiplie les deux membres de la relation sur la fmm par le flux on trouve ($\Phi = S\mu H$) :

$$F_j \Phi^j = R_{jk} \Phi^k \Phi^j = l S \mu_{jk} H^j H^k = W \quad (1.7)$$

W est le travail du champ sur les particules, on retrouve l'expression classique de l'énergie magnétique stockée ou du travail très utilisée par exemple en électrodynamique quantique pour exprimer l'interaction champ particule[FEY].

Nous voyons l'intervention d'un opérateur de Hodge (la perméabilité magnétique) pour relier la 2-forme flux à la 1-forme fmm (point donné aussi dans [BLSG] avec une notation du produit vectoriel comme produit extérieur : $B = (*\nabla, A)$) et d'une métrique qui s'en déduit reliant le champ à la fmm. On se dote d'une métrique parce qu'elle n'est pas unique. On a ici une illustration de la notion de tenseur. Si l'on choisit un référentiel différent pour exprimer le champ, l'énergie invariante qui ne doit pas dépendre de la représentation, n'en sera pas pour autant affectée. transformons le champ par l'intermédiaire d'une matrice de transformation $\Lambda : A^j = \Lambda^j_{\mu} A^{\mu}$. Utilisons l'algèbre tensorielle[CESC] pour écrire le travail sous la forme : $A^j R_{jk} A^k$. Comme $A^j = A^{\mu} \Lambda^j_{\mu}$ on obtient par remplacement :

$$W = A^j R_{jk} A^k \Rightarrow W = A^{\mu} \Lambda^j_{\mu} R_{jk} \Lambda^k_{\nu} A^{\nu} \Rightarrow W = A^{\mu} R_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (1.8)$$

on a invariance du travail sous un choix de référentiel différent, ce qui montre d'une part le caractère tensoriel de la réductance et d'autre part le fait que l'on se dote d'une métrique au sens où l'on fait un choix d'une métrique particulière parmi plusieurs possibles.

1.7.2 Du flux aux forces électromotrices

On réfléchit d'abord aux liens entre les grandeurs que nous voulons manipuler. On regarde le détail de leurs espaces d'appartenances ensuite.

La loi de Faraday nous indique que la force électromotrice (fém) est la dérivée du flux. Comme l'opérateur de dérivée temporelle ne modifie pas la variance[LAND], on peut considérer le flux comme covariant dans cette configuration (nous avons vu précédemment qu'en exprimant le flux à partir du champ magnétique, on trouvait un flux covariant). Le flux est lui-même relié aux fmm par la perméance (inverse de la réductance) et la fmm

4. une n-forme est le terme sous l'intégrale de dimension n.

est de même dimension qu'un courant (flux) de maille, autrement dit un bord de surface. Il doit donc exister une relation directe entre les courants de maille et les fém.

Dans cette partie "dynamique" (ou électrocinétique) de l'électromagnétisme (en relatif de la partie électrostatique), le processus physique implique un flux magnétostatique. Ce flux se présente comme un tube de lignes de champ magnétique, appartenant de fait à l'espace des chaînes C_2 . Normalisant la perméabilité du vide, on peut relier le courant de maille k à un parcours fermé du potentiel vecteur magnétique : $k \rightarrow \oint_{\sigma} d\sigma \cdot A^j$. En multipliant cette intégrale par la perméabilité relative qui est une métrique, on trouve le flux. Ce dernier est donc d'une dimension 1 fois plus grande que le courant de maille. Inversement le courant de maille étant un bord du flux est d'une dimension 1 fois plus petite que le flux. Le courant de maille de fait appartient à C_1 et la force magnétomotrice (fmm) qui peut être vue comme la circulation du potentiel vecteur ou directement le courant de maille appartient aussi à C_1 . La réductance portant la métrique "perméabilité relative" μ , on trouve la forme : $\Phi_j = \mu_{jm} \left(\frac{S}{l}\right) F^m$ où F est la fmm, S et l les section et longueur respectivement du tube de flux. La métrique μ permet de relier la fmm qui appartient à C_1 au flux qui appartient à C_2^* . On déduit ensuite les fém des flux par l'intermédiaire d'un opérateur de Hodge de dérivation temporelle qui abaisse d'une dimension l'espace des flux (on passe donc de C_2^* à C_1^*). Le produit extérieur des composantes du potentiel vecteur sur la surface du tube de flux conduit à un dual perpendiculaire à la surface : la fém. Cette dernière apparaît comme résultant de l'application d'un opérateur de Hodge au potentiel vecteur. La combinaison de la perméance et de la dérivation temporelle engendre la métrique g qui relie directement flux de maille et fém.

L'ensemble des opérations que nous avons considérées sont synthétisées dans un diagramme de Roth[ROT] figure "fmm et flux".

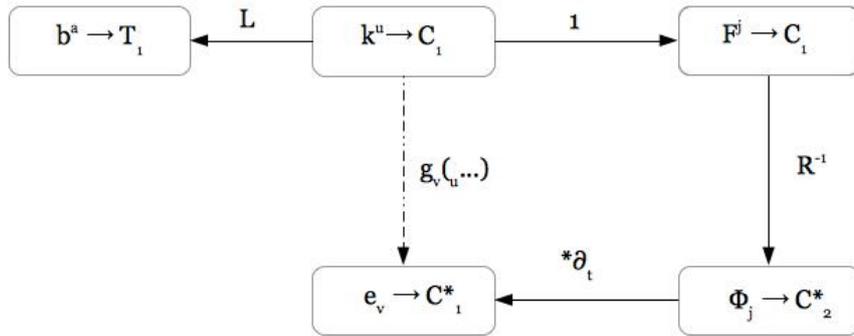


Figure "fmm et flux" : diagramme de Roth exploré à ce point du chapitre.

Dans ce diagramme interviennent comme opérateurs entre les différents objets représentés des métriques, des scalaires ou encore des changements de bases. Ces opérateurs sont appliqués aux objets situés au départ des flèches. L'objet situé à l'arrivée de la flèche est égal à l'opérateur appliqué à celui au départ. L est la matrice des combinaisons linéaires de flux de mailles sur lesquelles sont développées les branches. Il s'agit donc d'un changement de base branches vers mailles appelé connectivité par Kron. Regardant ce diagramme, on voit que le parcours des opérateurs conduisant depuis ces flux de mailles jusqu'au fém peut être condensé en un opérateur direct qui relie flux de mailles et fém : c'est l'hypothèse marquée par une flèche en pointillés. Cet opérateur est forcément une métrique puisqu'il est déduit d'un produit de métrique et d'un opérateur de Hodge lorsque l'on suit le parcours passant par la base des réductances. C'est l'opérateur g que nous nommerons métrique. Il porte toute l'interaction entre les flux de mailles, le champ et les sources d'impulsions communiquées aux mailles. On ferme ainsi la boucle pour conclure que les flux de mailles sont légitimement déduits de la topologie cellulaire et des propriétés des branches, et que ces flux sont engendrés par des fém de l'espace dual, fém elles-mêmes créées via une interaction par un champ entre les flux et ces fém. On obtient à ce niveau deux équations fondamentales pour l'ATR. La première relie les branches aux mailles :

$$i^a = L^a_{\nu} k^{\nu} \tag{1.9}$$

La seconde donne le lien entre les flux de mailles et les fém de mailles, via un champ qui intervient dans l'expression d'une métrique des phénomènes dynamiques (autrement dit faisant intervenir la perméabilité μ ou la constante de gravitation pour la relativité $4\pi Gc^{-2}$). Mais ici on considère le cas général où la réaction

des flux aux sollicitations apportées par le champ ne sont pas forcément linéaires (notons que le champ de gravitation[FEY2] ou la perméabilité sont deux phénomènes non linéaires) :

$$e_\mu = g_\mu (\nu k^\nu) \quad (1.10)$$

Il faut se rappeler par ailleurs que les composantes sont hypercomplexes dans notre formalisme.

La métrique g étant une condensation d'un processus de couplage par réductance généralisée peut correspondre à une interaction que nous appelons corde ou plus généralement foncteur : elle s'établit entre une maille source et une maille réceptrice, soit entre un courant de maille et une fém. Cette corde peut se refermer sur la même maille à savoir que l'auto-réaction du champ correspond à une corde qui revient sur la maille émettrice. Nous abordons ce sujet dans le paragraphe suivant.

1.7.3 Auto-réaction du champ sur une maille

Si l'on referme une branche sur elle-même on obtient le réseau le plus simple qui soit constitué d'un sommet, d'une branche et d'une maille. Il respecte la relation fondamentale $M=B-N+R$ avec $B=N=M=R$ (B représente ici le nombre de branches, M le nombre de mailles, N le nombre de sommets et R le nombre de réseaux). La connectivité dans ce cas est une identification entre la branche et la maille. Si l'on soumet cette maille à un flux de champ externe, on induit dans la maille une fém, fém qui appartient à la maille, mais ici identifiée à la branche. Le flux induit dans la branche-maille va réagir en engendrant un flux de champ qui s'oppose au flux inducteur : c'est l'inductance en électronique ou la masse d'inertie en mécanique. Cette propriété de réaction appartient intrinsèquement à la maille, comme la fém. Pour cette raison, nous la représentons symboliquement au centre de la maille. Ainsi en électricité, la figure "inductance de maille" montre cette représentation.

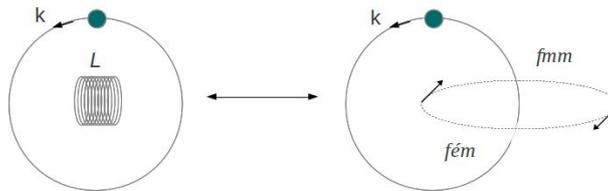


Figure "inductance de maille" : une branche refermée sur elle-même.

Une maille élémentaire peut aussi être fabriquée en court-circuitant une branche. On obtient alors un réseau constitué de deux sommets, deux branches et une maille. Ce réseau comportera aussi obligatoirement une composante de réaction propre à la maille. Cette idée a été appliquée dans le cas des antennes par Alain Reineix qui l'a éprouvée dans le calcul de l'auto-réaction incorporant dans ce cas la résistance de rayonnement[MRH].

1.7.4 Caractérisation d'un organe primitif sur une maille

Considérons une branche représentant un organe insécable au sens où nous l'avons défini. En court-circuitant cette branche, c'est à dire en la refermant sur elle-même et en la soumettant à un champ inducteur on peut mesurer le courant dans la maille correspondante et en déduire les propriétés de la branche.

Cette expérience virtuelle amène deux remarques :

1. l'expérience est intrusive : on ne peut pas éviter la réaction due à la fermeture, même si on peut la réduire à son strict minimum ;
2. les propriétés mesurées ormis celle de réaction de maille, sont intrinsèques à la branche et existe donc en l'absence de fermeture.

Cette dernière question suggère que la métrique g doit incorporer des propriétés qui sont intrinsèques à la branche, donc non incluses dans le processus de réductance.

1.7.5 Source de branche et propriété de branche

On a développé les branches sur les bords de faces et trouvé un espace dual contenant les fém. On peut donc simplement considérer la transposition du développement pour dire que les fém doivent pouvoir être écrites comme somme de sources de branches. Dans ce cas, ces sources de branches doivent être dans un espace dual

des flux de branches pour compléter le diagramme de Roth “à gauche”. La figure “diagramme de Roth avec branches” montre ce développement et fait apparaître la nécessité d’une fonction reliant ces sources aux flux de branches.

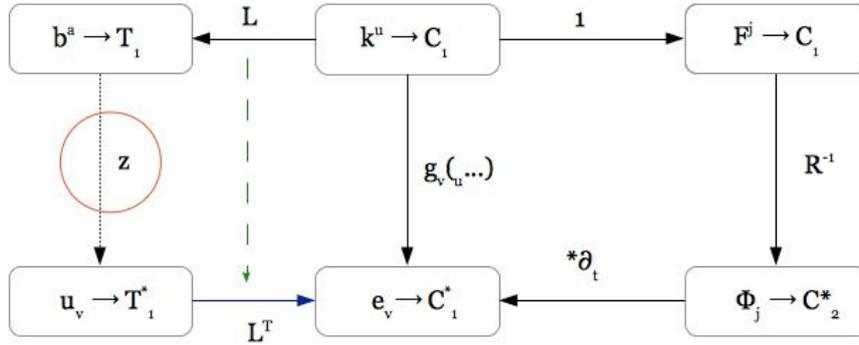


Figure “diagramme de Roth avec branches” : en entouré, la composante z indispensable.

Cette fonction doit permettre de relier une source dans le référentiel d’une branche avec son flux et donc caractérise la propriété de la branche avant fermeture. C’est un tenseur qui relie la source de maille covariante (dont on sait qu’elle doit respecter : $e_\mu = L_\mu^a u_a$) et le flux b^a . La relation doit être de la forme :

$$u_a = z_a (b^d) \quad (1.11)$$

On peut remplacer les flux de branches par leurs homologues en mailles en utilisant la connectivité L . On obtient :

$$u_a = z_a ({}_d L^d_\nu k^\nu) \quad (1.12)$$

Le vecteur de fonctions des variables b^d devient un nouveau vecteur de fonctions des variables k^ν . On peut appliquer à ce vecteur la transformation transposée qui doit faire apparaître les fém de mailles dans le terme de gauche :

$$L_\mu^a u_a = L_\mu^a z_a ({}_d L^d_\nu k^\nu) \Rightarrow e_\mu = L_\mu^a z_a ({}_d L^d_\nu k^\nu) \quad (1.13)$$

Lorsque l’on applique cette transformation à un exemple simple, on voit que la fonction se transforme. On établit la relation de transformation suivante pour les fonctions non linéaires de flux :

Définition :

Soit Λ une matrice de changement de base, $z_a (b \dots)$ un tenseur - vecteur de fonctions non linéaires appliqué à des variables dans un premier référentiel. L’application de la transformation Λ au tenseur deux fois covariant z respecte la règle d’indice suivante :

$$\Lambda_\mu^a z_a ({}_b \Lambda^b_\nu \dots) = z_\mu (\nu \dots)$$

Le tenseur $z_{\mu\nu}$ porte toute l’information de propriétés aux niveaux des branches ouvertes (sans fermeture). Cela comprend en électricité par exemple les inductances propres (partie imaginaire de l’effet de peau), etc. Il s’agit de propriétés cette fois bien attachées aux branches du graphe. Elle vont inclure les interactions de champ proche - réactif, même si celles-ci peuvent être incluses aussi sous forme de cordes suivant les cas - ce point est abordé au chapitre suivant. Par rapport à la relation de Gauss-Ostrogradski que nous avons abordé, l’espace des branches prend en charge les métriques permittivité diélectrique, conductivité, constante gravitationnelle statique, alors que l’espace des mailles va lui ajouter la perméabilité ou la constante relativiste de la gravitation. Cette différence s’appuie sur le fait fondamental que la statique incorpore l’équilibre continu. Une branche ouverte est capable de stocker une différence de potentiel statique. C’est donc le premier élément d’énergie potentielle après le sommet, capable de stocker une charge ou une masse.

Finalement l’équation tensorielle non linéaire de notre réseau dans l’espace des mailles, sans propriétés dynamiques et à ce point de notre réflexion, s’écrit :

$$e_\mu = z_\mu (\nu k^\nu) \quad (1.14)$$

1.7.6 Présence d'un potentiel de jauge

Lors de la transformation par la connectivité des fém de branches vers les fém de mailles, l'ajout d'un covecteur ψ_a qui respecterait : $L_\mu^a \psi_a = 0$ ne changerait pas le résultat. Ce covecteur se présente comme une jauge. On sait qu'un covecteur de différence de potentiels scalaires respecte cette condition. L'impulsion transmise à une branche par l'intermédiaire d'une source et le flux créé suivant ses propriétés doivent effectivement donner lieu à une différence de potentiels (ddp) aux bornes de la branche. On retrouve ainsi le schéma de la branche de Kirchhoff présenté figure "branche de Kirchhoff". L'équation tensorielle de cette branche est donnée par : $u_a = \Delta\psi_a + z_a (c^b c^c)$. Lorsque l'on intègre ces termes pour former des mailles, la somme des ddp sur des parcours fermés donne zéro et ces variables disparaissent. C'est l'un des avantages de la résolution dans l'espace des mailles. Comme dans d'autres domaines de la physique, le choix d'un certain référentiel simplifie l'expression du système d'équations de modélisations.

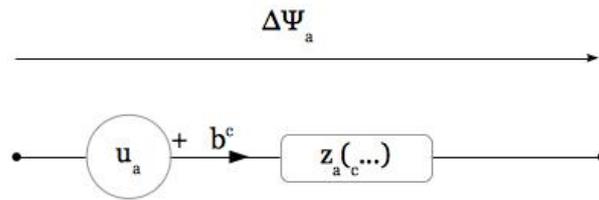


Figure "branche de Kirchhoff" : différence de potentiels à ses bornes.

Par rapport à ce que l'on peut trouver dans les ouvrages d'électroniques classiques[PEK] il manque à cette branche une source éventuelle de flux externe. Cette source apparaîtra dans notre topologie à la frontière.

1.7.7 Métrique Lagrangienne dans l'espace des mailles

Si, au tenseur des fonctions des branches transformé on ajoute les propriétés induites par le champ de l'espace C_2 on obtient la métrique complète qui englobe toutes les propriétés intrinsèques et de couplages du réseau. En notant χ le tenseur des opérations obtenues par la droite du diagramme de Roth (via les réductances), le tenseur fondamental g est finalement la somme de z et χ :

$$g_\mu(\nu \dots) = L_\mu^a z_a (b L_\nu^b \dots) + \chi_\mu(\nu \dots) \tag{1.15}$$

La figure "diagramme de Roth sur g " montre ce mécanisme et le centrage sur l'espace des mailles des informations provenant des espaces des flux dans C_2 et des branches dans T_1 .

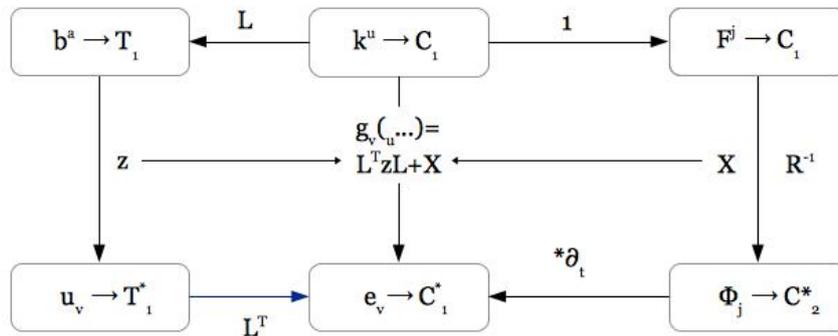


Figure "diagramme de Roth sur g " : élaboration de la métrique lagrangienne.

On peut montrer que le tenseur g ainsi obtenu et linéarisé redonne les opérateurs de Lagrange du réseau en énergies cinétique, potentielle et dissipée[GAB][CESC]. Mais dans notre formalisme avec hypercomplexes où les vecteurs portent toutes sortes de grandeurs, il va même au-delà, on peut dire qu'associé aux sources, il donne toute l'information contenue dans le réseau.

1.7.8 Développement sur les frontières, maille virtuelle & diagramme de Roth complété

On peut se demander comment insérer les charges (ou masses) dans la description en topologie cellulaire de nos réseaux? Comment traduire un apport de charge? La fém engendrée par la réductance fait intervenir la dérivation temporelle du flux. Un flux statique devient, comme le potentiel précédemment, une jauge. Cette jauge, qui a la dimension d'un courant de bord de faces, peut être ajoutée a priori. Cela revient à créer une maille supplémentaire : dans cette maille on peut imposer le flux qui n'apparaît plus comme une inconnue mais une donnée d'entrée, et la différence de potentiels (ddp) à l'origine de cette source de flux devient du coup l'inconnue. La figure "maille virtuelle" montre l'ajout d'un courant de maille virtuelle (bleue) à un courant de maille réelle (rouge), la branche en bleu dépendant de ces deux courants.

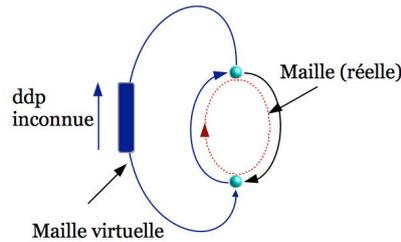


Figure "maille virtuelle".

Le courant et la ddp associés à cette injection sont la composante de frontière sur la décomposition de la branche (équation 1.2). Plutôt que de considérer une branche de frontière, on propose de créer une **maille virtuelle** d'impédance intrinsèque nulle et de source de branche qui est sa ddp. Elle mérite sa dénomination de virtuelle car elle n'appartient pas fondamentalement à C_1 mais à T_1 .

Elles apparaissent entre autre dans des relations de la forme : $e_\mu = \chi_{\mu\nu}k^\nu + \sigma_{\mu\nu}J^\nu$ en notant J^ν les mailles virtuelles.

Kron avait préféré parler de "paires de nœuds"[KRON][PK]. Mais Angot[ANGOT] dans sa présentation de la méthode de Kron avait exclu cette composante pour introduire une technique utilisant des courants de mailles prédéfinis pour créer des sources de courants. Nous généralisons donc ici cette approche en modélisant les sources de matière en général comme des mailles virtuelles. Ces ajouts de matière doivent provenir de potentiels stockés : les ddp engendrent les flux imposés, mais leur valeur va dépendre du reste du circuit. Et la condition de frontière peut bien apparaître comme une jauge car on peut développer les branches sur les seules intersections de mailles "réelles". Cette propriété est une des techniques à la base de la diakoptique que nous abordons plus loin.

Kron avait discerné une connectivité entre branches et paires de nœuds différente de celle entre branche et maille. Il dénommait ces deux espaces orthogonaux car avec des connectivités bien choisies, le produit des deux (la première issue des paires de nœuds transposée fois la seconde vers les mailles) donne zéro. Quant à nous, cette dénomination ne nous semble pas justifiée ni sans doute correcte car l'ensemble s'inscrit plutôt dans le cadre du développement des branches sur les deux espaces. Par ailleurs les liens entre branches et paires de nœuds ne sont pas univoques et l'on peut trouver des connectivités qui ne donnent pas de nullité. On aborde dans le paragraphe suivant la détermination de la connectivité avec les mailles virtuelles. On appelle **espace complet** l'espace des mailles complété des mailles virtuelles. On peut déjà poser ici la nouvelle allure que prend l'équation tensorielle du système, enrichie de ces mailles virtuelles. Cet enrichissement se traduit par des liens supplémentaires dans le diagramme de Roth, présenté figure "diagramme de Roth complet" où J est le symbole retenu pour les flux de mailles virtuelles.

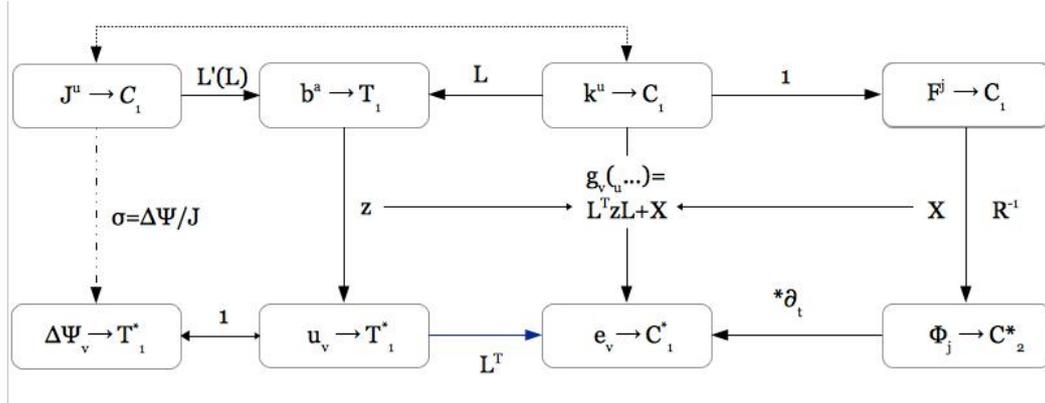


Figure “diagramme de Roth complet” : insertion des mailles virtuelles.

Comme les mailles virtuelles engendrent une ddp qui s’applique entre deux sommets et appartient à T_1 , d’une part la dénomination de “paire de nœuds” s’entend bien de fait, d’autre part la connectivité branches vers mailles virtuelles est une sous-partie de la connectivité globale L .

Les expressions des flux et efforts dans les différentes physiques se déduisent de l’équation généralisée de Lagrange, où T est l’énergie cinétique, U l’énergie potentielle, F l’énergie de pertes et Q les sources externes pour des variables q (nous reviendrons plus loin en détail sur cette équation) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial U}{\partial q^i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} = Q_i \quad (1.16)$$

Connaissant l’expression dans une physique d’une énergie, par exemple l’énergie magnétique $1/2Li^2$ et sachant l’assimiler à l’une des formes de l’équation de Lagrange, on en déduit la fonction qui relie flux et effort. Le flux est identifié par la différentielle et l’effort par exemple dans ce cas est donné par $-Ldi/dt$. Les fonctions des branches étant extraites de ces dérivations, on peut projeter sur un graphe toute physique dont on sait exprimer les termes d’énergies. On donne dans le tableau ci-dessous quelques équivalences parmi toutes celles possibles.

Physique	Flux	Effort
électricité	courant	différence de potentiels - force électromotrice
hydroaérodynamique	fonction de courant	champ de force extérieur
thermique	puissance	variation de température
mécanique	impulsion	force mécanique

Les dérivées des énergies engendrent des potentiels (au sens large, le courant par exemple est vu comme un potentiel). L’équation de Lagrange engendre l’équation de la branche de Kirchhoff que l’on détaille ensuite : $e_i = V_i + z_{ij} (i^j + J^j)$.

1.7.8.1 Equation de l’espace complet

Si l’on place autant de mailles virtuelles que possible, nous aurons $N-R$ mailles virtuelles (autant que de paires de nœuds). Comme le nombre de mailles est $B-N+R$, on trouve que le nombre total de mailles réelles et virtuelles est $B-N+R+N-R$, donc égal au nombre de branches. La connectivité dans l’espace complet est donc une matrice carrée. Ce résultat s’obtient aussi en passant par la théorie des graphes. Les mailles virtuelles sont attachées aux branches de l’**arbre couvrant**. On peut organiser la connectivité de façon à placer d’abord les mailles réelles en colonne, puis les mailles virtuelles. Après transformation, les ddp des mailles virtuelles ne s’annulent pas et de l’organisation proposée de la connectivité on obtient un nouveau système d’équations. Prenons un exemple simple avec deux mailles, une réelle et une virtuelle. On a deux sources, et les deux mailles ont comme point commun la branche de l’arbre couvrant. La branche qui ferme cette branche d’arbre couvrant est appelée **branche de fermeture**. Supposons par ailleurs que cette branche de fermeture porte une source e et la maille virtuelle a sa ddp v . On peut écrire dans l’espace des mailles[ANGOT] :

$$\begin{bmatrix} e \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ J \end{bmatrix}$$

On résout d'abord la première équation : $u = g_{11}k + g_{12}J$ d'où l'on déduit k , puis la seconde qui donne v : $v = g_{21}k + g_{22}J$. On généralise la démarche en écrivant :

$$\begin{cases} g_{\mu}(\nu k^{\nu}, J^{\nu}) = e_{\mu} \\ f_{\mu}(\nu k^{\nu}, J^{\nu}) + \Delta\psi_{\mu} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

On résout tout d'abord la première équation qui fournit les flux k , puis la seconde qui donne les ddp $\Delta\psi_{\mu}$.

1.7.8.2 Détermination de la connectivité branches mailles dans l'espace complet

On profite ici de la théorie des graphes[TDG]. En déterminant un arbre couvrant par réseau, on associe implicitement chaque branche de l'arbre couvrant avec les mailles virtuelles (MV). Pour construire ensuite les mailles réelles (MR) on opère des fermetures des branches de l'arbre couvrant. L'arbre couvrant n'est pas unique pour un réseau donné. Cela est cohérent avec le fait que la base des mailles n'est pas unique non plus. Chaque choix d'arbre couvrant (AC) va engendrer une métrique différente. Cependant on peut essayer de s'appuyer sur quelques principes de physique pour construire l'AC.

D'abord un réseau peut comporter une source propre d'énergie. Dans ce cas il est logique de chercher une circulation de flux qui s'appuie sur cette source. L'AC est le chemin de branches qui permet d'atteindre tous les sommets du réseau et en passant une seule fois par sommet. Ce peut-être un arbre fourchu. Nous choisissons de déterminer systématiquement un arbre continu. C'est à dire que pour parcourir cet AC, il n'est pas nécessaire de revenir en arrière : on s'interdit de repasser par une branche sur laquelle on est déjà passé. Le chemin ainsi déterminé est dit hamiltonien. Il correspond à une moindre action en ce sens que tout chemin nécessitant un retour du voyageur sur une partie de son parcours demande forcément plus de travail, du fait même des allers-retours ajoutés. La figure "exemple AC-1" montre un réseau simple pour lequel nous allons appliquer notre algorithme.

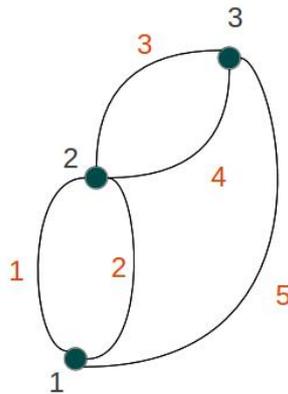


Figure "exemple AC-1" : graphe de réseau considéré en exemple.

Imaginons la source d'énergie présente sur la branche 1. Les flux partant du sommet 2 doivent revenir de fait au sommet 1 pour maintenir la conservation de la masse - ou de la charge. Pour parcourir le réseau, deux branches suffisent puisque le réseau a trois sommets. Le nombre de branches nécessaire pour parcourir N sommets étant de N-1. Un AC hamiltonien doit parcourir ici deux branches strictement. On pourrait par exemple choisir l'AC constitué des branches 1 et 5. Partant du sommet 1 on chemine le long de la branche 1 pour atteindre le sommet 2 puis pour revenir en arrière au sommet 1 et repartir via la branche 5 jusqu'au sommet 3. On a donc parcouru la distance $1+1+5=3$ branches parcourues. Si l'on choisit l'AC des branches 1 et 3, on va du sommet 1 au sommet 2 via la branche 1, puis du sommet 2 au sommet 3 via la branche 3. La distance parcourue est alors $1+3=2$ branches parcourues, donc inférieure au cas précédent. Evidemment dans l'appréciation de ces distances, les branches ne sont pas pondérées de distances particulières (graphe pondéré), et valent toutes 1 comme distance arbitraire associée à toute branche. La description de l'AC est donc la suivante : $1 : 1 \rightarrow 2 + 3 : 2 \rightarrow 3$. Les branches connectées aux MV sont les branches 1 et 3. Réalisons maintenant les

opérations de fermetures. Partant du sommet 1, on parcourt l'AC pour atteindre le premier sommet du réseau traité. De ce sommet on explore si des branches permettent de revenir au sommet d'origine : le sommet 1 ? Effectivement la branche 2 fait ce retour. On associe les branches 1 et 2 à une première MR. On commence à construire la connectivité L : les colonnes de cette matrice sont les mailles, les lignes sont les branches.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Un point remarquable est que la connexion entre MR et branches par cet algorithme est toujours positive. Nous sommes d'ailleurs parti d'une incidence (matrice donnant les relations entre sommets et branches) non signée. Les branches du graphe ne sont pas dirigées au départ. Considérant en général que la source fournit un flux sortant, on définit ici par la même occasion implicitement les directions des branches 1 et 2 et de la maille 1.

Regardant si d'autres retours sont possibles, on voit que l'on a exploré toutes les possibilités. On passe au sommet suivant sur l'AC : le sommet 3 qui devient le nouveau sommet source via la branche 3. On explore de nouveau les retours possibles vers le sommet 1 qui est toujours le sommet d'origine. On trouve la branche 5. On associe alors les branches 1, 3 et 5 à la MR 2, dirigeant aussi par la même occasion les branches 3 et 5 :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

N'ayant pas encore exploré la branche 4 mais devant l'inclure dans la matrice L, on lui associe pour l'instant des connexions nulles.

A ce niveau, on a exploré tous les retours possibles vers le sommet 1 depuis tous les autres sommets de l'AC. On prend donc une nouvelle origine qui est le sommet suivant sur l'AC : le sommet 2. Notons que l'on sait que l'on doit trouver $5-3+1(B-N+R) = 3$ MR. Il nous en reste donc une à trouver. Partant du sommet 2 on parcourt la branche 3 pour atteindre le sommet 3. On explore les retours possibles vers le sommet 2 pour trouver la branche 4. On crée donc une maille comprenant les branches 3 et 4. On peut terminer la connectivité en ajoutant les MV liées aux branches 1 et 3 de l'AC. La figure "exemple AC-2" montre la structure obtenue.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Un indicateur pour vérifier si l'on a commis une erreur dans la construction de la connectivité est que les branches de fermetures, ici les branches 2, 4 et 5 ne doivent pas être connectées aux MV, au contraire des branches de l'AC qui doivent y être connectées. Comme notre algorithme détermine des connexions strictement positives pour les MR, cela facilite encore la construction et la vérification de L. Par contre pour les MV le signe de la connexion dépend du choix d'orientation des sources.

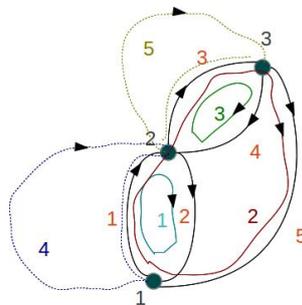


Figure "exemple AC-2" : MV en pointillés.

Ces opérations réalisées, l'incidence sommets - branches est déterminée.

La détermination de l'AC n'est pas triviale. Pour un organe donné, on peut choisir une orientation principale traduite par un choix d'orientation des branches. On associe à une dimension la plus grande, intrinsèque à l'organe, une orientation. Dès lors, les sommets qui décrivent géométriquement l'organe et auxquels on va se raccrocher pour définir les branches peuvent être numérotés dans un ordre croissant, dans le sens de la direction principale. Cette démarche pratiquement définit le parcours hamiltonien. L'AC peut alors suivre la succession "naturelle" des sommets choisis pour décrire l'organe. Il y a par ailleurs un point majeur que l'on peut aborder ici. Un système est constitué d'un ensemble d'organes. Les organes doivent donc être des macromodèles relativement simples, autrement dit des graphes d'ordres peu élevés (l'ordre du graphe est le nombre de sommets). Ce principe a une conséquence très importante pour notre méthode qui est que l'AC reste en général modeste dans sa longueur, puisqu'elle est égale à l'ordre du graphe moins un. Une fois définie la liste des sommets et leur ordre, la suite de l'algorithme ne pose pas de difficulté particulière et sa programmation a été réalisée dans le cadre d'un outil logiciel implémentant la méthode de Kron.

Dans la connectivité L établie, les MR sont les premières colonnes et les MV les suivantes, tel que nous l'avons convenu.

Une autre question se pose. Si on a plusieurs sources, comment déterminer le départ de l'AC ? Une première possibilité est que l'AC puisse parcourir toutes les branches comportant des sources. Cela revient à imposer que les branches sources soient des branches de l'arbre couvrant. Cette première possibilité suffit en général à couvrir la très grande majorité des cas. Si elle venait à ne pas suffire, on peut ensuite envisager de découper le réseau en plusieurs sous-réseaux couplés pour revenir à la situation précédente. Ce cas n'a jamais été rencontré.

1.7.9 Caractérisation intrinsèque et comportement dans le système couplé

Ayant vu les principes de base de l'ATR, on a pu entrevoir la construction d'un modèle pour un organe et sa représentation dans un espace des mailles qui est le centre de la méthode de Kron. L'introduction des mailles virtuelles a simplifié cette construction en n'introduisant pas d'espace supplémentaire et en systématisant la formulation des équations. Cependant cette caractérisation de l'organe "primitif" (pour reprendre un terme utilisé par Kron[KRON]) est intrusive. On l'a vu, on ne connaît pas de moyen de caractériser la fonction organe sans quelques branchements externes. On considère deux situations : celle où l'organe à caractériser est inconnu et ne dispose pas de source propre, en tout cas pas de sources qui mettent en évidence son réseau équivalent ; et celle où l'organe a sa propre source d'énergie.

1.7.9.1 Organe avec source propre

Des travaux ont été menés par le polytechnico de Turin entre autre[PDT] sur la caractérisation de circuits non linéaires. On peut fermer la branche rattachée à l'organe par une source de flux imposée (on fabrique une MV) de façon à simuler une charge variable. En faisant évoluer les amplitudes des composantes de ce flux on peut en mesurant la ddp aux bornes de la branche de l'organe, en déduire les propriétés de l'organe. Il reste que le branchement, même "virtuel" au sens des mailles a une réalité bien concrète et ajoute une inductance comme nous l'avons déjà évoqué, sauf à ce que le dispositif de mesure soit parfaitement similaire à un dispositif fonctionnel auquel il se substitue. L'adjonction d'une charge revient à l'injection d'un courant négatif. Prenons un exemple de caractérisation. Dans un premier temps il nous faut fixer le format hypercomplexe que l'on veut pour les variables.

1.7.9.2 Format hypercomplexe retenu

L'intérêt d'envisager un format hypercomplexe pour les flux est que l'on peut avoir à calculer ces flux pour différentes polarisations, directions spatiales, etc. Dans la majorité des cas, de simples variables paramétrées suffisent. Un format assez général suit le couple (a,b) où a peut être un temps, un opérateur de Laplace, une phase, un réel, etc., et b l'espace, une fonction, un module, un imaginaire, etc. Voire a et b sont deux composantes d'un vecteur implicite. Dans le premier cas, les seconds termes peuvent être fonctions eux-mêmes de paramètres comme la température, etc. Notons que l'usage inverse existe également, en positionnant en premier l'observable et en second le temps (ces choix sont au départ indissociables du choix d'une signature dans la métrique de l'espace-temps[LAND]). Il est intéressant de comprendre le fondement de ces représentations. Elles découlent de l'idée que l'énergie se répartie suivant différents modes et cela sur toutes les observables du système. Si on considère un complexe de la forme élémentaire $a + ib$, il peut être représenté par une topologie élémentaire où

deux mailles portent une énergie réelle (active) a et sont couplées par une énergie d'échange (réactive) ib . La métrique d'une telle structure dans l'espace des mailles est :

$$g = \begin{bmatrix} a & ib \\ ib & a \end{bmatrix}$$

Si l'on prend deux structures similaires et qu'on multiplie leurs métriques, on retrouve la matrice du produit des complexes. Pour les quaternions, la structure correspond à deux mailles complexes conjuguées l'une de l'autre et couplées de façon antisymétrique par deux fonctions complexes également. Mais d'autres représentations sont aussi possibles.

1.7.9.3 Exemple de caractérisation avec source propre

Imaginons un organe ayant pour fonction du flux $f : L_0 p f + R f (1 + \alpha T) e^{-\tau p}$, p est l'opérateur de Laplace dans une représentation (a, jb) , τ un retard et α , T , R des paramètres, f étant le flux.

L'opérateur de Laplace a pour représentation la matrice : $\begin{bmatrix} 0 & i\omega \\ i\omega & 0 \end{bmatrix}$, et le retard la matrice $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -i\sin(\theta) \\ -i\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ avec $\theta = \tau\omega$.

Tous remplacements faits, l'équation de notre caractérisation devient, en associant au flux f le complexe $a + ib$:

$$L_0 \begin{bmatrix} -\omega b & i\omega a \\ i\omega a & -\omega b \end{bmatrix} + R(1 + \alpha T) \begin{bmatrix} a\cos(\theta) + b\sin(\theta) & -iasin(\theta) + ibcos(\theta) \\ ibcos(\theta) - iasin(\theta) & b\sin(\theta) + acos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\psi_R & i\Delta\psi_i \\ i\Delta\psi_i & \Delta\psi_R \end{bmatrix}$$

Mais lors de la mesure, nous savons que l'inductance vue n'est pas celle intrinsèque de l'organe, mais celle de l'organe complétée d'une inductance liée au montage de mesure. Lorsque l'on va tenter de caractériser l'organe, on va explorer différentes combinaisons des variables flux (module et phase), température, fréquence. On va extraire de ces injections les valeurs complexes de la ddp aux bornes de l'organe et de là, essayer d'en déduire sa fonction. Une façon de procéder peut être de chercher des linéarités par morceaux par produits des sous-domaines attachés à chaque variable scrutée.

Pour corriger l'erreur sur l'inductance de la fonction, il faut procéder idéalement dans des régions où asymptotiquement la fonction se réduit à cette seule inductance (ici à de faibles températures et en hautes fréquences) pour estimer la valeur de cette composante et la corriger de celle apportée par le montage de mesure, ceci dans l'hypothèse où les conditions de mesure impactent peu le fonctionnement de l'organe et que celui-ci répond linéairement à cette perturbation. Cette condition s'exprime mathématiquement en disant que, soit g' la métrique perturbée en mesure et g celle intrinsèque pour une perturbation ϵ , on veut, pour rester non intrusif :

$$g'_\mu(\nu k^\nu, J) \approx g_\mu(\nu k^\nu) + \epsilon_{\mu(\beta)} J^{(\beta)}$$

On modélise l'injection de la mesure par la maille virtuelle et son flux J . Ou dans le cas où l'on injecte pas d'énergie et si l'on note u la tension mesurée et $k^{(m)}$ le flux mesuré :

$$g'_\mu(\nu, (m)k^\nu, k^{(m)}) \approx g_\mu(\nu k^\nu) + \epsilon_{\mu(m)} k^{(m)} \Leftarrow u_m = \epsilon_{\mu(m)} k^{(m)}$$

1.7.9.4 Méthode de substitution

Lorsque l'organe que l'on veut étudier est fortement non linéaire, il devient illusoire d'à la fois pouvoir le caractériser et à la fois respecter la condition de non intrusion précédente. Une méthode possible consiste à se placer dans les conditions exactes de l'utilisation de l'organe mais où les éléments couplés permettent de réaliser les mesures. On se substitue au fonctionnel de façon à reproduire les conditions de charge de l'organe dans sa vie normale. Ce type de caractérisation peut demander de gros moyens mais permet de ne pas avoir à formuler l'hypothèse de non intrusion précédente, sauf pour les capteurs qui seront ajoutés au dispositif. La méthode de substitution est très utilisée en compatibilité électromagnétique, mais souvent avec un peu de liberté sur l'étendue des domaines où elle reste valide. Une façon de caractériser sans être intrusif est de prévoir l'introduction des capteurs de mesures dans le fonctionnel, et de les y laisser pendant la vie fonctionnelle de l'organe caractérisé.

Si on caractérise l'organe dans des domaines où il n'est pas sensé travailler, la substitution consiste à reproduire les conditions d'environnements qui conduisent à ces stress anormaux.

1.7.9.5 Cas des organes sans sources propres

Le principe est le même que dans le cas avec sources, mais la maille ne peut plus être virtuelle : ce sera une maille réelle. En effet, le composant n'ayant pas de source d'énergie en propre, il faut lui apporter cette source par le biais de la mesure pour pouvoir le caractériser. On analyse de la même façon le rajout d'inductance (de champ de réaction en général) ou le couplage, et on fait varier la fém externe rapportée pour stimuler l'organe.

1.7.9.6 Conclusion sur la caractérisation

La caractérisation est une opération difficile, d'autant plus difficile que l'on a pas d'information sur l'organe à caractériser. Des tas de techniques existent mais souvent, et c'est logique, accompagnées d'hypothèses restrictives sur les domaines et conditions de caractérisations. Les méthodes de Thévenin et Norton en sont des exemples, avec des hypothèses de linéarité des comportements. Pour des systèmes non linéaires, et pour des ensemble d'observables grands, le plus simple consiste à explorer des points dans l'espace des combinaisons de valeurs puis d'interpoler les fonctions discrètes obtenues pour en déduire la fonction de l'organe. Si on a quelques indications sur sa physique, on a tout intérêt à présumer des fonctions qui le caractérisent puis par des méthodes de type moindres carrés, de déterminer les paramètres de ces fonctions.

Pour les organes "boîtes noires" toujours non linéaires, on se reportera aux techniques d'interpolations suivant l'allure de la distribution des points de réponse pour les stimuli. On travaille d'abord en statique pour ensuite tester l'organe à des stimuli dynamiques. Les dérivés du régime statique donnent déjà les comportements en intégration et l'analyse des variations de réponse au premier et second ordre en dynamique, ceux en dérivation. D'autres fonctions non linéaires en statique doivent souvent être pondérées de comportements en relaxation ou d'inertie en dynamique. Enfin, dans un système dynamique, le comportement du système dépend des stimuli et du passé de ces stimuli et des réponses du système. Dans le domaine du calcul symbolique, cela revient à considérer un produit de convolution où la fonction de réponse évolue suivant les contraintes passées. Ainsi, soit g la métrique, J un stimuli en MV : au début de l'application du stimuli on mesure $\Delta\psi_\mu^{(0)} = g_\mu^{(0)}(\nu k^{(0)\nu}, J^{(0)})$. A l'instant suivant, la fonction a évolué suivant les valeurs prises par les flux lors de l'instant précédent : $\Delta\psi_\mu^{(1)} = g_\mu^{(1)}(\nu k^{(1)\nu}, k^{(0)\nu}, J^{(1)})$, etc.

Dès lors que l'on est arrivé à définir une fonction rattachée à un organe, l'usage de cet organe dans un système est prédictible ; l'apport des couplages avec les autres variables du système étant anticipé dans cette caractérisation. Cela conduit à la définition suivante :

Définition :

On considère comme **caractérisation intrinsèque**, une fonction (métrique) de flux paramétrés dont la formulation est invariante sous l'effet de couplages.

Dès lors dans un système, une métrique s'écrit⁵ :

$$g_\mu(\nu \dots) = \bigcup_{\alpha} g_\mu^{\{\alpha\}}(\nu \dots) \quad (1.21)$$

Où chaque $g_\mu^{\{\alpha\}}$ est attaché à un organe. Chacune de ces fonctions prises séparément dépend d'un flux que l'on pourrait appeler maître et de flux couplés, qui sont dans le système tous les autres flux rattachés au système.

Considérons par exemple un transformateur. C'est à la fois un système simple - sa topologie est limitée à deux mailles, et un système compliqué, parce que la perméabilité est non linéaire et que le couplage dépend des deux flux des deux mailles et de l'environnement. On peut résumer ce système à une équation du type :

$$\begin{cases} e_1 = g_1(k^1, k^2) \\ 0 = g_2(k^1, k^2) \end{cases}$$

Dans cette métrique, si le transformateur, en dehors des éléments magnétiques n'est pourvu que de résistances, on peut faire apparaître ces éléments séparément pour écrire (R pointant la partie résistance et μ la partie magnétique) :

$$\begin{cases} e_1 = g_1^{\{R\}}(k^1) + g_1^{\{\mu\}}(k^2, k^1) \\ 0 = g_2^{\{\mu\}}(k^1, k^2) + g_2^{\{R\}}(k^2) \end{cases}$$

5. Nous convenons d'utiliser des accolades pour pointer une composante d'une métrique non linéaire et des parenthèses pour pointer une valeur de temps, fréquence, etc. sur cette métrique.

Comme il est toujours possible d'éliminer une variable dans une fonction en la multipliant par zéro, notre système s'écrit $e_\mu = g_\mu(\nu k^\nu)$ avec :

$$g_\mu(\nu \dots) = \begin{bmatrix} g_1^{\{R\}} & g_1^{\{\mu\}} \\ g_2^{\{\mu\}} & g_2^{\{R\}} \end{bmatrix}$$

et :

$$k^\nu = \begin{bmatrix} k^1, k^2 \\ k^2, k^1 \end{bmatrix}$$

1.7.9.6.1 Passage en linéaire, premier contact avec l'émergence Le passage de la fonction non linéaire à la fonction linéaire n'est pas une simple réduction d'expression. Au départ cela signifie d'abord que le flux s'exprime comme un vecteur contravariant ordinaire et non plus comme un vecteur d'hypercomplexes. Cette réduction s'opère ensuite sur la métrique qui, chacune des fonctions ne s'exprimant plus qu'en dépendance d'une composante unique de flux, peut être réorganisée. Dans le cas précédent, chaque dépendance aux flux k^1 ou k^2 étant séparée on peut mettre en facteur k^1 de ses opérateurs (quels qu'ils soient) et les composantes de la nouvelle métrique s'expriment non pas en fonction de variables sous-jacentes comme la perméabilité, mais en fonction de regroupement des opérateurs agissant sur un flux. Le couplage ne fait plus intervenir que le champ externe et l'espace des mailles devient une combinaison linéaire de propriétés de branches. Au contraire dans le cas non linéaire, le système impose une organisation différente. Il apporte sa propre dimension et ne résulte plus d'une simple mise en commun de branches. Nous revenons sur ce point au chapitre suivant, nous y aborderons aussi, pour conclure plus largement sur la caractérisation des organes primitifs, une méthodologie pour couvrir les comportements possibles en non linéaire.

1.8 Conclusion du chapitre 1

Nous avons abordé les grands principes de l'ATR dans le chapitre 1. Nous avons tenté de rester aussi général que possible, l'ATR ne s'adressant pas qu'à des problèmes d'électricité, mais visant à fournir une théorie sous-jacente à une représentation par graphes de réseaux, théorie permettant d'établir les équations de n'importe lequel de ces réseaux. C'est sans doute s'apercevant de cette capacité que Kron a tenté d'utiliser son ATR partout. On le lui a reproché et pourtant, on a vu que ces approches permettent de fournir des éléments de compréhension profonds dans bien des domaines différents y compris retrouver les matrices de complexes. Par ailleurs aujourd'hui, de nombreuses théories comme le modèle standard, les approches topologiques pour l'astrophysique dont la théorie des cordes et ses consœurs tentent des approches similaires où des raisonnements, des principes permettent de dégager des modèles dans des domaines très larges. Et si la méthode de Kron a finalement permis d'établir des équations dans des domaines très variés, c'est sans doute parce que l'ATR est basée sur des grands principes mathématiques qui vont au-delà de la méthode de Kron à proprement parler[ROTM]. Nous allons d'ailleurs en étudier un aspect particulier dans le cadre de la modélisation des phénomènes rayonnés dans le chapitre suivant. Ces réflexions constituent une extension nécessaire de la méthode de Kron originelle pour les besoins de la compatibilité électromagnétique (CEM).

1.9 Références du premier chapitre

- [MOJ] M.O.Jackson, "Social and economic networks". Edition Princeton, 2008.
- [BLSG] N.V.Balasubramanian, J.W.Lynn, D.P.Sen Gupta, "Differential Forms on Electromagnetic Networks". Edition Daniel Davey and Co, 1970.
- [ANGOT] A.Angot, "Compléments de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications". Edition Masson, 1982.
- [CESC] O.Maurice, "La Compatibilité Electromagnétique des Systèmes Complexes". Edition Hermès-Lavoisier, 2007.
- [MRDD] O.Maurice, A.Reineix, F.Dubois, P.Durand, "On Mathematical Definition of Chords between Networks". Congrès Euroem2012, Toulouse, 2012.
- [PK] D.Papin, A.Kauffman, "Cours de Calcul Tensoriel Appliqué". Edition Albin Michel, 1966.
- [RP] R.Penrose, "A la découverte des lois de l'univers ou qqc comme ça". Edition Odile Jacob, 2006 ?
- [HH] H.Happ, "Diakoptics".Edition Academic Press, London, 1971.

- [SLBD] S.Leman, “Contribution à la résolution de problèmes de compatibilité électromagnétique par le formalisme des circuits électriques de Kron”. Thèse menée au laboratoire TELICE, 2009.
- [AE] A.Einstein, “Quatre conférences sur la théorie de la relativité”. Edition DUNOD, 2005
- [BDLM] B.Demidovitch, L.Maron, “Eléments de calcul numérique”. Edition MIR, 1979.
- [WHIT] H.Whitney, “Geometric integration theory”, page 5. Edition Dover, 1957.
- [CJP] C.Jeanperrin, “Introduction progressive au calcul tensoriel”. Edition Ellipse, 1987
- [MDP] B.Yavorski, A.Detlaf, “Mémoire de physique” page 364. Edition MIR, 1975.
- [BOS] A.Bossavit, “Electromagnétisme en vue de la modélisation”. Edition Springer, 1993.
- [FEY] R.P.Feynman, “Quantum electrodynamics”. Edition Addison-Wesley, 1961.
- [ROT] J.P.Roth, An application of algebraic topology to numerical analysis : on the existence of a solution to the network problem”. Journal MATHEMATICS, Vol.41, 1955.
- [FEY2] R.P.Feynman, “Leçons sur la gravitation”. Edition Odile Jacob, 2001.
- [MRH] O.Maurice, A.Reineix, “Synthesis of guided wave modelling under the tensorial analysis of networks formalism”. Congrès Euroem2012, Toulouse, 2012.
- [PEK] B.Peikari, “Fundamentals of network analysis and synthesis”. Edition Jaico Publishing House, 2008.
- [KRON] G.Kron, “Tensorial Analysis of Networks”. Edition General Electric, 1939.
- [TDG] C.Rous, “Initiation à la théorie des graphes”. Edition Ellipses, 2009.
- [PDT] I.S. Stievano, E. Vialardi, F.G. Canavero, "RF Immunity of Digital Integrated Circuits : Measurements, Modeling and Validation" , EMC Europe Workshop 2007, Paris, France, June 14-15, 2007
- [LAND] L.Landau, E.Lifchitz, “théorie des champs”. Edition MIR, 4° édition 1989.
- [ROTM} A.Rottmann, “Gabriel Kron et la formulation d’une technique de résolution des systèmes complexes sur la base de la théorie globale du circuit électrique (l’électrodiakoptique)”. Bulletin scientifique (AIM). Montefiore, 1988 - 101, n°3-4.
- [GAB] R.Gabillard, “Vibrations et phénomènes de propagation”. Edition Dunod Université, 1969.

Chapitre 2

Champs actif versus réactif

2.1 Introduction au chapitre 2

Le passage du non linéaire au linéaire a été l'occasion de commencer à introduire les transformations subtiles que cette considération amenait. Fondamentalement, un couplage agira profondément sur les organes couplés s'il est non linéaire. Il imposera de lui-même une réorganisation de l'espace qui traduit la modification profonde des organes concernés par le couplage. Par exemple un fusible qui brûle voit sa topologie changer fondamentalement. Inversement, un couplage même fort mais linéaire respecte les frontières et topologies originellement établies sur les organes. On peut alors s'interroger sur une transmission qui ne modifierait pas son émetteur : car les couplages considérés auparavant s'ils apparaissent comme des cordes au départ, peuvent être légitimement transformés en branches. En tout cas nous allons montrer que linéarité au sens où nous l'avons défini (comme une structure séparée de la métrique) rime avec causalité et ensuite, par voie de conséquence, avec des notions de rayonnement en champ lointain. Par dualité avec les mailles reliées aux paires de nœuds, on peut définir des cordes virtuelles, celles qui peuvent être remplacées par des branches et les cordes réelles, celles qui porteront les interactions causales. Ces dernières sont associées au champ de rayonnement, lequel peut être relié via des moments aux éléments de branches. L'espace des réluctances peut alors être complété par un espace des moments dans lequel s'échangent des énergies portées par du champ libre. Ces moments nécessitent une connexion avec un espace géométrique local pour définir leurs positions. Cela conduit à définir une connexion entre les sommets et cet espace.

Se pose alors la question de la caractérisation d'un élément rayonnant pour ses propriétés de rayonnement.

2.2 Champ réactif

Considérons un exemple en électromagnétisme. Soit deux petites boucles en interactions. Chaque boucle peut être caractérisée isolément. On prend deux branches résistives d'impédance $R/2$. On réunit ensuite ces deux branches par l'intermédiaire d'une connectivité $[1; 1]$. On trouve une impédance de maille égale à R à laquelle on adjoint une propriété d'inductance de maille L . Disposant de deux mailles similaire on peut les coupler par un champ magnétique via un processus linéaire de mutuelle inductance M . La métrique du problème couplé est égale à (p est l'opérateur de Laplace) :

$$g = \begin{bmatrix} R + Lp & -Mp \\ -Mp & R + Lp \end{bmatrix}$$

Une corde est associée au couplage par mutuelle inductance, et nous allons voir que cette corde est virtuelle. Considérons le réseau présenté figure "transformateur".

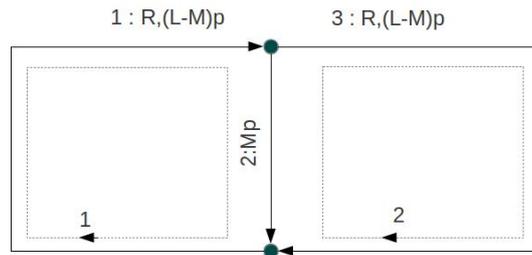


Figure “transformateur” : trois branches couplées via deux mailles

Deux branches, à l’extérieur, sont de propriétés $R + (L - M)p$ et une branche de couplage centrale est de propriété Mp . Les trois branches sont connectées via deux mailles avec une connectivité uniquement de MR donnée par :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Appliquant cette transformation à la réunion des métriques de chaque branche on trouve une métrique dans l’espace des mailles donnée par :

$$z_1 = [R + Lp - Mp], \quad z_2 = Mp, \quad z_3 = R + Lp - Mp$$

$$g = \Lambda^T (z_1 \cup z_2 \cup z_3) \Lambda = \begin{bmatrix} R + Lp - Mp + Mp & -Mp \\ -Mp & R + Lp - Mp + Mp \end{bmatrix}$$

Cette métrique est strictement similaire à celle obtenue par le couplage par corde. Cette corde n’est donc pas ici indispensable : le processus de couplage par champ réactif proche peut être représenté par une branche mise en commun entre deux réseaux au départ séparés. Ceci aussi car aucun phénomène ne sépare les deux réseaux couplés, ils appartiennent au même référentiel - au même objet - qui forme un tout.

Cela peut devenir encore plus évident si l’on modifie le milieu de couplage. On insère ainsi un noyau de ferrite passant par le centre des deux bobines. Dans ce cas il a fallu ouvrir les bobines et la présence du noyau non linéaire modifie la métrique d’une façon que nous avons détaillée au chapitre précédent. Le transformateur ne résulte plus d’un rapprochement des deux bobines mais a une existence en soi via la présence du noyau de ferrite. Le système devient explicable par le couplage via un transformateur à 3 branches.

On peut considérer que toute interaction imaginaire (dans le corps des complexes) est associée ainsi à un champ réactif, proche. L’atténuation de ces champs avec la distance est très rapide - on parle d’évanescence - sauf pour des structures guidées (chapitre suivant). La particularité du champ évanescent est aussi que vis à vis des masses ou charges qui l’engendrent, sa direction est longitudinale à la ligne de visée, ou encore la force est colinéaire aux lignes de champ. De fait le travail de cette force est non nul et l’on peut toujours calculer :

$$\int_C \vec{dc} \cdot \vec{f} \quad (2.1)$$

La force est égale au produit d’une masse généralisée m (charge électrique, magnétique, masse pesante) par un champ C . Du fait de la présence universelle du champ de gravitation, toute particule qui est associée à une force longitudinale est pesante[REU] et la ligne de force étant issue d’un émetteur et d’un récepteur, le couplage des objets est implicite. Par exemple si l’on s’imagine les lignes de forces reliant deux charges électriques de charges opposées, il suffirait de faire bouger l’une d’elle pour qu’aussitôt les lignes de forces et la seconde charge bougent. L’ensemble des charges et du champ constitue un système couplé.

Mais en quoi ce champ mérite-t-il le qualificatif de réactif ?

La puissance active développée dans une interaction s’exprime suivant :

$$P_a = \frac{1}{4} \{ei^* + e^*i\}$$

e étant la fém induite par le champ et i le flux source du champ. Si le champ d’interaction a une forme du type : $jM\omega$, on obtient :

$$P_a = \frac{1}{4} \{jM\omega i i^* - jM\omega i^* i\} = 0$$

La puissance active développée dans l'interaction est nulle. Par contre si nous calculons :

$$P_r = \frac{1}{4j} \{e i^* - e^* i\} = \frac{1}{4j} \{jM\omega i i^* + jM\omega i^* i\} = \frac{1}{2} M |i|^2$$

Ce résultat justifie à lui seul le qualificatif de champ réactif. Il en va ainsi des champs longitudinaux évanescents (de force centrale).

Mais ce résultat a une seconde implication. Imaginons un champ retardé dont l'expression devient $jM\omega e^{-jkx}$. Par remplacement dans la relation de la puissance active on trouve :

$$P_a = \frac{jM\omega}{4} |i|^2 e^{-jkx} (1 - e^{2jkx})$$

Ce résultat remarquable implique que le champ évanescents ne peut être un champ retardé, il doit être une interaction instantanée. Cette hypothèse, comme le souligne Martins [MART] ne viole nullement le postulat d'Einstein, celui-ci portant sur la propagation retardée de l'énergie et non du champ. Par ailleurs, l'expérience de Newton avec les prismes et d'autres depuis ont démontré la propriété de propagation instantanée des champs évanescents. Ces champs sont donc des champs réactifs et non propagatifs. Ils sont complétés dans la notion de champ proche par des composantes qui évoluent rapidement (à des puissances supérieures ou égales au carré de la distance en inverse) et qui comportent un terme de propagation. Il s'agit de composantes issues du champ magnétique. Considérons par exemple le potentiel vecteur émis par un élément de courant. A une distance R il est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu i d\vec{x}}{4\pi R} e^{-jkR}$$

Pour calculer la fém induite par ce champ, on calcule $-p\vec{S} \cdot \partial_R \vec{A}$, p étant l'opérateur de Laplace et \vec{S} la normale à la surface de flux réceptrice. On trouve :

$$-p\vec{S} \cdot \partial_R \vec{A} = -p\vec{S} \cdot \left\{ \mu i d\vec{x} \left(\frac{-4\pi}{16\pi^2 R^2} \right) e^{-jkR} - jk \left(\frac{\mu i d\vec{x}}{4\pi R} \right) e^{-jkR} \right\}$$

Le premier terme donne lieu à une interaction donnée par :

$$p\vec{S} \cdot \mu d\vec{x} \left(\frac{1}{4\pi R^2} \right) e^{-jkR}$$

En posant $\mu\vec{S} \cdot d\vec{x} = 1$ on trouve une puissance active égale à :

$$P_a = \frac{1}{4} \left\{ j\omega \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^2} i i^* - j\omega \frac{e^{jkR}}{4\pi R^2} i^* i \right\}$$

Soit :

$$P_a = \frac{\omega}{8\pi R^2} |i|^2 \text{Sin}(kR)$$

La puissance active est bien évanescents pour les distances R strictement positives, suivant l'évolution en décroissance très rapide de la fonction $\text{Sin}(x)x^{-2}$. Par ailleurs elle est dissipatrice. Elle doit correspondre à une résistance équivalente qui participe à l'émission du champ.

La puissance réactive est donnée par :

$$P_r = \frac{\omega}{8\pi R^2} |i|^2 \text{Cos}(kR)$$

Les deux puissances sont en quadrature. Le rapport des deux puissances est égal à la cotangente de kR . Or kR n'est autre que $2\pi \frac{R}{\lambda}$. Lorsque la distance est très inférieure à la longueur d'onde, la cotangente tend vers l'infini, ce qui est logique puisqu'alors la composante active tend vers zéro.

2.3 Champ actif

Considérons maintenant le second terme du développement précédent. On peut l'écrire :

$$-p\vec{S} \cdot \partial_R \vec{A} = -\frac{\omega^2}{c} \mu \vec{S} \cdot \vec{d}x G(R) i$$

Avec $G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$.

On trouve une puissance active négative :

$$P_a = -\frac{\omega^2}{2c} \mu \vec{S} \cdot \vec{d}x G(R) |i|^2$$

et une puissance réactive nulle.

Le fait que la puissance active soit négative indique que l'interaction se comporte comme un générateur. Or la présence d'une fonction de Green $G(R)$ implique que le phénomène qui a engendré ce générateur peut être lointain. A l'instant où le champ est reçu, le courant à l'origine de ce champ peut avoir disparu. Cette idée introduit quelque chose de fondamentalement nouveau : si le champ est émis par une charge en mouvement (un courant), cela signifie si l'on se place assez loin et compte-tenu du principe de relativité, que ce déplacement s'est effectué quelle que soit la puissance induite dans un récepteur éventuel. Le principe de relativité nous dit que la vitesse de l'énergie est au plus égale à la célérité c [MART]. Si le récepteur peut agir au sens d'influencer le mouvement de la particule qui émet le champ, il doit pouvoir le faire avant que celle-ci ait déjà parcouru son trajet ! Or ici, on considère que le champ est émis par la particule émettrice qui a effectué son trajet librement, puis vient modifier un autre trajet d'une particule lointaine. Il faut bien comprendre qu'en retour le récepteur peut rerayonner un champ qui impactera l'émetteur. Mais il sera déjà "trop tard" : ce premier a déjà décidé de son parcours.

On voit que l'hypothèse d'interaction réelle induit des propriétés particulières au champ.

Une fois rayonné son champ, l'émetteur peut "oublier" son rayonnement et "passer à autre chose" puisque l'usage qui sera fait de son émission n'impacte pas son comportement. Mais il faut quand même **respecter le bilan en énergie** : cette émission se paie par une perte d'énergie. C'est l'objet de la résistance de rayonnement. Enfin, le champ ne peut travailler sur son parcours sans quoi ce travail devrait être considéré dans le bilan de l'émetteur en fonction du parcours. Il doit donc être **transverse à la ligne de visée** : c'est une des propriétés fondamentales du champ actif. Le photon peut être associé à une jauge transverse[FEY]. A contrario, on parle de photon virtuel pour le boson associé aux champs évanescents.

Le champ actif est représenté par une corde réelle. Il ne peut être remplacé par une branche car dans un couplage par branche, aucune des parties du réseau ne peut être indépendante de l'autre. Il est non symétrique sans quoi également l'indépendance ne saurait être assurée (on sous-entend ici une non symétrie instantanée. Une symétrie avec retard est possible traduisant des échanges en questions-réponses entre l'émetteur et le récepteur). Prenons le cas d'une antenne émettrice et d'une antenne réceptrice. La première est alimentée, d'impédance propre a , la seconde est non alimentée, d'impédance propre b . Entre les deux existe une interaction de Friis γ [OPI]. La métrique de ce système est la suivante :

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma & b \end{bmatrix}$$

On voit par cette métrique que, qu'elle que soit la situation de la deuxième antenne, la première émet et a un régime établi. On revient sur ce point ultérieurement.

2.4 Incidence topologique de la nature du champ et séparation des composantes

Un bon moyen d'assurer un caractère transverse est de disposer d'un potentiel vecteur dont la divergence est nulle. C'est le cas du potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb. La divergence de \mathbf{A} nulle traduit le fait qu'en tout point de la sphère, le potentiel vecteur fuyant une source centrée est perpendiculaire à la normale locale. L'intégrale de ces produits scalaires est donc nulle[BEE].

Choisissons un potentiel scalaire, son gradient le transforme en vecteur. Si ce gradient est appliqué au potentiel précédent, son intégration est proportionnelle à celle du potentiel vecteur. La divergence du champ issu de ce potentiel est donc elle aussi nulle. soit

$$\mathbf{grad}\psi = \alpha \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \psi = c \int \mathbf{dx} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{grad}\psi = 0$$

Par contre si le gradient est colinéaire aux normales aux surfaces locales de la sphère, il ne peut être colinéaire au potentiel vecteur. Il peut dans ce cas représenter le travail d'un champ lamellaire[COLIN] ou encore longitudinal par rapport à la ligne de fuite d'une source centrée. On peut aussi choisir pour transversalité un champ qui est un rotationnel du potentiel vecteur. La jauge de Coulomb suit ce mécanisme est assure un potentiel vecteur transverse à la ligne de visée, un potentiel scalaire de gradient longitudinal. De fait on obtient pour les champs :

$$\mathbf{E}_L = \text{grad}\psi \quad \mathbf{E}_t = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Choisissant cette jauge, l'impact sur la topologie est direct. Le flux du potentiel scalaire non retardé est une branche que l'on peut retrouver en admettant directement une impédance de type condensateur représentant cette composante du champ. Le potentiel scalaire est instantané puisque les branches ne portent pas de retard. Cela n'est absolument pas en contradiction avec la causalité et le principe de relativité[MART], car seule la vitesse de l'énergie est limitée à c . Or on l'a vu, les composantes de champ réactif ne portent pas d'énergie, elle la stocke. Par contre, les interactions basées sur le potentiel vecteur sont retardées et étant transversales portent de l'énergie : le quanta de champ, mais sans travailler sur leur trajet. Il s'agit bien d'un échange d'énergie retardé à distance, ces échanges sont portés par des cordes réelles (CR).

Principes :

Les cordes réelles portent des interactions de champs transverses ou de l'information. Les cordes virtuelles peuvent être remplacées par des branches. Les branches portent les flux confinés de champ longitudinaux et les transports de matières.

Nous verrons au chapitre 4 que des champs longitudinaux peuvent se transformer en champs transverses par l'effet de mouvements relatifs accélérés. Le comportement scalaire de champs rattachés à des masses est modifié par des référentiels eux-mêmes en mouvement. Dès lors on peut retrouver des effets similaires à ceux qu'engendrent des masses accélérées.

La décomposition du champ en partie longitudinale (irrotationnelle) et transverse (solénoïdale) est la décomposition de Helmholtz-Hodge[HHw].

2.5 Espace des moments lié aux branches - connexion d'espace

Lorsque l'on veut définir la fonction attachée à une corde, il faut à un moment donné calculer le transport d'une quantité vectorielle : un potentiel vecteur, à partir d'une donnée provenant d'un graphe : un sommet, une branche, une maille, ...

Deux dipôles réalisent déjà en physique ce lien : le dipôle électrique, produit d'une charge par une distance (et non un courant par une distance comme on le voit parfois écrit) et le dipôle magnétique, produit d'une surface de boucle par le courant de bord[JACK].

Pour décrire le premier - aussi appelé *moment électrique* - on doit définir des coordonnées de sommets d'une branche capacitive. Par définition, une telle branche porte à ses bords des charges opposées ($\Delta q = C\Delta V$). Sa longueur physique est connue et intervient dans la valeur du condensateur associée à la branche. Elle constitue donc la base idéale pour construire un moment électrique rayonnant. Il "suffit" de construire une connexion entre les sommets et un espace géométrique pour pouvoir ensuite calculer des grandeurs vectorielles attachées à ce moment.

La connexion d'espace est une matrice dont les lignes sont les sommets et les colonnes les coordonnées des sommets dans un espace 3D, voire 4D défini.

Définition :

On appelle **connexion d'espace** la matrice n reliant les sommets aux coordonnées de points centrés sur les sommets dans un espace géométrique défini.

Si par exemple on désire calculer le potentiel vecteur élémentaire engendré par des courants de branches. On approxime : $\mathbf{A}^k = \mu_0 \dot{q}^k \mathbf{dl}G = \mu_0 I^k \mathbf{dl}G$. G est une fonction de Green, I^k le courant du réseau considéré et \mathbf{dl} un vecteur associé aux branches (supposées capacitives) et indiquant leurs directions et longueurs (notons que le potentiel vecteur dépend de la dérivée de la charge du moment, donc du courant). Soit B la matrice d'incidence reliant sommets et branches, n la connexion d'espace, on obtient pour un système global :

$$dA^x = \mu_0 G I^k B_k^s n_s^x \quad (2.3)$$

Le point d'observation du champ est supposé loin du réseau - par principe puisque l'on calcule un rayonnement lointain. De fait G est ramenée à un point au barycentre du réseau émetteur. Dans ces conditions on

voit que le potentiel vecteur apparaît naturellement contravariant. Par remplacement on peut alors définir un moment par :

$$m^x = I^k B_k^s n_s^x \quad (2.4)$$

Le potentiel vecteur n'est plus qu'une relation simple avec le moment : $dA^x = \mu_0 G m^x$.

Cette relation peut être rendue plus compliquée par un milieu non homogène, mais la démarche est strictement similaire. On peut alors créer un espace des moments basé sur les éléments m^x et non plus sur les flux I^k . Le dual du moment émetteur doit être un moment récepteur. On réalise le produit scalaire d'une branche par le champ par :

$$m_k = \delta_{yx} B_k^s n_s^y \cdot A^x \quad (2.5)$$

La fém partielle induite sur la branche étant donnée par $e_k = -p m_k$ (p opérateur de Laplace). La figure "espace des moments" représente un diagramme de Roth partiel faisant apparaître la connexion de l'espace des branches avec celui des moments.

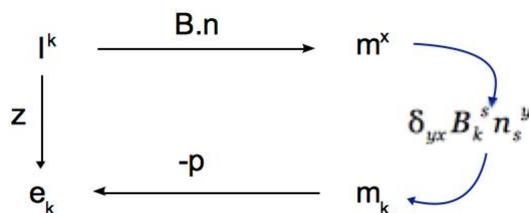


Figure "espace des moments" : couplage z via les moments et le champ A .

D'autres configurations seraient imaginables. La démarche de base qui conduit à la réflexion d'un espace des moments est le besoin dans une configuration donnée de faire le lien entre les éléments de la topologie cellulaire et l'espace géométrique où l'on décrit les lignes de champ lointain.

2.5.1 Espace des moments liés aux mailles

On peut aussi définir un moment en partant non plus de l'espace des branches mais de l'espace des mailles, rattaché à une surface et un flux de bord. Mais si l'on reste avec un potentiel vecteur, le champ du moment surfacique est le rotationnel de ce potentiel vecteur ce qui signifie à l'inverse que l'intégration du potentiel sur un cycle est égal au produit du champ par la surface (nous avons déjà vu cette propriété lors de l'étude de l'espace des réductances). Or l'intégration du potentiel sur un cycle est le résultat de l'application du changement de base branches vers mailles. On peut donc logiquement créer un moment de C_2 par application de la connectivité L à des moments de T_1 . On retrouve ici les processus développés précédemment dans le diagramme de Roth lors du développement des branches en bords de faces. C'est d'ailleurs la démarche utilisée souvent pour calculer le champ lointain d'une antenne cadre : en sommant les contributions des côtés[ANTE]. A l'émission on trouve une nouvelle expression du moment par :

$$I^k B_k^s n_s^x = L_\mu^k k^\mu B_k^s n_s^x = k \cdot \mu L_\mu^k B_k^s n_s^x = m^x$$

Le champ reçu engendrera sur différentes branches des fém suivant le couplage décrit précédemment. La fém de maille se déduit aussi automatiquement du changement de base. Toutes les configurations de polarisation, etc., du champ lointain se retrouvent dans les liens fondamentaux entre les moments de branches et les moments de mailles via la connectivité.

2.5.2 Pertes par rayonnement

La somme des quanta de champs rayonnés doit être incluse dans le bilan de puissance à la source des moments. Si le moment rayonnant à une métrique de type condensateur, il ne peut prendre en compte ces pertes. Il faut lui adjoindre une résistance de rayonnement qui sera en général placée à la source, sur la branche portant l'alimentation du moment émetteur. Côté réception, c'est la branche de charge qui récupère l'énergie du champ pour l'exploiter, qui porte la résistance de rayonnement. Cette résistance a une expression de la forme :

$$R_{ray} = \frac{1}{|i^0|^2} \int_{\theta, \phi} d\theta d\phi \left[\frac{\omega^2 (|\mathbf{A}(i^0)|)^2}{\eta} \right] \quad (2.6)$$

η est l'impédance d'onde ($\mu_0 c$), \mathbf{A} le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb. Suivant nos arguments précédents, la résistance de rayonnement est une grandeur intrinsèque, qui ne dépend pas des récepteurs dispersés dans l'environnement. Pourtant même en respectant une condition de champ lointain, on peut avec un réflecteur par exemple, renvoyer le champ vers l'émetteur. Le rayonnement étant en partie récupéré, comment ne pourrait-il pas y avoir d'incidence sur la valeur de R_{ray} ? En fait la résistance de rayonnement restera inchangée tant que le retour d'émission ne sera pas perçu. Ensuite, une partie du champ va devenir stationnaire entre les deux antennes et effectivement, la valeur de pertes par rayonnement va changer, y compris l'impédance d'antenne de l'émetteur. C'est un processus "d'impédance ramenée" similaire à celui mis en œuvre dans les ondes guidées. Mais cela ne contredit pas notre modèle, car dès lors qu'il y a ondes stationnaires, il y a un système couplé et non plus une antenne émettrice dans des conditions d'espace libre. Le système à considérer devient l'antenne émettrice plus le réflecteur. Ce système aura au global un diagramme de rayonnement différent de celui de l'antenne seule et la résistance de rayonnement de ce système s'en trouvera modifiée. On vérifie ce type de modification sur les antennes placées dans des chambres réverbérantes pour les besoins de la CEM[DMR].

La résistance de rayonnement peut aussi être vue comme une réaction de l'ensemble de l'environnement sur l'émetteur. Feynman avait d'ailleurs développé un modèle pour retrouver la résistance de rayonnement sur un électron vibrant qui partait de l'idée que des ondes avancées induisaient une force sur l'électron[FEY2].

On peut modéliser ce phénomène de la façon suivante : on considère une maille émettrice d'impédance propre 1Ω couplée par une corde unilatérale vers une seconde maille d'impédance propre -1Ω (cette valeur a de quoi surprendre. On traduit ici le fait que sur cette seconde maille, l'induction d'une fém de 1 volt engendre un courant qui s'oppose à cette fém de 1 Ampère. C'est une façon de traduire la réaction qui contredit l'action). Cette seconde maille est à son tour couplée à la première par une corde unilatérale également. Soit z_{21} et z_{12} les fonctions attachées aux deux cordes, la fém induite en retour peut s'écrire : $e'_1 = z_{12}i^2$, i^2 étant le courant dans la maille "-1". Dans cette maille justement, le rapport de la fém au courant est -1, donc : $i^2 = -z_{21}i^1$. D'où finalement, $e'_1 = -z_{12}z_{21}i^1$. L'équation de la première maille est : $i^1 = e_1 - e'_1 \Rightarrow i^1(1 - z_{12}z_{21}) = e_1$. Si les fonctions de couplage sont de type $jM\omega$ on trouve en final une auto-réaction de la forme $M^2\omega^2$. Le courant de la première maille passe de e_1 à $(1 + M^2\omega^2)^{-1} e_1$; il est plus faible suite à l'échange d'énergie par rayonnement. Ce raisonnement simpliste n'a d'autre intérêt que de montrer que la résistance de rayonnement peut aussi être comprise comme une réaction de l'antenne sur elle-même, principe donné par Feynman[FEY2]. Nous reviendrons sur cette notion compliquée lors de l'analyse du rayonnement de lignes ouvertes.

2.5.3 Champ quantique et réseau

Le champ actif se propage via des photons "réels". Le processus est équivalent à une ligne sans pertes transmettant une perturbation. Si l'on regarde la structure d'une ligne des télégraphistes, elle se compose d'une succession de cellules L-C, justifiées par les équations des télégraphistes. Cette structure de "filtre en ligne" est intéressante parce qu'elle montre bien le principe d'auto-entretien du champ entre ses composantes électrique et magnétique. La figure "ligne des télégraphistes" rappelle la structure de cette succession de cellules.

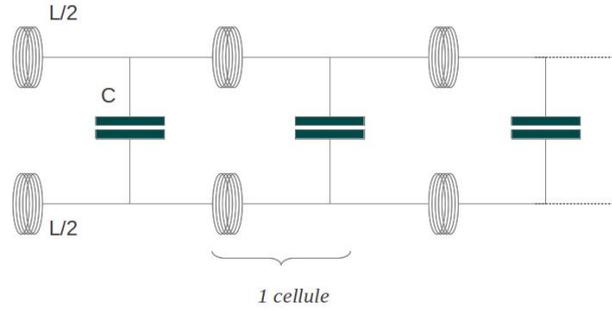


Figure “ligne des télégraphistes” : succession de cellules L-C.

Utilisant le principe de séparation topologique que nous avons détaillé précédemment, cette structure peut aussi être organisée en succession de cellules couplées par des cordes virtuelles (CV) suivant le schéma présenté figure “succession de résonateurs”.

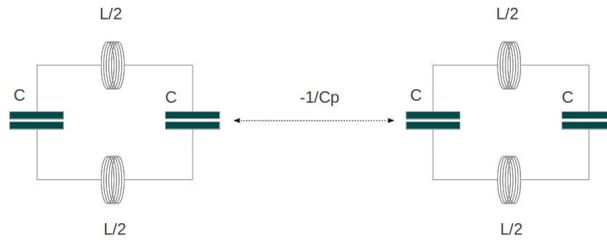


Figure “succession de résonateurs” : nouvelle organisation de la ligne des télégraphistes.

Cette transformation montre que la ligne peut être vue comme une succession de circuits LC, c’est à dire de résonateurs. On peut donc le voir également comme un processus de propagation d’un quanta de champ : une succession de résonateurs qui représentent le champ, successivement excités puis relaxés.

Quel peut-être le principe d’une transmission à distance par éléments successifs, sans pertes (dans la transmission) ?

2.5.4 Chaîne de résonateurs

Un premier circuit engendre un flux k^1 . Ce circuit couple vers l’extérieur, vers un second circuit, mais de façon unilatérale (l’unilatéralité est nécessaire ici pour imposer la marche strictement en avant du photon et le principe de Huygens et obtenir une expression adéquate pour la modélisation du photon). La prise en compte de la perte liée au rayonnement est assurée par une résistance de rayonnement ajoutée au circuit. Un second circuit reçoit ce couplage qui induit une fém. On impose entre les deux circuits un couplage de la forme $-j\beta e^{-\tau p}$. La fém est donc donnée par : $e_2 = -j\beta k^1$ en omettant le retard. Ce circuit est résonant. Si les pertes sont faibles on peut considérer qu’à la fréquence de l’information transportée, seule subsiste en impédance ces pertes du circuit. Dans ce cas, le flux de ce second circuit est donné par : $k^2 = e_2 \cdot \sigma$ où σ est l’admittance de pertes. Si l’on veut qu’il n’y ait pas de pertes dans la transmission, il faut que $|k^2| = |k^1|$, d’où l’on déduit $\beta\sigma = 1$.

Chacun des résonateurs est un circuit bouchon formé de deux branches R et C et d’une inductance de maille. La succession des opérations précédentes se résume dans le système d’équations suivant :

$$\begin{cases} e_1 = Rk^1 \\ 0 = -j\beta e^{-\tau p} k^1 + Rk^2 \\ 0 = 0k^1 - j\beta e^{-\tau p} k^2 + Rk^3 \\ \dots \end{cases}$$

On verra en partie II que ce type de processus se modélise très bien par les gamma matrices. On note que la progression unilatérale est assurée par le terme de phase $exp(-\tau p)$. Lorsque tous les résonateurs vibrent

en harmonique, seules leurs phases (et amplitudes avec les pertes, mais les phases seules sans pertes) varient. Imaginons toute une série de résonateurs en parallèle couvrant un large domaine de fréquences. Si l'on en fait une série de Fourier inverse à chaque ensemble parallèle de résonateurs, on trouve une impulsion se propageant de proche en proche, d'ensembles en ensembles dont le retard dans la direction de propagation aura été assuré par la seule différence de phase entre les ensembles.

On peut se demander comment choisir les composantes du résonateur? On peut prendre des valeurs de condensateur et inductance inspirées des constantes primaires du vide. Soit $C = \epsilon_0 \bar{\lambda}$, avec $\bar{\lambda} = \lambda (2\pi)^{-1}$; et $L = \mu_0 \bar{\lambda}$. On retrouve ainsi la pulsation de résonance pour l'inverse de la racine du produit de L par C . Cela suggère aussi que la dimension caractéristique du résonateur est associée à $\bar{\lambda}$.

La succession de résonateurs étant dans la ligne de visée, dans une jauge de Coulomb on trouve une induction du type :

$$e = -\bar{\lambda} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow e_{n+1} = -j\omega_0 \frac{\mu k^n \bar{\lambda}^2}{4\pi \bar{\lambda}} e^{-j\frac{z}{\bar{\lambda}}}$$

Toutes simplifications faites et après identification avec le système précédent on obtient : $\beta = \bar{\mu}c$, avec $\bar{\mu} = \mu (4\pi)^{-1}$. D'où une résistance de pertes de 30 ohms ($\beta = \bar{\mu}c = 30$) pour une valeur critique d'oscillation ($2\sqrt{\frac{L}{C}}$) située vers 750 ohms (ces valeurs sont déduites des formules simples attachées aux circuits RLC : on veut $Q = 1$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$). On est donc bien en régime oscillant et la chaîne transmet le champ. Ce dernier a été quantifié sous la forme de fém induites de proche en proche. Suivant la forme d'onde donnée au premier générateur, qui est lui réel (c'est lui qui crée le champ), on traduit la transmission de proche en proche sur une chaîne d'une infinité de résonateurs par la création puis annihilation des fonctions de couplages. Cela revient à créer de proche en proche des fém à chacun des résonateurs, chacun son tour. Le covecteur e_μ aura donc alternativement chacune de ses composantes non nulle. On peut alors associer ce covecteur à un bras d'un espace fonctionnel[GAB] où :

$$\langle e_n | = \langle 0 \dots 0(n-1), j\beta e^{-\tau p} k^{(n)}, \dots |$$

L'opérateur de création a^+ fait transiter un résonateur de l'état de repos à l'état excité : $a^+ \langle 0_n | = \langle e_n |$, celui d'annihilation a provoque la désexcitation : $a \langle e_n | = \langle 0_n |$.

On voit que partant de principes d'équivalence topologique de l'ATR, on a pu discrétiser un processus au départ continu, puis associer à des réseaux élémentaires les grandeurs discrétisées comme on avait pu le faire pour les nombres complexes ou hypercomplexes. De là on peut jouer sur la métrique ou sur le covecteur des sources dans l'espace des mailles pour traduire différentes transitions d'états.

On peut essayer de trouver un opérateur qui combine les actions des opérateurs de création et annihilation de champ pour déplacer directement par application de cet opérateur la source d'un résonateur à l'autre. La construction de la matrice de cet opérateur est simple : il suffit de mettre un "1" sur la ligne du résonateur (donc du numéro de maille associé) à exciter en correspondance de la colonne du résonateur qui le précède pour déplacer la source. Considérons par exemple le vecteur :

$$v = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On désire déplacer la valeur "e" de la première à la deuxième ligne du vecteur. La matrice suivante réalise cette transformation :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant si l'on crée une matrice γ égale à l'identité à laquelle on a rajouté une première ligne de zéro, la valeur "e" du vecteur v se déplacera de ligne en ligne autant de fois que l'on appliquera γ . C'est la base du processus des gamma matrices que nous développons en partie II. La boucle de calcul temporel est donc encadrée par une autre boucle temporelle de rythme égal au temps de propagation entre résonateurs. Dans cette boucle on applique un propagateur γ au covecteur des sources, utilisé ensuite dans la boucle de calcul du réseau.

Le résonateur peut vouloir considérer une polarisation du champ. On peut alors prendre deux résonateurs, chacun prenant en charge une polarisation puis si besoin les coupler. On obtient une structure de type quaternion (au sens général, soit deux résonateurs couplés). En choisissant un 4-format on obtient :

$$k^\mu \rightarrow \begin{bmatrix} \text{polarisation}_x \\ r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Chaque composante du propagateur est elle-même une matrice de la forme :

$$\gamma_{(\mu\nu)} = \begin{bmatrix} -j\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dans ce cas le propagateur permet de relier directement la source des résonateurs suivants (par couples) aux courants du couple précédent par : $e_\mu = \gamma_{\mu\nu} k^\nu$. L'algorithme est présenté figure "usage d'un propagateur".

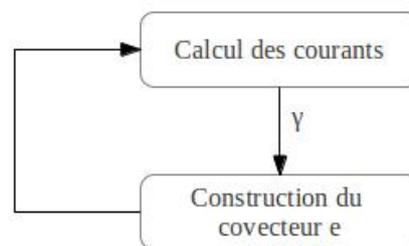


Figure "usage d'un propagateur".

La condition initiale est le réseau physique qui engendre le champ au départ. Par ailleurs le propagateur peut intégrer une transformation relativiste de Lorentz. Il est la fonction portée par une corde. Nous verrons au chapitre 4 le traitement de ce type de problème.

2.5.5 Théorème de réciprocité

Le théorème de réciprocité apparaît évident par l'ATR. Considérons deux mailles en interactions. La première est d'impédance a , la seconde d'impédance d et l'interaction symétrique vaut $-b$. La métrique du problème est :

$$g = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & d \end{bmatrix}$$

Si l'on alimente la première maille pour mesurer le courant dans la seconde, le covecteur des sources est : $e = [e \ 0]$. En résolvant $e = g.k$ par substitution on trouve pour k^2 l'expression : $k^2 = be (da - b^2)^{-1}$. Si maintenant on alimente la seconde maille par la même fém pour mesurer le courant dans la première, cela revient, la topologie étant symétrique, à remplacer a par d et réciproquement. On voit immédiatement que l'expression de k^1 est égale à celle de k^2 puisqu'elle ne dépend pas de cet échange de position de la source.

Ce résultat se retrouve tant que le réseau est linéaire et de métrique symétrique. On veut montrer l'égalité entre deux produits fém - courants. Soit : $e_a k^b = e_b k^a$. En remplaçant les courants par leurs expressions en fonctions des fém dont ils sont issus par couplages, on obtient : $e_a y^{ba} e_a = e_b y^{ab} e_b$. Comme dans l'échange $e_a = e_b$ on voit que l'égalité est respectée tant que $y^{ab} = y^{ba}$, soit que la métrique du réseau linéaire soit aussi symétrique. On remarque que le couplage y^{ij} peut être porté par une corde. La démonstration de la réciprocité est ici triviale alors que son développement par les équations de Maxwell par exemple est beaucoup moins évident.

2.5.6 Principe d'équivalence

Les réflexions précédentes permettent d'aborder un autre grand principe utilisé en électromagnétisme : le principe d'équivalence.

Par les modèles des résonateurs, le champ transverse porte bien une énergie puisqu'il a des pertes à chaque réémission, faibles pour la partie résistance de rayonnement car limitées à un angle solide très petit. Dans le principe d'équivalence qui suit les travaux de Huygens puis Fresnel, chaque point d'une surface "touchée" par le champ peut être vu comme une nouvelle source réémettant le champ dans la demi-sphère causale dans la direction où progressait l'onde. Cela revient à remplacer chaque point d'une surface illuminée par un résonateur de rayonnement hémisphérique. La démonstration "classique" du principe d'équivalence utilise deux domaines, l'un contenant les sources originelles du champ, l'autre tout le domaine externe à ce conteneur de sources. En précisant les conditions sur la surface du volume des sources on trouve une expression du champ suivant Maxwell qui a l'allure[VAU] :

$$\begin{cases} \nabla \wedge \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0 \cdot \delta \Sigma \\ \nabla \wedge \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0 \cdot \delta \Sigma \end{cases} \quad (2.9)$$

Où les deux termes de droite sont des sources de courants respectivement électrique et magnétique ($\mathbf{J}_e = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0 \cdot \delta \Sigma$, $\mathbf{J}_m = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0 \cdot \delta \Sigma$) qui engendrent le champ dans tout le domaine extérieur aux sources (la surface Σ rayonnant en tous ses points suivant la distribution $\delta \Sigma$).

Cette équivalence pose plusieurs questions. La première concerne les courants magnétiques qui sont un intermédiaire pratique de calcul mais n'ont pas de réalité physique. La seconde pose la question de la prise en compte des pertes par rayonnements sur ces sources "équivalentes". S'ils s'agissaient de sources réelles, elles comporteraient comme nous l'avons abordé précédemment, des pertes par rayonnement pour retrouver le bilan énergétique avec le rayonnement lointain. Finalement, on se pose la question de savoir quelles sont les conditions pour qu'un ensemble électromagnétique enfermé dans une surface abstraite Σ engendre un champ électromagnétique à l'extérieur de cette surface équivalent à celui engendré par des sources réparties sur la surface. Cela revient à résoudre un premier système sous la forme $k^s = y^{si} j_i$ où les j_i sont les sources réelles du champ, y^{si} une métrique qui relie champs et courants sur la surface limite et k^s les courants sur cette surface; puis de réutiliser ces nouvelles sources dans un deuxième système où elles peuvent être réintroduites comme mailles virtuelles :

$$k^e = -\frac{g_{xx}}{g_{xe}} k^s$$

C'est une traduction en analyse tensorielle du principe d'équivalence. Mais la construction topologique même qui nous a conduit à ce couplage pose les limites de son application.

On applique là sans le dire une forme de diakoptique faible assujettie à une condition : la topologie du problème place une corde entre le domaine interne des sources et le domaine externe du champ cherché. Si une interaction de champ proche existe via la surface frontière fixée, on a vu que le modèle n'était pas aussi simple : un report des conditions de surface s'effectue vers chaque partie du système étudié - côté volume qui contient les sources et côté source du champ externe.

On peut déduire cette condition d'un développement plus poussé proposé par Jackson[JACK]. On pose l'existence d'un champ scalaire dans le volume des sources. Ce champ respecte l'équation de Helmholtz : $(\partial_x^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}) = 0$. Dans le volume V on introduit une fonction de Green G telle que $(\partial_x^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. En utilisant le théorème de Green[JACK] et en posant la fonction de Green comme une propagation des champs vers l'infini : $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^{jkR} (4\pi R)^{-1}$, $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ on obtient une intégrale proche de l'intégrale de Kirchhoff, qui simplifie ensuite en partie son expression :

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{jkR}}{R} \mathbf{n} \cdot \left[\partial_x \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \psi \right] da$$

Les champs sont dans cette expression des ondes sortantes et vérifient la condition radiative $\psi \rightarrow f(\theta, \phi) G(R)$. On en exclu de fait les champs proches, ceux-là mêmes qui engendreraient des branches touchant la frontière. Par exemple dans le cas d'une ouverture, on néglige les charges réparties sur le bord de l'ouverture. Par exemple le potentiel scalaire à une distance h d'une distribution circulaire de charges de densité linéique q réparties sur un cercle de rayon r est donné par : $qr (2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + h^2})^{-1}$, qui au centre du cercle donne un champ indépendant de la distance : $q(2\epsilon_0)^{-1}$.

2.6 Résumé des éléments de graphe présents dans l'ATR étendue

On utilise les éléments suivants :

- sommets ;
- branches ;
- mailles réelles ;
- mailles virtuelles ;
- cordes réelles ;
- cordes virtuelles ;
- moments.

Les sommets permettent la connexion avec l'espace géométrique et portent des masses. Les branches sont l'espace naturel de départ et portent les caractéristiques d'énergies potentielle et de dissipation. Les mailles réelles sont constituées de branches. Les mailles virtuelles n'ont pas de propriétés, mais comprennent une ddp. Les cordes réelles transportent de l'énergie, de l'information. Les cordes virtuelles remplacent des branches dans des transformations topologiques mettant en évidence des couplages entre des éléments divers. Les moments sont des branches positionnées dans l'espace géométrique et portant des propriétés qui n'ont de sens que dans cet espace, comme des diagrammes de rayonnement.

2.7 Caractérisation en rayonné

De même que nous avons abordé la caractérisation d'un organe intrinsèque en "conduit" : c'est à dire dans une topologie par branches ou cordes virtuelles, il nous faut nous poser la question de la caractérisation d'un organe en "rayonné" : soit cette fois mesurer les cordes réelles.

Frontière électromagnétique, thermique, gravifique et frontière visuelle solide sont des choses différentes. Cette dernière, frontière mécanique peut influencer les autres et réciproquement.

Le principe de base d'une caractérisation de rayonnement consiste à mesurer ce rayonnement sur une sphère, hypothétiquement lointaine (puisque nous avons vu le lien entre champ proche et topologie. Une caractérisation en champ proche revient à une caractérisation en conduit).

Si l'on regarde les émissions de champ d'un organe, on peut se placer dans les bonnes conditions pour ensuite acquérir son diagramme de rayonnement. On peut ensuite par ingénierie inverse remonter à un ensemble de moments redonnant ce diagramme[FDD]. Le défaut de cette approche est qu'il n'y a pas discernement dans l'origine du rayonnement. On peut alors procéder en masquant les unes après les autres les sources de rayonnement quand c'est possible, et en faisant l'acquisition des diagrammes de ces différentes sources, en déduire le diagramme total résultant. Comme le rayonnement est un processus linéaire, la superposition est possible.

Le problème est plus complexe pour caractériser le comportement de l'organe sous illumination (en immunité). De façon détaillée l'organe est composé d'éléments récepteurs qui doivent être pris en compte par des moments. Ces moments se chargent de transmettre l'énergie du champ à des composants internes de l'organe, et son comportement s'en déduit. Le graphe modélisant l'organe s'en trouve tout de suite complexifié, mais topologiquement, du fait du découplage intrinsèque au champ lointain, la caractérisation ne pose pas les difficultés du champ proche. Par contre, on bute en pratique sur le côté exhaustif des contraintes à appliquer pour couvrir tout le domaine de comportement possible. En particulier pour mettre en évidence les non linéarités de comportement suivant les domaines explorés. Une base de "bon sens" malheureusement rarement exploitée est de dire que les domaines ne sauraient être plus vastes que ceux que rencontre l'organe dans sa vie. Ainsi il n'est peut-être pas nécessaire de se demander quelle est la tenue d'un fer à repasser au champ gravitationnel d'un quasar...

Une fois les domaines fixés, on les échantillonne pour diminuer l'exercice d'exploration. On obtient des listes de valeurs pour chaque domaine de contraintes ou de fonctionnements. Soit $l_1(a_i)$ une première liste, $l_2(b_j)$ une seconde, etc., on est sensé explorer la réponse de l'organe à toutes les combinaisons (a_i, b_j) , $i, j \in \mathcal{N}^2$. Le nombre de mesures à effectuer reste trop important. En général on se place dans une hypothèse où une contrainte est maximum, les autres paramètres prenant des valeurs typiques (par exemple l'alimentation est positionnée sur sa valeur nominale). Ce choix est souvent appelé "pire cas". En fait des combinaisons de contraintes, sans être à leurs valeurs maxima, peuvent être plus sévères.

2.7.1 Méthodologie générale de caractérisation d'un organe

Le point de départ de cette méthodologie est de considérer que par un biais ou un autre, on a une base d'information sur les fonctions qui caractérisent l'organe. Le problème n'est donc pas de trouver ces fonctions mais de déterminer leurs coefficients. On dispose de mesures pour (i) valeurs des flux $k_{(i)}^\nu$ et des valeurs prises par la fonction ou les fém $e_{\mu(i)}$. Si les a_n sont les différents coefficients ou paramètres présents dans les lois sur les flux k , on peut procéder par une méthode d'approximation sous le critérium des moindres carrés pour déterminer les valeurs de ces coefficients[ANGOT]. Soit l'écart :

$$\epsilon = \sum_i \left(e_{\mu(i)} - g_\mu \left({}_\nu k_{(i)}^\nu [a_n] \right) \right)^2 \quad (2.10)$$

On trouve les coefficients par l'étude des dérivations :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_n} = 0$$

Par exemple considérons un circuit simple $e = R(1+a)k$. On trouve :

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_i [e_i - R(1+a)k_i]^2 = \sum_i (2R^2 k_i^2 (1+a) - 2e_i R) = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_i e_i - R \sum_i k_i^2}{R \sum_i k_i}$$

On peut ainsi évaluer les coefficients qui règlent les lois de comportements des flux aux points où l'on caractérise l'organe.

Nous verrons au chapitre 6 que sous condition de projeter les fonctions d'impédances sur des bases de domaines, on peut avoir une autre voie pour la caractérisation générale d'organes. Cette nouvelle méthode pourra s'avérer plus adaptée aux cas complexes.

2.8 Conclusion du chapitre 2

Tant qu'il n'y a pas de situations de référentiels en mouvements relatifs accélérés ou de milieux non linéaires, les interactions rayonnées sont linéaires. C'est à dire que les fonctions a qui les décrivent sont de la forme $a.k^0$ où k^0 est un flux quelconque et a une fonction sur ce flux qui respectent $a.\alpha k^0 = \alpha(a.k^0)$. Une conséquence de cette propriété est que les flux couplés interviennent de façon séparée dans la métrique non linéaire. En effet, si l'on a une métrique de la forme : $g_\mu({}_\nu k^\nu, m^\nu, a.(k^{(\nu)} + m^{(\nu)}))$ si $m^{(\nu)} \rightarrow \alpha m^{(\nu)}$, alors :

$g_\mu({}_\nu k^\nu, m^\nu, a.(k^{(\nu)} + m^{(\nu)})) = g_\mu({}_\nu k^\nu, m^\nu, a.(k^{(\nu)} + \alpha m^{(\nu)}))$ or rien n'oblige la fonction a à respecter $a.(k^{(\nu)} + \alpha m^{(\nu)}) = \alpha a.(k^{(\nu)} + m^{(\nu)})$. Cela montre que pour conserver la linéarité d'impact avec le couplage (ce qui n'enlève rien à la non linéarité de la fonction), il faut que la fonction de couplage soit séparée des autres fonctions.

Concernant la linéarité du milieu, elle n'est pas si évidente que cela. De nombreux milieux comme l'ionosphère, les gaz etc., ont des propriétés complexes et non linéaires. Cependant dans ces cas on garde la séparabilité des couplages cette fois du fait du principe d'indépendance des couplages en champ lointain. Ce couplage ne modifiant pas la topologie des graphes et n'intervenant pas dans les changements de bases, il ne peut pas en général modifier les fonctions des autres flux.

Ce point est majeur pour le concept de Diakoptique. On pose tout d'abord une définition.

Définition :

on appelle séparable un couplage qui intervient comme un élément ajouté, une source engendrée par un flux distant (au sens où il appartient à une autre maille du même réseau ou pas).

Considérons la topologie présentée figure "couplage double".

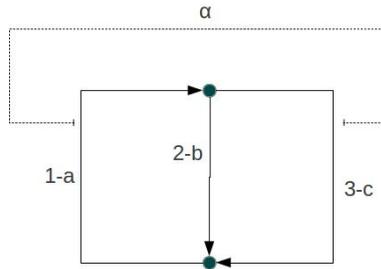


Figure “couplage double” : 1-a signifie branche 1, opérateur a.

Dans l’espace des branches, la métrique de ce circuit est :

$$z = \begin{bmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 \\ \alpha & 0 & c \end{bmatrix}$$

On se dote de la connectivité suivante pour transformer cette métrique dans l’espace des mailles :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le réseau étant non linéaire, on ne peut pas appliquer simplement la transformation bilinéaire $g_{\mu\nu} = L_{\mu}^a z_{ab} L^b_{\nu}$. Celle-ci donnerait :

$$g = \begin{bmatrix} a + b & \alpha - b \\ \alpha - b & b + c \end{bmatrix}$$

Mais on retrouvera cette expression que si les opérateurs sont distributifs, soit qu’ils respectent $a.(b + c) = a.b + a.c$. Dans le cas non linéaire on doit d’abord poser le système d’équations dans l’espace des branches dans lequel on remplace les flux de branches par leurs développements en flux de mailles (première transformation) :

$$\begin{cases} e_1 = \psi_1 + a.k^1 + \alpha k^2 \\ e_2 = \psi_2 + b.(k^1 - k^2) \\ e_3 = \psi_3 + c.k^2 + \alpha k^1 \end{cases}$$

On note d’un point les opérateurs appliqués aux flux. On suppose le couplage par champ α linéaire il n’est donc pas affecté d’un point. On effectue ensuite la seconde transformation (en appliquant la connectivité transposée au vecteur de fonctions) et suivant les opérateurs on regroupe ou pas des termes. On sait que les ddp ψ s’annulent et on trouve ici :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 = a.k^1 + \alpha k^2 + b.(k^1 - k^2) \\ e_2 + e_3 = b.(k^1 - k^2) + c.k^2 + \alpha k^1 \end{cases}$$

On voit ici que le couplage α est séparable en ce sens qu’il reste isolé et peut être ajouté aux sources puisqu’il ne s’applique pas au flux de la source. Par contre le couplage par branche b n’est pas séparable, il intervient sur des sommes de flux et s’applique sur le flux k^2 par exemple de la ligne e_2 ; donc le flux correspondant à la source.

Considérons le graphe présenté figure “rayonnement non séparable”.

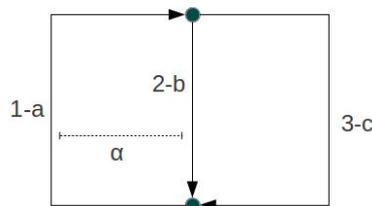


Figure “rayonnement non séparable” : couplage entre les branches 1 et 2.

Gardons la connectivité précédente (le déplacement de la corde ne remet pas en question cette connectivité). On trouve après la première transformation :

$$\begin{cases} e_1 = \psi_1 + a.k^1 + \alpha(k^1 - k^2) \\ e_2 = \psi_2 + b.(k^1 - k^2) + \alpha k^1 \\ e_3 = \psi_3 + c.k^2 \end{cases}$$

Cette fois le couplage intervient sur une différence de flux dont l'un est le flux de la source sur la même ligne. Ce couplage n'est pas séparable. Il modifie la fonction appliquée au flux k^1 qui devient $a. - \alpha$. La présence de ce couplage intervient sur le comportement découplé de la maille 1.

On comprend que ce dernier réseau par exemple où interviennent deux couplages : b et α , ne peut être construit comme simple branchement de réseaux primitifs que seraient les fonctions a , b et c . Le branchement de a et b modifie ici déjà la relation entre la source et le flux de la branche 1.

Cette topologie est très particulière et met en évidence une non linéarité dans un couplage. En général, les couplages par rayonnement sont séparables et plus généralement, les couplages par cordes réelles ou virtuelles. Cette propriété permettra de découper un système en sous-parties tout en pouvant calculer très simplement le comportement du système reconstitué : c'est le principe de la Diakoptique.

Le cas particulier précédent n'a aucun sens physique. Si le rayonnement est lointain, les deux branches ne peuvent pas appartenir au même réseau. Les interactions de champ lointain sont séparables et portent un champ transverse pour les raisons évoquées plus haut. On peut même ériger ce principe comme caractéristique du champ lointain transverse.

Pour ce cas particulier, l'interaction donne le paramètre inductance propre ou masse de la maille[GAB2] en l'appliquant au champ évanescent. Mais cette propriété peut être associée à la maille directement. On lève dans ce cas l'inséparabilité du couplage en le remplaçant par une fonction de niveau d'échelle supérieur.

2.9 Références du chapitre 2

- [REU] F.A.Reuse, "Electrodynamique et optique quantiques". Edition des presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [MART] P.A.Martin, F.Rothen, "Problèmes à N corps et champs quantiques". Edition des presses polytechniques et universitaires romandes, 1990.
- [FEY] R.P.Feynman, "Quantum electrodynamics". Edition Addison Wesley, 1995.
- [OPI] O.Picon, "Les antennes, théorie, conception et applications". Edition DUNOD, 2009.
- [BEE] E.M.Purcell, C.Guthmann, P.Lallemand, "Cours de physique de Berkeley : volume 2". Edition Armand Collin, 1973.
- [COLIN] R.E.Collin, "Field Theory of Guided Waves". Edition IEEE Press, 1991.
- [JACK] J.D.Jackson, "Classical electrodynamics". Edition Weyley, 1998.
- [ANTE] J.D.Kraus, R.J.Marhefka, "Antennas", Edition Mc Graw Hill, 2002.
- [FEY2] R.P.Feynman, "Feynman lectures on physics, volume II". Edition Pearson Addison Wesley, 2006.
- [DMR] S.Dubois, O.Maurice, A.Reineix, "Réflexions sur les propriétés du champ modal". Congrès CEM2010, Limoges.
- [GAB] R.Gabillard, "Vibrations et phénomènes de propagation". Edition Dunod université, 1969.
- [VAU] P.Vaudon, policopié du master télécommunications hautes fréquences et optiques, laboratoire Xlim : "Quelques théorèmes généraux de l'électromagnétisme".
- [MDP] B.Yavorski, A.Detlaf, "Mémoire de physique" page 528. Edition MIR, 1975.
- [FDD] J.Chollet-Ricard, F.Lafon, F.de Daran, O.Maurice, "Prediction of the field radiated at one meter from PCB's and microprocessors from near EM field cartography". Congrès EMC'03, 2003.
- [ANGOT] A.Angot, "Compléments de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications". Edition Masson, 1982.
- [GAB2] R.Gabillard, "Vibrations et phénomènes de propagation", page 111. Edition Dunod université, 1969.
- [HHw] Wikipédia, URL : http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Helmholtz-Hodge.

Chapitre 3

Ondes guidées

3.1 Introduction au chapitre 3

Les interactions par champ libre que nous avons abordé dans le chapitre précédent ont pour particularité de présenter des pertes par rayonnement. Si le champ est guidé par une structure, c'est à dire qu'un échange d'énergie entre le champ et des porteurs libres ou liés s'effectue tout le long de la propagation, des pertes sont engendrées par ces porteurs mais d'expressions différentes de celles dues à un rayonnement en espace libre.

Branin, disciple de Kron[BRA], a élaboré un modèle générique pour les interactions guidées. Ce modèle reprenait les principes de la propagation d'une impulsion établis par Bergeron[VAB](sans que Branin a priori ait eu connaissance des travaux de Bergeron). Partant de ces principes, on peut les généraliser à la propagation de modes. Le champ dans ces modes guidés (qu'ils soient purement transverses ou non) est un moyen pour des émetteurs - récepteurs (ER) d'échanger de l'information. Le support met à la disposition des ER un milieu aux propriétés diverses sur lequel ils peuvent s'appuyer pour transmettre des signaux. C'est suivant cette idée que l'on présente finalement la propagation guidée comme une modification de la propagation libre dans les expressions des fonctions de couplages. Cette démarche lorsqu'elle est possible s'avère extrêmement riche, permettant de modéliser des environnements confinés à partir de la connaissance des systèmes en environnement libre.

S'appuyant sur les modèles établis, on les généralise à l'étude d'ondes guidées dans des environnements complètement clos, comme des cavités, fussent-elles équipées d'ouvertures.

3.2 Ondes guidées suivant le modèle de Branin

Gabillard a fait une présentation des phénomènes d'ondes guidées dans des structures cristallines discontinues, puis du passage avec des structures continues et génériques sur lesquelles on peut s'appuyer pour développer un graphe modélisant ces phénomènes[GAB]. Le principe de base imaginé par Branin est qu'il suffit de reporter sur les conditions limites de la ligne les ondes voyageant dans la ligne - puisqu'étant dans une structure d'ondes guidées, on sait où vont les ondes! - pour modéliser celle-ci complètement. Or dans une topologie on peut imaginer deux types d'ondes :

1. des ondes provenant de vecteurs contravariants ;
2. des ondes provenant de covecteurs.

Par définition, une onde est une solution de l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta - \gamma^2) u = 0 \tag{3.1}$$

u est un potentiel quelconque. Δ est l'opérateur laplacien et γ le facteur de propagation[GAB].

La solution de cette équation est de la forme : $\alpha e^{p(t - \frac{x}{v})}$. Dans un format $+, -, -, -$ on peut généraliser cette solution sous la forme : $\alpha e^{p\sqrt{\delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}}$ [LL](on entend par format le choix d'une métrique du type $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ où la succession choisie pour les signes constitue la signature ou format de la métrique). α est un coefficient d'amplitude et δ la métrique du format choisi.

La solution de l'équation d'onde apparaît avant tout comme une transformation de phase d'un potentiel qui au départ s'exprime simplement comme facteur du complexe $e^{pt} = e^{px^0}$ (avec le choix $x^0 \rightarrow x/c$. Cette transformation est assimilable à une rotation de phase). De fait, il n'y a pas changement de variance et si l'onde transportée est covariante, le potentiel doit l'être également et réciproquement pour la contravariance.

Dans un modèle où une énergie est transportée d'un point à un autre, ce transport est concrétisé dans la topologie par une fém en réception qui assure la transmission du signal présent au départ du transport. Le potentiel d'onde est sous ce jour manifestement covariant.

Dans le modèle de Branin, on aimerait aussi inclure l'énergie transmise comme une interaction dans la métrique du réseau étudié. De fait, le potentiel de départ est contravariant - c'est un flux - et le potentiel induit covariant. Pour passer de la simple rotation d'un potentiel covariant à une métrique incluant cette rotation, il suffit d'exprimer le potentiel source en fonction du flux auquel il est lié.

Finalement on trouve que la fém induite en extrémité de transport doit avoir une expression de la forme :

$$e_\chi = (\psi_0 + z_{00}f^0) e^{-\tau p} \quad (3.2)$$

τ est le retard de propagation le long d'une trajectoire curviligne d'onde guidée.

Or le processus est réciproque, si on injecte une onde à l'extrémité χ de transport, on doit induire une fém en début de transport. La différence est que l'on convient en général d'avoir les flux d'entrée rentrants et les flux de sortie sortants. De fait une différence de signe apparaît dans la composante issue du flux et l'on obtient :

$$e_0 = (\psi_\chi - z_{\chi\chi}f^\chi) e^{-\tau p} \quad (3.3)$$

Ces deux équations sont très générales et nous allons voir quelques unes de leurs applications parmi de nombreuses possibles. Nous les appellerons "équations de Branin". Notons que l'interaction qui en découle est une corde virtuelle, puisque nous avons vu que ces structures peuvent être représentées par des successions de cellules. Le fait que le nombre de cellules soit infini pour atteindre la continuité ne change rien au fait que la corde ne transporte pas strictement une interaction de champ lointain. D'ailleurs, les champs dans les structures guidées sont des champs statiques[JACK]. C'est à dire qu'ils sont localement assimilables à des champs électrostatiques ou magnéto-statiques.

Une autre façon de le préciser est de dire, en admettant que la résistance de rayonnement soit intrinsèque, que le rayonnement de champ lointain associé aux cordes réelles ne modifie pas la métrique. Ici par contre, le branchement de la ligne modifie la métrique en ajoutant la composante d'impédance caractéristique de la ligne.

3.2.1 Ligne de propagation par mode unique

Définition :

on appelle ligne une structure d'onde guidée pourvue d'une entrée et d'une sortie topologiquement représentée par deux branches reliées par une corde virtuelle.

Considérons le graphe présenté figure "ligne élémentaire", appliqué à un problème électrique¹.

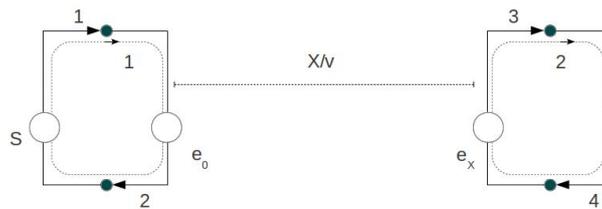


Figure "ligne élémentaire".

Un stimuli S sur la branche 1 engendre un courant dans les deux branches 1 et 2. Les relations précédentes justifient les deux fém $-e_0$ et e_x ajoutées sur les branches 2 et 3 et dirigées toutes les deux vers le haut des branches (ce qui justifie le signe négatif sur e_0). Le changement d'espace branches vers mailles crée les deux courants de mailles 1 et 2. Si les fonctions attachées aux branches 1 à 4 sont notées respectivement r_0, z_c, z_c, r_L , les équations précédentes pour cette structure deviennent (on note ψ_i la ddp référencée au sommet du bas. Ainsi $\psi_0 = \Delta\psi_0$) :

$$\begin{cases} S = \psi_0 + r_0.i^1 \\ -e_0 = -\psi_0 + z_c.i^2 \\ e_x = \psi_\chi + z_c.i^3 \\ 0 = -\psi_\chi + r_L.i^4 \end{cases}$$

1. Ce graphe constitue la base de ce que l'on appelle le modèle de Branin. On donne quelques propriétés particulières de ce modèle et une extension en annexe C - partie X.

Ecrivons par ailleurs les deux équations de Branin pour ce graphe :

$$\begin{cases} e_0 = (\psi_\chi - z_c \dot{t}^3) e^{-\tau p} \\ e_\chi = (\psi_0 + z_c \dot{t}^2) e^{-\tau p} \end{cases}$$

On applique au premier système un changement de base dans un espace des mailles et l'on remplace les fém par leurs expressions pour obtenir² :

$$\begin{cases} S = (r_0 + z_c) k^1 + (z_c - r_L) e^{-\tau p} k^2 \\ S e^{-\tau p} = (z_c - r_0) e^{-\tau p} k^1 + (z_c + r_L) k^2 \end{cases}$$

Ce système d'équation fait apparaître les fonctions de couplage. La première renvoie une fonction du courant dans la maille émettrice de la forme :

$$z_{12} = (z_c - r_L) e^{-\tau p} \quad (3.4)$$

La seconde est de type affine (ici), elle ajoute une source et une fonction de couplage du courant :

$$z_{21} \rightarrow (z_c - r_0) e^{-\tau p}, \quad \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} S \\ S e^{-\tau p} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Le mode de propagation est unique ici, même s'il peut être décomposé en un mode continu traduisant la transmission d'une quantité constante et un mode dynamique prenant en charge toutes les ondes variables. La présence de ces deux modes est mise en évidence dans le terme de retard $e^{-\tau p}$. Le paramètre τ est un rapport entre une distance et une vitesse de propagation. A la limite des vitesses infinies, c'est à dire quand la propagation est instantanée, l'exponentielle vaut un. On trouve donc ici naturellement le mode continu sans propagation. L'absence de propagation, ou de retard, ne signifie pas une vitesse nulle mais au contraire une vitesse infinie. C'est également une caractéristique du potentiel scalaire dans la jauge de Coulomb. Comme nous l'avons souligné, cela n'est nullement en contradiction avec le postulat d'Einstein[EIN] qui porte sur une vitesse limitée à la célérité pour le transport de l'énergie. Par contre on peut se demander par quel processus cette vitesse infinie conduit à une situation de lien direct? C'est l'objet du prochain paragraphe.

3.2.2 Vitesse infinie et lien direct

Intuitivement on a tendance à penser que l'absence de propagation signifie une vitesse de propagation nulle. Au contraire, une vitesse infinie caractérise les événements qui sont transmis instantanément. On va étudier comment le passage au continu transforme autant la métrique qu'elle peut impacter le format. L'analyse topologique de ce passage révèle des points fondamentaux dont l'interaction avec les composantes continues qui apparaissent comme des jauges, parfois indépendantes, mais dans les cas non linéaires, souvent influentes.

3.2.2.1 Equivalence topologique

La figure "propagation instantanée" montre deux structures donnant les mêmes observables.

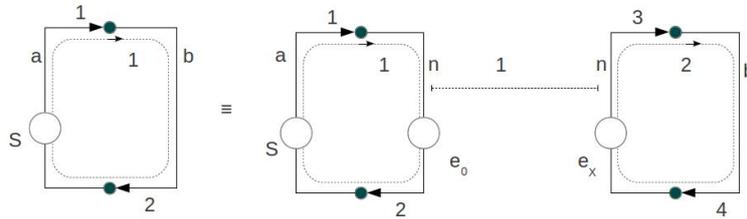


Figure "propagation instantanée" : le réseau de gauche a les mêmes observables que celui de droite.

2. On peut créer une **matrice de dispersion** ζ qui prenne en charge la modification du covecteur des sources pour y faire apparaître, de façon générale, les sources reportées. Ainsi lorsque le covecteur ne comprenant qu'un terme en composante e_0 au départ s'enrichit d'une autre composante (mettons la seconde) $e_0 e^{-\tau p}$, on peut exprimer cette évolution en utilisant la matrice $\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-\tau p} & 0 \end{bmatrix}$ et en écrivant l'équation tensorielle du système sous la forme : $(1_\mu^\mu + \zeta_\mu^\mu) e_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu$. Cette équation se résume toujours à une forme $T_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu$ avec $T_\mu = (1_\mu^\mu + \zeta_\mu^\mu) e_\mu$.

Dans cette figure le terme η représente l'impédance d'onde de la structure d'ondes guidées, a et b sont des opérateurs attachés aux branches d'origine 1 et 2. Prenons pour observable de départ la ddp développée aux bornes de l'opérateur b . Dans le premier graphe, on trouve facilement :

$$V_b = b \left(\frac{S}{a+b} \right)$$

Dans le cas de la deuxième structure on peut exprimer avec propagation instantanée la fém e_χ de la branche 3 : $e_\chi = (\psi_0 + \eta k^1)$. L'observable devient :

$$V'_b = b \left(\frac{e_\chi}{\eta + b} \right) = \frac{b}{\eta + b} (S - ak^1 + \eta k^1) \Leftrightarrow S = e_\chi + (r_0 - Z_c) k^1$$

Egaliser V_b et V'_b revient à fixer η égal à a . Maintien-t-on pour autant l'impédance vue par la source ? Le courant côté source s'exprime par :

$$k^1 = \frac{S - e_0}{a + a} = \frac{1}{2a} \{S - (\psi_\chi - ak^2)\}$$

En remplaçant ψ_χ par son expression en fonction de k^2 on obtient :

$$k^1 = \frac{1}{2a} \{S + (a - b)k^2\} \Leftrightarrow \psi_\chi = bk^2$$

Or $k^2 = S(a + b)^{-1}$ et donc :

$$k^1 = \frac{1}{2a} \left\{ \frac{(a + b)S + (a - b)S}{a + b} \right\} = \frac{S}{a + b}$$

qui est la valeur obtenue pour le premier graphe. Les deux topologies sont bien équivalentes.

3.2.2.2 Comportement asymptotique

Le passage au continu est abrupt. En même temps certains processus ont des vitesses de variations extrêmement faibles. L'étude précédente montre que la propriété d'impédance itérative z_c de la structure devient égale à l'impédance de source. Le terme de retard devient égal à 1. Cette valeur limite apparaît dans le développement en série de la fonction exponentielle. Mais le passage de η de z_c à a est moins évident.

D'une part si la liaison comporte des pertes Joule même en continu ou quasi-continu, ces pertes doivent être ajoutées en série avec l'impédance de source (et uniquement là) pour retrouver le pont diviseur qu'elles imposent. On a ici une modélisation strictement égale à celle de la résistance de rayonnement. La perte Joule est d'ailleurs une forme de rayonnement.

La fonction η peut être écrite comme somme de deux fonctions : l'une pour les retards nuls et l'autre pour les retards non nuls. On écrit :

$$\eta(\tau) = ae^{-\alpha\tau} + z_c(1 - e^{-\alpha\tau}) \quad (3.6)$$

α est un paramètre à déterminer. Sous cette forme, le modèle de Branin couvre tout le besoin, depuis les vitesses infinies, aux vitesses de propagation physiques.

On peut aussi choisir de travailler avec un format du type (*scalaire, vecteur*) où les comportements statiques sont les premières composantes. Ce format permet de traiter simultanément les deux domaines statique et dynamique, voire de considérer des couplages d'un domaine vers l'autre dans le cas d'opérateurs non linéaires. Souvent les polarisations statiques influencent les fonctions sur les comportements dynamiques.

Un point important est qu'un format peut être exploité par une observable qui dérive de la somme des résultats sur chaque format. On peut ainsi créer une base de flux d'observables connectée aux flux de format de telle façon qu'une observable donnée soit obtenue par la somme des flux sur chaque format. On a une relation du type : $f^\theta = Q^\theta_b f^b$ si f^θ est le flux de l'observable (la grandeur mesurée) et f^b la base des flux de formats (les flux utilisés dans les calculs).

3.3 Interaction entre objets dans un guide ou une cavité

La ligne ne transporte finalement que deux modes. En tout cas cela est vrai tant que la vitesse de variation des ondes est lente devant les dimensions de la ligne. Dans le cas contraire, d'autres modes peuvent apparaître. On cherche pour le cas général le processus de modélisation pour les ondes guidées.

3.3.1 Topologie commune

Les couplages entre les excitateurs et les structures d'ondes guidées sont réalisés par des ondes évanescentes[COLIN]. Notons que la perturbation réalisée par l'excitateur au sein de la propagation implique l'existence d'ondes évanescentes. Ce point est intéressant car on fait souvent l'hypothèse d'une faible perturbation de l'excitateur. Mais cette hypothèse en soi est paradoxale. Tout est relatif bien sûr de l'échelle à laquelle on regarde le phénomène.

Dans le principe, la structure d'onde guidée a sa propre topologie de champs évanescents au point d'injection. En ce point, des transformations vont permettre de connecter l'excitateur - ces transformations sont une généralisation d'une opération de couplage. Ces couplages étant entre champs évanescents (champs proches), ils sont des branches du point de vue topologie, comme nous l'avons précisé auparavant. Ces connexions peuvent être remplacées par des cordes virtuelles. On retrouve ainsi les modèles de couplages entre des excitateurs et des structures d'ondes guidées qui sont usuellement présentés dans les ouvrages d'hyperfréquences[BAD].

Toutes les structures d'ondes guidées ont donc pour topologie commune des cordes virtuelles donnant les interactions retardées dans des modes identifiés et des conditions aux points de prélèvement faites de réseaux de champs évanescents.

3.3.2 Méthode de modélisation générale, choix de format

Nous avons vu que la limite statique était particulière. Cela reste vrai pour toute structure d'ondes guidées et pas seulement les lignes. Dans un guide par exemple, on peut avoir une transmission en basse fréquence, très en-deçà de la fréquence de coupure. Il faut amorcer un peu de dynamique pour profiter des effets d'annulation du champ par les parois. Le format reprend de fait la liste (champ scalaire, champ vectoriel pour chaque polarisation) qui a été justifiée auparavant avec un terme η qui peut dépendre de modes d'établissement du champ dans chaque polarisation. La grandeur polarisation est une donnée supplémentaire par rapport à la ligne de base.

La méthodologie générale est donc la suivante :

Soit un réseau excitateur R_E et un réseau récepteur R_R , soit un ensemble de structures de champs associé à un dispositif de transmission $\eta_{(xy)}$, l'utilisation par les deux réseaux du milieu de propagation η revient à une transformation appliquée à une réunion (somme directe) des trois réseaux. On note ce processus sous la forme :

$$R_E \rightarrow \eta_{(xy)} \rightarrow R_R \text{ tq } g_{\mu\nu} = T_{ab \rightarrow \mu\nu} \{z_{ab}(R_E) \cup \eta_{ab(xy)} \cup z_{ab}(R_R)\} \quad (3.7)$$

Les deux termes $z_{ab}(R_X)$ sont les métriques des deux réseaux excitateur et récepteur. $\eta_{ab(xy)}$ est le réseau de propagation guidée incluant le mode statique et le mode actif. $g_{\mu\nu}$ est la métrique du système couplé. $T_{ab \rightarrow \mu\nu}$ est un ensemble de transformations qui s'appliquent à la matrice des trois réseaux regroupés. Ces transformations reviennent à des **produits scalaires entre des cartographies de champs**.

3.3.2.1 Exemple avec l'utilisation d'une ligne

Un premier cas simple pour illustrer la méthode est celui d'un circuit branché sur une ligne pourvue de deux modes de propagation : TEM (Transverse-électromagnétique) et continu. Suite à cette application, on pourra aborder des cas plus complexes avec des guides d'ondes.

Considérons les trois réseaux présentés figure "connexion sur ligne".

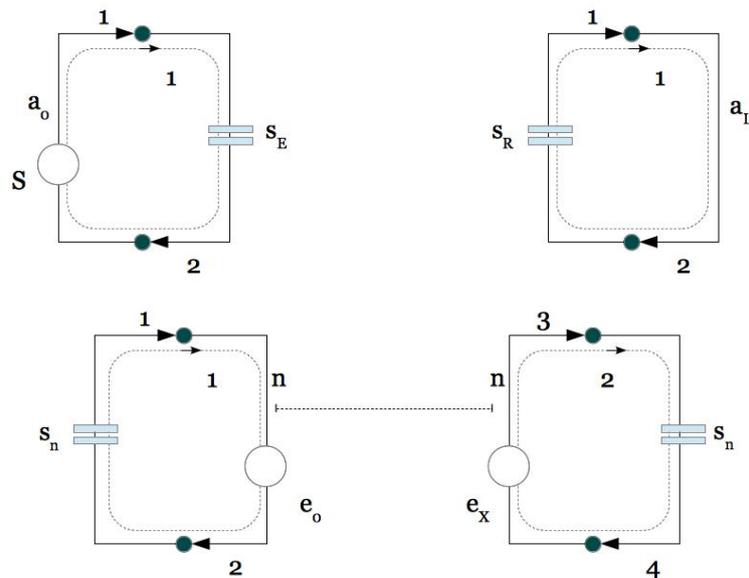


Figure "connexion sur ligne" : deux réseaux émetteur R_E et récepteur R_R et une structure de ligne à vide.

Sur cette figure on distingue trois réseaux : les deux du haut sont les réseaux émetteur et récepteur R_E et R_R . Le réseau du bas, avec une corde virtuelle est une structure de ligne en modes continu et TEM. Le premier point remarquable est, qu'à l'état non couplé, chacun de ces réseaux a une condition limite fermée par un condensateur qui constitue une maille sur ces réseaux primitifs. Ainsi la ligne non branchée n'a pas en topologie deux branches mais bien quatre et deux mailles. Les deux sections ouvertes en extrémités de ligne sont deux condensateurs. Si la ligne est en court-circuit, on a des conditions limites inductives. Ces schémas équivalents sont les traductions électriques de champs évanescents latents, dans la mesure où la ligne par exemple, n'étant pas alimentée, le bilan des charges y est nul et aucune différence de potentiel ne s'y développe (à moins d'y avoir été induite précédemment). Cependant à partir de la géométrie même des extrémités de la ligne, on peut calculer le condensateur d'extrémité qui apparaît comme un élément intrinsèque à cette géométrie indépendamment de la présence ou non d'un stimuli sur la ligne.

Dans le cas des deux réseaux émetteur et récepteur, leur topologie en état non chargé impose également ce condensateur. En fait on retrouve dans chacun de ces cas des présences de conducteurs séparés par des diélectriques. Partant de ce constat, on comprend que ces configurations soient rattachables à des schémas équivalents de condensateurs. Or ces condensateurs S_X (par abus de notation on confondra le condensateur et son impédance, soit que S_X est aussi $(S_X p)^{-1}$) expriment un stockage potentiel d'énergie électrique $S_X V^2$ si V est la ddp à leurs bornes et sont liés à des lignes de champ électrostatique - champ évanescents - dont on ne peut pas dire qu'il soit polarisé, la polarisation étant a contrario une propriété du champ actif. Par contre, on peut donner l'orientation des lignes de forces dans un espace attaché aux réseaux. Si l'on sait exciter les lignes de force d'entrée de la ligne, on peut engendrer un stimuli qui provoquera la propagation d'une onde dans cette même ligne. En effet, on peut écrire si l'on crée un champ électrique \mathbf{E}_E colinéaire aux lignes de forces : $\text{div} \mathbf{E}_E = \rho$. Soit

$$\epsilon \iint_{\Gamma_n} \mathbf{d}\Gamma_n \cdot \mathbf{E}_E = q_n$$

Dans cette première équation de Maxwell, on effectue le produit scalaire du flux des lignes de forces réceptrices Γ_n par le champ excitateur E_E . On en déduit une source de courant équivalente induite [CRO]

$$i_n = p\epsilon \iint_{\Gamma_n} \mathbf{d}\Gamma_n \cdot \mathbf{E}_E \leftarrow i = pq$$

Le champ excitateur est le gradient de la ddp V_{S_E} développée aux bornes de S_E . Comme le vecteur branche $\mathbf{v}_{(b)}$ entre deux points est donné par : $\mathbf{v}_{(b)} = B_{(b)}^s n_s^x \mathbf{u}_x$; on obtient finalement que le courant qui va s'écouler dans le condensateur de la ligne résulte de :

$$i_n = p\epsilon \iint_{\Gamma_n} \mathbf{d}\Gamma_n \cdot \nabla V_{S_E} B_{(b)}^s n_s^x \mathbf{u}_x$$

Le flux Γ_n résulte lui aussi d'un trajet entre deux sommets auxquels est raccroché le condensateur S_n . Par exemple pour une trajectoire rectiligne et une branche d :

$$i_n = p\epsilon\Gamma_d \nabla V_{S_E} B_{(d)}^s n_s^x \mathbf{u}_x \cdot B_{(b)}^s n_s^x \mathbf{u}_x$$

Un produit scalaire "parfait" n'est donc rien d'autre au niveau du graphe que le branchement de deux sommets sur deux autres sommets, car à ce moment là les deux transformations $B_{(b)}^s n_s^x$ et $B_{(d)}^s n_s^x$ sont semblables et le produit scalaire vaut 1. Les deux flux concordent alors à hauteur de leurs amplitudes associées à chaque couple de sommets et l'induction s'en suit automatiquement.

Comment réaliser ces branchements ?

Les branchements peuvent être réalisés de différentes façons, mais une méthode qui allie simplicité et efficacité consiste à définir le branchement dans la connectivité. Le but est de créer une branche commune aux deux composants S_E et S_n . Pour cela il suffit de les connecter en une branche unique partagée entre deux mailles. Suivant le recouvrement, la façon de "souder" les sommets, etc., le composant résultant peut être une partie ou la somme totale des condensateurs. Si la soudure est totale et galvanique (produit scalaire parfait), les deux condensateurs se réduisent à un seul égal à S_n . De ces principes on déduit la connectivité suivante :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que les lignes 2 et 7 de la matrice de connectivité sont des zéros. Par ce biais on "supprime" les branches 2 et 7 du circuit transformé.

Appliquée à la réunion des métriques des réseaux de la figure "connexion sur ligne", on trouve la métrique suivante :

$$g = \begin{bmatrix} S_n + a_0 & -S_n & 0 & 0 \\ -S_n & S_n + \eta & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & S_n + \eta & -S_n \\ 0 & 0 & -S_n & a_L + S_n \end{bmatrix}$$

qui traduit la propagation de l'émetteur vers le récepteur par l'intermédiaire de la ligne de facteur de transmission α et d'impédance itérative η avec un couplage optimum S_n . L'expression de ce couplage peut aussi se faire par l'intermédiaire des coefficients de qualité. Le coefficient de qualité Q est donnée par définition comme le rapport entre l'énergie emmagasinée (indice "in") sur l'énergie perdue (indice "ex") lors d'échanges avec l'extérieur. Soit avec les débits P d'énergie pour une période T[TI] :

$$Q = \int_T dt P_{in} \left(\int_T dt P_{ex} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

Les pertes peuvent s'opérer par des parois P_J , des dissipations dans les diélectriques P_d , des alimentations de circuits externes P_S , etc. Soit W_{in} l'énergie interne, la relation précédente devient en régime harmonique :

$$Q = \left| \frac{W_{in}}{\frac{1}{p} P_{ex}} \right| = \omega \left| \frac{W_{in}}{P_J + P_d + P_S} \right|$$

Q est appelé coefficient de qualité en charge, ω est la pulsation. On peut prendre l'inverse de ce coefficient de qualité et définir ainsi des coefficients de qualité "partiels" :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_J} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_S}$$

Le coefficient de qualité intrinsèque est donné par :

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_J} + \frac{1}{Q_d}$$

Alors :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_S} = \frac{1}{Q_0} (1 + \beta) \quad (3.9)$$

β est un coefficient de couplage défini par le rapport des coefficients de qualité intrinsèque et externe :

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_S} \quad (3.10)$$

Ce résultat, fondamental, permet de retrouver le coefficient de couplage dans des cas où il peut être difficile de l'obtenir par un calcul sur les potentiels. Le couplage électrique ramené par le condensateur peut, comme nous l'avons vu précédemment, être décomposé en deux mailles couplées par la valeur C de ce condensateur. L'avantage d'une telle représentation et de simplifier la prise en compte de nombreux modes. Sous cette forme, la métrique pour un guide et un mode m donné s'écrit :

$$g_{hf} = \begin{bmatrix} a + \frac{1}{C_{(m)p}} & -\beta(m) & 0 & 0 \\ -\beta(m) & \eta(m) + \frac{1}{C_{(m)p}} & \alpha(m) & 0 \\ 0 & \alpha(m) & \eta(m) + \frac{1}{C_{(m)p}} & -\beta(m) \\ 0 & 0 & -\beta(m) & b + \frac{1}{C_{(m)p}} \end{bmatrix}$$

Elle est similaire à la précédente avec des fonctions qui dépendent toutes du mode considéré pour la transmission. Avec : $\beta(m) = (C_{(m)p})^{-1}$. Cette même métrique devient en basses fréquences :

$$g_{bf} = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a + b \end{bmatrix}$$

Dans un format scalaire - vecteur, l'équation du système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} e_{\mu}^{\{bf\}} \\ e_{\mu}^{\{hf\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu}^{\{bf\}} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu}^{\{hf\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^{\{bf\}\nu} \\ k^{\{hf\}\nu} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

L'avantage de la projection du mode sur un résonateur et son couplage par une corde est de résoudre l'épineux problème du couplage et de la répartition d'énergie lorsque plusieurs modes sont présents. Cette répartition se fera automatiquement suivant ces différents coefficients. Par contre, on peut se demander comment déterminer dans le cas général les valeurs des condensateurs (ou des inductances, ce qui revient au même)? Les valeurs s'obtiennent en calculant les énergies stockées et, pour un mode donné, en égalisant ces énergies avec l'énergie contenue dans un volume de champ. Dans le cas d'une propagation guidée, les condensateurs et inductances sont linéïques. Dans le cas d'ondes stationnaires confinées, ces valeurs sont fixes.

Considérons les modes d'un guide rectangulaire de la forme : $E_x \sin(n\pi \frac{y}{Y})$. Dans une géométrie de section x,y et de propagation z , on trouve pour le mode m :

$$\frac{1}{2} C dz V^2 = dz \int_y \int_x dx dy \epsilon \left(E_x \sin \left(m\pi \frac{y}{Y} \right) \right)^2 \quad (3.12)$$

Tout calcul fait on obtient pour le condensateur linéïque :

$$C_{(m)} = \frac{\epsilon}{\chi} \left[y - \frac{Y}{2m\pi} \sin \left(2m\pi \frac{y}{Y} \right) \right]_0^{\frac{Y}{m}} = \frac{\epsilon Y}{m\chi}$$

La relation obtenue est ici simple. Plus le mode est élevé, plus il y aura de branches en chacun de ses ventres avec une propriété de condensateur. Le branchement de la source, visualisé par une corde virtuelle, peut être effectué en différent point du mode. Si l'on ne se trouve pas sur un ventre mais en un point y_0 éloigné du ventre, un coefficient d'affaiblissement dans le couplage égal à $\sin(m\pi y_0 Y^{-1})$ modifie l'amplitude de la fonction β [BAD].

Finalement, on s'aperçoit que la difficulté est de connaître les modes du champ. Ces modes connus, les couplages sont finalement plus simples à calculer et le reste de la topologie s'en déduit automatiquement.

3.3.2.2 Détermination des modes

La détermination des modes peut être analytique quand les géométries sont assez simples. Sinon, des méthodes numériques sont utilisables mais présentent aussi, sauf dans des cas simples, des défauts d'estimation des modes surtout pour leurs amplitudes, la prise en compte des pertes restant délicate. Une technique simple et intéressante a été élaborée dans le cadre de la thèse de Claude Gangnant[GAN]. Cette méthode comme les autres peut s'incorporer sans difficultés dans l'ATR de Kron[MR].

Mais comme précédemment, on désire ici théoriser un peu plus les principes d'établissement de ces modes, entre autres pour les besoins du paragraphe suivant.

Toute matière renvoie dans une proportion variée une partie de l'énergie qu'elle perçoit provenant d'un émetteur lointain. Nous avons vu que l'émetteur proche ou lointain pouvait être incorporé dans un formalisme unique dont un est une limite de domaine de l'autre (je ne parlerai pas de limite asymptotique car nous avons vu que topologiquement, c'est plus complexe qu'une asymptote à une équation). Soit une source transparente située en un point 0 d'un volume quelconque. Cette source rayonne un champ A_0 vers tous les points du volume et chacun de ces points reçoit une partie de ce rayonnement. Dans un référentiel centré sur cette source et scrutant en hauteur θ et azimut ϕ autour de la source pour une polarisation alignée sur son moment, on peut calculer une fonction G donnant le champ propagé vers tous les points de l'environnement de la source, incluant les vitesses de propagation en toutes directions (donc les retards) et les variations d'amplitude éventuelles du champ si la source n'est pas isotropique. Le champ reçu par chaque récepteur est : $A_0 G_{\theta\phi}$. Chaque récepteur réémet dans de nombreuses directions dont vers la source suivant une fonction $\Theta_{\theta\phi, \theta_0\phi_0}$. Ces réémissions s'échelonnent déjà intrinsèquement car les distances et vitesses entre les lignes de visées reliant la source aux récepteurs varient, mais en plus des récepteurs peuvent avoir des inerties dans le processus de réémission. Ensuite ces récepteurs peuvent à leur tour rayonner vers d'autres récepteurs qui eux-mêmes rerayonnent vers la source. Vu de la source on a donc une réception R de la forme :

$$R = \int_{\theta} \int_{\phi} d\theta d\phi G_{\theta\phi} A_0 \{ \Theta_{\theta\phi, \theta_0\phi_0} + \Theta_{\theta\phi, \theta_i\phi_i} \Theta_{\theta_i\phi_i, \theta_0\phi_0} + \dots \} \quad (3.13)$$

Ces réémissions retardées peuvent aussi provenir de couches plus éloignées et de frontières entre des milieux de propriétés de propagations différentes. Une autre partie de l'énergie R_a ne revient jamais vers l'émetteur et part vers d'autres récepteurs. La somme de ces deux contributions doit respecter le bilan en énergie du processus complet. Mais la part qui ne revient jamais à l'émetteur, si elle existe, est identique à un rayonnement de champ lointain. Dans ce cas, une résistance de rayonnement doit intervenir pour considérer ce rayonnement perdu par l'émetteur[COLIN]. Au contraire, la part qui revient à l'émetteur intervient comme une réaction, une impédance ramenée que voit la source branchée sur le milieu réflecteur. Dans le paragraphe précédent nous avons vu que cette impédance ramenée peut être modélisée par un résonateur accordé sur les modes de propagation possibles dans un guide. Dans une cavité sans ouvertures, aucune énergie ne peut fuir, si ce n'est celle dissipée par effet Joule dans les parois et les diélectriques. De fait, la résistance de rayonnement peut être calculée à partir de ces dissipations et le taux d'ondes stationnaires dans le volume doit faire le bilan entre ces énergies dissipées et stockées.

Le point remarquable est que la transmission de l'information sera optimum aux lieux où l'impédance ramenée présente une valeur adaptée pour l'émetteur. Par contre, du point de vue des ondes stationnaires c'est aux lieux des pôles que le taux sera le plus grand pour une source de ddp. Aux zéros, la source se trouve court-circuitée si c'est une ddp par contre dans le cas d'une source de courant, elle pourra exciter la structure. Ainsi, les modes effectifs dépendent des conditions de charge de la structure d'onde guidée, puisque l'impédance ramenée dépend des interactions de champs évanescents et des ondes réfléchies par l'extrémité, et du branchement et de la nature de l'excitateur. La détermination des modes est donc une tâche difficile. La stratégie est de déterminer les modes pour différents plans de polarisations et pour des stimuli précis. Ces hypothèses restreignent l'ensemble des modes possibles qui peut être très grand dans des structures compliquées.

S'appuyant sur l'équation généralisée de Helmholtz[GAB] :

$$(\Delta - \gamma^2) \mathbf{u} = 0 \quad (3.14)$$

où u est un champ vectoriel quelconque, on résout cette équation pour des coordonnées généralisées x^ν , avec x^0 coordonnée temporelle. Le champ est décomposé en ses dépendances suivant la direction de propagation x^3 et le temps, et les autres directions :

$$\mathbf{u}(x^\nu, x^0) = \mathbf{u}(x^1, x^2) e^{(px^0 - jkx^3)} \quad (3.15)$$

k est le facteur de propagation, complexe : $k = \beta - j\alpha$. On déduit ensuite de β la vitesse de propagation de la phase de l'onde : $v = \omega\beta^{-1}$ et la longueur d'onde dans le guide, en général différente de celle dans le vide : $\lambda_g = 2\pi\beta^{-1}$. L'étude d'une structure de propagation guidée revient donc au calcul du facteur de propagation k et à déterminer la fonction vectorielle $\mathbf{u}(x^1, x^2)$.

Dans la partie diélectrique du guide, le champ satisfait l'équation de Helmholtz. Si ce diélectrique est l'air, $\gamma^2 = -\omega^2\mu_0\epsilon_0$. Le laplacien est la somme de trois termes, chacun opérant sur une coordonnée d'espace. En remplaçant Δ par $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ dans l'équation de Helmholtz on obtient, compte-tenu de l'expression développée du champ :

$$(\Delta_1 + \Delta_2) \mathbf{u}(x^1, x^2) = (\gamma^2 + k^2) \mathbf{u}(x^1, x^2) \quad (3.16)$$

Habituellement on résout cette équation pour une géométrie donnée, en séparant de nouveau les variables pour une direction donnée, de la forme : $u^\nu(x^1, x^2) = v^\nu(x^1)v^\nu(x^2)$, puis en utilisant les conditions limites fixées par la géométries pour déterminer les modes possibles du champ.

En pratique lorsque l'on regarde les cartographies du champ, et en admettant qu'il possède une composante lamellaire et une composante rotationnelle[COLIN] (typiquement similaire au champ électromagnétique de Maxwell-Faraday), on s'aperçoit que le champ d'un mode donné s'établit dans le plan de polarisation suivant les deux axes possibles et que son dual s'établit dans la section droite de propagation sur une demi-longueur d'onde de guide. Autrement dit en électromagnétisme par exemple, un mode trans-électrique TE a les lignes de forces électriques dans le plan (x, y) si la propagation est suivant z et que du coup, les lignes de champ magnétique sont dans des plans (x, z) ou (y, z) ; soit les deux plans perpendiculaires au plan de polarisation (impliquant qu'il est aussi le plan de propagation). Mais la structure étant guidée et non l'espace libre, des charges sont présentes dans les parois et expliquent par leurs vibrations les pertes. Les lignes du champ lamellaire sont déterminées par la distribution des charges dans ces parois. Dans la structure d'onde guidée, les lignes de champ lamellaire du plan de polarisation se répartissent suivant une distribution de charge, comme dans un problème d'électrostatique. Démontrons ce point.

Si dans le plan propagé, le champ \mathbf{u} est dans un mode "transverse- u ", soit que son dual se développe dans les trois directions de propagation alors que u se développe uniquement sur les directions du plan dit transverse, perpendiculaire à la direction de propagation x^3 . De fait $u^3 = 0$ soit $\partial_3 u^3 = 0$. Or le champ dans le plan (x^1, x^2) doit correspondre au champ rayonné par les charges, puisqu'il leur est lié par l'équation de Coulomb $\text{div} \mathbf{u} = \alpha q$ et c'est d'ailleurs la spécificité de base des ondes guidées (α est un tenseur métrique).

Or le fait que le champ dans ses modes propres suive le champ électrostatique est une voie de résolution des modes. Car les pôles et zéros de l'impédance ramenée donnent les modes principaux - en tout cas les modes de coupures - et nous venons de voir que ces modes sont déterminés par les cartographie de champ statique dans le plan de propagation. Une fois connues les cartographies du champ lamellaire sur ses modes, la distribution spatiale du champ dual rotationnel s'en déduit. Notons que le mode tu_{nm} , t pour transverse, comporte n alternances de charges dans la direction x^1 et m alternances de charges dans la direction x^2 (pour le champ dual, il s'agira d'alternances de sens de courants dans les parois). La propagation s'effectue ensuite tant que la géométrie est constante. Des variations de géométries impliquant une modification des propriétés de propagation. Un volume compliqué peut ainsi être décomposé en sous-volumes suffisamment réguliers sur lesquels on peut exploiter des modes de propagation pour résoudre les interactions entre objets[COLIN]. Aux interfaces, on résout les parts transmises ou réfléchies des ondes en effectuant le produit scalaire des bases de modes c'est à dire les branchements entre des guides différents. On peut énoncer une méthode pour résoudre les cas compliqué en exploitant tous les résultats précédents.

3.3.2.3 Méthode de résolution pour les cas compliqués

La méthode présentée n'a pas pour prétention de résoudre précisément les cas envisagés (bien qu'elle en soit capable théoriquement, mais demanderait dans sa mise en pratique des efforts trop importants), mais de fournir des grandes lignes de comportement de façon rapide, tout en donnant également une compréhension des processus impliqués dans le système étudié.

1. Découper géométriquement le volume étudié en sous-volumes réguliers et en objets ponctuels de formes quelconques ;
2. déterminer pour chaque sous-volume, dans chaque plan de polarisation intuité utile, les cartographies de champs statiques sous forme de fonctions analytiques de l'espace, dans le système de coordonnées choisi et pour les plans de propagation en polarisations choisies ;

3. déterminer les variations de topologie des champs évanescents des objets ponctuels rayonnants insérés dans les sous-volumes ;
4. calculer les fonctions de couplage comme des produits scalaires des champs évanescents des objets rayonnants par les champs statiques des plans de propagation pour les polarisations retenues ;
5. calculer les fonctions de couplages comme produits scalaires des champs aux conditions limites entre les sous-volumes (aux frontières des champs évanescents et propagés) ;
6. résoudre le système couplé global.

La réalisation de la méthode reste compliquée et demande un investissement en temps de modélisation conséquent. Quel peut être l'intérêt d'un tel effort si l'on dispose de méthodes numériques éprouvées ? Tout d'abord, et contrairement à ce qui est parfois énoncé, une méthode numérique ne sera pas plus précise. Sait-on d'ailleurs donner sa précision à l'échelle d'un système réel ? Car les erreurs proviennent principalement de l'écart entre la forme réelle et le maillage. Mais surtout, une méthode numérique est une expérience virtuelle. Elle donne un résultat, mais aucune indication sur les processus qui y ont conduit. On peut d'ailleurs numériquement résoudre des problèmes pour lesquels on ne dispose pas de modèle analytique - on peut penser aux problèmes à N corps. L'effort est bien ici un effort pour la modélisation *ad minima*. Déjà sur des cas simples[MBDM][SL2][MR3], cette méthode a montré des résultats relativement spectaculaires comparés à ce qui aurait pu être obtenu différemment et a donné toute l'explication théorique sous forme d'une équation tensorielle pour ces cas. Alain Reineix a démontré l'utilisation de la diakoïptique dans le cas de cavités et les apports des modélisations par métrique des mailles dans des problèmes d'ondes guidées[RM].

3.4 Modification des trajectoires de l'espace libre en espace contraint

Entre l'onde libre et l'onde guidée deux différences s'imposent :

- les champs évanescents dans l'onde libre sont confinés à l'objet rayonnant alors que dans l'onde guidée ils sont indissociables de la matière guidante tout au long de la propagation ;
- le mode de propagation du champ libre et de son dual est transverse pur ; dans un système d'ondes guidées, le champ a un ou des modes de propagations attachés aux répartitions des charges en présence. En toute rigueur, un mode de champs guidés (u et son dual u^*) ne peut être transverse pur.

Détaillons deux points : la nécessité d'existence d'un dual au champ primal, et l'obligation pour l'onde guidée de ne pouvoir être transverse pur.

3.4.1 Tout champ a son dual

Un champ est avant tout associé à une force, soit directement par l'intermédiaire d'une masse, soit après dérivation. Nous avons vu que l'on peut définir un potentiel vecteur, dont la limite continue (ou composante temporelle) est un potentiel scalaire. Le champ dérivant du potentiel scalaire est covariant et lamellaire, déduit du potentiel par un gradient. Le gradient ne modifie pas la variance et la ddp ou le potentiel sont, nous le savons, covariants. Par contre, le champ dérivé du potentiel vecteur est un champ rotationnel covariant. On peut définir un potentiel vecteur contravariant en passant par la perméabilité qui est une métrique deux fois covariante. En se référant au potentiel du chapitre 2 en espace libre et contravariant, l'application du 4-opérateur $(\nabla, \nabla \wedge)$ au 4-potentiel hybride[MR2] (ψ, A^α) engendre le couple de champs (u, u^*) . Or si l'on considère la 4-vitesse $(1, v)[LL]^3$, on a l'égalité remarquable :

$$\begin{bmatrix} \psi \\ A^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0 e^{-\tau p}}{4\pi R} \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Où la matrice centrale pourrait être appelée *matrice de Green*. On peut remultiplier chaque terme scalairement par q fois la 4-vitesse pour trouver l'expression de l'énergie. Le premier terme représente l'énergie potentielle et le second l'énergie cinétique. Par ailleurs l'intégration sur l'espace puis la dérivation temporelle de ψ donne un flux contravariant via une métrique deux fois contravariante (cela revient à multiplier ψ par v puis faire $C\partial_t V$) alors qu'une opération similaire sur A^α donne une fém covariante via une métrique deux fois covariante. L'application de deux métriques de variances opposées aux deux termes du 4-vecteur potentiel hybride donne deux objets dont on sait, par construction originelle de notre topologie cellulaire (topologie basée

3. Dans cette expression de la 4-vitesse, $c=1$ et $\beta = (\sqrt{1 - v^2 c^{-2}})^{-1} = 1$.

sur les graphes comprenant les sommets, les branches, les mailles) qu'ils sont duaux intrinsèquement. De fait les deux champs qui en dérivent le sont aussi. Mais les points intéressants qui résultent de cette réflexion sont aussi que les deux énergies potentielle et cinétique sont duales et les perméabilité et permittivité ont bien leurs rôles de métriques dans des espaces différents du vide, c'est à dire que la présence d'un gaz de particules qui modifie les constantes μ_0 et ϵ_0 (ou leurs homologues pour la gravitation) intervient sur une modification de la métrique unitaire et justifie de la définition d'un potentiel du vide contravariant. La dualité finalement apparaît naturellement du fait que l'énergie cinétique est "vectorielle" puisqu'associée à un mouvement alors que l'énergie potentielle est scalaire (forme). On veut donc à un moment relier un mouvement au stockage d'énergie qui a créé ce travail. Soit connecter un déplacement et un nombre. On est dans la démarche de Hilbert[REY] et la dualité apparaît naturellement dans cet exercice.

Remarquons que l'idée d'un dual pour le champ de gravitation a été émise par Jean-Michel Rocard[JMR] mais n'a, a priori, pas donné lieu à plus d'exploitation. Cependant, nous verrons dans le prochain chapitre que les transformations relativistes engendrent des champs supplémentaires que l'on peut choisir duaux. H.G.Grassmann a expliqué la correspondance entre un espace de n-nombres et n-coordonnées, donnant à la géométrie un caractère non plus seulement analytique mais aussi algébrique, début de la topologie. La théorie des invariants a ensuite introduit une algèbre homologique que Kron utilisa dans ses travaux. Après 1945, le concept de dualité a été généralisé par l'introduction des catégories. On peut créer une catégorie duale en changeant les domaines et co-domaines de ses morphismes[ROTT].

3.4.2 De l'espace libre à l'espace contraint

Dans la méthode proposée pour modéliser les interactions dans des milieux non libres, les points 2 et 3 de la méthode mettent clairement en évidence le fait que l'environnement modifie les cartographies du champ en effectuant des sortes de repliements des lignes de champ vers les émetteurs. Ce point difficile est majeur pour automatiser l'insertion de systèmes dans des compartiments ou pour étudier les problèmes à N corps. Le paragraphe suivant analyse le rayonnement d'une ligne ouverte comme prétexte pour aborder certaines notions fondamentales pour comprendre ces processus.

3.5 Rayonnement d'une ligne ouverte

Une ligne est un "bicycle" ou "bimaille", dont on précise les conditions limites. On peut coupler cette topologie avec une antenne, intrinsèquement un "monocycle". La topologie résultante est donc un tricycle en admettant cette appellation sympathique pour les topologies simples. En prenant la ligne comme première structure et sans coupler la ligne et l'antenne, la métrique a l'allure suivante :

$$g = \begin{bmatrix} A & \alpha & 0 \\ \alpha & B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

On peut imaginer la ligne parfaitement adaptée et de longueur infinie, peu importe puisque si la ligne est parfaitement adaptée à ses extrémités, la fonction de couplage est un simple retard $e^{-\tau p}$ convergente quelque soit τ .

La question est de trouver la fonction de couplage, si elle existe, entre la ligne et l'antenne réceptrice ou émettrice. Du point de vue topologique, ces deux cas ne se différencient que par le vecteur des sources dont les composantes traduisent tantôt une alimentation de la ligne, tantôt une alimentation de l'antenne.

La détermination de la fonction de couplage est difficile, nous allons voir pourquoi et le rayonnement de la ligne adaptée est faible, on peut même se demander si la ligne adaptée rayonne ou si toute l'énergie est dépensée à transmettre l'impulsion ? Il est intéressant de voir que le couplage champ versus ligne reste un sujet difficile et inspirateur de nombreuses questions fondamentales. On étudie tout d'abord le problème inverse. Si l'on considère une ligne bifilaire illuminée par un champ électrique dans le plan des deux fils et dans la direction de la distance entre les deux fils, parallèles et distants d'une hauteur h, et si le champ est homogène sur toute la longueur de la ligne on peut écrire : $rot(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$. Si l'axe de la ligne est suivant x, la hauteur suivant y et la normale au plan des deux fils suivant z, on trouve $-\partial_t B_z = \partial_x E_y$. Suivant nos hypothèses et en négligeant la diffraction, tous les autres termes sont nuls. Tant que les homogénéités du champ ou de la ligne sont conservées, la dérivée partielle est nulle et le champ n'engendre aucune induction. En poussant le raisonnement, on dit que pour une ligne adaptée, les charges étant équivalentes à une ligne infinie, l'induction aux extrémités est nulle également. Mais dans ce raisonnement, on ne considère pas le champ total, mais juste le champ excitateur ou

autrement dit, on néglige la diffraction apportée par les fils ainsi que la perte d'homogénéité en propagation même dans la condition adaptée. Car pour cette condition, le champ exciteur à droite des charges ne voit plus les fils. Nous ne sommes donc pas dans une situation identique et les hypothèses d'homogénéité comme d'équivalence sont incorrectes.

Pour considérer la diffraction, on doit incorporer (c'est une méthode) les fém engendrées par le champ exciteur sur les condensateurs des cellules des télégraphistes puis calculer le réseau pour étudier l'induction transmise aux extrémités. On peut, comme nous l'avons montré précédemment, utiliser un réseau de N mailles couplées. En intégrant on retrouve finalement en harmonique la formule de Lee[LEE] donnant l'amplitude de courant de Laplace $I(\chi, p)$ sur la charge d'extrémité adaptée pour une illumination d'onde plane suivant notre hypothèse (la ligne est de longueur χ , d'impédance caractéristique z_c , de coefficient de propagation γ , le champ incident est $E_0(p)$) :

$$I(\chi, p) = \frac{E_0(p)h}{z_c e^{\gamma\chi}} (1 - e^{\gamma\chi})$$

Ce point suffit a priori pour affirmer qu'une ligne adaptée rayonne - même si nous verrons plus loin que son rayonnement est très faible (principe des antennes à ondes progressives). La formule de Lee a été confirmée par l'expérience de nombreuses fois, dont dans son ouvrage. Le théorème de réciprocité voudrait que, à l'inverse, si on alimente la ligne avec un générateur identique à celui qui alimentait l'antenne, on retrouve dans cette dernière un courant égal à ce qu'il était pour l'antenne en émission. La ligne étant passive, le théorème de réciprocité s'applique pleinement. Le fait que le potentiel aux sommets de chaque cellule soit constant sous homogénéité implique qu'il n'y a pas de courant entre les cellules pour l'illumination de face, d'où la dénomination "d'effet de poteau" traduisant le fait que c'est aux extrémités que la variation du champ est perçue. Mais cela ne signifie pas que le courant est nul. Simplement la somme des courants délivrés par chaque source se compense et donne zéro. Un argument simple démontre cela : si l'on n'illumine la ligne qu'en un point. La variation du champ est maximum et la fém induite engendre un courant qui va se propager symétriquement des deux côtés jusqu'aux charges d'extrémités. L'illumination de toute la ligne ne doit être - la ligne étant linéaire et passive - que la superposition d'illuminations locales.

Comment calculer le rayonnement ? En statique, le calcul a été fait par Laurin et Corson[LEC]. Une ligne infinie induit dans une boucle de hauteur h et largeur w , le fil et la boucle étant dans le même plan, une fém donnée par :

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \frac{d}{dt} I(t) \text{Log} \left[\frac{r_b (r_a + w)}{r_a (r_b + w)} \right]$$

La hauteur h est parallèle aux fils et la distance r_a sépare le fil le plus proche de la boucle du côté de cette boucle le plus proche du fil et r_b et la distance à l'autre fil. On en déduit une fonction de couplage b pour un échelon de temps de montée t_m :

$$b = -\frac{1}{I} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 h}{2\pi} \frac{1}{t_m} \text{Log} \left[\frac{r_b (r_a + w)}{r_a (r_b + w)} \right]$$

Ce calcul ne prend pas en compte le retard de propagation du champ entre les fils et la boucle. Si l'on rajoute ce facteur, les intégrales qui avaient la forme :

$$\int_{r_a}^{r_a+w} d\sigma_a \frac{1}{\sigma_a}$$

deviennent :

$$\int_{r_a}^{r_a+w} d\sigma_a \frac{e^{-\frac{p}{c}\sigma_a}}{\sigma_a}$$

Or la primitive de $x^{-1}e^{ax}$ ajoute au logarithme une série de termes qui, réduite au premier ordre est ax . En remplaçant par les bornes d'intégration ce terme s'élimine, montrant ainsi que l'expression reste valable même à une distance justifiant d'un retard de propagation.

$$a(r_a + w - r_a - (r_b + w) + r_b) = 0$$

Par contre, pour respecter la causalité cette induction arrive bien $(r_a + r_b + w)(2c)^{-1}$ plus tard. On peut donc mesurer le rayonnement de la ligne comme le couplage entre les deux fils parallèle infinis et la boucle de

réception. Toute la ligne dans ce modèle est parcourue par un courant identique et sa dépendance au temps se reporte en tout point de la ligne. Ce modèle n'est pas très physique, mais pose déjà une question : dans le calcul de Lorrain et Corson n'apparaît pas de pertes par rayonnement. L'énergie transmise à la boucle ne devrait-elle pas se retrouver dans la consommation vue par le générateur qui alimente la ligne ? dans la métrique, dès lors que la maille de l'antenne ne comporte pas de source, la réaction de l'antenne vers le circuit émetteur est de la forme :

$$-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}} \Leftarrow e'_1 = -z_{12}k^2 = -z_{12} \frac{z_{21}k^1}{z_{22}}$$

Si le couplage est symétrique, soit $z_{12} = z_{21} = b$, le rapport entre b^2 et z_{22} donne la contribution de la réaction sur l'amplitude complexe du courant de la maille émettrice. En multipliant le générateur de la maille émettrice par son courant : $e_1 k^1$ on trouve une contribution

$$-\frac{b^2}{z_{22}} (k^1)^2$$

Cette contribution doit être une partie de la résistance de rayonnement reportée. Mais ceci viendrait en contradiction de notre raisonnement précédent qui voulait que cette résistance soit intrinsèque. Si la largeur de spire est faible devant les distances au fil, la fonction de couplage tend vers zéro. En notant $r_a^+ = r_a + w$, $r_b = r_a + d$ et en travaillant dans le domaine des fréquences on trouve une fonction de couplage donnée par :

$$b = -j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{1 + \frac{d}{r_a}}{1 + \frac{d}{r_a^+}} \right)$$

A grandes distances r_a , d est aussi petit devant ces distances. En développant le logarithme en série ($\log(1 + \epsilon) \approx \epsilon$) au premier ordre et en remplaçant le résultat ($\epsilon + \epsilon^-$) on trouve finalement⁴ :

$$b \approx -j\omega \frac{\mu_0 h}{\pi} \frac{d}{r_a}$$

Ce qui est frappant est que l'ordre de grandeur de ce couplage n'est pas très éloigné de 1 pour 1 mètre de distance⁵, soit que le couplage évolue en $1/r_a$. Du coup, la perte reportée serait directement liée à la dissipation dans le circuit récepteur car le facteur du courant de maille émettrice est $(z_{11} - b^2 z_{22}^{-1})$, comme b est imaginaire, on trouve un terme positif qui s'ajoute à z_{11} et vient diminuer le courant k^1 . Prenons par exemple une boucle de cuivre de 1 mm de diamètre de fil, on trouve 6 mΩ de résistance de pertes. Si le fil est de longueur L (on s'éloigne de nouveau de notre hypothèse, la ligne étant considérée au départ infini), par exemple $L = 10$ m, on pourrait aligner 500 boucles sur la hauteur et à 1 m de distance, $2\pi 1000$ sur la circonférence. Soit au total trente millions environ de boucles consommant chacune 6 mΩ de pertes. La superposition des couplages étant linéaire, on peut sommer les N fém où l'impédance z_{22} intervient en dénominateur. On ajoute sur la maille source une série de la forme :

$$-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}} - \frac{z_{13}z_{31}}{z_{33}} - \frac{z_{14}z_{41}}{z_{44}} - \dots$$

Si tous les couplages sont identiques et proches de l'unité et si les boucles sont identiques également, on trouve :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{z_{ii}} \tag{3.18}$$

Comme N est énorme, on trouve une perte totale qui est impossible physiquement, de l'ordre de $3.10^6 \Omega$. Où est l'erreur dans le raisonnement ? L'approximation de la ligne non infinie ne peut expliquer cet écart. L'erreur pourrait venir de l'approximation sur la considération de l'impédance z_{22} comme purement réelle. Sans composante de réaction, donc dans le cas limite continu, cette approximation n'en est pas une et le modèle est exact, seulement dans ce cas, le couplage est nul ! On ne trouve donc pas de pertes reportées sur l'émetteur. A couplage non nul, il faut considérer l'inductance de la boucle qui joue le rôle de stockage de l'énergie reçue en

4. $\epsilon = \frac{r}{r_a}$, $\epsilon^- = \frac{d}{r_a^+}$

5. par exemple pour $d=1$ cm, $h=2$ cm, $f=1$ GHz, $r_a = 1$ m on trouve $b=1,00531$.

même temps que réaction au champ inducteur, et la perte locale de la boucle est en partie prise en charge par cette énergie stockée dans son inductance. Le report s'en trouve diminué drastiquement en hautes fréquences puisque le contributeur en impédance est de la forme :

$$\frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Ce résultat ne lève pas notre aberration, car tant que la fréquence n'est pas assez élevée, on retrouve des pertes trop importantes. L'erreur vient de ce que, en faisant l'hypothèse que l'on entoure la ligne d'une série très grande de boucles, on enferme la ligne et on brise la condition d'espace libre. On a créé une cavité et l'hypothèse de calcul des pertes par rayonnement n'est plus valide. On doit travailler dans ce cas sur une condition d'ondes en partie stationnaires. Cette stationnarité prendra en charge la consommation de toutes les boucles. Notons que, aussi grande que soit cette cavité, la stationnarité mettra plus de temps à s'établir mais existera dans tous les cas, sauf à ce que la distance engendre un mur de pertes telles que la réflexion deviennent négligeable, la surface de pertes "adaptant" l'onde incidente.

Si maintenant on utilise une démarche plus classique en intégrant la densité de puissance du champ magnétique issu des courants de la ligne sur les hauteur et circonférence du diagramme de rayonnement, on trouve une résistance de rayonnement R_{ray} donnée par :

$$R_{ray} = \left(\frac{\mu_0 c d L}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\mu_0 c} \quad (3.19)$$

On trouve une résistance de rayonnement qui est bien intrinsèque, dépendant uniquement de la géométrie de la ligne, et extrêmement faible, de l'ordre de $0,4 \Omega$. La ligne adaptée rayonne très peu légitimant ainsi les hypothèses de non rayonnement d'une ligne ouverte dans cette configuration. Le report du couplage sur la métrique se fait simplement : on doit "récupérer" le courant de la ligne. Dans ce cas, comme le courant est constant, il suffit de coupler l'une des deux mailles du Branin pour obtenir le résultat recherché. On choisit par exemple une métrique de la forme :

$$g = \begin{bmatrix} A & \alpha & 0 \\ \alpha & B & b \\ 0 & b & D \end{bmatrix}$$

Ces réflexions associées à celles du paragraphe précédent amènent à se demander à partir de quel remplissage passe-t-on d'un espace libre à un espace contraint ? Comment évolue la résistance de rayonnement en fonction de ce remplissage ? En fait, dès que des réflecteurs renvoient une partie de l'énergie perdue par l'émetteur en impulsions transmises à des photons (nous sommes dans l'hypothèse de champ lointain), la perte totale s'atténue. Or la définition du calcul de la résistance de rayonnement considère bien ce processus, si l'on prend en compte la variation du vecteur de Poynting en hauteur et azimut, voire en fonction de la distance. Car le bilan de pertes à l'émission doit donc être suivant notre raisonnement une moyenne des échanges d'impulsions entre les charges et le champ. On a bien instantanément une perte intrinsèque, ne contredisant pas par là notre modèle de résistance de rayonnement intrinsèque. **Mais cette perte est ensuite compensée par des restitutions de récepteurs, plus tard donc avec un temps de causalité.**

C'est ce critère qui permet de dire à partir de quand on est en espace libre et on quitte un espace contraint. En espace contraint, les ondes stationnaires sont engendrées par les charges dans les conditions limites et ne sont pas des simples sommes d'ondes planes (on définit l'onde plane comme un ensemble de photons). Nous donnons la démonstration de ce principe en annexe A - partie VIII.

Revenons au temps de charge, terme employé par exemple dans les chambres réverbérantes à brassages de modes : c'est le temps qu'il faut pour établir les ondes stationnaires dans le volume qui inclut le rayonnement et les réseaux. Partant de cette idée, il devient beaucoup plus intéressant d'exprimer le vecteur de Poynting comme une impulsion qu'à partir des potentiels. Suivant Jackson[JACK2] en partant de la variation d'impulsion mécanique totale s_m dans le volume :

$$\frac{ds_m}{dt} = \int_V d^3x (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.20)$$

Cette variation d'impulsion est transmise au champ. Or cette variation d'impulsion, suivant la première loi de Newton, doit être égale à une force. Si l'on intègre cette force sur le rayon d'expansion \mathbf{r} de la sphère de rayonnement, on trouve un travail et si l'on redérive ce travail dans le temps, on obtient l'intégrale sur l'angle

solide d'émission du vecteur de Poynting, égale à une puissance dissipée. Mais l'on peut rester plus général et écrire :

$$\frac{ds_f}{dt} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_t dt (R_{\mu\nu} k^\mu k^{*\nu}) = \int_V \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3x \quad (3.21)$$

Où l'on désigne par $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ la densité volumique d'énergie électromagnétique dans le volume de rayonnement, $R_{\mu\nu}$ la partie de la métrique réduite aux seules résistances de rayonnement. Mais cette expression est difficile d'emploi.

On sait que l'énergie mécanique est confinée dans les réseaux. Partant de l'équation 3.21, on peut multiplier par les longueurs des branches pour avoir le travail des charges, mais on sait que cela revient à l'énergie $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$ dont une partie est stockée, une autre dissipée, une autre rayonnée. En ne gardant que la partie rayonnée, on doit trouver l'équivalence en puissance en dérivant temporellement l'équation 3.22. Mais pour retrouver la formulation classique de la résistance de rayonnement il faut faire l'hypothèse que

$$\int_V \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3x = \int_S \int_r dS d\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} = \int_S dS \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$$

Alors la dérivation par le temps multipliée par le rayon d'expansion donne la célérité. En notant \mathbf{p} le vecteur de Poynting, on a bien $c \cdot \mathbf{g} = \dot{\mathbf{p}}$.

En développant $V = \Omega r$ (Ω est la surface de rayonnement), en précisant que la partie de la métrique adressant le rayonnement est purement diagonale et en réitérant l'opération on obtient bien :

$$\frac{1}{2} (R_{\mu\mu} k^\mu k^{*\mu}) = \int_\Omega d\Omega (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \quad (3.22)$$

Ce qui signifierait que pour pouvoir calculer la résistance de rayonnement, il faut s'intéresser au flux de puissance et poser le postulat que le vecteur de Poynting ne dépend pas de la distance. Mais cette hypothèse est tout à fait cohérente avec celle d'indépendance de la résistance de rayonnement. Car s'il y a présence de réflecteurs, l'émetteur ne peut pas savoir ce qui se trouve derrière, pas dans l'hypothèse de causalité et de champ lointain. Ce qui implique que les compensations des pertes par rayonnement par des réflecteurs de l'environnement doivent apparaître comme des fém qui compensent des fcém (forces contre-électromotrices) de rayonnement. Avec les effets de retard de propagation, le champ lointain impose une résistance de rayonnement qui varie dans le temps et peut disparaître après un retour d'énergie, mais dans un délai non nul, sans quoi on se retrouve dans une topologie de champs évanescents. Ainsi on a tout d'abord un champ lointain et une pertes par rayonnement, puis une onde stationnaire éventuelle et une modification des pertes par effets compensatoires.

Considérons par exemple deux petites antennes monopôles en regard dans le même plan, en interactions. La première rayonne. Si les antennes sont très petites devant la longueur d'onde, on peut approximer : $z_{11} = R_j + R_{ray}$. Négligeons les pertes par effet Joule R_j . La résistance de rayonnement vaut environ 73 ohms[OPI]. Supposons un gain proche de 1, la fonction de couplage est donnée par un raisonnement simple : supposons la première antenne alimentée par un générateur adapté. A la première fréquence de résonance, $k^1 = e_1 (146)^{-1}$. Le champ à une distance R est donné par :

$$E(R) = j\mu_0 c \frac{k^1 e^{-jkR}}{2\pi R}$$

A la réception, une fém est induite par le champ incident de valeur $0.5hE$ où h est la hauteur effective de l'antenne (sa demi-hauteur physique environ). Le milieu étant linéaire, on est à la même fréquence de résonance et : $k^2 = 0.5hE (146)^{-1}$ l'antenne étant aussi sur charge adaptée. En réitérant le processus pour la réémission de l'antenne de réception vers l'antenne d'émission, on trouve en s'arrêtant au premier ordre :

$$\left| \frac{e'_1}{k^1} \right| = \frac{\mu_0^2 c^2 h^2}{584\pi^2 R^2} \quad (3.23)$$

Lorsque l'on calcule ce module pour des valeurs représentatives, on trouve quelques milliohms de réaction. Cette réaction est donc du second ordre comparée à celle initiale pour émettre le champ. L'hypothèse de caractère intrinsèque de la résistance de rayonnement est donc ici renforcée.

Si des ondes stationnaires s'établissent entre les deux antennes (théoriquement, les conditions limites métalliques voudraient que de telles ondes apparaissent) on peut les modéliser par autant de moments comme nous l'avons montré précédemment. Or ces moments ont leurs propres pertes par rayonnement qui affectent

leur coefficient de qualité. Si le volume d'énergie stockée est trop faible, les ondes stationnaires s'évanouissent rapidement pour ne laisser place qu'à une onde plane. En fait on peut estimer la condition de maintien de l'onde stationnaire. Il faut que l'on soit en-deçà du régime critique, soit :

$$R_{ray} < \frac{2}{\omega_0 C}$$

ω_0 est la pulsation de résonance et C le condensateur donnant l'énergie stockée pour une polarisation par :

$$C \left(\int_h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{h} \right)^2 = \iiint_\nu d\nu \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

De cette relation on peut déduire un ordre de grandeur grossier pour ce condensateur pour un volume de la demi-longueur d'onde au cube. On trouve $C \approx 4,42 \cdot 10^{-12} \lambda$. Soit un régime critique fixé à 240Ω . Le coefficient de surtension est alors très faible et égal à $(0,083 R_{ray})^{-1}$ soit pour un moment dipolaire de l'ordre de 2. L'amortissement est très rapide et l'état de stationnarité ne sera pas maintenu dès que l'on s'écarte de la source et que l'énergie se trouve stockée sur un plus grand volume - de plusieurs demi-longueurs d'onde.

Finalement, sauf à remplir de façon conséquente l'espace environnant (cas des cavités), le rayonnement sera principalement maintenu pour des émetteurs suffisamment éloignés entre eux. Comme on l'a calculé, l'environnement peut être pris en compte sous la forme d'une autoréaction retardée de l'émetteur vers lui-même. Cela revient à courber une partie des lignes de fuite du rayonnement vers l'extérieur, vers la source. Lorsque cette courbure devient conséquente, la source récupère autant d'impulsion qu'elle en délivre et finalement, la résistance de rayonnement disparaît. Cet effet constitue une première modification des trajectoires du champ appliquée à la topologie du réseau émetteur. Ce principe s'applique à une interaction entre émetteurs et récepteurs, de sorte que l'on peut essayer de généraliser l'impact de l'environnement sur une topologie au départ caractérisée en espace libre. Cela revient aussi à "voir" la méthode proposée sous un jour un peu différent.

3.6 Modification des trajectoires du champ, gestion des pertes par rayonnement

Les géodésiques, principalement fixées par le champ de gravitation, désignent les lignes d'axes de coordonnées sur lesquelles on se déplace [BOUD]. La présence d'énergie électromagnétique perturbe au second ordre ces trajectoires de l'espace géométrique [BOUD]. Mais on peut s'intéresser aux trajectoires que suivrait une particule chargée, infiniment légère et qui tracerait ainsi des sortes de géodésiques pour les particules chargées. Les photons ne suivraient pas les mêmes lignes, n'étant pas chargés. C'est d'ailleurs un moyen simple pour distinguer les géodésiques de l'espace de celles que nous pointons, de l'espace électrique. Lorsque la présence de charges est importante, la "courbure" éventuelle de l'espace est du second ordre (la courbure des lignes du champ électrostatique est avant tout créée par le champ électrique et l'influence de la métrique de l'espace-temps n'est pas sensible dans le calcul de ces courbures). Tout d'abord parce que la réunion de fortes charges ne peut se trouver que sur des distances relativement petites, ensuite parce qu'à l'échelle où l'on peut sentir cette courbure, on est majoritairement dans l'espace vide.

Lorsque deux antennes interagissent dans l'espace vide, les trajectoires du champ suivent les géodésiques de l'espace. Dès que l'on place sur cette trajectoire des conducteurs, les lignes de visées sont impactées et suivent des trajectoires imposées par la présence de ces conducteurs. Par exemple la Terre avec l'ionosphère crée un milieu propagateur exploité par certaines ondes radio. Dans ce cas, ces ondes ne vont plus en "ligne droite" mais suivent le conducteur Terre - ionosphère. En faisant abstraction de ce conducteur, on peut considérer qu'il y a une modification de la trajectoire - de la "géodésique électrique" suivie par l'onde.

Une modification de géodésique électrique (ge) va se traduire dans un modèle de Branin par une modification des caractéristiques de propagation. Cette modification est facile à imaginer : on passe de modes transverses purs à une collection de modes diverses pour le champ d'interaction. Quid de la résistance de rayonnement ? Elle doit à son tour se transformer. Quelle est cette transformation ? Ce sont ces deux points que nous abordons dans les paragraphes suivants.

3.6.1 Modification des cordes virtuelles du modèle de Branin

Nous avons vu qu'un mode pouvait être vu comme un réseau de dimension infinie où la connexion n donne la direction des lignes de champ qui sont des solutions statiques dans un plan de propagation. Un excitateur est un réseau ayant sa propre métrique constituée des lignes de champ de l'excitateur baigné dans l'environnement

réflecteur (voir l'annexe G pour la démarche générale dans la modélisation des cavités). Les branchements des deux réseaux, c'est à dire les produits scalaires des modes donnent la fonction de couplage de l'excitateur vers l'environnement propagatif. Intrinsèquement, le Branin est associé au milieu de propagation à une CV qui remplace la CR du rayonnement en espace libre. On passe d'une métrique qui a pour composante extra-diagonale une fonction de Green d'espace libre, à une métrique qui a pour terme extra-diagonal des modes de propagations qui peuvent être nombreux avec chacun leurs vitesses propres. La CR se dédouble en autant de CV, chaque CV portant 1 mode de propagation. Le TOS de la structure de propagation donne le poids relatif entre la corde réelle et les cordes virtuelles (les cordes réelles se raccrochent au rayonnement propagé alors que les cordes virtuelles se raccrochent à des chaînes de circuits LC d'ondes stationnaires). La figure "changement de cordes" illustre ce mécanisme.

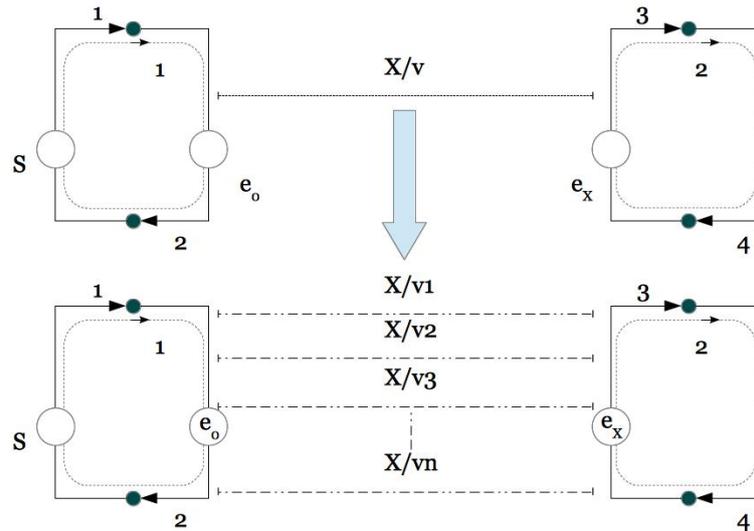


Figure "changement de cordes" : passage de ge libres à des ge par modes.

Cette transformation affecte les fonctions de couplages en propagation et celles sur les stimuli.

3.6.2 Modification de la résistance de rayonnement

Lors du calcul de la topologie de l'excitateur inséré dans un environnement réflecteur, on considère l'impédance ramenée par cet environnement sur l'excitateur. Au fur et à mesure que l'espace libre est masqué par les conducteurs rapportés par l'environnement, la résistance de rayonnement va être modifiée. Or cette résistance vient en série sur les stimuli. On passe donc d'une impédance qui est une résistance de rayonnement seule à une impédance qui s'enrichit de termes imaginaires provenant de l'interaction avec l'environnement dans le plan de propagation mais qui garde, en fonction de l'énergie reçue en retour, une part de pertes par rayonnement. Dans les cas très fermés, cette part devient négligeable et masquée par les pertes par conduction par exemple. On oublie alors cette contribution. La modification dans le plan de propagation engendre une corde virtuelle qui se retourne sur l'émetteur. La topologie de Branin se trouve augmentée de cette corde qui part d'une maille et y revient[RM].

3.6.3 Exemple illustratif

On considère d'une part une petite antenne constituée par un segment conducteur en extrémité d'un câble coaxial blindé d'autre part une structure cylindrique dans laquelle on va aménager une petite ouverture pour venir placer la petite antenne. La figure "modélisation guide - 1" montre ces éléments. Sur chaque objet on a tracé quelques unes des lignes de champ électrique. Pour le guide, il s'agit des lignes de champ d'un mode trans-électrique TE11.

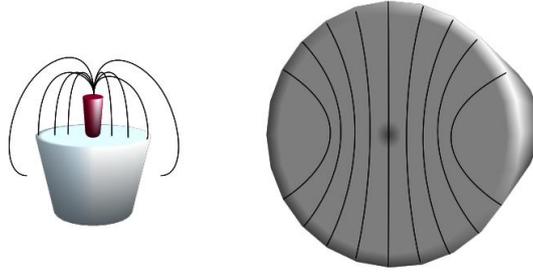


Figure “modélisation guide-1” : à gauche une petite antenne sur un coaxial, à droite un guide circulaire.

Chacun de ces objets a ses propriétés intrinsèques. L’antenne présente déjà par son extrémité ouverte une cartographie de lignes de champ électrostatique traduites par un condensateur. Notons C_a ce condensateur. Le guide présente pour ce mode des lignes de champ électrique et magnétique (non représentées) de cartographie connue. On veut insérer la petite antenne dans le guide pour l’alimenter. La première opération consiste à découper une petite portion de guide pour la connecter avec l’antenne. On suppose que la longueur d’onde de travail est celle de coupure du mode. La métrique associée à la petite antenne g_a , supposée alimentée par une source incluse et projetée dans l’espace des mailles est :

$$g_a = \left[R_{ray} + \frac{1}{C_a p_0} \right]$$

La métrique du guide ouvert g_o suit le schéma d’un Branin en mailles avec une connexion ouverte. On suppose l’autre extrémité du guide fermée et adaptée sur une charge R_L .

$$g_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_g p_0} + \eta_c & \alpha \\ \alpha & \eta_c + R_L \end{bmatrix}$$

Dans un premier temps on “découpe” une tranche de guide pour y placer l’antenne. Ce faisant on modifie l’environnement proche de l’antenne. L’opération (douloureuse) est illustrée figure modélisation guide-2”.

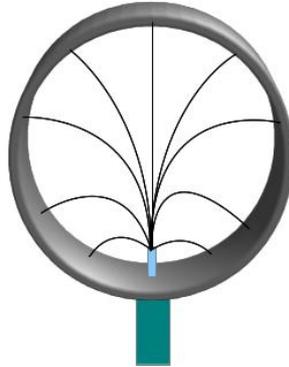


Figure “modélisation guide-2” : insertion de l’antenne dans le guide.

Les lignes de champ proche entre l’âme de l’antenne et le blindage du câble ne sont pas modifiées, par définition de leur proximité, l’insertion ne modifiant pas cette partie de structure. Par contre, des interactions électrostatiques s’ajoutent entre l’antenne et la tranche de guide. La topologie est donc modifiée dans les valeurs de la métrique. La valeur de condensateur de l’antenne est augmentée d’une quantité δ_C alors que la composante réelle de rayonnement est annulée. Cela revient à multiplier la métrique de l’antenne par une transformation :

$$\lambda = \frac{1}{R_{ray} (C_a + \delta_C) p_0 + \frac{C_a + \delta_C}{C_a}} = \frac{C_a}{C_a + \delta_C} \left(\frac{1}{1 + R_{ray} C_a p_0} \right)$$

Où l’on voit que la transformation correspond à un filtrage de l’antenne d’origine.

Il nous reste à connecter maintenant l’antenne insérée avec la partie propagation du guide. Cette connexion est réalisée par le produit scalaire des vecteurs champs, ou plus globalement, par l’intersection des lignes de

champ électrique. Les lignes côté antenne portant le champ source et celles côté guide donnant les trajectoires autorisées pour ce mode. Pour faire ce produit scalaire il faut se doter de fonctions géométriques des lignes de champ. Plusieurs techniques permettent de généraliser la description de trajectoires. Parmi les plus courantes on trouve les courbes de Bézier. Pour notre besoin on choisit une description basée sur le fait que l'on considère les courbes comme des portions de trajectoires curvilignes. La figure "trajectoire curviligne" montre le référentiel choisi.

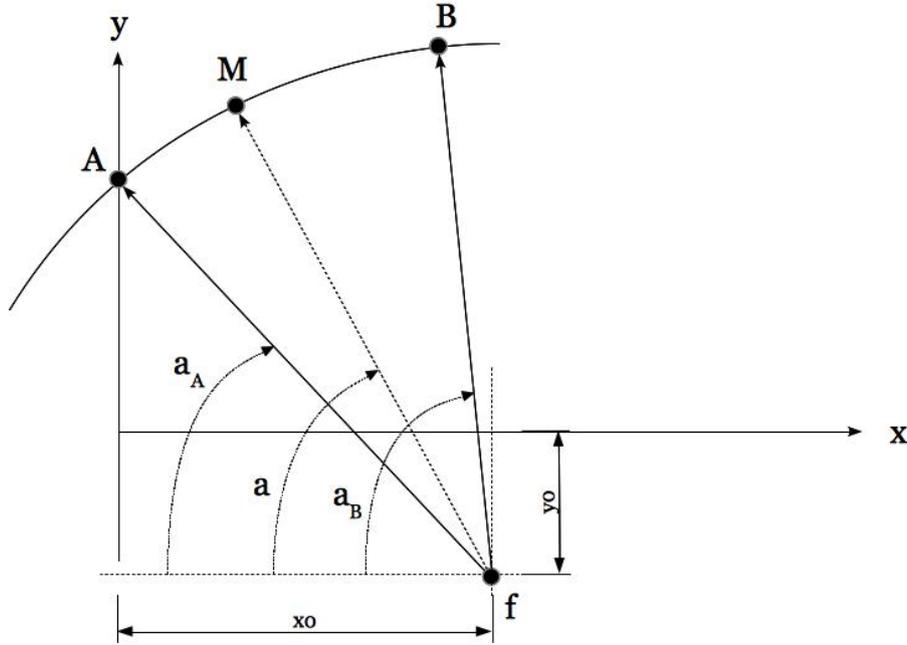


Figure "trajectoire curviligne".

La trajectoire est définie par trois points :

- un foyer f ;
- un point de départ A ;
- un point d'arrivée B .

Le foyer est donné par ses coordonnées dans le référentiel choisi, attaché au système étudié : $\vec{O}f = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y$.
 Connaissant les coordonnées du foyer et des points A et B , on obtient les angles du rayon vecteur de la trajectoire :

$$\begin{cases} \alpha_A = \text{atan} \left(\frac{y_0 + y_A}{x_0 + x_A} \right) \\ \alpha_B = \text{atan} \left(\frac{y_0 + y_B}{x_0 + x_B} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

Les points M_i de la trajectoire sont alors donnés par :

$$\forall \alpha_i \in [\alpha_A, \alpha_B], M_i(x) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \{ \cos(\alpha_i) \}, M_i(y) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \{ \sin(\alpha_i) \} \quad (3.25)$$

Deux triplets ayant les mêmes points de départ, arrivée et foyer caractérisent les mêmes trajectoires, c'est à dire les mêmes ensembles de points M_i . Pour savoir quelles lignes de champ inductrices communiquent leurs fém aux lignes de modes réceptrices, on doit calculer le recouvrement des lignes de champ. C'est une forme de produit scalaire appliqué à des trajectoires curvilignes. Soit t_1 et t_2 deux trajectoires, on calcule leur recouvrement • par :

$$\forall M_1 \in \mathcal{D}_1(t_1), M_2 \in \mathcal{D}_2(t_2), \dim(\mathcal{D}_1) = \dim(\mathcal{D}_2), t_1 \bullet t_2 = A(E) \int_{x_1 \in t_1} \int_{x_2 \in t_2} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 e^{-|x_1 - x_2|} \quad (3.26)$$

\mathcal{D}_n étant les domaines des deux trajectoires. $A(E)$ est l'amplitude maximum du champ. Il faut normaliser la somme, dans le cas d'une parfaite concordance des deux courbes, pour pondérer à 1 le recouvrement parfait.

Le principe consiste simplement à compter le nombre de points en commun entre les deux trajectoires, et si ce nombre est égal au nombre de points de la trajectoire qui porte le champ, le produit scalaire est égal à 1.

Lorsque l'on effectue ce calcul sur notre exemple, on trouve une pondération qui, appliquée à $C_a + \delta_C$ redonne à peu près δ_C . Cela signifie que l'énergie contenue dans les autres lignes de champ n'est pas directement couplée aux lignes de champ du mode. Cependant, elles seront exploitées dans la transmission du mode. On trouve donc un graphe tel que celui présenté figure "modélisation guide-3".

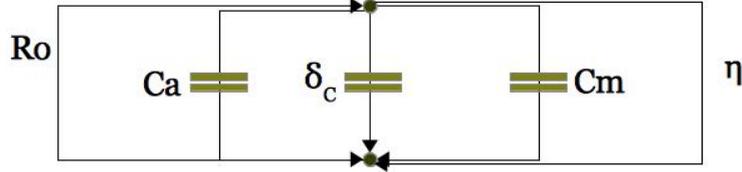


Figure "modélisation guide-3" : la branche de couplage est l'énergie partagée.

Le produit scalaire de nouveau apparaît comme un branchement (voir l'annexe F pour plus de détails). En notant : $\gamma = (\delta_C p)^{-1}$, la métrique de cette structure dans une base de mailles successives est :

$$g = \begin{bmatrix} R_0 + \frac{1}{C_a p} & -\frac{1}{C_a p} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_a p} & \frac{1}{C_a p} + \gamma & -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & \gamma + \frac{1}{C_m p} & -\frac{1}{C_m p} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_m p} & \frac{1}{C_m p} + \eta \end{bmatrix}$$

Or comme précédemment, nous gardons cette métrique invariante pour la topologie suivante montrée figure "modélisation guide-4".

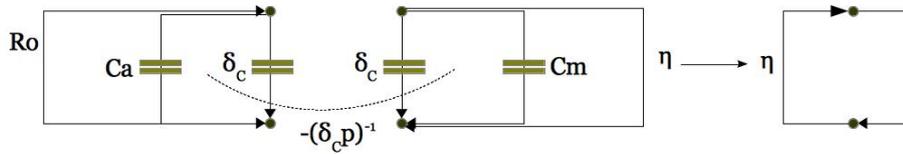


Figure "modélisation guide-4" : la propagation dans le guide est ajoutée à droite.

Nous avons ajouté sur ce graphe la propagation de l'onde transmise en extrémité de guide. L'impédance caractéristique se retrouve par le rapport des énergies magnétique et électrique stockées. Elle est aussi donnée par le rapport[BAD] :

$$Z_c = \frac{\lambda_g}{\lambda} \eta_0 G \tag{3.27}$$

Où λ_g est une longueur d'onde de groupe, η_0 l'impédance d'onde du vide et G une fonction géométrique issue des opérations d'intégrations des champs électrique et magnétique pour passer aux potentiels et courants. Pour le guide circulaire au mode TE11 on trouve par exemple de l'ordre de 400 Ω .

Toute l'information est disponible pour résoudre le cas présenté. Evidemment, pour chaque mode utile, il faut refaire le calcul du produit scalaire. De plus il ne faut pas oublier le report des fém retardées en extrémité de Branin (nous n'avons par rappelé ce point qui ne change rien aux réflexions précédentes). On se retrouve donc finalement avec une métrique, en bénéficiant du modèle de couplage par CV, qui a l'allure présentée figure "modélisation guide-5".

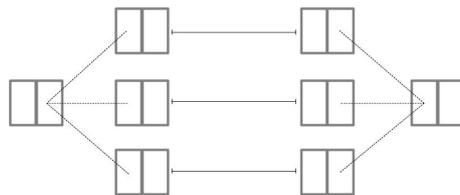


Figure "modélisation guide-5" : 3 couplages pour 3 modes.

L'avantage de cette structure est qu'il est facile d'y ajouter des couplages inter-modes dans le cas de milieux non linéaires, etc. Dans les cas linéaires elle peut être réduite en sommant toutes les contributions de Branin en parallèle en une seule fonction de couplage et transmission. Mais une autre façon de faire encore, consiste à travailler dans un format multimodes. Nous l'avons déjà utilisé pour travailler conjointement dans les modes continu et dynamique. De plus, si de nombreux modes sont utilisés, on pourra souvent recourir à une transformation de Fourier pour passer d'un vecteur temporel à un vecteur multimodal pour la propagation. Nous allons étudier ce formalisme pour voir ensuite son expression pour une propagation non linéaire.

Notons que pour la définition de la trajectoire, plutôt que de mémoriser le point foyer, on peut mémoriser le sommet de l'arc, ce qui évite les valeurs singulières (infinies) pour les trajectoires rectilignes.

3.6.4 Propagation multimodale

La capacité à transformer le modèle de Branin pour considérer le modèle continu est fondamental pour disposer d'un formalisme efficace dans le cas de comportements non linéaires où la composante continue influe celle en fréquence. Par contre, il est clair que la description en fréquence est plus simple pour modéliser les propagations par modes. Ce fait n'est pas bloquant, il est même très physique si l'on pense que les photons ne sont modélisés qu'en fonctions sinusoidales modulées.

Nous repartons de la ligne élémentaire présentée figure "ligne élémentaire". Nous supposons que la topologie très simple aux extrémités suffit à modéliser le couplage entre une source et un milieu de transmission pouvant exploiter plusieurs modes du champ. La métrique "de base" est la suivante :

$$g = \begin{bmatrix} R_0 + \eta & -\gamma \\ -\gamma & \eta + R_L \end{bmatrix}$$

Dans un format multimodal de dimension 3 (par exemple), chaque terme de la métrique va devenir une matrice 3x3. L'espace reste bien de dimension 2^2 , mais ses éléments ne sont plus des nombres mais des "ternions". On choisit par exemple comme mode zéro le continu, et deux modes de propagations suivant deux vitesses, etc. La métrique développée devient :

$$g = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} R_0 + R_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_0 + \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 + \eta_2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} R_0 + R_L & 0 & 0 \\ 0 & R_L + \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 + R_L \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3.28)$$

Chaque branche sous ce format devient un réseau de trois branches. On respecte la structure donnée pour la métrique g dans un format de nombre unique : les deux matrices de couplages sont identiques. Le vecteur des sources devient :

$$E = [S_{DC} \quad S_1 \quad S_2 \quad e_{DC} \quad e_1 \quad e_2]$$

Chaque courant inconnu a trois composantes : $k_{\{DC\}}^x$, $k_{\{mode_1\}}^x$, $k_{\{mode_2\}}^x$.

Dans une configuration non linéaire où par exemple le courant continu vient modifier les propriétés de propagation, on doit ajouter cette influence sur le courant de mode 1 (toujours par exemple), soit un terme de couplage de 0 vers 1. Posons ce terme égal à α . La source doit être égale à une fonction quelconque de ces termes dans leur ensemble. Dans un premier temps on écrit :

$$R_0 k_{\{mode_1\}}^1 + \eta_1^{\{mode_1\}} \left({}_1 2\alpha R_0 k_{\{DC\}}^1 \right) k_{\{mode_1\}}^1 - \gamma k_{\{mode_1\}}^2 = S_1 \quad (3.29)$$

En remplaçant $\eta_1^{\{mode_1\}} \left({}_1 2\alpha R_0 k_{\{DC\}}^1 \right)$ par une certaine fonction et en multipliant par $k_{\{mode_1\}}^1$ on va obtenir une fonction de ces différents paramètres et de leurs produits (on a des produits intermodaux). On retrouve l'expression générale de la métrique non linéaire : $g_1^{\{k\}} (\nu k^{\nu\{k\}}) = E_1^{\{k\}}$, k étant cette fois un mode quelconque. Cette équation générale, ici pour un mode, permet de modéliser des milieux de propagation non linéaires. On peut même imaginer des couplages entre des modes stationnaires et des modes propagés, traduisant ainsi des échanges non linéaires d'énergie entre des formes d'énergies différentes.

Si le produit scalaire appliqué aux topologies cellulaires revient à un branchement, on montre ici que le produit de réseaux revient à l'usage d'un format hypercomplexe pour les flux et sources, et revient de fait à un produit de matrices.

3.6.5 Rappel sur l'expression générale de l'impédance

Dans tous les cas, les impédances au sens généralisé (définies aussi dans le domaine temporel) sont une synthèse des formes d'énergies véhiculées dans les circuits électroniques. Les réflexions précédentes montrent des techniques permettant de traduire des phénomènes de propagation guidée. Suivant les situations les conditions limites peuvent se ramener à des impédances complexes faisant intervenir de nombreuses interactions. Il faut se rappeler le fait général que si un port alimente un milieu via une section de flux s' , que ce milieu soit contenu dans un volume de surface externe s et de normale tournée vers l'extérieur \mathbf{n} , on peut écrire l'impédance d'entrée sur ce port sous la forme $Z = R + jX$ avec (pour un volume v , une densité de courant dans le volume \mathbf{J} , une énergie magnétique stockée w_m et électrique stockée w_e) [JACKIII] :

$$\begin{cases} R = \frac{1}{|i|^2} \left(\mathcal{R} \int_v d^3x \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} + 2 \oint_{s-s'} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} + 4\omega \mathcal{I} \int_v d^3x (w_m - w_e) \right) \\ X = \frac{1}{|i|^2} \left(4\omega \mathcal{R} \int_v d^3x (w_m - w_e) - \mathcal{I} \int_v \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x \right) \end{cases}$$

3.6.6 Exemple de propagation non linéaire en format réel simple

Nous avons vu que la suite de cellules des télégraphistes peut être décomposée en une suite de résonateurs couplés. Imaginons une capacité linéique dont la valeur dépend de l'intensité du courant. Soit une impédance de la forme :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{C} + \epsilon |\bullet|^2 \bullet \right)$$

Où le point marque l'emplacement de la variable à laquelle l'opérateur "carré du module" s'applique. Considérons juste une cellule comme projection de la propagation. La métrique est égale à :

$$g = \left[\frac{1}{p} \left(\frac{1}{C} + \epsilon |\bullet|^2 \bullet \right) + Lp \right] \quad (3.30)$$

Dans cette modélisation une seule cellule traduit la propagation. Il suffit de calculer le flux k^1 qui est créé dans cette topologie simple et de le tracer dans un diagramme amplitude-temps pour représenter l'évolution d'une onde. Sa valeur en chaque instant peut représenter une intensité, mais aussi une amplitude dans l'espace, une impulsion, etc. La trajectoire d'un obus peut ainsi être représentée par un réseau unique où les flux représentent l'intensité de la vitesse dans deux directions par exemple.

Pour calculer la solution de ce système, on rappelle deux principes importants pour les systèmes temporels et non linéaires.

3.6.6.1 Dédution de la métrique à partir des fonctions de Laplace en temporel et covecteur des sources généralisé

Tant que l'on est sur des fonctions basiques de la forme ap ou bp^{-1} , le remplacement de p par l'inverse du pas de temps donne la métrique dans le domaine temporel. Pour des fonctions plus complexes, il peut être nécessaire d'intégrer la transformation inverse de Laplace.

Après transformation, certaines fonctions vont faire intervenir des valeurs passées des flux. Si N est l'instant courant et n l'indice de temps (on rappelle que l'on note entre parenthèses les échantillons temporels et entre accolades les modes), une fonction qui est une somme ou une série des termes de flux depuis le début de l'analyse temporelle du système jusqu'à l'instant N peut être décomposée en ses termes faisant intervenir l'instant courant et des termes ne le faisant pas intervenir (ne faisant intervenir que les termes antérieurs) :

$$g_\mu \left({}_\nu k^{\nu(n)}, \forall n \in [1 \dots N] \right) = g_\mu \left({}_\nu k^{\nu(n)}, \forall n \in [1 \dots N - 1] \right) + g_\mu \left({}_\nu k^{\nu(N)} \right) \quad (3.31)$$

Les termes ne dépendant pas de $k^{\nu(N)}$ sont connus, ayant pu être déterminés dans les instants précédents. On peut donc les reporter dans le vecteur des sources T_μ . Ainsi, si E_μ est le covecteur des sources propres :

$$T_\mu = E_\mu - g_\mu \left({}_\nu k^{\nu(n)}, \forall n \in [1 \dots N - 1] \right) \quad (3.32)$$

Et l'équation du système non linéaire est :

$$T_\mu = g_\mu \left({}_\nu k^{\nu(N)}, J^{\nu(N)} \right) \quad (3.33)$$

Où nous avons rajouté le vecteur des sources de courant J (mailles virtuelles).

3.6.6.2 Programmation de l'onde de Peregrine

On peut programmer l'équation 3.33 tout d'abord pour un régime linéaire où le coefficient ϵ de 3.31 est nul. Pour une excitation périodique du réseau on trouve une succession de sinusoides amorties comme présenté figure "Peregrine-1".

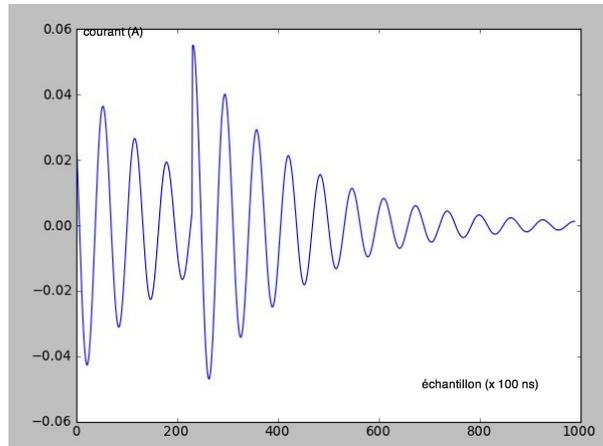


Figure "Peregrine-1", onde amortie entretenue.

Si maintenant on fait intervenir un terme non linéaire avec $\epsilon = 1,8 \cdot 10^{11}$ on obtient le comportement singulier de l'onde présentée figure "Peregrine-2". C'est le mécanisme des vagues scélérates⁶.

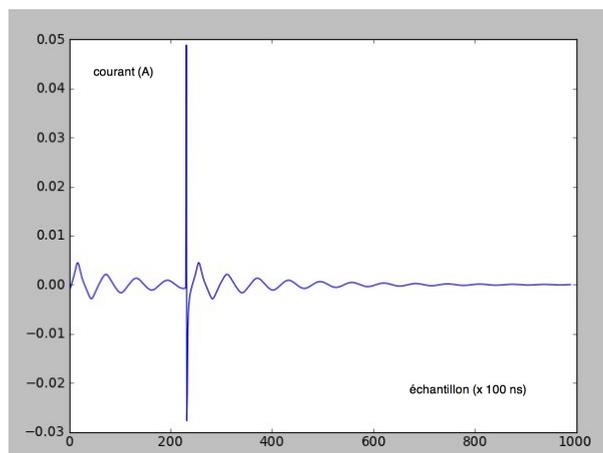


Figure "Peregrine-2" : effet net d'un terme non linéaire⁷.

3.7 Conclusion sur le chapitre 3

Dans ce chapitre nous avons abordé des points très particuliers sur les réseaux concernant leurs rayonnements. Lorsque ce rayonnement est en espace libre, les trajectoires du champ sont fixées par les géodésiques de la gravitation et les impulsions léguées aux particules porteuses du champ doivent être prises en compte dans le bilan des énergies dépensées en source. Usuellement en électromagnétisme, on reporte une résistance de rayonnement sur ces sources. On a alors vu que cette résistance pouvait être intrinsèque, mais non constante,

6. Il est intéressant de noter (http://fr.wikipedia.org/wiki/Vague_scélératerate) que les scientifiques qui avaient élaboré un modèle linéaire ne croyaient pas à l'existence de ces vagues. Tous les bateaux du monde de fait ont été conçus pour tenir des vagues de 15 m au plus. Depuis, le modèle du Soliton de Peregrine a été utilisé et des mesures ainsi que des suivis satellites ont montré l'existence de ces vagues. Les marins ne fabulaient pas! Or on peut relativement généraliser ce cas car la très grande majorité des modèles scientifiques sont basés sur des hypothèses de linéarité...

7. Ce résultat est obtenu pour les valeurs de composants suivantes : $L=1 \mu H$, $C=1 \mu F$, $R=1 m\Omega$, $\gamma = 1,8 \cdot 10^{11}$. La métrique est $g = L/dt + dt/C + dt\gamma(k^0)^2 + R$. dt a été réglé à 100 ns pour 1000 points d'échantillonnage.

dépendant entre autres du stimuli, de conditions de charge, etc. Si on modifie l'environnement de l'émetteur, on constate deux conséquences : la modification des lignes du champ rayonné et la modification de la résistance de rayonnement. On a montré que les modifications de la résistance de rayonnement n'intervenaient que pour un "enfermement" significatif de l'émetteur, retrouvant en cela les comportements observés avec des antennes. On a ensuite montré que si l'environnement devenait confiné, une transformation de la métrique incluant la résistance de rayonnement prenait de toute façon place dans une méthodologie pour déterminer les nouveaux modes de transmission. Dans ce cas, où le champ peut avoir à sa disposition de nombreux modes différents de propagation, on a pu voir qu'un format multimode était préférable à une multiplication des propagateurs de Branin, permettant même dans ce cas de façon élégante, la prise en compte de couplages intermodes. Enfin on a étudié le passage d'une propagation linéaire, la plus souvent utilisée, à une propagation non linéaire et l'équation tensorielle générale à résoudre dans le domaine temporel pour ces systèmes non linéaires.

La méthode de résolution proposée s'inspire des travaux réalisés par Abdelghafour Boutar et Alain Reineix (laboratoire Xlim) sur la méthode ILCM et de tous les travaux menés par Alain Reineix sur ce sujet[AR1][AR2][AR3].

La propagation étant présentée, il reste à synthétiser les travaux de Kron sur les transformations entre champs accélérés. C'est sans doute dans ce domaine à part celui de la diakoptique, que son oeuvre a été la plus remarquable mais malheureusement pas la plus connue.

3.8 Références du chapitre 3

- [BRA] F.H.Branin, "The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus". Symposium on generalized networks, 1966.
- [VAB] J.P.Vabre, G.Metzger, "Electronique des impulsions". Edition Masson, 1982
- [GAB] R.Gabillard, "Vibrations et phénomènes de propagation". Edition Dunod université, 1969.
- [LL] L.Landau, E.Lifchitz, "Théorie des champs, tome 2 de physique théorique". Edition MIR, 1989.
- [JACK] J.D.Jackson, "Classical electrodynamics". Edition Weyley, 1998.
- [EIN] A.Einstein, M.Solovine, "Quatre conférences sur la théorie de la relativité". Edition Lavoisier, 2005.
- [COLIN] R.E.Collins, "Field Theory of Guided Waves". Edition John Wiley & Sons. 1990.
- [BAD] R.Badoual, Ch.Martin, S.Jacquet, "Les micro-ondes. Tome I". Edition Masson, 1993.
- [CRO] A.Vander Vorst, "Electromagnétisme, champs et circuits". Edition de Boeck, 2002.
- [TI] F.Gautier & al., "Hyperfréquences, circuits et émetteurs de puissance". Edition des techniques de l'ingénieur, référence internet 42281, Janvier 2012.
- [GAN] C.Gangnant, "Contribution à l'étude de la cartographie et la statistique du champ électromagnétique dans une chambre réverbérante à brassage de modes par une méthode hybride FDFD/développement modal". Thèse soutenue à l'université de Limoges, N°16-2008, 27 Juin 2008.
- [MR] O.Maurice, A.Reineix, "Encadrement dans un formalisme MKME de modèle PEEC, MoM et BLT". Archive HaL hal-00684239, 31 Mars 2012.
- [MBDM] O.Maurice, P.Benjamin, F.Duval, B.Mazari, "Recherche de Techniques d'Evaluation de la CEM de Grands Systèmes par la Méthode de Kron et des Etats du Champ". Congrès JFMMA, Rabah - Maroc, 2007.
- [MR2] O.Maurice, A.Reineix, "Analyse Tensorielle des Réseaux Hybridée comme Outil Théorique pour la CEM et l'Electromagnétisme". .Congrès CEM2010, Limoges, 2010.
- [SL2] S.Leman, B.Demoulin, O.Maurice, M.Cauterman, P.Hoffmann, "Use of the Circuit Approach to Solve Large EMC Problems". Compte-rendu de l'Académie des Sciences, 2009.
- [MR3] K.El Fellous, O.Maurice, A.Reineix, "Etude de la pénétration du champ dans une cavité : du développement modal vers la modélisation circuit-méthode de Kron". Revue REE, URSI France, 2008.
- [JMR] J-M.Rocard, "Newton et la relativité". Edition Que sais-je ? - Presses Universitaires de France, 1986.
- [REY] H.Reinarhd, "Cours de mathématiques du signal". Edition Dunod Université, 1987.
- [ROTT] A.Rottman, "Gabriel Kron et la formulation d'une technique de résolution des systèmes complexes sur la base de la théorie globale du circuit électrique (électrodiakoptique)". Article du bulletin scientifique de l'institut Montefiore, 1988.
- [RM] A.Reineix, O.Maurice, P.Durand, F.Dubois, "On Mathematical Definition of Chords between Networks". Congrès EUROEM2012, Toulouse, 2012.
- [LEE] K.S.H.Lee, "EMP interaction : Principles, Techniques, and Reference Data". Edition Summa Book, Springer Verlag, 1986.
- [OPI] O.Picon, "Les antennes, théorie, conception et applications". Edition DUNOD, 2009.

- [BOUD] J.C.Boudenot, “Electromagnétisme et gravitation relativistes”. Edition Ellipses, 1989.
- [AR1] G.Andrieux, A.Reineix, K.El-Fellous, J.C.Joly, B.Pecqueux, “Etude du couplage d’un champ électromagnétique réverbérant sur une carte électronique contenue dans une cavité métallique. Congrès CEM2008, Paris.
- [AR2] K.El-Fellous, A.Reineix, O.Maurice, G.Andrieu, P.Hoffmann, “Etude de la pénétration du champ dans une cavité : du développement modal vers la modélisation circuit - méthode de Kron. Congrès CEM2008, Paris.
- [AR3] S.Leman, A.Reineix, F.Hoëppe, “Proposition d’un modèle hybride 2,5D pour la simulation du couplage entre antennes via une cavité par la méthode de Kron”. Congrès CEM2010, Limoges.
- [JACKII] J.D.Jackson, “Electrodynamique classique”. Edition Dunod, Paris 2001.

Chapitre 4

Interactions relativistes

4.1 Introduction au chapitre 4

Pourquoi s'intéresser à la relativité et en faire un chapitre dans le cas de la méthode d'analyse tensorielle des réseaux? D'abord parce qu'elle fait appel à des formats particuliers. Ensuite parce que certains caractères fondamentaux évoqués dans les chapitres précédents découlent des principes de la relativité; ces propriétés vont approfondir celles rattachées à des interactions fondamentales sur les réseaux. Ensuite parce que finalement, 107 ans après, l'insertion des principes relativistes dans notre éducation reste plus que timide, et le formalisme de Kron est peut-être un moyen d'y parvenir de façon paradoxalement plus simple. Le sujet est donc plus que majeur pour l'enseignement et l'une des tâches d'une thèse est d'y participer. La relation entre particules en mouvement et champ appelle aussi à une compréhension des phénomènes relativistes. Enfin, tout l'aboutissement de l'œuvre de Kron s'exprime dans les équations de la machine électrique qui mettent en jeu des champs accélérés. Par ailleurs il s'agit pour nous de transcrire les phénomènes relativistes en opérations sur des réseaux. On ne peut s'empêcher comme Kron et d'autres l'ont fait[BLSG], de faire le rapprochement. Mais ce rapprochement n'est pas trivial et demande une relecture depuis le début de l'histoire...

4.2 Rappel des principes de la relativité restreinte et application dans l'ATR

Le temps est un des concepts les plus difficiles de la relativité, restreinte ou générale. On conçoit assez facilement des transformations de l'espace, que l'on vit dans des expériences anodines. Ainsi "tout le monde" a vu une nuit un avion dont on ne perçoit que la lumière arriver de face, paraître immobile et se confondre avec une étoile. "Tout le monde" a entendu la déformation du son de l'avertisseur d'un train passant rapidement à un quai de gare. Mais le temps? Qui peut dire avoir ressenti une variation du temps? Certes, les temps sont nombreux et constituent un paramètre de la complexité que nous abordons en partie IV. Pierre Bricage a fait un exposé à l'AFSCET sur les horloges biologiques. On voit que la première question que l'on se pose est "de quel temps parle-t-on?". En fait peu importe! La difficulté peut être levée en ne considérant pas le temps et l'espace mais des intervalles de temps et d'espace, sur lesquels nous construisons notre espace-temps perceptible. Dès lors il ne s'agit plus de comprendre le temps, on peut admettre plusieurs temps possibles, mais de se doter d'un intervalle de temps qui respecte certaines propriétés et qui est arbitraire. De fait se dire que l'horloge dont on s'est dotée est perçue différemment par un autre observateur est un concept beaucoup plus compréhensible, d'autant que c'est un faux problème! Quand nous regardons une éphémère, sa durée de vie nous paraît ridicule et nous nous disons que c'est un être qui n'est pas gâté par la nature. Mais mettons-nous à sa place. Imaginons que par rapport à un observateur extra-terrestre nous soyons des éphémères. Qu'en savons-nous? Dans notre référentiel, la durée de vie nous semble assez longue (certes toujours trop courte dirons certains). Finalement la perception de l'espace et du temps n'ont de sens que dans un référentiel donné. Toute comparaison directe entre référentiels est dépourvue de sens.

Principe :

Nous nous dotons d'intervalles de temps et d'espace, d'échelles de mesures arbitraires à même de nous fournir une métrique de notre espace-temps propre dans notre référentiel.

4.2.1 Perception des phénomènes statiques

On considère des référentiels d'inertie. C'est à dire des référentiels animés de vitesses rectilignes constantes les uns par rapport aux autres. Nous posons ensuite le postulat fondamental de la relativité :

Postulats

La théorie de la relativité restreinte est fondée sur deux postulats dont nous reprenons les expressions données dans [YAD] :

Premier postulat : *dans les mêmes conditions tous les phénomènes physiques (mécaniques, électromagnétiques, etc.) évoluent de la même manière dans tous les référentiels galiléens, autrement dit, il est impossible, par les expériences effectuées avec un système de corps fermé, de déterminer si ce système se trouve à l'état de repos ou se meut de façon uniforme et rectiligne par rapport à un référentiel galiléen quelconque.*

Second postulat : *la vitesse de la lumière dans le vide n'est pas fonction du mouvement d'une source de lumière et est la même dans toutes les directions. Selon le premier postulat, cette vitesse est la même dans tous les référentiels galiléens, autrement dit, elle est une constante universelle.*

Notons qu'ici nous ne parlons que de la vitesse de la lumière dans l'espace vide, donc des photons, et de tous les référentiels, sans spécifier s'ils sont inertiels ou non.

Considérons deux référentiels d'inertie Q et T en vitesse relative l'un par rapport à l'autre. T peut être un train et Q un quai de gare. Dans le train on mène une expérience simple : on compte le temps que met une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière pour faire un aller-retour d'une distance D_T perpendiculaire au plancher du train. Le temps d'aller-retour pour un observateur dans le train est :

$$t_T = \frac{2D_T}{c} \Rightarrow \frac{D_T}{t_T} = \frac{c}{2}$$

Vu du quai, la trajectoire de la particule va effectuer un triangle et l'on trouve pour un train se déplaçant à la vitesse v :

$$t_Q = \frac{2}{c} \sqrt{D_Q^2 + \frac{v^2 t_Q^2}{4}} \Rightarrow \frac{D_Q}{t_Q} = \frac{c}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow \frac{D_T}{t_T} = \gamma \frac{D_Q}{t_Q}$$

avec $\beta = vc^{-1}$ et $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$.

On trouve qu'une mesure effectuée sur le quai se trouve pondérée d'un facteur γ pour retrouver le résultat de l'observateur qui mène l'expérimentation [FEYC]. Ce facteur se déduit de l'égalité des deux calculs, car la vitesse de la lumière étant posée constante, ces deux calculs doivent être équivalents. Or ce facteur doit être appliqué à toute mesure réalisée dans le train et vue depuis le quai. Ainsi, la coordonnée d'un point du train est donnée vue depuis le quai par : $x_Q = x_T - vt_Q$. Soit : $x_T = x_Q + vt_Q$. Et en appliquant notre facteur précédent :

$$x_T = \gamma (x_Q + vt_Q) \quad (4.1)$$

Revenir dans le référentiel du train est intéressant a priori, car c'est un référentiel où la vitesse de déplacement est nulle, donc plus simple à analyser. Par contre l'observateur du quai est l'observateur "naturel" au sens qu'il n'a pas de contraintes particulières d'emplacement vis à vis de l'expérience qui est menée. v est la vitesse relative du référentiel d'inertie où l'expérience est menée à vitesse inertielle nulle et du référentiel "naturel". De ce référentiel naturel au référentiel à vitesse d'inertie nulle (on appellera comme cela le référentiel où est menée l'expérience - le train - où RAVIN - *référentiel à vitesse d'inertie nulle*), on doit appliquer une transformation qui comprend un retard - traduisant le mouvement du RAVIN par rapport au repère naturel (RENAT), et une rotation (γ) [PK].

On peut se demander si une telle transformation est applicable aux quatre composantes d'espace et de temps ? Or pour adopter un format qui intègre dans le flux l'espace et le temps, il faut que ces quatre grandeurs soient homogènes en dimension. Comme la vitesse de la lumière est invariante quel que soit le référentiel choisi, elle constitue une constante privilégiée pour homogénéiser ces dimensions. On peut soit multiplier le temps par c soit diviser la distance par c . On sait donc que l'on doit manipuler un format qui comprenne ct et x, y, z . En notant x^ν ces quatre dimensions avec l'indice 0 réservé au temps par convention, notre relation précédente devient :

$$x^{k\{T\}} = \gamma (x^{k\{Q\}} + \beta x^{0\{Q\}}) \quad (4.2)$$

k valant 1, 2 ou 3 et donc $x^0 = ct$.

Le principe est de revenir dans des conditions d'observations "calmes", intrinsèques presque! Ce repère constitue l'espace de travail. On peut admettre ainsi que toute grandeur A observée dans le RENAT se ramène au RAVIN par le biais d'une transformation, appelée transformation de Lorentz telle que :

$$\begin{cases} A^{0\{T\}} = \gamma (A^{0\{Q\}} + \beta A^{k\{Q\}}) \\ A^{k\{T\}} = \gamma (A^{k\{Q\}} + \beta A^{0\{Q\}}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Suivant Landau[LL], on peut définir un "4-vecteur" (A^0, A^k) en n'oubliant pas que nous travaillons dans un format spatial (ct, x, y, z) .

Sachant définir un espace et une transformation, on se demande si l'on peut construire un mécanisme similaire à l'ATR avec un espace dual? La dimension (x^0, x^k) se rapporte à une longueur et nous la relierons ensuite à une branche. De fait, on peut tout de suite penser au bord de cette branche dont l'écart redonne cette longueur. Ainsi dans cette représentation, on peut trouver un dual qui se rapporte aussi à une longueur. Soit (A_0, A_k) ce dual, quelle est la transformation qui s'y rattache?

Partant de l'idée acceptée qu'une métrique g relie le covecteur dual et le vecteur (chapitre 1). On écrit d'abord le lien entre grandeurs transformées : $A^\nu = \Lambda^\nu_a A^a$. Si une métrique existe, elle peut être appliquée au deux termes : $g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_a A^a$. Le produit de gauche donne le dual, par définition. Appliquons à gauche et à droite la transformation inverse : $\Lambda_b^\mu A_\mu = \Lambda_b^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_a A^a \Rightarrow \Lambda_b^\mu A_\mu = g_{ba} A^a = A_b$. Le dual suit donc une transformation inverse de celle du vecteur. En effectuant cette inversion de Λ on trouve :

$$\begin{cases} A_{0\{T\}} = \gamma (A_{0\{Q\}} - \beta A_{k\{Q\}}) \\ A_{k\{T\}} = \gamma (A_{k\{Q\}} - \beta A_{0\{Q\}}) \end{cases} \quad (4.4)$$

L'invariant apparaît alors implicitement : $(A^0, A^k) \cdot (A_0, A_k)$ mais pour trouver sa valeur il faut se doter d'une métrique. On peut essayer, comme dans le cas de l'ATR de considérer la forme linéaire sur \mathbf{x} comme un potentiel dont le gradient donne le produit de \mathbf{x} par un champ arbitraire unité. Dans notre cas comme on conserve l'observable A la métrique devient :

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

L'invariant est : $g_{ab} x^a x^b = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ en coordonnées cartésiennes. De par le changement de signe dans la transformation, on peut en séparant les composantes temporelle et spatiale dans les 4-vecteurs et en faisant apparaître le vecteur classique, définir le vecteur par : (A^0, \mathbf{A}) et le covecteur par : $(A_0, -\mathbf{A})$ [LL].

4.2.1.1 4-vitesse

Les 4-vecteurs tels que nous les avons définis précédemment sont très pratiques pour les calculs et l'obtention d'une transformation unique, mais pas toujours très intuitifs. On peut cependant facilement revenir à des 4-vecteurs "ordinaires" en divisant la composante temporelle par c . Mais dans ce cas, on perd l'homogénéité de dimension.

En partant des infinitésimaux comme mesures on peut leur appliquer les transformations de Lorentz. Pour un référentiel en déplacement dans la direction x^3 (z), on trouve (on considère un référentiel en déplacement relatif à la vitesse V) :

$$\begin{cases} dx^{1,2\{i\}} = dx^{1,2\{v\}} \\ dx^{3\{i\}} = \gamma (dx^{3\{v\}} + \beta dx^{0\{v\}}) \\ dx^{0\{i\}} = \gamma (dx^{0\{v\}} + \beta dx^{3\{v\}}) \end{cases} \quad (4.6)$$

en notant cette fois $\{i\}$ le référentiel RAVIN ou "intrinsèque" (je sais que le terme choquera certains lecteurs du fait qu'il contredit justement l'absence de référentiel absolu en relativité restreinte. Mais le terme intrinsèque signifie juste ici le référentiel où est effectué l'expérience.) et $\{v\}$ le référentiel RENAT qui voit la vitesse de déplacement de l'expérience¹. Des transformations des différentielles on peut en déduire la 4-vitesse, il suffit de

1. Ce repérage est intéressant car quoiqu'on en dise, ces notions ne sont pas naturelles du tout. Or il y a bien quelqu'un qui mène l'expérience, et la mener depuis le quai serait quand même difficile, et quelqu'un qui observe l'expérience depuis n'importe où. Vu sous cet angle avec cette notion d'expérience, on repère naturellement deux référentiels qui sont de fait différents et il n'y a aucune ambiguïté dans les interprétations des transformations et leurs associations.

diviser chacun des termes en dx^k par $c^{-1}dx^0$. La première composante de la 4-vitesse se déduit du rapport de dx^0 et $dt : c$! En effectuant les divisions on trouve les composantes du vecteur vitesse :

$$v^{1,2\{i\}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{v^{1,2\{v\}}}{1 + \beta \frac{v^{3\{v\}}}{c}} \right), \quad v^{3\{i\}} = \frac{v^{3\{v\}} + V}{1 + \beta \frac{v^{3\{v\}}}{c}} \quad (4.7)$$

Le déplacement relatif de vitesse d'amplitude V étant dans la direction 3 (z), on voit que la vitesse se transforme de façon différente suivant qu'elle soit parallèle ou perpendiculaire au déplacement. Dans le sens du déplacement, la vitesse subit une contraction. Il semble logique qu'à mesure que l'on se rapproche de la célérité, la vitesse effective croît de moins en moins pour ne pouvoir au final dépasser la célérité. Les composantes perpendiculaires subissent cette contraction, plus le facteur correctif que nous avons obtenu dans l'expérience de départ.

4.2.1.2 4-potentiel et vision de la statique

Le champ potentiel scalaire ou lamellaire, découle de l'énergie potentielle. Il est donc lié à une masse. Au contraire le champ potentiel vecteur, rotationnel, découle du produit d'une masse par une vitesse ; de l'énergie cinétique. On sait par ailleurs que les composantes d'un 4-vecteur sont homogènes en dimension. Si l'on multiplie la masse (ou charge) par la 4-vitesse et par un 4-vecteur (ψ, \mathbf{A}) on trouve un 4-vecteur $(qc\psi, qv\mathbf{A})$ qui n'est pas homogène en dimensions et dont le premier terme est l'énergie multipliée par la célérité. On voit tout de suite qu'il faut créer un 4-vecteur potentiel :

$$A^\mu = \left(\frac{\psi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (4.8)$$

A ce moment là on a bien le produit $qv^\nu A_\nu$ qui donne la différence des énergies potentielle et cinétique, soit le lagrangien $(q(c, v) \cdot (\psi c^{-1}, -\mathbf{A}) = q\psi - qvA)$. Cette expression est fondamentale. Entre autre, connaissant le 4-vecteur champ, on peut observer un point remarquable. Un champ ψ mesuré dans une expérience dans le référentiel i donnera vu par un observateur de v le champ :

$$\gamma \left(\frac{\psi^{\{v\}}}{c} + \beta A^{k\{v\}} \right) \quad (4.9)$$

(nous notons entre accolades le référentiel d'où est perçue la grandeur). Soit plus seulement le champ statique ψ mais également un champ rotationnel. Ce résultat donne la perception d'un phénomène statique depuis un observateur en dehors du référentiel de l'expérience. Le caractère non divergent de A apparaît dès que l'on calcule $\nabla \wedge \mathbf{A}$ dont la composante $\partial_2 A^3$ est non nulle forcément, puisque même dans le cas d'un déplacement uniforme, le départ engendre une dérivée. Alors que le rotationnel de ψ est forcément nul de par le caractère lamellaire du gradient du potentiel scalaire et sa nature de dérivée de l'énergie potentielle dont on sait que le travail sur un parcours fermé est nul. Ce point est l'explication couramment donnée pour expliquer l'origine du champ magnétique, l'existence de charges magnétiques n'ayant jamais été trouvée. Des dipôles magnétiques ont été mis en évidence, mais toujours comme extrémités d'un solénoïde ou comme lieu de convergence d'axes de solénoïdes.

4.3 Interprétation des flux de réseaux

Un point porte une information de masse. Dire que cette masse se déplace c'est dire en relativité que le référentiel dans lequel on peut observer cette masse au repos est en mouvement vu d'un autre référentiel. Cette masse engendre un champ suivant la loi de Gauss et, comme on l'a vu précédemment, le mouvement engendre un champ rotationnel. Si le déplacement du point se fait sur un domaine qui est une branche, finalement ce déplacement de matière engendre un flux à l'origine du champ rotationnel. Le bilan de masse sur le parcours est déduit du travail du gradient du champ scalaire. On peut donc voir tout flux de branche comme une perception relativiste d'une masse - d'un sommet en déplacement. Comme l'espace des branches est l'espace naturel dans l'ATR, on peut se demander s'il ne serait pas plus intéressant de noter les coordonnées d'espace sur les branches plutôt que sur les sommets via la connexion η précédemment utilisée dans l'espace des moments (connexion entre les sommets et leur plongement dans un espace géométrique) ? En fait on peut définir pour les branches un 4-vecteur impulsion simplement par $qv^\nu \rightarrow q(c, \mathbf{v})$. Le 4-vecteur flux s'en déduit :

$$I^\nu = (qc, \mathbf{I}) \quad (4.10)$$

On voit que la connexion η reste utile car c'est elle qui fournit le point d'appui de la branche dans l'espace de référence. Le 4-vecteur flux ne fournit que le vecteur flux et la charge de sommet. On introduit plus souvent en relativité restreinte le 4-vecteur densité de courant : $J^\nu = (\rho c, \mathbf{J})$ [BOR]. Ce 4-vecteur densité de courant semble cohérent avec le 4-vecteur courant. On trouve pour la composante scalaire :

$$\frac{\psi}{c} = \mu \frac{qc}{4\pi R}$$

Cela généralise la perméabilité magnétique comme métrique commune. La composante temporelle du 4-courant renvoie à la jauge en charge, la composante continue que nous avons déjà introduit dans certains des formats précédents.

A chaque branche on peut donc associer un 4-vecteur flux I^ν dans un format de 4-vecteurs que nous appellerons "format de Landau". Chaque branche k de flux I^k est ainsi implicitement associée à ce type de 4-vecteur. On sait transformer ces 4-vecteurs, donc on sait comment modifier une branche en relativité restreinte lorsqu'elle est vue d'un référentiel en mouvement. Cette branche portant une trajectoire de particule rectiligne, cela revient à savoir traduire des trajectoires de particules en branches dans un graphe en mouvement rectiligne uniforme. De même on dispose des formules de transformation des longueurs pour modifier la topologie - la connexion η pour un réseau en mouvement relatif rectiligne, comme pour modifier les lignes de champ associées aux cordes entre deux réseaux en mouvements relatifs rectilignes. Les cordes portant des champs libres, ils subissent la transformation vue sur le 4-potentiel. Il reste cependant un point à résoudre : la vue d'une circulation fermée de flux. En effet si l'on considère une maille parcourue par un courant dans un référentiel au repos, comment ce courant est-il perçu dans le référentiel de l'observateur ?

4.3.1 Un réseau ne peut appartenir qu'à un seul référentiel

Un réseau constitué de branches connectées ou de cordes entre ces branches telles que sa caractéristique topologique a un terme $\mathcal{R} = 1$ appartient forcément au même référentiel d'inertie. De fait, tous ses constituants sont dans le même système de coordonnées et ont la même horloge. Ainsi, une transformation de Lorentz appliquée à une corde entre deux réseaux ne peut s'appliquer qu'à deux réseaux séparés, disjoints (non connexes) et seulement couplés par une corde réelle. La corde virtuelle, qui remplace une succession de branches connectées ne peut pas de fait appartenir à un autre référentiel que celui du réseau, comme les cordes de champ proche.

Principe :

un réseau connexe suffit pour définir un référentiel inertiel.

Il en découle un autre principe important. Une branche étant attachée à un espace local définissant les grandeurs d'espace-temps de son vecteur flux, cet espace est entre autre pourvu d'un temps t . Si deux branches connectées qui appartiennent au même réseau sont, de par le principe précédent dans le même référentiel, elles ont le même temps. Cette caractéristique suffit à énoncer :

Principe :

on ne peut relier des branches suivant une incidence de sommets que si leurs flux ont la même composante de temps.

4.3.2 Bilan de transformation pour un flux fermé

On veut faire un premier exercice d'étude de transformation d'une maille. On se place dans l'approximation $qv = I$ (ou autrement dit on normalise l'incrément de distance), soit en confondant courant et impulsion électrique. Considérons quatre branches comme représenté figure "maille de Lorentz".

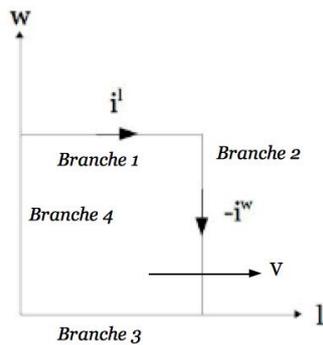


Figure “maillage de Lorentz” : quatre branches réunies en carré.

Numérotons de 1 à 4 les quatre branches de cette maille carrée. La première branche horizontale (celle du haut) s’écrit si la maille se déplace à la vitesse V dans la direction l :

$$qv^{1\{i\}(l)} \rightarrow q \frac{v^{1\{V\}(l)} + V}{1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)}} \quad (4.11)$$

La branche horizontale du bas s’exprime par :

$$qv^{3\{i\}(l)} \rightarrow q \frac{-v^{3\{V\}(l)} + V}{1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)}} \quad (4.12)$$

Pour la branche verticale de gauche nous avons :

$$qv^{4\{i\}(\omega)} \rightarrow q \frac{v^{4\{V\}(\omega)}}{\gamma (1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)})} \quad (4.13)$$

Notons que dans les indices en exposants on affiche le numéro de la branche, l’espace de description et la direction qui est une composante dans le format entre parenthèses, suivant notre convention.

Pour la branche de droite verticale nous obtenons :

$$qv^{2\{i\}(\omega)} \rightarrow q \frac{-v^{2\{V\}(\omega)}}{\gamma (1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)})} \quad (4.14)$$

Ces quatre branches sont connectées à une maille unique par une connectivité $[1, -1, -1, 1]$. Si z_1 et z_2 sont les impédances des deux branches formées chacune de deux branches du carré perpendiculaires, le produit $z_{aa}i^a$ devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)})} \left\{ \frac{z_1}{2} q (v^{1\{V\}(l)} + V) + \frac{z_1}{2} \frac{q}{\gamma} (-v^{2\{V\}(\omega)}) \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{z_2}{2} q (v^{3\{V\}(l)} - V) + \frac{z_2}{2} \frac{q}{\gamma} (v^{4\{V\}(\omega)}) \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

que l’on peut réécrire :

$$\begin{aligned} & \frac{q}{(1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)})} \left\{ \frac{z_1}{2} \left(1 + \frac{V}{v^{1\{V\}(l)}} \right) v^{1\{V\}(l)} + \frac{z_1}{2\gamma} (-v^{2\{V\}(\omega)}) \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{z_2}{2} \left(1 - \frac{V}{v^{1\{V\}(l)}} \right) (-v^{3\{V\}(l)}) + \frac{z_2}{2\gamma} (v^{4\{V\}(\omega)}) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Or si l’on admet que la connectivité n’est pas brisée par la transformation, comme $qv^1 = -qv^2 = -qv^3 = qv^4 = k^{1\{V\}(x)}$, on trouve :

$$\frac{1}{2(1 + \beta c^{-1} v^{1\{V\}(l)})} \left\{ z_1 \left(1 + \frac{V}{v^{1\{V\}(l)}} \right) + \frac{z_1}{\gamma} + z_2 \left(1 - \frac{V}{v^{1\{V\}(l)}} \right) + \frac{z_2}{\gamma} \right\} k^{1\{V\}(x)} \quad (4.17)$$

L'indice du flux de maille a une composante dans un format t, l, ω, χ . On choisit pour direction du vecteur maille la normale à la maille. Notons α le rapport de la vitesse de flux dans la direction de déplacement du référentiel sur la vitesse de référentiel. On obtient finalement :

$$\left(z_1^{\{i\}} + z_2^{\{i\}}\right) k^{1\{i\}(x)} = \frac{1}{2(1 + \beta c^{-1} \alpha V)} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\gamma + \alpha}{\gamma \alpha} \right) \right] z_1^{\{v\}} + \left[1 + \left(\frac{\gamma - \alpha}{\gamma \alpha} \right) \right] z_2^{\{v\}} \right\} k^{1\{V\}(x)} \quad (4.18)$$

Cette formule nous dit comment la métrique se transforme lors d'une mesure relativiste de la maille, pour la topologie des branches considérées. Il nous reste à définir comment se transforment les fonctions de cette métrique. Nous parlons ici de la métrique de l'espace des réseaux, et non de la métrique du format (qui peut être par exemple $+, -, -, -$), supposée constante entre les deux référentiels en relativité restreinte. Par ailleurs dans ces calculs, nous négligeons l'accélération subie par les charges dans les coudes des branches, ceci pour pouvoir rester dans l'hypothèse de référentiels d'inertie.

4.3.2.1 Transformation des termes de pertes

Dans le quadrivecteur courant, la composante scalaire ne peut pas engendrer de pertes. Son rayonnement est réactif et sans mouvement, elle n'engendre pas d'effet Joule. Il est donc logique de penser que la métrique d'une branche résistive est de la forme² :

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Nous travaillons ici sur deux niveaux d'espaces imbriqués. Le niveau fondamental ou sous-jacent qui porte les composantes des impulsions, de l'espace et du temps au travers des quadrivecteurs avec une métrique de Landau. Puis chacun de ces espaces est relié à une variété - une branche. Le quadrivecteur flux porte de fait l'information de direction de la branche et son horloge.

Dans l'exercice précédent nous avons déterminé une transformation de maille par effet relativiste. Mais Comment se transforme le terme de perte de la métrique ?

Calculons la transformation appliquée aux composantes spatiales du produit résistance - courant. Pour une résistance alignée suivant l'axe x parallèle à la vitesse relative V , la transformation de la résistance, en partant de son expression classique devient

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{x}{yz} \rightarrow \frac{1}{\gamma \sigma} \frac{x}{yz} = \frac{R}{\gamma}$$

par contraction des longueurs et pour le courant nous avons, cette fois sans normaliser et en utilisant la 4-densité de courant [BOR] :

$$I = SJ \rightarrow S\gamma(J' + \beta c\rho')$$

Les primes pointant le référentiel d'observation. La section S étant perpendiculaire au déplacement ne subit pas de contraction. Le produit RI devient alors :

$$RI \rightarrow \frac{R}{\gamma} S\gamma(J' + \beta c\rho') = RI' + R\beta S c\rho' = RI' + RI^e$$

Où I^e pourrait être appelé "courant d'entraînement". Le passage d'un référentiel à l'autre peut être modélisé par une modification de la métrique :

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{I^e}{I} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.20)$$

On aurait pu évidemment appliquer la transformation au produit RI directement et trouver le même résultat. Pour les métriques de dissipations on peut appliquer séparément chaque transformation.

Comme dans les cas suivants, nous n'explorons pas toutes les possibilités de position. Pour la résistance, le placement perpendiculaire à la vitesse d'entraînement (vitesse relative des deux référentiels) par la même démarche va aussi modifier la métrique.

2. Le produit de Z par le 4-courants doit redonner la tension.

4.3.2.2 Transformation des termes d'énergie potentielle

On imagine également une interaction de champ proche capacitive (condensateur constitué de deux plaques parallèles, perpendiculaires à la vitesse d'entraînement) dans la direction du déplacement des référentiels. Le champ pour cette situation restera inchangé car si la distance entre les plaques du condensateur diminue, la densité surfacique de charge augmente (principe de conservation de la charge totale). Finalement, le champ conserve son amplitude [BER]. Mais notre besoin ne s'arrête pas là - sauf pour la composante continue. On cherche la transformation d'une expression de la forme :

$$\frac{1}{C} \int_t dt(\bullet)$$

Le condensateur se transforme car la distance entre plaques est contractée. Il est donc augmenté d'un facteur γ . La transformation de la ddp aux bornes du condensateur s'écrit alors simplement :

$$\frac{1}{C} \int dt I^{\{i\}} = \frac{1}{C} \int dt^{\{i\}} \epsilon_0 S \frac{dE^{\{i\}}}{dt^{\{i\}}} \rightarrow \frac{\epsilon_0 S}{\gamma C} \int dt^{\{v\}} \frac{dE^{\{v\}}}{dt^{\{v\}}} = \frac{1}{\gamma C} \int dt^{\{v\}} I^{\{v\}}$$

La métrique d'un terme intégrant se transforme donc facilement :

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{cC} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \int dt(\bullet) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{1}{cC} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \int dt(\bullet) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Le premier terme appliqué au scalaire du 4-courant donne le potentiel scalaire aux bornes du condensateur.

4.3.2.3 Transformation des termes d'énergie magnétique

On considère de nouveau un rayonnement magnétique d'une boucle dont la normale est perpendiculaire à la direction du déplacement du référentiel. L'inductance qui dépend de la surface de flux va être diminuée dans un facteur γ . On calcule (on note avec un prime les quantités de l'espace de l'observateur) :

$$L \frac{di}{dt} = LS \frac{dJ}{dt} = cLS \frac{dJ}{cdt} \rightarrow c \frac{L}{\gamma} S \frac{d\gamma(J' + \beta c\rho')}{\gamma(cdt' + \beta cdx')} \quad (4.22)$$

Dans tous ces calculs, la vitesse de déplacement est constante - c'est une hypothèse de départ de la relativité restreinte. Pour lever le différentiel sur le temps on effectue l'opération suivante :

$$\frac{d}{(cdt' + \beta dx')} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{dt'}{(cdt' + \beta dx')} \right)$$

Or :

$$\frac{(cdt' + \beta dx')}{dt'} = (c + \beta v')$$

On obtient :

$$c \frac{L}{\gamma} S \frac{d\gamma(J' + \beta c\rho')}{\gamma(cdt' + \beta cdx')} = \left(c \frac{LS}{\gamma} \right) \frac{d}{dt'} (J' + \beta c\rho') \left\{ \frac{1}{c + \beta v'} \right\} = \left(\frac{LS}{\gamma(1 + \beta \frac{v'}{c})} \right) \frac{d}{dt'} (J' + \beta c\rho') \quad (4.23)$$

Soit finalement :

$$\left(\frac{L}{\gamma(1 + \beta \frac{v'}{c})} \right) \left[\frac{d}{dt'} I' + \frac{d}{dt'} I^e \right] \quad (4.24)$$

Comme pour la résistance, la métrique est modifiée de la façon suivante :

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \frac{d}{dt}(\bullet) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{\gamma(1 + \beta \frac{v'}{c})} \frac{d}{dt'}(\bullet) \end{bmatrix} \left\{ \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] + \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{I^e}{I} \end{bmatrix} \right] \right\} \quad (4.25)$$

4.4 Rayonnement des particules en mouvement

Les cas précédents ont montré que les opérateurs de base de la métrique pouvaient être assez facilement transformés dans un format de Landau et une transformation de Lorentz spéciale, en partant de la 4-densité de courant et d'hypothèse sur la section de transport du courant. Il reste à révéifier encore ces calculs et à les confronter avec l'expérience. Le cas du condensateur avait été étudié par Charles Kittel dans le cours de Berkeley. Maintenant nous sommes restés sur des phénomènes attachés à un seul des deux référentiels à chaque fois. Si l'on veut étudier une corde entre le référentiel en mouvement et le référentiel au repos, il faut revenir à la transformation des champs. On ne peut pas cependant "jongler" sur les deux repères simultanément.

Principe :

Suivant que l'on s'intéresse à la physique des phénomènes dans le cadre de l'expérience où vue par l'observateur, on ramènera toutes les grandeurs à l'un des deux référentiels RAVIN ou RENAT. Pour retrouver les mesures de l'observateur, les calculs sont exprimés avec toutes les grandeurs ramenées dans le référentiel RENAT - référentiel où elles sont mesurées. Au contraire pour retrouver les grandeurs dans le monde de l'expérience, elles seront ramenées dans le référentiel RAVIN.

Suivant les cas, on part d'un référentiel ou d'un autre, parce que l'on ne dispose pas forcément des expressions dans le référentiel que l'on veut. Bref, on fait ce qu'on peut aussi!

Il est certain qu'il faut s'habituer à se dire que la perception que l'on a du monde est une perception très personnelle, réduite au sens de projetée dans un référentiel qui ne peut être partagé.

Travailler sur la transformation directe des champs n'est pas évident. Cela revient à déterminer directement la transformation à appliquer à une corde. En pratique, il est plus facile de recalculer la fonction attachée à cette corde, donc repartir des flux, les transformer par l'intermédiaire des champs et en déduire le couplage. Car c'est bien cela qui nous intéresse. Feynman avait d'ailleurs travaillé à des expressions des interactions dénuées de champs[FEYT].

Considérons le cas suivant. Une ligne adaptée est alimentée par une impulsion. Au départ dans le référentiel de l'expérience, la ligne est aussi longue que l'impulsion dure, de sorte que l'émission du champ est réduite à cette durée. La figure "impulsion de ligne comme particule" montre cette configuration.

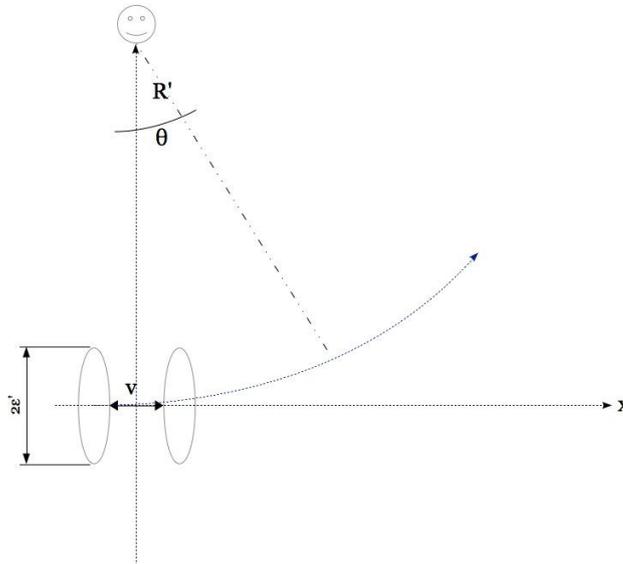


Figure "impulsion de ligne comme particule" : 3 référentiels représentés, sans vitesse, avec et en rotation.

Dans la situation où la particule est représentée par l'impulsion sur la ligne au départ, sur une longueur dx telle que $I dx = qv$ (cette ligne est un Branin avec les deux cycles et la corde de propagation), on peut exprimer l'amplitude du potentiel vecteur dans le référentiel R' de l'expérience :

$$A'^x = \frac{\mu_0 2\epsilon' qv^x}{4\pi R}$$

Pour obtenir cette expression on a fait une approximation en ramenant la charge équivalente au dipôle des deux courants opposés de l'impulsion sur chaque fil. La distance au dipôle étant R , on a vers le fil le plus haut une distance $R(1 - \epsilon')$ et vers le fil le plus bas $R(1 + \epsilon')$ avec $\epsilon' = \epsilon R^{-1}$ (la distance entre les deux fils est 2ϵ). Le champ s'exprime comme un facteur α de la différence des distances, soit :

$$A'^x = \alpha \left(\frac{1}{R(1 - \epsilon')} - \frac{1}{R(1 + \epsilon')} \right) \approx \alpha \left(\frac{2\epsilon'}{R} \right)$$

Maintenant regardons cette particule depuis un référentiel R_0 en mouvement relatif par rapport à l'expérience à la vitesse V , ce qui revient à propager l'impulsion sur toute la ligne. L'amplitude du champ se transforme selon :

$$A^x = \frac{\mu_0 \epsilon' q}{2\pi} \left(\frac{v^x + V}{1 + \frac{v^x V}{c^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{R^2 + V^2 t^2}}$$

Si l'observateur mesure le champ électrique, on doit dériver le potentiel pour obtenir :

$$E^x = -\frac{\partial A^x}{\partial t} = \frac{\mu_0 \epsilon' q}{2\pi} \left(\frac{v^x + V}{1 + \frac{v^x V}{c^2}} \right) \frac{V^2 t}{(R^2 + V^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Or la vitesse de l'impulsion, on l'a posé comme équivalence, est aussi la vitesse de déplacement sur toute la ligne, qui est la vitesse V . En simplifiant et en posant $Vt \ll R$, on trouve :³

$$e(x) = E^x \approx \frac{\mu_0 \epsilon' q V^3 t}{\pi R^3 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)} \Rightarrow M^x = \frac{e(x)}{I} = \frac{\mu_0 V^2 t}{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \pi R^3}$$

e est la fém induite pour une longueur normalisée et M le coefficient de couplage entre la ligne qui propage l'impulsion et la mesure du champ par l'observateur. Pour une vitesse de 2.10^8 m/s, une distance de 100 m, une durée de 10 ns, on trouve un coefficient de couplage d'environ 0,00011, donc très faible. Autrement dit pour un ampère de courant d'impulsion, on mesure 110 microvolts de fém. C'est très faible mais cela représente dans les unités couramment employées en CEM : $40 \text{ dB}\mu V^4$. Il faut savoir que des normes demandent des niveaux plus faibles que $20 \text{ dB}\mu V$ dans certaines bandes. Des rayonnements tels que ceux d'une ligne adaptée peuvent de fait suffire à dépasser ces gabarits ! On doit alors blinder les câbles ou réduire la distance entre les fils.

On peut se demander comment évoluerait le rayonnement si l'on courbait la trajectoire - donc la ligne, de façon à maintenir une distance constante. Car dans le cas précédent, la seule source de champ provient finalement de la variation temporelle de la distance parcourue par la charge. Sans cela, le champ serait nul. En courbant la trajectoire nous allons maintenir cette distance constante. Par contre, nous sortons de notre hypothèse de référentiel inertiel, car la courbure est une accélération. Mais comme la distance est très grande devant la hauteur de ligne, cette accélération est très faible. Le dessin à ce titre n'est pas du tout à l'échelle. Acceptons de calculer le rayonnement comme une succession de transformations de Lotentz avec la vitesse V qui évolue de proche en proche (on peut approximer cette courbure par une succession de segments tangents au cercle et qui permettent sur chacun d'eux de rester dans l'hypothèse de la relativité restreinte).

4.5 Référentiels en mouvements relatifs accélérés

Considérons donc la trajectoire légèrement courbée de la figure "impulsion de ligne comme particule". Pour cette trajectoire, le potentiel s'exprime par :

$$A^x = \frac{\mu_0 2\epsilon' q}{4\pi} \left(\frac{v^x + V}{1 + \frac{v^x V}{c^2}} \right) \frac{1}{R} \text{Cos} \left[\frac{Vt}{R} \right]$$

On obtient le champ suivant x en dérivant le potentiel comme précédemment (avec toujours implicitement un potentiel scalaire négligeable et les approximations précédentes) :

3. Soit : $\left[R^2 \left(1 + \frac{V^2 t^2}{R^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \approx R^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{V^2 t^2}{R^2} \right) \approx R^3$

4. Le $\text{dB}\mu V$ - décibel microvolt est 20 fois le logarithme décimal du rapport de la tension mesurée sur $1 \mu V$.

$$E^x = -\frac{\partial A^x}{\partial t} = \frac{\mu_0 \epsilon' q}{\pi} \frac{V^2}{R^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)} \text{Sin} \left[\frac{Vt}{R} \right]$$

Soit un couplage en utilisant le développement au premier ordre du sinus (l'angle est très petit et le courant vaut $\epsilon' qV$) :

$$M^x \approx \frac{\mu_0 V^2 t}{\pi R^3 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)}$$

Le couplage est identique au précédent ! Ce qui en soit est logique vu notre hypothèse de courbure faible. Mais il y a ici une grosse différence : du fait de cette courbure, il existe une composante de champ suivant y . Calculons cette composante :

$$A^y = \frac{2\mu_0 \epsilon' qV}{4\pi R} \text{Sin} \left[\frac{Vt}{R} \right] \Rightarrow M^y \approx \frac{\mu_0 V}{2\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{Vt}{R} \right)^2 \right)$$

La composante transverse à la propagation a deux termes, le second est très faible car fonction de t^2 . Mais regardons le premier : il donne avec les mêmes valeurs que précédemment 0,004. Soit 36 fois plus fort que l'amplitude suivant x . L'accélération, même faible, engendre une composante transverse dont le rendement de rayonnement est très grand comparé à celui de la composante parallèle pour la trajectoire rectiligne. Ainsi, une ligne en champ lointain crée un champ transverse important dès qu'une inhomogénéité, une courbure, une rupture de propagation engendre une accélération de la "particule équivalente". On peut donc considérer qu'au premier ordre, ce sont les désadaptations qui sont sources de rayonnement. Les ondes stationnaires qui sont des vibrations "sur place" de particules sont particulièrement efficaces pour rayonner. Les antennes sont des dispositifs basés sur l'établissement de ces ondes sur des géométries où la propagation est désadaptée. Paradoxalement, on arrive alors à adapter le générateur grâce à la résistance de rayonnement qui, logiquement, est importante.

Dans notre approximation, nous avons estimé l'accélération relative des référentiels par une succession de vitesses constantes de directions variables. De fait nous n'avons pas pris en compte les changements de vitesse d'une direction à l'autre, mais les variations des vues relativistes de chaque direction de vitesse, ce qui est différent. Ce deuxième effet existe forcément, mais il est complété de l'effet de la dérivée de la vitesse elle-même.

Nous allons étudier différents aspects au travers de différentes réflexions et revues de fondamentaux pour ensuite traiter d'un exemple simple mais qui permet de bien comprendre les principes qui peuvent être mis en jeu pour résoudre n'importe quel cas.

4.5.1 Un peu d'histoire

L'analogie entre les travaux d'Einstein sur les référentiels en accélérations relatives et les machines électriques a été la source d'inspiration de Kron pour utiliser la géométrie différentielle pour les problèmes d'ingénieurs. Il publia suite à ces travaux un premier article célèbre[KRON1] en 1934, suivi d'une série dans la revue de la Générale Electrique de 23 articles entre 1935 et 1938. Ces articles[KRON2] furent ensuite reproduits en un volume[KRON3]. Kron reprit ces principes dans un article à l'occasion de la réception du prix Montefiore[KRON4]. Mais ses idées se sont peu répandues dans la communauté des ingénieurs, ceci malgré la rédaction d'un "short course"[KRON5]. Les échos provinrent tout d'abord du Japon[KRON6] (en dehors des USA), puis le club "TENSOR" en Angleterre[KRON7] puis en France avec les travaux de Denis PAPIN et Arnold KAUFMANN[PEK]. Parmi les articles qui suivirent, on trouve de nombreuses monographies[KRON6,7,8] dont celle de G.S.Brosan[GSB] qui proposa un formalisme mathématique pour la théorie de Kron des systèmes dynamiques quasi-holonomiques.

Finalement l'oeuvre la plus conséquente reprenant les démarche de Kron est sans aucun doute le "RAAG - Memoirs - basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry". Quatre volumes regroupant environ 2000 pages traitant de problèmes compliqués les plus divers, depuis les machines électriques, en passant par les mécanismes de vol, les plastiques, ou la modélisation des stimuli visuels, etc. C'est aussi l'une des rares collections où sont abordées très en détail les modélisations de systèmes non holonomiques que nous allons aborder à notre tour dans le cadre de l'analyse tensorielle des réseaux non linéaires.

4.5.2 Premiers concepts en énergie

L'énergie totale dans un réseau électrique est donnée par la grandeur :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\nu} d\nu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \quad (4.26)$$

Cette énergie est présente sous forme magnétique (T_H), par le premier produit $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ et sous forme électrique (T_E) par le second : $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$. On définit par ailleurs des vecteurs courants comme taux de variation d'une quantité de charge :

$$i^k = \frac{dx^k}{dt}$$

On peut définir alors des coefficients vectoriels \mathbf{H}_k pondérant la contribution des courants au champ magnétique total : $\mathbf{H} = \mathbf{H}_k i^k$. Ces fonctions prenant en charge l'anisotropie, on peut écrire : $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_k i^k$. L'énergie magnétique devient alors :

$$T_H = \frac{1}{2} \int_{\nu} d\nu \mathbf{H}_k \cdot \mu \mathbf{H}_l i^k i^l = \frac{1}{2} g_{kl} i^k i^l \quad (4.27)$$

Avec $g_{kl} = \int_{\nu} d\nu \mathbf{H}_k \cdot \mu \mathbf{H}_l$. Pour le champ électrique (lamellaire) on trouve des expressions similaires :

$$T_E = \frac{1}{2} \int_{\nu} d\nu \mathbf{E}_k \cdot \epsilon \mathbf{E}_l x^k x^l = \frac{1}{2} h_{kl} x^k x^l \quad (4.28)$$

Avec $h_{kl} = \int_{\nu} d\nu \mathbf{E}_k \cdot \epsilon \mathbf{E}_l$. Nous avons précisé que les éléments d'un réseau appartiennent forcément au même référentiel. De fait, le réseau avec ses observables indépendantes constitue bien un espace vectoriel à p coordonnées x^k .

4.5.3 Equations de Lagrange

Nous verrons que les concepts d'équations de Lagrange, lagrangien, etc. jouent un rôle majeur en analyse tensorielle.

Si les coordonnées $x^k, k = 1 \dots, n$ dépendent du temps, alors l'énergie cinétique doit s'exprimer en fonction des vitesses :

$$T = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad \mu, \nu = 1, \dots, n$$

Si x^k varie d'une quantité dx^k , le travail des forces extérieures est donné par : $f_\mu dx^\mu$. Si f dérive d'une grandeur V telle que $f_\lambda = -\partial_\lambda V$,⁵ V est l'énergie potentielle.

L'énergie de dissipation est donnée par :

$$F = \frac{1}{2} r_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} r_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

Dans un système sans pertes, la grandeur $L = T - V$ est le lagrangien du système. Le principe de moindre action[MA] stipule que la variation de son intégrale dans le temps est nulle :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad (4.29)$$

On va montrer qu'une condition nécessaire est suffisante pour vérifier cette propriété est que L vérifie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.30)$$

Soit $X(t), t_1 \leq t \leq t_2$ la courbe qui rend extrémum la quantité :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (4.31)$$

5. On notera souvent, lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, ∂_α l'expression $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

alors, $X(t) + \epsilon\eta(t)$ est une courbe voisine. Imposons que les points de départ et d'arrivée des deux courbes soient identiques. On a alors : $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

$$s(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, X + \epsilon\eta, \dot{X} + \epsilon\dot{\eta})$$

On veut que la variation de l'action s suivant les valeurs de ϵ quand ce dernier tend vers 0, soit nulle. Ou encore :

$$\left. \frac{ds}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) = 0$$

En effet, posons par exemple

$$L = mgx + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow L(\epsilon, \eta) = mg(x + \epsilon\eta) + \frac{1}{2}m(\dot{x} + \epsilon\dot{\eta})^2$$

Alors :

$$\frac{dL(\epsilon, \eta)}{d\epsilon} = mg\eta + m\epsilon\dot{\eta}^2 + m\dot{x}\dot{\eta}$$

et :

$$\left. \frac{dL(\epsilon, \eta)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = mg\eta + m\dot{x}\dot{\eta} = \frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta}$$

Avec entre autre une intégration par partie (second terme) on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial x} \eta + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

Comme η est nul aux bornes, il reste :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

η étant arbitraire, cela impose la relation 4.30.

On généralise cette relation à n variables, pour écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \tag{4.32}$$

Ou encore comme $L = T - V$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} + \frac{\partial V}{\partial x^k} = 0 \tag{4.33}$$

Pour un système avec pertes, un terme de forces sources f_k incluant la variation d'énergie potentielle, on trouve l'écriture :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial x^k} = f_k \tag{4.34}$$

Ce sont les équations de Lagrange pour un système holonomique de variables x^k . **Un système holonomique est un système dont les solutions ne dépendent que des variables x^k du lagrangien.** Un système électromécanique nous le verrons est non holonomique car les grandeurs électriques sont alors paramétrées par des grandeurs mécaniques[ROTT].

Restons holonomique pour l'instant pour écrire à partir de l'équation précédente :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_H}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T_H}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = f_k \quad (4.35)$$

Soit en remplaçant les termes par leurs développements en fonction des métriques :

$$\frac{d}{dt} g_{kl} \dot{x}^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \dot{x}^l \dot{x}^m + r_{kl} \dot{x}^l = f_k \quad (4.36)$$

Or les composantes d'inductances et de mutuelles dans g_{lm} ne dépendent pas de la charge. Donc :

$$\frac{d}{dt} g_{kl} \dot{x}^l + r_{kl} \dot{x}^l = f_k$$

La force f_k est la source externe moins le gradient de l'énergie potentielle ou autrement dit, la force externe moins le travail propre nécessaire :

$$f_k = e_k - \frac{\partial V}{\partial x^k}$$

Dans le cas statique ($g_{kl} = 0$) on retrouve alors la loi de Kirchhoff :

$$r_{kl} \dot{x}^l = e_k - \frac{\partial V}{\partial x^k}$$

Pour aller plus loin, on doit distinguer les déplacements mécaniques x, x^v, \dots des variables électriques x^k, x^l, \dots . L'énergie cinétique et de dissipation pour la mécanique est donnée par le couple : $2T_M = g_{uv} \dot{x}^u \dot{x}^v$ et $2F_M = r_{uv} \dot{x}^u \dot{x}^v$. Les énergies cinétiques et de dissipations totales sont la somme des termes : $T = T_M + T_H$, $F = F_M + F_H$. En utilisant des lettres grecques pour représenter à la fois les quantités mécaniques et les quantités électriques, on exprime les équations de Lagrange par :

$$\frac{d}{dt} g_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\eta}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\eta + r_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu = f_\lambda \quad (4.37)$$

Dans l'expression de l'énergie cinétique, la métrique g dépend fortement des grandeurs mécaniques - par la position relative des mobiles - et des grandeurs électriques et thermiques. Nous généralisons même par les cordes[MRDD] les fonctions applicables aux variables. On peut donc considérer la métrique comme un opérateur fonction des coordonnées, appliqué aux variables. Nous écrivons de fait :

$$g_\mu (\nu \dots) \rightarrow g_{\mu\nu} (x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet x^\nu \quad (4.38)$$

Le "bullet" marquant l'application de l'opérateur à la coordonnée. Comme un opérateur est rattaché intrinsèquement à une branche ou une maille, on sait à quel vecteur de base il s'applique. Il n'y a dès lors pas d'ambiguïté dans la liste des paramètres et des coordonnées sur qui dépend de qui. Par ailleurs on peut toujours écrire une fonction des coordonnées sous cette forme. Par exemple, soit f cette fonction, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{f(x)}{x} x \rightarrow f(\bullet) = \frac{f(\bullet)}{(\bullet)}$$

On trouve alors de façon presque évidente⁶ la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \{ g_{\mu\nu} (x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \dot{x}^\nu \dot{x}^\nu \} = \frac{\partial g_{\mu\nu} (x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \dot{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} (x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \dot{x}^\nu \ddot{x}^\nu \quad (4.39)$$

6. Par $d/dt \rightarrow \partial/\partial x^\alpha \cdot \partial x^\alpha / \partial t$.

Remplaçons l'énergie cinétique par cette expression dans l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}g_{\mu\nu}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma\} + r_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = f_\mu \quad (4.40)$$

On obtient :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\nu\ddot{x}^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma\} + r_{\mu\nu}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\nu = f_\mu \quad (4.41)$$

La fonction de pertes est une fonction réelle. Elle s'écrit donc simplement par un produit, mais peut dépendre des coordonnées. Développons le second terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\mu}\{g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma\} = \dots \\ & \dots \frac{\partial g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)}{\partial x^\mu}\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma + g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\sigma\frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\mu}\dot{x}^\sigma + g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Ayant bien identifié les dérivées partielles, nous pouvons simplifier l'écriture : $g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\dot{x}^\sigma \rightarrow g_{\beta\sigma}$ et remplacer dans 4.41 pour obtenir :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma - \frac{1}{2}g_{\beta\sigma}\frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\mu}\dot{x}^\sigma - \frac{1}{2}g_{\beta\sigma}\dot{x}^\beta\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} + r_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = f_\mu$$

Utilisant la notation de Penrose-Kondo[PEN][RAAG]⁷, cette expression se réduit à :

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu}\right)\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma + g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu - \frac{1}{2}g_{\beta\sigma}\dot{x}^{[\beta}\frac{\partial \dot{x}^{\sigma]}{\partial x^\mu} + r_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = f_\mu$$

Cette équation tensorielle constitue le système d'équations thermoélectromécanique d'un système non holonomique, réduit à un réseau unique. Chaque terme peut être développé sur un 4-format, mais nous n'avons pas regardé pour l'instant comment cette équation se transformait lors d'un changement du système d'axes. Nous sommes donc implicitement dans un référentiel unique, sans interactions avec un référentiel en mouvement. Avant d'aborder ce deuxième point, détaillons les termes de cette équation et analysons les métriques imbriquées qui la composent.

4.5.4 Etude des termes de l'équation de Lagrange non holonomique

Le premier terme entre parenthèses décrit la variation de la métrique en fonction des coordonnées. La métrique intrinsèquement donne la relation entre les composantes des vecteurs et celles de leurs duaux. Dans le formalisme de Kron elle s'exprime en impédance. Au niveau du format, elle correspond aux facteurs qui engendrent l'invariant de distance. Tant que la distance se calcule suivant Pythagore, la métrique est quasi-unitaire (aux signes près). Par contre si l'espace est courbe, elle comprend des termes trigonométriques qui permettent de retrouver une distance sur un espace courbé. A l'échelle d'un réseau la courbure n'est pas sensible. La courbure est sensible (c'est un constat mesuré) à l'échelle de l'univers, donc dans l'espace des moments des interactions de champ lointain ou gravitationnelles. Nous reviendrons sur ces facteurs d'échelles entre mécanique quantique, circuits mécatroniques et astronomie.

Ce terme définit ce que l'on appelle les coefficients de Christoffel de première espèce[SCHAUM]. Ils sont donnés par :

$$[\beta\sigma, \mu] = \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu}\right) \quad (4.42)$$

On peut modifier cette expression, ce que l'on trouve dans pratiquement tous les ouvrages :

$$\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\beta}\right)$$

Dans ce cas :

7. Soit l'alternance entre deux indices marquées par des crochets. Par exemple : $t_{[\mu} s^{\nu]} = t_\mu s^\nu + t_\nu s^\mu$.

$$[\beta\sigma, \mu] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu} \right)$$

La première forme est moins usuelle mais plus évidente à retrouver dans les calculs.

La nullité du second terme n'est pas évidente. Remplaçons l'écriture condensée par celle détaillée en levant l'alternance :

$$g_{\beta\sigma} \dot{x}^\beta \frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} + g_{\beta\sigma} \dot{x}^\sigma \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\mu} = g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \dot{x}^\sigma \dot{x}^\beta \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\mu} + g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \left(\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \dot{x}^\beta$$

Puisque la métrique non linéaire ne peut s'appliquer qu'à un terme en σ . Dans le premier cas elle s'applique au courant \dot{x}^σ , dans le second cas à sa dérivée par rapport à une coordonnée. Prenons un cas simple. Pour une métrique inductive, le premier terme est de la forme $L_{\mu\nu} \dot{k}^\nu \dot{k}^\mu$ en considérant un flux k et le temps comme coordonnées. Ce produit est équivalent à un produit flux de surface - flux soit : $\phi_\mu \dot{k}^\mu$ qui engendre une puissance, l'invariant de Kron. Le second terme est de la forme : $L_{\mu\nu} \dot{k}^\nu \dot{k}^\mu$ soit le classique produit fém flux qui est aussi bien sûr une puissance. Or cette fém dans notre diagramme de Roth est engendrée via un opérateur de Hodge par le flux de surface précédent (lié à la fmm)[MRDD]. En dérivant le premier terme on trouve : $\dot{\phi}_\mu \dot{k}^\mu + \phi_\mu \ddot{k}^\mu$. Pour retrouver le second terme il faut que $\ddot{k}^\mu = 0$. Ce résultat est cohérent et nécessaire avec notre topologie cellulaire où chaque branche porte un courant vectoriel de base, supposé constant sur cette branche. Autrement dit, la dérivée troisième des charges est nulle.

Sachant cela, il faut se rappeler que la dérivée du flux crée une fém négative. De fait :

$$g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \dot{x}^\sigma \dot{x}^\beta \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\mu} = -g_{\beta\sigma}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \bullet \left(\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \dot{x}^\beta \quad (4.43)$$

Et cette relation est basée sur un principe de conservation de l'énergie, invariante. Finalement :

$$-\frac{1}{2} g_{\beta\sigma} \dot{x}^{[\beta} \frac{\partial \dot{x}^{\sigma]} \partial x^\mu} = 0 \quad (4.44)$$

Et les équations de Lagrange du système non holonomique deviennent :

$$[\beta\sigma, \mu] \dot{x}^\beta \dot{x}^\sigma + g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + r_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = f_\mu \quad (4.45)$$

Dans cette expression, les coefficients de Christoffel rajoutent des termes à l'équation de base de Lagrange. Ces termes ont la dimension d'ohms par ampère ou encore de Watts par ampère. Ils rajoutent donc des Watts par courants, une puissance provenant de la variation de milieu dans l'espace.

4.5.5 Influence du format

Dans les expressions précédentes, chaque terme est décomposable en une matrice ou un vecteur suivant le format. Le calcul sur un format choisi revient à faire le produit tensoriel d'un espace cellulaire avec l'espace du format, multipliant ainsi la dimension du système à résoudre. Sous cette forme, les interactions entre les composantes du format sont implicitement incluses dans la métrique globale, de même qu'entre les différentes grandeurs de dimensions différentes que sont les grandeurs mécaniques, thermiques, électroniques, etc. On reste cependant à une même échelle, c'est à dire que les observables ne découlent pas d'espaces de dimensions topologiques différentes. Les transformations, si nécessaires, ont été opérées précédemment. Nous étudierons l'impact de ces transformations.

4.5.6 Les équations de Lagrange dans les circuits électriques

Les électroanalogies de Kron ont montré la possibilité de tout ramener à ce symbolisme et aux graphes qui lui est lié[RAAG]. Il est donc intéressant de se demander comment s'exprime les équations de Lagrange dans les circuits. Ce travail a déjà été effectué par Gabillard[GAB] y compris sur des espaces fonctionnels. Nous allons ici généraliser un exemple pragmatique utilisé dans [OM].

L'énergie électrique dépend des charges :

$$T_E = D_{ab}x^a x^b$$

(D est l'opérateur de susceptance) et l'énergie magnétique des courants :

$$T_H = l_{uv}\dot{x}^u \dot{x}^v$$

Or l'énergie magnétique n'existe que dans l'espace des mailles (indices u, v), ne pouvant être stockée sur des chaînes ouvertes. Les courants modaux sont déduits des courants de branches par la connectivité A telle que : $\dot{x}^b = A^b_u \dot{x}^u$. Comme : $q^a = \int_t dt i^a = \tau \cdot i^a$, il vient :

$$T_E = D_{ab}\tau \cdot i^a \tau \cdot i^b \Rightarrow T_E = D_{ab}\tau \cdot A^a_v \dot{x}^v \tau \cdot A^b_u \dot{x}^u = A_u^a D_{ab} A^b_v \tau \cdot (\dot{x}^u, \dot{x}^v)$$

On peut prendre en compte l'opérateur d'intégration dans la susceptance pour obtenir : $Q_{uv} = A_u^a D_{ab} A^b_v \tau$ et finalement :

$$T_E = Q_{uv}\dot{x}^u \dot{x}^v$$

On peut alors retrouver une forme homogène similaire à 4.35 (en fait intégrée dans cette dernière avec les autres variables) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_H}{\partial \dot{x}^u} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial x^u} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^u} = e_u \quad (4.46)$$

Du fait de l'existence formelle de l'énergie magnétique dans le seul espace des mailles, c'est dans ce dernier que l'on retrouve les opérateurs de Lagrange en énergie cinétique, potentielle et de pertes. Pour exprimer le lagrangien, nous avons posé une connectivité entre les courants de différents espaces. Cette connexion apparaissait comme une construction de chaîne évidente dans la topologie cellulaire. Elle est moins évidente entre les différentielles des coordonnées, et constitue la relation de Pfaffian (formes de Pfaffian[RAAG]). Ces formes jouent un rôle majeur dans l'équation tensorielle des systèmes non holonomiques. Elle revient finalement à établir la connectivité entre les courants.

4.5.7 Notion de géodésiques

Considérons une particule de masse constante M , se déplaçant à une vitesse de module v . Son énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} M g_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

Pour un système holonomique, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = M (g_{kq} \ddot{x}^q + [pq, k] \dot{x}^p \dot{x}^q)$$

On on aimerait bien mettre g_{kq} en facteur pour faire apparaître une forme fondamentale Ma de Newton. Le coefficient de Christoffel vaut :

$$[pq, k] = \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \right) = h_{kpq} - \frac{1}{2} h_{pqk}$$

h étant le tenseur résultant de la dérivation de la métrique. Si on multiplie ce coefficient par g^{rk} on obtient :

$$g^{rk} [pq, k] = g^{rk} \left(h_{kpq} - \frac{1}{2} h_{pqk} \right) = J^r_{pq} - \frac{1}{2} J^r_{pq} = \Gamma^r_{pq} \quad (4.47)$$

On appelle les objets Γ des coefficients de Christoffel de seconde espèce. On obtient finalement :

$$M g^{kr} (\ddot{x}^r + \Gamma^r_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q) = M g^{kr} a^r = M a_k \quad (4.48)$$

On exprime ainsi l'accélération covariante. Or l'accélération détermine la trajectoire des particules pesantes. On en déduit l'équation des géodésiques pour une particule d'accélération nulle :

$$(\ddot{x}^r + \Gamma^r_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q) = 0$$

Ces géodésiques sont les axes de l'espace et du temps. Ces trajectoires sont suivies par le champ électromagnétique et dépendent de la gravitation. C'est le principe d'équivalence qui stipule l'égalité des masses pesantes et d'inertie qui pose l'influence de la gravitation dans les trajectoires suivies par les particules. La courbure est déterminée par toute l'énergie présente, mais on montre que l'électromagnétisme n'apparaît que comme une perturbation de second ordre dans cette énergie[JCB].

Principe :

La courbure de l'espace est déterminée par l'équation d'Einstein et liée au premier ordre aux masses de l'univers considéré.

4.5.8 Synthèse du problème

Le problème se présente de la façon suivante : des réseaux sont rattachés à des référentiels uniques dans lesquels la courbure de l'espace-temps est nul.

Postulat :

la courbure de l'espace-temps à l'échelle d'un réseau est nulle.

Comme à l'échelle d'un réseau ne peuvent exister que des interactions de champ proche ou lointain mais entre des objets fixes ou faiblement accélérés - hypothèse se déduisant du postulat précédent - les métriques attachées aux réseaux séparés sont non relativistes. Dans ces réseaux, les connectivités entre espaces des branches et des mailles sont invariantes

Lorsque deux réseaux sont en mouvements relatifs relativistes, il faut préciser le réseau de l'observateur. Transporter toutes les grandeurs dans ce référentiel et affecter les cordes d'une courbure éventuelle. Comme les équations de Kron dans l'espace des mailles expriment le lagrangien, cela revient à formuler ces équations en prenant en compte la déformation du réseau mobile et les géodésiques que doivent suivre les cordes.

Dans un problème complet non holonomique on doit travailler avec un format incluant les parties statiques et dynamiques qui sont couplées en relativité : c'est la transformation de Lorentz qui s'applique au format, lequel on l'a vu revient à démultiplier chaque branche et à engendrer de fait, des couplages éventuels entre ces branches. Le format des 4-vecteurs est finalement un format modal où statique et dynamique sont les deux premiers modes auxquels peuvent venir se greffer d'autres modes si besoin.

On a d'une part une topologie cellulaire qui ne dépend pas de l'espace mais qui est déformée si elle est en mouvement. D'autre part une topologie de l'espace-temps du rayonnement qui suit les équations d'Einstein (nous l'appellerons topologie d'Einstein). Cette seconde topologie est enfouie dans l'espace des moments, c'est elle qui détermine les coefficients de couplages en champ lointain.

L'équation de Lagrange vue du réseau de l'observateur subit elle aussi la transformation des coordonnées. Cette transformation de coordonnées impacte celle de la topologie d'Einstein. On doit sur sa base déterminer les géodésiques de l'espace-temps considéré. Puis calculer les transformations applicables aux interactions entre moments, puis la transformation des métriques des réseaux mobiles. En appelant "métrique de Kron" la métrique des réseaux, on se propose de suivre la méthodologie suivante :

1. définir le format de travail ;
2. définir le réseau de référence ;
3. exprimer les propriétés de l'espace-temps ;
4. calculer les déformations à appliquer aux réseaux mobiles et aux cordes entre moments ;
5. poser le système d'équations du problème et le résoudre.

Pour mener à bien cette démarche il nous faut savoir transformer l'équation de Kron-Lagrange et déterminer les trajectoires des cordes.

4.5.9 Transformation de l'équation de Lagrange, puis de l'équation de Kron

Les équations de Lagrange font intervenir les coordonnées d'espace-temps. Si l'on applique une transformation à ces coordonnées, comment se transforme l'équation de Lagrange ?

4.5.9.1 Formes de Pfaffian

Les formes de Pfaffian établissent une connectivité entre les différentielles des coordonnées, soit fondamentalement : $dx^{k'} = A^{k'}_k dx^k$. Dans le cas général, on constate :

$$\frac{\partial A^{k'}_a}{\partial x^b} \neq \frac{\partial A^{k'}_b}{\partial x^a}$$

La transformation de Pfaffian est dite non holonomique. Elle est définie sur les vitesses et les vitesses dépendent des coordonnées d'espace et de temps. Dans notre univers "kronien" cette transformation s'applique entre des courants, de branches ou de mailles. Nous avons dit que la connectivité branches - mailles était invariante sous une transformation relativiste. Par ailleurs l'équation de Lagrange du réseau s'exprime dans l'espace des mailles. Nous appliquons donc avant tout la transformation de Pfaffian entre des courants (flux) de mailles. Notons que la notion de maille existe tout autant en mécanique avec le moment d'inertie. Enfin, les composantes lamellaires (non rotationnelles) sont prises en charge par l'espace des paires de nœuds, que nous avons transformé en espace des mailles virtuelles. Nous écrivons donc :

$$i^\mu = \Lambda^\mu_\nu i^\nu \quad (4.49)$$

Le réseau de l'observateur ne sera pas affecté par la transformation. De fait, les coefficients de Λ pour ces grandeurs seront égaux à 1.

Comme on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial}{\partial A^\mu_{\lambda'} \dot{x}^{\lambda'}} = A^{\lambda'}_\mu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\lambda'}}$$

On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial f^\mu} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^\mu_{\lambda'} f^{\lambda'}} = \Lambda^{\lambda'}_\mu \frac{\partial}{\partial f^{\lambda'}} \quad (4.50)$$

f est un flux généralisé et les primes pointent le référentiel d'arrivée.

4.5.9.2 Sommet dans l'espace des mailles

Pour transformer l'équation de Lagrange, nous avons besoin des coordonnées non dérivées. Les dérivées premières sont associées à des flux de mailles, mais quid de leur intégrale première? La circulation fermée du champ électrique peut être ramenée à une circulation de courant en multipliant le champ par $d\sigma$ où d est la section de la circulation de la maille et σ sa conductivité équivalente. Alors :

$$d\sigma \oint_{r(\alpha)} \mathbf{E}^\alpha \cdot d\mathbf{r} = -d\sigma \mathbf{S}(\alpha) \cdot \frac{\partial \mu_0 \mathbf{H}^\alpha}{\partial t} \Rightarrow k^\alpha = -\frac{\mu_0 \sigma dS}{r} \frac{\partial H^\alpha}{\partial t} = -\mu_0 \sigma \frac{d}{r} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} \quad (4.51)$$

La quantité : $-\mu_0 \sigma(\alpha) d(\alpha) S(\alpha) H^{\alpha r^{-1}}(\alpha) = Q^\alpha$ est donc la charge équivalente d'une maille et est proportionnelle au flux magnétique.

4.5.9.3 Expression de l'équation de Lagrange des grandeurs transformées

On exprime directement les grandeurs en flux f et intégrales de flux : Q .

Soit \mathcal{T} l'énergie cinétique des grandeurs transformées, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial f^\mu} = \Lambda^{\lambda'}_\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial f^{\lambda'}} \quad (4.52)$$

Pour le second terme on trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q^\mu} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q^\mu} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial f^{\mu'}}{\partial Q^\mu} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q^\mu} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial Q^\mu} (\Lambda^{\mu'}_\nu f^\nu)$$

La dérivée du flux ne dépend pas de la charge. Le deuxième terme dans la somme des dérivées à droite est donc nul et il reste :

$$\frac{\partial T}{\partial Q^\mu} = \frac{\partial T}{\partial Q^\mu} + \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^\mu} f^{\nu'} = \frac{\partial T}{\partial Q^\mu} + \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu'} f^{\nu'}$$

On remplace ces relations dans l'équation de Lagrange - Kron pour obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \Lambda_{\mu}^{\lambda'} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q^\mu} - \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu'} f^{\nu'} + \Lambda_{\mu}^{\lambda'} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f^{\lambda'}} = \Lambda_{\mu}^{\lambda'} e_{\lambda'} \quad (4.53)$$

On dérive le premier terme :

$$\Lambda_{\mu}^{\lambda'} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \right) + \frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \frac{d \Lambda_{\mu}^{\lambda'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial Q^\mu} - \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu'} f^{\nu'} + \Lambda_{\mu}^{\lambda'} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f^{\lambda'}} = \Lambda_{\mu}^{\lambda'} e_{\lambda'}$$

On multiplie chaque membre par $\Lambda_{\lambda'}^{\mu}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \right) + \Lambda_{\lambda'}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \frac{d \Lambda_{\mu}^{\lambda'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial Q^{\lambda'}} - \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^{\lambda'}} \Lambda_{\nu'}^{\nu'} f^{\nu'} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f^{\lambda'}} = e_{\lambda'}$$

Considérons les termes 2 et 4. On peut factoriser et modifier les indices pour obtenir :

$$\Lambda_{\lambda'}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \frac{d \Lambda_{\mu}^{\lambda'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial f^{\mu'}} \frac{\partial \Lambda_{\nu'}^{\mu'}}{\partial Q^{\lambda'}} \Lambda_{\nu'}^{\nu'} f^{\nu'} = \frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \left(\Lambda_{\lambda'}^{\mu} \frac{\partial \Lambda_{\mu}^{\lambda'}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha}^{\lambda'}}{\partial Q^{\mu}} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} f^{\alpha'} \right)$$

Avec l'égalité :

$$\frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial t} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} f^{\alpha'}$$

En remplaçant on voit apparaître "l'objet non holonomique" Ω tel que :

$$\Omega_{\lambda' \alpha'}^{\lambda'} = \frac{1}{2} \Lambda_{\lambda'}^{\mu} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \left(\frac{\partial \Lambda_{\mu}^{\lambda'}}{\partial Q^{\alpha}} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha}^{\lambda'}}{\partial Q^{\mu}} \right) \quad (4.54)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q^{\lambda'}} + 2 \Omega_{\lambda' \alpha'}^{\lambda'} \frac{\partial T}{\partial f^{\lambda'}} f^{\alpha'} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f^{\lambda'}} = e_{\lambda'} \quad (4.55)$$

Qui sont les équations de Boltzmann et Hamel[BOL][HAM], transposées ici dans le formalisme de Kron.

4.5.10 Détermination des propriétés de l'espace-temps : trajectoire des cordes

La notion de courbure est une notion quand même très abstraite, même si l'on trouve de nombreuses tentatives pour l'illustrer. Pourtant dans ce domaine, la connaissance de l'électromagnétisme peut être une aide certaine à une certaine visualisation du phénomène. Si l'on reprend l'équation de Lagrange et que l'on regarde le premier terme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial i^{\mu}} \right)$$

Pour un réseau d'inductance, cette relation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (L_{\mu\nu} i^{\nu})$$

D'où l'on tire :

$$\frac{dL_{\mu\nu}}{dt} i^{\nu} + L_{\mu\nu} \frac{di^{\nu}}{dt} = \frac{dL_{\mu\nu}}{dQ^{\alpha}} i^{\alpha} i^{\nu} + L_{\mu\nu} \frac{di^{\nu}}{dt}$$

Pour mettre en facteur $L_{\mu\nu}$ on écrit :

$$L_{\mu\nu} \left(J^{\nu\mu} \frac{dL_{\mu\nu}}{dQ^\alpha} i^\alpha i^\nu + \frac{di^\nu}{dt} \right)$$

Avec $L_{\mu\nu} J^{\nu\mu} = \delta_\mu^\mu$. Sous cette écriture, on voit qu'à l'expression classique de la fém d'inductance (revenant à l'inertie) s'ajoute un terme lié à la variation d'inductance en fonction du flux. Comme la mutuelle L_{21} par exemple dépend du flux ($\phi = Li$), si ce flux n'augmente pas linéairement avec le courant, par exemple dans une ferrite on a un flux de saturation, le rapport flux sur courant n'est pas constant et cette dérivée est non nulle. La non linéarité du rapport iQ^{-1} engendre un terme de modification des mutuelles inductances. La première forme est en ce sens plus facile à comprendre en écrivant :

$$\frac{dL_{\mu\nu}}{dQ^\alpha(i^\alpha)} i^\alpha i^\nu + L_{\mu\nu} \frac{di^\nu}{dt}$$

Si après avoir augmenté le courant et saturé le flux, on rediminue l'intensité du courant, ce n'est pas pour autant que l'on repasse par le même "chemin" c'est à dire qu'on retrouve la même variation de mutuelle inductance en décroissance. Les effets de rémanence vont faire qu'il faudra un courant inverse par exemple pour rétablir le flux non saturé. Lorsque l'on a ainsi un écart entre les deux variations, on a une courbure de l'espace considéré. Si la courbure est assez forte et que les extrémités des deux trajets ne puissent pas se retrouver, on a une torsion de l'espace. Or cette différence entre deux chemins ayant en commun les points de départ et éventuellement ceux d'arrivée, constitue une maille. On doit donc pouvoir jauger d'une notion de courbure en regardant l'impédance (au sens généralisé) d'une maille.

4.5.10.1 Courbure au niveau d'une maille

On considère deux branches, chacune de propriétés résistives pures. On plonge ce circuit très simple dans un champ magnétique dont la source est très lointaine. Cette source est elle-même un couple de branche rayonnant un champ magnétique suivant un moment connu. La figure "couplage avec courbure" montre la situation considérée.

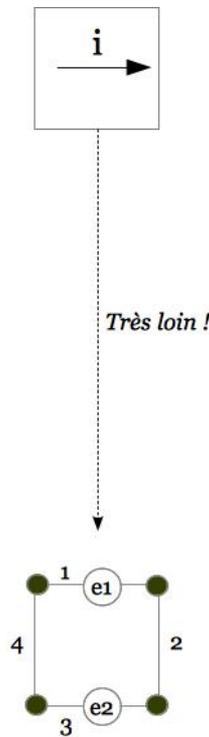


Figure "couplage avec courbure".

La fém induite sur la branche du haut du circuit récepteur s'exprime par (les i^θ étant les courants sources du champ émetteur) :

$$e_1 = \frac{d}{dt} (M_{1\theta} i^\theta) = M_{1\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{1\theta}}{dt} i^\theta \quad (4.56)$$

et celle sur la branche du bas :

$$e_2 = \frac{d}{dt} (M_{2\theta} i^\theta) = M_{2\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{2\theta}}{dt} i^\theta \quad (4.57)$$

On en déduit la fém de la maille :

$$e = M_{1\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{1\theta}}{dt} i^\theta - M_{2\theta} \frac{di^\theta}{dt} - \frac{dM_{2\theta}}{dt} i^\theta \quad (4.58)$$

Si la variation de mutuelle est nulle, on retrouve le seul écart entre les couplages. Or si la distance à l'émetteur est très grande, $\Delta M = M_{1\theta} - M_{2\theta} \rightarrow 0$. Ainsi, la fém de maille est nulle, on peut dire qu'aucune "courbure" n'est sensible au sens où ce circuit plongé dans un champ uniforme ne ressent pas d'écart dans la circulation du courant de maille sur le parcours des branches 1 et 2 par rapport au parcours sur les branches 3 et 4.

Imaginons maintenant qu'un mouvement engendre une variation de mutuelle. La fém de maille s'écrit alors :

$$e = M_{1\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{1\theta}}{dx^\alpha} v^\alpha i^\theta - M_{2\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{2\theta}}{dx^\alpha} v^\alpha i^\theta$$

Soit :

$$e = (M_{1\theta} - M_{2\theta}) \frac{di^\theta}{dt} + ([1\theta, \alpha] - [2\theta, \alpha]) v^\alpha i^\theta \quad (4.59)$$

Mais toujours du fait que la distance est grande par rapport aux dimensions de la maille, le terme qui pourrait engendrer une fém sensible reste en fait très faible, sauf à ce que la vitesse v^α soit relativiste, ou, ce qui revient au même, que la mutuelle ne dépende pas seulement de la position mais d'une fonction de la position. Posons : $M = M(u(x^\alpha))$ (ce qui revient à écrire $M(x^\alpha, u^\alpha(x)) \bullet x^\alpha$). Alors la première fém vaut :

$$e_1 = M_{1\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{1\theta}}{dt} i^\theta + \frac{dM_{1\theta}}{du^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} i^\theta$$

Soit =

$$e_1 = M_{1\theta} \frac{di^\theta}{dt} + \frac{dM_{1\theta}}{dx^\alpha} v^\alpha i^\theta + \frac{dM_{1\theta}}{du^\alpha} \frac{du^\alpha}{dx^\beta} v^\beta i^\theta \quad (4.60)$$

En procédant de même pour e_2 et en faisant la différence, on trouve la fém de maille :

$$e = \Delta M \frac{di^\theta}{dt} + \left(\{[1\theta, \alpha] - [2\theta, \alpha]\} v^\alpha + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\beta} [1\theta, \alpha] u^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\beta} [2\theta, \alpha] u^\alpha \right\} v^\beta \right) i^\theta \quad (4.61)$$

On définit :

$$R_{(1,2)\theta} = \left(\{[1\theta, \alpha] - [2\theta, \alpha]\} v^\alpha + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\beta} [1\theta, \alpha] u^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\beta} [2\theta, \alpha] u^\alpha \right\} v^\beta \right) \quad (4.62)$$

comme "courbure" de l'espace de la maille, qui traduit une courbure de l'espace du champ inducteur dans la maille. L'expression est différente de celle de la courbure de Riemann (en fait elle est plus proche de celle de Ricci), mais d'une part on a travaillé sur les courants et non les variables d'espace, on a de fait calculé des dérivées simples au lieu de dérivées secondes ; d'autre part, on travaille sur un espace cellulaire et non plus continu. Mais la démarche pour retrouver le tenseur de Riemann est exactement la même[OMC]. Cette courbure appliquée à l'espace continu revient à calculer une maille sur deux cordes.

4.5.10.2 Démonstration classique de la courbure appliquée aux lignes de champ magnétique

On a émis l'hypothèse qu'à l'échelle d'un réseau la courbure gravitationnelle était négligeable. On peut se demander si celle qui serait imprimée aux réluctances l'est de fait? En considérant la présence de masses magnétiques on peut calculer cette courbure avec au départ une démarche similaire à celle des champs de gravitation en partant sur l'hypothèse que l'on ne considère que l'énergie magnétique issue de ces masses, que l'on pourra pondérer ensuite. On sait que le calcul pour les géodésiques de l'espace-temps d'Einstein détermine les trajectoires des photons donc du champ lointain et suit le même principe. Il ne sera donc pas utile de refaire ce calcul pour les cordes réelles.

Partons de l'énergie magnétique. En partant de l'idée de petits aimants identifiés par le champ H et de lignes de fém comme autant de vitesses, on évalue l'expression : $P_H = \mu_{ab} \dot{H}^a \dot{H}^b = \mu_{ab} h^a h^b$. La racine du produit des vecteurs renvoie à une grandeur proportionnelle à une fém. Cette fém représente le travail d'un champ sur un parcours curviligne quelconque. On peut donc l'intégrer pour exprimer l'intégrale d'action S du champ entre deux points A et B (cela revient aussi à suivre le flux, ou les lignes de réluctances) :

$$S = \int_A^B d\lambda \mathcal{L} = \int_A^B d\lambda \sqrt{\mu_{ab} h^a h^b} \quad (4.63)$$

On a vu que la fonction qui répondait à cette intégration est la fonction de Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H^\alpha} = e_\alpha$$

Calculons le second terme :

$$\frac{\partial}{\partial H^\alpha} (\mu_{\sigma\beta} h^\sigma h^\beta) = \frac{\partial \mu_{\sigma\beta}}{\partial H^\alpha} h^\sigma h^\beta \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H^\alpha} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial \mu_{\sigma\beta}}{\partial H^\alpha} h^\sigma h^\beta$$

Calculons le premier terme :

$$\frac{\partial}{\partial h^\alpha} (\mu_{\sigma\beta} h^\sigma h^\beta) = \mu_{\alpha\beta} h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} h^\sigma = 2\mu_{\alpha\sigma} h^\sigma$$

Dans ce dernier cas, on suppose la métrique μ symétrique. Cette hypothèse n'est pas évidente, aussi peut-on garder la demi somme des termes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\alpha} = \frac{1}{2\mathcal{L}} (\mu_{\alpha\beta} h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} h^\sigma)$$

Il faut maintenant dériver cette expression vis à vis de λ . Pour le premier terme on trouve :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2\mathcal{L}} \right) = -\frac{1}{4\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}$$

Et pour le second terme :

$$\frac{d}{d\lambda} (\mu_{\alpha\beta}) h^\beta = \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial H^\nu} \frac{\partial H^\nu}{\partial \lambda} h^\beta = \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial H^\nu} h^\nu h^\beta$$

et identiquement :

$$\frac{d}{d\lambda} (\mu_{\sigma\alpha}) h^\sigma = \frac{\partial \mu_{\sigma\alpha}}{\partial H^\nu} h^\nu h^\sigma$$

Auquel s'ajoute les dérivées simples :

$$\mu_{\alpha\beta} \partial_\lambda h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} \partial_\lambda h^\sigma$$

On obtient finalement :

$$e_\alpha = -\frac{1}{4\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} (\mu_{\alpha\beta} h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} h^\sigma) + \frac{1}{2\mathcal{L}} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial H^\nu} h^\nu h^\beta + \frac{\partial \mu_{\sigma\alpha}}{\partial H^\nu} h^\nu h^\sigma \right) + \dots \quad (4.64)$$

$$\dots + \frac{1}{2\mathcal{L}} (\mu_{\alpha\beta} \partial_\lambda h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} \partial_\lambda h^\sigma) - \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial \mu_{\sigma\beta}}{\partial H^\alpha} h^\sigma h^\beta$$

On réorganise les termes pour écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}e_\alpha + \frac{1}{4\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} (\mu_{\alpha\beta} h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} h^\sigma) = \dots \\ \dots \frac{1}{2} (\mu_{\alpha\beta} \partial_\lambda h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} \partial_\lambda h^\sigma) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\sigma}}{\partial H^\beta} + \frac{\partial \mu_{\beta\alpha}}{\partial H^\sigma} - \frac{\partial \mu_{\beta\sigma}}{\partial H^\alpha} \right) h^\beta h^\sigma \end{aligned}$$

Multiplions les termes par la métrique inverse : $y^{\gamma\alpha}$ et notons :

$$\dot{\chi}^\gamma = \frac{1}{2} y^{\gamma\alpha} (\mu_{\alpha\beta} \partial_\lambda h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} \partial_\lambda h^\sigma) \quad (4.65)$$

et :

$$\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma = \frac{1}{2} y^{\gamma\alpha} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\sigma}}{\partial H^\beta} + \frac{\partial \mu_{\beta\alpha}}{\partial H^\sigma} - \frac{\partial \mu_{\beta\sigma}}{\partial H^\alpha} \right) \quad (4.66)$$

Et enfin :

$$T^\gamma = y^{\gamma\alpha} \left\{ \mathcal{L}e_\alpha + \frac{1}{4\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} (\mu_{\alpha\beta} h^\beta + \mu_{\sigma\alpha} h^\sigma) \right\} \quad (4.67)$$

Soit finalement l'équation des géodésiques des lignes de champ magnétique :

$$T^\gamma = \dot{\chi}^\gamma + \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma h^\beta h^\sigma \quad (4.68)$$

Si les cordes - les lignes de champ magnétiques - sont tordues en l'absence de source, cela indique une courbure réelle de l'espace des cordes. Calculons suivant notre idée précédente, la maille de deux cordes, comme illustré figure "maille de deux cordes".

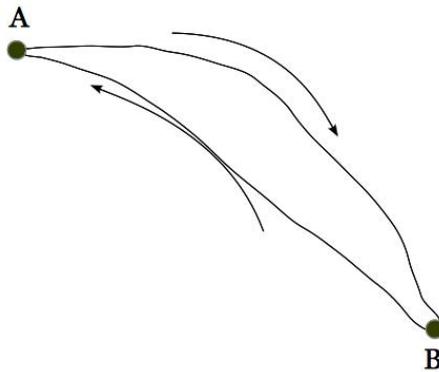


Figure "maille de deux cordes".

Seulement quel trajet choisir? Contrairement à l'espace cellulaire, on ne peut se fixer un parcours sans se demander si le choix n'impacte pas le résultat. Pour lever ce doute, on doit déterminer un déplacement élémentaire sur chaque chemin. En l'absence de sources on peut écrire :

$$\dot{\chi}^\gamma + \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma h^\beta h^\sigma = 0 \Rightarrow \dot{\chi}^\gamma = -\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma h^\beta h^\sigma \Leftrightarrow \dot{\chi}^\gamma d\lambda = -\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma h^\beta dH^\sigma$$

Or $\dot{\chi}^\gamma$ est homogène à la dérivée d'un flux : $\partial_\lambda h^\gamma$, soit que :

$$\partial_\lambda h^\gamma d\lambda = -\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma h^\beta dH^\sigma$$

On peut maintenant définir une maille élémentaire, peu importe où puisqu'elle est calculée sur un déplacement infinitésimal le long des lignes de champ. On se déplace tout d'abord du point A vers un point intermédiaire C :

$$h^\gamma(C) = h^\gamma(A) - \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A) h^\beta(A) dH^\sigma$$

puis on se déplace de C en B :

$$h^\gamma(B) = h^\gamma(C) - \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(C)h^\beta(C)dH^\sigma$$

On peut développer le coefficient de Christoffel en C au premier ordre :

$$\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(C) = \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A) + \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A)}{\partial H^\nu}dH^\nu$$

par remplacement on trouve :

$$h^\gamma(B) = h^\gamma(A) - \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A)h^\beta(A)dH^\sigma - \left(\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A) + \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma(A)}{\partial H^\nu}dH^\nu \right) \left\{ h^\beta(A) - \Gamma_{\beta\sigma}^\beta(A)h^\beta(A)dH^\sigma \right\} dH^\sigma$$

Soit en réorganisant les termes :

$$h^\gamma(B) = h^\gamma(A) - \left\{ \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma - \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma - \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu}dH^\nu + \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma\Gamma_{\beta\sigma}^\beta dH^\sigma + \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu}\Gamma_{\beta\sigma}^\beta dH^\nu dH^\sigma \right\}_{(A)} h^\beta(A)dH^\sigma \quad (4.69)$$

Pour effectuer la branche de retour qui constitue le retour de maille, il suffit d'invertir dH^σ avec dH^β , soit intervertir les indices σ et β . On trouve (en annulant les deux premiers termes qui se compensent!) :

$$h^\gamma(A) = h^\gamma(B) - \left\{ -\frac{\partial\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma}{\partial H^\nu}dH^\nu + \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma dH^\beta + \frac{\partial\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma}{\partial H^\nu}\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma dH^\nu dH^\beta \right\}_{(B)} h^\sigma(B)dH^\beta$$

En faisant la différence de ces deux expressions, on calcule la fém de maille élémentaire issue de la variation de flux provoquée par la courbure :

$$2\delta h^\gamma = \left(\frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu}h^\beta dH^\sigma - \frac{\partial\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma}{\partial H^\nu}h^\sigma dH^\beta \right) dH^\nu + \left(\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma dH^\beta dH^\beta h^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma\Gamma_{\beta\sigma}^\beta dH^\sigma dH^\sigma h^\beta \right) + \dots \quad (4.70)$$

$$\dots + \left(\frac{\partial\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma}{\partial H^\nu}\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma dH^\nu dH^\beta dH^\beta h^\sigma - \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu}\Gamma_{\beta\sigma}^\beta dH^\nu dH^\sigma dH^\sigma h^\beta \right)$$

En négligeant les termes du troisième ordre en dH , et en réorganisant les indices on trouve :

$$2\delta h^\gamma = \left(\frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^\gamma}{\partial H^\sigma} + \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma\Gamma_{\beta\nu}^\alpha \right) dH^\nu dH^\sigma h^\beta \quad (4.71)$$

On nomme :

$$R_{\beta\sigma\nu}^\gamma = \frac{\partial\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma}{\partial H^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^\gamma}{\partial H^\sigma} + \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma\Gamma_{\beta\nu}^\alpha \quad (4.72)$$

tenseur de Riemann de courbure du quatrième ordre. Et l'écart de flux magnétique peut s'écrire :

$$\delta h^\gamma = \frac{1}{2}R_{\beta\sigma\nu}^\gamma\Delta S_H^{\sigma\nu}h^\beta \quad (4.73)$$

Où $\Delta S_H^{\sigma\nu}$ est la surface élémentaire couverte par les lignes de champ magnétique.

Quelle est l'interprétation de ce résultat ? Le flux Li peut être exprimé par un produit $\mu SH = \mu\phi$. Si l'on divise par la section du flux, on obtient une relation sur la densité de flux μH . L'énergie magnétique est donc liée à un produit avec des densités de flux (on parlera de flux pour densité de flux). Ces flux, contrairement à la densité de courant dans des branches, sont libres. L'équation 4.67 exprime comment vont s'organiser ces lignes de flux libres en fonction des sources T^γ , avec $T^\gamma = y^{\gamma\alpha} \sqrt{\mu_{\alpha\beta}} h^\alpha h^\beta e_\alpha$. La relation précédente sans sources indique le lien entre la variation de flux entre deux lieux proches et le flux lui-même. La quantité $\Delta S_H^{\sigma\nu} h^\beta$ doit donc pouvoir être ramenée à une sorte de fém. Pour cela il faut multiplier à gauche et à droite par la métrique $\mu_{\eta\gamma}$. On obtient :

$$\mu_{\eta\gamma} \delta h^\gamma = \frac{1}{2} R_{\eta\beta\sigma\nu} \Delta S_H^{\sigma\nu} h^\beta$$

Dans cette expression on a à gauche une différence de densité de fém et à droite la relation de cette différence avec la densité de flux. Intégrons la surface élémentaire dans les expressions du tenseur de Riemann pour contracter ce dernier et obtenir :

$$\mu_{\eta\gamma} \delta h^\gamma = \frac{1}{2} R_{\eta\beta} h^\beta$$

En multipliant à gauche et à droite par h^η :

$$h^\eta \mu_{\eta\gamma} \delta h^\gamma = \frac{1}{2} R_{\eta\beta} h^\beta h^\eta$$

Multiplions à gauche et à droite par $\mu_{\beta\eta}$ pour faire apparaître l'énergie à droite ($2P_H = \mu_{\eta\beta} h^\eta h^\beta$ et $\mu_{\eta\beta} h^\beta = e_\eta$, $\mu_{\eta\gamma} \delta h^\gamma = \delta e_\eta$) :

$$\mu_{\beta\eta} h^\eta \mu_{\eta\gamma} \delta h^\gamma = R_{\eta\beta} P_H = e_\beta \delta e_\eta$$

D'où finalement :

$$R_{\eta\beta} = \frac{1}{P_H} e_\beta \delta e_\eta \quad (4.74)$$

Le "tenseur de Ricci" du champ magnétique comme nous pourrions l'appeler est égal à l'inverse de toute l'énergie magnétique présente dans l'univers considéré multiplié par l'écart entre les fém induites n'importe où sur deux lignes de flux très proches. C'est donc de toute façon une quantité faible. On peut faire apparaître ce rapport entre l'énergie locale et totale en écrivant :

$$R_{\eta\beta} = \frac{1}{P_H} (e_\eta(B) e_\beta - e_\eta(A) e_\beta) = \left(\xi T_{\eta\beta} - \frac{\mu_{\eta\beta}(A)}{P_H} h^\beta e_\beta \right)$$

avec : $\xi T_{\eta\beta} = P_H^{-1} e_\eta(B) e_\beta$. Pour le terme de droite :

$$\frac{\mu_{\eta\beta}}{P_H} h^\beta e_\beta = \zeta \mu_{\eta\beta} \mathcal{T}$$

avec $h^\beta \mu_{\beta\eta} h^\eta = \zeta \mathcal{T}$. On trouve finalement l'expression :

$$R_{\eta\beta} = (\xi T_{\eta\beta} - \zeta \mu_{\eta\beta} \mathcal{T}) \quad (4.75)$$

que l'on pourrait appeler "équation d'Einstein pour les lignes de réductances". Les quantités ξ et ζ sont des constantes à déterminer. Mais leurs valeurs ne sont en rien nécessaires pour analyser ce résultat. L'équation 4.75 donne de façon normalisée à toute l'énergie magnétique présente l'écart entre le produit des fém en un lieu et une grandeur proportionnelle à la métrique au même lieu. Le terme de droite fait intervenir l'énergie normalisée des termes diagonaux $h^\beta e_\beta$ alors que le terme de gauche est l'énergie normalisée totale incluant les énergies dans les termes de couplages. Par exemple pour le terme R_{12} en espace de dimension 2 on obtient : $\xi e_1 e_2 - \zeta \mu_{12} (e_2 h_2) = e_2 (\xi e_1 - \zeta \mu_{12} h^2)$. Pour les termes intrinsèques :

$$R_{11} = \xi e_1 e_1 - \zeta \mu_{11} e_1 h^1 = \xi e_1 \left(e_1 - \frac{\zeta}{\xi} \mu_{11} h^1 \right)$$

Comme dans ce cas on s'attend à avoir $R_{11} = 0$, cela implique $\xi = \zeta$. Sous cette hypothèse :

$$R_{12} = \xi (e_1 - \mu_{12}h^2) e_2 = \xi (\mu_{11}h^1 + \mu_{12}h^2 - \mu_{12}h^2) e_2 = \xi \mu_{11}h^1 e_2$$

Le “tenseur de Ricci des réductances” exprime le produit tensoriel des termes intrinsèques par les fém opposées. Les composantes R_{ii} étant nulles, ne restent que les composantes issues des termes croisés de la forme : $\mu_{12}\mu_{22}h^2h^2$ ou encore pour revenir aux flux généralisés :

$$M_{12}L_{22}\frac{d^2i^2}{dt^2}$$

La “courbure” des lignes de densité de réductances provient d’accélération apportées aux flux couplés.

Connaissant le tenseur de Ricci, on exprime la métrique modifiée par sa présence à partir de 4.75 ($\xi = 1$) :

$$\mu_{\eta\beta} = \frac{1}{\mathcal{T}} (T_{\eta\beta} - R_{\eta\beta}) \quad (4.76)$$

La métrique des couplages connues, on résout le réseau global d’après l’équation de Kron incorporant cet effet (on passera des densités de flux aux flux en multipliant par les sections des flux et de la métrique μ aux inductances en multipliant par la section et en divisant par la longueur curviligne). Une discussion importante que l’on peut soulever suite à ces calculs, qu’elle qu’en soit la pertinence, est qu’apparaît clairement ici l’intrication entre le champ, lui-même et la matière. Dans le cas des photons, on admet généralement qu’ils n’interagissent pas entre eux. Il en va différemment des lignes de réductances ou du champ de gravitation qui sont des champs non linéaires. C’est la réflexion menée par Feynman dans son ouvrage sur la gravitation[FEYG].

4.5.11 Considération essentielle sur l’hypothèse de non courbure à l’échelle d’un réseau

On peut justifier de l’absence de courbure des espaces statiques à l’échelle d’un réseau (dont nous allons préciser la taille) par le raisonnement suivant[LL] : pour un référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω l’invariant de distance devient[LL],

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 d\phi dt - dz^2 - r^2 d\phi^2 - dr^2$$

pour un système d’axe r, ϕ, z, t . On voit qu’à une distance supérieure à $c\Omega^{-1}$ l’invariant devient négatif, ce qui n’est pas acceptable. Donc le référentiel ne peut être tournant à une distance supérieure à cette limite. Cependant, cette limite est quand même très grande, ce qui permet de dire qu’en l’absence de changement de référentiel entre axes tournant, on peut considérer un mobile en rotation comme appartenant au référentiel de l’observateur en-deçà de cette limite. Les transformations non holonomiques proposées par Kron se justifient donc pleinement et ne nécessitent pas d’ajouts relativistes. Par contre, leur utilisation pour modéliser des interactions entre particules - donc entre réseaux - en mouvements de rotation relatifs proches peut demander ces modifications dès lors que la vitesse de rotation de la particule atteint la limite critique. Des effets relativistes vont alors courber l’espace pour maintenir le ds^2 positif.

4.5.12 Quelques considérations topologiques

On a vu que les équations les plus instinctives et les plus naturelles que l’on établit relient des fém covariantes aux flux contravariants. Dans l’expression des énergies apparaissent de fait les opérateurs deux fois covariants des dissipations, stockages et mouvements. Dans les opérateurs linéaires les plus simples : G, L, C, \mathcal{R} ; le lien entre ces opérateurs et les grandeurs caractéristiques des milieux μ, ϵ, ρ est géométrique :

$$G = \sigma \frac{S_{yz}}{x} \quad L = \mu_0 \frac{S_{yz}}{x} \quad C = \epsilon_R \frac{S_{yz}}{x} \quad \mathcal{R} = \mu_R \frac{S_{yz}}{x}$$

Les grandeurs géométriques appartiennent à la topologie cellulaire ou à la topologie des cordes. Pour un lieu dans l’espace à la croisée de deux directions a et b on va pouvoir par exemple exprimer le flux :

$$\phi_b = \mathcal{R}_{ba} F^a = \mu_{ba} \left(\frac{S_{\perp x}}{x_{a \rightarrow b}} \right) k^a N_a^a = L_{ba} k^a \quad (4.77)$$

k est le courant de maille associé à la fmm F , $S_{\perp x}$ la section de flux perpendiculaire à la direction curviligne x et N la connectivité entre courant de maille et fmm. Cette connectivité est invariante et autant la section que la direction curviligne sont intrinsèques à la ligne de flux considérée. On a donc un isomorphisme entre le tenseur de

perméabilité et la matrice impédance des inductances. Pour cette raison et pour d'autres plus profondes[ROTT], on considère dans tous les cas la matrice impédance comme un tenseur des impédances. Notons de plus que cette interrogation n'est pas justifiée en ce sens que la simple confirmation de la conservation de l'impédance dans un changement de base de branches suffit strictement pour lui accorder son caractère tensoriel[SCHAUM].

Mais pour conclure sur le sujet il faut lire le texte de Banesh Hoffmann dans son article dans l'ouvrage "Gabriel Kron and Systems theory"[HHG]. Banesh Hoffmann explique que les aspects tensoriels, matriciels, scalaires sont en fait indissociables de l'espace de configuration choisi, et de prendre l'exemple de la masse qui, dans un système d'une particule est un scalaire, et dans un système de plusieurs particules devient un tenseur. En choisissant de relier l'ensemble des flux d'un problème à un vecteur flux plutôt qu'à un ensemble d'intensités sans directions, Gabriel Kron a projeté la description du problème dans un espace de configuration très riche qui lui a permis de faire apparaître l'invariant de puissance. Dans cet espace il est tout à fait légitime de nommer la matrice des impédances tenseur des impédances ou tenseur fondamental ou encore comme nous l'avons admis, "métrique".

4.6 Conclusion du chapitre 4

Ce chapitre a été l'occasion de balayer différentes techniques incluant le format, l'objet non holonomique, les coefficients de Christoffel, le tenseur de Riemann, etc., liées aux effets relativistes en général appliqués à l'analyse tensorielle des réseaux. On a vu des déformations des topologies cellulaires, des impacts sur les expressions des cordes réelles ou virtuelles et l'insertion d'un changement d'axes dans l'expression du lagrangien. Ces différents exercices permettent d'aborder toutes les transformations envisagées, dont par exemple celles appliquées aux machines électriques. On trouvera une description très détaillée de ce réseau particulier dans[RAAG]. Dans tous les cas, les transformations peuvent être intégrées dans l'expression des fonctions d'impédances généralisées du tenseur fondamental de la méthode de Kron.

Dans le cas où l'on désire calculer la trajectoire d'un réseau mobile, on pourra toujours se référer à l'accélération relativiste. Comme on l'a vu précédemment, une particule peut toujours être représentée par un réseau plus ou moins complexe redonnant ses modes principaux d'énergie : on aborde la mécanique quantique vue au travers de réseaux dans le prochain chapitre.

Les objets macroscopiques sont constitués de multitudes de réseaux. Certains de ces réseaux sont à la périphérie de l'objet, d'autres dans ses couches internes. Dans tous les cas il faut pouvoir relier les réalités macroscopiques des objets aux composantes des réseaux cellulaires. Ce sont des opérations d'homotopie qui ramènent ces parties d'objets à des branches, des sommets. Mais on doit garder en mémoire la réalité géométrique de départ pour pouvoir calculer les interactions entre ces branches et leur environnement ou leurs voisins. Une connexion n simple permet dans de nombreux cas de relier les sommets des réseaux à des points dans un espace de référence défini. Mais dans le cas général on connecte à chaque élément du graphe du réseau un ensemble de points - une variété - qui décrit la géométrie que la branche embrasse dans sa modélisation[PCB]. Une application relie donc chaque élément du graphe avec une variété sous des formes qui peuvent être diverses suivant les besoins et les caractéristiques de cette variété nécessaires à la modélisation réalisée. On notera d'une manière générale n_b^x cette connexion où x désigne toute quantité fiable.

Les rapprochements possibles entre le formalisme de Kron et le formalisme de la relativité générale tiennent avant tout aux techniques mathématiques mises en œuvre dans les deux cas plus qu'à une similitude de processus physique. Les machines électriques comme on l'a vu ne font pas apparaître de courbure de l'espace au sens d'une modification des axes géométriques de référence sur lesquels on s'appuie pour déterminer des trajectoires. Par contre on peut calculer une courbure comme des termes de couplages en champ magnétique qui viennent se rajouter aux termes classiques calculés sans tenir compte d'effets relativistes ou de référentiels en mouvements relatifs accélérés. Mais vu les vitesses de rotation des machines on est encore bien loin de devoir tenir compte des effets relativistes. Par contre, on peut considérer les termes rajoutés pour compléter la métrique et ainsi avoir une expression plus précise des couplages dans les cas où des mobiles dans la machine sont en accélération dans un référentiel en déplacement par rapport à un autre.

Ce chapitre donne a priori tous les mécanismes utiles pour calculer des situations très diverses d'interactions entre réseaux en mouvements relatifs intertiels ou non.

4.7 Références du chapitre 4

- [BLSG] N.V.Balasubramanian, J.W.Lynn, D.P.Sen Gupta, "Differential Forms on Electromagnetic Net-

- works". Edition Daniel Davey and Co, 1970.
- [FEYC] R.P.Feynman, "cours de physique, tome 1 - mécanique". Edition Pearson Addison Wesley, 2006.
 - [LL] L.Landau, E.Lifchitz, "Théorie des champs, tome 2 de physique théorique". Edition MIR, 1989.
 - [BOR] M.Boratav, R.Kerner, "Relativité". Edition Ellipses, 1991.
 - [YKS] Y. Kosmann-Schwarzbach "Groupe et symétries". Edition de l'école polytechnique, 2010.
 - [BER] C.Kittel, W.D.Knight, M.A.Ruderman, "cours de physique de Berkeley, volume 1". Edition Armand Collin, 1972.
 - [FEYT] R.P.Feynman, "Thèse de Feynman". Edition Pearson éducation, 2007.
 - [KRON1] G.Kron, "Non riemannian dynamics of rotating electrical machinery". Journal of Mathematics and Physics, 13, 2 (1934), pgs 103-194.
 - [KRON2][KRON3] G.Kron, "The application of tensors to the analysis of electrical rotating machinery". General Electric Review, 1935-1938. Réédité en un volume, édition General Electric, Schenectady, New-York, 1942.
 - [KRON4] G.Kron, "Analyse tensorielle appliquée à l'art de l'ingénieur". Bulletin des ingénieurs électriciens sortis de l'institut électrotechnique Montefiore, 9, 10, (1936), 1, 2 (1937).
 - [KRON5] G.Kron, "A short course in tensor analysis for electrical engineers". Edition John Wiley and Sons, New-York, 1942.
 - [KRON6] S.Okada, "On the application of tensor analysis in electrical engineering". Tensor Society. Première série, 8 (1948), 1-41.
 - [KRON7] S.A.Stigant, "Gabriel Kron on tensor analysis". Enregistrement bibliographique. BEAMA journal, 1948.
 - [PEK] D.Papin, A.Kaufmann, "Cours de calcul tensoriel". Edition Albin Michel, 1966.
 - [KRON8] W.J.Gibbs "Tensors in electrical machine theory". Chapman and Hall, Londres, 1952.
 - [GSB] G.S.Brosan, "Dyodesics and machine equation". The matrix and Tensor quarterly, 4, 2 (1953).
 - [MA] F.Martin-Robine, "Histoire du principe de moindre action". Edition Vuibert, 2006.
 - [ROTT] A.Rottman, "Gabriel Kron et la formulation d'une technique de résolution des systèmes complexes sur la base de la théorie globale du circuit électrique (électrodiagnostique)". Article du bulletin scientifique de l'institut Montefiore, 1988.
 - [MRDD] O.Maurice, A.Reineix, F.Dubois, P.Durand, "On Mathematical Definition of Chords between Networks". Congrès Euroem2012, Toulouse, 2012.
 - [PEN] R.Penrose, "A la découverte des lois de l'univers". Edition Odile Jacob, 2004.
 - [RAAG] K.Kondo & al., "Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry". Publié par le groupe Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo, 1955.
 - [SCHAUM] M.R.Spiegel, "Analyse vectorielle". Edition Mc Graw Hill, 1992.
 - [GAB] R.Gabillard, "Vibrations et phénomènes de propagation". Edition Dunod université, 1969.
 - [OM] O.Maurice, "La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes". Edition Hermès-Sciences, 2007.
 - [JCB] J-C.Boudenot, "Electromagnétisme et gravitation relativistes". Edition Ellipses, 1989.
 - [CRO] A.Vander Vorst, "Electromagnétisme, champs et circuits". Edition de Boeck, 2002.
 - [BOL] L.Boltzmann, "Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nicht-holonome, generalisierte Coordinaten". Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 111, IIa (1902), 1603~1614.
 - [HAM] G.Hamel, "Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik". Zeitschrift für Mathematik und Physik, 50 (1904), 1~57.
 - [OMC] O.Maurice, "Topologie appliquée". <http://olivier.maurice.pagesperso-orange.fr/>. Policopié de cours à l'école centrale de Lyon, 2011.
 - [JMR] J-M.Rocard, "Newton et la relativité". Edition Que sais-je ? PUF, 1986.
 - [PCB] P.C.Breedveld, "Port based modeling of dynamic systems". Bertinoro summer school 2005.
 - [HHG] H.H.Happ, "Gabriel Kron and systems theory". Edition Union College Press, Schenectady, New-York 1973.
 - [FEYG] R.P.Feynman, "Leçons sur la gravitation". Edition Odile Jacob, Paris 1995.
 - [YAD] B.Yavorski, A.Detlaf, "Aide-mémoire de physique". Edition MIR, 1984. Page 544.

Chapitre 5

Mécanique quantique

5.1 Introduction au chapitre 5

Dans les multiples phénomènes physico-chimiques que l'on veut pouvoir modéliser avec des réseaux se trouvent ceux renvoyant aux processus quantiques. De même que l'espace des moments se trouve enfoui dans les interactions de champ lointain, sauf à y regarder à cette échelle, on s'attend à ce que les phénomènes quantiques n'apparaissent qu'à une échelle inférieure à celle du réseau macroscopique et se résument soit à une propriété globale d'une branche ou d'un sommet, soit en un changement d'échelle que l'on visualise en un objet quantique sous forme de réseau. Il est de toute façon largement fait la démonstration de la connexion entre le monde des observables classiques et le monde quantique des branches via la science des semi-conducteurs[HM]. Pour ces composants, on travaille à partir de la mécanique quantique pour élaborer des modèles électroniques exploitables au niveau des espaces des branches et des cordes.

Pour aborder ces concepts, on rappelle les fondements de la mécanique quantique et de ses opérateurs pour ensuite regarder dans les deux cas d'échelles comment se traduisent ces préceptes.

Il ne s'agit pas ici de réécrire la mécanique quantique ou de proposer une nouvelle interprétation de ses concepts, mais juste de montrer que la méthode peut intégrer le formalisme quantique avec des exemples concrets. Ce sont les utilisateurs qui pourront l'employer suivant leurs besoins, pour la mécanique quantique ou pour toute autre modélisation faisant appel à ses formalismes. Il se peut que dans le discours une certaine ambiguïté apparaisse laissant penser que l'on prétend démontrer des principes quantiques par une nouvelle démarche mais il n'en est rien. On veut juste montrer que l'on peut intégrer sa démarche théorique en la reprenant sur des exemples illustratifs, pour l'intégrer dans des systèmes d'équations multiphysiques.

5.2 Relations fondamentales de la mécanique quantique

5.2.1 Méthode des opérateurs

On est relativement habitué à manipuler des opérateurs dans la méthode de Kron appliquée aux systèmes non linéaires. Mais ceux de la mécanique quantique constituent une collection qui porte souvent sur l'énergie, alors que dans le monde macroscopique on se réfère plus souvent aux potentiels.

Un opérateur est "*un symbole mathématique qui, agissant sur une fonction de certaines variables, produit une autre fonction de ces mêmes variables*"[DS]. Suivant Sivoukhine, on notera avec un chapeau les opérateurs quantiques.

Les opérateurs se somment : $(\hat{A} + \hat{B}) \cdot f(x) = \hat{A} \cdot f(x) + \hat{B} \cdot f(x)$. On peut aussi réaliser le produit d'opérateurs : $\hat{B} [\hat{A} \cdot f(x)]$. Les opérateurs ne commutent pas forcément. Prenons par exemple deux opérateurs : \hat{x} et $\hat{\partial}_x$ que l'on applique à la fonction $2x^2$. Calculons tout d'abord $\hat{\partial}_x \cdot (2x^2) = 4x$ puis appliquons le second opérateur : $\hat{x} \cdot (4x) = 4x^2$. Appliquons les deux opérateurs dans l'ordre inverse :

$$\hat{x} \cdot (2x^2) = 2x^3 \rightarrow \hat{\partial}_x \cdot (2x^3) = 6x^2$$

On voit que :

$$[\hat{x}\hat{\partial}_x - \hat{\partial}_x\hat{x}] \cdot x = 2x^2$$

Alors que si les deux opérateurs commutaient, on aurait trouvé zéro.

Principe :

En mécanique quantique, les opérateurs sont linéaires. On exploite cette hypothèse pour appliquer la superposition des états.

Autrement dit : $\hat{A} \cdot (\lambda f + \mu \psi) = \lambda \hat{A} \cdot f + \mu \hat{A} \cdot \psi$.

La valeur observable, mesurable d'une grandeur associée à un objet quantique de fonction d'onde ψ se déduit de l'intégration sur un domaine de l'application de l'opérateur associé à la mesure de la fonction d'onde. Par exemple pour la position de la particule, si la fonction d'onde ne dépend que de x , on calculera sa position moyenne macroscopiquement observable par :

$$\langle x \rangle = \int_D dx \psi^* \hat{x} \psi \quad (5.1)$$

La moyenne d'une fonction quelconque $f(x)$ se calcule de la même façon :

$$\langle f(x) \rangle = \int_D dx \psi^* \hat{f}(x) \psi$$

Il y a donc une notion d'image entre l'observable classique mesurée et son opérateur quantique correspondant.

La première difficulté que l'on rencontre dans ces définitions est de savoir comment calculer la valeur moyenne, autrement dit comment définir le domaine D ? Une astuce consiste à définir une fonction ϕ identique à ψ sur le domaine d'existence de ψ et nulle là où ψ est nulle, mais périodique. Soit L cette période, la fonction ϕ est normalisée sur ce domaine, soit :

$$\int_0^L dx \phi^* \phi = 1 \quad (5.2)$$

De par cette normalisation (appelée première normalisation), on peut calculer les valeurs moyennes des opérateurs appliqués à des fonctions d'ondes, on peut mener toute opération, ayant levé les singularités d'un domaine infini. Ayant périodisé ϕ , on peut le développer en série de Fourier. La fonction périodisée ϕ s'écrit :

$$\phi(x) = \sum_n c_n e^{ik_n x}$$

On définit les coefficients :

$$c_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx \phi(x) e^{-ik_m x} = \frac{1}{L} \int_0^L dx \psi(x) e^{-ik_m x}$$

La condition de normalisation devient alors :

$$\int_0^L dx \phi^* \phi = \int_0^L dx \sum_m c_m^* e^{-ik_m x} c_m e^{ik_m x} = \sum_m |c_m|^2 \int_0^L dx = L \sum_m |c_m|^2 = 1$$

On peut de la même façon développer l'application d'un opérateur :

$$-i\hbar \int_0^L dx \phi^* \partial_x \phi = -i\hbar \int_0^L dx \sum_m (c_m^* e^{-ik_m x} \partial_x c_m e^{ik_m x}) = -i\hbar L \sum_m |c_m|^2 k_m$$

On peut ainsi écrire toutes les expressions de la mécanique quantique en fonction des coefficients des développements des fonctions d'ondes en séries de Fourier.

Pour un problème donné on peut définir une base de fréquences caractéristiques sur lesquelles on projette les coefficients c_n . Dans cette base, on peut définir aussi un espace fonctionnel utilisant le principe des brackets de Dirac[GAB]. Leur usage dans le cadre de l'analyse tensorielle des réseaux permet d'identifier que l'on travaille à l'échelle de la mécanique quantique sur une partie de l'analyse, mais devient vite lourd en écriture. C'est pourquoi dans de nombreux ouvrages on utilise l'écriture tensorielle pour écrire les calculs nécessitant de longs développements.

Opération de quantification :

L'opération de quantification consiste à égaliser un opérateur appliqué à une fonction d'onde et la valeur moyenne de cet opérateur multiplié par la même fonction d'onde. Les valeurs moyennes qui respectent cette égalité sont dites valeurs propres et les fonctions d'ondes, fonctions propres. En d'autres termes on réalise

l'égalité : $\hat{A}\psi = A\psi$. En général la mécanique quantique accepte l'idée que toute mesure d'une grandeur physique ne peut fournir que les valeurs propres de l'opérateur correspondant à cette valeur.

En restant général, une mesure A s'exprime comme :

$$A = \int_0^L dx \phi^* \hat{A} \phi = \int_0^L dx \sum_n c_n^* e^{-ik_n x} \hat{A} \sum_n c_n e^{ik_n x} = \sum_n \int_0^L dx c_n^* e^{-ik_n x} \hat{A} c_n e^{ik_n x}$$

En passant au braket, cette expression devient ¹ :

$$A = \langle c_n | \hat{A}_{nm} | c_m \rangle \quad (5.3)$$

Avec \hat{A}_{nm} l'élément de matrice de l'opérateur \hat{A} défini par :

$$\hat{A}_{nm} = \int_0^L dx (\bullet^*)_n \hat{A} (\bullet)_m$$

et les bras :

$$\langle c_n | = [c_1^* e^{-ik_1 x} \quad c_2^* e^{-ik_2 x} \quad \dots]$$

et les kets :

$$| c_m \rangle = \begin{bmatrix} c_1 e^{ik_1 x} \\ c_2 e^{ik_2 x} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Lorsque l'on se réfère aux éléments non intégrés (de la forme $\phi^* \hat{A} \phi$) on parle de densité d'éléments de matrice, de densités moyennes ou de matrice densité.

La mécanique quantique est une mécanique ondulatoire (ou théorie quantique des champs : ces deux théories ont des différences mais se retrouvent en de nombreux points[LDB]) où le temps est un paramètre. Si on considère un élément de matrice, il peut dépendre du temps soit par les fonctions d'ondes auxquelles il s'applique, soit lui-même contient le paramètre t dans sa définition. La mécanique ondulatoire est partie de l'expression d'une onde plane de de Broglie : $\psi_n = c_n e^{i(\omega t - k_n x)}$, $H_n = h\nu_n \rightarrow \psi_n = c_n e^{i\hbar^{-1}(H_n t - \hbar k_n x)}$. Le terme $\hbar k_n$ est homogène à une impulsion p_n ($\hbar k_n = \hbar c^{-1} 2\pi\nu_n = h\nu_n c^{-1}$, $h\nu_n c^{-2}$ est une masse donc $h\nu_n c^{-1}$ est une impulsion). Si l'on dérive cette expression on trouve :

$$\frac{d}{dt} \psi_n = \frac{d}{dt} c_n e^{i\hbar^{-1}(H_n t - p_n x)} = \frac{i}{\hbar} H_n \psi_n$$

D'où l'on tire l'équation fondamentale de la mécanique quantique[LDB], première équation citée dans l'ouvrage de de Broglie :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} \psi_n = H_n \psi_n \quad (5.4)$$

(on notera que toutes nos expressions sont identiques en trois dimensions d'espace, en ajoutant les termes en y et z). On peut maintenant chercher l'expression de la dérivée d'un élément de matrice :

$$\frac{da_{nm}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_0^L dx \psi_n^* \hat{A} \psi_m \right) = \int_0^L dx \left(\frac{d\psi_n^*}{dt} \hat{A} \psi_m + \psi_n^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi_m + \psi_n^* \hat{A} \frac{d\psi_m}{dt} \right)$$

Compte tenu de l'équation 5.4 on obtient :

$$\frac{da_{nm}}{dt} = \int_0^L dx \left(\psi_n^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi_m + \frac{i}{\hbar} \left[\psi_n^* \hat{A} H_m \psi_m - H_n^* \psi_n^* \hat{A} \psi_m \right] \right)$$

que l'on peut factoriser en :

$$\frac{da_{nm}}{dt} = \int_0^L dx \psi_n^* \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \left[\hat{A} H_m - H_n^* \hat{A} \right] \right) \psi_m \quad (5.5)$$

1. On assimile ici les bras aux vecteurs covariants et les kets aux vecteurs contravariants.

On retrouve un peu ce comportement suivant lequel, comme pour la dérivation covariante qui faisait intervenir les symboles de Christoffel, la dérivation d'un élément de matrice d'opérateur fait intervenir un terme supplémentaire, le commutateur de l'hamiltonien des énergies H et l'opérateur lui-même \hat{A} . Lorsque le commutateur est nul, cela signifie que la dérivée de l'élément de matrice est égale à une fonction de la dérivée du seul opérateur. Dans le cas contraire, cela signifie que l'espace - c'est à dire la mesure - étudiée est dirigée, la dérivation de l'une puis l'autre des fonctions d'ondes n'est pas symétrique. D'où peut provenir cette "brisure de symétrie" [EE]? Imaginons une fonction d'onde pourvue d'un hamiltonien avec une jauge, de la forme $H = vA + qV$. La jauge étant indépendante du temps, on trouve pour un opérateur \hat{L} qui utilise la dérivée temporelle :

$$\left[\hat{L}H - H\hat{L} \right] \rightarrow \hat{L} \cdot f(vA + qV) - f(vA + qV)\hat{L} \rightarrow f'(vA) - f(vA + qV)\hat{L}$$

on peut donc déjà penser que les changements de jauge donnent lieu à des dérivées avec commutateur non nul.

5.3 Seconde quantification

On peut se placer dans un espace dont les axes sont les différentes énergies que peuvent prendre les particules. Les coordonnées dans cet espace sont les nombres entiers de particules suivant chacun de ces états. On y considère une fonction de répartition R qui définit le nombre de particules par état et pour un instant donné. $|R(n_1, n_2, \dots, t)|^2$ donne la probabilité pour qu'à l'instant t il se trouve n_1 particules dans l'état 1, n_2 dans l'état 2, etc. Ce concept étant une probabilité, il impose une seconde opération de quantification.

5.4 Incertitude d'Heisenberg vue sous le jour de la topologie de Branin

Les cordes réelles on l'a vu précédemment portent des photons. Le modèle de Branin permet de modéliser efficacement leurs trajectoires, y compris celle d'un photon unique. Le plus étonnant est que la topologie de Branin respecte le principe d'incertitude de Heisenberg. Considérons la figure "ligne de Heisenberg".

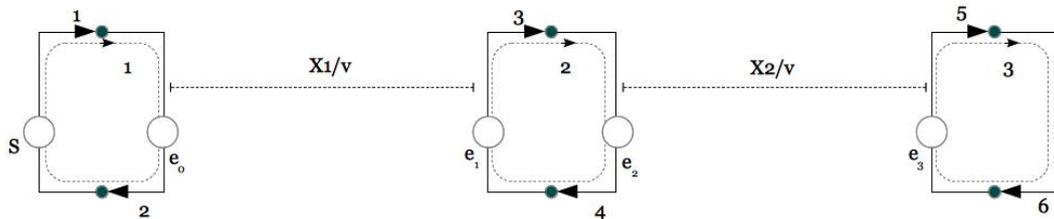


Figure "ligne de Heisenberg".

Elle consiste en deux structures de Branin mises bout à bout. Si l'on applique les lois de Branin à cette structure, on trouve pour la fém de gauche e_0 : $e_0 = (V_3 - Z_c i^3) e^{-\tau p}$. Mais la tension aux bornes des branches 3 et 4, V_3 , dépend aussi de la fém e_2 avec :

$$e_2 = (V_5 - Z_c i^5) e^{-\tau p}. V_5 \text{ peut s'écrire en fonction de la charge } V_5 = R_L i^6. \text{ Finalement :}$$

$$e_0 = (z_{44} i^4 + (R_L i^6 - Z_c i^5) e^{-\tau p} - Z_c i^3) e^{-\tau p} = -Z_c e^{-\tau p} i^3 + z_{44} e^{-\tau p} i^4 - Z_c e^{-2\tau p} i^5 + R_L e^{-2\tau p} i^6$$

On trouve la situation paradoxale où les équations ne suivent plus la topologie. Car on obtient par substitution 2 cordes dans l'espace des mailles partant de la branche 2, là où notre topologie de départ en comptait une seule et chacune de ces cordes a une phase différente. En fait cette coupure n'est pas possible du fait des fém appartenant au modèle de Branin. On ne peut interrompre une ligne de photons comme cela !

Si l'on considère maintenant la structure présentée figure "ligne d'Heisenberg-2".

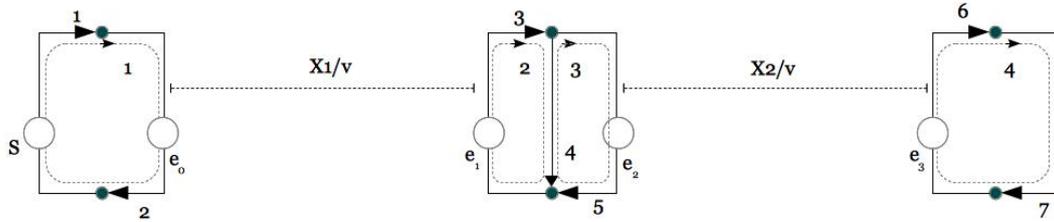


Figure “ligne de Heisenberg-2” : insertion d’un élément d’interface.

Sur cette structure, on a rajouté une branche sur le réseau central, pour modéliser une interface traduisant le fait que l’on vient “mesurer” le photon sur son trajet. La présence de cette interface passive rend indépendants les deux modèles de Branin en donnant pour valeur de V_3 : $Z_i i^4$, Z_i étant l’impédance d’interface. e_0 s’exprime maintenant par :

$$e_0 = (V_3 - Z_c i^3) e^{-\tau p} = (z_{44} i^4 - Z_c i^3) e^{-\tau p} = z_{44} (k^2 - k^3) e^{-\tau p} - Z_c e^{-\tau p} k^2$$

On a cette fois un mode monphasé qui ne dépend pas de l’extrémité opposée dans la propagation. On pourrait multiplier ainsi les interruptions, tant que l’on insère cette interface qui prend en charge la perturbation insérée dans la ligne. On a vu chapitre 2 que l’on peut quantifier le champ en remplaçant la structure de Branin par une chaîne de résonateurs. Mais dans cette chaîne, on a supprimé les cordes réelles pour les remplacer par des cordes virtuelles. De fait, le photon ne se propage plus, mais est excité de proche en proche, ce qui est très différent.

Il apparaît plus simple chaque fois que possible de garder le champ photonique sous forme d’un modèle de Branin et de cordes réelles que l’on va faire agir sur des résonateurs qui eux, représentent des particules massives. Il reste cependant que ce Branin doit être modifié dans son expression pour la mécanique quantique.

Ce problème a été complété par d’autres lorsque l’on voulait modifier la topologie d’une structure de Branin pour la compléter par d’autres couplages. Imaginons un cas où l’on veuille dissocier les couplages, c’est à dire soit quatre réseaux couplés et un couplage de la maille 1 vers la maille 2 : c_{21} . Ce couplage exprime un report du flux de maille 1 en fém de maille 2. Si par ailleurs existe un couplage de la maille 2 vers la maille 3 : c_{32} , on aura un report en final du flux 1 en fém de maille 3 par : $e_3 = c_{32} c_{21} f^1$ qui s’ajoute à d’autres termes. Or on peut vouloir qu’il n’y ait pas de liens entre les mailles 1 et 3, c’est à dire disposer d’un couplage sélectif, c’est le cas par exemple dans les modélisations de lignes couplées. Une façon de remédier à ce problème est de travailler dans un format de dimension égale aux sélections que l’on veut opérer. Ici une composante du format recevra le couplage c_{21} et une autre composante travaillera sur le couplage c_{32} . On décorèle bien alors les deux processus.

5.5 Mécanique quantique enfouie dans une propriété de branche

Le courant de branche qui est notre observable principale, doit pouvoir s’exprimer en termes d’une fonction d’onde. Suivant le formalisme de la mécanique quantique on doit pouvoir écrire quelque chose comme :

$$\langle I \rangle = \int_x dx \psi^* \hat{I} \psi$$

Le domaine de la branche est connu : on sait calculer son volume et on connaît sa longueur L . Par ailleurs on peut relier le courant à l’impulsion : $IL = qv = qpm^{-1} = \alpha p$, α étant l’affinité qm^{-1} . Or l’opérateur associé à l’impulsion est (en établissant un volume Sdx pour la fonction d’onde) :

$$\hat{p} \rightarrow -S \int_0^L dx \bullet \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \bullet$$

Définition du flux quantique :

On peut alors admettre comme expression quantique de la mesure de I (ϕ est une fonction d’onde) :

$$\langle I \rangle = \frac{\alpha S}{L} \int_0^L dx \phi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\alpha}{L} \langle p \rangle \quad (5.6)$$

Il suffit d'établir une connexion entre les mesures quantiques $\langle I \rangle^a$ et le flux de réseau f^a pour assurer la transition entre le monde quantique enfoui dans une branche et l'observable macroscopique de l'espace des branches. Soit Q cette connexion, on écrit :

$$f^a = Q^a_b \langle I \rangle^b \quad (5.7)$$

Les propriétés macroscopiques de la branche n'ont aucune raison d'être affectées. Elles ont été construites dans l'espace des branches, et non dans leur espace quantique sous-jacent et répondent donc a priori parfaitement aux modélisations des branches. Par contre, il est tout à fait possible qu'une propriété ne puisse être obtenue que via une modélisation quantique, auquel cas l'expression macroscopique de la propriété s'en déduira et sera retenue comme modèle.

5.5.1 Exemple d'une section soumise à un champ électrique

Sous le travail d'un champ électrique, l'impulsion s'écrit :

$$p = \int dt q E$$

De fait on écrit pour le courant dans la même section (avec une fonction d'onde de la forme $\psi_n \exp(-\frac{i}{\hbar}[Ht - px])$) :

$$I = \frac{\alpha \hbar S}{iL} \int_0^L dx \sum_n \psi_n^* e^{-\frac{i}{\hbar}(Ht - \int q E dt x)} \left(\left[\frac{i}{\hbar} \int dt q E \right] \psi_n + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) e^{\frac{i}{\hbar}(Ht - \int q E dt x)}$$

En regroupant les termes on trouve (avec τ durée de vie des porteurs) :

$$I = \frac{\alpha S}{L} \sum_n \left(|\psi_n|^2 V \tau + L \psi_n^* \frac{\partial \psi_n}{\partial x} e^{\frac{i}{\hbar}(Ht - \int q E dt x)} \right)$$

avec $V = EL$. En posant que la fonction d'onde ne dépend pas de x , on obtient :

$$I = \sum_n \frac{q^2}{m} |\psi_n|^2 \tau \frac{S}{L} V \quad (5.8)$$

Or avec l'égalité :

$$\sum_n \frac{q^2}{m} |\psi_n|^2 \tau = n \frac{q^2}{m} \tau = \sigma$$

on voit apparaître la conductivité du volume [CK], et on retrouve finalement la loi d'Ohm :

$$I = \sigma \frac{S}{L} V = y V$$

(y est l'admittance). Cet exemple montre comment les comportements quantiques construisent les propriétés macroscopiques des branches. La fonction d'onde ψ ne sert qu'à élaborer les lois de probabilités. Elle peut être vue comme un champ de probabilité, de pondération.

5.5.2 Réseaux quantiques

L'équation 5.4 est la forme perturbative de l'équation de Schrödinger qui traduit l'évolution dans le temps. La forme fondamentale reprend l'égalité entre la dérivation d'espace et l'énergie cinétique. On écrit :

$$\psi = \alpha e^{\frac{i}{\hbar}(Ht - px)} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi \quad (5.9)$$

or $p^2 = m^2 v^2$, en divisant par $2m$ on obtient l'énergie cinétique. Cette énergie est aussi obtenue par $H - U$ où U est l'énergie potentielle, dans le cas où l'on adresse un problème avec potentiel extérieur. On obtient donc une autre forme de l'équation de Schrödinger qui est :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + (H - U) \psi = 0 \quad (5.10)$$

On a donné équation 5.6 le lien entre flux et impulsion quantique. Le potentiel extérieur U lui, est directement le potentiel observé dans le domaine des branches. C'est un opérateur pour lequel :

Définition du potentiel quantique :

$$\hat{U}\psi = U\psi = e_a - z_{aa} \langle I \rangle^a \quad (5.11)$$

(z_{aa} est l'impédance de branche). Ce potentiel est le terme source pour l'espace des branches quantiques.

Ayant définis les potentiels et flux quantiques, on dispose de presque tous les éléments pour construire des réseaux quantiques. On aborde au paragraphe suivant la question des cordes quantiques, mais l'on peut déjà formuler tous les problèmes qui ne demandent pas l'usage de cordes (en tout cas pas de cordes réelles) par l'intermédiaire de ces réseaux quantiques.

5.5.3 Le puit de potentiel carré

Si l'on emprisonne une particule dans un puit de potentiel à murs raides[SPROUL] (donc dans une branche de longueur L et section S) on traduit l'équation 5.10 sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (H - U) \psi = 0 \quad (5.12)$$

On ne peut s'empêcher de faire le corrolaire avec la propagation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + LC\omega^2 J = 0$$

Si l'hamiltonien propre H est réduit à l'énergie cinétique T , la différence $T - U$ exprime le lagrangien \mathcal{L} dans le volume de la branche, et l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{L} \psi = 0 \quad (5.13)$$

dont les solutions sont des ondes de la forme $\psi_0 \exp(\pm kx)$ avec :

$$k^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{L} \quad (5.14)$$

5.5.3.1 Lagrangien positif

On se situe dans le volume de la branche où le potentiel est sensé être inférieur à l'énergie cinétique, entre les deux murs. Il suffit par exemple de créer une ambiance de potentiel négatif dans ce volume.

Si $\mathcal{L} > 0$ on trouve une propagation d'onde classique avec :

$$k = \pm i \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{L}}$$

Dans ce cas, le Branin correspondant que l'on court-circuite à chaque extrémité pour engendrer des murs de courants, va créer des modes du champ ψ donnés par :

$$2i\psi_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

Mais pour un lagrangien donné, ces modes s'installent dans le volume où le lagrangien est positif, et sont donc non perceptible de l'extérieur (si nous effectuons une mesure, on perturbe les conditions de potentiels et donc cette équation n'est plus valable. On sait que les modes existent, mais on ne peut pas les voir). Par contre ce qui est intéressant, c'est de regarder les conditions de propagation à l'extérieur du volume, là où le lagrangien est négatif.

5.5.3.2 Lagrangien négatif

La fonction d'onde n'est pas nulle au-delà des murs. On trouve une expression de la forme :

$$\psi_n e^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{L}_n x}}$$

Si l'on se situe dans une zone où l'énergie potentielle est nulle, en remplaçant \mathcal{L} par $0, 5mv^2$ et en appliquant 5.6 on trouve :

$$J = -iq |\psi_n|^2 v$$

J étant le courant mesurable en sortie de branche. $|\psi_n|^2$ est la probabilité de trouver une particule d'énergie n suivant la valeur du lagrangien \mathcal{L}_n . Nous avons fabriqué un composant non linéaire, qui, en fonction du potentiel U appliqué et du lagrangien dans son volume (jonction), engendre un courant donné par la relation précédente. On trouvera ce type de condition par exemple en alimentant une interface métal - vide sous fort champ électrique[HM].

5.6 Insertion du temps et cordes quantiques

Dans les réflexions précédentes, le temps de parcours n'intervient pas. On se retrouve au niveau d'une branche à extraire les grandeurs macroscopiques mesurables aux extrémités de la branche en fonction de processus quantiques internes faisant intervenir des opérateurs sur une fonction d'onde.

Dans le cas d'une corde réelle entre deux branches, il doit exister de la même façon un processus quantique qui décompose cette corde suivant des mécanismes quantiques, lesquels doivent faire intervenir le temps de propagation.

Suivant Feynman[TDF], on peut remarquer que la définition d'un opérateur \hat{F} dont on modifie de façon adéquate les phases permet d'insérer la variation d'une fonction d'onde à l'autre. On écrit :

$$\langle \Xi | F | \Psi \rangle = \int d\nu \Xi^* e^{\frac{iH}{\hbar}(t_2-t_i)} \hat{F} e^{\frac{iH}{\hbar}(t_1+t_i)} \Psi \quad (5.15)$$

t_i étant l'instant pivot - instant d'interaction - que l'on considère. On a ajouté à un opérateur "ordinaire" les phases :

$$\hat{F} \rightarrow e^{-\frac{iH}{\hbar} t_i} \hat{F} e^{\frac{iH}{\hbar} t_i}$$

Or si les instants t_i^+ et t_i^- autour de l'interaction qui dure un instant dt infiniment petit sont très proches on peut écrire :

$$\hat{F} \rightarrow e^{-\frac{iH}{\hbar} t_i^+} \hat{F} e^{\frac{iH}{\hbar} t_i^-} = \lim_{dt \rightarrow 0} \hat{F} e^{-\frac{iH}{\hbar} dt}$$

L'hamiltonien peut s'exprimer en fonction du lagrangien : $H = pv - \mathcal{L}$ et en tenant compte de la limite à zéro de l'incrément de temps, on obtient :

$$\hat{F} \rightarrow \hat{F} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \quad (5.16)$$

ce qui fait penser à un déphasage entre une fonction d'onde à l'instant t_1 et une fonction d'onde à l'instant t_2 . Essayons :

$$\psi_{t_2} = e^{-\frac{i}{\hbar} px} \psi_{t_1} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt Fx\right) \psi_{t_1} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}\right) \psi_{t_1}$$

F étant la force qui intervient au moment de l'interaction. Or l'exposant de l'exponentielle **n'est rien d'autre que l'action S de la particule** entre les instants t_1 et t_2 . D'où :

$$\psi_{t_2} = e^{-\frac{i}{\hbar} S_{1,2}} \psi_{t_1} \quad (5.17)$$

Si un chemin entre des instants T_1 et T_2 dans l'espace-temps est long, on va devoir le décomposer en somme de chemins infinitésimaux de T_1 à t_2 , puis de t_2 à t_3 , etc. jusqu'à t_N à T_2 . On aura :

$$\psi_{T_2} = e^{-\frac{i}{\hbar}S_{T_1,t_2}} e^{-\frac{i}{\hbar}S_{t_2,t_3}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}S_{t_N,T_2}} \psi_{T_1}$$

Mais à chaque portion de chemin correspond un volume de calcul donné $d\nu_n$ pour les probabilités et une normalisation associée A_n ². Finalement, pour un opérateur \hat{F} , on obtient :

$$\langle \psi_{T_2} | F | \psi_{T_1} \rangle = \int \dots \int \frac{d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_N}{A_1 A_2 \dots A_N} \psi_{T_1}^* e^{\frac{i}{\hbar}S_{T_1,t_2}} e^{\frac{i}{\hbar}S_{t_2,t_3}} \dots e^{\frac{i}{\hbar}S_{t_N,T_2}} \hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_N) \psi_{T_1} \quad (5.18)$$

En considérant l'opérateur unitaire, on trouve la bonne expression du passage d'une fonction d'onde ψ_{T_1} à une fonction d'onde ψ_{T_2} :

$$\psi_{T_2} = \int \dots \int \frac{d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_N}{A_1 A_2 \dots A_N} e^{\frac{i}{\hbar}S_{T_1,t_2}} e^{\frac{i}{\hbar}S_{t_2,t_3}} \dots e^{\frac{i}{\hbar}S_{t_N,T_2}} \psi_{T_1} \quad (5.19)$$

Cette relation inspirée des développements présentés dans la thèse de Feynman, nous permet de décomposer une corde en chemins quantiques. Les fonction d'ondes aux extrémités de la corde classique sont retransformées en observables, comme dans le processus de l'espace des moments. Mais la différence est que les produits des exponentielles des actions peuvent engendrer quantité d'interactions intermédiaires comme autant de perturbations dans le chemin moyen global, sachant que plus le déphasage de la perturbation (donc son produit px résultant) est grand, plus sa probabilité d'existence est faible et son influence secondaire. Le champ classique va directement d'un point à un autre, ici le champ quantique peut passer par des chemins où il se transforme en paire électron positron, qui se réannihile pour redonner un photon qui reprend son chemin... Au final, on observe la propagation d'un champ macroscopique utilisé dans notre espace des moments.

5.7 Processus de rayonnement

Comment une particule enfermée dans une branche de section S et de longueur L peut-elle rayonner un photon ? Soit comment globaliser une interaction quantique entre deux branches ensuite connectées au monde macroscopique ?

On considère que l'ensemble des particules présentes dans le volume ν de la branche se décline comme une fonction d'onde générale : $\Psi = c_n \phi^n$, ϕ^n étant la phase d'énergie d'état n , soit : $\phi^n = \exp(-\frac{i}{\hbar}H_n t)$. Lorsqu'il y a rayonnement, les coefficients c_n changent d'état. Par exemple à un instant, $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, l'instant d'après $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$. La fonction de répartition \mathcal{R} de ces états a ses composantes qui évoluent de fait en fonction du paramètre temps. Mais il n'est pas possible de tracer ces coefficients comme des fonctions du temps. Le temps reste un paramètre non une dimension.

Le potentiel vecteur s'exprime comme : $A = \mu_0 q v G$, G étant une fonction de propagation classique. On peut donc l'exprimer comme :

$$A = \mu_0 q G \frac{d}{dt} x \Rightarrow A = \mu_0 q G \frac{d}{dt} \langle x \rangle$$

Le photon étant lié à la seule dérivée du potentiel vecteur, on peut écrire la valeur moyenne $\mu(h\nu)$ de son émission à partir du vecteur de Poynting sur une surface ds :

$$\mu(h\nu) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\omega^2 A^2}{\mu_0 c} ds \quad (5.20)$$

On peut donc écrire :

$$\mu(h\nu) = -\mu_0 \int_{t_1}^{t_2} dt ds \frac{\omega^2}{c} \left| q G \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L} \int_0^L dx \sum_n c_n \phi^{*n} \hat{x} \sum_m c_m \phi^m \right) \right|^2$$

Soit :

$$\mu(h\nu) = -\mu_0 q^2 G^2 \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{L^2} ds \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d^2}{dt^2} \left| \int_0^L dx \sum_{n,m} \left\{ c_n c_m \left(e^{\frac{i}{\hbar}(H_n - H_m)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(H_n - H_m)t} \right) \right\} \right|^2$$

2. Ce facteur dépend de la phase du chemin. Nous ne le détaillons pas ici, voulant montrer le principe d'obtention de la corde classique à partir des "cordes" ou chemins quantiques.

On obtient :

$$\mu(h\nu) = -\mu_0 q^2 G^2 \frac{\omega^2}{c} ds \frac{d}{dt} \left[L^2 \sum_{n,m} c_n^2 c_m^2 \left(\cos \left(\frac{1}{\hbar} [H_n - H_m] t \right) \right)^2 \right] \quad (5.21)$$

On peut remplacer le cosinus par $0,5(1 + \cos(2\theta))$, la partie constante étant annulée de toute façon dans la dérivation temporelle (sans quoi on aurait eu une probabilité constante de présence du photon sans variation d'énergie de charges) :

$$\mu(h\nu) = \mu_0 q^2 G^2 \frac{\omega^2}{c} ds L^2 \sum_{n,m} \left\{ c_n^2 c_m^2 \frac{1}{\hbar} \delta_{nm} H \sin \left(\frac{2}{\hbar} \delta_{nm} H t \right) \right\} \quad (5.22)$$

avec $\delta_{nm} H = [H_n - H_m]$. En intégrant ds sur toute la sphère de rayon R , et en multipliant par S pour avoir le nombre émis pour le volume $\nu = SL$ contenant les charges on obtient ce nombre moyen $\langle m \rangle$ comme :

$$\langle m \rangle = \mu_0 \frac{q^2 \omega^2 \nu^2}{4\pi c \hbar} \sum_{n,m} \left\{ c_n^2 c_m^2 \delta_{nm} H \sin \left(\frac{2}{\hbar} \delta_{nm} H t \right) \right\} \quad (5.23)$$

Les coefficients c_n et c_m valant 1 ou 0, leurs carrés sont égaux à leur racine et l'on peut introduire la fonction de répartition \mathcal{R} qui sélectionne les états des N particules présentes. A ce moment là, la valeur moyenne de photons émis devient égale à :

$$\mu(h\nu) = \mu_0 \frac{q^2 \omega^2 \nu^2}{4\pi c \hbar} \sum_{n,m} \left\{ \mathcal{R}(n_1, n_2, \dots, n_N) \delta_{nm} H \sin \left(\frac{2}{\hbar} \delta_{nm} H t \right) \mathcal{R}(m_1, m_2, \dots, m_N) \right\} \quad (5.24)$$

Cette relation montre que les transitions d'états permises permettront le rayonnement d'un photon. Le terme entre accolades est homogène à hf . Divisé par \hbar il a la dimension d'une pulsation. Suivant un calcul classique on aurait écrit la puissance rayonnée P sur une sphère suivant (en omettant le terme de retard) :

$$P = \frac{\omega^2 A^2}{\mu_0 c} 4\pi R^2 = \frac{\omega^2 4\pi R^2}{\mu_0 c} \left[\frac{\mu_0 I x S}{4\pi R} \right]^2$$

S étant la section sur laquelle on intègre tous les filets élémentaires de courants de longueur s . L'énergie est l'intégrale de la puissance, le courant la dérivée temporelle de la charge q , soit :

$$E = \frac{1}{\omega} P = \mu_0 \frac{\omega^2 q^2 \nu^2}{4\pi c} \omega = \mu_0 \frac{\omega^2 q^2 \nu^2}{4\pi c} \frac{hf}{\hbar}$$

On retrouve bien un facteur homogène à celui de l'expression de $\mu(h\nu)$. On note que dans ces expressions, le lien exact entre les impulsions quantiques et les courants macroscopiques fait intervenir la connectivité Q . On ne l'a pas détaillée en général mais il est évident que c'est cette connectivité qui permet de relier les directions principales - moyennes- d'impulsions aux branches des mêmes directions lorsque celle-ci interviennent dans le modèle de la branche, ou au moment de même direction spatiale.

5.8 Une autre façon de faire de la mécanique quantique

La méthode proposée dans cette thèse offre une nouvelle façon d'aborder la mécanique quantique. L'idée est de représenter les variations d'énergie et les interactions entre particules par des réseaux et des déformations ou branchements entre ces réseaux. Les flux peuvent être représentés dans un format multiple (type hypercomplexe) pour prendre en compte les trois directions, les spins, le temps. On présente ici un cas simple qui pourra, au vu de tous les outils fournis dans la thèse, être généralisé et complexifié à des situations très diverses.

On considère une particule chargée au repos en mécanique quantique classique non relativiste. Elle est accompagnée d'un champ électrostatique qui "l'habille" et revient à un réseau à une branche fermée : cette branche porte l'énergie électrostatique contenue dans la particule et son champ [HAR]. L'énergie stockée est $q^2 C^{-1}$ dans l'espace des sommets. La métrique dans ce même espace est C^{-1} .

Si maintenant un photon vient impacter cette particule, elle va acquérir de l'énergie cinétique. Qui dit énergie cinétique, dit mouvement de la particule. De fait on est obligé de changer d'espace, l'espace des sommets (de définition $q^a = C^{ab} B_b$) ne porte pas de particules en mouvement, c'est à dire de courant. La particule saute

du niveau d'énergie $q^2 C^{-1}$ au niveau $q^2 C^{-1} + L(\dot{q})^2$. Mais la valeur d'inductance n'est pas quelconque. Elle dépend de la particule. Soit le photon incident est à la même fréquence que la particule et celle-ci saute à un état d'énergie fondamental, puis après un temps de relaxation (qui fixe la composante de dissipation R du réseau excité) revient à son état de repos, soit le photon n'est pas à la bonne fréquence, et la particule variera légèrement en niveau d'énergie mais n'oscillera pas ni ne réémettra de photon. Le photon dans ce cas est seulement diffracté. La figure "réflexion de photon" illustre le processus modélisé.

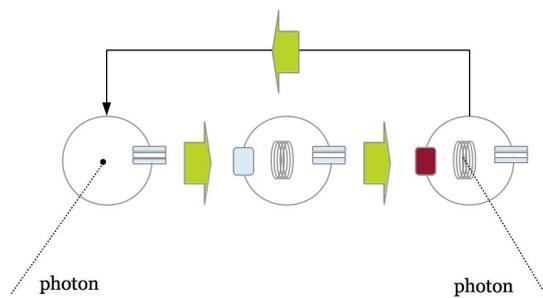


Figure "réflexion de photon".

On peut noter l'état de repos $|0\rangle$ et l'état excité $|1\rangle$. Ces kets correspondent à l'espace fonctionnel associé aux modes de vibrations de la particule[GAB]. L'opération $(1|H|0\rangle$ décrit l'hamiltonien pour passer d'un état à un autre. Mais l'on peut aussi décrire l'opération chimique réalisée sous la forme :

$$|0\rangle + \nu \rightarrow |1\rangle$$

Dès que la particule bouge, la composante inductive L du réseau (les composantes, pour les différents modes possibles) apparaît ainsi que la relaxation R . Soit g_0 la métrique du réseau au repos et g_1 celle en état excité, la relation précédente s'écrit : $g_0 + [L(\nu), \nu] \rightarrow g_1$, avec $L(\nu)$ la composante inductive (sous-entendue dissipative aussi) ajoutée et ν la fém induite par le champ du photon. Cette inductance ne peut pas appartenir à la branche capacitive, car elle existerait en permanence or son existence ne peut être justifiée que lorsque la particule est en mouvement. Elle appartient donc à la maille. Mais une fois l'excitation éteinte, le retour à "l'état de repos" ne peut se faire qu'après restitution de l'énergie correspondant à l'inductance. Or l'énergie accumulée dans cette inductance est celle du photon. L'inductance est chargée à une valeur $0.5Li^2 = h\nu$. De fait la fém du photon appartient aussi à la seule maille. Pour restituer l'énergie, la particule n'a d'autre choix que de parcourir la transformation précédente dans l'autre sens : $g_0 + [L(\nu), \nu] \leftarrow g_1$. On peut ainsi, de multiples façons, traduire les phénomènes d'interaction lumière - matière par des réseaux de topologies variables.

5.9 Conclusion du chapitre 5

Dans ce chapitre nous avons balayé les principales démarches de la mécanique quantique et leurs liens avec les réseaux. Les équations reliant impulsion, position et flux de branches donnent le passage entre le monde intérieur des branches et le macromodèle extérieur employé au niveau macroscopique. C'est le lieu commun de la physique des semi-conducteurs et des modèles des composants électroniques réemployés en tant qu'éléments de réseaux. Nous avons décrit des objets moins usuels comme les cordes qui peuvent, de la même façon, être décliné en objets quantiques intriqués, dont l'émergence constitue les observables de champ classique. On aurait pu aborder même la décohérence, c'est à dire discuter sur le fait que la branche elle-même nous apparaît suite à un phénomène de décohérence (cohérence?) quantique. Mais cela dépasserait l'objectif de cette thèse, et ne remettrait pas en question la capacité de l'analyse tensorielle des réseaux à intégrer ce concept (on pourra lire à ce sujet le "canticque des quantiques" de Sven Ortoli qui détaille ces concepts[SO]). L'analyse est centrée sur le monde intermédiaire des réseaux, la mécanique quantique est enfouie dans les modèles des fonctions des branches. Les champs lointains et les géodésiques dans l'espace des moments, enfouie dans l'espace des branches et des mailles, et des jauges viennent paramétrer ces modèles. L'ensemble ainsi imbriqué et intriqué, constitue l'univers étudié.

5.10 Références du chapitre 5

- [HM] H.Mathieu, “Physique des semi-conducteurs et des composants électroniques”. Edition Dunod, 2004.
- [DS] D.Sivoukhine, “Cours de physique générale : physique atomique et nucléaire”. Edition MIR, 1986.
- [LDB] L. de Broglie, “Mécanique ondulatoire du photon”. Edition Gauthier-Villars, 1957.
- [GAB] R.Gabillard, “Vibrations et phénomènes de propagation”. Edition Dunod université, 1969.
- [EE] E.Elbaz, “De l’électromagnétisme à l’électrofaible”. Edition Ellipses, 1989.
- [CK] C.Kittel, “Physique de l’état solide”. Edition Dunod université, 1983.
- [SPROUL] R.L.Sproull, “Eléments de physique moderne”. Edition Masson, 1967.
- [TDF] R.Feynman, “La thèse de Feynman : une nouvelle approche de la théorie quantique”. Edition Pearson Education, 2007.
- [SO] S.Ortoli, “Le cantique des quantiques”. Edition la découverte/poche, 1984.
- [HAR] S.Haroche, J-M.Raimond, “Cavity Quantum Electrodynamics”. Scientific American, April 1993.

Chapitre 6

Méthodologie générale de l'ATR

6.1 Introduction au chapitre 6

L'un des apports de Gabriel Kron qui aura le plus impacté l'ensemble des disciplines, tous types confondus, et sans doute la notion de Diakoptique (Diakoptic en Anglais). Le terme de Diakoptique fut inventé par le professeur Philip Stanley du département de philosophie à l'Union College, Schenectady, New York[HHH]. En Grec, le terme "kopto" signifie découper, briser en morceaux et "dia" renforce cette idée avec un sens multiplicatif. L'idée sous-jacente est qu'un système composé d'organes doit coupler des propriétés de ces organes, sans pour autant remettre complètement en question ces organes en tant qu'entités ayant une existence indépendamment du système. Si cela est vrai, on doit pouvoir calculer les flux du système en fonction des flux des organes caractérisés indépendamment. C'est là tout l'objet de la Diakoptique. On comprend tout l'enjeu de cette démarche : elle permettrait de ne recalculer qu'une partie propre au système, sans avoir à recalculer tout le système couplé. C'est un enjeux pratique mais aussi systémique. La systémique pose comme précepte qu'un système n'est pas la simple composition de ses parties, mais du fait de l'assemblage de ces parties, a aussi des caractères propres, émergents, qui ne peuvent exister aux échelles inférieures. La systémique s'opposerait donc à la possibilité de la diakoptique ? Nous allons voir que dans le domaine linéaire, la Diakoptique s'oppose à cette hypothèse de la systémique. Nous allons pouvoir recalculer le système en fonction de ses seules parties, en faisant intervenir les couplages entre ces parties. Il n'y a là nulle émergence. Mais dans le domaine non linéaire il en va autrement, et nous essaierons d'aborder cet aspect complexe comme prémisses à l'élaboration d'une théorie pour la systémique.

Nous allons revisiter la notion de réseau primitif et certaines des techniques de la Diakoptique pour ensuite aborder la résolution des systèmes non linéaires non holonomiques, puis discuter d'une Diakoptique appliquée aux systèmes non linéaires.

6.2 Diakoptique de branches sur réseau linéaire

La Diakoptique appliquée aux branches consiste à calculer un réseau puis savoir exprimer les courants de ce réseau lorsque l'on y adjoint une branche. Au départ du raisonnement on a deux équations. Une première équation exprime les relations du premier réseau entre sources (fém) et flux. On écrit : $e_a = z_{ab}f^b$. On a ensuite une branche que l'on caractérise en lui appliquant une source abstraite : $e' = tf'$. t et z sont les deux métriques des deux réseaux. Le deuxième réseau peut donc être vu comme une source de courant de consommation : $f' = ye'$, y étant l'admittance de t . On peut alors insérer cette source comme source de courant dans l'espace des mailles virtuelles (MV) du premier réseau et compléter sa connectivité par cette source. La direction de cette MV est imposée : le courant correspondant à une consommation est sortant sur un sommet alimenté par la source de fém du premier réseau. Une ou plusieurs branches de l'arbre couvrant du premier réseau sont dépendantes de cette MV. En plaçant la MV comme dernier courant de MV J^M lié, on développe la connectivité L sur les N branches en fonction de $J^M = f' = ye'$:

$$f^{(a,b,\dots,N)} = L_M^{(a,b,\dots,N)} J^{(M)}$$

Une équation tensorielle relie les sources, courants inconnus et courants de consommation connus :

$$e_a = z_{ab}f^b - tJ^{(M)}$$

Le premier membre engendre des courants avant couplage $\check{f}^b = y^{ba}e_a, y^{ba}$ étant l'inverse de z_{ab} . De l'équation précédente on tire :

$$f^b = \frac{e_a - tJ^{(M)}}{z_{ab}} = y^{ba}e_a - y^{b(M)}tJ^{(M)} = \check{f}^b - y^{b(M)}tJ^{(M)}$$

Le courant de consommation $J^{(M)}$ est fonction dans la configuration couplée des courants f^b et des fém e_a . Posons : $J^{(M)} = h^{(M)}(e_a, g_{ab}f^b)$. On remplace pour trouver :

$$f^b = \check{f}^b - y^{b(M)}th^{(M)}(e_a, g_{ab}f^b)$$

La fonction $h^{(M)}$ est considérée séparable. Par exemple, si l'on a un réseau à trois branches d'impédances respectives a, b et M , le courant de consommation est donné par la relation du courant dérivé : $J^{(M)} = e_a z^{-1}(a, b, M) - f^b = h^{(M)}(e_a) - h^{(M)}(f^b)$.

On peut factoriser pour obtenir :

$$(1 + y^{a(M)}th^{(M)}(g_{ab})(\bullet)) f^b = \check{f}^b - y^{b(M)}th^{(M)}(e_a)$$

On obtient finalement les valeurs des courants après couplage en fonction des courants avant couplages :

$$f^b = \frac{\check{f}^b - y^{b(M)}th^{(M)}(e_a)}{(1 + y^{a(M)}th^{(M)}(g_{ab}))} \tag{6.1}$$

A condition cette fois que l'opérateur g se réduise à un facteur linéaire.

On voit que les premiers courants \check{f}^b ayant été calculés au préalable, l'obtention de la solution en rajoutant le couplage avec la branche t ne nécessite pas un recalcul complet du réseau. La solution est déduite des courants connus et des caractéristiques de la branche couplée. Cependant nous avons dû poser deux contraintes pour parvenir à ce résultat : **la séparabilité de la fonction h et la linéarité de la métrique g** . Ces contraintes dures découlent du fait que le couplage s'effectue via des branches. Pour respecter les reports de propriétés entre les branches des réseaux d'origine et rajouté, il faut obtenir des relations qui impliquent la linéarité (la consommation peut se reporter sur les sources de façon linéaire) et touchent aux termes diagonaux de la métrique. On exploite ici par ailleurs l'espace complet et sa capacité à effectuer des reports de contraintes d'un réseau à l'autre[BDM].

La démarche précédente peut être généralisée. Imaginons un chemin de courant allant de réseaux en réseaux, et formant une maille de grande taille comme représenté figure "maille de Diakoptique".

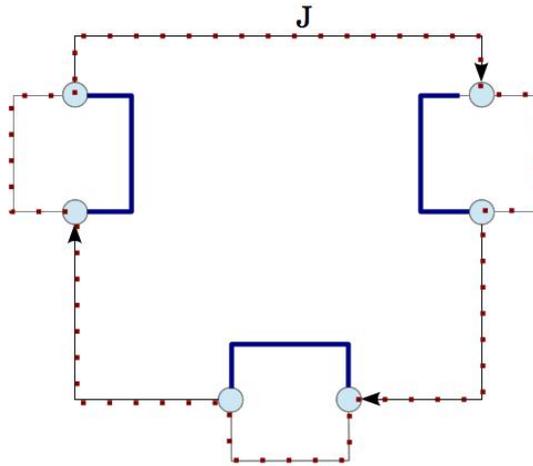


Figure "maille de Diakoptique".

Sur la figure “maille de Diakoptique”, la maille J parcourt toutes les branches des arbres couvrants des réseaux bibranches séparés, plus les branches entre ces réseaux et en pointillés épais rouges. Les branches en trait plain épais bleu sont les branches de fermetures des différents réseaux séparés lorsque l'on supprime les branches de liaisons avec des flèches. Si l'on coupe ces branches de liaisons, le courant de la grande maille J peut être vu comme une source de courant de paire de nœuds pour chaque réseau séparé. Pour chacun de ces réseaux, si k^n représente le vecteur des courants de mailles réelles, z_θ le tenseur des impédances des mailles constituées des branches de fermetures dans les réseaux séparés (intégrant les impédances des branches des arbres couvrant de fait!) et z_a le tenseur des impédances uniquement des branches de l'arbre couvrant plus les branches de liaisons; autrement dit le tenseur de l'impédance de la grande maille virtuelle (au sens de l'espace des paires de nœuds, mais c'est une maille constituée ici de branches bien réelles de liaisons entre les réseaux), on peut écrire dans le référentiel de chaque réseau : $e_n = z_{\theta_n} k^n + z_a J$.

On connaît les courants de mailles des réseaux séparés : $\check{k}^n = y^{\theta_n} e_n$. Or dans le cas des réseaux interconnectés :

$$k^n = \frac{e_n - z_a J}{z_{\theta_n}}$$

J passe par l'ensemble des branches des arbres couvrants qui sont connectées avec le courant partagé dans la réunion des réseaux, d'impédances z_{a_n} . Si e_c et la fém totale de la grande maille, somme des fém des mêmes branches, on écrit :

$$e_c = \sum_n z_{a_n} J \Rightarrow J = Y_c e_c, \quad Y_c = \left(\sum_n z_{a_n} \right)^{-1}$$

Alors :

$$k^n = \frac{1}{z_{\theta_n}} \left(z_{\theta_n} \check{k}^n - z_a Y_c e_c \right) \tag{6.2}$$

De nouveau on sait exprimer les courants du réseau connecté en fonction des courants et des fém des réseaux non connectés.

6.3 Diakoptique perturbative par cordes

Une autre façon de mener la Diakoptique consiste à analyser la variation des courants des réseaux découplés lorsque ces mêmes réseaux sont couplés par des cordes réelles (les cordes virtuelles rejoignant le cas précédent). Imaginons deux réseaux de métriques respectives g_1 et g_2 . Si ces deux réseaux, quelles que soient leurs tailles sont couplés par une corde, une matrice de couplage s'ajoute aux matrices diagonales. La métrique globale g a l'allure suivante :

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \mu^T \\ \mu & g_2 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Si k^1 et k^2 sont les courants des réseaux, à la métrique précédente correspond le système d'équations :

$$\begin{cases} e_1 = g_1 k^1 + \mu^T k^2 \\ e_2 = \mu k^1 + g_2 k^2 \end{cases}$$

Si l'on connaît au préalable, pour les réseaux séparés, les solutions :

$$e_1 = g_1 \check{k}^1, \quad e_2 = g_2 \check{k}^2$$

Le système précédent devient :

$$\begin{cases} g_1 \check{k}^1 = g_1 k^1 + \mu^T k^2 \\ g_2 \check{k}^2 = \mu k^1 + g_2 k^2 \end{cases}$$

d'où :

$$g_1 \check{k}^1 = g_1 k^1 + \mu^T \left[\frac{g_2 \check{k}^2 - \mu k^1}{g_2} \right]$$

En regroupant les termes et en posant $y^2 = (g_2)^{-1}$:

$$g_1 \check{k}^1 = (g_1 - \mu^T y^2 \mu) k^1 + \mu^T \check{k}^2$$

Finalement on exprime le courant du réseau couplé k^1 en fonction des courants des réseaux non couplés \check{k}^x (idem pour l'ensemble des courants du réseau couplé) :

$$k^1 = \frac{1}{(g_1 - \mu^T y^2 \mu)} \left[g_1 \check{k}^1 - \mu^T \check{k}^2 \right] \quad (6.4)$$

Ces opérations sont intéressantes, parce que la matrice μ est très creuse. On gagne ainsi à réexploiter les résultats précédemment obtenus sur les réseaux séparés.

6.4 Utilisation du complément de Schur

En repartant du système d'équations des réseaux couplés :

$$\begin{cases} g_1 \check{k}^1 = g_1 k^1 + \mu^T k^2 \\ g_2 \check{k}^2 = \mu k^1 + g_2 k^2 \end{cases} \quad (6.5)$$

$g_1 \check{k}^1$ est covariant. Notons : $\mathcal{K}_x = g_x \check{k}^x$. Le système d'équation 6.5 peut s'écrire : $\mathcal{K}_x = I_{xy} k^y$. De ce système on déduit les courants couplés : $k^y = (I_{xy})^{-1} \mathcal{K}_x$.

Les solutions s'obtiennent en inversant la matrice :

$$(I_{xy})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} g_1 & \mu^T \\ \mu & g_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = H^{yx}$$

L'inversion de la matrice I peut être réalisée suivant la méthode de Schur. On définit les grandeurs :

$$\begin{cases} X = y^1 \mu^T \\ Y = \mu y^1 \\ \Theta = g_2 - \mu X \end{cases} \quad (6.6)$$

avec $y^x = (g_x)^{-1}$. Les composantes de la matrice H sont alors données par :

$$H = \begin{bmatrix} y^1 + X \Theta^{-1} Y & -X \Theta^{-1} \\ -\Theta^{-1} Y & \Theta^{-1} \end{bmatrix}$$

Comme la matrice μ est réduite à un terme, le produit de cette matrice ou de sa transposée par une matrice pleine, engendre un vecteur. X et Y sont donc des matrices réduites à une ligne ou une colonne. La matrice H sans couplages est réduite aux deux y^x . Le terme H^{11} fait clairement apparaître un terme ajouté à l'admittance y^1 . Pour faire apparaître un tel terme sur la composante H^{22} on écrit : $\frac{1}{g_2 - \mu X} = y^2 + \lambda$, avec :

$$\lambda = \frac{\mu X}{g_2 (g_2 - \mu X)} \quad (6.7)$$

L'opération de couplage se traduit par deux modifications :

1. une modification par adjonction de termes aux admittances (on nommera dorénavant admittances les inverses de métriques) ;
2. l'adjonction de termes extradiagonaux de couplages, intrinsèques à l'opération de couplage.

Le couplage par corde mène donc à la transformation :

$$y^{ij} \rightarrow y^{ij} + \begin{bmatrix} X \Theta^{-1} Y & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & X \Theta^{-1} \\ \Theta^{-1} Y & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Cette transformation constitue l'opération de couplage entre des réseaux primitifs¹ et donne l'admittance du système solution : $k^y = H^{yx} \mathcal{K}_x$.

6.5 Diakoptique non linéaire

Le traitement des couplages dans le cas de circuits non linéaires constitue le but ultime des transformations possibles pour passer d'un ensemble de réseaux primitifs à un réseau global couplé. Pour aborder des propositions de Diakoptique non linéaire, il faut se doter d'une technique pour intégrer des fonctions non linéaires dans la métrique de façon générique. Nous allons dans un premier temps détailler l'intégration de fonctions métriques non linéaires pour ensuite aborder la Diakoptique utilisant ces mêmes fonctions.

6.5.1 Modélisation d'un phénomène de snap-back

Dans des semi-conducteurs comme des thyristors, des phénomènes de pré-avalanches et avalanches se produisent, conduisant localement à une chute brutale de la caractéristique $V(i)$ de la jonction, chute équivalente à une résistance négative. La figure "snap-back-1" montre l'allure de ce type de comportement.

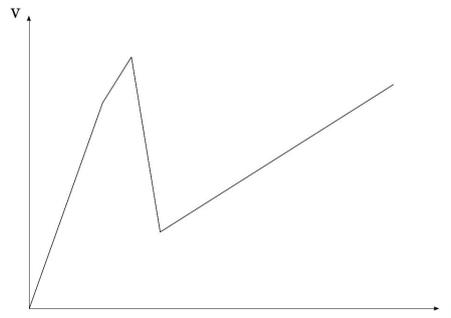


Figure "snap-back-1" : caractéristique $V(i)$ d'un semi-conducteur.

Ces courbes peuvent être présentées aussi avec la tension en abscisse. La figure "snap-back-2" montre la zone de résistance négative. On entend ici par résistance le facteur du courant dans une loi d'Ohm de la forme $V = ai$. Cependant, dans cette zone, entre les points A et B, la loi d'Ohm devient : $V = ai + b$ avec le facteur a négatif. On remarque, point essentiel, que la différence de potentiels aux bornes du composant n'en est pas pour autant négative. La présence de la constante à l'origine b est essentielle dans ce modèle. Cette pente très rapide, mais existante (il ne s'agit pas d'un saut de valeurs entre les points A et B, les valeurs intermédiaires existent et sont mesurables) caractérise le phénomène de "snap-back".

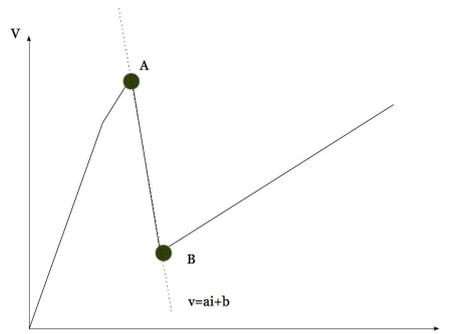


Figure "snap-back-2".

1. La notion de réseau primitif, définie par Kron prend ici tout son sens. Le réseau primitif a une existence intrinsèque et l'on peut calculer ses solutions indépendamment des couplages qui lui seront appliqués lors de son insertion dans un réseau plus vaste.

6.5.2 Implémentation directe

Une première solution, classique, consiste à tester les valeurs de tension et courant dans un programme en temporel, entre chaque pas de temps, et de venir régler la loi d'impédance pour chacun de ces pas. Dans un système compliqué qui comporterait de nombreux éléments de ce type, cette programmation devient lourde et source d'erreurs. De plus elle n'est pas élégante, en ce sens que la loi du composant est une loi englobante et n'a pas de raison d'être réglée par des paramètres environnementaux. Lorsque l'on descend au niveau quantique, on peut déterminer des équations qui vont expliquer le snap-back et continuellement donner l'évolution tension courant aux bornes du composant sans avoir besoin de régler au cas par cas l'équation à considérer. En pratique cette équation peut aussi être morcelée parce que l'on a du mal à trouver la continuité. Mais cette continuité existe et est physique.

Nous ne détaillerons pas cette implémentation, il suffit de comprendre par exemple dans un circuit très simple comportant le composant avec snap-back, placé comme charge d'un générateur de signal d'impédance interne R_0 , comment vont être réglés les sauts de fonctions. Considérons de fait la métrique dans l'ATR d'un tel circuit donnée par :

$$z = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & [a(V, i) \bullet + b(V, i)] \end{pmatrix}$$

Le "bullet" marque l'application de l'opérateur à la variable courant, soit que $[a(V, i) \bullet + b(V, i)] i = a(V, i)i + b(V, i)$. Dans l'espace de la maille unique de ce circuit, la solution du circuit est donnée pour un générateur de forme $E(t)$ par :

$$E(t) = \{R_0 + [a(V, i) \bullet + b(V, i)]\} i(t)$$

Au démarrage du programme, les conditions initiales sont par exemple nulles. On a donc $i = 0$ et $V = 0$ avec $E(0) = 0$. On se situe donc dans le premier quadrant de la caractéristique $V(i)$ du composant, et ce tant que l'on n'atteint pas la tension et le courant menant au point A. Si le pas de temps est assez petit (on rejoint ici les critères de détermination classique de ce pas de temps), on a pour cette zone :

$$E(n\delta) = R_0 i(n\delta) + a_1 i(n\delta) \Rightarrow i(n\delta) = \frac{E(n\delta)}{R_0 + a_1}$$

a_1 étant la pente de la droite entre l'origine et le point A (on pourrait avoir une loi polynomiale entre l'origine et le point A, cela ne changerait rien à la méthode programmée) et δ le pas de temps, $n\delta$ étant l'instant de calcul courant. Mais cette programmation est implicitement précédée du test : $V < V(A)$, $i < i(A)$. Pour cet intervalle, on positionne $a = a_1$, $b = 0$. Pour une condition : $i > i(A)$, $V \in [V(A), V(B)]$ on aurait une solution :

$$E(n\delta) = R_0 i(n\delta) - a_2 i(n\delta) + b \Rightarrow i(n\delta) = \frac{E(n\delta) - b}{R_0 - a_2}$$

avec sous ces conditions, $a = -a_2$, $b = b$.

Evidemment une légère erreur est commise à chaque calcul, puisque la valeur effective du courant à l'instant $n\delta$ n'est connue qu'après calcul, et donc l'appartenance à l'une des zones de caractéristiques déterminables qu'après ce calcul. Il faut donc pour être précis faire une première estimation puis par une méthode de Newton par exemple, réévaluer la solution exacte. Notons que l'erreur n'est significative que lorsque l'on s'approche des conditions de changement de loi. Mais la méthode que nous allons présenter ensuite peut déjà se justifier en ce sens qu'elle va annuler cette erreur autour des points de basculement, pour peu que l'on sache définir des domaines adéquats, comme nous allons en discuter.

6.5.3 Projection sur un ensemble de domaines contigus

Le basculement de lois a ceci de choquant que l'on imagine mal la nature décider comme cela de modifier la loi attachée à un objet en fonction des conditions auxquelles il est soumis. On s'attend, au moins à l'échelle d'observation classique, à une continuité dans les comportements. La continuité peut être fine, c'est à dire n'apparaître qu'à un grossissement suffisamment fort des caractéristiques de comportements, mais elle doit exister quelque part. Cette réflexion a conduit des auteurs à chercher cette continuité y compris jusque dans les lois fondamentales de la physique, par exemple entre la mécanique quantique et la mécanique classique. Laurent

Nottale[LN] a été l'un des promoteurs de ces pensées, très novatrices mais probablement intrinsèquement très fécondes.

On peut donc chercher à modéliser le comportement du composant et de son snap-back par l'intermédiaire d'une loi continue. Une première approche pourrait consister à trouver une loi polynomiale en fonction de puissances de I . Mais il est déjà difficile de trouver une loi par morceaux suffisamment précise pour redonner les mesures, pour que l'on ne s'attende pas avec cette approche à quelque chose de plus simple. Si l'on veut rester pragmatique et partir de la mesure de la caractéristique $V(i)$ on se propose de découper les deux domaines (les deux axes) V et i par une suite de fonctions gaussiennes abruptes qui se recoupent, assurant ainsi la continuité.

Posons l'existence d'une suite de fonctions $r(\tau)$ et $t(\tau)$ telles que :

$$\sum_{\tau} r(\tau) = \sum_{\tau} r_{\tau} = 1, \quad \sum_{\tau} t(\tau) = \sum_{\tau} t_{\tau} = 1$$

Soit $V(i) = z(V, i)i$ on peut écrire :

$$V(i) = z(V, i)i = a(V, i)i + b(V, i) = \sum_{\tau} r_{\tau}(V) \sum_{\tau} t_{\tau}(i)a(V, i)i + \sum_{\tau} r_{\tau}(V) \sum_{\tau} t_{\tau}(i)b(V, i)$$

Notons r_{τ} appliquée à V : $\overset{v}{\mathcal{D}}_{\tau}$, et t_{τ} appliquée à i : $\overset{i}{\mathcal{D}}_{\tau}$. On écrit alors :

$$V(i) = \sum_{\tau} \overset{v}{\mathcal{D}}_{\tau} \overset{i}{\mathcal{D}}_{\tau} a(V, i)i + \sum_{\tau} \overset{v}{\mathcal{D}}_{\tau} \overset{i}{\mathcal{D}}_{\tau} b(V, i)$$

finalement :

$$V = \sum_{\tau} \overset{v}{\mathcal{D}}_{\tau} \overset{i}{\mathcal{D}}_{\tau} z(V, i)i$$

Soit que la loi dans le domaine délimité par les valeurs V et i est donnée par :

$$z(V, i) = \overset{v}{\mathcal{D}}_k \overset{i}{\mathcal{D}}_m (a_{k,m} \bullet + b_{k,m}) \tag{6.9}$$

A chaque couple de domaines en tension et courant correspond une loi d'impédance. Mais entre les ensembles, les intersections ne sont pas nulles. On passe continuellement d'un ensemble à l'autre. La figure "snap-back-3" montre le principe de recouvrement des domaines (sur cette figure ils ne sont pas bien positionnés par rapport à la courbe).

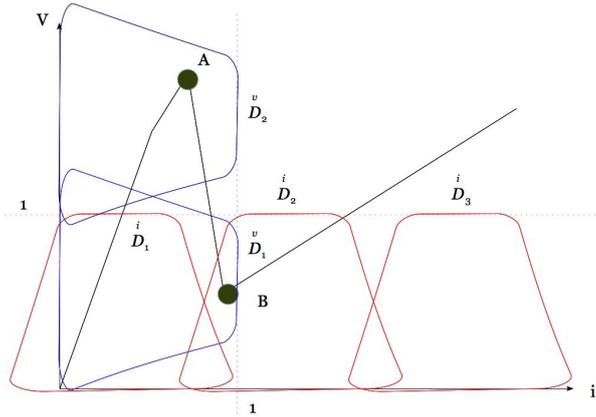


Figure "snap-back-3".

Ces recouvrements dépendent bien sûr des profils de gaussiennes qui sont choisis pour les définitions des domaines.

Dans le cas précédent, la loi d'impédance se décompose suivant :

$$z(V, i) = \overset{v}{\mathcal{D}}_1 \overset{i}{\mathcal{D}}_1 a_{11} \bullet + \overset{v}{\mathcal{D}}_2 \overset{i}{\mathcal{D}}_1 a_{21} \bullet + \overset{v}{\mathcal{D}}_2 \overset{i}{\mathcal{D}}_2 (b_{22} - a_{22} \bullet) + \dots \tag{6.10}$$

où dans les matrices a_{ij} et b_{ij} des paramètres, de nombreux termes sont nuls.

On discute annexe B - partie 9 de l'association de lois définies sur des domaines à une variété. On montre que dans le cas général, la métrique associée à une variété est de toute façon définie sur des domaines qui permettent de réduire la complexité de ce qui serait sinon, un espace résultant d'un produit tensoriel de dimension gigantesque.

6.5.3.1 Continuité

Suivant la loi précédente en impédance, lorsque le courant passe du domaine de valeurs 1 : \mathcal{D}_1 au domaine de valeurs 2 : \mathcal{D}_2 , il y a une zone où l'impédance est composite et résulte pour moitié de la loi du premier domaine et pour moitié de la loi du second domaine. On quitte continuellement un domaine pour rejoindre l'autre, avec toujours ici une impédance positive, même dans la zone de résistance négative, la constante b étant non nulle dans cette zone.

6.5.3.2 Contrainte

L'établissement de l'équivalence sur l'impédance est basée sur le fait que la somme des fonctions de domaines est égale à 1. De fait, le produit de cette série de fonctions par la fonction d'origine ne modifie pas cette fonction d'origine. On peut donc régler les pentes aux interfaces pour pondérer différemment la vitesse de basculement d'une loi à l'autre, mais la somme des pentes doit donner 1. En pratique ce réglage n'est pas simple, dès lors que l'on cherche des pentes variables. Or la pente dépend en partie de la durée de la gaussienne à mi-hauteur dans la formulation choisie :

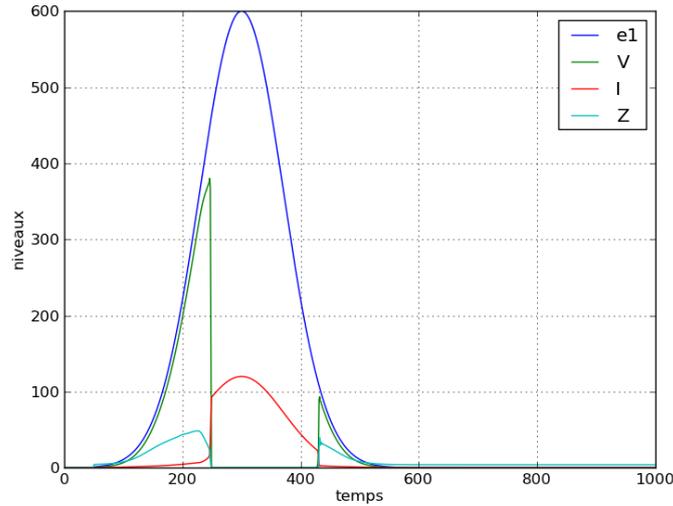
$$\mathcal{D}_k^x = \exp\left(-\left[\frac{t-k}{\sigma}\right]^\alpha\right) \quad (6.11)$$

Le paramètre σ règle la durée à mi-hauteur de la gaussienne, k son retard (le positionnement du centre du domaine) et α la raideur de pente (en pratique entre 2 et 12, voire 16). Mais si une répartition régulière dans la série est acceptable, la détermination des paramètres des domaines est simple et donnée par les intervalles de variation de loi sur l'impédance.

6.5.3.3 Résultats

Pour le cas imaginé, la figure "réponse au modèle de snap-back" montre le comportement du modèle à une excitation en impulsion². On note que suivant les valeurs de tension et courant, une hystérésis existe forcément car la tension n'est pas la même aux moments d'amorçage et de désamorçage. e_1 est la fém du générateur, V la tension aux bornes du composant avec snap-back, I le courant dans le composant et Z l'impédance projetée sur la base des domaines.

2. Le calcul a été implémenté dans un programme en Python.

Figure "réponse au modèle de snap-back³".Définition d'une fonction de métrique non linéaire :

On admet donc l'idée que toute impédance - toute fonction de métrique - peut-être décomposée sur une base de domaines. Si la fonction est pourvue de N paramètres, on crée pour chaque paramètre p une somme de N fonctions de base de la forme 6.11 telle que :

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{D}_k^p = 1 \pm \epsilon \quad (6.12)$$

où ϵ est une ondulation résiduelle acceptée telle que $\epsilon \ll 1$.

La métrique z non linéaire peut alors être décrite sur l'ensemble des combinaisons de fonctions de base obtenu par produit tensoriel des vecteurs de base pour chaque paramètre p telle que :

$$z(p_1, p_2, \dots, p_M) = \sum_{c_i, \dots, c_j=1 \dots 1}^{i \dots j} \left\{ \left(\mathcal{D}_{c_i}^{p_1} \dots \mathcal{D}_{c_j}^{p_M} \right) z_{c_i \dots c_j} \right\} = \sum_{c_i, \dots, c_j=1 \dots 1}^{i \dots j} \left\{ \prod_{p=1}^M \mathcal{D}_{c_i}^p (z_{c_i \dots c_j}) \right\} \quad (6.13)$$

$z_{c_i \dots c_j}$ est la portion de loi non linéaire pour la combinaison de paramètres pour laquelle sont activés les domaines $c_i \dots c_j$. Finalement ces domaines sont presque des opérateurs de création annihilation de lois, mais ils ont des recouvrements non nuls. On est plus proche d'une logique floue que d'une logique booléenne.

Terminologie :

on appellera dorénavant **domaine** les fonctions de base \mathcal{D} à profils gaussiens abrupts et intersections les produits de ces fonctions qui pointent une zone dans les définitions des métriques découpées par les produits de domaines.

6.5.4 Diakoptique non linéaire par usage de la projection sur des domaines contigus

On entend par domaines les fonctions de base définies précédemment sur la somme desquelles on projette les métriques non linéaires.

On considère un réseau simple pourvu d'une maille virtuelle. La figure "réseau simple pour Diakoptique non linéaire" montre ce réseau et sa topologie.

3. Les pentes des domaines sont $a = 50$, $b = -10$, $c = 6$. En données initiales nous avons $V = 0$, $I = 0$, $Ro = 5$. La fonction d'excitation est $600 \exp\left(-\left[\frac{t-300}{100}\right]^2\right)$. Les domaines sont en courant : $\exp\left(-\left[\frac{i-10}{9}\right]^4\right)$, $\exp\left(-\left[\frac{i-26.4}{9}\right]^4\right)$ et $\exp\left(-\left[\frac{i-42.8}{9}\right]^4\right)$.

Pour la tension : $\exp\left(-\left[\frac{V-100}{100}\right]^4\right)$, $\exp\left(-\left[\frac{V-282}{100}\right]^4\right)$ et $\exp\left(-\left[\frac{V-465}{100}\right]^4\right)$. La métrique est alors définie par l'expression 6.10 qui en python donne la syntaxe : $ZTran=DI1*DV1*a+DI1*DV2*a+DI2*DV2*(b)+DI3*DV2*c+DI3*DV3*c$.

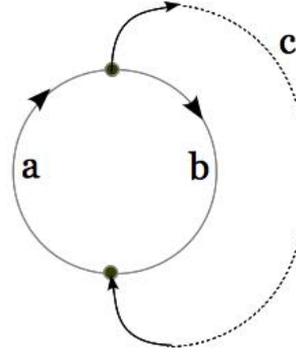


Figure “réseau simple pour Diakoptique non linéaire”.

Sans consommation apportée par la MV c , on a une relation du type : $e_\mu = g_\mu(\nu k^\nu, p^\nu)$. k^ν est le courant de maille et p^ν un ensemble de paramètres le réglant. On admet que l'on sait projeter g sur une base de domaines telle que :

$$g_\mu(\nu \dots) = \sum_n \prod_p \mathcal{D}_n g_\mu(\nu \dots) \quad (6.14)$$

Réécrivons tout d'abord comment se traduit la Diakoptique dans une opération de rajout de consommateur avant de traduire cette opération sous un formalisme développé sur la base des domaines.

6.5.4.1 Diakoptique par rajout de mailles virtuelles

Avant branchement de la maille virtuelle, on connaît pour une fém e_1 invariante et une métrique linéaire, le courant de maille :

$$\check{k}^1 = \frac{e_1}{g_1}$$

Après branchement, on obtient un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} e_1 = (a + b) k^1 + a k^2 \\ e_1 = a k^1 + (a + c) k^2 \end{cases}$$

On peut remplacer comme d'habitude dans cette démarche la fém invariante par son expression avant couplage pour écrire :

$$\begin{cases} g_1 \check{k}^1 = (a + b) k^1 + a k^2 \\ g_1 \check{k}^1 = a k^1 + (a + c) k^2 \end{cases}$$

Après quelques remplacements triviaux on trouve une relation entre le courant de maille avant et après branchement :

$$k^1 = \left(1 - \alpha \frac{a}{g_1}\right)^{-1} \check{k}^1 (1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{a}{a + c}$$

La connexion d'un consommateur supplémentaire sous la forme d'une maille virtuelle se traduit par un produit appliqué au courant avant branchement, produit faisant intervenir le rapport de la “sortance” de la source avec le consommateur et un produit de ce rapport avec le rapport de l'impédance de la maille étudiée avec l'impédance de source. Soit que l'on suppose que dans le cas non linéaire, on doit pouvoir extraire l'évolution du courant avant branchement et après branchement comme une fonction de ce rapport α .

6.5.4.2 Passage à des fonctions non linéaires

Exploitant l'égalité 6.14, on peut admettre que la collection des domaines \mathcal{D}_n couvre les combinaisons de valeurs des paramètres de réglages qui seront activées après branchement. Avant branchement et dans l'espace des branches on peut définir une métrique :

$$g = \begin{bmatrix} a & O \\ O & \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z_n \bullet \end{bmatrix}$$

En connectant les courants des deux branches aux deux courants de maille réelle et virtuelle k et J on peut définir une connection de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La transformations branche vers maille $C^T g C$ donne la métrique :

$$g = \begin{bmatrix} a + \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z_n \bullet & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

On résout classiquement la première ligne qui donne :

$$e_1 = \left(a + \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z_n \bullet \right) k^1 + aJ$$

et l'on a par ailleurs la solution du réseau non connecté :

$$e_1 = \left(a + \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}'_n z_n \bullet \right) \check{k}^1$$

Les domaines \mathcal{D} et \mathcal{D}' ont les mêmes définitions mais ne prennent pas les mêmes valeurs.

Le consommateur J a pu être déterminé précédemment en lui appliquant la même fém e_1 . Soit $e_1 = cJ$ on déduit des égalités précédentes :

$$\left(a + \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z_n \bullet \right) k^1 = \left(1 - \frac{a}{c} \right) \left(a + \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}'_n z_n \bullet \right) \check{k}^1 \quad (6.15)$$

On peut toujours inclure a dans $z_n \bullet$ tel que $z_n(k^1) + ak^1 = (z_n \bullet + a)k^1 = z'_n(k^1)$
Avec ces hypothèses, l'équation 6.15 devient :

$$\sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z'_n k^1 = \left(1 - \frac{a}{c} \right) \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}'_n z'_n \check{k}^1 \quad (6.16)$$

Autrement dit, les courants évoluent d'un état dans une configuration non connectée à un état dans une configuration connectée via un produit par un facteur α tel que :

$$\alpha = \left(1 - \frac{a}{c} \right)$$

et par un opérateur qui active les domaines différemment en fonction de l'élément ajouté et des sources tel que en notant :

$$\mathcal{D}_z = \sum_n \prod_p \overset{p}{\mathcal{D}}_n z_n$$

On ait :

$$\alpha \mathcal{D}'_z \cdot \check{k}^1 \rightarrow \mathcal{D}_z \cdot k^1$$

On peut noter cet opérateur :

$$\mathcal{D}'_z \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}_z \quad (6.17)$$

L'opérateur $\xrightarrow{\alpha}$ agit en désactivant certains domaines et en activant d'autres domaines. Il est comparable à la fonction de répartition de la mécanique quantique, mais avec toujours cette différence que les domaines ne sont pas booléens. L'action du consommateur rapporté dans la maille virtuelle modifie la tension vue par la charge

non linéaire et de fait déplace le point de fonctionnement sur la caractéristique dans l'espace des M paramètres qui la définissent. L'opérateur définit ce déplacement.

Pour relier la source au courant de MV on a exploité l'application d'une source invariante au réseau primitif de la MV. Cela revient à brancher la MV aux bornes de la source du réseau non connecté. D'une manière générale, on caractérisera la MV par application d'une tension disponible dans des conditions de charge connue, de façon à pouvoir reporter le résultat dans une expression plus grande d'un réseau non connecté au départ. On fait l'hypothèse ici que l'impédance de la MV est linéaire.

6.5.4.3 Généralisation dans une Diakoptique de branche

On se replace dans l'hypothèse que l'on trouve une maille commune à N réseaux qui ne comporte aucun couplage avec les autres mailles. Cette condition nous permet de déterminer simplement la relation entre fém et courant de MV. Elle n'est cependant pas nécessaire mais simplifie juste notablement les équations. De plus on pose que les branches partagées sont linéaires.

On dispose de N réseaux donc N métriques dont les composantes sont de la forme

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \sum_n \prod_p \mathcal{D}_n z_{\mu\nu,n}$$

On peut définir pour chaque réseau une relation avant connexion : $e_\mu = \mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot \check{k}^\nu$. Aux bornes des branches sur lesquelles on va venir connecter une autre branche externe on peut écrire : $E_j = z_{j\nu} \check{k}^\nu$ en notant avec un indice j les branches concernées.

En branchant les charges externes, on vient d'abord rajouter les mailles de ces charges dans les équations des mailles d'origine, mais les domaines activés doivent être changés. Soit :

$$e_\mu = \mathcal{D}'_{\mu\nu} k^\nu - z_{\mu j} J^j \quad (6.18)$$

Par ailleurs la charge partagée dans la connexion, $z_{j\mu}$ intervient à son tour comme impédance de couplage dans la maille externe connectée :

$$e_j = -z_{j\nu} k^\nu + \mathcal{D}'_{jj} J^j \quad (6.19)$$

En notant : $\mathcal{Q}'^{jj} = (\mathcal{D}'_{jj})^{-1}$, on peut remplacer la fém en configuration connectée par la relation entre fém et courants non connectés et remplacer ensuite le courant extérieur par son expression dans la connexion. Soit :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot \check{k}^\nu = \mathcal{D}'_{\mu\nu} k^\nu - z_{\mu j} J^j$$

et :

$$J^j = \mathcal{Q}'^{jj} (e_j + z_{j\nu} k^\nu)$$

pour obtenir :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot \check{k}^\nu = \mathcal{D}'_{\mu\nu} k^\nu - z_{\mu j} \left\{ \mathcal{Q}'^{jj} (e_j + z_{j\nu} k^\nu) \right\} \quad (6.20)$$

Regroupons les termes pour faire apparaître courants et fém du même côté :

$$\left(\mathcal{D}'_{\mu\nu} - z_{\mu j} \mathcal{Q}'^{jj} z_{j\nu} \right) k^\nu - \mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot \check{k}^\nu = z_{\mu j} \mathcal{Q}'^{jj} e_j$$

Ces dans les conditions décrites par les équations 6.18 et 6.19 que se règlent les activations des domaines. Si les mailles rapportées non ni couplage ni fém, on peut annuler e_j et si de plus le couplage ne modifie pas significativement les activations - c'est à dire que les domaines actifs restent semblables - ce qui pourrait constituer une autre définition de la notion de couplage faible, alors on peut écrire :

$$k^\nu = \left(\frac{\mathcal{D}_{\mu\nu}}{\mathcal{D}_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}} \right) \check{k}^\nu \quad (6.21)$$

avec : $\omega_{\mu\nu} = z_{\mu j} \mathcal{Q}'^{jj} z_{j\nu}$. 6.21 constitue une équation de Diakoptique non linéaire en couplage faible.

6.5.4.4 Relativité d'échelle et Diakoptique

Supposons que le couplage introduise une variation δk^ν des flux. On peut alors développer la puissance u^2 suivant (en s'inspirant des principes fondamentaux présentés par Nottale[LN]) :

$$u^2 = g_{\mu\nu} (k^\mu \pm \delta k^\mu) (k^\nu \pm \delta k^\nu) \quad (6.22)$$

En créant : $\epsilon_{(x)}^{(x)} = \delta k^{(x)} (k^{(x)})^{-1}$, on trouve :

$$u^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu (1 \pm \epsilon_\mu^\mu) (1 \pm \epsilon_\nu^\nu) = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \pm \epsilon_\mu^\mu g_{\mu\nu} \epsilon_\nu^\nu k^\mu k^\nu = (g_{\mu\nu} \pm \delta g_{\mu\nu}) k^\mu k^\nu$$

La déviation de métrique peut être vue comme la conséquence par exemple d'une mesure. Une mesure constitue un cas de couplage "parasite" pour prélever une information. Il y a donc dans la majorité des cas couplages faibles et perturbation de la métrique, de telle sorte que l'on espère mesurer des quantités perturbées pas trop éloignées de ce qu'elles seraient en l'absence de mesure.

En cherchant à exprimer la mesure en fonction des quantités non perturbées, on réécrit l'équation 6.21 sous la forme :

$$\check{k}^\nu = \left(\frac{\mathcal{D}_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}}{\mathcal{D}_{\mu\nu}} \right) k^\nu = \left(1 - \frac{\omega_{\mu\nu}}{\mathcal{D}_{\mu\nu}} \right) k^\nu \quad (6.23)$$

où il apparaît clairement que :

$$\delta k^\nu = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\mathcal{D}_{\mu\nu}} k^\nu$$

L'invariant $g_{\mu\nu} \check{k}^\mu \check{k}^\nu$ devient additionné d'une métrique perturbée :

$$g_{\sigma\beta} = \frac{\omega_{\sigma\nu}}{\mathcal{D}_{\mu\nu}} g_{\mu\nu} \frac{\omega_{\mu\beta}}{\mathcal{D}_{\mu\nu}} \quad (6.24)$$

La mesure apparaît comme une transformation par produit avec les métriques non linéaires perturbées au second ordre, en couplage faible. Comme les domaines évoluent continuellement en fonction des valeurs des paramètres impliqués (les zones de recoupement ne sont pas infiniment abruptes. Une appartenance simultanée à deux domaines est présente aux frontières entre les domaines), on a une relativité d'échelle suivant les domaines adressés avec variation continue des métriques impliquées.

Cette technique des domaines peut être assimilée à une forme de banc de filtres. Chaque filtre sélectionne dans des conditions temporelles données une partie du message d'entrée et prend ainsi en charge des effets d'échelles dans le domaine temporel[MB2]. Par contre ces "bancs de filtres" ici peuvent être couplés entre eux.

6.6 Expression généralisée d'une métrique non holonomique pour la multiphysique

L'équation 6.13 généralisée dans un espace non linéaire à N flux devient :

$$z_\mu^{(\nu) \dots} = \sum_{[c_1 \dots c_N]} \prod_p^p \mathcal{D}_{[c_1 \dots c_N]} z_\mu^{[c_1 \dots c_N]} z_\mu^{(\nu) \dots} \quad (6.25)$$

Cette équation signifie que comme pour l'équation 6.10, on somme les produits de domaines pour toutes les combinaisons possibles $[c_1 \dots c_N]$ de position de ces domaines suivant chaque paramètre p et cela pour un flux particulier (ν) . Au global la métrique d'un système complexe non linéaire se décline en sommant pour tous les flux cette expression de fonction. On imagine dès lors que la métrique revêt un caractère extrêmement compliqué. Heureusement de nombreux termes sont linéaires, ce qui revient à n'avoir qu'un seul domaine de définition pour ces composantes, et beaucoup seront toujours inactifs, ce qui signifie que la dépendance aux paramètres est réduite à quelques branches en particulier pour lesquelles les comportements sont fortement non linéaires.

Tous les flux sous toutes leurs formes (toutes les physiques impliquées) constituent les axes d'un espace de configuration choisi dans lequel le fonctionnement du système est pointé à chaque instant. En soit tous les outils précédemment abordés permettent de traiter des transformations apportées à cette métrique, y compris

des transformations impliquant l'objet non holonomique et les coefficients de Christoffel. Notons que ces objets pourront s'enrichir d'un nouveau si les domaines eux-mêmes dépendent de la transformation.

Par exemple dans le cas d'une transformation de Lorentz, les durées des domaines temporel ou spatiaux doivent se contracter. Comme la contraction est uniforme et concerne l'axe dans son ensemble elle ne remet pas en cause la vérification de normalisation 6.12. La contraction intervenant à la fois au numérateur et au dénominateur dans l'exposant de l'expression 6.11, elle est sans effet : ainsi les domaines sont invariants dans une transformation de Lorentz.

Par contre considérons le problème d'un domaine attaché à une vitesse. Dans le référentiel de l'expérience (RAVIN) la seule vitesse perçue est celle du mobile observé. Le domaine sera donc réglé pour rattacher des propriétés au mobile en fonction de sa vitesse. Dans un référentiel externe (RENAT) la vitesse perçue dépend de la vitesse du mobile et de la vitesse du référentiel. L'expression du domaine devra donc être transformée puisque le paramètre vitesse n'est plus intrinsèque. Imaginons une définition de la forme :

$${}^v\mathcal{D}_k = \exp\left(-\left[\frac{v-v_0}{\sigma_v}\right]^\alpha\right) \quad (6.26)$$

Les vitesses se transforment pour une vitesse de référentiel V suivant :

$$v \rightarrow \frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}}$$

On remplace chaque vitesse dans le domaine par son expression relativiste :

$${}^v\mathcal{D}'_k = \exp\left(-\left[\frac{\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} - \frac{v_0+V}{1+\frac{v_0V}{c^2}}}{\frac{\sigma_v+V}{1+\frac{\sigma_vV}{c^2}}}\right]^\alpha\right)$$

Notons :

$$\xi = \frac{\left(1+\frac{vV}{c^2}\right)\left(1+\frac{v_0V}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{\sigma_vV}{c^2}\right)}$$

Alors :

$${}^v\mathcal{D}'_k = \exp\left(-\left[\frac{v-v_0 + 2\frac{vv_0V}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}(v+v_0)}{\xi(\sigma_v+V)}\right]^\alpha\right)$$

ou en notant :

$$\beta = 2\frac{vv_0V}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}(v+v_0)$$

Le domaine transformé devient :

$${}^v\mathcal{D}'_k = \exp\left(-\left[\frac{v-v_0+\beta}{\xi(\sigma_v+V)}\right]^\alpha\right) \quad (6.27)$$

A la limite des vitesses faibles, $\beta \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow 1$, le domaine n'est plus modifié. Si par contre V tend vers c , on obtient :

$${}^v\mathcal{D}'_k = \exp\left(-\left[\frac{2v}{c(c+v)}\right]^\alpha\right)$$

Le domaine prend une durée qui tend vers c^2 . Ainsi si l'on a N domaines, ils couvrent dans RAVIN une durée $N\sigma_v$ et dans RENAT une durée Nc^2 . Soit une dilatation relative de :

$$d = \frac{c^2}{\sigma_v}$$

Pour une particule relativiste on ne peut donc définir de base de domaines vue de RENAT sur un intervalle inférieur à d fois cet intervalle dans RAVIN. La transformation de Lorentz élargit considérablement les domaines d'énergies possibles de la particule. Par ailleurs la transformation de domaine donnée équation 6.27

est complexe : elle ne peut être traduite que par un opérateur qui agit sur l'exposant de l'exponentielle. Pour lever cette difficulté, on peut définir le domaine comme l'exponentielle d'un vecteur des paramètres x auquel cas la transformation agit sur ce vecteur. Soit :

$$\mathcal{D}_k^{x^u} = \exp(-[p(x^u)]^\alpha), \quad p(x^u) = \frac{x^u - x_0^u + \beta}{\xi(\sigma_{x^u} + V)}$$

En partant de $p(x^u)$ dans RAVIN : $p(x^u) = (x^u - x_0^u)\sigma_{x^u}^{-1}$ on trouve une transformation qui porte sur $p(x^u)$ telle que :

$$a = \frac{\sigma_{x^u}}{\xi(\sigma_{x^u} + V)}, \quad b = \frac{\beta}{\xi(\sigma_{x^u} + V)}, \quad p(x^u) \rightarrow ap(x^u) + b$$

La transformation s'applique au rapport sans dimension $p(x)$ dont la métrique n'est pas directement fonction, mais est dépendante d'une fonction de ce rapport. Toute différenciation fera appel aux techniques non holonomiques vues chapitre 5.

6.7 Méthodologie de caractérisation d'un élément non linéaire

La connaissance du modèle attaché à un élément primitif conditionne son utilisation pour un système couplé. Nous avons abordé au chapitre 2 quelques considérations de possibilités pour caractériser un organe, c'est-à-dire un réseau primitif. La connaissance des domaines permet d'envisager une autre façon de caractériser les organes non linéaires. Si l'on connaît l'étendue des domaines de chaque variables impliquées dans le fonctionnement ou le modèle recherché, on peut choisir une base de domaines sur laquelle projeter la fonction d'impédance non linéaire. Il reste alors à trouver pour chaque combinaison de produits de domaines les lois sur ces intersections.

6.7.1 Méthodologie statique

En statique, on peut explorer les réponses des organes en les traçant point par point pour chaque combinaison $c_1 \dots c_j$ des produits de domaines $\mathcal{D}_k^{x^u}$. Par des plans d'expériences on peut diminuer la quantité de paramètres pris en compte, certains d'entre eux n'ayant qu'une influence du second ordre voire moins [MB]. Dans une caractérisation statique, on va pouvoir ainsi retrouver les lois par combinaisons de domaines, lois qui caractérisent tout le comportement de l'objet sous test. Evidemment, la scrutation de toutes les combinaisons peut être longue et il faut disposer de matériel de test automatisé pour couvrir toutes les mesures à réaliser. Ensuite, l'extraction des lois peut se faire aussi par programme avec les différentes techniques de régressions disponibles (la technique des moindres carrés déjà évoquée au chapitre 2 s'avère en pratique une des plus robustes et simples dans la majorité des cas).

6.7.2 Méthodologie dynamique

A la méthode décrite précédemment s'ajoute le fait que la loi pour chaque combinaison de domaines dépend aussi de la vitesse d'application des variations. Cela signifie que les lois ne dépendent plus seulement de x^ν mais aussi de ses dérivées \dot{x}^ν . On peut considérer la vitesse comme un paramètre supplémentaire dont dépend le comportement de l'organe testé. Mais la multiplication des paramètres complexifie beaucoup une description déjà très riche. Il est donc préférable lorsque cela est possible de paramétrer les lois obtenues par intersections en fonction de la vitesse. A iso vitesse, la continuité doit être assurée entre les produits de domaines : on peut donc caractériser sur tout le domaine pour une vitesse d'application donnée. Le paramétrage se déduit en général de l'observation du déplacement des points sur une intersection en fonction de la valeur de vitesse.

6.8 Définition d'échelles, Diakoptique et multiéchelles

Nous avons déjà abordé les notions d'échelles avec la mécanique quantique enfouie dans les branches, l'espace des moments enfouis dans la métrique des mailles, les macromodèles de cordes, etc. Forts de ces notions et de celle de domaine juste abordée on peut tenter de poser une définition de la notion d'échelle.

Le point commun à toutes ces opérations est de ramener des processus se déroulant dans un espace à N dimensions à une propriété - une fonction - dans un espace à 1 dimension. Le changement d'échelle est donc avant tout une contraction de dimensions d'espaces sous-jacents. Nous proposons la définition suivante :

Définition :

le notion d'échelle se rattache à la dimension d'un espace. Un système est dit multiéchelle si sa description passe par la définition de plusieurs espaces de dimensions différentes. Autrement dit, les lois qui décrivent le comportement de la matière à une échelle évoluent et ne sont plus conservées à une autre échelle, en toute rigueur, sauf dans l'approximation linéaire.

Si l'on accepte cette définition, la Diakoptique non linéaire est de fait une opération qui implique le multi-échelle. Les réseaux primitifs sont de dimensions différentes et leurs accouplements engendrent un espace de nouvelle dimension en même temps qu'il modifie la métrique. De plus, comme les couplages s'effectuent sur des frontières choisies, on doit pouvoir ramener le réseau primitif connecté pratiquement à ses propriétés sur ces frontières.

Si aux bornes d'un réseau quelconque on repère deux sommets de frontière, on peut alimenter ce réseau par ces sommets et en déduire un schéma équivalent. Regardons la figure "réseau pour réduction".

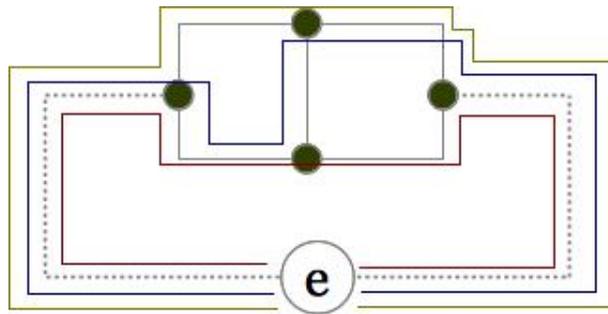


Figure "réseau pour réduction".

Le réseau central comporte en retirant la maille externe rajoutée en pointillé, 4 sommets, 5 branches. Il est décrit par 2 mailles. En rajoutant la maille de caractérisation en pointillé il faut définir 3 mailles. On choisit de faire partir toutes les mailles du générateur. On peut alors calculer les courants des trois mailles par $k^x = y^{xy}e_y$. Or connaissant ces trois courants on peut définir le courant $k = \sum_x k^x$. Connaissant k on peut ramener l'ensemble du réseau central à un réseau unique d'impédance - si a est l'impédance du générateur :

$$z = \frac{e}{k} - a$$

Le changement de connectivité peut être directement implémenté par l'intermédiaire des courants de branches. A condition d'ajouter la connectivité à la frontière sur le générateur rajouté, l'invariance d'espace des branches doit permettre de trouver la transformation à apporter à la métrique pour passer d'une base de mailles à l'autre. Regardons la figure "changement de connectivité" (on donne ici une illustration du principe précédent, avec un réseau plus simple).

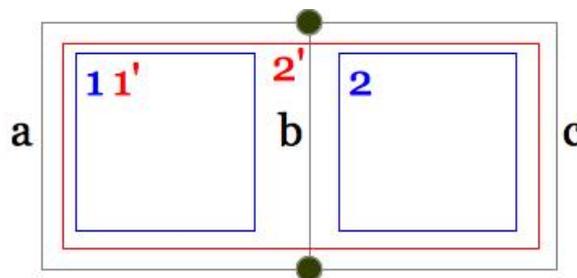


Figure "changement de connectivité".

La branche a est connectée aux mailles 1, 1' et 2'. La branche b aux mailles (1-2) et 1' et enfin la branche c aux mailles 2 et 2'. On en déduit les relations :

$$\begin{cases} 1 = 1' + 2' \\ 1 - 2 = 2' \\ 2 = 2' \end{cases}$$

Soit la matrice de transformation des connexions :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La métrique dans l'espace des mailles pour les mailles en bleu (1 et 2) est donnée par :

$$g = \begin{bmatrix} a+b & -b \\ -b & b+c \end{bmatrix}$$

On vérifie facilement qu'en calculant $g' = T^t g T$ on trouve la métrique pour les mailles en rouge :

$$g' = \begin{bmatrix} a+b & a \\ a & a+c \end{bmatrix}$$

On peut donc en transformant adéquatement la connectivité construire le macromodèle d'un réseau. Une fois déterminée l'impédance z , le réseau est réduit à une branche ayant cette impédance pour propriété. Comme la puissance tout autant que les courants de branches sont indépendants du choix de la base de maille, cette opération est applicable à des réseaux linéaires ou non linéaires, les fonctions non linéaires appartenant aussi à l'espace des branches à l'origine. Par contre, cette technique ne peut pas s'appliquer de fait à des non linéarités appartenant à l'espace des mailles. Cette situation arrive lorsque la non linéarité provient des inductances ou mutuelles, par la présence de matériaux ferromagnétiques ou de propriétés magnétisantes non linéaires. Dans ce cas, on ne peut pas choisir arbitrairement l'espace des mailles et la réduction n'est plus possible, sauf à ce que ces propriétés magnétiques soient enfouies dans des impédances de branches uniquement, par exemple en rattachant une branche à un solénoïde.

Comme la maille rajoutée peut être d'impédance propre arbitraire - mais dont on contrôle l'impact dans les cas non linéaires sur les activations de domaines - cette impédance peut être nulle ou très grande. La maille rajoutée se comporte alors comme une maille virtuelle externe ou source "J".

6.9 Conclusion du chapitre 6 : Résolution de l'équation tensorielle non linéaire

Nous suivons dans le principe la méthode de Newton telle que présentée dans [ECN]. Un système non linéaire s'écrit :

$$e_\mu = g_\mu (\nu u^\nu [k^\alpha, p^\beta])$$

Où nous choisissons ce développement qui répond à toutes les expressions précédemment vues.

On peut toujours déporter le premier membre à droite et convenir de l'égalité : $g_0 ({}_0u^0) = -e_\mu$, auquel cas le système peut s'écrire :

$$g_\mu (\nu u^\nu [k^\alpha, p^\beta]) = 0 \quad (6.28)$$

On peut définir un vecteur de fonctions qui dans son ensemble constitue la métrique non linéaire du système considéré.

Pour résoudre ce système on doit pouvoir déterminer une approximation de la solution (connaissance du vecteur k^α). Pour parvenir à cette approximation, on pose que les fonctions u^ν peuvent se projeter sur une base de domaines et avec 6.25 on écrit :

$$g_\mu (\nu u^\nu [k^\alpha, p^\alpha]) = \sum_{[i,j]} \prod_{p^\alpha} \mathcal{D}_{[i,j]}^{p^\alpha} g_{\mu\nu}^{[i,j]} \cdot u^\nu (k^\alpha, p^\alpha)$$

La sommation sur l'intervalle apparaît implicite (au sens d'un "intervalle muet") et nous écrivons finalement de façon plus lisible :

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ \mathcal{D} \dots \mathcal{D} \\ p_N \end{matrix} \right)_{[i,j]} g_{\mu\nu}^{[i,j]} \cdot u^\nu (k^\alpha, p_1 \dots p_N) = 0 \quad (6.29)$$

La recherche d'une solution approchée apparaît alors naturellement. Lorsque le système "démarré", c'est à dire lorsque l'on commence à regarder son fonctionnement, on ne couvre qu'une collection de domaines, par des

valeurs de paramètres qui constituent les conditions initiales généralisées du système. L'équation se réduit alors à :

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ \mathcal{D} \dots \mathcal{D} \\ p_N \end{matrix} \right)_{(i)} g_{\mu\nu}^{(i)} \cdot u^\nu (k^\alpha, p_1 \dots p_N) = 0$$

Si les domaines sont suffisamment fins, la fonction u^ν devient linéaire et affine sur les intersections et on peut écrire :

$$u^\nu (k^\alpha, p_1 \dots p_N) \approx a_{(i)} k^\nu + b_{(i)}$$

soit à linéariser par morceaux les fonctions comme première approximation de leurs valeurs sur une intersection de domaines. A ce moment il découle en notant $g_{\mu\nu}^{(i)} \cdot (a_{(i)} k^\nu + b_{(i)}) \leftrightarrow g_{\mu\nu}^{(i)} \cdot k'^\nu$ que les solutions approchées k'^ν sont données par (en remplaçant les sources aux conditions initiales connues) :

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ \mathcal{D} \dots \mathcal{D} \\ p_N \end{matrix} \right)_{(i)} g_{\mu\nu}^{(i)} \cdot k'^\nu = e_\mu \tag{6.30}$$

Ces solutions connues (on résout le système précédent devenu simplement intégral-différentiel par différences finies temporelles par exemple), on peut écrire les solutions exactes comme : $k^\nu = k'^\nu + \epsilon^\nu$. On porte cette somme dans l'équation 6.28 :

$$g_\mu (\nu u^\nu [k'^\alpha + \epsilon^\alpha, p^\beta]) = 0$$

Plutôt que de noter k' on note $\overset{1}{k}$ pour indiquer que l'on se rapporte à la première approximation. Et donc : $\overset{2}{k} = \overset{1}{k} + \overset{1}{\epsilon}$.

On considère l'erreur comme assez petite et la fonction g continuellement dérivable sur le domaine en cours d'activation (i). On peut sous ces hypothèses écrire :

$$g_\mu \left(\nu u^\nu \left[\overset{1}{k}^\alpha + \overset{1}{\epsilon}^\alpha, p^\beta \right] \right) = g_\mu \left(\nu u^\nu \left[\overset{1}{k}^\alpha, p^\beta \right] \right) + \overset{1}{\epsilon}^\alpha \frac{\partial g_\mu}{\partial u^\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial \overset{1}{k}^\alpha}$$

En définissant la matrice Jacobienne :

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial g_\mu (\nu \dots)}{\partial \overset{1}{k}^\nu}$$

on obtient :

$$g_\mu \left(\nu u^\nu \left[\overset{1}{k}^\alpha + \overset{1}{\epsilon}^\alpha, p^\beta \right] \right) = g_\mu \left(\nu u^\nu \left[\overset{1}{k}^\alpha, p^\beta \right] \right) + W_{\mu\nu} \overset{1}{\epsilon}^\nu = 0$$

et donc :

$$\overset{2}{k}^\nu = \overset{1}{k}^\nu - M^{\nu\mu} g_\mu \left(\nu u^\nu \left[\overset{1}{k}^\alpha, p^\beta \right] \right)$$

avec $M^{\alpha\mu} = (W_{\mu\alpha})^{-1}$.

On calcule ainsi le courant à l'ordre $n : \overset{n}{k}$ jusqu'à convergence. En pratique 2 itérations sont souvent suffisantes pour estimer avec une précision ordinairement suffisante les flux dans la majorité des applications (on pourra se reporter à l'annexe D pour un exemple illustratif de cette technique).

6.10 Références du chapitre 6

- [HHH] H.H.Happ, "Gabriel Kron and systems theory". Union College Press, , New York, 1973.
- [BDM] P.Durand, F.Boussandel, O.Maurice, "Power chopper modelling using the Kron's method". Congrès IASTE, Sri Lanka, 2012.
- [LN] L.Nottale, "Scale relativity and fractal space-time". Edition Imperial College Press, 2011.

- [MB] M.Breant, O.Maurice, T.Dubois, G.Duchamp, “to improve the variability of one complex system with the MKME”. Congrès EMCEurope 2012, Rome.
- [ECN] B.Démidovitch, I.Maron, “Eléments de calcul numérique”. Edition MIR, 1973.
- [MB2] M.Bellanger, “Traitement numérique du signal”. Edition Masson, collection CNET-ENST. Paris 1996.

Chapitre 7

Groupes de transformations

7.1 Introduction au chapitre 7

On ne veut pas tant ici se raccrocher aux groupes standards de la topologie algébrique, que d'essayer de définir des familles de transformations sur les réseaux, leurs métriques, etc., pour pouvoir ensuite se projeter sur ces familles qui regrouperont les transformations ayant des similitudes fortes. La notion de groupe mathématique y est bien sûr présente, peut-être aussi celle de groupoïde[ROTT], mais ce n'est pas l'objet de cette thèse que d'aborder en détail les aspects mathématiques de ces objets ni de la compétence de son auteur¹. Mais l'on peut identifier des caractères communs utiles pour l'usage et la suite du formalisme proposé sans aujourd'hui en définir complètement le contexte mathématique. C'est le propos de ce chapitre. Notons que l'on entend par transformations des opérations qui modifient les structures ou définitions des réseaux mais pas dans un but de changement de bases. Ainsi les transformations considérées opèrent même sur les connectivités, mais ces dernières n'en font pas partie, en tout cas nous ne les abordons pas ici, considérant les changements de bases comme des transformations particulières décrites dans le chapitre 1 et dont le but n'est pas de modifier les structures, mais de les exprimer dans des points de vues - des référentiels - différents.

7.2 Notions basiques de groupe

Un groupe est un ensemble d'objets muni d'une loi de composition interne[LDM] qui a deux éléments de l'ensemble fait correspondre leur composition :

$$(x, y) \rightarrow x * y$$

Cette loi de composition doit respecter certaines propriétés :

1. être associative ;
2. avoir un élément neutre ;
3. être telle que tout élément possède un symétrique.

Les morphismes sont des applications d'un groupe vers un autre. Lorsqu'ils sont réciproques on parle d'isomorphismes et s'ils sont unilatéral on parle d'homomorphisme.

Les groupes de transformations particulièrement importants pour nous, opèrent sur un ensemble muni d'une loi externe. A (g, x) ils font correspondre gx , g étant un élément d'un groupe de transformation \mathcal{G} et x un élément de l'ensemble \mathcal{E} muni de la multiplication. On doit vérifier : $g(hx) = (gh)x$ et l'existence d'un élément neutre I tel que $Ix = x$.

7.3 Transformations présagées

Parmi les opérations que nous avons abordé, on a :

- des transformations géométriques ou d'environnement qui ne peuvent affecter que les matrices n ou χ ou les expressions des métriques incluant les cordes ;

1. On accepte d'ailleurs comme description de groupe une opération du type Tg décrivant T appliquée à g alors que g est deux fois covariant, T étant décomposable en racines pour retrouver plus usuellement le produit bilinéaire de la forme $(\sqrt{T})^T g (\sqrt{T})$.

- les transformations sur la structure des réseaux : ajout, suppression de branches, ajout de mailles, etc. ;
- les opérations sur les réseaux : produits de réseaux, somme, etc., et modifications de formats ;
- des transformations qui portent uniquement sur les métriques ou les sources ;
- des transformations sur les domaines ;
- les transformations de cordes - transformations d'environnements

Nous allons aborder chacun de ces types de transformations, l'ensemble de ces types regroupant a priori l'ensemble des transformations que l'on peut être amené à effectuer sur les réseaux et leurs descriptions.

7.3.1 Transformations géométriques

Les réseaux étant intrinsèquement non connectés à l'espace géométrique au niveau des sommets, des branches ou des mailles, ils ne peuvent être directement sensibles à des transformations portant sur la géométrie. Ainsi une maille faite de deux branches reste identique à elle-même qu'elle que soit la géométrie qui intervient dans la définition des propriétés de ses branches. Par contre ces changements vont affecter tous les objets qui se réfèrent à la géométrie : la connexion sommets - référentiel n , les moments qui en découlent, les fonctions d'impédances dont les cordes. Essayons de voir dans chaque cas comment s'appliquent ces transformations.

7.3.1.1 Transformations sur la connexion spatiale et les moments : groupe \mathcal{T} en translations

Chaque réseau est attaché à un référentiel propre. Les sommets dans ce référentiel sont repérés par leurs coordonnées inscrites dans la matrice n dont les lignes sont les sommets et les colonnes leurs coordonnées dans le référentiel choisi. On peut créer un ensemble de ces transformations \mathcal{T} et regarder si elles présentent une structure de groupe qui opère sur les matrices n . Les moments se déduisant de n par : $\chi = B.n$ et la matrice incidence B n'étant liée qu'au réseau cellulaire, donc indépendante de la géométrie, on peut faire opérer les transformations T de \mathcal{T} indifféremment sur n ou χ .

n est une matrice rectangulaire avec au minimum une dimension 1x3 dans un espace en trois dimensions. Une transformation T va modifier les coordonnées (rotation, translation, ...). On doit opérer : $Tn = n'$. Comme la matrice n est rectangulaire, il n'est pas trivial de trouver T . Par contre on peut écrire : $n = n_x + n_y + n_z$ où chaque matrice n_μ ne comporte qu'une colonne non nulle qui est la coordonnée des sommets suivant x , y ou z . Il apparaît alors immédiatement que les matrices T sont de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{x'_a}{x_a} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{x'_b}{x_b} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

par exemple appliquée à une matrice :

$$n_x = \begin{bmatrix} x_a & 0 & \dots \\ x_b & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Le groupe \mathcal{T} opère donc sur l'ensemble $\mathcal{E}(n_\mu)$ des connectivités d'axes d'espace géométrique muni de la multiplication matricielle. Il admet bien un élément neutre (la matrice identité) et il est évident que soit deux transformations T et T' : $T(T'n_\mu) = (TT')n_\mu$. De plus ce groupe est commutatif pour les translations (notons que sous la forme que nous avons présenté, la transformation s'apparente plus à une dilatation qu'à une translation classique. Mais les deux opérations sont en pratique équivalentes.).

Définition : groupe de transformations géométriques \mathcal{T}

Ce groupe opère sur l'ensemble des matrices de connectivités entre les sommets et les axes de l'espace géométrique. L'élément neutre est la matrice identité. Il est commutatif pour les translations. Les expressions des métriques ou des opérateurs impliqués dans les cordes étant reliés aux matrices de connectivité n , le groupe \mathcal{T} opère aussi sur les ensembles de ces objets par l'intermédiaire de son application aux matrices n_μ .

7.3.1.2 Rotations

Le groupe \mathcal{T} n'est pas commutatif en rotation. Imaginons deux sommets repérés par la matrice n . On peut opérer une rotation $R1$ c'est à dire faire tourner l'axe de ces deux sommets donné par χ_1^μ pour une branche suivant un axe de rotation centré entre les deux sommets et perpendiculaire à leur plan de rotation. Puis exécuter une rotation $R2$ suivant un axe qui est l'axe entre les sommets avant la première rotation. Si l'on applique cette

deuxième rotation en premier puis la seconde, la première n'aura pas d'effet puisqu'elle s'effectue suivant un axe égal à celui entre les sommets. La figure "successions de rotations" illustre ces opérations.

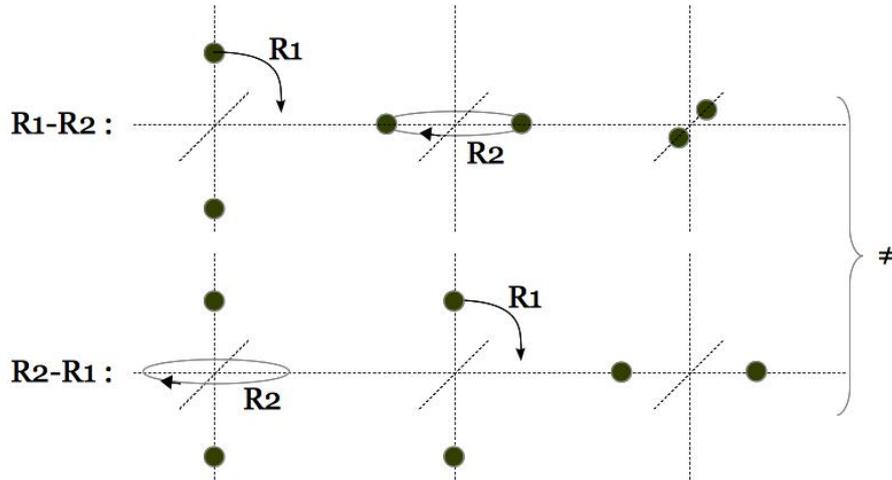


Figure "successions de rotations".

On voit que l'ordre des rotations appliquées influe sur le résultat qui n'est pas identique en final. Dans son processus, le groupe des rotations est identique à celui des translations, mais ce n'est pas un groupe commutatif.

7.3.2 Transformations opérant sur la structure des réseaux

On peut modifier l'incidence des réseaux, leurs connectivités. Nommons \mathcal{F} le groupe des transformations qui opèrent sur les incidences B ou connectivités C des réseaux. On peut modifier le sens des branches, ajouter ou supprimer des branches. Toutes les opérations de transformations sur B ou C sont applicables aux mailles comme aux branches.

7.3.2.1 Changement de sens ou modification de signes

Dans la matrice incidence, le signe des connexions entre sommets et branches porte la direction du vecteur branche. On peut changer cette direction par l'application d'une transformation F . Considérons la matrice incidence :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En appliquant la matrice :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

on obtient :

$$FB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on se dote d'une seconde transformation G telle que :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on trouve facilement que $G(FB) = (GF)B$. Par ailleurs la matrice identité constitue un élément neutre pour cette transformation. On peut donc considérer que la modification de sens constitue un groupe de plus commutatif.

7.3.2.2 Suppression de branches

Les matrices $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ permettent de supprimer les branches respectivement 3 et 2 d'une incidence. Par exemple si : $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
 $SB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Comme les matrices S et S' ne sont pas rectangulaires, il est évident que l'on ne pourra pas calculer $S'(SB)$. Ces matrices ne peuvent donc pas constituer un groupe qui opère sur les structures des réseaux. Pour pouvoir constituer un tel groupe il faut considérer l'ensemble complet des éléments branches, mailles, etc. Ainsi considérons la matrice :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquée à B on trouve :

$$SB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La branche 3 est toujours présente mais n'est connectée à aucun sommet. Dans ce formalisme, on calcule que $S'(SB) = (S'S)B$. Par ailleurs l'identité constitue un élément neutre et la commutativité est vérifiée. Il faut donc appliquer les transformations sur des incidences et connectivité complètes qui intègrent même les éléments non connectés. Les mêmes mécanismes étant applicables aux mailles.

7.3.2.3 Adjonction de branches, de mailles

Si la connexion de l'élément à rajouter s'exprime comme proportionnelle à l'une des connexions existantes, on peut créer des branches par transformations. Considérons par exemple la matrice d'incidence suivante :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La transformation A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

appliquée à B donne l'incidence :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

qui reconstruit la branche précédemment détruite.

Les combinaisons de construction, destruction de branches ou de mailles constituent un groupe qui opère sur les incidences ou les connectivités. Il est non commutatif : ce qui traduit l'idée que les matrices de type A qui peuvent être vues comme des matrices de création et celles de types S comme des matrices de destructions, toutes deux éléments de \mathcal{F} , ont un commutateur non nul ce qui est logique. A ne va pas modifier une incidence où une branche existe déjà alors qu'elle pourra la recréer si dans une première opération S l'aura supprimée à B .

Définition : groupe de transformations de structures \mathcal{F}

Ce groupe comprend les matrices de changement de signe, de suppression ou création de branches ou de mailles ou de sommets. Il opère sur l'ensemble des matrices d'incidences et de connectivités. Il est non commutatif

et agit sur l'espace complet dans la définition des connexions, c'est à dire que les incidences et connectivités doivent être définies pour tous les éléments de l'espace et pas seulement une partie. Autrement dit encore, si une branche par exemple n'est connectée à aucun sommet mais existe dans l'espace des réseaux considéré, la matrice incidence doit la faire apparaître avec sa connexion nulle en tout sommet. Si l'espace des éléments cellulaires considéré est de dimension N , les matrices de \mathcal{F} seront de dimension N .

7.3.3 Transformations de formats

Considérons un exemple simple : soit la métrique 2x2 donnée par : $g = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Si l'on veut exprimer chacune de ses composantes dans un format de dimension 2 et non plus un scalaire, cette métrique se transforme en :

$$g = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

Ce qui revient à transformer chacune des composantes en une matrice elle-même de dimension 2x2. Cette transformations peut s'opérer en deux temps. Dans un premier temps on effectue le produit direct de la métrique par elle-même autant de fois que le nouveau format augmente la dimension. Nous notons le produit direct par une union. Donc pour notre exemple :

$$g' = \bigcup_2 g = g \cup g = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

On multiplie ensuite cette première transformation par une seconde qui fait apparaître la nouvelle métrique :

$$(F_1 : F_2) = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{b} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{b_1}{a} & \frac{b_2}{b} \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

La notation $(F_1 : F_2)$ indiquant cette deuxième opération. L'ensemble des opérations $(F_i : F_j) \cup_i$ constitue-t-il un groupe qui opère sur les métriques ? En fait l'opération $\hat{F} = (F_i : F_j) \cup_i$ n'a de sens qu'appliquée à une métrique. On ne peut donc pas calculer $(\hat{G}\hat{F})g$. L'opérateur ainsi formulé ne peut donc pas constituer un groupe. Par contre si l'on considère non plus l'ensemble des métriques g mais l'ensemble de leurs produits directs $\bigcup_i g$, dans ce cas on peut exprimer $\hat{G}(\hat{F} \bigcup_i g) = (\hat{G}\hat{F}) \bigcup_i g$. L'élément neutre est l'identité et si les composantes des transformations \hat{F} sont linéaires et commutatives, le groupe est commutatif. Mais ce n'est pas obligé, les composantes peuvent être des opérateurs eux-mêmes non commutatifs.

Définition : transformations de formats

Les transformations de format \hat{F} constituent un groupe qui opère sur l'ensemble des produits directs de métriques $\bigcup_i g$, matrices de transformations et métriques résultantes étant alors de mêmes dimensions.

Les transformations de type : $(F_i : F_j)$ reviennent à remplacer chaque branche du réseau de départ par un réseau lui-même constitué de j branches. La figure "réseau 2-format" illustre ce principe sur un cas simple.



Figure "réseau 2-format".

7.3.4 Transformations de métriques

Les transformations vont être gérées très différemment suivant que la métrique est linéaire ou non. Dans le cas d'une métrique linéaire, on peut dissocier les transformations portant sur ses termes diagonaux - termes propres - des transformations portant sur ses termes extra-diagonaux ou termes de couplages. Dans le cas d'une métrique non linéaire, cette dissociation n'est pas possible et il faut appliquer la transformation sur le vecteur de fonction. Une autre possibilité peut apparaître avec les domaines.

7.3.4.1 Métriques linéaires

Le groupe de transformations \mathcal{P} agit sur les métriques diagonales. Pour une métrique 2x2 de la forme :

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

une transformation comme :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & \frac{b'}{b} \end{bmatrix}$$

permet de transformer les composantes de la métrique de a à a' et de b à b' . Notons bien que la structure du réseau n'est pas modifiée. Ainsi la transformation :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

fait passer la propriété de la branche 1 de a à b et celle de la branche 2 de b à a , mais les branches gardent leur identité dans la topologie cellulaire. La transformation est différente de celle qui pourrait consister à échanger les lignes en opérant sur l'incidence par exemple. Néanmoins ce type de transformation permet d'opérer des rotations vis à vis de couplage par exemple. Imaginons une métrique donnée par :

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \beta & 0 & c \end{bmatrix}$$

Où la source d'énergie du courant de maille k^3 provient du courant k^1 : $e_3 = \beta k^1$. Si l'on désire déplacer le couplage et reporter la source βk^1 sur l'impédance b et non c : on applique la transformation :

$$P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{c} \end{bmatrix}$$

à la diagonale g^D de g en écrivant :

$$g = g^D + g^{Ed}$$

On calcule alors : $Pg^D + g^{Ed}$ avec :

$$g^{Ed} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce type de technique permet de faire des opérations très diverses comme par exemple les échanges de lignes dans les métriques. Soit :

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

on effectue :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ a & b \end{bmatrix}$$

On peut ainsi imaginer tout un ensemble de transformations qui vérifient toutes : $A(Bg) = (AB)g$ et ont un élément neutre qui est l'identité. On séparera dans de nombreux cas les parties diagonale et de couplages.

Définition : transformations de métriques linéaires

En séparant toute métrique en somme de ses deux parties propre et de couplages le groupe de transformations \mathcal{P} opère séparément sur l'une ou l'autre des parties pour modifier les composantes de la métrique. Ce groupe est non symétrique. Entre autre si l'on annule une composante d'une métrique on ne pourra plus l'échanger ensuite. Le schéma d'échange typique est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

où a est un rapport d'impédances généralisées.

7.3.4.2 Métriques non linéaires

Dans le cas de métriques non linéaires en général, g devient un vecteur de fonctions non séparables. Au niveau matriciel, les seules modifications que l'on peut apporter sont de fait des échanges de lignes dans ce vecteur, ce qui revient à renuméroter les sources. Ces échanges se font par des matrices identiques aux gamma-matrices que nous détaillons dans le chapitre suivant. Nous ne les détaillerons donc pas ici.

Une autre option consiste à passer par des changements de bases portant sur les variables des fonctions, mais ils ne constituent pas des transformations au sens des groupes que nous recherchons.

En fait, tant que l'on ne sait pas introduire une séparabilité, il semble qu'aucune transformation de métrique ne soit disponible dans le cas général, sauf une transformation triviale qui échange les fonctions dont les composantes sont de la forme :

$$\frac{f'}{f}$$

où f et f' sont des fonctions du vecteur de fonctions g , dans l'hypothèse bien sûr où f est non nulle.

7.3.5 Transformations de domaines - ou transformations modales

Pour obtenir la séparabilité du vecteur de fonctions non linéaires, on peut exploiter différentes techniques, mais toutes consistent à remplacer une fonction par son développement dans des bases de fonctions variées. On peut alors utiliser la terminologie de domaine ou mode pour chacun des termes du développement. Nous avons vu les domaines pour la modélisation de physiques fortement non linéaires. On peut par exemple décomposer une fonction exponentielle en suite de fonctions de son exposant. Chacune de ces fonctions constituera un mode de répartition des variables concernées. La série de Fourier s'inscrit dans ces techniques où elle permet de projeter une fonction du temps en somme de fonctions de la fréquence pour des modes donnés. La série de Fourier est intrinsèquement séparable puisqu'elle engendre un spectre de raies. Chaque raie est alors attachée à son impédance propre. Il est d'ailleurs fréquent d'utiliser la série de Fourier pour simplifier des comportements temporels complexes. Le champ d'un oiseau est temporellement complexe, alors que son spectre est identifiable.

Nous allons nous attacher à l'étude des transformations de domaines.

Une fois une métrique développée sur des bases de domaines, le vecteur de fonctions redevient une matrice dont les composantes des colonnes sont les différents termes des sommes de produits de domaines appliquées à des combinaisons de paramètres diverses. Sur chaque combinaison, la métrique reste de manière générale non linéaire. Mais elle a pu être séparée. En notant avec des lettres grecques les paramètres et avec des lettres latines les indices des domaines pour chaque combinaison, ces fonctions sont notées $f^{abc\dots}$, et s'appliquent à une collection de paramètres $k^\alpha, k^\beta, k^\gamma, \dots$. Soit que chaque composante de la métrique est de la forme :

$$g_A \left({}_{(\nu)}k^{(\nu)} \dots \right) = \mathcal{D}_a^\alpha \mathcal{D}_b^\beta \dots f_{A,(\alpha,\beta,\dots)}^{abc\dots} (k^\alpha, k^\beta, \dots) \tag{7.2}$$

Une fois la séparation effectuée, que peut-on faire ? On ne peut pas modifier les bases de domaines, elles ont été intimement engendrées par les évolutions mêmes des fonctions. Leurs modifications ne peut être dissociée d'une modification de ces mêmes fonctions. De fait cette approche serait compliquée et il vaut mieux modifier le vecteur de fonction à l'origine de sa définition, ce qui sera plus efficace. Par contre en gardant les domaines et donc le découpage de la métrique on peut modifier les fonctions dans les domaines. La contrainte est qu'il faut garder les points de connexions aux limites de l'intersection. Ces transformations sont d'ailleurs existantes naturellement et traduisent les modifications par exemple de dynamique qui ont été évoquées précédemment. Si

sur une intersection, une fonction est affine, on ne peut pas modifier les coefficients de pente et valeur à l'origine de l'intersection sans couper la continuité avec l'intersection voisine. Les transformations possibles sont donc des déformations curvilignes qui laissent invariants les profils aux changements d'intersections.

Comme l'équation 7.2 le montre, dans une métrique exprimée sous formes développées sur des intersections, ce n'est pas tant la variable élémentaire qui constitue finalement la composante élémentaire de la métrique que les ensembles de paramètres pointés par les combinaisons de domaines. Ces combinaisons constituent quelque part les indices contravariants du développement de la métrique. Le système d'équations solutions du système non linéaire étudié peut s'écrire de fait pour un ensemble de paramètres connus en pointant uniquement les numéros de domaines intersectés a, b, \dots , pour des flux identifiés (soit un espace de configuration défini) pour un opérateur de sélection π s'appliquant à la fonction f pour cette intersection sous la forme :

$$e_A = \pi_{A,(a,b,\dots)} f^{(a,b,\dots)} \tag{7.3}$$

Le propos devient donc de savoir s'il existe un groupe de transformation qui opère sur les termes $f^{(\alpha,\beta,\dots)}$ quand on s'est doté d'une métrique non linéaire $\pi_{A,(\alpha,\beta,\dots)}$ pour un environnement et des sources d'énergie e_A .

Plusieurs opérations appliquées aux fonctions f sont envisageables. Ce peut être des remplacements de la forme $f'f^{-1}$, des modifications par produit hf , etc. Entre les deux points limites des zones régulières dans les intersections on peut imaginer une grande variété de fonctions possibles comme autant de développements polynomiaux. L'ordre 1 correspond à une linéarisation à une droite, etc. Les matrices de transformations sur les fonctions forment un groupe qui opère sur ces fonctions car on peut toujours faire $\omega(hf) = (\omega h)f$. L'identité constitue l'élément neutre. Par contre on ne peut garantir la commutativité dans le cas général.

Définition du groupe de transformations de la métrique non linéaire par intersections :

on nomme groupe de transformations \mathcal{S} le groupe qui opère sur les fonctions f définies pour chaque combinaison de domaines (intersection). L'élément neutre de ce groupe est la matrice identité. La formulation qui permet de définir ce groupe est celle donnée équation 7.3.

7.3.6 Transformations d'environnements

Les transformations d'environnements touchent exclusivement les cordes. Ces dernières permettent de modéliser des propagations dans des milieux variés. Si l'on considère la métrique suivante traduisant deux branches qui sont les conditions limites d'un schéma de Branin (p est l'opérateur de Laplace) :

$$g = \begin{bmatrix} R_0 + Z_c & (Z_c - Z_L) e^{-\tau p} \\ (Z_c - R_0) e^{-\tau p} & Z_c + Z_L \end{bmatrix}$$

Ce schéma suppose une propagation linéaire dans le milieu. Si la propagation n'est pas linéaire, l'expression du produit dans le couplage est remplacée par un produit de convolution dans le domaine temporel - mais reste un produit dans le domaine du calcul symbolique.

Si l'interaction passe d'un milieu ouvert à un milieu fermé, la vitesse de propagation va être modifiée en fonction du milieu et des modes de propagation qu'il autorise. Par exemple entre un espace libre et un guide rectangulaire, les expressions évoluent de ωc^{-1} à

$$\sqrt{\left(\frac{n\pi}{\chi}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

n est le numéro du mode, χ une caractéristique géométrique du milieu et ω la pulsation. Mais la modification de l'environnement de propagation va dans le même temps influencer sur l'impédance caractéristique de propagation Z_c . Ce sont donc les quatre termes de la métrique qui doivent être transformés. Comme nous l'avons déjà utilisé précédemment, la transformation devient triviale si l'on sépare les parties propres et de couplages de la métrique, soit à écrire :

$$g = g_0 + g_C, \quad g_0 = \begin{bmatrix} R_0 + Z_c & 0 \\ 0 & Z_c + Z_L \end{bmatrix}, \quad g_C = \begin{bmatrix} 0 & (Z_c - Z_L) e^{-\tau p} \\ (Z_c - R_0) e^{-\tau p} & 0 \end{bmatrix}$$

Les transformations ont alors l'allure :

$$\tau = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{d}{c} \end{bmatrix}$$

Où a, b, c, d sont les fonctions d'origine (a et c) et nouvelles (b et d). Si l'on considère le groupe de chacune des transformations qui opère soit sur la partie propre soit sur la partie de couplages, on vérifie dans chaque cas : $\tau'(\tau g) = (\tau'\tau)g$. L'élément neutre est l'identité. La commutativité n'est pas toujours vérifiée (dans le cas d'une propagation non linéaire et d'opérateurs de convolution on n'est pas commutatif).

Définition : groupe de transformations de cordes :

le groupe \mathcal{E} de transformations de cordes agit sur les deux parties séparées de la métrique en parties propre et de couplages. Il opère sur la partie propre en modifiant l'impédance caractéristique en propagation et sur la partie de couplages en modifiant ce terme, plus la fonction de propagation. Les matrices de transformations sont diagonales et portent les rapports des nouvelles expressions des composantes de la métrique sur les anciennes.

7.4 Conclusion du chapitre 7

Les groupes que nous avons définis vont jouer un rôle essentiel dans la partie II de la thèse, dans les opérations de transformations des tenfolds. La plupart sont non commutatifs. Nous avons montré qu'il y avait deux sortes de groupes : ceux qui agissent sur un ensemble direct et ceux qui nécessitent une séparation des éléments de l'ensemble sur lequel le groupe opère. Nous avons identifié :

1. le groupe \mathcal{T} qui opère sur les positions des réseaux en déplaçant et en effectuant des rotations des sommets des réseaux ;
2. le groupe \mathcal{F} qui opère sur les structures des réseaux en modifiant les incidences, les connectivités ;
3. le groupe \hat{F} qui modifie les formats associés aux définitions des réseaux. Il opère sur les produits directs des métriques ;
4. les groupes \mathcal{P} et \mathcal{E} qui opèrent sur les métriques séparées en parties propres et de couplages ;
5. le groupe \mathcal{S} qui opère sur les fonctions associées aux domaines dans une description non linéaire de la métrique.

Du fait même de la propriété de groupe opérant sur un ensemble : $A(Bx) = (AB)x$, on peut calculer le commutateur de chaque groupe.

Nous avons vu que \mathcal{T} est non commutatif. De fait aussi, son commutateur est non nul lorsqu'interviennent des rotations. Ce commutateur traduit l'aspect polaire du réseau auquel on applique les rotations successives et dépend de l'orientation à l'origine du réseau. Il permet de fait d'appréhender l'impact de cette orientation d'origine sur des orientations appliquées.

Le commutateur de \mathcal{F} indique l'irréversibilité des transformations. Ainsi l'ordre où apparaît les transformations de suppression est important puisque lorsqu'elles sont les dernières transformations appliquées, il y a diminution des dimensions du réseau. La commutativité non nulle découle du mélange des usages des opérateurs de construction et destruction. Si l'on utilise les seuls opérateurs de construction ou de destruction, le commutateur est nul.

Dans le cas du groupe de modification de formats \hat{F} , la diversité des opérateurs impliqués est telle que l'on ne peut présager du sens du commutateur. Dans chaque cas on pourra voir si ce commutateur a un sens ou pas et lequel.

Les groupes agissant sur les métriques : \mathcal{P} , \mathcal{E} , \mathcal{S} traduisent l'évolution de milieux, l'action de paramètres externes, etc. Leurs commutateurs ont donc un sens important qui traduit l'impact des évolutions et de leur ordre d'application. Dans les géodésiques de ces évolutions que nous chercherons, il est certain que dans le cas des processus non linéaires, les trajectoires ne se rejoignent jamais. Dans la grande majorité des cas, ce sont ces processus que l'on observe dans la nature où la linéarité est l'exception. L'entropie peut-être vue comme l'une des causes de la non linéarité naturelle. Mais ces réflexions font partie de celles abordées dans la partie IV de la thèse.

7.5 Références du chapitre 7

- [ROTT] A.Rottman, “Gabriel Kron et la formulation d'une technique de résolution des systèmes complexes sur la base de la théorie globale du circuit électrique (électrodiakoptique)”. Article du bulletin scientifique de l'institut Montefiore, 1988.
- [LDM] Encyclopédia universalis, “Dictionnaire des mathématiques : algèbre, analyse, géométrie”. Edition Albin Michel, 1997.

Deuxième partie

Mécanisme des Gamma matrices & tenfolds

Préambule

Disposant de la technique de l'analyse tensorielle des réseaux, nous devons maintenant nous doter d'une technique nous permettant de l'utiliser de la façon la plus lisible possible pour modéliser des évolutions d'objets réels représentés par des réseaux. De fait nous allons chercher à suivre l'évolution de réseaux suivant différentes hypothèses de choix ou d'interactions avec des environnements. Il y a donc d'une part une exigence de représentation compacte de ces réseaux et de leurs évolutions, et d'autre part une exigence de représentation de trajectoires dans l'histoire d'un système.

Pour répondre à la première exigence on a développé le concept de tenfold. Pour répondre à la seconde, on s'appuie sur la technique des gamma matrices. Nous abordons d'abord les tenfolds car nous aurons besoin de cette algèbre pour l'insérer ensuite dans le mécanisme des gamma matrices.

Les gamma matrices peuvent être vues comme des matrices de transition, des matrices de Markov, étendues à des opérateurs agissant sur des tenfolds.

Chapitre 8

Tenfold

8.1 Introduction au chapitre 8

On veut regrouper dans un objet mathématique unique la définition complète d'un réseau. Pour décrire un réseau on a besoin au minimum de décrire sa topologie, fournir sa métrique et les sources propres - intrinsèques - qui l'anime.

La forme choisie doit être assez facile d'emploi pour lui appliquer des transformations - des évolutions - qui vont traduire les mêmes évolutions observées sur des entités réelles. La topologie des réseaux est décrite dans des matrices : matrice d'incidence, d'adjacence, de connectivité. Sa métrique dans des tenseurs écrits dans des formats divers et ses sources propres dans des covecteurs multiphysiques. Ces différentes matrices forment un ensemble inhomogène que l'on peut réunir dans une liste. On convient d'appeler ces listes des tenfolds, de tenseurs - qui sont certaines des composantes de ces listes - et "fold" qui en Anglais signifie surface, pli, feuille. Le mot tenfold veut donc faire référence à une liste ordonnée d'objets tensoriels ou matriciels (implicitement). A ces listes nous voulons appliquer des transformations. Ayant vu les groupes qui opèrent sur les différents éléments de la liste "tenfold", nous sommes en mesure de faire évoluer ces tenfolds.

8.2 Définition d'un tenfold

Un **tenfold** est une liste organisée en trois groupes de matrices (et tenseurs) :

1. un groupe de matrice décrivant la topologie du réseau ;
2. un groupe donnant ses métriques ;
3. un groupe donnant ses sources intrinsèques.

Pour identifier les tenfolds, nous les décrirons par un symbole surmonté d'un accent circonflexe inversé : \tilde{x} . Soit T une topologie, g une métrique et E des sources, on définit

$$\tilde{x} = (T, g, E) \tag{8.1}$$

A ces tenfolds on va pouvoir appliquer des transformations.

La dimension d'un tenfold est la dimension de son espace complet (mailles et mailles virtuelles), par convention. C'est aussi la dimension de son espace des branches.

8.3 Définition d'un transformateur

Un **transformateur** est une liste agissant comme un opérateur. On applique un transformateur t à un tenfold pour le transformer. Comme un tenfold comporte trois groupes de matrices (au sens général), un transformateur comporte trois groupes d'opérateurs de transformations. On convient alors que l'application d'un transformateur à un tenfold suit la règle suivante : le tenfold résultat est obtenu par application de chaque groupe de transformation à chaque groupe d'objet du tenfold.

Soit :

$$t = (t_T, t_g, t_E) \text{ st } t \cdot \tilde{x} = \tilde{x}' \rightarrow \tilde{x}' = (t_T \cdot T, t_g \cdot g, t_E \cdot E) \tag{8.2}$$

Chaque groupe appliqué, par exemple $t_T \cdot T$ se décline à son tour comme un produit de matrices diverses suivant la transformation effectuée. Nous détaillerons dans chaque cas comment ces produits se déclinent. Mais pour automatiser les calculs et les équations écrites avec les tenfolds, il faut se doter d'opérations sur ces tenfolds.

8.4 Opérations sur les tenfolds

On peut sommer deux tenfolds. La somme de deux tenfolds correspond au produit direct de ses membres (nous parlerons de membres pour garder le terme composantes pour les tenseurs). Ainsi, soit \check{u} , \check{v} deux tenfolds définis par : $\check{u} = (T_u, g_u, E_u)$ et $\check{v} = (T_v, g_v, E_v)$ on définit la somme par :

$$\check{u} + \check{v} = (T_u \cup T_v, g_u \cup g_v, E_u \cup E_v) \quad (8.3)$$

La différence correspond alors aux produits directs des membres dont les seconds sont affectés d'un signe négatif :

$$\check{u} - \check{v} = (T_u \cup -T_v, g_u \cup -g_v, E_u \cup -E_v) \quad (8.4)$$

Le produit de deux tenfolds est le tenfold réduit aux éléments de topologie communs aux deux tenfolds de départ. Opération que l'on peut écrire :

$$\check{u}\check{v} = (T_u \cap T_v, g_u \cap g_v, E_u \cap E_v) \quad (8.5)$$

Le produit "vectoriel" de deux tenfolds constitue un tenfold fait des parties non communes aux tenfolds impliqués dans le produit. Ce que nous noterons symboliquement par :

$$\check{u} \wedge \check{v} = (1 - T_u \cap T_v, 1 - g_u \cap g_v, 1 - E_u \cap E_v) \quad (8.6)$$

Ces quelques opérations associées à celle d'application d'un transformateur à un tenfold vont nous permettre d'écrire plus synthétiquement les interactions et évolutions entre les tenfolds. Il n'est pas nécessaire de savoir plus de choses sur les tenfolds, ils doivent rester des objets simples et qui synthétisent l'idée de la représentation d'un objet par des réseaux.

8.5 Conclusion du chapitre 8

Nous avons créé les tenfolds pour nommer des listes qui regroupent tous les éléments nécessaires à la construction d'un réseau : sa topologie, ses métriques et ses sources. Des transformations pourront être appliquées à ces tenfolds, traduisant les transformations appliquées aux réseaux soit via des modifications de leurs métriques, de leurs structures ou de leurs sources, ou simultanément de plusieurs de ces entités. On cherche ainsi à traduire une certaine réalité : si l'on considère une électronique quelconque, on peut modifier sa structure, rajouter des fils, couper des pistes, ou modifier certains de ses composants électroniques ou encore changer sa source d'énergie. On peut aussi effectuer tous ces changements simultanément. Mais il peut en être ainsi d'entités beaucoup plus complexes. Une molécule peut ainsi changer sa structure, modifier ses propriétés ou modifier sa production ou sa consommation d'énergie.

Chapitre 9

Gamma matrices

9.1 Introduction au chapitre 9

Gérer l'évolution d'un système complexe n'est pas une chose aisée. Plusieurs travaux s'y sont essayés ou sont encore en cours sur le sujet. On parle de gestion de la connaissance, gestion de sociétés humaines, etc. Les techniques proposées font souvent référence aux systèmes multi-agents[JPM]. Ici on se propose "d'encapsuler" des tenfolds comme autant de descriptions d'évolutions d'entités diverses dans des jonctions, les passages d'une jonction à l'autre étant assurés par un "propagateur". Nous allons d'abord montrer le fonctionnement de ce propagateur, avant de détailler le processus d'encapsulation.

9.2 Propagateur

Imaginons un réseau ouvert constitué de jonctions et de liens entre ces jonctions. Un vecteur "information" contient une description d'un état - nous verrons quelle description - de chaque jonction. Ainsi si le réseau est constitué de N jonctions, ce vecteur information a N composantes. Pour repérer à quelle composante correspond l'état de quelle jonction, les jonctions sont numérotées, préférentiellement dans l'ordre de croissance de l'arbre que représente le réseau ouvert.

Chaque jonction va contenir - "encapsuler" - un ensemble de réseaux modélisant un système. C'est à dire que chaque état de jonction correspond à un tenfold. Soit \tilde{u} un tenfold quelconque présent sur l'une des jonctions. Cela signifie qu'il existe un vecteur d'information constitué de N lignes pour N jonctions dont l'une des composantes, par exemple la M^{ieme} est \tilde{u} . Si l'on fait le produit scalaire de ce vecteur avec un vecteur dont le M^{ieme} terme est 1 et les autres sont nuls, on trouve un scalaire égal à \tilde{u} . En construisant une matrice de N lignes dont chaque ligne est un vecteur venant sélectionner l'une des composantes du vecteur d'information, le produit de cette matrice par ce vecteur engendre un nouveau vecteur d'information dont la place des composantes a été réorganisée. Nous pouvons par ce principe engendrer une matrice qui déplace les composantes du vecteur d'information de jonctions en jonctions : c'est le principe du propagateur. Imaginons un arbre (nous parlerons plus fréquemment d'arbre pour le différencier des réseaux) de 4 jonctions. Il est associé à un vecteur d'information de dimension 4, par exemple :

$$I = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si l'on veut transformer \tilde{u} à l'aide du transformateur t et le transmettre à la jonction 2, on peut créer la matrice de propagation suivante :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le produit γI engendre bien l'opération attendue :

$$\gamma I = \begin{bmatrix} 0 \\ t \cdot \check{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le propagateur γ dont les composantes pourront être des transformateurs, des scalaires, etc., permet de propager les états de jonctions en jonctions dans l'arbre d'évolution.

Si dans l'exemple précédent on fait agir une seconde fois le propagateur, on trouve zéro : $\gamma(\gamma I) = 0$.

La répétition de l'application du propagateur va ainsi faire défiler les évolutions d'un réseau jusqu'à des états nuls ou de stationnarités suivant les structures. On peut étudier quelques propagateurs remarquables, dont les résultats évoluent suivant le nombre de fois où on les applique. Certains sont implicitement appliqués qu'une seule fois, d'autres peuvent être appliqués à l'infini.

9.2.1 Oscillateur

Le propagateur suivant :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

engendre une oscillation. C'est à dire qu'à chacune de ses applications, les composantes du vecteur information I vont se déplacer alternativement en première et dernière position dans le vecteur.

9.2.2 Propagateur stationnaire

Ce titre paradoxal veut évoquer un propagateur dont toutes les composantes sont diagonales. Il ne déplace pas les états du vecteur information et des jonctions mais les transforme simplement.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \\ \check{w} \\ \check{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \check{u} \\ b \cdot \check{v} \\ c \cdot \check{w} \\ d \cdot \check{x} \end{bmatrix}$$

9.2.3 Diffuseur

Un propagateur dont la N^{ieme} colonne est pleine, toutes les autres vides, va diffuser l'état N du vecteur d'information transformé dans toutes les jonctions.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \check{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \check{u} \\ b \cdot \check{u} \\ c \cdot \check{u} \\ d \cdot \check{u} \end{bmatrix}$$

9.2.4 Regroupeur

Un regroupeur est un propagateur dont une seule ligne est non nulle, et pleine. Son application se passe d'autres commentaires :

$$\gamma_{\cup} I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \\ \check{w} \\ \check{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \cdot \check{u} + b \cdot \check{v} + c \cdot \check{w} + d \cdot \check{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

9.2.5 Retourneur

Un propagateur dont la deuxième diagonale est unitaire, inverse l'ordre des composantes du vecteur information.

$$\gamma_{\perp} I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \\ \check{w} \\ \check{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{w} \\ \check{v} \\ \check{u} \end{bmatrix}$$

9.2.6 Entrelaceur

Suivant le processus précédent, un propagateur entremêlant des 1 dans ses lignes peut entrelacer (permuter) à volonté les composantes du vecteur information.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \\ \check{w} \\ \check{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{v} \\ \check{w} \\ \check{u} \end{bmatrix}$$

9.2.7 Autres propagateurs

De nombreux propagateurs sont ainsi imaginables. Les résultats sur l'organisation de l'information qu'ils engendrent sont révélateurs de leurs propriétés. Ainsi la plupart des couples de propagateurs ont un commutateur nul. Mais certains ont un commutateur non nul, par exemple le couple regroupeur γ_{\cup} versus retourneur γ_{\perp} a un commutateur non nul. Le retourneur appliqué à un scalaire, place une composante de I à la ligne symétrique en partant de l'extrémité opposée du vecteur. Regrouper un retournement ou regrouper le vecteur I d'origine ne change rien, par contre retourner un regroupement modifie l'emplacement. De fait :

$$[\gamma_{\perp}\gamma_{\cup} - \gamma_{\cup}\gamma_{\perp}] I = \begin{bmatrix} 0 \\ -\check{x} - \check{v} - \check{w} - \check{u} \\ +\check{x} + \check{v} + \check{w} + \check{u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

9.3 Horloge des événements

Chaque fois que le propagateur est appliqué, on suppose qu'une horloge a marqué un événement. Cette horloge n'est pas forcément le temps physique. Ce peut être un temps biologique, etc. Nous noterons ce rythme \acute{e} . Ainsi pour un propagateur γ , N applications de γ à I : $\gamma\gamma\dots\gamma \cdot I$ correspond à l'écoulement de $N\acute{e}$ événements.

Dans un arbre, le propagateur tisse les relations entre les jonctions. Il constitue en quelque sorte son réseau central. Mais ce réseau peut ne pas préexister et se construire lui-même à mesure que se déroule les événements. Ainsi l'arbre d'évolution trace les évolutions de systèmes encapsulés dans ses jonctions, mais lui-même peut évoluer, grandir pour répondre à de nouveaux besoins d'encapsulations. C'est le processus de croissance de l'arbre, ou de dégénérescence. Précisons la nature de cet arbre et sa "vie".

9.4 Arbre d'évolution

L'arbre démarre au minimum d'une jonction. Il peut ensuite croître de façon ordonnée ou aléatoire. Certains schémas de croissance sont reconnaissables, il peut être intéressant de les évoquer pour donner aussi quelques exemples du processus de croissance. Et bien sûr, on peut avoir des processus inverses qui conduisent à une réduction des arbres, même si ces processus ne sont pas évidents à imaginer, nous allons essayer de voir comment les réaliser.

9.4.1 Croissance de l'arbre

Partant d'une jonction, une croissance minimum consiste à créer une seconde jonction et à la connecter à la première. Le vecteur d'information au départ est réduit à une valeur : \check{a} . Pour créer une deuxième jonction il faut

qu'il y ait émergence d'une information - d'une seconde jonction. Cette émergence se traduit par l'augmentation de la dimension du vecteur information. Ainsi la croissance peut s'exprimer par :

$$I = \check{a} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \check{a} = \begin{bmatrix} \check{a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une fois l'augmentation de dimension effectuée, il faut créer un objet dans la deuxième jonction. Cet objet est créé par une transformation appliquée au premier. Il faut donc créer le propagateur dont la dimension est celle de $I \otimes I$ (le propagateur peut transmettre une information depuis n'importe quel élément vers n'importe quel élément). C'est donc une matrice de dimension égale au carré de la dimension du vecteur information courant). Donc ici, c'est une matrice de dimension 2x2. Son allure est connue puisqu'elle doit appliquer un transformateur au tenfold de la première jonction et l'installer dans la seconde jonction, soit t ce transformateur, on a :

$$\gamma(\acute{e}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

Qui conduit bien au nouveau vecteur d'information :

$$I(\acute{e}) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \cdot \check{a} \end{bmatrix}$$

Dans cette approche de topologie dynamique, on ne peut appliquer le propagateur plusieurs fois, cela n'a pas de sens, sauf à remplir la première jonction (ici) avec un nouveau tenfold ou maintenir un tenfold dans une jonction avec une valeur '1' dans le propagateur. Autrement dit, une fois un arbre constitué, il peut être réutilisé par de nouveaux vecteurs d'information.

Continuons notre croissance. Pour rajouter de nouveau une jonction et suivant le mécanisme précédemment utilisé on multiplie le vecteur information par la matrice :

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous notons C_δ la matrice de croissance. Si l'on veut rajouter deux jonctions :

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

etc. Le vecteur d'information s'exprime alors par : $I(\acute{e}) \rightarrow C_\delta [I(\acute{e})]$

Le propagateur engendré par cette nouvelle distribution de jonctions a la dimension de $(C_\delta [I(\acute{e})]) \otimes (C_\delta [I(\acute{e})])$. Prenons le cas du rajout de deux jonctions, c'est une matrice 4x4. On peut aussi anticiper la construction du propagateur en utilisant la matrice de croissance. Cette dernière peut être vue comme un changement de base, de la base passée à la base future. L'initialisation du propagateur est réalisée par l'opération $C_\delta \gamma C_\delta^T$. Deux schémas sont alors possibles, représentés figure "schémas possibles de l'arbre".

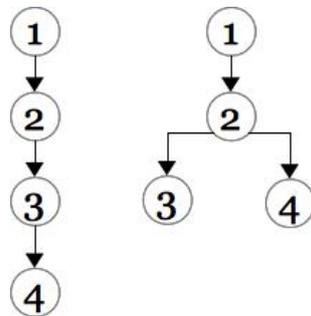


Figure "schémas possibles de l'arbre".

Les deux schémas portent le même vecteur d'information. Par contre les propagateurs seront différents. Le premier schéma a pour propagateur la matrice :

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

où t_{ij} est un transformateur de la jonction j vers la jonction i , alors que le second schéma a pour propagateur :

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le propagateur apparaît sous ce jour comme porteur de la morphogénèse de l'arbre. On retient de ces exemples un processus générique :

Processus de croissance de l'arbre d'évolution

Si à un moment $Né$ de l'évolution le vecteur d'information I est de dimension A , la croissance s'exprime tout d'abord par une augmentation de la dimension de I par l'usage d'une matrice de croissance C_δ comportant A colonnes et autant de lignes supplémentaires que la croissance augmente la dimension de I . Toutes les lignes rajoutées à C_δ au-delà de A sont des lignes de zéros. Le propagateur suivant sa structure va décider de la forme de l'arbre et des transformations des tenfolds encapsulés dans les jonctions à l'étape précédente vers les jonctions créées lors de la croissance de l'arbre. La partie haute de la matrice de croissance C_δ réduite aux A premières lignes, est une matrice identité.

9.4.2 Dégénérescence de l'arbre

L'arbre peut subir une dégénérescence, c'est à dire perdre une ou plusieurs jonctions. Cette perte est similaire à un changement de base depuis une base de jonctions d'origine, vers une nouvelle base où certaines jonctions ont disparu. L'application de la dégénérescence va donc s'appliquer en premier lieu au propagateur. Soit un propagateur :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si on considère une nouvelle base faite des seules jonctions 1 et 2, avec les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{c|cc} \cdot & j'_1 & j'_2 \\ j_1 & 1 & 0 \\ j_2 & 0 & 1 \\ j_3 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

On en déduit la matrice D_δ qui appliquée à γ va supprimer la jonction 3 :

$$(D_\delta)^T \gamma D_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

La même matrice appliquée au vecteur d'information $(D_\delta)^T I$ réduit ce dernier également aux informations encapsulées dans les deux jonctions restantes.

Processus de dégénérescence

un arbre d'évolution peut perdre des jonctions par application de la matrice de dégénérescence D_δ . Cette matrice s'applique comme un changement de bases aux propagateurs, et directement (transposée) aux vecteurs d'informations.

9.5 Phases de vie

Un arbre dynamique évolue de façon déterminée ou aléatoire. Si on fabrique un arbre pour modéliser des successions de choix, la croissance pourra se maintenir jusqu'à atteindre des niveaux où les solutions obtenues sont satisfaisantes. Il peut aussi croître à l'infini dans des processus constamment en évolution. Le propagateur qui accompagne l'arbre décrit sa morphogénèse et redéroule les transformations qui ont opérées les évolutions des réseaux encapsulés dans les jonctions depuis l'origine de l'arbre jusqu'à ses multiples embranchements. De très nombreuses évolutions sont ainsi imaginables pour optimiser une recherche de résultat - atteindre un but. Dans les systèmes naturels, l'évolution vise finalement à adapter des systèmes complexes à leurs environnements et leurs variations. Les ingénieurs cherchent à optimiser les produits pour qu'ils répondent à la fois aux besoins de leurs clients et aux contraintes de coûts, etc.

Les transformations qui vont mener du début d'un projet (projet vivant, projet d'ingénieur) à son étape mature vont passer par des phases différentes. Au début en général les transformations sont fortes et portent sur les grandes lignes du projet. Puis à mesure qu'il s'affine, elles portent sur des éléments de détails. Ces variations dans les natures des transformations et dans les échelles auxquelles elles s'adressent constituent des phases de vie.

Mais on peut aussi utiliser une modélisation par arbre d'évolution pour suivre les états électriques d'un système complexe comme une automobile. Auquel cas les transformations viennent activer les différentes fonctions suivant un environnement perçu et des demandes utilisateur. Les phases de vie sont alors des phases dans des missions allouées au système.

Le système étudié interagit avec un environnement. Cet environnement est modélisé par des sources induites dans les réseaux encapsulés dans les jonctions. Les transformations sont ensuite appliquées à ces réseaux. Mais il faut trouver un "guide", une psychée qui conduise l'évolution. On peut la centrer sur des critères d'optimisation suivant quelques observables choisies sur les réseaux encapsulés. On peut, toujours avec une collection d'observables choisies, apprendre et repérer les évolutions les plus efficaces pour tendre vers un objectif : on se calque ici sur les réseaux neuronaux. Mais cette vision reste très réductrice des vastes possibilités que les évolutions des choses de la nature s'autorisent. Il faut trouver un fil conducteur qui mélange une part d'aléatoire, une part guidée par des intérêts, des recherches d'optimisation, et une part influencée par l'environnement changeant.

Ce type d'évolution est celui que l'on étudie dans les systèmes cybernétiques[FMC] où l'on cherche à imiter l'homme ou les animaux, ainsi que dans le "biomimétisme".

La communauté des cybernéticiens s'est posée les mêmes interrogations. Norbert Wiener[NW] dans son ouvrage de référence, aborde les transformations comme nous l'avons fait, cherche à discerner des groupes, parle du concept d'information et s'appuie sur les travaux de Von Neumann, Shannon, etc.

Dans ces approches, le plus difficile finalement, qui transcende la simple technique, est de pouvoir modéliser le fond intelligent qui guide les choix d'évolutions. Nous abordons dans la partie III une théorie des jeux qui va nous permettre de disposer d'une couche d'intelligence ou tout au moins de modèles pour l'approcher. Sans avoir encore cette connaissance, on peut cependant observer certains principes généraux dans les évolutions et les phases de vie, de façon à appréhender un peu le type de modélisations que l'on va pouvoir conduire ensuite et mieux placer la théorie des jeux qui fait l'objet de la partie III dans le fil de la construction de notre méthode.

Partons d'un vecteur d'information qui est un singleton. Le réseau encapsulé est un bibranche de métrique (implicitement dans l'espace des mailles) g . En décrivant le vecteur topologie T par la suite L, G, A, B, C, n donnant les objets structure, graphes, arbre couvrant, matrice incidence, connectivité et matrice de connexion d'espace-temps, le vecteur des sources qui provient de l'environnement induisant l'énergie sous forme de fém données par : $E = C^T ([1, 0])^T$, et en nous dotant d'une métrique simple et purement dissipative (linéaire) :

$$g = C^T \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} C$$

Nous avons à ce niveau complètement défini notre tenfold : $\tilde{u} = (T, g, E)$.

L'objet structure est une description des variétés homogènes impliquées dans l'objet réel qui, par opérations d'homotopie et chirurgie topologique conduisent au graphe symbolique représentant l'objet. Il peut s'agir d'un ensemble de définitions par branche donnant les sections, dimensions variées et nature des matériaux utilisés pour constituer telle volume dans l'objet. Chaque volume décrit a un numéro identique à celui de la branche qu'il engendre.

Le réseau encapsulé dans une première jonction engendre les observables k telles que : $k^\nu = y^{\nu\mu} E_\mu$, y étant la métrique inverse de g .

En fonction de ces observables et d'autres critères que nous définirons ensuite, ce réseau va se transformer. Le monde que l'on étudie va évoluer vers deux branches : l'arbre d'évolution lié va donc se compléter de deux jonctions. La matrice de croissance est donnée par :

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous nous dotons ensuite pour la phase de vie suivante du propagateur :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme nous l'avons vu, la structure seule du propagateur renseigne sur la forme de l'arbre d'évolution. Les deux transformateurs t_1 et t_2 doivent être définis : le premier traduit une réception d'énergie trop importante qui détruit une branche du réseau et l'impédance b devient capacitive $(dp)^{-1}$. Le transformateur est donc égal à :

$$t_1 = \left(1, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\infty}{b} \end{bmatrix}, 1 \right)$$

Au contraire suivant une autre hypothèse, l'apport d'énergie engendre une réémission du réseau vers l'environnement. Une corde est créée par génération d'une maille virtuelle engendrant le champ de réémission (on choisit ici de modéliser l'émission par une maille de courant imposé). Le transformateur t_2 doit donc modifier les sources par la matrice de transformation (il appartient au groupe de transformation \mathcal{E}) :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & J \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et le transformateur devient :

$$t_2 = (1, 1, \bullet\Lambda)$$

Le bullet indiquant que le vecteur des sources se positionne à gauche du produit par Λ .

De par le propagateur dont on s'est doté, le vecteur d'information à l'instant \acute{e} devient :

$$I(\acute{e}) = \gamma I(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ t_1 \cdot \check{u} \\ t_2 \cdot \check{u} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Cette structure va engendrer de nouvelles observables, etc. On remarque que le propagateur défini supprime l'existence d'un réseau encapsulé dans la première jonction (il rend nul le tenfold de cette jonction à cette étape). Si l'on réapplique le propagateur, le vecteur d'information devient le vecteur nul : $I(2\acute{e}) = \gamma\gamma I(0) = 0$. Ce monde ne vit donc pas au-delà de deux événements et comporte deux phases de vie (deux sections horizontales où les réseaux simultanément se déduisent de transformations sur une section précédente).

De cet exemple simple nous déduisons également que pour l'instant, pour définir un monde nous avons besoin :

1. d'un environnement W ;
2. d'un arbre d'évolution AE ;
3. d'un vecteur d'information originel et d'un vecteur des observables : I et \mathcal{O} .

Remarque : plutôt que de monde, on pourra parler de société, d'écosystème, de problème, etc., suivant les sujets abordés.

9.6 Conclusion du chapitre 9

Ce dernier exemple simple nous montre le mécanisme qui permet de décrire les évolutions de réseaux, leurs disparitions, leurs transformations, encapsulés dans les jonctions d'un arbre qui décrit toute l'histoire de ces réseaux aux cours d'événements successifs, dans un environnement et avec des observables dédiés.

L'environnement entoure l'arbre d'évolution et lui apporte des sources d'énergies communiquées aux réseaux encapsulés.

Les observables peuvent être compilées dans une liste \mathcal{O} , elles seront les paramètres qui participeront aux choix de transformations successives.

Mais on sent bien qu'il nous manque à ce stade un outil pour décider quelle transformation appliquer à quel moment. Cet outil est la théorie des jeux que nous abordons dans la partie suivante.

9.7 Références du chapitre 9

- [JPM] J-P.Muller, “Des systèmes autonomes aux systèmes multi-agents : interactions, émergences et systèmes complexes”. Rapport pour l'obtention de la HDR. Université de Montpellier II, 8 Novembre 2002.
- [FMC] Y.Korchounov, “Fondements mathématiques de la cybernétique”. Edition MIR, 1975.
- [NW] N.Wiener, “Cybernetics or control and communication in the animal and the machine”. Edition Kessinger Legacy Reprints, Hermann & Cie. Paris, 1948.

Troisième partie

Introduction à la théorie des jeux

Préambule

Comme on l'a évoqué en conclusion du chapitre 9, la théorie des jeux doit nous fournir une méthode pour justifier des croissances des arbres d'évolution et des transformations qui opèrent sur les réseaux encapsulés. Cette théorie englobe des formalismes pour l'aide à la décision, pour le choix de stratégies optima, pour la modélisation des situations de conflits, etc. Elle va être le formalisme sur lequel s'appuie la justification des transformations appliquées à un réseau de départ et les probabilités associées à ces transformations.

Comme nous voulons appliquer la théorie des jeux à un arbre d'évolution, nous utiliserons tout de suite la représentation des stratégies sous forme d'arbres. De même nous orienterons les exemples usuellement présentés dans cette théorie dans le contexte de notre méthode.

Chapitre 10

Bases de la théorie des jeux

10.1 Introduction au chapitre 10

La théorie des jeux étudie les comportements de personnes rationnelles en situations de conflits. On entend par conflits des situations où les intérêts des personnes peuvent être opposés ou pas mais où de toutes façons les personnes s'opposent ; soit parce que leurs gains potentiels ne sont pas égaux, soit encore parce qu'elles ont des volontés de dominer l'autre en tentant de réduire ses gains. La théorie des jeux essaie de calculer quels peuvent être les choix, les stratégies pour lesquels vont opter les joueurs (ou agents) s'ils sont rationnels.

La notion de rationnel sous-tend que les joueurs choisissent forcément les stratégies qui optimisent leurs gains. Autrement dit, ils ne font pas exprès de perdre. Nous pourrions éventuellement pondérer cette hypothèse en s'appuyant sur des natures de gains diverses. Ainsi, un joueur qui perd volontairement, mais dans le but d'entraîner dans sa chute un autre joueur pour lequel il a de l'animosité a quelque part augmenté son gain en chiffrant celui-ci non pas sur la somme gagnée, mais sur la perte qu'il aura pu infliger à son adversaire. Car on peut penser, même dans les situations les moins évidentes, que tout joueur cherche à atteindre un objectif, un gain au sens de but. Sous cette notion de gain généralisée, des comportements apparemment irrationnels : comportements de phobies, psychopathiques, schizophréniques, etc., peuvent permettre d'inclure sous la définition de joueur "rationnels" une beaucoup plus large gamme de comportements. Car après tout, où se situe la limite de la rationalité ? On retient donc pour le périmètre de ce que traite la théorie des jeux trois points remarquables :

1. une situation de conflit ;
2. des joueurs rationnels ;
3. une recherche de solution, d'équilibres.

10.2 Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier est un cas simple souvent cité en référence dans toutes les présentations de la théorie des jeux. Pour décrire le jeu, on doit commencer par énoncer les **pièces du jeu** : son environnement, ses personnages, etc. Dans le cas du dilemme on a deux prisonniers, un policier. Les deux prisonniers sont interrogés séparément sans pouvoir communiquer : on donne ici les **règles** du jeu. Le policier pose à chaque prisonnier une seule et identique question : est-il coupable ? Chaque prisonnier est mis au courant des enjeux de la réponse : si les deux prisonniers nient ils sont libérés. Si un seul avoue il prend 5 ans de prison et celui qui n'avoue pas prend 15 ans de prison. Si les deux avouent, ils prennent 10 ans de prison. Cet enjeu définit les "**gains**" potentiels des joueurs (on voit le sens général que l'on alloue au mot gain !). Chaque joueur est mis au courant des conditions de l'interrogatoire. Ainsi, chaque joueur dispose de toute l'**information** sur les conditions de jeu, le nombre de joueur, les gains possibles, etc. Le jeu est dit ici à "information imparfaite¹". Les joueurs ne pouvant communiquer, l'ordre de l'interrogatoire n'a aucune importance. Représentons le jeu sous forme d'arbre appelé "arbre de Kuhn" en théorie des jeux[APR]. La figure "jeux du prisonnier" montre cet arbre et les gains de chaque chemin.

1. information imparfaite car les joueurs ne savent pas ce que chacun d'entre eux joue avant de connaître le résultat.

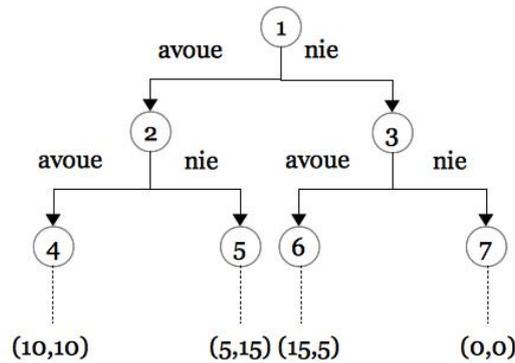


Figure “jeux du prisonnier”.

Les gains sont notés en bas de chaque chemin dans l’arbre par deux nombres entre parenthèses : le premier nombre est le nombre d’années de prison du premier joueur, le second nombre celui du second joueur. On voit tout de suite sur cet arbre que le premier joueur a intérêt à avouer car dans les gains auxquels conduit la branche de gauche, vers la jonction 2, aucun n’atteint le maximum de 15 ans, ni aussi le minimum d’aucune année de prison. Mais en joueur rationnel, il veut minimiser sa peine, et donc, quoi que joue le deuxième joueur cette option conduit à des peines toujours inférieures à la peine maximum. Comme les deux joueurs sont indifférenciés dans ce jeu, le second a aussi intérêt à avouer et donc la combinaison la plus probable est (Avoue, Avoue). Pourtant ce n’est pas l’intérêt commun qui voudrait que les deux nient, auxquels cas ils seraient libérés.

La théorie des jeux même très simple présente déjà dans ce premier exemple des analyses frappantes de pertinence. Les situations dans lesquelles l’intérêt propre l’emporte sur l’intérêt commun sont légions. L’intérêt propre est déduit d’une auscultation des gains vue d’un seul joueur quoi que joue le second joueur, alors que l’intérêt commun implique un certain choix de tous les joueurs simultanément. Le jeu est à information complète car n’importe quel joueur peut prendre la place de n’importe quel autre. Par ailleurs la connaissance du jeu est **commune** : c’est à dire que tous les joueurs savent que tous les joueurs savent. Enfin, le jeu est à **mémoire parfaite** : tous les joueurs se souviennent de tout leur jeu.

Ce qui n’apparaît pas dans ce jeu est l’interaction implicite ou pas entre les joueurs. Ainsi, l’intérêt commun veut que les joueurs aient confiance les uns dans les autres. Cette confiance réciproque peut être vue comme une interaction forte entre les joueurs où aucun d’entre eux ne croit possible que l’un avoue. Cette confiance peut découler de menaces plus grandes encore - c’est le principe des camorra, mais ce peut être aussi parce que chacun se sait innocent et sait l’autre innocent, donc une croyance en la vérité.

Pour rajouter cette dimension liée à un passé des joueurs, à leur environnement, etc., il faut pouvoir pondérer les choix en fonction de données externes. Le jeu précédent est dit à “stratégies pures”. Lorsque l’on pondère les choix de poids statistiques, on parle de “stratégies mixtes”. Dans notre cas, nous ne travaillerons qu’en stratégies mixtes.

Suivant les objectifs, les interactions entre les joueurs, de nombreuses possibilités sont envisageables. On peut parler de **jeu coopératif ou non**, de **coalitions** dans un jeu avec de nombreux joueurs, de **croyances** pour traduire les intuitions des uns et des autres sur les stratégies que vont adopter les adversaires, etc.

Avant d’aborder ces notions, continuons à explorer quelques structures d’arbre de Kuhn en stratégies pures.

10.3 Arbres de Kuhn en stratégies pures

10.3.1 Arbre de Kuhn en information parfaite

L’arbre tel que nous décidons de le représenter va se dérouler le long d’un axe temporel. Ce n’est pas l’usage, nous indiquerons les différences. Pour l’instant on considère que l’on est en information parfaite : tout le monde a toute l’information sur tout. Considérons l’arbre donné figure “arbre de Kuhn-1” (cas inspiré d’exemples dans [APR]).

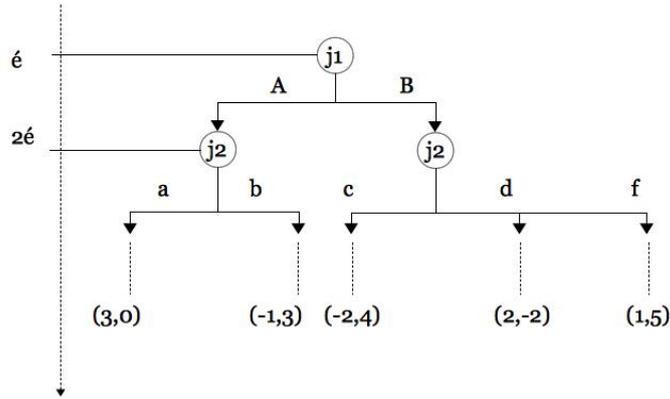


Figure "arbre de Kuhn-1".

Suivant l'axe d'événements que nous rajoutons, on voit clairement sur cet arbre que le joueur 1 joue avant le joueur 2. Le joueur dispose dans les règles du jeu de choix possibles différents suivant que le joueur 1 ait joué A ou B. L'arbre n'est donc pas axisymétrique par rapport à ce premier choix. Les résultats des choix sont chiffrés : ces chiffres représentent des gains ou une satisfaction retirée du résultat réel non visible (on parle aussi de fonction d'utilité). Comme la règle n'est pas identique et l'ordre imposé, on ne peut pas ici utiliser de règles du type "quoi que joue le joueur 1..." pour le joueur 2.

Voyons si on peut l'utiliser pour le joueur 1. L'information étant parfaite on voit que si le joueur 1 veut minimiser ses pertes quel que soit le choix du joueur 2, il doit jouer A, qui par la même occasion peut lui permettre de maximiser ses gains si le joueur 2 est altruiste ! Mais un joueur rationnel jouera b et j1 perdra -1. S'il avait joué B, j2 jouerait c ou f, ainsi j1 perdrait -2 ou gagnerait 1 et j2 gagnerait 4 ou 5. Sur une hypothèse purement calculatoire, j1 doit donc jouer B et j2 f. Mais on s'écarte ici d'un principe de minimisation des pertes pour rejoindre plutôt un principe de maximisation des gains. Là encore dans une approche collaborative, les joueurs choisiraient sûrement Bf. Ils ne peuvent prendre Aa où j2 ne réalise aucun gain : il devrait logiquement refuser pour jouer Ab. j1 n'a donc pas le choix et doit jouer B, alors j2 joue f, seul cas où les deux sont gagnants.

Le jeu ici s'arrête en deux coups. Les jeux peuvent être **répétitifs**, voire **infinis** s'ils ne s'arrêtent jamais.

Dans les ouvrages de théorie des jeux, on ne trouve pas l'axe de séquençement des événements. Les joueurs jouent l'un après l'autre ici de façon implicite parce que les jonctions sont séparées.

Tous les choix n'impliquent pas forcément l'intervention de tous les joueurs. Dans la figure "arbre de Kuhn-2", le premier joueur a deux choix, et le second joueur ne peut jouer que si le premier joueur a joué B.

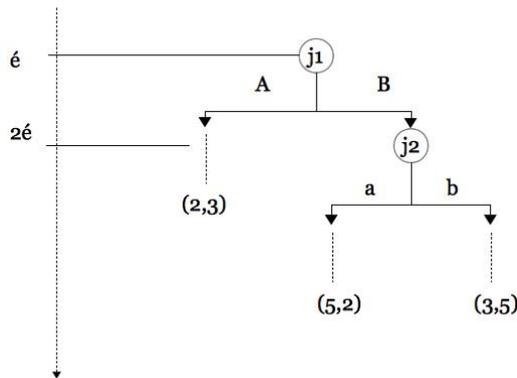


Figure "arbre de Kuhn-2".

Dans ce nouveau cas, on voit que j1 a tout intérêt à jouer B, dans tous les cas il gagnera plus qu'en jouant A. Il dispose de fait d'un grand pouvoir, mais ce pouvoir est quand même pondéré, suivant les gains du jeu. Pour des joueurs mécaniques et rationnels, la combinaison la plus favorable est Bb. La moins probable est Ba car j2 sait ce qu'a joué j1 et il minimise ses gains en a.

10.3.2 Arbre de Kuhn en information imparfaite

En information imparfaite, les joueurs n'ont pas accès à toute l'information, soit qu'ils jouent en même temps, il ne peuvent donc pas savoir ce que l'autre a joué, soit qu'ils ne peuvent pas observer ce que l'autre a joué à un moment. Dans notre choix de représentation, comment traduit-on ce type de situation ? Le jeu simultané se représente facilement puisque nous avons introduit un axe d'événements. Par contre le masquage d'information se traduira dans le principe par le fait que les interactions entre les joueurs seront plus ou moins complètes. La vue, l'ouïe, etc., sont des interactions entre des réseaux pourvus de capteurs et de chaînes d'interprétation. Si certains de ces moyens de communication sont fermés, une partie de l'information est masquée. Ce principe pourra bien sûr être décliné de façon beaucoup plus simple pour des systèmes purement cybernétiques par exemple. La figure "arbre de Kuhn-3" présente un arbre avec deux joueurs et jeu simultané, chaque joueur ayant 2 choix possibles : a et b pour le premier joueur, c et d pour le second.

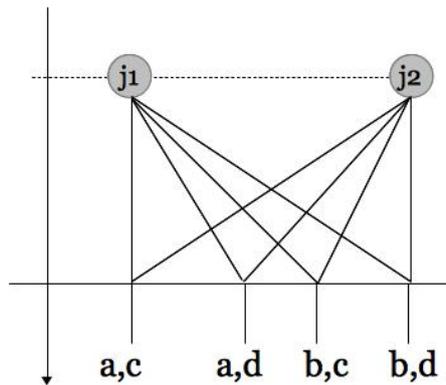


Figure "arbre de Kuhn-3".

Le fait de la simultanéité ou de l'imperfection de la connaissance peuvent rendre des jeux impossibles. Par exemple si les deux joueurs jouent simultanément, le second joueur ne peut voir ses possibilités de choix dépendre du jeu du premier ; etc.

10.3.3 Arbre de Kuhn avec joueur hasard

On peut vouloir faire intervenir une forme de hasard présente dans le jeu. Un moyen d'y parvenir est d'ajouter un joueur, réellement inexistant, et dont le jeu va justement assurer l'adjonction de hasard. Le hasard peut porter sur des choix, sur des influences, de l'information, etc. Dans notre structure à venir, le hasard peut être pris en charge par un réseau et avoir de larges possibilités d'influence via des couplages, des interactions vers les réseaux de l'arbre d'évolution. Le hasard peut être aussi un moyen d'injecter de l'environnement dans un monde.

10.3.4 Méthodes de résolution

Résoudre un arbre de Kuhn consiste à trouver une méthode qui permette de déterminer les choix que vont opérer les joueurs pour s'assurer le meilleur gain possible. Dans nos modélisations à venir, ces résolutions n'auront pas lieu d'être en général car les réseaux détermineront eux-mêmes par les performances des observables qu'ils engendrent les propensions des acteurs à s'orienter vers tels ou tels choix et stratégies. Par ailleurs ces méthodes ne s'appliquent pas à des topologies dynamiques. Néanmoins on pourra les utiliser comme base d'algorithmes pour programmer les décisions prises entre chaque événement et pour, plus localement que dans un arbre fixe, décider des stratégies à un moment donné, compte-tenu des données du jeu. Enfin nous devons appliquer nos programmations à des stratégies mixtes que nous abordons ensuite.

10.3.4.1 Méthode de résolution à rebours

La méthode à rebours en information parfaite consiste à choisir les cas qui, pour un joueur, sont les moins pénalisants. En partant de la fin de l'arbre, on élimine les branches que le dernier joueur ne jouerait pas en fonction de ses gains. Ces branches éliminées, on passe à l'étape précédente et au joueur précédent et l'on

procède de même en remontant l'arbre. Par élimination des branches, on trouve en final la combinaison qui est le meilleur compromis pour tous.

10.3.4.2 Méthode des meilleures réponses

Dans la méthode des meilleures réponses on vient pour chaque choix des autres joueurs déterminer le choix que ferait le joueur analysé et l'on place une marque à côté de ce choix pour pointer le joueur sur ce gain. En procédant de même pour tous les joueurs on repère ainsi les combinaisons possibles. La figure "méthode des meilleures réponses" montre la méthode appliquée au jeu des prisonniers.

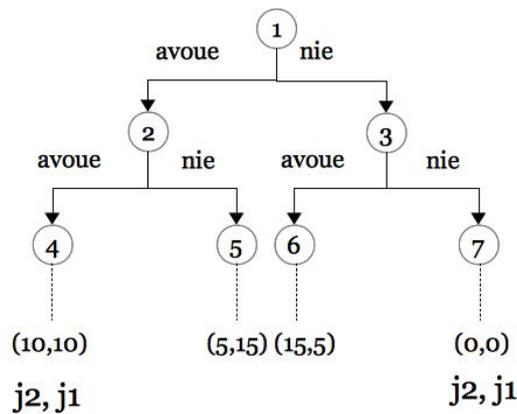


Figure "méthode des meilleures réponses".

On voit que si j1 joue "avoue", j2 a tout intérêt à jouer 4. On place une marque "j2" à côté du choix 4. Si j1 joue "nie", alors j2 joue 7. On marque "j1" à côté de 7. On procède de même pour le joueur j1 et on trouve les marquages montrés sur la figure. Ces marquages indiquent que deux chemins sont privilégiés : 2-4 et 3-7. On retrouve les deux stratégies rationnellement envisagées le chemin 3-7 étant basé sur une confiance et une honnêteté des deux participants.

La méthode des meilleures réponses peut s'appliquer à des jeux d'informations imparfaites. Les couples de meilleures réponses constituent des équilibres - des compromis que l'on appelle équilibres de Nash.

Si une marque d'un joueur apparaît sur tous les gains d'un groupe de branches issu d'une même branche, le choix du joueur qui l'a conduit à cette branche commune constitue une stratégie dominante. C'est à dire que quoi que jouent les autres joueurs, ce joueur choisit cette stratégie. La stratégie est strictement dominante dans ce cas, mais on peut avoir des stratégies faiblement dominantes si d'autres meilleures réponses apparaissent sur d'autres chemins. De fait, un couple de stratégies dominantes conduit à un équilibre dominant. Cet équilibre est la solution que tous les joueurs choisissent, quoi que jouent les autres joueurs. Cet équilibre dominant est l'équilibre de Nash. **L'équilibre de Nash** est forcément joué. C'est donc un concept très intéressant pour la théorie des jeux!

10.4 Equilibre de Nash

L'équilibre de Nash est la solution évidente d'un jeu lorsqu'il existe. Dans des jeux plus subtils, l'équilibre de Nash est obtenu par la démarche suivante : on crée un arbitre. Cet arbitre demande à un premier joueur la stratégie qu'il jouerait. Il demande alors au joueur suivant sa stratégie compte tenu de l'intention du premier joueur. Il continue avec le troisième, etc. Puis il revient vers le premier joueur et lui repose la question, sachant ce que tous les autres joueurs veulent jouer. Et il recommence son enquête jusqu'à ce que les choix des joueurs convergent vers des choix fixes. L'ensemble de ces choix fixes constituent l'équilibre de Nash du jeu. Cet équilibre ne signifie pas que les joueurs vont toucher leurs gains respectifs maxima, mais que ce sont les gains maxima qu'ils espèrent toucher compte-tenu des jeux de tous les joueurs. A priori aucun joueur ne peut regretter a posteriori d'avoir joué l'équilibre de Nash.

Suivant le raisonnement précédent, on comprend qu'il peut y avoir des jeux où l'équilibre de Nash n'existe pas : soit qu'il en existe plusieurs, soit que la convergence n'est jamais atteinte. Dans ce cas il y a un moyen pour définir un équilibre de Nash en usant de stratégies mixtes, c'est à dire de stratégies pondérées par des

probabilités de réalisations. Ces stratégies permettent de couvrir les jeux plus “réalistes” où de toute façon les décisions des joueurs s’expriment beaucoup mieux de façon probabiliste.

10.5 Stratégies mixtes

Dans une stratégie mixte, les choix sont pondérés de la probabilité de leur réalisation. Ainsi on ne dira pas qu’un joueur choisit A ou B, mais A avec $x\%$ de chance et B avec $y\%$ de chance. On peut alors calculer des espérances de gains.

Comme le propagateur porte les transformations d’une jonction à l’autre, qui, dans une théorie des jeux correspondent aux choix, il faut projeter les probabilités de réalisation sur un autre objet. Comme le propagateur décrit quelque part une trajectoire dans un espace des choix, on peut tenter de considérer les probabilités comme les composantes de cette trajectoire dans le même espace des choix, complété des gains. Etudions cette configuration et la représentation des jeux qu’elle induit.

10.5.1 Dilemme du prisonnier revu en propagateur pondéré - principes de représentation

Dans notre idée, on se propose donc de se placer dans un espace ici de trois directions : une direction correspondant à la négation “N”, une direction au fait d’avouer “A” et une au nombre d’années de prison encouru “G”. Dans un tel espace (que nous appelons espace choix-gain : CG), on peut tracer toute une série de vecteurs correspondant aux possibilités de choix des joueurs mais où ces choix qui sont l’une des deux directions d’espace sont pondérés de probabilités. Par exemple si le premier joueur avoue à coup sûr et le second aussi, le vecteur résultant est dans l’unique direction “A” et a une amplitude de 2. Si par contre le second joueur n’avoue qu’avec 50% de chance, le vecteur a une amplitude réduite dans la direction A.

Pour tracer des trajectoires suivant les mêmes principes, on doit préciser de façon non univoque la simultanéité ou non des choix mais aussi construire des arbres guidés par les gains. Considérons le jeu présenté figure “jeu 1”.

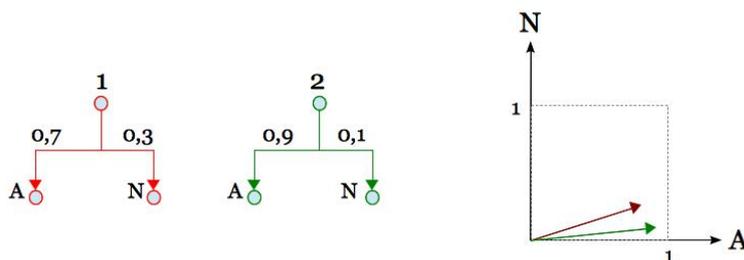


Figure “jeu 1”.

Nous avons représenté les deux vecteurs associés aux deux positionnements des joueurs dans un espace des choix A-N, sans reporter l’axe des gains G. On voit clairement que les deux joueurs tendent à avouer ! Mais comment reporter le gain ? Chaque vecteur pointe deux choix auxquels correspondent deux gains différents pour chaque joueur. Pour disposer d’un gain associé à un vecteur on a heureusement en stratégie mixte l’espérance de gain. Par exemple le premier joueur joue “avouer” avec 70% de chance et “nier” avec 30% de chance. Comme les années de prison correspondante dépendent aussi du choix du joueur 2, on voit que notre représentation est incomplète. Nous avons bien les deux joueurs sur la même horizontale puisqu’ils jouent simultanément. Mais les vecteurs de choix doivent être guidés par les gains. Redessignons l’arbre et les vecteurs associés : figure “jeu 2”.

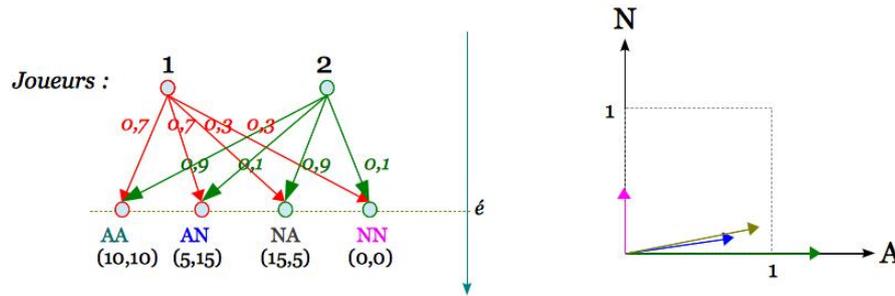


Figure "jeu 2".

En reprenant la distribution montrée paragraphe 10.3.2 on trouve 4 vecteurs dans l'espace des choix et de nouveau une nette propension à avouer. L'écart avec le vecteur "NN" est encore plus marqué si l'on ajoute l'axe des gains. Définissons maintenant notre espérance de gain. Comme l'espérance de gain dépend des deux joueurs, on a bien ici une espérance de gain attachée à un comportement de **société** : comportement de l'ensemble des joueurs. On pourrait vouloir tracer l'espérance de gain d'un individu seul, mais pour notre propos final et d'une manière générale on estime qu'il est impossible de tracer l'espérance de gain d'un joueur seul (impossible pour dire que cela n'a pas de sens). Un joueur est forcément influencé par un environnement : les autres joueurs, sa propre histoire, etc. De fait, seule l'espérance de gain d'une société a du sens. Par contre on peut tracer les vecteurs d'un joueur seul, en considérant l'autre (les autres) joueurs comme une donnée d'environnement ou plus généralement utiliser un "gain pondéré" c'est à dire le produit d'un gain par les probabilités d'un chemin sans avoir toujours besoin de calculer l'espérance totale du gain. Suivant l'analyse et le besoin, telle ou telle représentation pourra s'avérer être plus pertinente sans s'enfermer dans une observable de définition unique.

Du point de vue de la société, on peut définir un gain comme somme des gains des intervenants dans la société. C'est une fonction d'utilité collective qui aura plus de sens pour des jeux avec échange d'information. Dans le cas des prisonniers, l'utilité évolue à l'inverse des gains puisqu'il s'agit d'années de prison. On cherche donc à minimiser le gain. On obtient 4 gains pondérés (produit des probabilités de chaque couple par la somme des gains) :

1. 20 avec une probabilité $0,7 \times 0,9$: 12,6
2. 20 avec une probabilité $0,7 \times 0,1$: 1,4
3. 20 avec une probabilité $0,3 \times 0,9$: 5,4
4. 0 avec une probabilité $0,3 \times 0,1$: 0

Le gain minimum est très loin des trois autres. Mais on peut aussi choisir un autre critère pour définir le gain de la société (ou du joueur dans son environnement). On aurait pu ainsi calculer la moyenne quadratique du nombre d'années en prison, etc.

Une fois un critère choisi, on peut tracer la surface couverte par tous les vecteurs engendrés par toutes les combinaisons de probabilités possibles. On sait ici que les cas extrêmes : "NN" ou "AA" vont tracer des vecteurs suivant les deux axes de l'espace des choix d'amplitude maximum 2. Par ailleurs un vecteur existe où un joueur nie tout le temps et un joueur avoue tout le temps. La surface de tous les possibles a donc pour base le carré de côté 1. Un gain qui est une simple somme est constant pour toutes les possibilités (il vaut 20), sauf pour le bord "NN" où il est nul. La société est alors représentée par la surface de la figure "société 1" dans l'espace des choix-gains (espace "CG").

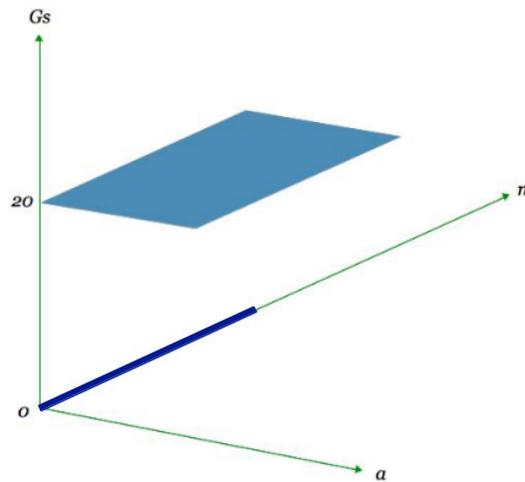


Figure "société 1".

Dans cette représentation, l'intérêt de la société apparaît cette fois clairement : c'est la double négation. Par contre, la notion d'équilibre de Nash est traduite principalement par une surface majoritaire où la plus grande partie des issues va se situer : soit dans le double aveu, soit dans des combinaisons négation/aveu. Ce concept recouvre une réalité peut-être plus proche de ce que donneraient des statistiques du jeu. On peut parler de *surface de Nash*.

On peut représenter la surface couverte par le seul joueur 1. On retrouve quatre vecteurs et les gains du joueur 1 dépendent d'un environnement impliquant un second joueur. La surface est cette fois-ci différente, ondulée et passant par les différents gains que peut espérer le joueur 1. La figure "société 2" en donne une allure sur les bords en gris clair.

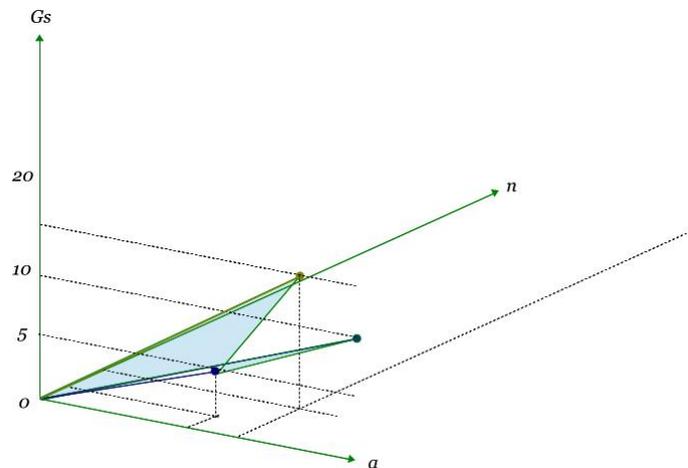


Figure "société 2".

Comme les vecteurs sont identiques à ceux de la société, seul les gains changent, en faisant la somme des surfaces des joueurs dans leur environnement, on retrouve la surface de la société (la somme ou l'opération convenue pour passer de l'individu à la société). En ce sens, l'individu est **une composante du spectre de la société**.

10.5.2 Trajectoires pour un jeu non simultané avec échanges d'informations

L'information échangée peut être partielle ou complète, il peut y avoir présence de rumeurs, de croyances. Il y a un environnement extrinsèque aux joueurs et un environnement, un passé intrinsèque aux joueurs. La croyance est plus du domaine de l'intrinsèque mais peut être alimentée par un environnement extrinsèque.

Reprenons le cas des prisonniers. Le premier prisonnier joue en premier. S'il avoue, il ne laisse pas le choix au second qui doit avouer aussi, sauf à aimer la prison. S'il nie, paradoxalement il s'expose. Le second peut nier, auquel cas les deux sont libres, ou avouer - par exemple s'ils étaient vraiment coupables et qu'il a des remords ou s'il veut se venger de son accolyte. Si l'on raisonne uniquement en individus "logiques" et raisonnables, le second nie également mais le premier niera de fait. Dans ce cas le seul vecteur projeté dans l'espace CG est un vecteur dans la direction n d'amplitude 2 dans cette direction et de gain nul. La surface est ici réduite à un segment.

Imaginons un jeu d'enchère : on étudie les comportements de deux joueurs sans notion de société. Deux joueurs s'opposent pour l'obtention d'un objet. Fixons les hypothèses et règles : un prix de départ P_0 est fixé. Le premier joueur propose ce prix augmenté d'un facteur $\alpha = (1 + r(\acute{e}))$ où r est une variable aléatoire, et comme le prix ne peut dépasser une valeur maximum du marché P_x , le joueur 2 surenchérit avec un facteur $\beta = (1 + r(2\acute{e}))$ mais le premier qui l'emporte est celui qui atteint ou dépasse P_x . Chacun des deux joueurs peut se désister à tout moment, c'est ce qui pousse chacun à tenter de l'emporter en surenchérissant. On considère par ailleurs que la probabilité à chaque événement $n\acute{e}$ qu'un joueur se désiste est $1 - r(n\acute{e})$. Enfin on doit définir un gain, il est donné par $P_x - P_a$ si P_a est le prix d'achat. Chaque joueur peut renchérir à son tour, mais jamais deux fois de suite.

La succession des prix engagés par le premier joueur est : $\alpha_1 P_0, \alpha_3 \beta_2 \alpha_1 P_0, \dots$. Celle du second joueur est : $\beta_2 \alpha_1 P_0, \beta_4 \alpha_3 \beta_2 \alpha_1 P_0, \dots$. La vitesse de convergence vers le prix maximum dépend des facteurs α et β à chaque annonce.

Quelle projection dans un espace CG effectuer ? On peut se doter d'un axe des pertes, plus pertinent. Deux directions semblent émerger : annonce ou désistement. Une trajectoire va être plus ou moins rapide en croissance suivant qu'un joueur se désiste majoritairement ou pas.

On peut facilement déterminer les bords de la surface des possibles. Soit les deux joueurs ne se désistent jamais, auquel cas $r(n\acute{e}) = 1, \forall n$, ou le premier joueur se désiste dès le départ : $r(\acute{e}) = 0$. Le premier bord donne lieu à des coefficients α et β qui valent tout le temps 2. Alors les coûts augmentent suivant $2P_0, 4P_0, 8P_0, \dots$. Si $P_x = NP_0$, le premier qui l'emporte est le joueur pour lequel $2^n \geq N$. Si n est impair, c'est le joueur 1, si n est pair, c'est le joueur 2. La perte à chaque événement n vaut $G = P_x - 2^n P_0$. La croissance des enchères est exponentielle et se termine par une perte de $0,5P_x$, un prix égal à la perte et le gagnant est l'un ou l'autre joueur suivant la somme à atteindre.

L'autre bord est trivial, si le premier joueur (ou le second) se désiste tout de suite, le prix d'achat est P_0 et il n'y a qu'une annonce et pas de pertes. Mais est-ce le seul bord envisageable ? Une autre possibilité est que les deux participants se désistent tout de suite. Auquel cas le produit n'est pas acheté et l'on ne peut pas chiffrer la perte. Cette possibilité n'appartient donc pas à la projection dans l'espace CG que l'on s'est fixé.

Il reste à déterminer l'allure des enchères intermédiaires. Chacun va essayer de jauger à chaque annonce la probabilité qu'il a d'emporter l'enchère en augmentant la mise. Ou autrement dit, la probabilité de gagner l'enchère sachant qu'il augmente la mise, ce que l'on note : $P(g|+)$. Mais si cette augmentation intervient trop tard, l'adversaire peut atteindre la limite qui lui fait remporter la mise pour un supplément relativement négligeable. Il peut aussi en début d'enchère espérer que le prix suivant devienne trop grand pour l'adversaire qui se désisterait. Pour évaluer ces espérances, on dispose de la formule de Bayes[SLM][BG]. Dans notre contexte, elle va se formuler ainsi : si q est le fait de perdre l'enchère,

$$P(g|+) = \frac{P(+|g) P(g)}{P(+|g) P(g) + P(+|q) P(q)} \tag{10.1}$$

Cette relation va pouvoir se généraliser dans notre espace CG. L'action d'augmenter la mise est une modification d'observables m , sorties, alors que perdre ou gagner sont dans notre espace des directions, des transformations t . La relation de Bayes devient alors :

$$P(t|m_{\acute{u}}) = \frac{P(m_{\acute{u}}|t) P(t)}{\sum_n P(m_{\acute{u}}|t_n) P(t_n)} \tag{10.2}$$

Par la relation de Bayes on transforme une probabilité a priori - ici la chance que l'on estime de gagner en augmentant la mise - en une probabilité a postériori : la chance que l'on a de vouloir augmenter la mise sachant que l'on va gagner pondérée par la chance que l'on a de gagner, en se projetant dans le jeu fini.

Dans le jeu d'enchères, la probabilité $P(+|g)$ est toujours proche de 1 et la probabilité $P(+|q)$ proche de 0. A la limite, on retrouve le slogan du loto : pour gagner il faut jouer ! De fait, ce sont les probabilités de gagner ou perdre qui vont principalement chiffrer l'espoir de gagner en augmentant la mise. Les deux probabilités précédentes constituent les comportements, les **croyances** des joueurs.

On peut raisonnablement considérer ici que la probabilité de gagner ou de perdre est proportionnelle à la distance au prix maximum. Lorsque l'on se rapproche de ce prix, la probabilité de gagner tend vers 0,5. En prenant pour loi de probabilités de gagner : $0.5(1 + n^{-1})$ et de perdre : $0.5(1 - n^{-1})$ on trouve une probabilité de gagner lorsque l'on abonde de :

$$P(g|+) = \frac{P_g(1 + \frac{1}{n})}{P_g \frac{2}{n} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})}$$

($P_g = P(+|g)$, $P(+|q) = 1 - P_g$) qui tend bien vers 0,5 quand n est grand. La perte va aussi grandir avec n . Au final, on trouve toutes les situations où avec une pente plus ou moins raide, un joueur s'est désisté plus ou moins vite. Les trajectoires sont raccourcies par les désistements et décrivent une surface qui conduit du bord sans désistement au bord avec désistement immédiat. Les coordonnées des points à chaque événement sont données par les probabilités de gagner ou de se désister suivant la relation 10.1, donc des probabilités influencées par les résultats, observables à l'événement précédent. On peut programmer ces multiples possibilités pour trouver la courbe présentée figure "surface d'enchères" (dans la programmation nous avons tracé en logarithmique l'écart au prix maximum divisé par le prix courant). On voit bien l'allure globale entre des bords qui tendent vers les extrêmes pour les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire r pour chaque joueur et l'évolution du gain tracé ici en logarithme. L'aspect très abrupt de l'évolution du gain montre toute la difficulté du jeu pour les acteurs : s'ils vont trop loin il peuvent rapidement tout perdre. Il y a donc un aspect de conflit et en même temps de coalition implicite si l'on ne veut pas que tout le monde soit perdant.

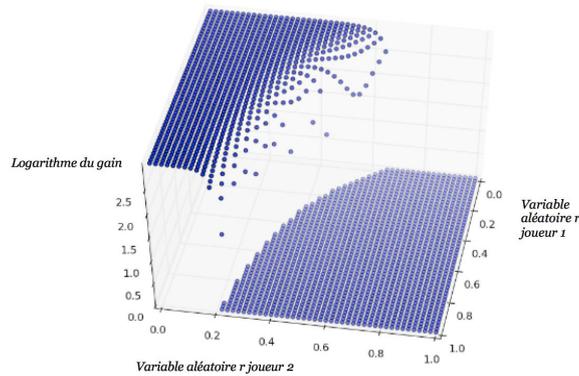


Figure "surface d'enchères".

Cet exemple nous a permis d'introduire les probabilités conditionnelles dont nous userons largement dans la modélisation des processus complexes. Les propriétés statistiques reliées à ces notions, les propagations de probabilités, etc., sont autant de notions que l'on doit rappeler pour l'usage obligatoire que nous en ferons autour du concept de Bayes.

Construisant des surfaces de comportements, on voudra essayer de trouver des équilibres de Nash, ou leurs équivalents comme points de meilleurs compromis vers lesquels les probabilités les plus fortes tendent. Ces équilibres doivent être trouvés dans des topologies dynamiques, s'enrichissant au fur et à mesure des évolutions.

Une première situation, plus simple à évaluer est celle où les choix à une étape n du processus d'évolution sont guidés par la seule étape précédente. Ce type de processus est appelé processus de Markov. Nous allons rappeler ses hypothèses, le cadre plus général des processus stochastiques et la notion d'équilibre parfait de Markov (MPE = "Markov Perfect Equilibrium").

10.6 Equilibre parfait en processus de Markov

On suppose un système qui à chaque étape entre deux événements, peut changer d'état. Ces changements résulteront dans notre cas d'évolutions. A l'événement n , ce système est dans l'état x_n qui est un élément de l'ensemble des états possibles : $Z_n = \{Z_0^n, Z_1^n, \dots, Z_y^n\}$ à l'instant n .

10.6.1 Processus stochastique

L'état initial du système est Z_0^0 . La suite des états x_0, x_1, \dots, x_n est appelée processus stochastique. Pour que ce processus soit défini, il faut que l'on connaisse la distribution de probabilités sur l'espace des états possibles. Cette distribution de probabilités dépend dans le cas général des états parcourus aux étapes précédentes et se définit par les probabilités conditionnelles :

$$P(x_{n+1} = Z_k^{n+1} | x_0, \dots, x_n) \quad (10.3)$$

avec :

$$\sum_{k=0}^{L_n} P(x_{n+1} = Z_k^{n+1} | x_0, \dots, x_n) = 1$$

(L_n est la longueur de liste des états possibles, soit la dimension de l'ensemble de ces états). En fonction du type de la distribution de probabilités, on distingue plusieurs catégories de processus stochastiques :

- à valeurs indépendantes ;
- d'essais indépendants ;
- de chaînes markoviennes.

Les états possibles pour nous seront N tenfolds engendrés par différentes transformations. Chaque dérivation, branche, sur l'arbre d'évolution (AE) est un processus stochastique.

10.6.2 Processus à variables indépendantes

Dans ce cas, le processus ne dépend pas des états passés, soit :

$$P(x_{n+1} = Z_k^{n+1} | x_0, \dots, x_n) = P(x_{n+1} = Z_k^{n+1})$$

10.6.3 Processus d'essais indépendants

Chaque étape conserve l'espace des états et la même distribution de probabilité. Il s'agit donc de la répétition d'un essai.

10.6.4 Processus markovien

Le processus est markovien si l'espace des états est identique pour toutes les étapes et si la distribution de probabilité ne dépend que de la dernière distribution (processus à mémoire faible).

Pour ce processus on peut écrire :

$$P(x_{n+1} = Z_k^{n+1} | x_0, \dots, x_n) = P(x_{n+1} = Z_k^{n+1} | x_n)$$

On peut décrire ce processus sous la forme de coefficients d'une matrice de transition qui sera une partie du propagateur. Soit :

$$p_{ij}(n) = P(x_{n+1} = Z_j | x_n = Z_i) \quad (10.4)$$

Ces coefficients respectent[YK] :

$$\sum_0^N p_{ij}(n) = 1$$

Dans notre formalisme, l'espace des états constitue une horizontale dans l'arbre d'évolution (AE) : c'est l'espace des tenfolds à une étape, un événement donné. Les étapes suivantes sont données par la croissance du propagateur et du vecteur d'information liés à C_δ . Les distributions de probabilités seront liées aux observables, éléments des tenfolds et à des critères supplémentaires non forcément rationnels, comme de l'intuition (termes θ_i). Un chemin dans l'AE ou une trajectoire dans l'espace CG constituent des histoires. A chaque jonction on va définir

$$P(x_{n+1} = \check{u} = t \cdot \check{v} | x_n = \check{v}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \check{v})$$

On peut définir un espace des tenfolds possibles T , pas obligatoirement fini (des transformations peuvent conduire à des tenfolds imprévus, que l'on ne saurait pas anticiper mais dont l'existence fait appel à un domaine fini de possibles en transformations).

10.6.5 Premières projections dans l'espace CG

Les étapes correspondent à des multiples d'événements \acute{e} . Le propagateur est, à l'étape n de transformations (évolutions) de dimensions D^2 . Le vecteur d'information courant qui contient les tenfolds dans toutes les jonctions est alors de dimension D . A chaque tenfold k correspond un ensemble d'observables $\{\theta_i\}^k$.

Soit $\{\check{u}_k\}$ l'ensemble des K tenfolds à un événement $n\acute{e}$, si l'on convient de numéroter les jonctions dans l'ordre vertical descendant et de gauche à droite en horizontal pour l'AE, cet ensemble est le groupe des K dernières composantes du vecteur information $I(n)$.

Si pour $\{\check{u}_k\}$ on envisage sur la base des $\theta_i \in \check{u}_k$, de l'intuition, de l'expérience, bref de l'environnement intrinsèque et extrinsèque sous la forme de M transformations de la forme t_{mk} telles que $\check{v}_m = t_{mk} \cdot \check{u}_k$, la matrice de croissance C_δ va comporter en partie haute une matrice identité de dimension K^2 et pour la partie basse une matrice de zéros de dimensions $(M - K, K)$. Alors on peut dire qu'il existe un ensemble de $K \rightarrow M$ probabilités p_{mk} telles que :

$$p_{mk} = P(\check{v}_m = t_{mk} \cdot \check{u}_k | \{\theta_i\} \in \check{u}_k) \quad (10.5)$$

Les deux matrices p_{mk} et t_{mk} vont constituer les deux composantes du propagateur γ dans l'espace CG et pour l'AE, le propagateur évoluant à chaque étape, pour chaque événement.

10.6.6 Vers l'équilibre parfait dans un processus de Markov

Ayant commencé à "sentir" quels pourraient être les mécanismes d'évolution de notre topologie dynamique, la théorie des jeux peut nous fournir en plus des arguments pour justifier et prédire des chemins privilégiés dans l'évolution (trajectoires privilégiées dans l'espace CG). Le processus de Markov semble parmi les modèles élaborés par cette théorie, celui qui donne le plus d'éléments réutilisables sous des conditions que nous préciserons ultérieurement. Comme dans le jeu en stratégies pures, on va essayer de dégager des comportements de Nash dans ce cadre : c'est l'objet des "MPE" - Markov's Perfect Equilibrium, proposition de Maskin & Tirole[MT].

10.6.6.1 Hypothèses

Pour formuler le MPE il faut se doter d'hypothèses. Nous allons essayer de les replacer systématiquement dans notre contexte.

Première hypothèse : à chaque étape, tous les joueurs ont toute l'information. Dans notre cas l'information est contenue dans le vecteur d'information. On peut poser que tous les joueurs - tous les acteurs - ont accès à ce vecteur. Mais il est évident que cela n'est pas forcément vrai, en particulier lorsqu'il y a concurrence sur la réalisation d'un produit, les entreprises concurrentes ne se passent pas l'information. Chaque entreprise aura son ensemble de tenfolds propres sans connaître - sauf à faire de l'espionnage - les ensembles des concurrents. Par contre, en sous-jeu, en ne considérant que le jeu de l'un des partenaires, ce partenaire a accès à toute l'histoire d'évolution sur son tenfold d'origine.

Seconde hypothèse : le jeu se déroule en N étapes, N peut être fini ou infini. Dans notre cas, le nombre d'étapes est toujours fini pour les systèmes industriels, il peut être infini pour des processus naturels, au moins à l'échelle de plusieurs générations.

Troisième hypothèse : à la date n le joueur $i = (1, \dots, J)$ connaît l'histoire $h^n = (a^0, \dots, a^{n-1})$ où $a^k = (a_1^k, \dots, a_J^k)$ et choisit une action a_i^n dans un ensemble d'actions $A_i^n(h^n)$ (les indices de a suivent le choix $a_{\text{joueur}}^{\text{date}}$). Le futur f^n à la date n est le vecteur des actions actuelles et futures : $f^n = (a^n, \dots, a^N)$. Enfin, le joueur i a la fonction de gain de Neumann-Morgenstern :

$$G_i(a^0, a^1, \dots, a^N) \equiv G_i(h^n, f^n), \quad \forall n$$

Sous notre formalisme, cette dernière hypothèse se traduit de la façon suivante : à l'étape n le joueur $j_i \in (j_1, \dots, j_J)$ connaît l'histoire :

$$h^n = (\check{u}_0, \check{u}_1, \dots, \check{u}_k)^n$$

où $\check{u}_1, \check{u}_2, \dots, \check{u}_{L(i)} \in j_i$ et choisit des transformations t_{mk} dans un ensemble de transformations possibles $T(n)$. Le futur est la partie ajoutée au vecteur d'information lors de l'étape de croissance :

$$h^n \cup f^n = I(0, \dots, n, n+1, \dots, N) \tag{10.6}$$

Mais pour le construire on peut aussi voir le futur comme la définition précédente, c'est à dire l'ensemble des transformations envisagées après n , idem pour le passé (l'histoire). Dans notre formalisme, tenfolds et transformations sont liés par le propagateur, on peut se référer à l'un ou l'autre indifféremment.

Les joueurs j_i ont un gain déterminé par les performances des tenfolds et leurs choix dépendants de l'environnement intrinsèque et extrinsèque.

10.6.6.2 Equilibre de Nash parfait en sous-jeu

Dans un jeu en représentation extensive, on peut trouver de multiples équilibres de Nash. Mais parmi ces multiples, certains reposent sur des croyances ou des hypothèses de menaces, de risques faibles. C'est à dire qu'à l'issue d'une seconde réflexion, ces craintes ne justifient pas de choix et finalement ce qui pouvait apparaître comme un équilibre de Nash disparaît au profit d'équilibres plus robustes. Ces équilibres plus robustes constituent des équilibres de Nash parfait et peuvent être déterminés dans des sous-jeux, des parties d'un jeu où les conditions initiales ont été déterminées par le passé et où l'issue suivante ne dépend pas de ce passé, mais de la seule condition initiale (on a ici une notion très cartésienne où chaque évolution ajoute sa plus-value par rapport à l'état en $n - 1$, sans dépendance explicite aux ajouts des étapes précédentes. C'est le principe de la TVA ! Cette hypothèse peut contredire le principe systémique qui peut énoncer que chaque évolution ajoutée fabrique un système qui change non linéairement avec les ajouts d'évolutions. Auquel cas la condition initiale n'est plus le dernier état, mais toute l'histoire précédente : nous reviendrons sur ce point ensuite).

Considérons le jeu présenté figure "menace vaine".

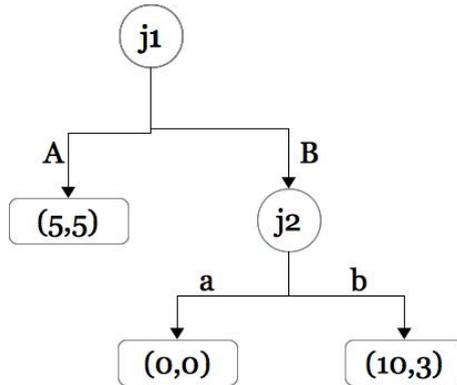


Figure "menace vaine".

Le joueur 2 peut menacer le joueur 1 de jouer le choix "a" si j_1 joue "B", mais cette menace n'est pas crédible car lui-même y perdrait. j_1 peut donc venir chercher le gain optimum 10 et j_2 obtenir le gain médiant 3. Maintenant cette issue est une issue dans un cadre individuel. Dans un cadre social et avec critère de gain moyen, quadratique moyen ou somme on trouverait la même issue. Un critère qui ferait pencher la balance en faveur du choix A dépendant du seul joueur j_1 , qui recevrait dans ce cas une consigne de groupe, serait un critère égalitaire. Mais suivant notre premier critère individualiste et par calcul rationnel de gain optimisé pour chaque joueur à chaque étape, la succession B, b est un équilibre de Nash parfait en sous-jeu. Notons que les deux possibilités A et (B, b) se trouvent par une méthode des meilleures réponses.

Dans ce sous-jeu on a donc postulé que le passé n'intervenait pas. Cela signifie par exemple que j_2 n'a pas dans la même partie gagné énormément d'argent quand j_1 perdait tout le temps auquel cas sa menace deviendrait crédible !

Définition

Un équilibre parfait en sous-jeu est donc un profil de stratégies (dans notre formalisme une succession de transformations) pour un joueur j_i qui conduit à un équilibre de Nash quelle que soit l'histoire h^n (donc $I^k, k \in 0, \dots, n$)[MT].

10.6.6.3 Equilibre parfait en processus de Markov

Un processus de Markov étant quelque part un processus sans fin on ne peut définir d'équilibre qu'à condition de pouvoir regarder à un moment donné une évolution particulière du jeu. Ce regard nécessite la notion de partition suffisante du jeu. Autrement dit pouvoir focaliser l'étude sur les choix dans le jeu qui précèdent les actions majeures qui conduisent au meilleur gain.

Définition

Une partition $\{H^n(\bullet)\}_{n=0,\dots,N}$ est une partition suffisante si les sous-jeux après n ne sont pas modifiés par la prise en compte du passé (le futur n'est pas changé par la connaissance du jeu avant l'instant n et cela quel que soit n) et que les gains des joueurs au sens de Von Neumann - Morgenstern résultent des mêmes choix. Cela s'écrit :

$$G_i(h^n, f^n) = \lambda_i G_i(\tilde{h}^n, f^n) + \mu_i(h^n, \tilde{h}^n, f_{-i}^n) \quad (10.7)$$

Le tilde pointe une fonction aléatoire, l'indice $-i$ signifie "tous les joueurs sauf i ". Cette relation[MT2] signifie qu'en étudiant le jeu dans la partition, le gain de tout joueur pour une histoire ne peut-être que proportionnellement modifié pour toute autre histoire et par principe un même futur, et augmenté d'une fonction liée aux croyances ou contraintes du joueur. Par exemple un joueur de poker à un moment donné - pour la partition considérée - a un jeu certainement gagnant, il mise toute sa somme. Cette somme aurait été différente pour d'autres histoires du passé, mais son choix dans la partition est identique quel que soit ce passé et donc s'il gagne 10 fois la mise, il gagnera 10 fois une somme variable suivant le passé à laquelle il devra enlever 1€ qui est une somme prélevée à tous les joueurs quoiqu'il est arrivé et quoiqu'il arrivera pour payer le café. La succession de coups retenue dans la partie de poker qui respecte ces points constitue une partition suffisante pour analyser les choix des joueurs à cet instant.

Forts de la notion de partition suffisante, on peut énoncer la définition d'équilibre parfait au sens de Markov, définition énoncée par Maskin & Tirole[MT] :

Définition

Un équilibre de Markov parfait est un profil de stratégies σ qui est un équilibre parfait et qui vérifie :

$$H^n(h^n) = H^n(\tilde{h}^n) \Rightarrow \forall i, \sigma_i^n(h^n) = \sigma_i^n(\tilde{h}^n) \quad (10.8)$$

10.6.6.4 Transposition du MPE dans l'espace CG

Une stratégie pour nous est une succession de transformations (et non plus seulement une succession de choix). Une partition suffisante $H = [n - j, \dots, n]$ engendre un groupe de composantes du vecteur d'information tel que :

$$\forall n \in H, k \in [0, \dots, n - j - 1], \forall \tilde{I}^k : I = (\tilde{I}^k, I^n, f^n) \quad (10.9)$$

De plus :

$$G_i(I \not\supset f^n, f^n) = \lambda_i G_i(\tilde{I} \not\supset f^n, f^n) + \mu_i(I \not\supset f^n, \tilde{I} \not\supset f^n, f_{-i}^n) \quad (10.10)$$

Les profils de stratégies quels que soient les joueurs sont entièrement décrits pour nous dans la composante t_{mk} du propagateur. On peut donc écrire la définition du MPE sous la forme :

$$\forall k, n \in H, I_{(n)} = (\tilde{I}^k, I^n)_{(n)} \Rightarrow \exists! t_{nk}, \forall \tilde{I}^k \quad (10.11)$$

Dans cette expression, n correspond à une étape *né*. Nous sommes ici en stratégie pure ($\sigma \rightarrow t_{nk}$) mais nous aborderons plus loin le cas de la stratégie mixte ($\sigma^* \rightarrow \gamma_{nk}$).

10.7 Implémentation d'un processus de Markov dans le formalisme des tenfolds

Dans l'espace CG, un tenfold est un système dans un état donné suivant son parcours d'évolution. L'évolution peut être simplement la vie du système à un moment donné, à un instant *né* dans l'espace CG.

Partons d'un état initial unique $\check{u}_0 \in I^{(0)}$. Le futur f^1 est déterminé par l'ensemble des transformations $T_{0 \rightarrow 1}$. Supposons que la dimension $D(T_{0 \rightarrow 1}) = 2$, $T_{0 \rightarrow 1} = \{t_1, t_2\}$. Cela implique que la matrice de croissance est donnée par (par définition de son mécanisme de croissance) :

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La croissance est réalisée par : $C_\delta \check{u}_0 = I^{(1)}$. Le transformateur du propagateur s'en déduit également :

$$t_{m0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, m \in \{1, 2\}$$

Pour disposer du propagateur complet il faut définir p_{m0} :

$$p_{m0} = P\left(\check{u}_m = t_{m0}\check{u}_0 \mid \{\theta_j\} \in \check{u}_0 \in [I^{(0)}]\right)$$

A l'étape n , cette probabilité sera donnée par :

$$p_{mk} = P\left(\check{u}_m = t_{mk}\check{u}_k \mid \{\theta_j, \theta_l, \dots, \theta_x\} \in \check{u}_k [I^{(n)}]\right) \quad (10.12)$$

$\{\theta_j, \theta_l, \dots, \theta_x\} \in \check{u}_k [I^{(n)}]$ est l'ensemble des observables attachées aux tenfolds existants à l'étape n .

Notons que l'on repère l'instant n sur l'évolution de I comme on aurait pu l'ajouter aux éléments de γ ; mais contrairement au mécanisme utilisé en théorie des jeux, les éléments vecteur d'information et propagateur sont toujours uniques mais croissent avec le déroulement des événements.

Le processus précédent est-il bien markovien ?

La condition de dépendance de p_{mk} avec les observables de l'unique étape précédente (ou des k uniques étapes précédentes) peut être acceptée pour tous les systèmes à faible mémoire, c'est à dire où l'évolution marche de proche en proche sans être dépendante d'un ensemble d'observables visibles à différentes étapes et non à une seule. Par contre la condition des espaces des états identiques d'une étape à l'autre est moins évidente d'un point de vue systémique[DD]. La connaissance a priori de toutes les transformations possibles pour respecter la condition d'identité des espaces d'états exclut la notion d'émergence qui sous-tend une innovation dont la connaissance ne peut apparaître qu'a posteriori. Mais cette exclusion n'est pas certaine, l'émergence pouvant aussi résulter d'un espace des transformations identique mais dont les applications engendrent un système nouveau. Cette considération est légitime car à un niveau d'échelle donné, l'innovation disparaît. Mais dans certains cas d'émergence, l'émergence disparaît avec la réduction d'échelle. Prenons l'exemple de la supraconductivité. L'appariement des électrons conduit à un comportement quantique singulier. L'évolution qui consiste ici dans l'appariement ne peut être déduite des seuls électrons séparés. L'espace des transformations ne peut être invariant qu'à condition d'y inclure la transformation de supraconductivité. L'inclure la suppose connue (ou pour le moins, existante mais cachée)!

On peut donc affirmer que l'espace des transformations est invariant - aussi grand soit-il - qu'à condition d'en exclure les émergences qui n'ont pas encore été découvertes. Les conditions pour pouvoir considérer l'évolution de l'AE comme un mécanisme de Markov sont réunies dans un arbre réduit à des origines aux points de découvertes de chaque émergence.

Ces différentes réflexions nous permettent de préciser mieux les choses pour encadrer un mécanisme de Markov dans le formalisme des tenfolds et l'espace CG. Une première voie consiste à tenter de reprendre le raisonnement établi par Maskin et Tirole[MT2] pour le replacer dans ce contexte.

10.8 Conclusion du chapitre 10

La théorie des jeux permet d'aborder des problèmes englobant des situations humaines, même si l'on cherche à se positionner dans des hypothèses de rationalité qui permettent de rendre les démonstrations robustes. On a vu que l'on pouvait trouver des liens entre les formes extensives et l'arbre d'évolution que l'on veut construire; que cet arbre projeté dans l'espace CG pouvait contenir des trajectoires préférentielles que la théorie des jeux peut nous permettre de trouver, pour des situations où les seules performances des observables ne suffisent pas. Mais ces premières réflexions ont déjà permis de dégager les grandes lignes d'une insertion d'une théorie des jeux dans une topologie dynamique que l'on a pu définir autour de l'objet "propagateur". Cet objet est fait de deux êtres mathématiques : une matrice de transition constituée de transformateurs au sens des tenfolds, et une matrice de Markov donnant les probabilités de ces transitions. Nous avons commencé à positionner le type de processus de Markov auquel on pouvait s'adresser et de premières idées de détermination de trajectoires

optima au sens de Nash ainsi que les notions de bords pour une “surface de comportements ou de trajectoires possibles statistiquement”. Dans la partie suivante nous allons nous attacher à solidifier ces premiers édifices en explicitant comment le propagateur et les gains se projettent dans l’espace CG.

10.9 Références du chapitre 10

- [APR] A.Petit-Robin, “Aborder la théorie des jeux”. Edition du Seuil, 1998.
- [SLM] S.Lessard, Monga, “Statistique : concepts et méthodes”. Edition Masson, Montréal, 1993.
- [BG] B.Guerrien, “La théorie des jeux”. Edition Economica, 1989.
- [YK] Y.Korchounov, “Fondements mathématiques de la cybernétique”. Edition MIR, 1975.
- [MT] D.Fudenberg, J.Tirole, “Game Theory”. Edition The MIT Press, 1991.
- [DD] D.Durand, “La systémique”. Edition puf, 1979.
- [MT2] E.Maskin, J.Tirole, “Markov perfect equilibrium”. Journal of Economic Theory, 100, (191-219) 2001.

Quatrième partie

Modéliser la complexité : une théorie des jeux dans une topologie dynamique

Préambule

Modéliser la complexité? Voilà qui peut paraître paradoxal! Pourtant des communautés s’y essaient, entre autre celle de l’association AFSCET : l’Association Française de Science des Systèmes Cybernétiques Cognitifs et Techniques, à laquelle on participe. La complexité existe depuis la nuit des temps dans la nature. Encore récemment, des découvertes issues des observations par satellites montrent les liens entre les vents de sable du Sahara, la croissance des plantes en Amazonie et le rôle prépondérant du plancton généré dans les fonds polaires. Encore aujourd’hui la pensée humaine est souvent dépassée par ces phénomènes qui interagissent sur des dimensions à l’échelle de la Terre. Naturellement, l’homme s’est d’abord attaché à maîtriser son environnement proche. Pourtant les philosophes eux, n’hésitaient pas déjà dans l’antiquité Grecque à se demander quelle était la nature de la voute céleste, de la raison d’être, etc. Déjà ces philosophes proposaient des explications ou des débuts d’explications (explication dans le sens de se doter de mécanismes qui justifient de l’existence d’une observation dans la nature) à ces phénomènes extraordinaires. Mais le “génie humain” s’est avant tout distingué par l’outil, par les avancées d’ingénieurs qui ont façonnées le monde moderne et permis finalement l’explosion des découvertes et des explorations scientifiques (l’outil est la seule différenciation objective que l’on peut formuler aujourd’hui entre l’homme et l’animal. Car que sait-on de la pensée animale? Là encore les idées évoluent. Récemment on vient de montrer que des chevaux sont doués de capacité d’évocation).

Sans refaire l’histoire des sciences, on peut s’intéresser à l’œuvre de Descartes qui a marqué profondément la démarche scientifique jusqu’à nos jours, où si elle a permis un progrès indéniable elle a aussi occulté pendant quelques temps des approches plus appropriées vis à vis des phénomènes complexes. La systémique ou science des systèmes a investigué ces notions, entre autre parce que l’on s’est aperçu que la démarche cartésienne et la trop grande certitude qu’elle a pu induire (sans que Descartes n’y soit pour rien!) ont parfois mené à une mauvaise gestion de problèmes complexes. Un des exemples que l’on peut citer pour illustrer cette difficulté est la biologie. Longtemps après les découvertes de Pasteur on a pensé que le risque bactériologique n’était plus. Il suffisait de créer un antibiotique pour supprimer une menace. C’était sans compter sur la complexité du vivant - et quel vivant! Des êtres apparemment si simples que l’on a du mal à imaginer qu’ils puissent développer des stratégies. Pourtant la bactérie E-coli résiste aujourd’hui aux antibiotiques. Elle a sû se doter d’une protéine qui la protège. Par quels mécanismes subtils la nature a-t-elle guidé cet être extrêmement simple à évoluer pour s’adapter à son milieu hostile? Enfin, on a pu montrer que nos actes peuvent précéder notre conscience des actes. Le microbiote serait-il le vrai maître de nos actions et pensées? C’est toute la question de la complexité.

Pour tenter de comprendre certains des mécanismes sous-jacents à ces phénomènes, nous cherchons tout d’abord les moyens de représenter l’évolution et la complexité d’une façon qui réponde au double objectif de la non simplification à outrance en même temps que de la synthèse d’idées difficiles. Une méthode de représentation proposée, on cherche celles de la théorie des jeux qui pourraient être utilisées pour expliquer certaines des représentations que l’on peut obtenir. Parmi ces méthodes, les processus de Markov et les équilibres de Nash associés sont des bases qui semblent nécessaires à l’élaboration d’outils.

Chapitre 11

Trajectoires dans l'espace Choix - Gain

11.1 Introduction au chapitre 11

Comme le précise l'introduction de l'article de Maskin et Tirole[MT], les stratégies que l'on peut observer dans des systèmes complexes (économie, sciences sociales) sont intertemporelles dans leurs natures et nécessitent des formulations dynamiques (d'après le dictionnaire, intertemporalité est un terme d'économie qui signifie échelonner dans le temps). Les processus de Markov offrent un cadre propice à l'expression de phénomènes dynamiques - à la création de graphes dynamiques bien adaptés à la représentation de choses compliquées. Dans ces processus, on va essayer de limiter l'étude du système à un ensemble restreint de variables plutôt qu'à l'histoire entière du système. C'est aussi notre propos dans notre représentation en espace CG pour justifier de trajectoires particulières en plus des trajectoires limites de bords que nous avons évoquées précédemment. Pour cela on replace les objets que l'on a identifiés comme permettant d'exprimer la dynamique de graphes - réseaux - complexes dans l'espace CG puis on essaie de reprendre les raisonnements qui ont conduit la pensée en théorie des jeux pour les équilibres de Markov en sous-jeu dans ce nouveau cadre.

11.2 Propagateur et espace CG

Les deux éléments t et p qui constituent le propagateur renvoient directement à l'espace CG sans gains. La matrice t contient entre deux événements la transformation appliquée, donc l'axe de l'espace CG suivant lequel on se déplace, et la matrice p porte la coordonnée suivant cet axe. Un segment de trajectoire est un vecteur défini par une jonction de départ et une (des) jonction(s) d'arrivée(s). Dans la matrice t comme dans la matrice p cette configuration se retrouve par une succession de valeurs en colonne. Soit, partant d'une jonction i trois transformations vers des jonctions (α) , (β) , (ζ) (on rappelle que la mise entre parenthèses d'un indice permet de pointer une composante particulière) associées à des probabilités $p_{(\alpha)i}$, $p_{(\beta)i}$, $p_{(\zeta)i}$, le vecteur \mathbf{V} correspondant a pour coordonnées :

$$\mathbf{V} = p_{(\alpha)i}\mathbf{t}_{(\alpha)i} + p_{(\beta)i}\mathbf{t}_{(\beta)i} + p_{(\zeta)i}\mathbf{t}_{(\zeta)i} \quad (11.1)$$

Comme le vecteur traduit trois tendances de comportements pour lesquelles existent des observables séparées qui permettent de définir des gains, on ne peut pas l'associer directement à un gain. Par contre on peut calculer une espérance de gain ou un gain pondéré. Soit O_α , O_β , O_ζ trois observables en sortie des trois jonctions (α) , (β) , (ζ) , on définit l'espérance de gain EG et la direction correspondante dans l'espace CG \mathbf{EG} par :

$$EG = O_{(\alpha)}p_{(\alpha)i} + O_{(\beta)}p_{(\beta)i} + O_{(\zeta)}p_{(\zeta)i} = \sum_u O_{(u)}p_{(u)i} \quad (11.2)$$

Pour différencier l'espérance de gain des groupes de transformations, on peut lui attribuer une nature complexe (plusieurs complexes de type hypercomplexes si l'on a plusieurs espérances de gains). Finalement le segment de trajectoire précédent devient le vecteur complet dans l'espace CG décrit par (le facteur j permet de différencier le gain, de nature différente des groupes de transformations) :

$$\mathbf{V} = p_{(\alpha)i}\mathbf{t}_{(\alpha)i} + p_{(\beta)i}\mathbf{t}_{(\beta)i} + p_{(\zeta)i}\mathbf{t}_{(\zeta)i} + j \left(\sum_u O_{(u)}p_{(u)i} \right) \mathbf{EG} \quad (11.3)$$

A mesure qu'il y a croissance la dernière "rangée" de jonctions engendre un vecteur dans l'espace des transformations (on le notera espace \mathcal{T}). Si de nouveaux choix sont créés, une des dernières jonctions va engendrer à son tour d'autres chemins, et l'on va s'intéresser aux différents trajets qui conduisent aux nouveaux groupes de jonctions.

Imaginons que l'on parte d'une jonction d'origine $k = 1$. On a deux transformations possibles t_{21} et t_{31} . A $n = \epsilon$ le vecteur de trajectoire est (en supposant implicitement que la partie imaginaire se rattache à l'axe EG) :

$$\mathbf{V} = p_{21}\mathbf{t}_{21} + p_{31}\mathbf{t}_{31} + j(G_2p_{21} + G_3p_{31})$$

Notons que l'on peut aussi définir \mathbf{V} sous la forme correspondant à un espace CG complexe dans ses directions :

$$\mathbf{V} = p_{21}(\mathbf{t}_{21} + jG_2) + p_{31}(\mathbf{t}_{31} + jG_3)$$

Si la croissance reprend et de la jonction 2 repartent deux liens vers des jonctions 4 et 5, la trajectoire reprend aussi sa croissance et de la jonction 2 part un vecteur donné par :

$$\mathbf{V}_2 = p_{42}\mathbf{t}_{42} + p_{52}\mathbf{t}_{52} + j(G_4p_{42} + G_5p_{52})$$

Or l'espérance de gain de la trajectoire partant de la jonction 1 ne correspond pas à celle obtenue sur le seul vecteur \mathbf{V}_2 du dernier segment. On voudrait pouvoir à la fois raisonner sur le vecteur local (principe du sous-jeu) et analyser la trajectoire complète. Cette trajectoire - toutes les trajectoires - peuvent être déduites du propagateur et du vecteur d'information (que l'on pourra appeler aussi vecteur d'état) I . Ces derniers interviennent de toute façon dans les calculs des p_{mk} (équation 10.12).

Notons (2 : 1) le vecteur qui relie la jonction 1 à la jonction 2 (une partie de chemin donc). Dans un arbre tel que celui de la figure "menace vaine" où B=2, A=3, b=5, a=4 en numéros de jonctions, le vecteur (4, 5 : 2) a été donné, c'est le vecteur \mathbf{V}_2 (on redonne la figure "menace vaine" numérotée figure "menace vaine-2").

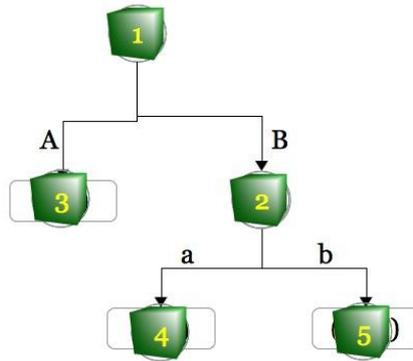


Figure "menace vaine-2".

On a aussi le vecteur de la jonction 1 à la jonction 3 : (3 : 1) = $p_{31}\mathbf{t}_{31} + jG_3p_{31}$. On peut aussi d'ailleurs définir ce vecteur dans un espace de directions complexes avec : (3 : 1) = $p_{31}(\mathbf{t}_{31} + jG_3)$. Le vecteur résultant des deux vecteurs est donné par :

$$(4, 5 : 1) = (4, 5 : 2) \cdot (2 : 1) = (p_{42}\mathbf{t}_{42} + p_{52}\mathbf{t}_{52}) p_{21}\mathbf{t}_{21} + j([G_4p_{42} + G_5p_{52}] G_2p_{21}) \quad (11.4)$$

On voit que l'on retrouve le vecteur attendu si $G_2 = 1$ ou autrement dit $y > x \Rightarrow G_x G_y = G_y, \forall x, y$.

On va généraliser ce résultat et écrire que pour un chemin, succession de N étapes, on a pour la composante suivant l'axe d'espérance de gain :

$$\prod_{n=1}^N G_n = G_N \quad (11.5)$$

L'histoire est tout entière contenue dans les objets du propagateur. Dans la composante t de γ , les successions de transformations de la forme $t_{(ij)}t_{(jk)}t_{(kl)} \dots$ sont des chemins dès lors que tous les $t_{(ab)}$ sont non nuls et se suivent sur leurs indices.

Un chemin est un ensemble de jonctions successives $\{1, 2, \dots, 7, \dots, N\}$ de gain G_N et de coordonnées dans $\mathbf{t}_{21}, \mathbf{t}_{32}, \dots, \mathbf{t}_{NN-1}$ données par la projection $p_{21}\mathbf{t}_{21} + p_{32}\mathbf{t}_{32} + \dots + p_{NN-1}\mathbf{t}_{NN-1}$. Un chemin est une succession de jonctions dans les événements croissants. La composante d'espérance de gain s'obtient par :

$$\sum_i P_i G_i$$

où G_i est le dernier gain à la dernière jonction d'un chemin et

$$P_i = \prod p_{kl}, \forall k, l \in \{ \}_i$$

$\{ \}_i$ étant l'ensemble des jonctions sur le chemin i . L'histoire du chemin est constituée des tenfolds $\check{u}_k, k \in \{ \}_i$ - ce sont les "états" k du chemin i (pour un gain pondéré on calcule $P_i G_i$).

Définitions

Un chemin - ou trajectoire - que l'on note : $\{ \}_i = \mathcal{C}_i$ est un ensemble de vecteurs entre des jonctions formant une continuité à laquelle on peut associer une succession de transformations et une espérance de gain.

Une stratégie σ est une succession de transformations appartenant à une trajectoire \mathcal{C}_i . Ces transformations conduisent aux tenfolds de I dont la trajectoire est un sous-ensemble et sont conditionnées par les observables $\theta_k(\check{u}_k), \check{u}_k \in \mathcal{C}_i$.

Règle

Soit \mathcal{C}_i une trajectoire passant par les jonctions k, l, m, \dots, N . On calcule ses coordonnées par l'opération de combinaison de ses vecteurs entre jonctions dans l'espace CG complexe :

$$(N : \dots) \cdot (\dots : l) \cdot (l : k) = \prod_k^N [p_{kk-1} (\mathbf{t}_{kk-1} + jG_k)] = \prod_k^N p_{kk-1} \mathbf{t}_{kk-1} + jG_N \prod_k^N p_{kk-1} \quad (11.6)$$

Il nous reste à savoir déterminer les trajectoires ou chemin pour une croissance donnée. Or si l'information totale est contenue dans γ , la reconstruction des chemins qui permettra de déterminer la surface de comportements ou surface de Nash et bords n'est pas triviale à obtenir à partir du propagateur, du vecteur d'information ou de la matrice de croissance. Nous allons voir qu'il y a un moyen beaucoup plus direct d'y parvenir, moyen qui sera en plus facilement programmable. Car notre objectif est bien en final de calculer des situations complexes !

11.3 Incidence de l'AE

La seule matrice de croissance ne donne pas la structure de l'AE puisqu'elle donne simplement le nombre de jonctions ajoutées sans préciser leurs connexions. La construction du propagateur suppose implicite la topologie de l'AE pour renseigner les termes connectés. La description de cette topologie est contenue - nous l'avons vu dans l'analyse tensorielle des réseaux - dans la matrice d'incidence. Il en est de même pour l'AE avec cette différence que la matrice devient dynamique. A chaque nouvelle croissance, autant de lignes que de liens s'ajoutent à cette matrice et autant de colonnes que de jonctions. La matrice donnant les connexions entre liens et jonctions, décrit complètement la topologie de l'AE, avec toujours cette convention qu'un lien sortant d'une jonction est affecté d'un signe (-) et un lien entrant d'un signe (+). La construction effective des chemins à partir de la matrice d'incidence B est triviale. On scrute la matrice en partant de sa première valeur B_{11} , on descend dans la colonne affectée de la valeur (-1) indiquant que l'on quitte une jonction. Dès que l'on rencontre cette valeur, on scrute la ligne correspondante pour voir à quel numéro de jonction on arrive en trouvant dans sa colonne une valeur (+1). On redescend alors dans la même colonne pour rechercher de nouveau un (-1), etc. On peut par cet algorithme retrouver tous les chemins possibles de l'AE.

Règle

Le processus de croissance et l'évolution de structure de l'AE sont assurés par les deux définitions des matrices de croissance C_δ et d'incidence B .

Comme le montre la figure "croissance et incidence" ces deux matrices n'interviennent pas au même moment. La matrice d'incidence n'a d'ailleurs pas de sens pour une jonction seule.

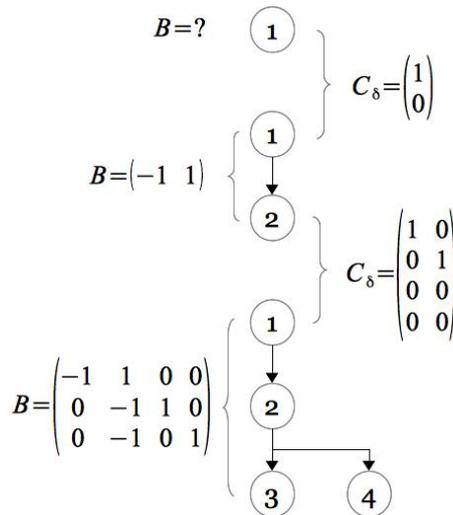


Figure “croissance et incidence”.

11.4 Horizon

Lorsque l'on regarde l'AE, on peut s'arrêter sur les jonctions terminales à un événement \acute{e} . Ces jonctions ont pour numéros les derniers numéros des chemins C_i . Si on considère tous les chemins présents à un événement \acute{e} , les terminaisons de ces chemins constituent un horizon, frontière entre le passé et le futur.

Définition

Soit L_i le numéro de la dernière jonction pointée par un chemin $C_i \rightarrow \{\dots, L_i\}_i$. L'ensemble de ces éléments à un événement \acute{e} constitue un **horizon**.

11.5 Algorithme d'évolution

Les mécanismes vus précédemment permettent de fournir maintenant un algorithme de construction de l'AE. La figure “algorithme d'évolution” en donne le processus. Les données d'entrées sont le vecteur d'information initial (et donc le tenfold associé) I , l'objectif de gain et la loi qui relie observable et gain : $OG, \varrho(\mathcal{O})$.

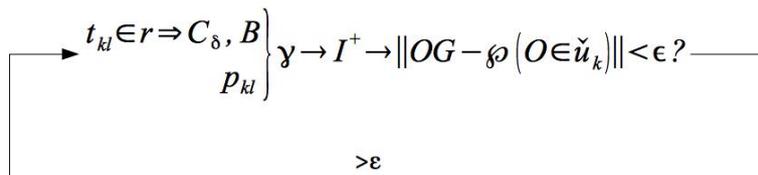


Figure “algorithme d'évolution”.

I^+ est le vecteur d'information à l'étape suivante. ϵ est un écart à l'objectif que se fixe un acteur et r un ensemble de transformations disponibles. Quand la distance à l'objectif de gain devient inférieure à cet écart il estime avoir atteint son objectif.

11.6 Conclusion du chapitre 11

On dispose a priori à ce niveau de toute la mécanique pour traduire mathématiquement la croissance de l'AE et pouvoir ainsi faire correspondre aux notions du processus de Markov des objets précis qui influencent l'AE et les comportements de ses acteurs. En se basant sur les travaux effectués en économie[MT] ou en mécanique[JC] nous allons essayer de trouver des critères d'optima pour bien définir nos surfaces de comportements dans l'espace CG ou CG complexe.

11.7 Références du chapitre 11

- [MT] E.Maskin, J.Tirole, “Markov perfect equilibrium”. *Journal of Economic Theory*, 100, (191-219) 2001.
- [JC] J.Chiquet, “Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures”. Thèse soutenue à l’université de Compiègne - laboratoire de mathématiques appliquées, 2007.

Chapitre 12

Principe MPE dans l'espace CG : bords et optima

12.1 Introduction au chapitre 12

L'ensemble des chemins ou trajectoires suivis par un acteur (un acteur est ici au sens large ce qui décide des choix de transformations opérées) dans l'espace CG constitue des surfaces. On a vu que les bords sont souvent représentatifs de comportements¹ limites, asymptotiques. Sur toute la surface des trajectoires possibles, une est optimum au moins localement, sur une portion de trajectoires.

La construction dynamique de ces trajectoires est modélisable par des processus de Markov d'ordres divers.

L'équilibre de Nash, existant en sous-jeu en supprimant les "menaces vaines" c'est à dire les solutions qui ne sont pas efficientes du point de vue du gain que peut espérer un acteur, est un objectif optimum de trajectoire.

On désire pouvoir définir les propriétés de la trajectoire optimum qui conduirait à un équilibre de Nash dans le processus de Markov de l'AE.

Pour tenter de trouver une relation sur cette trajectoire on va construire petit à petit des pistes qui permettent de poser des résultats intermédiaires robustes. Dans le cas général d'évolution, la difficulté ici est d'appréhender l'immensité des possibles dans les trajectoires et de laisser un champ libre pour la systémique et la complexité qui tendent on l'a vu, à contredire les raisonnements très cartésiens classiquement employés. Plus particulièrement, on sera prudent dans l'usage de l'hypothèse de "sous-jeu" ou de faible influence du passé sur un résultat du futur.

12.2 Futur vu d'un état

A un moment donné k de l'évolution, un acteur i se trouve en regard d'un tenfold \tilde{u}_k . Ayant suivi un parcours concret C_i , il connaît une partie de l'histoire - s'il a bonne mémoire il se souvient de l'histoire de son chemin - et a une certaine information sur les autres trajectoires. En fonction de ces données, il va effectuer un choix pour une certaine transformation.

De quelle information dispose-t-il ? Des interactions directes entre les tenfolds traduisent les échanges d'information. Toute l'information des états passés est disponible dans I . Dans le futur s'offre à lui un certain nombre de transformations possibles, r , $r \in \mathcal{T}$. Soit $D(r)$ la dimension du sous-ensemble de groupes r on peut déjà poser que la croissance va être, pour ce chemin, de $D(r)$ jonctions. De même la nouvelle forme de l'incidence est prévisible. Connaissant $r(k+1)$ on connaît aussi $C_\delta(k+1)$ et $B(k+1)$.

Essayons de formaliser sa connaissance : il y a d'une part tout ou partie de I que nous noterons $I_i(k, k-1, \dots)$. Il y a des informations extérieures sous formes de sources présentes $E_i(k)$ et d'interactions $\mu_{i,-i}(k)$ à l'instant présent. Les sources et interactions passées ont influencé les résultats du passé, mais l'on ne peut pas a priori dialoguer avec le passé, pas plus qu'avec le futur (on rappelle que l'indice $-i$ pointe tous les autres acteurs). Cette matrice d'interaction est dans l'espace des réseaux et comprend toutes les interactions présentes entre les réseaux - donc les tenfolds - sous formes de couplages, renvois d'informations, rayonnements, etc. L'acteur à l'instant \acute{e} couvre tout ou partie de l'information de l'horizon. Il peut aussi en recevoir une partie déformée. Dans l'idée que l'on ne peut pas strictement revivre les interactions du passés mais que l'on ne peut qu'avoir souvenir de leurs résultats ou de leurs mémorisations, si $D(L_k)$ est la dimension de l'horizon, les échanges $\mu_{i,i-1}$ sont dans une matrice de dimension $D(L_k) \times D(L_k)$. Si une partie seulement de cette information est accessible,

1. un comportement est une fonction de stratégies qui allouent une distribution de probabilités aux transformations opérées sur les tenfolds

cela signifie que certaines composantes de μ sont nulles. Enfin les observables $\mathcal{O}_k \in \check{u}_k$ déterminent avec la connaissance les probabilités du choix à $k + 1$.

12.2.1 Projection d'ordre n avec connaissance complète et acteur rationnel

Si l'acteur a connaissance du vecteur complet I et de toutes les observables associés et s'il connaît par ailleurs le domaine r complet et a accès à toute l'information de l'horizon, on peut déterminer les probabilités de choix des transformations possibles à l'étape $k + 1$ sous une forme :

$$p_{k+1,k}(i) = P_i(t_{k+1,k} \in r, \forall k | \mathcal{O}_k \in \check{u}_k, I, \mu_{i,-i}) \quad (12.1)$$

L'acteur ici se projette d'une étape $\acute{e} \rightarrow 2\acute{e}$ en anticipant les performances \mathcal{O}_{k+1} qu'il espère suite à une transformation $t_{k+1,k}$ appliquée au tenfold \check{u}_k et en associant à cette espérance une probabilité de chance de réussite. Cette chance peut être calculée par une loi, ou par des critères plus subjectifs. Si l'on reste au plus possible formel, on peut essayer de raccrocher la probabilité à une distance à un objectif. Cet affichage permet en plus de mieux préciser l'apport des observables : ce ne sont pas tant leurs valeurs en absolu que le gain qu'elles apportent. On peut chiffrer la distance d à un objectif de gain OG suivant une loi de gain \mathcal{G} appliquée aux observables \mathcal{O}_k par :

$$d = |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_k)| \quad (12.2)$$

On peut alors reformuler la probabilité d'une transformation :

$$p_{k+1,k}(i) = P_i(t_{k+1,k} \in r, \forall k | |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_k \in \check{u}_k)|, I, \mu_{i,-i}) \quad (12.3)$$

On procède ici à une projection d'ordre 1 dans le futur, c'est à dire que l'on anticipe un choix à l'étape $k + 1$ et non vers les étapes $k + 2, k + 3, \dots$ qui seraient des projections d'ordre 2, 3, etc.

Définition

On appelle projection d'ordre n un calcul du gain espéré n étape(s) plus tard que la date à laquelle on effectue le calcul.

La probabilité découlant d'une loi sur les observables et la distance à une performance, l'acteur est rationnel au sens que tout choix volontairement "destructeur" c'est à dire qui ne cherche pas à réduire la distance à l'objectif de gain sur n étapes est exclu du calcul. Mais du fait de la propriété 11.6 des vecteurs dans l'espace CG complexe, seul le dernier gain donne le gain effectif. On peut alors démontrer l'intérêt d'une trajectoire qui passe par un gain faible pour atteindre un gain plus élevé à une étape supérieure. Ces trajectoires sont forcément des projections d'ordre supérieur à 1. Elle ont pour probabilité possible :

$$p_{k+1,k}(i) = P_i(t_{k+1,k} \in r, \forall k | |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_k \in \check{u}_k)|, |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+1} \in \check{u}_{k+1})|, I, \mu_{i,-i})$$

Les observables à l'étape $k + 1$ s'obtenant par l'application d'une transformation $t_{k+2,k+1}$ à \check{u}_{k+1} . Par contre pas plus I que les échanges μ ne sont prédictibles à ce moment là car si l'on peut essayer de prédire les résultats sur une trajectoire il est en général impossible de prédire ceux des autres acteurs. On va faire des hypothèses sur ces autres gains ou intentions. En notant d'un tilde les grandeurs estimées mais non déterminées, on enrichit notre précédente expression par :

$$p_{k+1,k}(i) = P_i(t_{k+1,k} \in r, \forall k | |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_k \in \check{u}_k)|, |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+1} \in \check{u}_{k+1})|, I_k, \tilde{I}_{k+1}, \mu_{k;i,-i}, \tilde{\mu}_{k+1;i,-i})$$

En simplifiant les écritures et en généralisant aux n étapes futures possibles on exprime pour l'acteur i la probabilité de choix de la transformation $t_{k+1,k}$:

$$p_{k+1,k}(i) = P_i(t_{k+1,k} \in r, \forall k | \forall n > 0, |OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+n} \in \check{u}_{k+n})|, I_{k+n}, \tilde{I}_{k+n+1}, \mu_{k+n}, \tilde{\mu}_{k+n+1}) \quad (12.4)$$

Ayant formulé la probabilité on peut, avec l'équation 11.6 et pour chaque acteur calculer le vecteur de trajectoire de proche en proche. Mais peut-on trouver une trajectoire optimum ? Ou autrement dit, une stratégie optimum ? Nous allons essayer de trouver quelques cas démontrables en restant dans le même contexte pour des choix technologiques appliqués aux métier de la compatibilité électromagnétique (CEM). Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les éléments de cette dernière équation.

Terme	Signification
$t_{k+1,k}$	Transformation entre les étapes k et k+1
r	ensemble des transformations possibles
k	étape
OG	Objectif de gain
$\mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+n})$	Loi appliquée aux observables pour calculer le gain
\check{u}_{k+n}	Tenfold évoluant
\tilde{I}_{k+n}	Vecteur d'information à l'étape k+n
\tilde{I}_{k+n+1}	Un vecteur d'information possible parmi tous les possibles à l'étape k+n+1
μ_{k+n}	Interactions du joueur avec l'environnement à l'étape k+n
$\tilde{\mu}_{k+n+1}$	Une interaction parmi toutes les possibles à l'étape k+n+1

12.2.1.1 Projection du premier ordre déterminée par l'évolution sur le dernier tenfold

On imagine un produit pour lequel doit être développé un filtre CEM de façon à réduire le bruit engendré par ce produit à certaines fréquences. Le filtre ne modifie pas le fonctionnel du produit.

L'information I_l de l'acteur l est réduite au dernier terme du chemin à une étape donnée et pour tous les concurrents élaborant un filtre similaire, l'horizon est seul nécessaire pour déterminer les choix sur le filtre. Cet horizon $h \left\{ \tilde{I}_k \right\}$ contient tous les nouveaux tenfolds à l'étape k propre à chaque acteur l pour tous les acteurs en concurrence. Ces tenfolds résultent d'une transformation telle que $\check{u}_k = t_{kl}\check{u}_l$. La spécification de niveau de bruit maximum est contenue dans μ_l et l'acceptation de performance dans $\tilde{\mu}_k$. La performance *per* est mesurée sur une raie spectrale du produit et cette raie est comparée à un gabarit $OG(\mu_l)$ à ne pas dépasser :

$$per = OG - \hat{F}(\theta_k(t) \in \check{u}_k)$$

L'opérateur \hat{F} est une série de Fourier du signal $\theta_k(t)$ extrait du tenfold \check{u}_k . Il est nécessaire de calculer cette série de Fourier, le gabarit de performance étant spécifié usuellement en CEM, dans le domaine des fréquences.

L'histoire du développement des N produits des M acteurs peut bien être partitionnée ici avec une partition $H^l \{I_l\}_{l,l+1,\dots}$ débutant à l'horizon de I à l'instant l . Cette partition serait identique pour tous les chemins de développement du produit puisqu'il s'agit d'une action démarrée une fois le produit fini. Il reste à vérifier si les stratégies des acteurs seraient identiques aussi quelle que soit l'histoire du développement du produit.

Pour cela il nous faut étudier les successions de transformations pour les chemins des différents joueurs, à tenfold initial différent et les gains associés pour respecter la contrainte cible.

Pour analyser ces hypothèses de filtres, il faut pouvoir séparer le filtre de toute la complexité du produit. Nous allons réaliser cette séparation en usant des propriétés de la Diakoptique. Cela va considérablement nous simplifier le tenfold initial qui devient primitif (au sens de Gabriel Kron[GK], c'est à dire une branche unique).

Pour les différentes conditions initiales et en imaginant une contrainte donnée, l'ensemble r des transformations possibles regroupe les structures de filtres disponibles qui répondent plus ou moins bien en performance, fiabilité et en coût à l'objectif pour chaque condition initiale. Le gain des acteurs est déterminé par l'histoire et le futur de la trajectoire du joueur.

Nous allons alors essayer de montrer qu'il existe un groupe de transformations et probabilités associées qui sera commun quelle que soit finalement la condition initiale. Nous aurons alors montré qu'une stratégie qui suit ce principe est un équilibre parfait markovien.

12.2.1.1.1 Partitionnement de l'histoire. La métrique des derniers réseaux avant ajout du filtre est z_{ab} . Dans cette métrique un élément particulier $z_{(q)(s)}$ est un port de sortie sur lequel on prélève le bruit. Aux bornes de ce port on vient connecter un filtre. Mais ce port est toujours décomposable en deux impédances $z_{(q)(s),1} + z_{(q)(s),2}$. En branchant le filtre on réalise une structure en T dont on a vu qu'elle était représentable par Diakoptique sous la forme d'un couplage de valeur $z_{(q)(s),2}$. On peut donc réduire le réseau fonctionnel à une fém de valeur : $-z_{(q)(s),2}J^{(s)}$, J étant le flux de sortie et d'impédance $z_{(q)(s),2}$. Ce circuit élémentaire est un réseau primitif auquel on accroche le filtre. On montre donc par cette séparation que le passé du développement du produit peut être remplacé par ce réseau primitif à l'étape l et que ce partitionnement vaut pour toutes les histoires possibles concernant tous les produits finis. Le réseau primitif obtenu est le tenfold initial pour l'étude du filtre, $\check{u}_l = ([B = 1, S = 2], z_{q(s),2}, -z_{q(s),2}J^{(s)})$ qui généralise la relation précédente aux q acteurs.

12.2.1.1.2 Groupe(s) de transformations disponible(s). La sortie du filtre est une fonction de l'entrée. On peut écrire à l'étape k :

$$\theta_w^{(k)} = f(-z_{qs,2} J^s) = -\zeta_{wx} \hat{F}(y^{xq} z_{qs,2} J^s)$$

La fonction de filtrage ζ est la seule indéterminée. Elle va être choisie de façon à optimiser le coût et assurer avec une marge de conception raisonnable $\theta_w < OG(\mu_l)$, y étant l'admittance du réseau de filtrage (pour des problèmes de variances on doit passer par cette admittance puis revenir en impédance).

Le filtrage optimum d'un signal, sous des hypothèses de linéarité, est connu : il s'agit du filtrage de Wiener[FW] : r est de fait de dimension 1. Décomposons le flux source en flux utile J et de bruit n :

$$\theta_w = -\zeta_{wx} \hat{F}(y^{xq} z_{qs,2} [J^s + n^s])$$

Alors la fonction de filtrage optimum est donnée par :

$$\zeta_{wx} = \frac{\hat{F}(y^{xq} z_{qs,2} [J^s])}{\hat{F}(y^{xq} z_{qs,2} [J^s + n^s])}$$

Tout acteur rationnel choisira ce filtre. Le réseau correspondant ajouté crée le tenfold \tilde{u}_k et appartient au groupe \mathcal{F} des transformations de structures. La correspondance en circuit de la fonction ζ s'opérant par des techniques connues : division polynomiale, approximant de Padé, etc.

12.2.1.1.3 Espérance de gain des acteurs. On cherche de fait la probabilité :

$$p_{kl} = P_{l \rightarrow k}(t_{kl}(\zeta_{wx}) \in \mathcal{F} | per, \tilde{\mu}_k)$$

Si le filtre envisagé est unique, la question de la probabilité ne se pose pas. Mais un filtre optimum donc très performant est forcément plus coûteux qu'un filtre dégradé présentant par exemple une atténuation sans marge vis à vis du gabarit. Appelons β la fonction de transfert du filtre dégradé. On veut calculer :

$$P_i(t_{kl}(\zeta) | \tilde{\mu}_k) = \frac{P(\tilde{\mu}_k | t_{kl}(\zeta)) P(t_{kl}(\zeta))}{P(\tilde{\mu}_k | t_{kl}(\zeta)) P(t_{kl}(\zeta)) + P(\tilde{\mu}_k | t_{kl}(\beta)) P(t_{kl}(\beta))} \quad (12.5)$$

La relation de Bayes montre bien que finalement, la probabilité de choisir le filtre optimum pour obtenir l'acceptation est la probabilité d'acceptation suivant un design optimum sur cette probabilité additionnée d'une probabilité d'acceptation pour un design dégradé. Le futur de chaque acteur étant composé de deux choix : filtre optimum ou dégradé, on comprend que cette dernière probabilité est majeure puisque le design dégradé est moins cher à fabriquer.

12.2.1.1.4 Conclusion. Sous condition que la probabilité d'acceptation pour un design dégradé soit suffisamment faible, on vérifie bien :

$$t_{kl} = t_{kl}(\zeta) \in \mathcal{F}, \quad \forall \tilde{u}_l \quad (12.6)$$

Le fait que tous les acteurs arrivent par des chemins divers à un produit complet à l'étape l à laquelle il ajoute le filtre leur donne à tous une partition commune et suffisante démarrant à cette étape. L'AE réduit à cette partition présente alors pour tous les acteurs une trajectoire similaire définie par t_{kl}, p_{kl} unifiant ainsi de même la stratégie pour tout acteur. Cette stratégie constitue donc une stratégie d'équilibre de Nash parfait en processus de Markov d'ordre 1. L'élément de trajectoire dans l'espace CG complexe sera de coordonnée p_{kl} très proche d'une direction unique : axe complexe $t_{kl} + jOG$, mais à condition que $\tilde{\mu}_k \approx 1 \rightarrow \tilde{\mu}_k = \mu_k$, condition fondamentale pour cette conclusion.

On sent bien que le "MPE" est ici fragile car conditionné par la relation précédente. On peut penser qu'un relecteur peu compétent aura une probabilité d'acceptation plus proche de 0,5. Dans ce cas l'équilibre est perdu entre autre parce que finalement, ce qui pousse les concepteurs à choisir la solution optimum est avant tout la menace tacite de se voir refuser le design s'il ne répond pas aux exigences de mutisme. Or un décideur peu compétent peut accepter un design moins performant avec une chance de un demi. La menace n'est plus crédible (ou, autrement tourné, la chance d'acceptation illogique est non négligeable) et l'on ne peut pas négliger cette menace peu crédible dans le calcul de la probabilité a posteriori.

Quels pourraient être les bords de comportements ? Le bord extrême est l'absence de filtre. C'est le groupe identité. Le gain pour ce choix, sous hypothèse de relecteur rationnel serait nul. L'autre bord est le choix incondtionnel d'un filtre de Wiener parfait. Si l'on définit un gain opérationnel prenant en compte le coût effectif du filtre, les deux bords seront de faible amplitude en gain, voire le bord avec filtre de Wiener parfait aura un gain négatif. Le MPE apparaît alors comme la ligne de crête de la surface où se trouve le meilleur compromis. Mais les variations de cette surface de comportement sont directement liée à la variation de $\tilde{\mu}_k$ qui va atténuer même éventuellement l'intérêt du meilleur compromis pour favoriser une direction plus dégradée : c'est dans ces conditions qu'apparaît au plus fort la notion de jeux, ici commercial.

L'impact négatif sur la qualité de conception a été étudié en CEM dans le cadre de la relation client-fournisseur et a conduit aux mêmes conclusions, dans ce cadre plus restrictif et plus détaillé dans son application[MR].

12.3 Processus de Markov d'ordres élevés

Les processus d'ordre supérieur à 1 mais qui conduisent à des comportements similaires à celui étudié précédemment ne s'en différencient pas foncièrement. On peut par contre se poser la question de processus où par non linéarité, par présence de contraintes ou de conditions initiales particulières, des événements anciens vont influencer sur des décisions récentes. Soit que la partition ne peut être réduite en-deçà de l'AE complet. Mais en excluant la possibilité d'une partition suffisante, il n'en est pour autant pas impossible de trouver un équilibre dont la perfection sera peut-être discutable ; qui pourra dépendre de conditions initiales, de petits ou grands modes (notions que nous allons détailler) mais qui apparaisse comme un attracteur sous ces hypothèses et donne une trajectoire privilégiée dans l'espace CG complexe.

12.3.1 Petits et grands modes

Dans l'AE on élabore le propagateur à partir des matrices p et t et des observables $\mathcal{O}_k \in \check{u}_k$ pour des stimuli externes $E \in \check{u}_k$ et des espérances de gains partielles $\mathcal{G}(\mathcal{O}_k) \prod_{n=0}^k p_n \in \mathcal{C}_i$. Deux chemins qui présenteraient les mêmes successions d'observables et choix ne seraient pas discernables au niveau de l'AE même si les tenfolds sont différents dans le détail. Car deux tenfolds différents peuvent conduire aux mêmes comportements sur leurs frontières. On nomme petits modes les interactions internes aux tenfolds dont l'observation depuis l'extérieur n'est pas possible. On appelle grands modes au contraire les interactions visibles des tenfolds depuis l'AE.

Dans un système non linéaire il peut arriver des bifurcations provenant des petits modes qui dévient violemment les trajectoires de celles attendues pour un comportement linéaire. Dans l'exemple précédent nous n'avons pas détaillé plus que cela l'aspect "jeu" de la concurrence pour nous concentrer sur la méthode de détermination d'un équilibre. Maintenant la solution idéale de Wiener a une réalité implémentée qui peut présenter des défauts et s'éloigner de cet idéal théorique. La structure du tenfold produit peut être telle que l'adjonction d'une certaine structure de filtre renforce le bruit au lieu, comme attendu, de l'atténuer. A ce moment là le gain attendu sera totalement perdu et la trajectoire va violemment s'écrouler dans sa composante en espérance de gain. Cette bifurcation violente vient d'une mauvaise maîtrise des petits modes qui engendrent un comportement abrupte des grands modes. C'est suivant ce schéma que l'on va essayer de cerner les conditions d'équilibre dans ce contexte non linéaire.

12.3.2 Conditions initiales sur les grands et petits modes, échelles

Les conditions initiales sur les grands modes sont connues, même si on les pondère de probabilités de réalisation. Par contre, les conditions initiales sur les petits modes sont des distributions de probabilités, des incertitudes autour de valeurs moyennes - ce sont des variables aléatoires. Par exemple les entrées sorties d'un produit sont connues alors que les tensions, courants, températures des composants internes ne sont connus qu'à une incertitude près, voire inconnus de façon déterministe. Bien sûr on peut objecter que les entrées sorties des grands modes comportent aussi des fenêtres d'incertitudes ; mais ces incertitudes rentrent dans des intervalles qui doivent être maîtrisés et sont en tout cas visibles. Au contraire les petits modes dont on a dit qu'ils n'étaient pas accessibles de l'extérieur ont des intervalles d'incertitudes inconnus à l'échelle d'observation des grands modes. La précision de la connaissance vient de l'échelle d'observation. On regroupe ici les concepts de fractales, relativité d'échelle, effondrement de fonction d'onde, etc. Tous ces processus ont en commun un mécanisme d'intégration lorsque l'on passe à l'échelle supérieure. Cette intégration peut être analytique, par connectivité ou autrement dit et de façon générale, elle résulte de l'application d'un cobord en topologie. A l'échelle du point,

le point est discernable. Lorsque l'on cherche le cobord donc l'arête, on perd le point individuel pour ne voir que les bords de l'arête ou l'arête elle-même. On perçoit bien ici les notions de grands et petits modes qui peuvent s'échelonner sur plusieurs échelles. De fait on perd forcément la connaissance maîtrisée des conditions initiales lorsque l'on monte dans les échelles, par intégration.

Règle

Le passage d'un espace à l'espace hiérarchiquement supérieur en opérateurs de bords implique la perte de la connaissance de détails sur les objets de l'espace de départ (il peut arriver que l'on puisse déduire les propriétés internes des observations aux limites, mais ce n'est pas généralisable et la quantité d'information à acquérir comparativement à celle contenue dans le domaine étudié est toujours beaucoup plus importante que celle qui résulte d'une opération d'intégration sur le même domaine).

Dans notre mise en forme de l'équation d'un système non linéaire nous sommes parvenus à une expression assez simple impliquant une métrique définie sur des domaines π avec un vecteur de lois sur les flux et les paramètres dans un espace de configuration choisi f . Ces flux et paramètres sont donc maintenant des variables aléatoires $\tilde{k}^\mu, \tilde{p}^\mu$: ils décrivent non plus des trajectoires filiformes dans l'espace des paramètres mais des serpents plus ou moins ventrus. De plus, ils peuvent être décrits dans un format de type hypercomplexe, ce qui revient à avoir pour cette configuration la plus complexe que l'on imagine plusieurs de ces espaces en parallèle et couplés entre eux. La figure "espace de configuration non linéaire" illustre l'équation obtenue qui se résume de façon très symbolique dans l'espace des tenfolds à :

$$\pi \tilde{f} = 0 \tag{12.7}$$

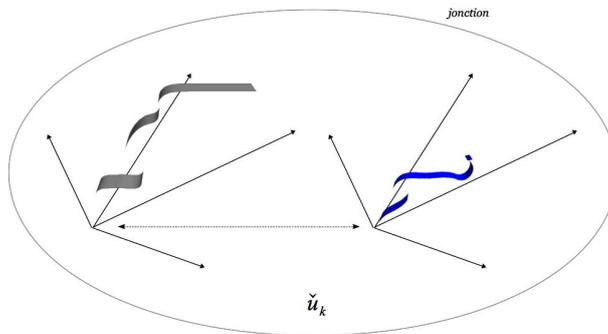


Figure "espace de configuration non linéaire".

Sous cette forme et pour un format donné un tenfold s'écrit $\check{u}_k = (T, \pi, \tilde{E})$.

Un système ainsi décrit dans l'AE "fuit" au sens thermodynamique du terme puisqu'il échange avec l'extérieur par l'intermédiaire de ses petits modes (cordes entre tenfolds encapsulés dans les jonctions). On peut parler du métabolisme du système ainsi modélisé[MC].

Définition

On appelle **métabolisme** du système dont on étudie l'évolution dans l'AE l'ensemble des interactions de cordes entre tenfolds encapsulés dans les jonctions.

Cette notion de fuite est fondamentale pour les systèmes complexes, elle sous-tend l'idée que tout système physique est un système ouvert et avec pertes.

12.3.3 Formulation mathématique du problème

Comme on ne peut pas connaître tous les petits modes pour décider des probabilités de choix des trajectoires dans l'AE, on doit admettre l'idée que ces probabilités doivent être décidées sur les seules connaissances des grands modes, c'est à dire des observables \mathcal{O}_k disponibles à cette échelle. Mais on garde des propriétés d'invariance, à savoir la puissance pour les tenfolds : $P = V_\nu k^\nu$ et le bilan d'information pour l'AE entre l'apport extérieur d'information I et de puissance associée P_I , la consommation à une étape $né$ et la restitution d'information et de puissance ϕ_I, P_ϕ . On doit maintenir un équilibre entre les flux de ces quantités. Pour cela nous devons disposer d'une loi reliant information et puissance. Dans l'AE, l'information est disponible au niveau des grands modes, c'est elle via les observables qui va orienter les choix, ces observables étant elles, influencées par les petits modes.

On peut se baser sur la relation de Shannon - Hartley qui donne le débit d'information maximum disponible. Au niveau d'une jonction le bilan de puissance s'écrit : $P_j = P_x - P - P_{rx}$ où P_x est la puissance fournie par

l'extérieur, P la puissance consommée par le tenfold de la jonction et P_{rx} la puissance restituée à l'extérieur. La puissance utile exploitée par la jonction P_u est celle qui donnera lieu à la construction d'une information. Mais une partie de cette puissance P_N est du bruit inutile à la construction de l'information. Ce bruit peut provenir de l'extérieur : il n'aura pas été restitué entièrement et une partie participe au fonctionnement du tenfold ; ou être engendré par le tenfold lui-même. Chaque tenfold a donc un rendement en information. Par exemple pour fabriquer une tasse, qui constitue une information utile, on consomme de l'énergie et plusieurs éléments qui seront rejetés et inutiles en final à l'information de la tasse elle-même. Cela, même si une partie de ce bruit est indispensable à la fabrication de la tasse. La seule information strictement utile au sens de la quantité d'information pour la tasse est celle contenue dans la tasse telle qu'elle existe finalement. Cette tasse peut être caractérisée par un certain spectre \hat{S} dans une base donnée qui recense ses éléments et agencement. L'information est le produit de ce spectre par le logarithme en base 2 d'une fonction croissante avec le rendement informatif :

$$I_{max} = \hat{S} \text{Log}_2 \left(1 + \frac{P_u}{P_N} \right) \quad (12.8)$$

Cette quantité d'information est extraite du vecteur d'information I qui contient tous les tenfolds au fur et à mesure que l'AE croît. Un système ou un ensemble de systèmes est donc caractérisé dans un AE par deux équations au niveau des petits et des grands modes :

$$\begin{cases} (\pi \tilde{f})_{\acute{e}} = 0 \\ I_{\acute{e}+1} = \gamma_{\acute{e}+1, \acute{e}} I_{\acute{e}} \end{cases} \quad (12.9)$$

Notre problème peut dans ce contexte se formuler ainsi : peut-on pour un horizon $h = I_{\acute{e}}^{k\dots k+n} = \{\check{u}_k, \dots, \check{u}_{k+n}\}$ donné à un instant \acute{e} du processus d'évolution identifier un domaine (un volume) fini \mathcal{V} partant des observables $\mathcal{O}(\check{u} \in f)$ avec : $f = \{\check{u}_{k+n+1}, \dots, \check{u}_{k+n+m}\}$ contenant les extrémités des trajectoires dans l'espace CG de tous les acteurs ayant eu la même histoire h ?

On peut déjà affirmer que l'on tendra vers ce volume commun - comme un attracteur - si la distance à l'objectif visé OG commun à tous les acteurs se réduit lorsque l'on se rapproche de ce volume dans l'espace CG, soit :

$$\|OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+m}) \prod_{n=0}^{k+m} p_n\| < \|OG - \mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+m-1}) \prod_{n=0}^{k+m-1} p_n\|, \forall m \quad (12.10)$$

Cette relation ne réduit pas l'immensité du problème, mais elle fournit une méthodologie.

Comme on ne pourra pas analyser tous les cas possibles dans des systèmes non linéaires il apparaît plus simple finalement de raisonner à l'envers : essayer de se doter de structure - de topologie - d'AE pour en déduire des zones d'attraction possibles ou voir si l'on peut "tâtonner" pour appréhender cette topologie et voir si l'on peut atteindre une telle zone.

Le fait de disposer d'une observable en quantité d'information peut permettre de trouver des critères plus pertinents dans les calculs des gains. La quantité d'information ou l'entropie sont des concepts qui peuvent être riches en ressources pour arriver à exprimer des gains pour des comportements naturels parfois très complexes, et pour lesquels ces notions sont parmi les rares disponibles si l'on ne veut (ou si l'on ne peut) pas recourir à des idées empruntées aux sciences "molles".

12.4 Découverte de l'AE : passage du chemin à la trajectoire de société

Les situations sont similaires à des randonnées en montagne. On peut ne pas connaître le chemin parfaitement mais avoir en tête une allure de la montagne, de son profil et savoir qu'il faut avancer suivant telles et telles directions au fur et à mesure de la randonnée pour arriver au but. On peut aussi ne rien connaître de cette montagne et juste savoir que quelque part, il y a le lieu que l'on cherche. Enfin il peut se trouver des randonnées où des situations apparaissent qui n'étaient pas prévues du tout et conduisent à des trajectoires catastrophiques. Les trajectoires peuvent être celles d'un acteur seul contre la nature ou dans un environnement donné, ou d'un groupe d'acteurs, il s'agit alors de trajectoires de sociétés. Sauf précisé, on s'intéresse ici aux sociétés. Qu'est-ce que cela signifie ? Lorsque l'on regarde l'équation 11.6 décrivant un chemin unique dans l'AE, on peut la traduire au niveau d'une société.

Partons d'un AE avec trois jonctions tel que présenté figure "AE d'ordre 3".

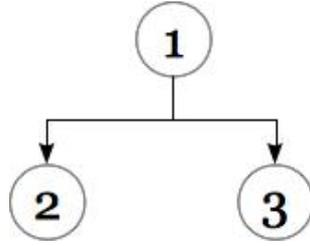


Figure "AE d'ordre 3".

On peut lui associer un chemin $p_{21}(\mathbf{t}_{21} + jG_2)$ et un second chemin $p_{31}(\mathbf{t}_{31} + jG_3)$. Comme on l'a vu précédemment on peut aussi associer un vecteur au groupe défini par : $\mathbf{V} = p_{21}\mathbf{t}_{21} + p_{31}\mathbf{t}_{31} + j(p_{21}G_2 + p_{31}G_3)$. Maintenant considérons l'arbre d'ordre 7 de la figure "AE d'ordre 7".

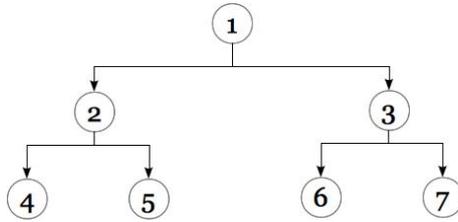


Figure "AE d'ordre 7".

On peut détailler les quatre chemins possibles ou de même construire le vecteur résultant pour la société. L'expression de ce vecteur va se développer comme la somme des expressions des quatre chemins. On trouve un vecteur qui s'oriente dans des directions qui sont des produits des directions de base de l'espace CG - sauf pour le gain suivant la règle 11.5. Ces produits sont des produits scalaires au sens où les axes de l'espace CG ne sont pas directement les transformations mais les groupes de transformations. On voit ici tout l'intérêt de se raccrocher aux groupes plutôt qu'aux transformations directement. Ainsi les produits $\mathbf{t}_{km}\mathbf{t}_{ml}\mathbf{t}_{ln} \dots$ dans l'expression du vecteur société \mathbf{V}_s se réduisent à des projections sur les axes de groupes de transformations $T = \{\mathcal{T}, \mathcal{F}, \hat{F}, \mathcal{P}, \mathcal{S}\}$. On peut alors écrire pour un groupe \mathbf{T}_x quelconque d'éléments \mathbf{Z}_x :

$$\forall \mathbf{t}_{nn-1} \in \mathbf{T}_x, n \in \mathcal{N}, \prod_{n=1}^N \mathbf{t}_{nn-1} = N\mathbf{Z}_x \tag{12.11}$$

Avec la règle :

$$\forall \mathbf{t}_x(\acute{e}) \in \mathbf{T}_x \in \mathcal{C}_i, \mathbf{t}_y(\acute{e} + 1) \in \mathbf{T}_y \in \mathcal{C}_i, x \neq y, p_x \mathbf{t}_x p_y \mathbf{t}_y = p_x \mathbf{Z}_x + p_y \mathbf{Z}_y \tag{12.12}$$

on peut passer d'une expression des chemins \mathcal{C}_i à une trajectoire de société S_i dans le référentiel CG qui a 6 dimensions principales : 5 groupes réels et 1 espérance de gain complexe. Mais en pratique on précisera pour chaque problème les sous-groupes pertinents nécessaires à son analyse. Par exemple dans le groupe des transformations géométriques \mathcal{T} on discernera les translations des rotations, etc. On généralise ici les idées exposées paragraphe 10.5.1 pour la trajectoire d'une société. Il nous reste à voir comment s'insère dans ce processus l'espérance de gain pour la société, et nous allons voir qu'en utilisant explicitement les chemins, la trajectoire de la société s'exprime facilement.

Précisons sur l'AE d'ordre 7 des groupes de transformations utilisés : figure "groupes pour l'AE d'ordre 7".

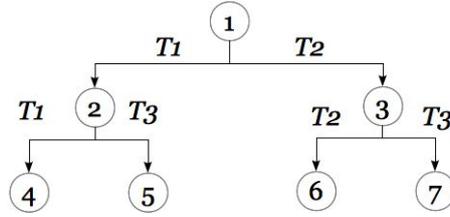


Figure "groupes pour l'AE d'ordre 7".

Suivant cet arbre, une projection dans l'espace CG donne à l'instant \acute{e} un point A dans cet espace tel que :

$$\mathbf{OA} = p_{21}\mathbf{T}_1 + p_{31}\mathbf{T}_2 + j(p_{21}G_2 + p_{31}G_3)\mathbf{EG} = \vec{C}_{21} + \vec{C}_{31}$$

Nous avons noté les chemins avec une flèche pour indiquer que nous "vectorisons" ces chemins dans l'espace CG des groupes. On affecte à ces chemins en indice la succession des numéros de jonctions qu'ils incluent.

Avec les règles de combinaisons des chemins :

$$\begin{cases} \vec{C}_{ab} + \vec{C}_{bc} = \vec{C}_{abc} \\ \vec{C}_{ab} + \vec{C}_{bc} + \vec{C}_{bd} = \vec{C}_{abc} + \vec{C}_{abd} \end{cases} \quad (12.13)$$

Avec les relations 11.6, 12.11 à 12.13 nous allons pouvoir analyser des trajectoires de sociétés. Les relations précédentes ne sont rien moins qu'une autre traduction de l'algorithme d'extraction des chemins à partir de la matrice d'incidence (paragraphe 11.3). Les espérances de gains des extrémités des chemins d'un horizon constituent le spectre de l'horizon.

Poussons le cas précédent à l'instant $2\acute{e}$. Le point A constituait un premier horizon. Nous cherchons le point B , horizon suivant.

On peut écrire directement :

$$\mathbf{OB} = \vec{C}_{421} + \vec{C}_{521} + \vec{C}_{631} + \vec{C}_{731}$$

Ou bien construire de proche en proche et écrire :

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \vec{C}_{21} + \vec{C}_{31} + \vec{C}_{42} + \vec{C}_{52} + \vec{C}_{63} + \vec{C}_{73} = \vec{C}_{421} + \vec{C}_{521} + \vec{C}_{631} + \vec{C}_{731}$$

De la relation 11.6 on tire l'équivalence en développé de ce vecteur :

$$\mathbf{OB} = p_{42}p_{21}(\mathbf{t}_{42}\mathbf{t}_{21} + jG_4\mathbf{EG}) + p_{51}p_{21}(\mathbf{t}_{52}\mathbf{t}_{21} + jG_5\mathbf{EG}) + p_{63}p_{31}(\mathbf{t}_{63}\mathbf{t}_{31} + jG_6\mathbf{EG}) + p_{73}p_{31}(\mathbf{t}_{73}\mathbf{t}_{31} + jG_7\mathbf{EG})$$

Enfin avec les relations 12.11 et 12.12 on trace le vecteur dans l'espace CG - *choix groupes* :

$$\mathbf{OB} = (2p_{21} + p_{42})\mathbf{T}_1 + (2p_{31} + p_{63})\mathbf{T}_2 + (p_{52} + p_{73})\mathbf{T}_3 + j\mathbf{EG}(p_{42}p_{21}G_4 + p_{51}p_{21}G_5 + p_{63}p_{31}G_6 + p_{73}p_{31}G_7)$$

Notons l'espérance de gain de la société sur un horizon $\bar{G}_{4567} = (p_{42}p_{21}G_4 + p_{51}p_{21}G_5 + p_{63}p_{31}G_6 + p_{73}p_{31}G_7)$ alors :

$$\mathbf{OB} = (2p_{21} + p_{42})\mathbf{T}_1 + (2p_{31} + p_{63})\mathbf{T}_2 + (p_{52} + p_{73})\mathbf{T}_3 + j\bar{G}_{4567}\mathbf{EG}$$

Ayant trouvé comment déduire une représentation géométrique de l'AE, on peut étudier les différentes formes envisageables et essayer de comprendre à quelles évolutions elles se rattachent.

Notons que la représentation choisie s'apparente à l'algèbre "max-plus, min-plus" ou algèbre des sandwiches utilisé en théorie des jeux, très utilisé pour la modélisation des chaînes de production[ADS].

12.5 Topologies de l'AE

Dans cette démarche on affecte a priori une forme aux surfaces de comportement tracées par les branches de l'AE dans une base de T , pour une loi \mathcal{G} et un tenfold d'origine \tilde{u}_0 donnés. Suivant ces formes on peut montrer quels sont les chemins possibles qui conduisent à l'objectif de gains pour les joueurs et de là en déduire les stratégies optima pour ces joueurs (acteurs). On a cité le cas de la randonnée en montagne mais il en va de même pour les courses en solitaire en voiliers. Chacun connaît le but mais les stratégies pour y parvenir sont diverses et certains de fait y parviendront en premier, sachant qu'une partie des facteurs influents sont aléatoires. Le jeu est donc toujours à information imparfaite. Suivant les formes des surfaces on peut chercher des techniques pour arrêter un processus d'évolution (lorsque cela est possible bien sûr) au moment où le gain est optimum.

12.5.1 Topologies en nappes

La figure "surface en nappe" présente le type de géométrie considérée dans une représentation tout à fait symbolique et qui n'a pour seule valeur que d'essayer d'illustrer les idées présentées. On a des nappes généralement plissées et froissées présentant des collines et des pics ou creux.

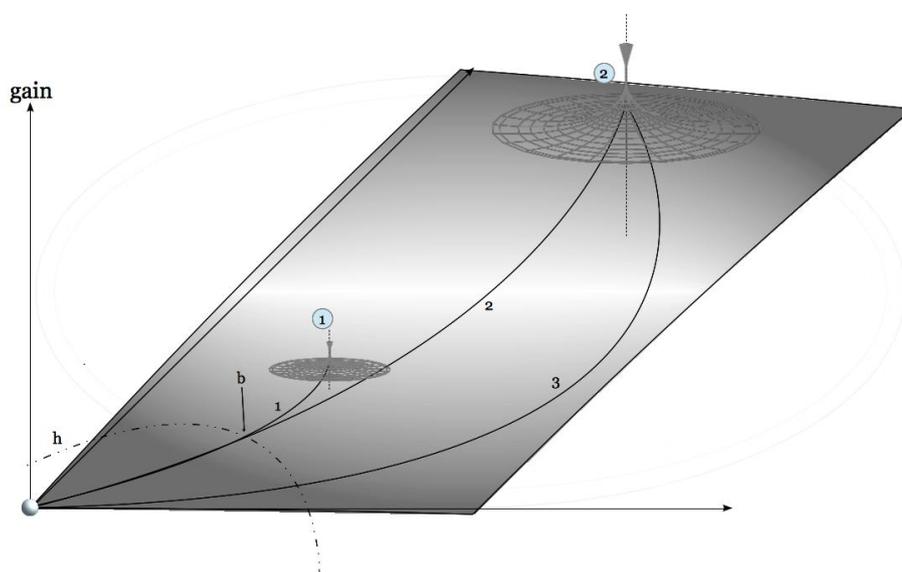


Figure "surface en nappe".

Si cette surface concerne une société dans un environnement, on voit que sur trois trajectoires particulières, deux conduisent à une espérance de gain maximum et une à une espérance de gain supérieure à la moyenne de la surface, mais inférieure à celle des deux autres trajectoires. Une trajectoire se scinde en deux et conduit soit à une espérance de gain moindre pour la société, soit pour un autre choix à la base de la bifurcation, à une espérance de gain supérieure pour la société. Enfin il existe une troisième trajectoire qui conduit à l'espérance de gain optimum par une succession de transformations plus longues. On peut déjà, simplement en observant ce profil en déduire plusieurs implications.

D'une part la figure suggère qu'il existe toute une série de trajectoires qui conduisent à des espérances de gains (EG) faibles, nulles ou négatives. Cela implique que le choix de prendre les directions des trois trajectoires particulières n'est pas évident au départ, et est noyé dans tout un ensemble de choix apparemment équivalents. Par contre à partir d'un certain horizon h les pentes d'espérances de gains de ces trois trajectoires commencent à se différencier de celles de toutes les autres trajectoires. Au départ toutes les combinaisons de probabilités existent mais aucune ne donne lieu immédiatement à une différenciation nette. On peut considérer donc qu'une partition des histoires démarrant à cet horizon est suffisante. La surface est décrite par toutes les combinaisons de probabilités de choisir les directions des groupes de transformations.

A partir du point de bifurcation b , une société qui prend la direction commune aux trajectoires 1 et 2 a le choix entre deux chemins. La trajectoire 1 conduisant à une forte espérance de gain, il faut qu'à un moment la probabilité de choisir cette direction soit significativement plus forte qu'une autre. Les probabilités se sommant

dans la géométrie, cet écart est peu visible sur les trajectoires complètes. Par contre elles interviennent en produit sur l'EG et donc là, le trajet 1 a une probabilité à un moment nettement plus grande que 2. Le trajet 2 par contre, après une succession de transformations apparemment longue, parvient à une espérance de gain très grande. Comme à la bifurcation un coefficient faible diminue d'autant cette espérance de gain, il faut que le gain en absolu soit vraiment beaucoup plus grand. Cela suppose aussi que les probabilités des chemins derrière la bifurcation pour les trajectoires de type 2 tendent à être stables et proches de 1 : d'une part parce que la trajectoire est longue et d'autre part pour garantir une très forte espérance de gain en final.

12.5.1.1 Exemple illustratif.

Pour comprendre comment peut se développer une surface en nappe nous allons considérer un exemple simple où nous ne développerons pas tout le mécanisme des gamma matrices mais les exprimerons implicitement au travers des transformations utilisées. On définit un espace en x,y dans lequel il y a un objet à atteindre de coordonnées connues. Le déplacement d'un petit robot est modélisé par deux mailles de flux k^1 et k^2 , correspondant respectivement aux déplacements suivant x et y. Le tenfold de départ est donc un ensemble de deux réseaux d'une maille de métrique et sources :

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On définit deux transformations (pour cet exemple simple on a qu'un seul groupe), une transformation "H" correspondant à un déplacement suivant y et une transformation "D" correspondant à un déplacement suivant x. Ces deux transformations ont pour matrices :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les deux observables sont donc les variables d'état que constituent les flux et le gain vaut 1 sur ce point.

On impose que 10 déplacements élémentaires maximum sont possibles sur une grille de 10x10 et qu'il est interdit de faire demi-tour. On démarre le jeu avec une seule société. Les probabilités d'utiliser une transformation ou une autre sont données par le nombre d'utilisation divisé par 10. Le robot démarre à l'origine de la grille en 0,0. La figure "grille de jeu" montre la situation pour un objectif placé en 5,3.

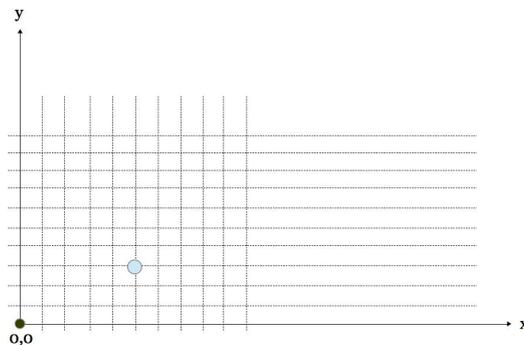


Figure "grille de jeu".

Les joueurs sachant où se trouve la cible identifient les chemins possibles. Tous ces chemins sont composés de 5 déplacements sur la droite et 3 vers le haut. Donc la métrique des réseaux est transformée suivant : $D^5 H^3 g$. Comme on fait un parallèle entre les variables d'état et la position de la cible on doit avoir :

$$(D^5 H^3 g)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^x \\ k^y \end{bmatrix}$$

Soit en remplaçant :

$$\begin{bmatrix} 0.03125 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{0.03125} & 0 \\ 0 & \frac{3}{0.125} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La première matrice étant le produit $D^5 H^3$.

Ayant déterminé la métrique, on sait que quel que soit le chemin sauf à être au bord des trajectoires possibles (on sait où est la cible, on ne se déplace donc pas partout au hasard), la probabilité au global d'aller vers la droite p_D est de 5 sur 8 et celle d'aller vers le haut p_H de 3 sur 8. La figure "arbre de la grille de jeu" montre l'arbre d'évolution de ce jeu où les branches vers la gauche sont celle des transformations "D" et celles vers la droite sont celles associées à "H".

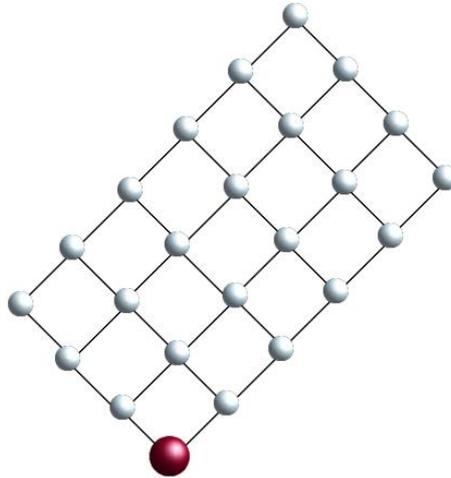


Figure "arbre de la grille de jeu".

Les hodographes des trajectoires de proche en proche passent par tous les points de cet arbre, mais dans l'espace des seules transformations, le vecteur résultant conduit de l'origine au point de coordonnées (p_C) . Chaque chemin \mathcal{C} se traduit par une liste des successions de transformations issue de γ^8 , par exemple (H, D, H, H, D, D, H, H) . On a donc $8 \times 7 \times 6$ possibilités (car trois positions à choisir pour D) et la probabilité d'un chemin en est l'inverse. L'espérance de gain est $8 \times 7 \times 6$ fois cette probabilité fois le gain, autrement dit, l'espérance de gain est égale au gain, ce que l'on attend puisque la cible est connue. A la vue de cet arbre, on peut donner les coordonnées du point d'avancement de la trajectoire de la société dans l'espace CG à chaque étape :

1. 1D,1H
2. 2D,2H
3. 3D,3H
4. 4D,3H
5. 4D,3H
6. 3D,3H
7. 2D,2H
8. 1D,1H

De cette succession on déduit la trajectoire de la société présentée figure "trajectoire vers la cible connue" (cette trajectoire est donc comme un hodographe, on l'obtient par la somme des vecteurs en étapes de coordonnées données précédemment de 1 à 8).

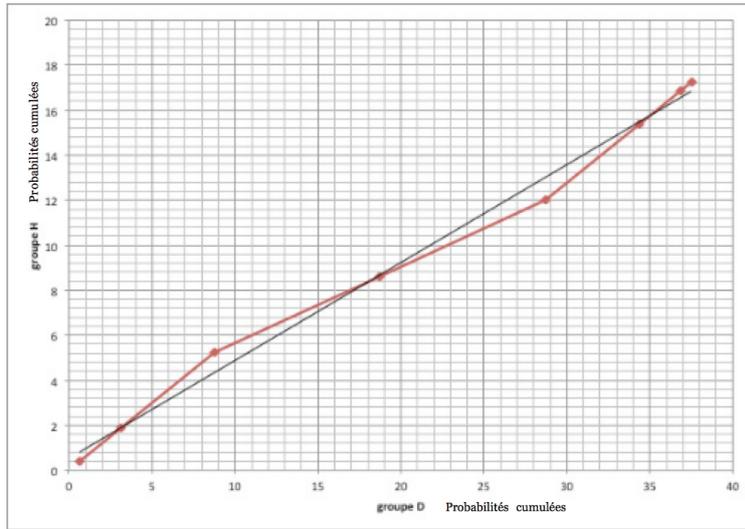


Figure "trajectoire vers la cible connue".

Ce résultat est riche d'information. Le fait que la trajectoire de la société se réduise à une courbe provient de la connaissance parfaite de l'objectif et des moyens d'y parvenir. Il n'y a donc aucune possibilité pour s'écarter de cette trajectoire suivant les règles et moyens du jeu. Les étapes dans la trajectoire sont les différents horizons qui sont les horizontales de l'arbre de la grille de jeu. Les distances sont faibles en début et fin de trajectoire, grande au milieu. Résultant de projection sur les axes de coordonnées qui sont des sommes de probabilités, cela signifie que la société a peu de choix en début et fin de jeu et plus de choix au milieu. Cela traduit l'élargissement des chemins possibles au centre de la grille. Enfin la trajectoire est presque droite : statistiquement les choix reportent également sur les deux groupes de transformations disponibles pour atteindre le but. On le confirme par une comparaison avec une regression d'ordre 1 en trait noir.

12.5.1.2 Avancées à l'aveugle dans l'espace CG

Dans cet exercice qui est une variante du précédent, la position de la cible est inconnue. Par contre, une indication est implicitement donnée au joueur dont la probabilité à chaque instant d'aller vers la droite (D) ou vers le haut (H) est inversement proportionnelle à la distance à la cible. Des coefficients relient ainsi simplement la probabilité de décision de direction à cet inverse. De proche en proche , en parcourant la grille de la figure "trajectoire vers la cible connue", le joueur se dirige vers la droite ou vers le haut avec une probabilité de la forme $P(D) = \alpha d^{-1}$, $P(H) = \beta d^{-1}$. Suivant les couples de valeurs α et β , on couvre toute une surface de trajectoires dont la figure "trajectoires en aveugle" montre 4 exemplaires.

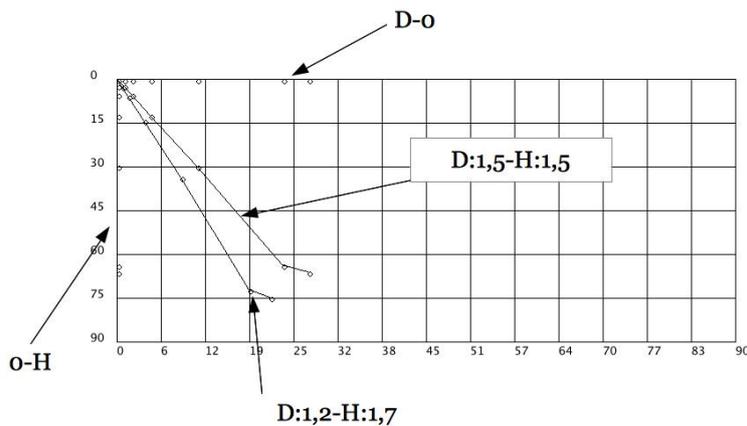


Figure "trajectoires en aveugle".

On trouve dans ce graphique deux trajectoires qui correspondent à des bords pour des comportements extrémistes. Ces deux trajectoires sont obtenues pour des joueurs qui suivent tout le temps un bord, c'est à dire dont l'un des deux coefficients α ou β est nul. Deux autres trajectoires sont données à titre d'exemples, mais toute la surface est balayée pour tous les couples possibles de coefficients dans les lois qui relient les décisions aux résultats intermédiaires à chaque horizon. Le gain sur ce graphe peut être une fonction de Dirac, c'est à dire que le gain est partout nul, sauf lorsque l'on touche la cible. Toutes les trajectoires ont une évolution commune : au départ des trajets, les choix sont restreints et géométriquement, les distances à la cible évoluent peu. On a donc des projections resserrées sur les axes de transformations D et H. Dans la région centrale, les probabilités s'espacent, les écarts de distances devenant plus grands et l'espace disponible aussi. Et lorsque l'on se rapproche de la cible et des 8 coups permis, les probabilités s'infléchissent pour des directions qui rapprochent de la cible, cela pour des comportements rationnels où les joueurs ne suivent pas une stratégie extrême.

Il est intéressant de noter que dans le contexte de ce jeu, les stratégies extrêmes peuvent mener à des gains extrêmes. Imaginons que le gain est une dépendance au nombre de coups : moins de coups sont joués, plus le gain est grand. Si la cible se trouvait sur un bord, les trajectoires de bords seraient de loin les plus gagnantes.

12.5.2 Topologies avec zones d'évitement

On imagine le jeu suivant : un ensemble d'acteurs disposent d'une source de revenus pour assurer des études en compatibilité électromagnétique (CEM) au sein d'un groupe. Mais il peuvent (ou doivent) cotiser à un pot commun pour un centre de compétence en CEM qui peut prendre en charge tout ou partie des études. Chaque acteur fait partie d'une "business unit" du groupe qui fabrique un produit particulier alors que le centre commun éventuel est transverse et n'a de compétence qu'en CEM. On veut analyser les comportements des acteurs en fonction de leurs caractères, de l'intérêt financier du groupe, et de leurs revenus.

Chaque acteur peut être modélisé par une maille unique dont l'alimentation représente le revenu régulier (par exemple annuel). Un couplage vers une maille commune à tous les acteurs concrétise la participation au pot commun. Les acteurs peuvent discuter entre eux, et ont donc des couplages entre eux. Ces couplages se basent sur des lois à établir en partie sur des sentiments et croyances.

Le contexte socio-industriel complexe induit différents sentiments antagonistes dont certains tendent à inciter l'acteur à participer au pot commun, d'autres l'incitent à ne pas participer.

Les couplages entre chaque acteur α et le pot commun sont dimensionnés par ces sentiments. De même des discussions entre les acteurs tendent à modifier les amplitudes de ces couplages. Comme le coefficient de couplage α est compris entre 0 et 1, il peut être associé directement à la probabilité de choix de versement au pot commun. De la stratégie de versement choisie découle la somme gardée etc., pour un budget initial donné, renouvelé ou pas. Pour appréhender tous les mécanismes de ce cas, nous allons le construire pas à pas. Notons que contrairement à l'usuel on n'exprime pas ici l'enchère par une somme mais via un produit par un coefficient. Le propos est ici avant tout de développer la notion de zone d'évitement et le produit donne une expression plus immédiate de la métrique. Si l'on désirait l'étudier plus profondément, il serait préférable de revenir à une expression par sommation.

12.5.2.1 Mécanisme de couplage

Nous voulons ici juste comprendre en détail la similitude entre une modélisation d'un système à deux corps couplés par rapport à la distribution de fonds que nous voulons modéliser. Soit un budget e_i pour l'acteur i . Il donne au pot commun une partie α de ce budget mais en retire aussi des dividendes : une proportion γ du pot commun. Soit un flux f^i pour des acteurs i donné par (on suppose le pot commun comme étant le N^{ieme} acteur) :

$$e_i = 1_{ii}f^i - \gamma_{iN}f^N$$

On exprime dans cette équation que le budget e_i de l'acteur i doit être égal au budget gardé par l'acteur plus la part de retour sur investissement dans le pot commun - on retrouve donc cette composante en négatif dans l'autre membre.

Le budget du pot commun est issu des versements des acteurs $\alpha_{Ni}f^i$ et alimente la recherche qui est retournée vers les mêmes acteurs.

Finalement le processus est représenté par deux équations :

$$\begin{cases} e_i = 1_{ii}f^i - \gamma_{iN}f^N \\ 0 = \alpha_{Ni}f^i - 1_{NN}f^N \end{cases}$$

Le coefficient γ peut être une proportion du versement. Auquel cas il reste à définir le coefficient α . Ce coefficient, compris entre 0 et 1 peut être vu comme une probabilité de versement (1_{ii} est une métrique unité).

Par exemple pour deux acteurs, ce système devient :

$$\begin{cases} e_1 = 1_{11}f^1 - \gamma_{13}f^3 \\ e_2 = 1_{22}f^2 - \gamma_{23}f^3 \\ 0 = \alpha_{31}f^1 + \alpha_{32}f^2 - 1_{33}f^3 \end{cases}$$

La métrique de ce système admet pour déterminant $\alpha_{32}\gamma_{23} + \alpha_{31}\gamma_{13} - 1$ qui est toujours non nul (du fait des propriétés des coefficients alpha et gamma).

12.5.2.2 Coefficient de couplage

Nous avons évoqué précédemment la forme que pourrait revêtir le coefficient de couplage. Il peut être réduit à un rapport r de sentiments favorables et défavorables au versement. Ce rapport dans la plupart des cas sera très proche de zéro. Entre l'orgueil personnel et la volonté de rester maître en son château, peu de responsables seraient enclins à verser une partie de leur budget pour un pot commun. De plus si un acteur est convaincu de la nécessité de verser, les discussions avec les autres acteurs lui feront sentir qu'il sera l'exception. Ayant l'impression de payer pour les autres, il se retirera de fait. On peut donc raisonnablement associer le coefficient de couplage à la contrainte. Posons un budget de départ B et une contrainte commune α à tous les acteurs. Posons par ailleurs que le retour sur investissement est une proportion fixe β de 60% du versement. Le système devient :

$$\begin{cases} B = f^i - \beta\alpha f^N \\ f^N = \alpha f^i \end{cases}$$

Or B est le budget prédiminué de l'impôt. Soit B_0 le budget original, on trouve :

$$f^i = B_0 \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \beta\alpha^2} \right) \tag{12.14}$$

Sous ces hypothèses, le problème se trouve donc ramené à des couplages entre des réseaux "monocycles" de métrique $(1 - \alpha)^{-1} (1 - \beta\alpha^2)$. L'observable de gain est directement le bilan de budget de chaque acteur f^i . L'allure des courbes de gain engendrées par l'inverse de cette métrique va être extrêmement dépendante du retour sur investissement β .

12.5.2.3 Comportement dans l'espace gain-contrainte

Si l'on trace les courbes obtenues du gain normalisé en fonction de la contrainte suivant différentes valeurs de β , on trouve les courbes présentées figure "gains des acteurs" (sur cette figure "B" est " β ").

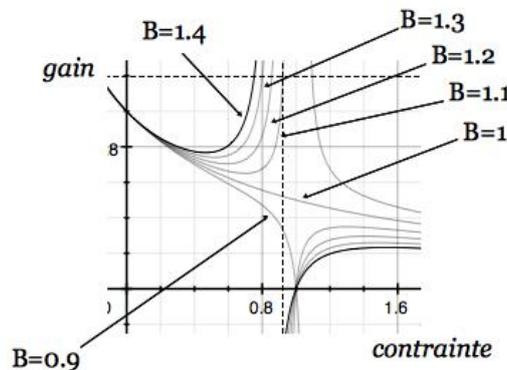


Figure "gains des acteurs".

Ces courbes ne doivent être regardées que pour l'abscisse, qui représente α , allant de 0 à 1.

En associant les retours sur investissements à des transformations, on voit que la contrainte rend des régions de l'espace inaccessibles. Par ailleurs la transformation dans ce cas est appliquée au seul couplage vers les acteurs

(réaction). Lorsque le retour tend vers 1, le gain des acteurs devient inférieur au gain sans participation et ce quelle que soit la contrainte. Pour un retour très faible (0.1) la courbe tend vers la droite coupant le plan en (0,1), (1,0).

Dès que le retour est supérieur à 1, les acteurs peuvent au final gagner plus qu'ils n'auraient sans contrainte et plus le retour est grand, plus la contrainte peut être faible. Par contre, il existe un domaine où pour des valeurs de contraintes insuffisantes, les acteurs gagnent au final moins que le budget initial.

On voit se dessiner notre espace où avec une contrainte minimum ou non, les acteurs choisissent un versement traduit en probabilité d'aller vers telle transformation.

12.5.2.4 Probabilité de versement

Que la participation au pot p soit contrainte ou non, elle est reliée à la probabilité α et la transformation t est reliée au retour sur investissement β . Dans notre espace de représentation nous devons déterminer les probabilités $P(p|t)$ qui correspondent à $P(\alpha|\beta)$. Mais β ne peut être déterminé qu'après avoir connaissance de α . Ainsi, la probabilité a priori $P(p|t)$ est-elle dépendante d'une probabilité a posteriori $P(t|p)$. La loi de Bayes nous permet d'écrire :

$$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\beta|\alpha)P(\alpha)}{P(\beta)} \tag{12.15}$$

Autant $P(\alpha|\beta)$ n'est pas évidente, β n'étant pas connue au départ, autant $P(\beta|\alpha)$ peut être rationnellement calculée, $P(\alpha)$ dépendant des croyances de l'acteur et $P(\beta)$ étant assez mécanique suivant une politique groupe et une efficacité de l'entité du pot commun.

12.5.2.5 Début de mécanisme

On imagine un groupe d'acteurs. Le budget initial est le même pour tous : B_0 . A chaque nouvel horizon se construit un ensemble de transformations possibles β_i pour chaque acteur. Nous devons définir le propagateur $\gamma = \gamma(\beta, P(\alpha|\beta))$. Fixons l'ensemble des transformations possibles T à 3 valeurs de $\beta = 1.1$ à $\beta = 1.3$. Soit une plus-value de 10% à 30%. Le tenfold de chaque acteur comporte une maille unique de métrique inverse donnée équation 12.14. La transformation que l'on applique pour modifier β est :

$$T_{\beta_1 \rightarrow \beta_2} = \frac{1 - \beta_2 \alpha^2}{1 - \beta_1 \alpha^2}$$

La détermination de $P(\beta|\alpha)$ est assez simple. Si l'acteur n'investi pas (absence de contrainte minimum), il peut choisir n'importe laquelle des transformations puisqu'alors elles n'influent pas sur son budget final. La probabilité de chaque transformation pour $\alpha = 0$ est donc l'inverse du nombre de transformations disponibles. Si par contre il investit, on voit d'après la loi 12.14 qu'il a intérêt à choisir la transformation 1.3 qui lui donne le maximum de retour pour le minimum d'investissement. La probabilité de $\beta = 1.3$ est alors de 100%, les autres étant nulles. Mais il peut aussi ne pas vouloir investir autant pour garder plus de fond dans son budget propre. La probabilité devient alors la probabilité plancher pour réaliser des gains additionnée d'une part aléatoire.

Les probabilités $P(\beta)$ sont liées à la chance de réaliser tel objectif de croissance. On fixe arbitrairement : $P(\beta = 1.1) = 0.5$, $P(\beta = 1.2) = 0.35$, $P(\beta = 1.3) = 0.15$.

Reste à se doter d'une loi pour $P(\alpha)$. La propension de chaque acteur à verser est influencée par les résultats visibles des autres suite à un versement. On peut donc établir que cette probabilité dépend de la dérivée du gain f^i au cours du temps. Mais elle dépend aussi de nombreux autres paramètres : orgueil, peur de perte de pouvoir, décision d'organisation au niveau groupe, etc. Si l'on dispose de suffisamment d'acteurs on peut utiliser un tirage aléatoire pour le premier jet de probabilités. Dans un jeu à information incomplète, les acteurs ne connaissent pas la loi 12.14. Ils investissent ou pas sur d'autres critères. Partons sur cette hypothèse. Ensuite, les acteurs sont guidés par les résultats qui s'ajoutent aux autres critères. On peut définir :

$$\begin{cases} \frac{\partial f^i}{\partial \epsilon} < 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \frac{\partial f^i}{\partial \epsilon} \geq 0 \Rightarrow \alpha = (1 + \epsilon) \frac{\partial f^i}{\partial \epsilon} \end{cases}$$

ϵ étant une variable aléatoire traduisant l'influence des croyances de chaque acteur sur le versement (on prend $P(\alpha) = \alpha$).

12.5.2.6 Algorithme du programme

Le programme n'est jamais évident à écrire lorsque l'on aborde des applications un tant soit peu complexes. L'un des problèmes est le volume de données à traiter. La matrice du propagateur étant très vide, il devient inintéressant de garder ce type de conteneur même si, théoriquement, son existence est indispensable. En programmation on peut créer un dictionnaire. Dans le cas que l'on veut programmer, un acteur part d'un tenfold d'origine "0" et va choisir entre trois transformations de "1" à "3". Les chemins correspondants peuvent être repérés par les suites "01", "02", "03". Chacun de ces nouveaux états vont pouvoir choisir à leur tour 3 transformations et engendreront les chemins "011", "012", "013", ..., "031", etc.

Un dictionnaire est un conteneur que l'on trouve dans les langages modernes comme Python, Perl, Java, etc. Il permet d'associer une clé à des données. Ce type de stockage est très utile en bases de données. On va pouvoir ici utiliser comme clé la suite engendrée par un chemin pour un horizon donné et y associer directement une espérance de gain.

Nous allons étudier l'évolution d'un acteur unique, l'ajout d'acteurs ne faisant que rajouter une boucle dans l'algorithme du programme.

12.5.2.6.1 Présentation des résultats On ne peut pas représenter toutes les directions de l'espace avec les espérances de gains. Par contre on peut associer à chaque chemin (première dimension) une combinaison intégrant les successions de transformations accomplies pour chaque chemin (seconde dimension) et utiliser une troisième dimension pour le gain. Pour cela on crée un nombre constitué des successions de transformations codées de 0 à 2. Par exemple 021 signifie un chemin où la première transformation opérée est celle de code 0, la suivante de code 2 et la troisième de code 1. On somme ensuite le nombre de fois que chaque direction est suivie. Par exemple dans 021200112, la direction 2 est empruntée 3 fois, et ainsi de suite. En effectuant cette somme pour les trois directions pour chaque chemin on obtient un nouveau nombre : dans le dernier exemple ce serait 333. Chaque chemin est ainsi associé à un nombre et à un gain. On peut ordonner alors la liste de tous les chemins explorés dans l'ordre croissant de ces nombres. On peut finalement faire une représentation par boules où le diamètre des boules est à l'image des gains. La figure "trajectoires sans contrainte initiale" montre ainsi le résultat dans le cas où le versement initial est aléatoire et pour un tirage où ce versement est faible, de l'ordre de 3%.

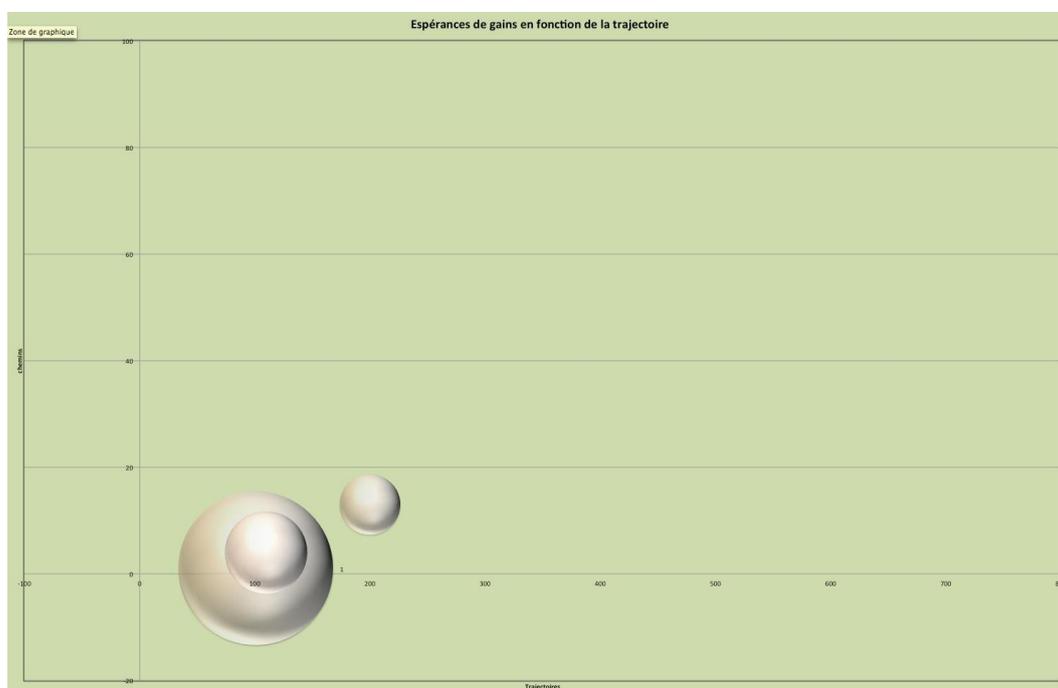


Figure "trajectoires sans contrainte initiale".

Dans ce premier cas de figure on voit que les gains sont notables dès les premiers versements, c'est à dire des chemins de faibles numéros et des combinaisons donnant des successions d'opérations assez restreintes. Puis les

gains disparaissent rapidement pour des chemins éloignés (comprenant plus de 2 années successives de versement si chaque tirage est associé à un an de cotisation). Comme il n'y a pas de versement plancher, les versements sont insuffisants pour assurés un rendement optimum du processus et les différentiels de gains deviennent négatifs, encourageant à moins de versement. Le processus s'auto-amplifie jusqu'à quasi-disparition des gains suite à une quasi-disparition des versements. Evidemment le résultat pourrait être meilleur si le versement bien que libre serait plus important. On trouve ce raisonnement en étudiant la pente de l'inverse de la métrique qui détermine le gain à chaque étape de versement. Le rapport des gains à chaque étape pour un retour de 1,1 est donné par :

$$\frac{f^1}{f^0} = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - 1.1\alpha^2} \right)$$

Si le versement α est nul, le gain est maintenu de proche en proche. Cherchons la variation du gain relatif en fonction du versement :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1 - \alpha}{1 - 1.1\alpha^2} \right) = 0 \Rightarrow -1.1\alpha^2 + 2.2\alpha - 1 = 0$$

On trouve deux racines montrées figure "racines de la fonction gain" en 0,7 et 1,3.

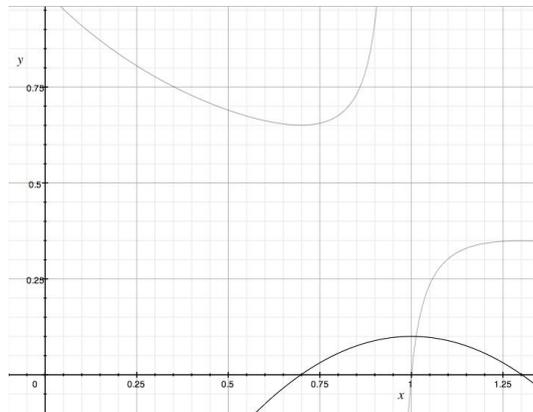


Figure "racines de la fonction gain".

Mais la courbe étant asymptotique autour des valeurs optima, on recherche sa dérivée seconde que l'on annule pour $\alpha = 1$. C'est donc proche par valeur inférieure de 1 que le versement donne le plus grand retour. Dans ce processus, cela revient à un abandon par les acteurs de leur budget propre au profit d'une gestion centralisée. Dans la simulation précédente on a retenu le cas d'un versement faible. La variation relative de gain peut être alors négative ou proche de zéro, le retour sur investissement à 10% pouvant compenser juste la perte. Au final les versements se maintiennent un certain temps puis s'évasent, les retours pour des versements trop faibles n'engendrant plus de nouveaux versements qui permettent à terme de compenser les pertes.

Si l'on impose un versement plancher (80% minimum), la figure "trajectoires avec contrainte initiale" montre la nouvelle répartition des gains dans l'espace chemins - trajectoires.

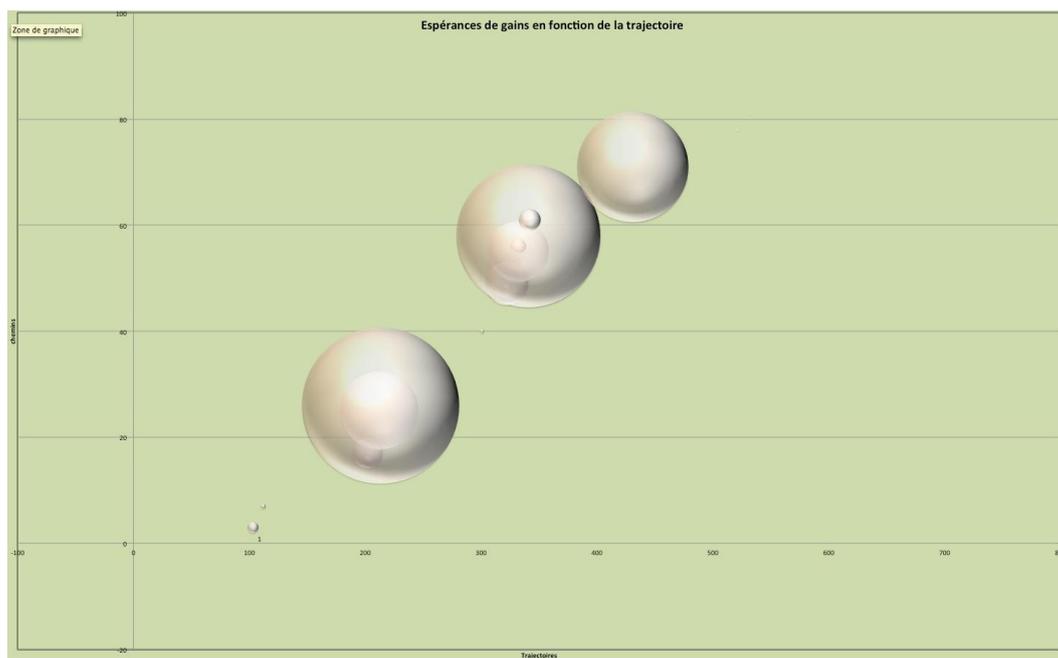


Figure “trajectoires avec contrainte initiale”.

On voit une répartition très différente des gains cette fois. La contrainte impose un rapprochement du point optimum de rendement. De fait, le versement s’auto-entretient et assure le retour maximum sur investissement. Les premiers temps, les gains sont faibles car les investissements importants et les retours représentent une masse encore faible comparée à ce qu’aurait été un budget conservé en propre. Après, pour différentes combinaisons de versements apparaissent des lieux de gains optima. Un premier lieu émerge pour des combinaisons représentant des chemins au-delà de 20 événements puis au-delà de 50 événements environ.

Le maximum de gain sans contrainte est de 0,4 pour 1 et avec contrainte de plus de 400000 pour 1. Evidemment ces écarts énormes proviennent de la simplicité du modèle de revenu. Mais cette simplicité ne remet pas en cause le mécanisme de versement en fonction simplement du retour sur investissement et de la contrainte pour aller “chercher” les points optima pour ce retour, point éloignés de l’objectif individuel.

12.5.3 Traduction des conditions initiales

Les conditions initiales jouent un rôle majeur dans l’évolution du système. Ici elles impactent le calcul de probabilité de versement, donc le choix de transformation d’événement en événement. Elles se répercutent donc continuellement durant tout le processus d’évolution qui reste stable car borné par des limites physiques de gains. Avec des conditions initiales nulles on a vu que le système devenait évanescent, la condition initiale traduisant une contrainte pour l’intérêt commun. Sur le graphique n’apparaît pas l’intérêt individuel. L’évanescence des gains par le collectif est balancée par un maintien du gain individuel. Les conditions initiales ici changent aussi la nature du jeu. Sans contrainte, le jeu est non coopératif [MOJ]. Chacun optimise son gain et son indépendance sans prise en compte de l’intérêt commun, donc de l’autre. Au contraire, avec un versement minimum obligatoire, le jeu devient coopératif de fait. L’ensemble coopère au pot commun. Les optima constituent des équilibres de Nash locaux obtenus par des chemins que l’on peut reproduire en mémorisant les choix réalisés de proche en proche, pour des conditions initiales données. Dans les conditions initiales s’incorporent les règles du jeu et les interactions avec l’environnement.

12.5.4 Présence de petits et de grands modes

Les petits modes sont représentés par la métrique et les réactions qu’elle engendre pour des sources données. Les grands modes sont associés aux choix de transformations visibles. Ainsi les acteurs n’ont pas connaissance du mécanisme de retour sur investissement. Ils constatent les conséquences de leurs choix et agissent en fonction de ces conséquences et des contraintes de leur direction. Ce qu’ils voient est donc le retour sur investissement, les règles de contraintes, etc., qui constituent les grands modes du processus dans lequel ils sont impliqués. Par

contre, le détail des opérations réalisées dans ce processus leur est inconnu et constitue la “face cachée” de ce processus, l'ensemble des petits modes. Les petits modes influent sur l'évolution des grands, mais pas seulement. Une part aléatoire dans les choix vient impacter les chemins suivis majoritairement et donc l'évolution du système. Des émergences apparaissent qui ne sont pas prédictibles. On pourrait faire tourner un calcul de monte-carlo pour évaluer toutes les possibilités mais la masse d'opérations est gigantesque et en pratique incalculable ! Y a-t-il émergence au sens strict de la systémique ?

Tel qu'on l'a proposé, l'émergence est caractérisée par une métrique additionnelle dans le changement d'échelle [ARE]. Le changement d'échelle correspond par une autre définition proposée à un changement de modèle. Par exemple si l'on découpe une ligne en morceaux de plus en plus petits, il arrive un moment où la partie restante ne répond plus aux équations des ondes guidées. Le changement de modèle physique implique un changement d'échelle. Ici le changement d'échelle s'opère entre le fonctionnement des petits modes, déterministe et lié au gain précédent et à d'autres entrées, et les grands modes caractérisés par une composante aléatoire propre à l'acteur. Le calcul de l'investissement aurait pu se faire sur une mécanique déterministe uniquement rattachée au gain, mais le facteur humain ajoute ici un choix dépendant d'émotions, de sensations de pouvoir etc., qui ne répondent pas à ces mécanismes. De fait un changement d'échelle traduit ce facteur humain. Lors de ce changement d'échelle on ajoute un terme issu de l'environnement : la contrainte de versement. Ce terme interagit avec le système cible et peut lui-même provenir d'une métrique reliant la direction du groupe avec l'évolution envisagée des budgets.

Soit g_c la métrique avec contrainte α_0 de la forme :

$$g_c = \frac{1 - \beta (\alpha + \alpha_0)^2}{1 - (\alpha + \alpha_0)}$$

On peut exprimer :

$$g_c = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha - \alpha_0} \right) \frac{1 - \beta \alpha^2}{1 - \alpha} - \frac{\beta \alpha_0 + 2\beta \alpha \alpha_0}{1 - \alpha - \alpha_0} = T g_0 + g_e \quad (12.16)$$

La transformation T introduit l'influence de l'environnement et la métrique g_e une propriété qui est intrinsèque à cette nouvelle échelle au niveau des grands modes.

Sans cet apport, une zone d'évanescence apparaît dans l'espace CG traduisant des non possibilités dans un contexte très rationnel. Avec cet ajout, une zone d'évitement apparaît pour les chemins proches, mais des émergences de gains très importants sont créées pour les chemins plus longs. On peut donc a priori considérer compte-tenu de tous ces éléments que d'une part on est bien en présence d'un phénomène complexe au sens de la systémique, mais qu'également on a une émergence engendrée par une contrainte initiale.

12.6 Conclusion du chapitre 12

Cet exemple de gestion de la complexité est simple du point de vue de l'analyse tensorielle des réseaux. Les tenfolds réduits à un cycle et les transformations exprimables par produit sur des matrices mais en programmation revenant à une évolution de paramètres sont calculées instantanément. L'aspect intéressant de cette application est le raisonnement que l'on est conduit à faire pour introduire le comportement humain. Il est certain que l'on peut émettre des critiques sur les hypothèses de comportements : les modèles pour traduire ces comportements résultent de raisonnements non démontrés. Mais cela n'est pas bloquant car on peut pousser à la limite les hypothèses et encadrer de fait des vastes possibilités de choix dont celles sans doutes plus crédibles. Les tendances relatives obtenues ont alors du sens et correspondent aux tendances que l'on aurait attendu intuitivement. Vu la complexité du sujet traité, cette corrélation est déjà en soit un résultat encourageant et le modèle obtenu en final pourrait être enrichi pour devenir à terme d'une crédibilité suffisante pour être industriellement exploité. Enfin la représentation est très difficile, mais l'on voit que le choix d'espace chemins - espérance de gain fait bien ressortir les émergences et les tendances dans les comportements humains. On confirme ici l'intérêt de modes de représentation type “CG”.

On peut dégager une méthodologie synthétique d'application de la méthode proposée :

1. définir les conditions initiales dont le tenfold initial ;
2. définir l'environnement et les règles du jeu d'évolution ;
3. définir l'ensemble des groupes de transformations possibles ;

4. définir les objectifs de chaque acteur, leurs caractères (lois d'évolution des probabilités), les observables, lois de performances et critères ;
5. programmer l'évolution et faire tourner le programme ;
6. projeter les résultats dans un espace CG choisi ;
7. analyser.

12.7 Références du chapitre 12

- [GK] H.H.Happ, "Gabriel Kron and Systems Theory". Edition Union College Press, Schenectady, New-York, 1973page 25.
- [FW] P.Duvaut, "Le filtrage de Wiener linéaire-quadratique à l'horizon fini : application à la prédiction". Journal T.S. Traitement du signal. 1989, vol. 6, no3, pp. 153-159.
- [MR] O.Maurice, A.Reineix, "Modélisation de la relation client-fournisseur en CEM". Congrès CEM2012, Rouen.
- [MC] M.Cotsaftis, "Comportement et contrôle des systèmes complexes". Edition Diderot, arts et sciences, 1997.
- [ADS] G.Cohen, S.Gaubert, J.P. Quadrat, "l'algèbre des sandwiches". Journal Pour la Science. n°328, Février 2005.
- [SEV] Science et Vie, Novembre 2012 : "La formule qui décrypte le monde".
- [MOJ] M.O.Jackson, "Social and Economics Networks". Edition Princeton University Press, 2008.
- [ARE] O.Maurice, "Simulation et complexité". Présentation d'introduction à la journée AREMIF sur la complexité, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00677841>.
- [MRS] O.Maurice, A.Reineix, "Proposition d'un formalisme pour les études théoriques en systémiques". Article présenté aux journées de l'AFSCET 2011. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00634716/fr/>.

Cinquième partie

Application

Préambule

Les premières parties ont pour but de donner toutes les mécaniques nécessaires à une méthodologie de modélisation de la complexité. Cette partie a pour but d'illustrer l'usage de cette méthodologie au travers d'un exemple simple, qui ne se veut pas forcément réaliste. Comme on l'a vu, la méthode proposée englobe de nombreuses techniques et ne se limite pas à une seule représentation ni exploitation. L'application que l'on se propose d'effectuer incorpore de la décision et de la compatibilité électromagnétique. Nous allons tout d'abord aborder le jeu en explorant les analyses autour de l'horizon pour ensuite prendre plus de recul et le considérer dans son ensemble.

On imagine une électronique de puissance en phase de conception. Le responsable "hardware" milite pour diminuer le coût de l'électronique alors que le responsable pour la CEM cherche à garantir la conformité en émissions conduites.

Chapitre 13

Description du jeu

13.1 Introduction au chapitre 13

Décrire un jeu, si l'on regarde les jeux que l'on peut acheter dans des magasins de jouets, c'est décrire le principe, les éléments et la règle du jeu. Nous nous abstenons ici de préciser la tranche d'âge et les risques en cas d'ingestion des petits éléments.

Avertissement : par abus de langage on associera souvent dans ce chapitre la transformation de matrice Λ_i avec la direction dans l'espace CG associée : T_i et le propagateur lié : γ_i .

13.2 Règle du jeu

Le schéma de base de l'électronique n'est pas modifiable. On peut jouer sur le temps de montée des commutateurs ou sur le filtre côté alimentation. Le gain composite du concepteur dépend du rendement et du coût de l'électronique. Le gain du responsable CEM est lié à la distance au gabarit normatif en émissions conduites. Le jeu n'est pas à somme nulle puisque les deux gains ne sont pas directement liés. Par contre la physique impose que le gain de l'un se traduise en perte pour l'autre, en même temps que les deux acteurs participent au même projet et ont tous les deux intérêt à le réussir. Comme le projet est dans une situation de résolution de problème, les modifications nécessaires pour la CEM effectuées a posteriori sont forcement des coûts supplémentaires pour les projets. Ainsi les actions pour l'amélioration vont à l'encontre du gain en terme de coûts globaux pour le responsable projet. Son objectif est donc de limiter les dépenses supplémentaires.

Pour se doter de lois sur les préférences des acteurs tout autant que pour guider l'analyse nous utiliserons la notion introduite de gain pondéré. En effet les transformations appliquées ne sont pas toutes réalisées dans la réalité. Les acteurs pour des raisons de coûts peuvent ne fabriquer qu'une option, et dans ce cas, le résultat (gain) qui aurait été obtenu avec une autre option est inconnu. Par ailleurs, même si l'on avait simultanément calculé dans tous les cas les deux opérations, l'une étant beaucoup plus efficace que l'autre, l'espérance de gain classique aurait été difficile à interpréter et ne mettrait pas en évidence les changements de comportement que nous espérons analyser. De fait on a choisi de calculer un "gain pondéré", simple produit de la probabilité de choix par le gain à chaque étape d'un chemin. Autrement dit, soit $GP_{i,\epsilon}$ le gain pondéré du joueur i à l'étape ϵ , on définit : $GP_{i,\epsilon} = P_{i,\epsilon}G_{i,\epsilon}$. Par abus de langage on appellera espérance de gain ce gain pondéré (l'espérance n'est plus ici au sens de la moyenne mathématique mais au sens de l'attendu).

Evidemment on ne prétend pas que les analyses comportementales données dans cet exercice sont pertinentes. N'étant pas ergonomiste, on est conscient de leur naïveté. Mais on rappelle que le but est de montrer la capacité potentielle de la méthode à fournir une technique d'exploration de comportements dont les spécialistes sauraient faire bon usage.

13.3 Eléments du jeu

L'élément de base du jeu est la carte de puissance. Il y a aussi les éléments ajoutés pour l'essai de compatibilité électromagnétique : filtre "réseau stabilisateur d'impédance de ligne" ou RSIL, les câbles de connexions, l'alimentation de la carte de puissance et la charge. On décrit chacun de ces éléments. La carte de puissance intègre le filtre d'entrée et le condensateur de stockage (qui peut être intégré au filtre), les deux commutateurs, l'inductance et le condensateur de sortie. La charge est une résistance. Le RSIL est spécifié par les normes

CEM. Les câbles relient ces éléments. On détaille ici les étapes qui ont mené au schéma final retenu pour y appliquer l'analyse d'évolution. La description progressive de ces étapes, telles qu'elles ont été conduites donne une illustration concrète de la façon dont la méthode peut être utilisée pas à pas, où l'ingénieur précise sa pensée et ses besoins au fur et à mesure de la construction du problème.

13.3.1 Carte de puissance

Le schéma électronique de la carte de puissance est donné figure "carte de puissance". Le filtre d'entrée dans cette première configuration est réduit au condensateur de stockage.

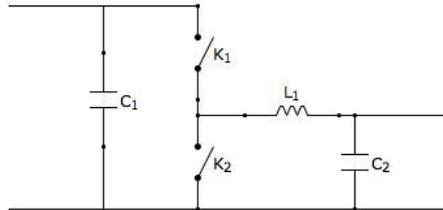


Figure "carte de puissance".

Les deux ports de gauche constituent l'entrée de cette électronique et les deux ports à droite la sortie. La métrique associée à ce réseau dans l'espace des branches est donnée par :

$$Z_{cp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 p} \end{bmatrix}$$

Les commutateurs se commandent suivant une loi qui peut être définie comme paramètre d'entrée. Leur fonction intègre le profil de commutation et la résistance de canal. Leur modèle est une résistance variant dans le temps.

Le principe de fonctionnement de ce type de commutateur (appelé "pont") est le suivant (on suppose le condensateur C1 chargé précédemment) : on ferme l'interrupteur K1. Le condensateur se décharge dans la branche portant L1-C2. Le cycle suivant, on ferme K2 et l'on ouvre K1. La branche L1-C2 se décharge alors (supposons une composante dissipative en série avec C2) dans la maille L1-C2-K1. Puis l'on réouvre K2 et l'on ferme K1, etc. Sur ce principe et suivant les connexions et lois de commandes des interrupteurs, on peut fabriquer des convertisseurs AC vers DC, ou DC-DC ou AC-AC, etc.

13.3.2 RSIL

Le réseau stabilisateur d'impédance de ligne est un filtre en pi. Sa structure est donnée figure "RSIL".

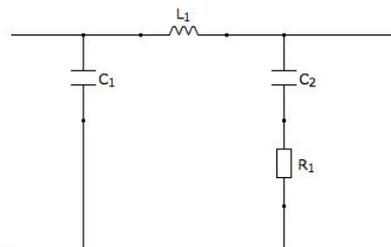


Figure "RSIL".

La métrique du RSIL est la suivante :

$$Z_{RSIL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 p} & 0 & 0 \\ 0 & L_1 p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2 p} + R_1 \end{bmatrix}$$

(les numéros affectés aux labels des composants pourront être modifiés).

13.3.3 Alimentation et charge

L'alimentation est une branche unique avec une tension intrinsèque et une impédance interne (que l'on supposera purement résistive). La charge de même est une résistance pure qui constitue une branche. Les deux métriques de ces deux éléments sont :

$$Z_{alim} = [R_0] \quad Z_{charge} = [R_L]$$

13.3.4 Constitution de la chaîne de puissance

Pour constituer la chaîne de puissance, il faut d'abord choisir la topologie des circuits, et cela se fait en examinant les liens que l'on veut créer. La figure "électronique assemblée" montre le report des 4 circuits primitifs décrits dans l'espace des branches et de somme directe Z . Les ordres d'impédances choisis dans les métriques sont conservés dans leur somme directe en numéros de branches, redéfinis lors de l'assemblage.

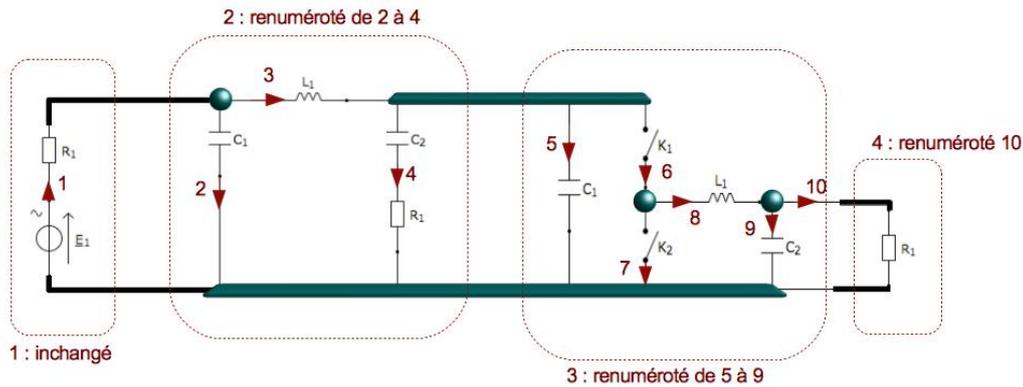


Figure "électronique assemblée".

Le circuit comporte 5 sommets et 10 branches, il doit donc présenter 6 mailles. Les condensateurs agissant en éléments de découplages sont des frontières entre mailles. Par contre, le commutateur engendre deux mailles en fonction de son état : une maille en charge et une maille en décharge. La **topologie choisie a tout intérêt à suivre la physique attendue sur ce composant**. Les mailles retenues sont de fait celles présentées figure "espace des mailles pour le commutateur" à partir desquelles on engendre la métrique g dans l'espace des mailles.

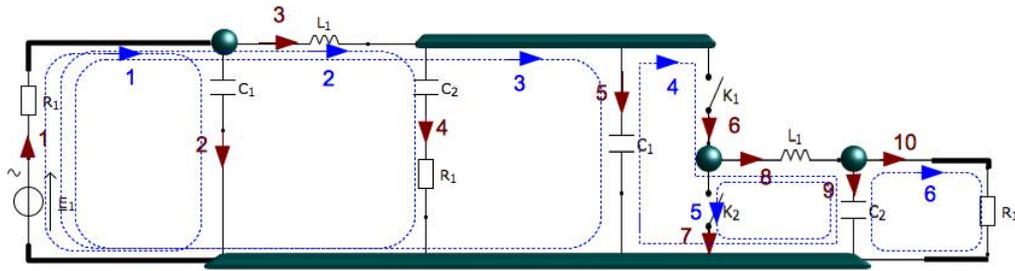


Figure “espace des mailles pour le commutateur”.

Ayant choisi la topologie on définit facilement la matrice de connectivité. La simulation de ce type d’électronique peut être difficile parce que les éléments sont très disparates dans leurs valeurs. Pour converger avec précision on doit manipuler en différences finies une matrice très mal conditionnée puisque la métrique mélange des composants de valeurs très éloignées. Entre le condensateur de 10 nF du filtre d’alimentation et celui d’énergie de plusieurs centaines de microfarads, il y a une dynamique de valeurs qui engendre de fortes différences d’impédances. Pour palier ce problème on peut l’approcher différemment. On sait que par principe en régime établi, le condensateur d’énergie C5 (noté C1 sur la branche 5) est chargé (il a été bien dimensionné pour répondre aux besoins de la charge) et que la tension à ses bornes rejoint celle du générateur, ici mettons 28 V. On peut donc calculer la réponse des dernières cellules alimentées sous 28 V que représente le condensateur C5 chargé. On calcule ce dernier étage en remplaçant la charge par une simple résistance, notre intérêt n’étant pas ici l’analyse d’une électronique de puissance détaillée. Les éléments qui vont engendrer les bruits en haute fréquence contre lesquels on veut se prémunir sont des éléments parasites et non les composants représentés idéaux comme sur le schéma de la figure “espace des mailles pour le commutateur”. On a donc intérêt à réduire le schéma à ces seuls composants parasites pour simultanément affiner l’analyse et optimiser les temps de calcul ; voire, obtenir une réponse directement en fréquence. La figure “diakoptique sur puissance” montre la coupure réalisée au niveau de la frontière C5 sans toutefois montrer les composants parasites en hautes fréquences. Le couplage est de type capacitif.

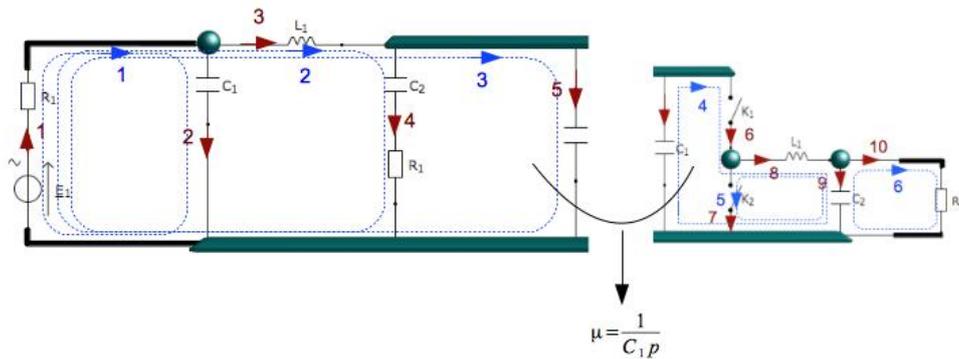


Figure “diakoptique sur puissance”.

La démarche est la suivante : on sépare la métrique en deux, une partie f dévolue aux composants de puissance, une autre partie h dévolue aux composants parasites. Au préalable on a décomposé le système en côté alimentation et côté commutation. Le condensateur C1 de la branche 5 sert de frontière pour la diakoptique. On considère ensuite que le fonctionnement de la puissance (h, f) n’est pas affecté au premier ordre par les parasites présents en hautes fréquences. Cette hypothèse de couplage faible permet de coupler unidirectionnellement la source de parasite vers l’alimentation principale.

Pour la partie commutation $(\overset{c}{h}, \overset{c}{f})$, la simulation des excitations des hautes fréquences peut se faire en appliquant en lieu et place du commutateur la variation de tension qu'il impose à ses bornes dans le front de commutation.

On effectue au global les opérations suivantes si g est la métrique de départ :

$$g = h + f \quad h \rightarrow \begin{bmatrix} \overset{p}{h} & \mu \\ \mu & \overset{c}{h} \end{bmatrix}$$

On considère ensuite que la puissance n'est pas la source de bruit. On peut alors étudier séparément la partie commutation en l'alimentant par la source $\mu \overset{p}{f}$ et en considérant comme source de bruit propre la commutation (l'opérateur μ est le facteur de couplage entre les deux électroniques. La source reportée s'exprime donc comme cet opérateur qui dépend des composants de puissance). La source $\mu \overset{p}{f}$ étant par définition très lente devant les oscillations de la commutation, elle revient à un réglage de la fréquence zéro en spectre. Ne reste alors que le bruit propre lié à la commutation. Comment déterminer le spectre d'excitation? On peut écrire la forme de la fonction de commutation issue de la différence de potentiels aux bornes de la seule jonction des commutateurs (elle n'inclut pas les éléments parasites de ces commutateurs) comme un générateur d'échelon T_α de temps de montée égal à celui de la commutation.

Finalement, la méthodologie proposée ici ne fait qu'acter l'efficacité de découplage du condensateur C5 (C1 de la branche 5)¹ et exploiter la notion de "petit signal" usuelle en électronique. On réalise :

$$T_\alpha = (f_{\alpha\sigma} + h_{\alpha\sigma}) k^\sigma \quad (13.1)$$

($f_{\alpha\sigma}$ est la métrique de la partie fonctionnelle ou "puissance" et $h_{\alpha\sigma}$ celle reliée aux composants parasites). On résout alors la seule partie hautes fréquences petit signal :

$$T_\alpha = h_{\alpha\sigma} k^\sigma \quad (13.2)$$

On utilise la diakoptique pour séparer la partie commutateur de la partie alimentation :

$$h_{\alpha\sigma} = \overset{p}{h}_{\alpha\sigma} \cup \overset{c}{h}_{\alpha\sigma}, \supset \mu_{\alpha\sigma} \quad (13.3)$$

On résout finalement la seule source de bruit :

$$T_\alpha = \overset{c}{h}_{\alpha\sigma} k^\sigma \quad (13.4)$$

On résout cette équation en fréquence pour déduire les \hat{k}^σ , puis les appliquer en source (on peut les reporter en maille virtuelle sur le condensateur de découplage) sur l'étage d'entrée et son filtre. Rappelons qu'en régime de petit signal, une diode est un condensateur, etc. On se retrouve dans notre cas à résoudre la source de bruit présentée figure "source de bruit".

1. on retrouve ici pleinement la discussion et la démonstration de la notion de découplage réalisée dans le Gabillard, "Vibrations et phénomènes de propagation", chez DUNOD université.

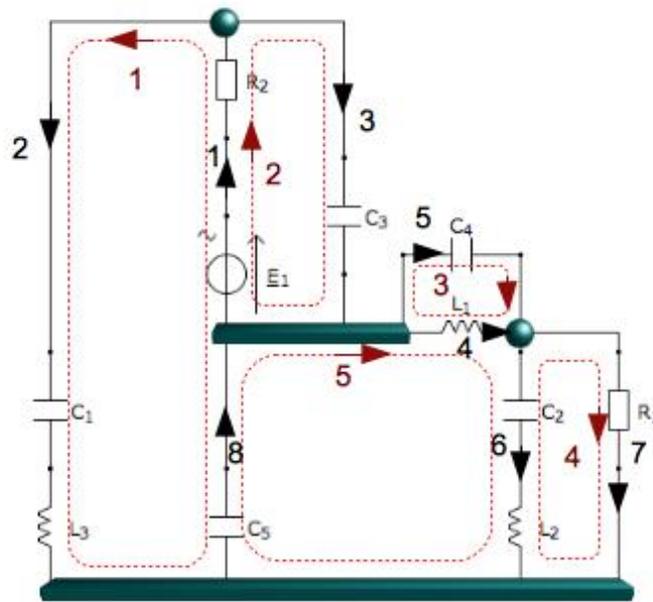


Figure “source de bruit”.

On a rajouté dans le schéma des composants parasites comme le condensateur C4 ou C3 ou C2, etc. On résout ce circuit en fréquence pour une bande déterminée par le temps de montée de commutation avec :

$$\Delta f = \frac{1}{t_m}$$

L’amplitude de l’échelon est l’amplitude d’alimentation.

Remarquons que la décomposition du réseau en partie hautes fréquences et basses fréquences revient à considérer les différentes échelles du système. La variation d’échelle, au sens strict tel que nous l’avons défini ne s’opère pas forcément ici². Lorsque l’on considère par exemple un circuit RC, la composante inductive ne doit exister en toute rigueur que l’orsque le courant est variable. On peut se doter d’une métrique comprenant cette composante, mais elle sera mal conditionnée. Il vaut mieux travailler en échelles variables et associer une topologie à chacune d’elle, ce qui revient à se doter de plusieurs métriques suivant le domaine traité.

Le spectre obtenu présente une raie fine et importante d’amplitude 1 V. La comparaison est donc simple pour jauger de l’efficacité des filtrages. La figure “spectre” montre le résultat obtenu en module.

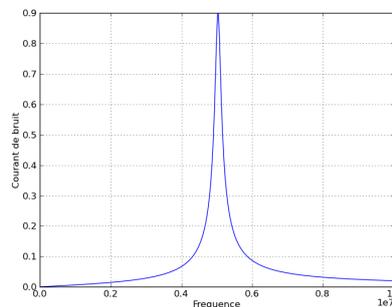


Figure “spectre”.

L’analyse de jeu va consister à envisager différentes solutions pour réduire ce bruit, mais aussi de rester au plus proche de cette source pour ne pas rajouter de composants de filtrage. L’étage que l’on considère maintenant

2. Rappelons que l’on considère qu’il y a changement d’échelle lorsque les lois des modèles évoluent.

est donc l'étage de sortie alimenté par cette source de bruit, gardant le RSIL qui est un élément du test standard et qui, avec la charge d'alimentation, règle l'impédance.

Comme on a retourné le problème, il est intéressant de revoir la topologie de l'étage d'entrée pour exploiter au mieux la maille virtuelle comme source et non comme charge. La figure "RSIL reconstruit" montre la nouvelle topologie choisie pour décrire le réseau de charge.

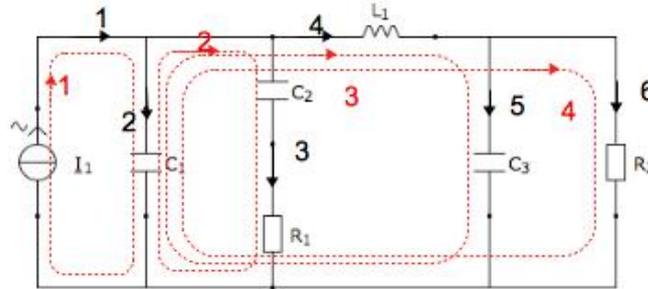


Figure "RSIL reconstruit".

En plus de modifier la topologie pour la rendre plus adéquate, les schémas des composants sont enrichis des composants parasites hautes fréquences (le terme de parasite n'est pas très heureux mais c'est un terme très usité en CEM. Il faut se rappeler que dans notre approche on se dote d'une métrique qui nous semble la plus appropriée pour le problème traité.). Les valeurs des composants et de leurs compagnons parasites sont les suivantes (ne pas se référer aux numéros des composants sur la figure "RSIL reconstruit" mais aux numéros des branches) :

- C2=100E-6
- L2=1000E-9
- R2=0.1
- C3=10E-9
- R3=50.
- L4=1E-6
- C4=100E-12
- R4=0.1
- C5=100E-9
- R5=0.1
- R6=1.
- Ch=1E-9

Une fois cette nouvelle topologie implémentée, on obtient la courbe de mesure du bruit aux bornes de la résistance de 50 ohms du RSIL donnée figure "bruit nominal".

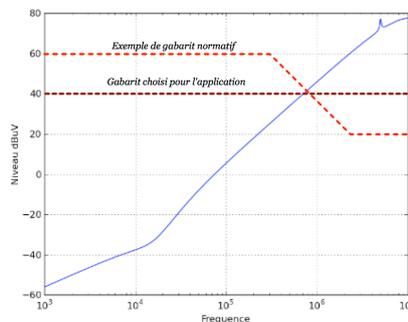


Figure "bruit nominal".

L'objectif du filtrage est de passer en-dessous de la barre des 40 dBuV de niveau. Le gain du concepteur en CEM se chiffre comme marge par rapport à ce gabarit. Le gain du responsable hardware se chiffre lui comme une fonction opposée à l'augmentation du nombre ou des coûts des composants ou du nombre d'essais.

13.3.5 Ajout du filtre

L'ajout du filtre revient à jouer sur la fonction impédance de la branche 2 du graphe de la figure "RSIL reconstruit" pour améliorer son découplage. Originellement elle est de la forme $Z_2 = R + Lp + (Cp)^{-1}$. Le plus simple ici est d'opérer une transformation sur la métrique dans l'espace des branches en modifiant cette fonction dans une matrice identité I dont on change le seul terme I_2^2 par une fraction de la nouvelle fonction de filtrage sur l'ancienne. On va donc envisager diverses de ces transformations dans l'arbre d'évolution. La première à laquelle penserait un concepteur CEM consisterait à rajouter un condensateur haute fréquence en parallèle C_h pour augmenter le découplage par la transformation de métrique :

$$Z_2 \xrightarrow{\Lambda_1} \frac{Z_2}{Z_2 C_h p + 1}$$

Une autre solution consiste à remplacer le condensateur par un autre moins inductif mais plus coûteux. Soit la transformation :

$$Z_2 \xrightarrow{\Lambda_2} R + \frac{L}{100} p + (Cp)^{-1}$$

Par ailleurs, si la deuxième transformation implique un composant plus coûteux, les deux transformations impliquent un reroutage, ce nouveau condensateur n'étant pas de même dimension et la réduction d'inductance passant en partie par une optimisation du routage. Il faut calculer de façon plus précise les gains potentiels du responsable hardware mais aussi chiffrer les préférences potentielles des deux acteurs et préciser le gain du responsable CEM.

13.3.6 Gains déterministes et en fonction des intérêts propres pour les deux responsables hardware et CEM

On veut essayer dans ce jeu de reproduire les comportements "réels". Chaque horizon va être associé à une matrice de gains pour chaque option de transformation. Les transformations sont paramétrées, elles sont au nombre de 2 mais la valeur du condensateur en parallèle ou l'atténuation d'inductance peuvent être réglées. Le gain est composite. Pour le responsable CEM il dépend avant tout de la marge au gabarit visé. Pour le responsable hardware il dépend de la facilité de modification, du nombre de composants, etc., soit du coût global de la modification.

La sortie du calcul étant donnée en $dB\mu V$, on peut calculer un gain CEM G_C pour l'écart au gabarit par :

$$G_C = \frac{1}{N} \sum_n (40 - \text{measure}(n))$$

que l'on normalise en supposant que dans le cas optimum, on obtient 40 dB de marge à toute fréquence. Soit :

$$G_C = \frac{1}{40N} \sum_n (40 - \text{measure}(n)) \quad (13.5)$$

On chiffre le gain du responsable hardware en partant de 1 et en multipliant ce gain par 0,9 à chaque reprise de routage.

A chaque nouveau jet, le condensateur ajouté en parallèle a sa valeur qui est divisée par 2 partant de 1000 nF et l'inductance est diminuée d'un facteur égal au nombre de jet.

Dans cette analyse, on s'intéresse à quelques comportements particuliers.

Cas d'une première trajectoire que nous appellerons "classique"

La décision est collégiale, mais le concepteur CEM a des intuitions bonnes ou mauvaises au départ et joue un rôle majeur en tant que spécialiste métier³. Classiquement il pensera d'abord à enrichir le filtrage. Au bout de quelques tentatives infructueuses il commencera à douter et de fait, ne privilégiera plus aucune solution. Ce changement de comportement est traduit par une évolution automatisée de la probabilité de choix. On décide pour le responsable CEM d'une décroissance de sa probabilité de choix pour la solution 1 de 20% à chaque jet (les valeurs de ces probabilités devraient découler d'analyses du comportement menées par des spécialistes). Dans ce contexte, le responsable hardware qui se "repose" un peu sur le responsable CEM voit son choix diminuer de 10% à chaque jet. La décision étant collégiale, c'est la somme des probabilités qui décide du changement de stratégie. On explore dans le programme qu'un arbre local à chaque horizon mais en calculant la nouvelle probabilité de choix par des produits, on retrouve le même résultat pour l'espérance de gain que si l'on avait détaillé les chemins avec des probabilités redonnant en final les produits calculés. On procède ainsi pour tous les contextes explorés.

Pour le responsable hardware, le gain dépend de la transformation. En supposant que les coûts de reprise de routage soient identiques, et que l'option Λ_1 soit moins chère que l'option Λ_2 , il privilégie l'option Λ_1 à la première (ce d'autant que son intuition va dans le même sens que celle du responsable CEM) mais veut aussi éviter des reprises de routage successives. Son gain décroît donc à chaque nouvelle hypothèse de carte. Au bout de plusieurs échecs, il préfère changer de stratégie et privilégiera l'autre transformation.

Pour décrire ces comportements sous forme d'équations on s'intéresse à la probabilité de choix sur la transformation Λ_1 , celle sur Λ_2 s'en déduisant ($P(\Lambda_2) = 1 - P(\Lambda_1)$). On pose arbitrairement qu'avoir une forte préférence signifie une répartition à 9 pour 1. En condition initiale on a $P_{h1} = 0.9$, $P_{c1} = 0.9$, les indices h et c renvoyant aux acteurs responsables hardware et CEM respectivement, et les indices 1 et 2 renvoyant aux deux transformations Λ_1 et Λ_2 .

A chaque jet, si la somme des probabilités de choix des deux acteurs pour une transformation est supérieure à 1, c'est cette transformation qui est choisie. Sinon c'est l'autre transformation. Ce seuil dans la valeur des probabilités est un seuil de décision qui est à l'image des cursus et caractères des acteurs. Pour une "famille" ou une "classe" de comportements, une équipe étudiée se situera comme typique si le seuil est réglé à 50%, persistante si le seuil est réglé à 30% (par exemple), impatiente si le seuil est réglé à 65%, etc.

Enfin, si le test est réussi, le jeu s'arrête. Pour cette première trajectoire, le condensateur C_h fait en final 62,5 nF et l'inductance 1 nH avec 7 jets pour terminer le jeu. Les deux acteurs dans cette première étude de trajectoire sont d'un même avis pour le premier choix. Ensuite le cumul des échecs en essai CEM les oblige à revoir leur décision. Dans le jeu, la règle de choix de la transformation sur la somme des probabilités $P_{c1} + P_{h1}$ donne à chaque acteur le même pouvoir de décision⁴.

Trajectoires de bords

Si le responsable hardware est aussi le décideur final ou a contrario le responsable CEM, trois situations peuvent être rencontrées :

1. si le décideur est le responsable hardware et qu'il est incompetent mais regarde les résultats et écoute son entourage ;
2. si le décideur est le responsable hardware et qu'il est incompetent et orgueilleux ;
3. si le responsable CEM se trompe et est orgueilleux.

Evidemment elles peuvent être complétées de cas intermédiaires mais qui pourront se regrouper peu ou prou dans l'une de ces trois situations.

Les deux dernières situations conduisent à suivre sans modifications possibles l'une des deux directions de l'espace CG. Si la direction choisie est T1, les acteurs aboutiront à un échec car ce choix ne permet pas d'être complètement conforme avec le gabarit fixé. On peut modifier facilement le code précédent pour forcer une

3. On parle d'information "hard" et "soft". L'information est "hard" quand elle est vérifiable par tout le monde. Elle est "soft" lorsqu'elle relève de l'intuitif, de la connaissance privée.

4. La mathématisation des autorités a été abordée dans [PAJET]. Notre loi ici est par trop simpliste. Par contre les situations explorées sont des cas étudiés. On parle d'autorité formelle (de droit) et d'autorité réelle (de fait). L'autorité peut être basée sur différents socles : relations particulières ou informations. Celui qui détient l'information peut détenir l'autorité. C'est le cas ici où le responsable projet a une autorité formelle sur les choix pour la résolution du problème CEM et l'expert a une autorité réelle quand il est le seul à pouvoir résoudre ce problème de par ses connaissances.

décision constante sur T1. On trouve bien 20 tentatives avec une espérance de gain qui reste négative pour le responsable CEM et qui devient très faible pour le responsable hardware, suivant les lois précédentes inchangées dans cet exercice. Par contre si la direction imposée est T2, l'essai est qualifié en trois jets.

Ces comportements déterminent les bords de la surface des comportements possibles dans l'espace CG. La société en pratique se trouve cassée et un seul acteur décide réellement, sans se laisser influencer par les autres acteurs. Dans la première possibilité des trois décrites précédemment, la situation est un peu différente. Le décideur est unique mais il écoute son entourage. Dans la mesure où la décision redevient collégiale, on peut considérer ce cas comme étant proche du premier cas étudié.

Dans les deux types de trajectoires étudiées précédemment (classique et de bord), le choix de transformation est au final commun pour les deux acteurs, dans des conditions diverses mais un seul développement est lancé. Dans la matrice des possibles, on a exploré les deux cas de choix communs :

J1\J2	T1	T2
T1	effectué	
T2		effectué

Par contre la situation où les deux acteurs sont en désaccords sur la stratégie à suivre et où le premier développement lancé est aléatoire reste à explorer, c'est la situation que l'on étudie dans le prochain paragraphe.

Situation de conflit

On imagine ici le cas où les deux acteurs responsable CEM et hardware sont en désaccords, et ont un pouvoir décisionnaire identique. Ils décident donc deux développements. Mais le risque est différent pour les deux acteurs. Pour le responsable CEM le risque est identique aux situations précédentes. Par contre pour le responsable hardware, le coût de deux développements augmente le risque de ne pas rester dans les budgets fixés. La probabilité de rester sur son choix évolue donc plus vite avec un facteur de 0,7 à chaque jet en échec. Au départ, incompetent et influencé par le responsable CEM, le responsable hardware suit le choix de ce dernier, soit une topologie T1.

13.3.7 Représentation des trajectoires

Pour analyser les calculs précédents, nous devons choisir un mode de représentation. Nous avons vu lors des réflexions précédentes que la représentation de l'évolution est difficile. On exploite toujours l'algorithme des "sandwichs" pour traduire en somme vectorielle les produits de probabilités et ainsi les utiliser comme coordonnées. L'espace CG est ici pourvu de trois directions : deux transformations et une espérance de gain. Pour réaliser l'analyse des résultats, une représentation en deux dimensions en notant l'espérance de gain semble ici simple et lisible. On pourra alternativement tracer pour une direction l'évolution de l'espérance de gain. En abscisse, nous notons la probabilité de choix de T_1 , celle de T_2 s'en déduisant. On peut alors s'étonner de ces tracés où l'on voit un choix d'utilisation d'une transformation inférieur à 50%. Le critère de basculement du choix est ici rattaché à la probabilité, laquelle est rattachée au gain. Dans son référentiel, l'acteur ne sait pas ce que joueraient d'autres joueurs dans des hypothèses de comportements différents. Ainsi lorsque l'on voit une perte de gain avec une probabilité de choix de T_1 de 35%, cela signifie que 65% de la population aurait choisi de changer de stratégie pour une loi de basculement différente. Mais pour la loi - c'est à dire pour le caractère - que nous avons modélisé, l'acteur est dans cette proportion des 35% qui restent sur leur première stratégie. Nous sommes bien dans l'analyse de trajectoires particulières dans l'espace CG liées aux caractères des joueurs. La compréhension de ces analyses particulières permet en fait d'en extraire celles sur les comportements globaux. On analyse les trajectoires d'une équipe parmi N, en donnant une influence des caractères par rapport à une trajectoire moyenne, elle-même définie pour une classe de connaissances et de caractères.

Le principe du réglage peut surprendre mais est très simple. S'il y a échec, la probabilité de rester sur la même stratégie décroît avec un taux prédéfini. Dans le cas contraire, elle reste constante ou croît. Ainsi, le gain à chaque jet règle la probabilité de choix de stratégie pour le jet suivant. De là on suppose qu'un joueur moyen change de stratégie dès que la probabilité chute en-deçà de 50%. Mais cette probabilité est une image du caractère. Un joueur entêté changera pour une valeur plus faible et un joueur "craintif" pour une valeur plus forte. On place ainsi le comportement des joueurs dans un référentiel où le joueur moyen changerait pour 50%. Ces équations de basculement très simples peuvent être largement critiquées, mais on veut montrer ici un principe d'insertion de caractères différents par le biais de ces réglages. En portant la décision sur la probabilité

et non sur une observable technique on met en évidence un concept de caractère et la probabilité dépend elle-même du résultat d'une observable. Le seul critère technique n'aurait pas eu cette dimension ou tout au moins pas référencée à un comportement "moyen". Si la valeur absolue reste très délicate à argumenter, les écarts relatifs ont très probablement beaucoup plus de sens.

Dans tous les diagrammes représentés, le premier point - condition initiale à 0,9 pour la probabilité de T1 - n'est pas tracé (condition initiale dans le programme qui ne sauve que les résultats qui en découlent). Les valeurs négatives d'EG pour JC viennent de la loi choisie qui calcule l'écart au gabarit.

13.3.7.1 Résultats pour la trajectoire classique

On trace l'évolution de l'espérance de gain et du choix de transformation pour chaque acteur en fonction de la probabilité de choix pour la première transformation. La figure "résultats pour la trajectoire classique" montre ces deux évolutions.

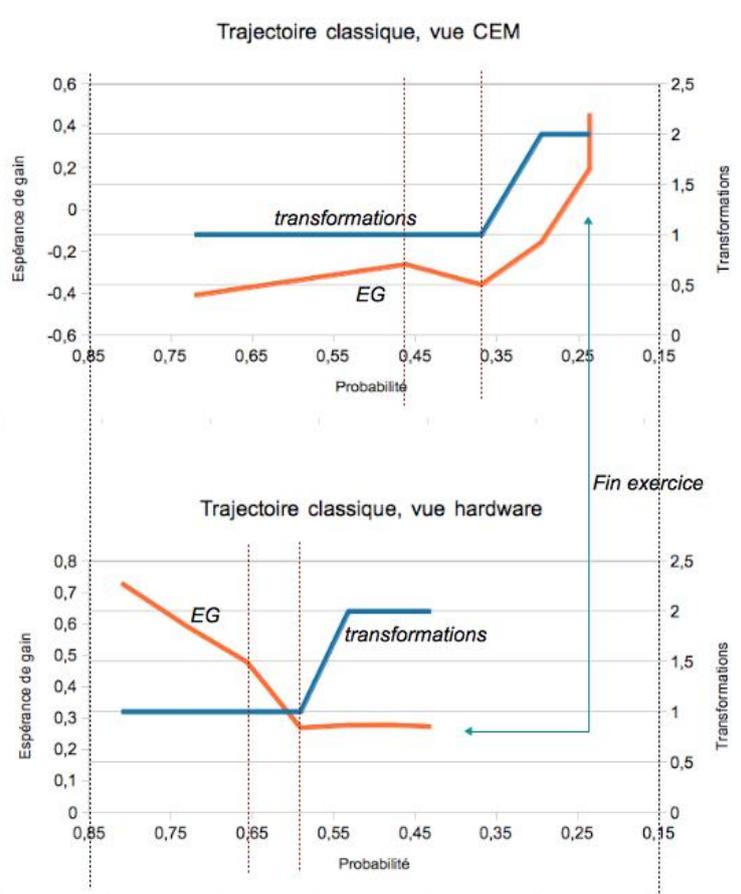


Figure "résultats pour la trajectoire classique".

On observe au départ, suivant les lois retenues pour les deux acteurs, une opposition dans les évolutions de gain pondéré des deux acteurs. Le concepteur hardware part optimiste, confiant dans l'expertise du spécialiste en CEM. Son gain décroît forcément de par les coûts d'essais de validation réalisés, alors que le gain pondéré du spécialiste en CEM croît devant l'amélioration des résultats obtenus. Le gain du spécialiste en CEM (que l'on nommera dorénavant JC) part d'une valeur négative également par principe puisque le produit n'est pas conforme au début de l'exercice. Les essais se succédant ensuite, et les résultats stagnants, le doute gagne JC et de fait, les espoirs du responsable hardware (que l'on nommera JR) s'écroulent aussi. Ces changements de position provoquent la décision de prendre une autre stratégie et de considérer la transformation T2. Celle-ci s'avère efficace et JC regagne bientôt rapidement la conformité produit avec un gain pondéré qui culmine à 0,5 environ, et JR stagne dans son gain, ce qui signifie en fait qu'il ne perd plus en coût puisque cette constance résulte du produit du gain continuellement décroissant par le choix continuellement croissant pour le deuxième filtre. Cette constance résulte aussi du fait que le succès est rapidement atteint, sans quoi elle aurait de nouveau diminuée

par les coûts de maintien de l'activité. Pour la société, le résultat final est satisfaisant, même s'il aurait pu être atteint plus rapidement. Si la société sait retenir ses expériences, une situation similaire future sera rapidement résolue.

Le critère de basculement est ici réglé pour la société en faisant la somme des probabilités de décision des deux acteurs. Comme le taux de décroissance - qui traduit la perte de confiance - n'est pas le même pour JC et JR, les basculements se font à des probabilités différentes. On essaie de traduire ici le fait que JC est plus confiant dans sa première solution et a du mal à se résoudre d'en changer. Au contraire, JR impatient d'arriver au résultat et sans a priori, voudrait changer plus tôt. Son basculement s'opère sur la moyenne alors que JC bascule plus bas. Si JC seul avait décidé, les deux acteurs auraient changé de stratégie plus tard, augmentant ici les pertes. On ne peut en conclure pour autant que la stratégie de JR est meilleure. Dans d'autres situations, des changements trop rapides de stratégies conduisent à des allers-retours constants et à une instabilité de trajectoire. Par contre il est intéressant de noter qu'en portant la décision sur la somme, on met en avant l'avantage d'une société où la somme des convictions opèrent, engendrant une sorte de compromis.

13.3.7.2 Résultats pour les trajectoires de bords

La figure "résultats pour la trajectoire de bord" montre les résultats obtenus pour les deux acteurs. La courbe de transformation est une droite puisque l'on étudie ici un cas de bord, donc par principe une trajectoire qui ne change pas de groupe de transformation pendant tout le chemin d'évolution.

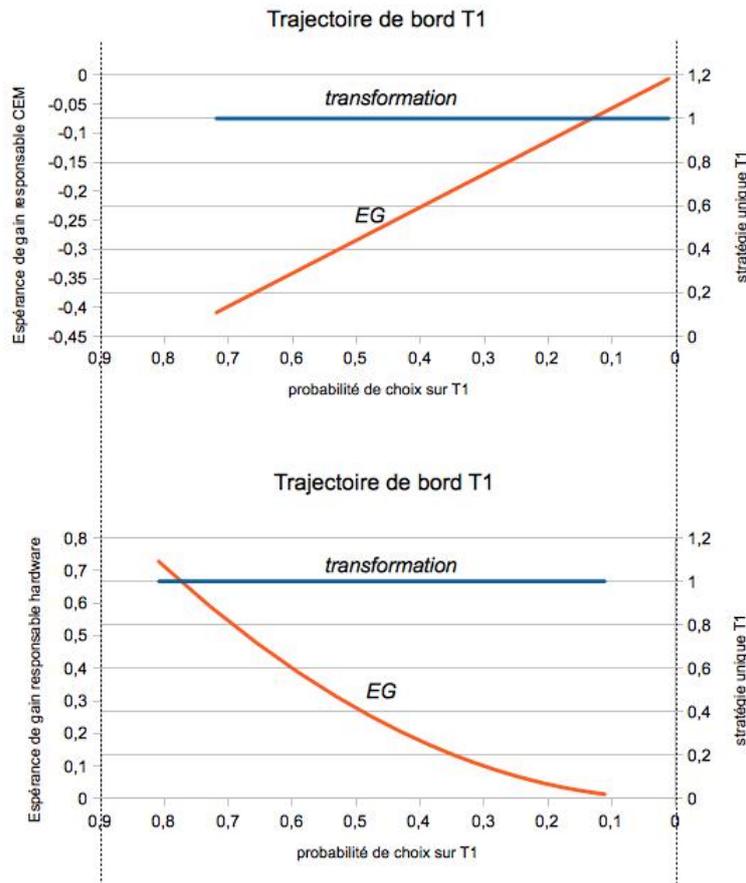


Figure "résultats pour la trajectoire de bord".

Sans surprise, l'espérance de gain de JC ne cesse de décroître puisque le nombre d'essais ne cesse d'augmenter sans jamais complètement aboutir à la conformité. Au final, après 20 essais⁵ les coûts et déceptions sont tels que le gain pondéré est quasi-nul malgré qu'il y a quand même des progrès réalisés dans la conception, mais sans rendre le produit complètement conforme. Pour le responsable hardware, non décideur ici du choix d'opérations

5. Typiquement le nombre maximum de reprise de routage dans des projets réels avoisine ce chiffre.

de modification, le gain s'écroule également par l'accumulation des coûts. En final la société perd ici sur tous les tableaux.

On trouve la situation opposée à celle-ci avec un choix arbitraire imposé pour la transformation T2. C'est le résultat présenté figure "trajectoire de bord T2".

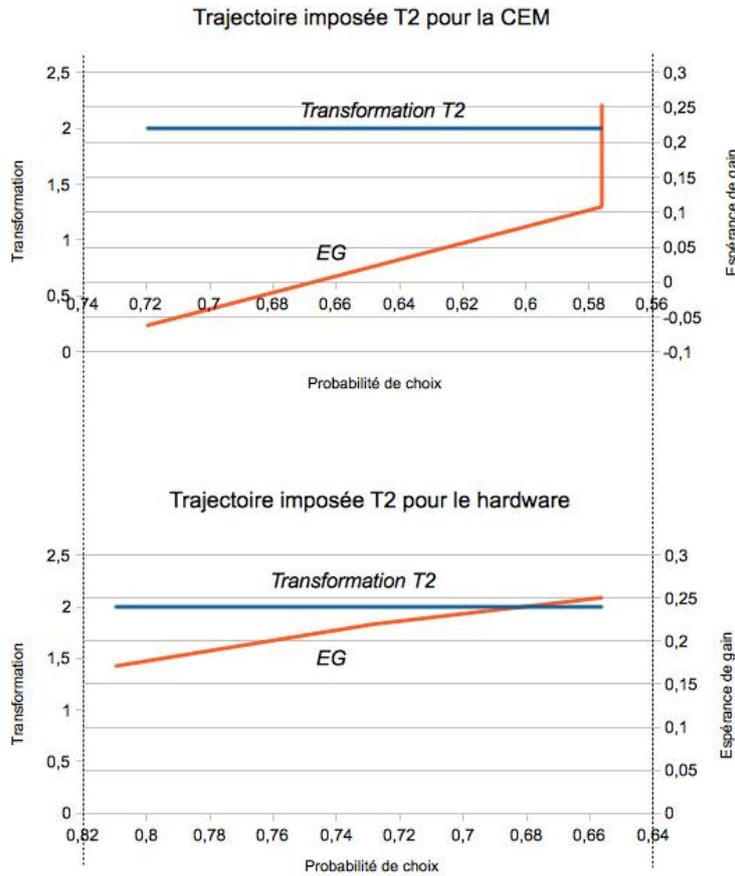


Figure "trajectoire de bord T2".

13.3.7.3 Résultats dans la situation de conflit

Deux développements sont menés conjointement. JR perd donc rapidement en gain, alors que JC n'est pas affecté par ce double développement. Cette rapide décroissance dans la loi de choix pour JR va imposer un changement rapide de stratégie et paradoxalement va conduire suivant cette loi à une solution plus vite obtenue. Dans le cas de JC on retrouve un profil proche de celui obtenu avec une trajectoire classique et pilotage par la CEM. La figure "résultats en conflit" montre ces tendances.

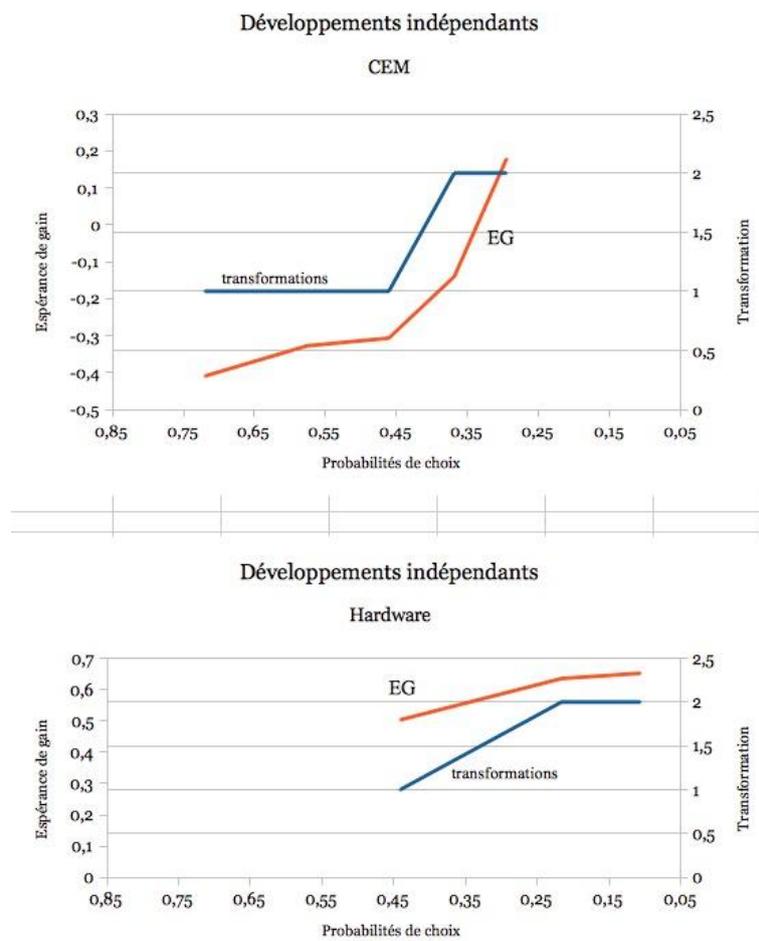


Figure “résultats en conflit”.

Notons que JR atteint la conformité en trois jets alors que JC, de par les hypothèses et lois de choix, ne l’atteint qu’en cinq jets.

Ici les basculements sont décidés indépendamment pour les deux acteurs. On retrouve de façon séparée les tendances observées pour la société de la trajectoire classique mais JR peut opérer sa décision rapide de changement là où le seuil calculé sur la somme des probabilités repoussait cette décision pour la société. Le moindre creusement dans le profil de JC vient du fait que ses pertes sont calculées dans son seul référentiel et non plus pour l’équipe.

13.3.8 Analyse : présence d’un “horizon de Nash” ?

13.3.8.1 Evolution avec ou sans mémoire

L’application présentée est un exemple d’évolution dont on ne peut prévoir à l’avance l’issue. Cela pose des problèmes de représentation et d’analyse au-delà des problèmes de modélisation. Comme la durée de l’évolution peut être aussi très longue (on traite ici du cas général), on ne peut considérer facilement l’arbre complet. Par contre on peut s’intéresser au seul horizon du jeu⁶. Autour de cet horizon on peut définir deux sortes d’évolutions. Les évolutions avec mémoire et sans mémoire. Soit g une métrique initiale d’un vecteur d’information I et T une transformation possible à l’horizon $H(né)$. La transformation appliquée à g autour de H s’écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. On rappelle que l’on appelle horizon la dernière ligne de l’arbre d’évolution

Le vecteur d'information à l'instant $n + 1$ devient $\begin{bmatrix} 0 \\ Tg \end{bmatrix}$. Si la performance n'est pas atteinte, ce vecteur va subir une nouvelle transformation à l'horizon suivant. Comme on désire restreindre l'étude aux alentours de l'horizon, une première solution consiste à revenir à l'état initial. Le propagateur dans ce cas revêt la forme suivante :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & T^{-1} \\ T & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le produit de propagateurs qui va traduire les tentatives successives d'arriver au bon résultat, on va, s'ils ont tous la forme ci-dessus, ne pas mémoriser les états intermédiaires puisque l'on revient à chaque fois à l'état initial. On a donc dans la séquence $\gamma_n \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-1} \dots \gamma_1 \gamma_1 I$, n allers-retours autour de l'horizon comme illustré figure "évolution sans mémoire".

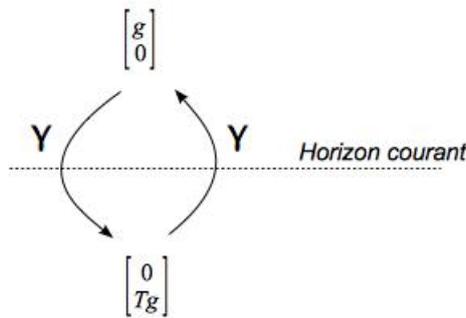


Figure "évolution sans mémoire".

Mais l'on peut toujours parvenir au même résultat en appliquant directement une succession de propagateur qui atteignent un état donné à partir d'un état précédent, sans revenir à l'état initial. Le propagateur a dans ce cas l'allure suivante :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{bmatrix}$$

L'évolution "avec mémoire" est identique dans la forme à celle sans mémoire, seule les composantes du propagateur sont différentes.

13.3.8.2 Algorithme d'évolution

En s'inspirant des méthodes métaheuristiques pour l'optimisation[MOD], on construit un algorithme qui finalement traite de l'évolution autour de l'horizon, à chaque nouvelle étape. La représentation par algorithme permet de visualiser simplement la succession des opérations. On convient d'une forme de dessin :

1. les jonctions (conteneur en forme de cercle) sont des conditions ;
2. les branches fermées (entre jonctions) sont des opérations ;
3. les branches ouvertes (connectées à une seule jonction) sont des données d'entrée ou des résultats.

La figure "algorithme à l'horizon" donne ainsi le traitement programmé dans le cas de la trajectoire classique.

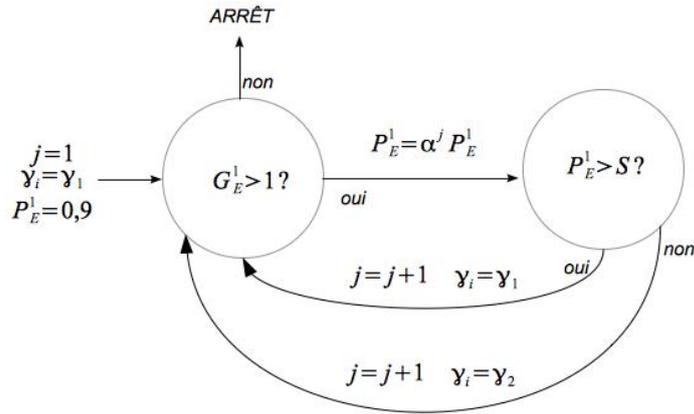


Figure "algorithme à l'horizon".

Sur cette figure, la variable j est le nombre de jets, γ_i le propagateur dans une direction i , G_E^1 l'écart au gabarit et P_E^1 la probabilité de choisir la transformation T_1 . La branche incidente qui relie les deux jonctions a pour opération l'évolution de la probabilité de choix. Il s'agit d'un processus de Markov d'ordre 1. La branche de réaction applique des transformations avec mémoire. L'arbre d'évolution se trouve ainsi réduit à cet algorithme qui décrit le comportement sur l'horizon. Mais cet algorithme est quand même attaché à un comportement particulier - ici la trajectoire classique. On va, par son intermédiaire, pouvoir tracer les trajectoires des comportements étudiés (aux gains pondérés) dans un espace CG partiel duquel on va pouvoir déduire la représentation en espace CG telle qu'elle est définie aux chapitres 10 et 11.

Le programme que nous avons écrit suit cet algorithme et ne calcule pas de fait toutes les trajectoires particulières possibles. Entre autre il ne calcule pas les trajectoires où l'acteur après avoir choisi T_2 rebascule sur T_1 . Un algorithme plus général pour ces trajectoires particulières est présenté figure "algorithme général".

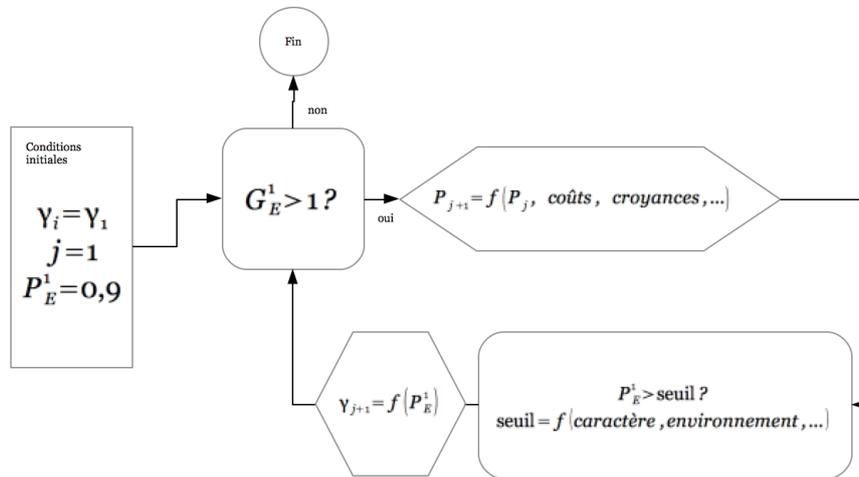


Figure "algorithme général".

13.3.8.3 Tracés des trajectoires particulières

Définition :

On appelle **trajectoires majoritaires** les trajectoires associées aux probabilités les plus fortes à chaque jet, autrement dit la trajectoire constituée de la succession d'orientations associées aux transformations portant les plus fortes probabilités de choix.

On appelle **trajectoires particulières** des trajectoires qui ne sont ni majoritaires ni de bords.

La trajectoire la plus rapide est celle où les deux acteurs sont solidaires et choisissent la transformation T_2 pendant deux jets. La figure "parcours direct" montre l'algorithme de cette trajectoire.

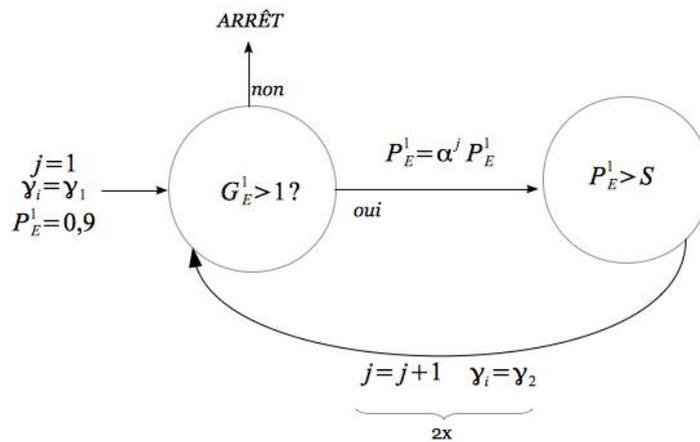


Figure "parcours direct".

Dans une représentation en trajectoires suivant les seules directions, on aura de fait toujours deux jets dans la direction T2 pour réussir puisque l'on est dans un processus avec mémoire. Ainsi, la figure "trajectoires possibles" montre quelques unes de ces trajectoires en normalisant les probabilités pour chaque jet dans chaque direction (les longueurs des projections dépendent des probabilités qui sont définies par les cursus et caractères des joueurs).

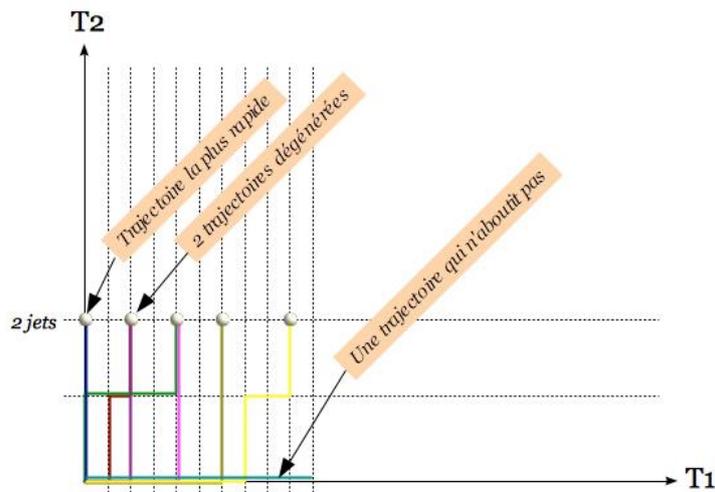


Figure "trajectoires possibles".

Certains résultats aboutissent au même point. Cependant, dans l'espace CG les trajectoires peuvent être différentes, car elles n'auront pas forcément la même espérance de gain en final. La dégénérescence peut ainsi n'exister qu'en représentation simplifiée.

Ce graphe, facile à tracer car ne nécessitant pas la mémorisation de tous les couples probabilités versus transformations permet de trouver les lieux d'arrivée des différents chemins. On voit qu'ici ils arrivent tous - sauf ceux jouant une seule fois T2 ou pas du tout - sur un horizon où la réussite est garantie après deux jets dans la direction T2.

On peut tracer l'espace CG à partir de ces trajectoires pour la société puisque le vecteur trajectoire résulte de la somme des probabilités dans chaque direction. Peu importe cette fois qu'un acteur termine plus vite qu'un autre s'il a choisi majoritairement telle ou telle trajectoire. Au final seul le lieu du résultat compte faisant le bilan de toutes les directions choisies avec la somme de toutes les probabilités qui y ont conduit. On obtient la représentation donnée figure "trajectoires de la société" où l'on retrouve cette fois des dégénérescences en absence de représentation 3D incluant le gain.

13.3.8.4 Représentation dans l'espace des transformations

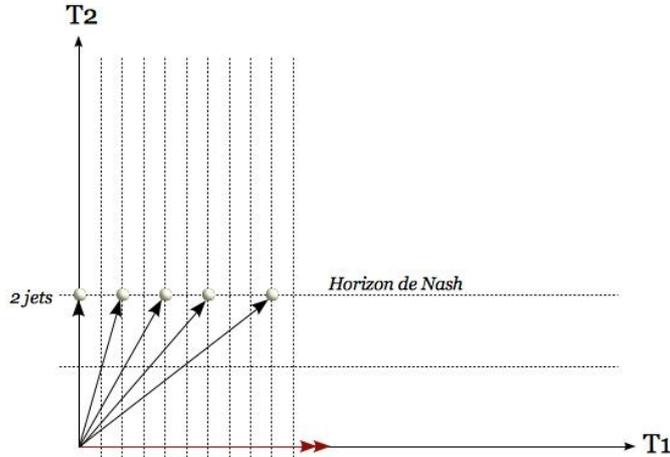


Figure "trajectoires de la société".

L'équilibre de Nash est la stratégie d'un acteur qui maximise son gain compte-tenu de la stratégie des autres acteurs. Ici les acteurs ne sont que deux. La stratégie de JC qui maximise son gain quel que soit le choix de JR est la stratégie qui consiste à se diriger au plus tôt possible dans la direction T2. De même pour JR, la stratégie qui maximise son gain quoi que choisisse JC est celle consistant à se diriger au plus tôt possible dans la direction T2. Cela signifie que, au global, peu importe ce qui a conduit les acteurs à se diriger suivant T1 pendant un certain nombre de jets, il faut qu'à un moment il prennent le choix de la transformation T2 pendant 2 jets. Dans une situation donnée, c'est à dire à un horizon quelconque où les acteurs n'ont pas encore atteint la conformité, la meilleure stratégie à cet horizon est de choisir T2. La droite pointant 2 jets dans la direction T2 est donc une limite optimum pour tous les horizons possibles (c'est une droite ici parce que nous avons égalisé les probabilités. Dans la réalité c'est une courbe). Elle constitue ce que l'on peut appeler un "horizon de Nash".

Définition :

On appelle **horizon de Nash** dans un espace CG une courbe vers laquelle convergent tous les chemins qui ne sont pas de bords et certains des chemins de bords⁷.

Cette proposition découle des hypothèses d'existence d'un ensemble commun de transformations (connaissance commune) et d'un objectif commun. Cette terminologie peut être critiquée, en même temps il ne nous semble pas qu'elle manque de pertinence eu égard aux hypothèses et conditions de jeu formulées⁸.

7. Le deuxième bord hormis la direction T1 est constitué des trajectoires où les acteurs ne jouent qu'une seule fois la transformation T2 et s'entête de nouveau à ne jouer que T1. Toutes ces trajectoires se retrouvent pour la société comme un ensemble de vecteurs dont l'extrémité touche la droite parallèle à l'axe T1.

8. Définition :

une stratégie est fondamentalement l'art de combiner des actions pour atteindre un objectif [dictionnaire Hachette] et concrètement l'ensemble des actions prises par un joueur.

Dans le formalisme proposé, une stratégie devient l'ensemble des transformations choisies au cours d'une trajectoire dans l'espace choix - gains (CG) :

$$\sigma_i = \{T_{(é)}, T_{(2é)}, \dots, T_{(Né)}\}$$

Suivant [DFJT], une stratégie (sous entendue pure) est souvent concrétisée sous la forme d'une matrice. Soit que dans notre formalisme, une autre façon de le dire est qu'une stratégie pure est un élément du propagateur γ sans sa composante markovienne $p_{mk} : t_{mk} \cdot t_{mk}$ projette l'ensemble σ_i de tous les joueurs i sur un graphe $G(j, l, B)$ de jonctions j , liens l et incidence B . Il associe les stratégies des joueurs avec des graphes qui sont des simplexes fermés, bornés et convexes.

En stratégie mixte : toujours en reprenant [DFJT], une stratégie mixte est une distribution de probabilité sur une stratégie pure.

Partant des réflexions précédentes, la stratégie mixte se traduit dans notre formalisme par l'adjonction de la composante des poids probables aux liens p_{mk} à t_{mk} , soit le rajout de la composante markovienne au propagateur des transformations. De là, on travaille toujours en stratégies mixtes via γ_{mk} . Autrement écrit, pour 1 joueur : $\sigma_i^* = \{(T_{(é)}, p_{(é)}), (T_{(2é)}, p_{(2é)}), \dots, (T_{(Né)}, p_{(Né)})\}$. La trajectoire dans l'espace CG dépourvue du gain est donc l'image d'une stratégie.

Ceci posé, rappelons la définition d'un équilibre de Nash :

Définition :

Un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies (1 par joueur) telle que chacune de ces stratégies est choisie en prévoyant

13.4 Recherche d'un horizon de Nash pour JC et la société solidaire

Lorsque l'on travaille autour de l'horizon pour étudier les trajectoires dans l'espace CG, on peut réduire l'algorithme de choix à une probabilité bayésienne. Reprenant la figure "algorithme à l'horizon", on peut la réduire à un lien unique partant et revenant à la jonction et portant une probabilité bayésienne. La figure "horizon bayésien" montre cette réduction vue de JC.

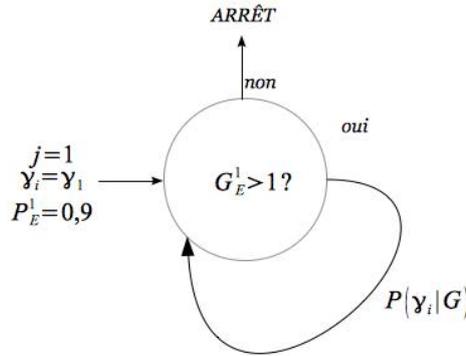


Figure "horizon bayésien".

La probabilité pour choisir telle transformation de part et d'autre d'un horizon se décline suivant le théorème de Bayes :

$$P(\gamma_i | G_j)_\epsilon = \frac{P(G_j | \gamma_i)_\epsilon P(\gamma_i)_\epsilon}{P(G_j)} \tag{13.6}$$

On cherche ici la probabilité d'avoir à la fois la transformation γ_i appliquée et le gain cible G_j . Dans cette expression, le terme $P(G_j)$ ne dépend pas d'un facteur humain. C'est la probabilité d'obtenir tel gain pour tel tenfold d'origine et tel ensemble de transformations disponibles, pour un critère de gain défini. Le terme $P(G_j | \gamma_i)_\epsilon$ est calculable, c'est la probabilité d'obtenir le gain G_j suite à l'usage de la transformation γ_i à l'horizon ϵ . Le terme $P(\gamma_i)$ porte toute la dimension de facteur humain du problème. Comme nous l'avons envisagé dans les trajectoires que nous avons décrites, un responsable CEM va choisir une solution de départ qui résulte de son cursus métier (au sens large). Pour une personne incompétente ou n'ayant pas de préférences, cette probabilité est de 1/2. Pour une personne butée et ayant un a priori elle peut être de 1 ou 0 suivant la transformation (trajectoires de bords). On va essayer dans les paragraphes suivant de déterminer ces différents termes pour ensuite établir une méthode de recherche de l'horizon de Nash.

correctement ce que feront les autres.

Justification de la terminologie "horizon de Nash".

Les éléments précédents nous permettent de préciser plus en détail le choix de la terminologie "horizon de Nash".

Dans un processus de jeux, une succession de transformations particulières $\{t_1, t_2, \dots, t_f\}$ conduit à l'objectif recherché. On pose que tout joueur rationnel ayant intégré à un moment donné dans l'histoire de son jeu cette succession de transformations et sachant ce que les autres joueurs ont choisi comme stratégie après avoir suivi la même succession, choisira cette même stratégie commune, soit que sous notre formalisme :

$$\gamma_i(n > n_0, \sigma_{-i}^*) = \sigma_i^*$$

n_0 étant l'indice d'événements à partir duquel la succession de transformations est intégrée. Notons que cette suite de transformations peut être dans un ordre différent, un joueur pouvant reconnaître un schéma de suite de transformations même dans un ordre différent, comme étant le schéma solution.

De fait, lorsque l'on étudie l'arbre d'évolution (AE) autour de son horizon, l'ensemble des trajectoires vont mener à une courbe commune dans l'espace CG suivant la rapidité avec laquelle les différents joueurs détecteront le schéma solution. On appelle cette courbe un "horizon de Nash".

Ce concept d'horizon suppose que les joueurs connaissent les stratégies des autres joueurs, passées ou actuelles mais ne les suivent pas strictement. Ceci car l'information, les conditions de jeux, etc., ne sont pas strictement identiques mais une connaissance commune existe néanmoins. Dans le cas de l'application, cette connaissance commune est celle du métier de la CEM.

Si de plus les joueurs ne communiquent pas entre eux mais que la connaissance commune (savoir faire standard) et les moyens sont similaires, on ne trouve plus une courbe mais une surface, dénommée "surface de Nash" par abus de similarité.

13.4.1 $P(G_j|\gamma_i)_\epsilon$

Dans un processus avec mémoire, en notant $a = \gamma_1\gamma_1$, $b = \gamma_2\gamma_2$, les chemins possibles se déclinent suivant la succession de transformations : $b^u a^n b^v a^m \check{g}_0$. \check{g}_0 est le tenfold d'origine et les transformations sont des transformations de tenfolds. La transformation de la métrique s'écrit sous une forme $\Lambda_\beta^\mu g_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\nu$.

Le gain lui s'écrit comme une certaine proportion α d'une observable k^x en un lieu du réseau, comparée à un objectif Θ . Dans un cas simple, le gain décrit comme :

$$G_j = \frac{\alpha}{\Theta} (k^x)_\epsilon \quad (13.7)$$

doit être supérieur à 1. Or : $(k^x)_\epsilon = (y^{x\nu})_\epsilon e_\nu$ dans une configuration à sources e_ν invariantes. Finalement on cherche :

$$P\left(G_j = \frac{\alpha}{\Theta} (y^{x\nu})_\epsilon e_\nu > 1 \mid \gamma_i(\epsilon)\right) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \left(\Lambda_\beta^\mu\right)_{i,\epsilon} & \left(\Lambda_\sigma^\nu\right)_{i,\epsilon} \\ & 0 \end{array} \right] \quad (13.8)$$

Dans notre processus, cette expression se simplifie dès lors que la transformation T_2 a été appliquée au moins une fois. Dans ce cas, il suffit de l'appliquer une seconde fois pour atteindre le gain objectif. On trouve alors $P(G_j = 1|\gamma_2) = 1$. Or l'ensemble des gains possibles n'est pas réduit à un terme. En CEM, le fait de ne pas être conforme mais d'avoir qu'une petite portion non conforme dans la bande de fréquences constitue en soit un gain non nul, une discussion avec le client pouvant toujours amener à une dérogation. Mais la formule de Bayes fixe elle-même la limite, puisque le rapport :

$$\frac{P(\gamma_i)_\epsilon}{P(G_j)}$$

doit être inférieur à 1. Il est troublant alors de constater que si la probabilité d'obtenir le gain cible est très faible, cela implique que la probabilité de choix de la transformation correspondante l'est plus encore. Ceci découle aussi du fait que, en jeu partiel (T_2 ayant été joué une fois), $P(G_j = 1|\gamma_1) = 0$. Ainsi le rapport,

$$\frac{P(\gamma_2)_\epsilon}{P(G_j = 1)}$$

est borné.

13.4.2 $P(\gamma_i)_\epsilon$

Si l'on développe le dénominateur on fait clairement apparaître la faiblesse d'un gain optimum à l'événement ϵ :

$$P(G_j)_\epsilon = P(G = 1|\gamma_2) P(\gamma_2)|_\epsilon + P(G = 0.05|\gamma_1) P(\gamma_1)|_\epsilon + \dots = \sum_j P(G_j|\gamma_i) P(\gamma_i)|_\epsilon \quad (13.9)$$

Mais comme seule la transformation T_2 conduit au succès maximum, on peut résumer le développement à deux termes :

$$P(G_j)_\epsilon = P(G = 1|\gamma_2) P(\gamma_2)|_\epsilon + \sum_j P(G_j < 1|\gamma_1) P(\gamma_1)|_\epsilon$$

C'est parce que les joueurs ne connaissent pas la martingale que la probabilité de jouer T_1 est non nulle, voire même la plus forte en conditions initiales. Au contraire la solution γ_2 est la moins attirante, et de fait comme de plus en début de transformations, T_1 apporte quand même un gain, les acteurs persistent logiquement dans cette direction avant d'éventuellement repartir dans l'autre direction. Mais comme la transformation T_1 ne donne pas entièrement satisfaction et plafonne sur une performance maximum, JC doit logiquement et rationnellement changer de stratégie au bout d'un certain nombre de jets (suivant son entêtement). Or en jeu partiel, ce choix conduit au gain optimum. Ainsi, plus le nombre de jets augmente plus la probabilité de $P(\gamma_2)$ tend vers 1/2 (sauf pour la trajectoire de bord constant T_1 implicitement exclue en jeu partiel). Et dans ce cas $P(G = 1)$ tend également vers 1/2. Comme on peut reporter ce raisonnement en début de jeu, on trouve finalement que (toujours sous la condition que T_1 ait été choisie une fois) :

$$\lim_{\epsilon > \epsilon_0} P(\gamma_2) = \frac{1}{2} \tag{13.10}$$

ϵ_0 étant un seuil qui dépend du caractère du joueur. Sachant que $P(G = 1 | \gamma_2) = 1$, quel que soit le nombre de fois où la direction T_1 a été choisie (toujours en jeu partiel où T_2 a été choisie une fois), tout chemin dans l'espace CG en jeu partiel s'écrit sous la forme :

$$\vec{C}_{\{aaabaa\dots\}}, \forall \{aaabaa\dots\} \supset \{b, b\} = 2\mathbf{T}_2 + \alpha\mathbf{T}_1 \tag{13.11}$$

Il existe donc en jeu partiel et dans les hypothèses formulées une courbe limite où toutes les trajectoires finissent. Nous appelons cette courbe limite **horizon de Nash**.

13.4.3 Recherche du chemin optimum vers l'horizon de Nash

Les joueurs ont intérêt à prendre au plus vite le bon chemin. Comme les transformations ne jouent ici que sur des composants dans la métrique du tenfold d'origine, on peut exprimer l'optimum sous la forme :

$$k^\nu (c_{(\mu\nu)}) \text{ minimum}$$

où $c_{(\mu\nu)}$ est une composante de cette métrique.

On a là un problème typiquement métaheuristique [MOD] ou dans les cas assez simples, un problème d'optimisation par plans d'expériences ou dérivations partielles [BMDD]. Le minimum du courant peut être obtenu par la recherche du maximum de la métrique si les couplages sont assez restreints, ou de maxima et minima de ces termes dans le cas contraire. Cette étude rejoint les études générales d'optimisation de la métrique et sort du sujet de cette thèse. On montre ici simplement que c'est bien aux niveaux des petits modes (valeurs des composants) que se détermine l'optimisation de la recherche de gain et qu'au niveau des grands modes (choix des acteurs) on trouve l'optimisation du comportement, c'est à dire les stratégies optimales de choix de transformations en absence de connaissances pour converger au plus vite vers la solution.

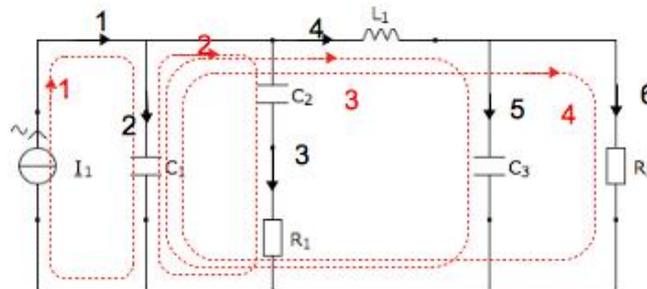
Dans notre cas la recherche d'un courant minimum revient à trouver un extrémum de :

$$\frac{\partial}{\partial c_{(\mu\nu)}} (y^{\nu\mu} e_\mu)$$

$y^{\nu\mu}$ est la métrique inverse. En notant $s_i = (C_i p)^{-1}$, la métrique dans l'espace des mailles a la forme :

$$g = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & s_1 \\ s_1 & s_1 + s_2 + R_1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & s_1 + L_1 p + s_3 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & s_1 + L_1 p + R_2 \end{bmatrix}$$

On rappelle sur l'image ci-dessous le circuit associé :



On voit que la métrique se décompose en quatre quadrant principaux. Le quadrant en haut à gauche détermine la source d'énergie, celui en bas à droite la charge et les quadrants extra-diagonaux les couplages.

Les deux quadrants de couplages sont transposés l'un de l'autre. Soit A et B les deux quadrants diagonaux et C celui de couplage, g s'écrit :

$$g = \begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}$$

De cette structure on déduit y inverse de g :

$$y = \frac{1}{AB - CC^t} \begin{bmatrix} B & -C \\ -C^t & A \end{bmatrix} = \frac{\bar{y}}{AB - CC^t}$$

où l'on note \bar{y} la matrice réduite égale à $(AB - CC^t)y$.

Recherchons les extréma de \bar{y} . Seul B dépend de l'inductance et seul A dépend du condensateur. Si $c_{(\mu\nu)} = L_1$, on trouve facilement que :

$$\frac{\partial}{\partial L_1} \bar{y}^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par contre si $c_{(\mu\nu)} = s_2$ on trouve que :

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \bar{y}^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où l'on voit que la variation d'inductance sur le produit $\bar{y}^{\nu\mu}e_\mu$ agit directement sur la source, proportionnellement à la fréquence (pe_1), alors que la variation de condensateur n'agit qu'en proportion de son carré et inversement à la fréquence ($\frac{\partial}{\partial C_2} \left(\frac{1}{C_2 p} e_1 \right) \rightarrow e_1 ((C_2)^2 p)^{-1}$). Comme le bruit est essentiellement situé dans la partie haute de la bande passante, on comprend qu'agir sur l'inductance soit beaucoup plus efficace que d'agir sur le condensateur.

Dans des topologies plus compliquées, les dérivées partielles peuvent devenir difficiles à exprimer. On peut dans ces cas là recourir à des méthodes comme les algorithmes des fourmis. On "lance" des fourmis dans chaque direction possible. Plus il y a de fourmis qui arrivent vite au but, plus le chemin qu'elles ont emprunté est sans doute le chemin optimum. Comme pour des méthodes de Monte-Carlo, ces explorations de possibilités peuvent être longues, mais leur simplicité permet de trouver les solutions avec peu d'erreurs potentielles.

On peut aussi faire des explorations systématiques en associant les directions d'espace à des symboles dans une base choisie, puis en scrutant toutes les combinaisons de symboles.

Ayant déterminé l'existence d'un optimum sur la métrique, il reste à envisager la probabilité de son usage. Comme le signale Alain Berthoz, citant James : "pour que l'attention se porte sur un objet et le perçoive intégralement, il ne suffit pas qu'il soit présent aux sens, il faut encore qu'il soit présent à l'imagination"[ABJ]. Nous pouvons sans doute abonder ce constat du fait que l'imagination est alimentée en partie par une communauté en science. De fait, comme nous l'avons posé en postulat pour le cas étudié, la probabilité de choisir la "bonne" transformation au départ est très faible. Le métier de la CEM reste malheureusement par trop intuitif. Beaucoup de spécialistes se baseront donc sur le choix commun plutôt que sur un choix démontré. Ainsi pour anecdote, on trouve encore des experts expliquant qu'un blindage ne doit être relié qu'à une extrémité alors que la démonstration du meilleur choix (aux deux extrémités) a été faite dans les années "80" (a priori cela n'a pas fait un tube!). On remarque qu'il existe de fait un bord - mais idéal celui-là - qui est la trajectoire directe $\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2$ en absolu cette fois. Mais sa probabilité est très faible. D'une manière générale il semble sur le peu de cas réalisés que les trajectoires de bords dans les mécanismes de décisions et résolutions de problèmes portent les pires et les meilleures solutions. C'est peut-être pour cela que la nature se positionne le plus souvent sur des trajectoires plus centrales, bien qu'il semble au vu de recherches récentes, que la nature "essaie" des solutions avec une proportion de hasard significative. Elle redonne ainsi du poids à des trajectoires de bords et fait émerger celles qui sont performantes, les autres étant rapidement abandonnées. Ce jeu de hasard est une composante essentielle des techniques d'algorithmes génétiques.

13.5 Première conclusion sur le chapitre 13

Cette application a permis de mettre en évidence la façon dont la méthode pouvait être implémentée dans un premier temps avec une étude autour de l’horizon. Le but est ici, comme dans toute la thèse, non pas tant d’expliquer un phénomène que de montrer comment la méthode peut être développée pour modéliser ce phénomène. De fait les situations et valeurs des éléments ne sont pas forcément très pertinents. Mais les réflexions autour des graphes, modèles physiques et comportementaux, modèles de jeux, sont transposables à n’importe quel problème.

On a vu dans le cadre de cette application que l’arbre d’évolution se décline finalement dans le cas le plus général comme un algorithme. Et l’on retrouve là les démarches des modélisations de systèmes complexes proposées par exemple en SysML ou openModelica. La méthode proposée pourrait très bien servir de base formelle pour les diagrammes SysML, permettant de les mathématiser en les enrichissant d’une composante “facteur humain” elle-même s’appuyant sur les modèles mathématiques de la théorie des jeux.

Un autre point remarquable dans l’exercice fait pour cette application est l’impact du modèle bayésien. On s’aperçoit que cette formule permet effectivement de répondre à des calculs de probabilités qui seraient irréalisables sans son existence. On est frappé de voir comment elle lève les barrières et donne intrinsèquement des interprétations sur les comportements.

Dans l’espace CG on peut, en s’affranchissant des trajectoires de bords, définir un horizon de Nash, comme une courbe vers laquelle tendent toutes les trajectoires plus ou moins rapidement. Dans le cas de jeux multi joueurs, comme dans la situation de conflit que l’on a abordé, cette courbe reste existente car même si les gains des joueurs sont différenciés, ce pourra être une surface locale, voire des points qui représentent les stratégies optima pour chaque acteur. On a vu que les fonctionnements des réseaux expliquent les “petits modes” qui engendrent les observables aux niveaux des “grands modes”. Les choix sur des critères définis devenant alors fonction de ces résultats plus de comportements rationnels ou non, mais imposant certains choix de transformations plutôt que d’autres.

L’existence d’un “lieu de Nash” en jeu partiel peut être généralisée de la façon suivante :

$$\forall \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n \in \mathcal{T}, \exists \{\gamma_x, \dots, \gamma_y\}(\mathcal{T}), \vec{\mathcal{C}}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \supset \{\gamma_x, \dots, \gamma_y\}, \quad (13.12)$$

$$\vec{\mathcal{C}}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \neq \alpha \mathbf{T}_i, \forall i / P(G(k^u, k^v, \dots) = G_{opt} | \vec{\mathcal{C}}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}) \neq 0$$

G_{opt} étant un gain optimum défini.

Le fait de spécifier une probabilité conditionnelle non nulle est plus fort que de simplement vérifier que la succession de transformations conduit à l’optimum, car on peut avoir existence de cette succession sans pour autant que la probabilité de choix de la succession de directions correspondante soit non nulle. En fixant cette probabilité, on fixe implicitement $P(T_x \dots T_y | G = G_{opt})$ (avec toujours en hypothèse sous-jacente que les axes de l’espace CG sont orthogonaux et que l’ordre des transformations ne compte pas, ou tout au moins que s’il influe, il ne remet pas en cause l’optimum).

L’ensemble des extrémités des chemins $\vec{\mathcal{C}}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \supset \{\gamma_x, \dots, \gamma_y\}$ constitue un lieu de Nash dans l’espace CG. Notons qu’il peut y avoir plusieurs lieux de Nash suivant les critères de gain optimum.

13.6 Analyse sur l’arbre complet

On peut aborder l’analyse non plus autour du seul horizon, mais sur l’arbre complet. On détaille d’abord les mécanismes de construction de l’AE puis on discute des différences avec l’étude portant autour de l’horizon.

13.6.1 Mécanismes d’évolution de l’AE

L’AE démarre avec un tenfold \check{u}_0 qui regroupe l’électronique de puissance réduite et sa source telle que présentée figure “RSIL reconstruit”. Ce tenfold regroupe l’incidence du réseau, sa métrique et sa source $\left(\{B, L\}, \overset{c}{h}_{\alpha\sigma}, T_\alpha \right)$:

B est l’incidence, L la connectivité, $\overset{c}{h}_{\alpha\sigma}$ la métrique et T_α les sources. On a pu travailler autour de l’horizon parce que le motif de croissance de l’AE est répétitif. Partant d’un vecteur d’information réduit à $I_0 = [\check{u}_0]$, on a une première matrice de croissance C_δ donnée par :

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La figure “croissance de l’AE dans l’application” montre les jonctions qui se rajoutent sur l’AE au fur et à mesure des étapes.

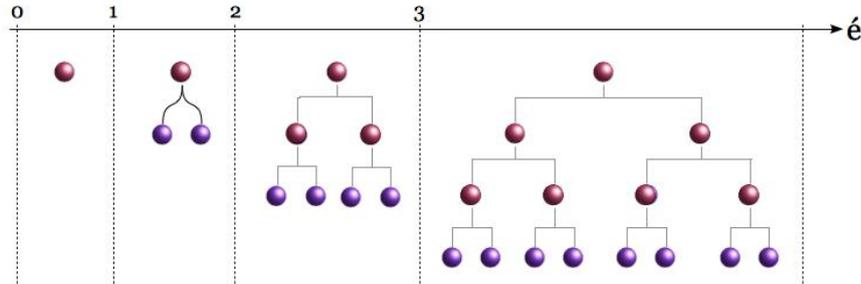


Figure “croissance de l’AE dans l’application”.

A l’étape 1 on obtient un vecteur d’information donné par :

$$I = C_\delta I_0 = \begin{bmatrix} \check{u}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ce vecteur est associé un propagateur γ dont on doit déterminer les composantes t et p . Dans la mesure où les deux transformations envisagées ne modifient pas la topologie du réseau, les transformations t_1 et t_2 ne touchent que la métrique : $t_1 = \left(\{B, L\}, \Lambda_1 \overset{c}{h}_{\alpha\sigma}, T_\alpha \right)$, $t_2 = \left(\{B, L\}, \Lambda_2 \overset{c}{h}_{\alpha\sigma}, T_\alpha \right)$. Les transformations Λ_1 et Λ_2 sont celles données §13.3.5.

A un instant $n\acute{e}$ donné, on peut mémoriser dans une liste h_{-1} les numéros des jonctions qui précèdent l’horizon, comme la liste des jonctions de l’horizon h . Pour chaque colonne dans t correspondant à un élément de la liste h_{-1} on fait correspondre pour les deux éléments successifs et les deux lignes de t correspondantes (puisque ici on a un motif répétitif de croissance d’ordre 2) de h les composantes t_1 et t_2 de t . Ainsi à l’étape 2 où l’AE comporte sept jonctions (voir figure “croissance de l’AE dans l’application”), les deux jonctions de h_{-1} sont les jonctions 2 et 3 et l’horizon porte les jonctions 4, 5, 6 et 7. Nous aurons dans t aux colonnes 2 et 3 pour les lignes (4, 5) et (6, 7) le motif : $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ répété. Cet algorithme se reproduit tant que l’évolution dure.

Les observables et le gain à chaque horizon étant définis, on peut construire la composante p de γ sur les raisonnements développés dans l’étude autour de l’horizon. Si G_i est le gain pour un acteur donné issu de l’encapsulation des tenfoldés \check{u}_i dans les jonctions $i \in h_{-1}$, les composantes p_{ji} de p sont données par :

$$p_{ji} = P(t_{ji} [j \in h] | G_i)$$

On a vu que l’on pouvait calculer ces probabilités par la formule de Bayes. La matrice de p a la même structure que celle de t . Les applications successives de t à I engendrent dans ce vecteur les expressions des transformations successives utilisées pour chaque chemin possible. On peut créer parallèlement à I un vecteur des probabilités calculées disposant ainsi pour chacun de ces chemins des produits de probabilités correspondant. Ce vecteur a pour premier terme 1. Rappelons ce mécanisme pour les deux premiers événements. Pour passer de 1 à 2 on a une croissance :

$$C'_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suivant les règles précitées, la matrice t a l'allure suivante :

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice p :

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La composante t du propagateur est appliquée au vecteur d'information

$$I = \begin{bmatrix} 0 \\ t_1 \check{u}_0 \\ t_2 \check{u}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors que la composante p est appliquée au vecteur qui porte les probabilités de choix des chemins que nous pouvons noter avec un tilde :

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_{21} \\ p_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{O}(\check{u})$ est le vecteur des observables extraites des tenfolds \check{u} de l'horizon h , le gain pondéré GP de chaque chemin i sur l'horizon est :

$$GP(i) = \tilde{I}^{(i)} \mathcal{L} \left\{ \mathcal{O} \left(I^{(i)} \right) \right\} \quad (13.13)$$

$\mathcal{L} \left\{ \mathcal{O} \left(I^{(i)} \right) \right\}$ est une loi appliquée aux observables pour quantifier le gain ($G_j = \delta_{ji} \mathcal{L} \left\{ \mathcal{O} \left(I^i \right) \right\}$). Loi donnée équation 13.5 pour l'application). L'espérance de gain au sens classique s'écrit ici comme la somme des gains pondérés.

13.6.2 Projection de l'AE complet sur l'espace CG

Lorsque l'on réalise le produit $t.I$ des objets précédents on trouve l'information suivante :

$$I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_1 t_1 \check{u}_0 \\ t_2 t_1 \check{u}_0 \\ t_1 t_2 \check{u}_0 \\ t_2 t_2 \check{u}_0 \end{bmatrix}$$

Le produit $p.\tilde{I}$ donnant :

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{42}p_{21} \\ p_{52}p_{21} \\ p_{63}p_{31} \\ p_{73}p_{31} \end{bmatrix}$$

Chaque composante $(I^{(k)}, \tilde{I}^{(k)})$ renvoie à un chemin dans l'AE et une trajectoire dans l'espace CG. Nous allons retrouver des chemins courts, dont le plus court $\gamma_2\gamma_2\tilde{I}$ si $\tilde{I} = (I^k, \tilde{I}^k)$ et d'autres beaucoup plus longs dont une trajectoire de bord ou chemin "sans fin" : $\gamma_1 \dots \gamma_1\tilde{I}$ (attention que dans ces expressions, le propagateur et le vecteur d'information dépendent de ϵ).

13.6.3 Horizon de Nash

Nous avons vu que pour ce cas existait un horizon de Nash, c'est à dire :

$$\forall \vec{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_N} \text{ si } \gamma_1 \dots \gamma_N \supset \gamma_2 \text{ au moins 2 fois, alors, soit } GP_0 \text{ le gain pondéré cible, } GP(\vec{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_N}) > GP_0.$$

C'est là la condition faible, puisque rien n'oblige les joueurs à choisir un chemin contenant deux fois γ_2 même s'il existe. Nous avons alors exprimé une condition forte sous la forme :

si $\vec{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_N} \supset \gamma_2$ alors pour tout joueur i tel que $P_i(\gamma_2(h) | GP(h_{-1})) \neq 0$, il existe un horizon de Nash pour lequel $GP(\vec{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_N}) > GP_0$.

13.6.4 Equilibre parfait pour une stratégie markovienne

Si on considère que le joueur ne se base que sur le résultat précédent, qui appartient à h_{-1} , on est en présence d'une stratégie de Markov. Par ailleurs on peut partitionner l'AE en ne considérant que l'AE au-delà du premier horizon où γ_2 est jouée une première fois. A partir de cet horizon, les joueurs prenant conscience de l'efficacité de cette solution, on peut considérer que les choix seront identiques suivant les caractères au-delà de cet horizon. Sans considérer les comportements de bord (T_1 maintenue, $\forall \epsilon$), on peut affirmer que l'existence de l'horizon de Nash tel que nous l'avons défini implique l'existence d'une stratégie ici simple, qui consiste à rejouer une fois γ_2 . Cette stratégie constitue un équilibre parfait markovien[DFJT]⁹.

13.7 Du caractère au propagateur et à la croissance

Le propagateur contient les choix de transformations et les probabilités de ces choix dans l'AE. Il est donc une image intrinsèque du caractère du joueur associé à ce propagateur. Plutôt que d'étudier le propagateur

9. Sur le concept de "Markov Perfect Equilibrium" :

En se reportant à [DFJT] (chapitre 13.2) et l'article "Markov Perfect Equilibrium"[MATI] disponible sur internet on définit tout d'abord la notion de partition sous notre formalisme (voir §10.6.6.3). Le vecteur d'information I regroupe les tenfolds créés lors de l'évolution. Une partition est donc reconnaissable en ce sens que, **toujours dans un critère de similarité** (voir l'annexe E partie XII pour cette notion) puisque l'on travaille sur les groupes de transformations et non sur les transformations elles-mêmes (ce qui rend implicite une similarité des résultats et non une parfaite identité), le vecteur d'information est identique au-delà d'une certaine étape. Cela revient à dire que, sauf à ce qu'une information passée influe sur le futur, dès lors que l'on atteint un certain point dans le jeu, la suite est "implicite".

La notion de perfection s'attache au fait que la propriété s'applique à tout sous-jeu du jeu de départ, donc pour toute partition.

Sous ces hypothèses, les gains respectent les propriétés de Von Neumann Morgenstern à savoir : comparaison des distributions de probabilités possible (soit comparer les p_{mk} possibles), transitivité ($p_{mk} > p'_{mk}, p'_{mk} > q_{mk} \Rightarrow p_{mk} > q_{mk}$), indépendance (soit que la supériorité sur les gains pondérés de deux chemins ne dépend pas des résultats aux horizons précédents) et continuité ($1y$ est équivalent à $px + (1-p)z$, x, y, z étant des gains et p une probabilité, c'est à dire qu'un acteur est indifférent à gagner directement ou par le biais de deux tirages si le gain au final est identique).

Compte-tenu de ces hypothèses et de la définition de la stratégie pure sous forme du transformateur t_{mk} on trouve une expression du MPE dans notre formalisme tel que (équation 10.11 § 10.6.6.3) :

$$\forall k, n \in H, \mathbf{I}(N) = (\tilde{I}^k, I^{(n, \dots, N)}) \Rightarrow \exists ! t_{NN-1} \dots t_{nk}$$

dans son ensemble - nous avons vu qu'il peut devenir rapidement énorme - il est finalement intéressant d'étudier sa variation autour de l'horizon, voire de sous-parties de l'horizon. Nous avons vu au chapitre 9 différentes structures de propagateurs (regroupeur, etc.). Ces structures sont une image du caractère du joueur ainsi que la structure de la matrice de croissance. L'environnement et l'acquis du joueur sont à l'origine de l'ensemble des transformations qu'il a à sa disponibilité pour résoudre un problème. Ainsi Alain Berthoz[AB] rappelle les travaux de William James sur l'attention : "pour que l'attention se porte sur un objet et le perçoive intégralement, il ne suffit pas qu'il soit présent aux sens, il faut encore qu'il soit présent à l'imagination ; c'est à dire qu'il soit représenté deux fois". L'ensemble $\{T\}_1$ des transformations disponibles pour un joueur au début d'un jeu doit donc être présent dans son imagination. On conçoit bien qu'il est difficile d'entrevoir une solution que l'on imagine pas. Si l'on admet cette hypothèse, la composante t_{ij} du propagateur est forcément issue de $\{T\}_1$. La dimension de la croissance C_δ va alors dépendre de la dimension de $\{T\}_1$. Mais par les échanges avec des collègues, par la lecture, par des regards sur la nature, le joueur peut enrichir son ensemble. Par des processus de projections et d'analogies, ces enrichissements peuvent être à l'origine de nouveaux ensembles et d'innovations. La composante probabiliste du propagateur associe à ces innovations des probabilités d'usage faibles, sans quoi ce ne serait pas des innovations !

Les variations du propagateur conduisant à des ruptures dans les choix de groupes de transformations associées à des probabilités faibles sont donc des traces d'émergence ou d'innovation.

Prenons l'exemple d'un joueur devant traverser une faille. Suivant un premier ensemble de solutions $\{T\}_1$, il envisage d'utiliser une corde. Pour accrocher la corde sur la rive opposée le risque reste important et le joueur ne trouve pas de trajectoires satisfaisantes. Regardant autour de lui il voit un oiseau voler par-dessus la faille. Il bascule alors pour un nouvel ensemble de solutions $\{T\}_2$ et trouve finalement un chemin à grand gain en traversant la faille en deltaplane.

La variation du propagateur n'a pas de sens mathématique. Par contre, la variation du gain en fonction du propagateur appliqué à une même information en a . On peut ainsi calculer en sous-jeu autour de l'horizon :

$$\frac{\Delta G}{\Delta \gamma \cdot I} = \frac{G(\gamma_1 \cdot I) - G(\gamma_2 \cdot I)}{\gamma_1 \cdot I - \gamma_2 \cdot I}$$

Si l'on détecte une forte variation au sens de cette définition, ce peut être un premier élément pour détecter une émergence d'idées. Il n'est pas suffisant, une faible probabilité doit l'accompagner, soit $p_1 \cdot \tilde{I} \ll p_2 \cdot \tilde{I}$.

13.8 Seconde conclusion sur le chapitre 13

L'analyse portant sur l'ensemble de l'AE et non seulement autour de l'horizon utilise les objets précédemment définis. Les composantes du propagateur (à la fois les termes de groupes de transformations et probabilités de choix) ont pu être rapidement établies, de par le travail de réflexion déjà réalisé autour de l'horizon. On s'aperçoit que ce premier travail ne peut qu'aider à l'établissement d'un algorithme plus général portant sur l'ensemble de l'AE. Ce dernier est difficile à faire directement car faisant appel à des évolutions souvent très vastes sauf à justement, montrer qu'elles se réduisent à quelques trajectoires autour de chaque horizon. Dans ce cas, on identifie un motif répétitif qui va considérablement réduire l'étendue abstraite de l'AE.

A mesure que l'évolution avance, la quantité d'information ne cesse de croître, surtout dans des processus à mémoire. Les trajectoires qui se rapprochent de solutions peuvent être vues comme réduisant leur entropie (ou augmentant leur information suivant que l'on considère l'entropie au sens de la thermique ou de Shannon). Le concept d'information devrait être utile à une entreprise. Cela revient à dire que si elle sait tirer avantage de ses erreurs, elle pourra mieux mener la prochaine "partie" de jeu. Il s'agit dans ce cas de modifier en fonction du passé les conditions initiales de choix en les orientant suivant l'expérience des joueurs. Rejouer le jeu précédent ne devrait ainsi pas donner lieu à la même distribution de trajectoires dans l'espace si ce sont les mêmes acteurs qui jouent. Il doit être possible de traduire l'expérience des intervenants en fonction de la forme prise par la surface des trajectoires dans l'espace CG pour un jeu.

13.9 Références du chapitre 13

- [MOD] J.Dréo, A.Pétrowsk, P.Siarry, E.Taillard, "Métaheuristiques pour l'optimisation difficile". Edition Eyrolles, 3^e tirage 2011.
- [BMDD] M.Breant, O.Maurice, T.Dubois, G.Duchamp, "To improve the variability of one complex system with the MKME". Congrès EMCEurope 2012, Rome.

- [DFJT] D.Fudenberg, J.Tirole, “Game theory”. MIT press, Cambridge, Massachussetts, London, England, 1991 ; page 515.
- [AB] A.Berthoz, “La simplicité”. Edition Odile Jacob, Paris 2009.
- [ABJ] A.Berthoz, “La simplicité”. Edition Odile Jacob, Paris 2009, page 57.
- [MATI] E.Maskin, J.Tirole, “Markov Perfect Equilibirum”. Journal of Economic Theory 100, 191-219 (2001).
- [PAJET] P.Aghion, J.Tirole, “Formal and Real Authority in Organizations”. Journal of political economy, 1997, vol.105, no.1.

Sixième partie

Conclusion générale

L'analyse tensorielle des réseaux établie par Gabriel Kron permet de manipuler les réseaux : les transformer, les connecter, les voir sous différents angles, etc. En reliant les énergies impliquées dans le système réel avec les énergies traduites dans ces réseaux en flux et potentiels on peut, en choisissant au mieux l'espace de configuration, représenter tous les systèmes réels. On a pu vérifier l'efficacité du formalisme, enrichi de la notion généralisée de corde. Mais pour modéliser un système pourvu de nombreux composants il faut pouvoir synthétiser la connaissance. On en est venu pour réaliser cette synthèse à imaginer le concept de tenfold. Un tenfold est une liste ordonnée comprenant tous les objets mathématiques nécessaires et suffisants pour décrire un composant ou le système lui-même. En utilisant les gamma matrices, on peut alors suivre l'évolution de tenfolds qui sont autant d'évolutions du système étudié. On dispose là d'une mécanique relativement simple pour mathématiser un système dynamique. Le "propagateur" est l'image d'une machine d'état, d'un algorithme qui couchent sur le papier le comportement du système. Mais si la mécanique est belle, elle n'en reste pas moins uniquement robotique.

Lorsque l'on aborde l'évolution du vivant, on se rend compte rapidement de la lourdeur et de la grossièreté des systèmes artificiels actuels. Certes le génie humain l'a conduit sur la Lune. Mais à quel prix ? La débauche d'énergie qui a été consommée est gargantuesque. En comparaison la nature ne transporte pas d'humains, mais elle a fait plus fort, elle véhicule les molécules de la vie au travers de galaxies. On voit que les stratégies sont différentes, mais il serait erroné de croire que celle de l'homme est supérieure. Le propre de l'homme est sans aucun doute la fabrication de l'outil. Mais pas l'intelligence, pour laquelle il faudrait tout d'abord définir un critère. Notre anthropocentrisme naïf nous fait réduire la réalité dans toute sa complexité à notre propre référentiel de perception. On doit par exemple continuellement réviser nos notions de vie. On sait aujourd'hui que la vie est possible dans des milieux extrêmement hostiles pour l'homme mais tout à fait acceptable pour des systèmes vivants différents. En remettant en question nos certitudes on commence à comprendre que notre propre cerveau n'est pas sous notre contrôle mais que c'est bien lui qui nous contrôle. Plus fort même, on a pu montrer que certaines de nos actions sont décidées avant que nous n'en ayons conscience !

Des processus d'évaluation de situations guidés par des critères de survies, domination, etc., sont les pilotes de nos comportements. Récemment également, on a pu montrer que la relation de Bayes s'avère être parmi les modèles les plus pertinents pour modéliser ces mêmes comportements. Mais la pensée, la pensée avec laquelle on a pu rédiger cette thèse échappe-t-elle à ces principes ? C'est là que la théorie des jeux peut peut-être fournir des bribes d'interprétations en analysant les choix non plus sur la base de décisions réfléchies ou élaborées par une volonté contrôlée, mais plutôt comme des stratégies de domination ou de chemin optimum vers un objectif donné. C'est un paradoxe car les critiques émises contre cette théorie sont justement qu'elle prétend modéliser des comportements dont la complexité n'est pas mathématisable, sauf dans des cas simplistes. Seulement ces jugements ne sont eux-mêmes que le reflet d'une idée suivant laquelle la complexité des comportements humains est un témoignage d'une intelligence que l'on ne peut réduire aux schémas mathématiques même les plus sophistiqués. Ainsi on critiquera le modèle d'évolution basique du choix du responsable CEM en argumentant que le choix réel serait emprunt de nombre de facteurs qui pourraient remonter à la petite enfance de la personne, etc. Certes, mais il peut s'agir que d'une simple multiplication des paramètres. Mais dans le principe, cette réflexion ne démontre rien. Ne nous en déplaise, on ne saurait démontrer aujourd'hui que l'on est maître de nos comportements. On trouvera toujours des ensembles de transformations qui conduisent à des optima au sens d'un critère donné. Le comportement de chacun d'entre nous ne fait dans cette théorie que répondre à cette recherche d'optima dans un cadre très général de survie au sein de la nature. Sans chercher à y développer des théorèmes qui n'auraient que peu de valeur ajoutée, l'application des principes de la théorie des jeux donne un axe pour comprendre des résultats de situation, sans forcément les expliquer. Voir les trajectoires possibles d'acteurs en fonction de transformations est déjà une représentation potentiellement riche d'analyse sur la vie. L'équilibre de Nash peut d'ailleurs être vu comme l'équilibre naturel d'une société, c'est pourquoi il a tant de sens, même s'il a fallu assouplir sa définition de départ pour pouvoir maintenir son existence à mesure que la théorie progressait.

Les lois dont on se dote pour décrire les comportements sont simples mais sont une partie seulement de l'évolution déterminée aussi par les résultats au niveau des réseaux. On a deux catégories principales de facteurs : ceux des petits modes et ceux des grands modes. L'ensemble des combinaisons est gigantesque, mais les directions que prennent les transformations sont relativement restreintes. Il s'agit là d'une stratégie générale de la nature qu'Alain Berthoz a appelé la simplicité. L'auteur prend l'exemple du geste de regarder vers la droite. On peut tourner les yeux, mais aussi tourner la tête ou encore tourner le corps ou plusieurs de ces gestes, etc. Toute fonction se décline en multiples possibilités qui sont autant de stratégies pour un même objectif. La théorie des jeux allouerait un gain à l'objectif, pourrait pondérer ce gain en fonction de la qualité de vue puis on associerait des probabilités de réalisation à chaque stratégie en fonction du gain qu'elle apporte et des capacités du joueur.

La première critique est de dire “le fait de regarder dépend d’un autre événement que l’on doit considérer pour correctement modéliser le phénomène”. On poserait alors un bruit par exemple comme source d’interpellation. Puis il faudrait prendre en compte l’attention des joueurs pour pondérer plus finement les probabilités d’actions. Mais cette précision doit encore être enrichie de la qualité d’audition des joueurs, etc. On en vient à rendre quasi-infini les facteurs influents, ce qui conduit à réprimer l’idée qu’une théorie mathématique puisse donner quelques axes de compréhension aux problèmes du vivant. Mais ne peut-on réduire la complexité de façon maîtrisée ? La théorie appliquée dans des conditions approximatives en est-elle pour autant dénuée de sens ?

Imaginons un système avec un flux k^1 déterminant le gain et tout un ensemble de flux de bruits b . On a vu que ce système dans un cas général non linéaire s’écrivait $g_\mu(\nu k^1, b^\nu) = 0$. On a vu chapitre 6 que l’on pouvait ramener cette forme à une forme $\Pi_{\beta}^{b^\nu} \mathcal{D}_{\beta} g_{\mu\nu, \beta} \{k^{\nu=1}, b^\nu\} = e_\mu$. Finalement ce que l’on veut poser comme condition est que, sur une certaine intersection de domaines, $\Pi_{\beta_0}^{b^\nu} \mathcal{D}_{\beta_0}$, on ait :

$$\Pi_{\beta_0}^{b^\nu} \mathcal{D}_{\beta_0} g_{\mu 1, \beta_0} k^1 \approx e_\mu \implies \Pi_{\beta_i}^{b^\nu} \mathcal{D}_{\beta_i} g_{\mu\nu, \beta_i} b^\nu \ll e_\mu$$

Ce qui revient à dire que sur un certain domaine qui dépend des bruits (donc ceux-ci ne sont pas exclus de la scène) on arrive à exprimer une fonction du flux principal qui se rattache directement aux stimuli. Soit dans notre exemple qu’un son nous fait regarder vers la droite. Des bruits modulent la fonction qui au final réalise cette action, mais les fonctions appliquées à ces bruits eux-mêmes ne sont pas assez significatives devant le stimulus sonore pour nous faire faire une autre action que regarder. Dans ces conditions, quelle que soit la fonction qui s’applique au flux k^1 , on finira toujours par regarder à droite même si on le fait de façon compliquée parce que les bruits effectivement modulent l’action. Ces différentes combinaisons sont autant de croyances dans la théorie des jeux qui viennent régler les probabilités de Bayes. Ce seul domaine serait-il déjà trop grand ? Il peut-être immense, mais on peut toujours regrouper les fonctions par familles de proximités. L’ensemble des variations est infini mais l’ensemble des tendances est fini. Ainsi on pourrait créer une fonction moyenne pour ceux qui tournent la tête (et il y a dans le détail une infinité de façons de tourner la tête !), une famille pour ceux qui tournent uniquement les yeux, etc. Ces regroupements constituent des familles de filtrages où les ondulations de second ordre par rapport à la trajectoire principale sont éliminées pour ne faire ressortir que le comportement moyen.

D’une manière générale, la représentation dans un espace choix-gains n’a de sens que pourvue du concept de similarité. Les trajectoires se rattachent à des profils de populations et la limite de similarité permet de définir celle de discernabilité entre trajectoires et donc de détecter des profils de populations différents.

De là, on voit que l’idée de pouvoir modéliser des comportements humains, dans des situations bien définies (et souvent de plus, attractives, donc où l’attention se portera majoritairement) par la théorie des jeux se défend tout à fait. Les cas où l’on ne respecte pas notre hypothèse d’intersection de domaines majoritaires sont les comportements de bords qui peuvent servir de base à la définition des directions de l’espace CG.

Un point remarquable est que la méthode permet de mettre à jour des émergences. L’émergence se repère à sa courbe de gain en parabole et des groupes de transformations peu empruntés. L’aspect système, vu du référentiel d’un acteur k^1 se voit dans l’environnement sous l’ensemble des b^ν . Système et émergence sont les deux ingrédients de la systémique. La méthode proposée peut servir de formalisme pour cette science encore principalement littérale. On ne prétend pas par là que la mathématisation de processus donnera de fait des résultats conséquents là où des réflexions profondes des sciences cognitives ont des difficultés. Les concepts abordés sont d’une telle complexité que l’on ne peut présager des apports et du sens même que peut espérer porter toute approche de ces questions. Simplement une méthode un peu plus issue des sciences “dures” peut aider à la modélisation des processus les plus simples et de là aider à l’appréhension des plus complexes. Il en va d’ailleurs de même en physique. Les modèles scolaires sont de bien piètres modélisations des expériences du réel. Mais ils fournissent des briques d’interprétations qui, mises bout à bout, permettent de se doter d’une base de représentations (on ne parlera pas d’explications, terme dépourvu de sens).

Ces pistes sont à l’origine des émergences. Une émergence est imprévisible complètement, et non complètement imprévisible ! Si c’était le cas, les émergences au sens de notre théorie ne pourrait exister. Considérons un ensemble de transformations \mathcal{X} . Soit \mathcal{Y} un ensemble de transformations disponibles au départ de la croissance d’un AE. Si le chemin \vec{C} qui mène à l’innovation sur un produit transformé exploite une transformation $x_i \in \mathcal{X}$ où $x_i \notin \mathcal{Y}$, c’est à dire si l’ensemble des transformations disponibles reste disjoint de l’ensemble des transformations qui contient celle menant à l’innovation, cette dernière devient impossible à atteindre. C’est pourquoi on ne peut dire qu’une émergence - une innovation - est complètement imprévisible. Une condition d’existence de

l'émergence dans un parcours de l'AE est donc : $\exists x_j \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. La présence de cette transformation peut ensuite engendrer un nouvel ensemble de transformations disponibles et conduire au meilleur gain $G_o(\vec{\mathcal{C}})$:

$$P\left(G = G_o\left(\vec{\mathcal{C}} \supset x_i \in \mathcal{X}\right) \mid y_{i-1} \in \mathcal{Y}, \vec{\mathcal{C}} \supset y_{i-1}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \supset x_i \neq 0$$

Où l'on note $\vec{\mathcal{C}} \supset x_i$ le fait que la transformation x_i appartienne à la liste des transformations utilisées par le chemin $\vec{\mathcal{C}}$. C'est peut-être cette rupture dans l'ensemble des transformations utilisé qui explique en partie l'émergence, le "saut" autour de l'intersection conduisant à des évolutions non attendues, d'autant que le choix de ce saut est peu probable a priori puisque cette transformation qui appartient à l'intersection, forcément tenue (sans quoi l'ensemble des transformations disponibles de départ serait simplement agrandi), est peu visible. Si l'on suppose une probabilité de choix répartie de façon relativement homogène entre des transformations usuelles de \mathcal{Y} et très faible sur les bords (profil gaussien abrupte par exemple), l'intersection appartient à ces bords et est connectée à une autre distribution de probabilités qui redevient forte autour des transformations centrales du deuxième ensemble \mathcal{X} . La trajectoire qui mène à l'innovation dans l'AE est donc parabolique.

Les éléments qui conduisent à un basculement dans la base des transformations sont-ils uniquement alimentés par l'environnement ? Sont-ils des créations nouvelles où finalement est-ce pour partie une capacité cachée dans des domaines non encore stimulés dans les conditions usuelles d'usage ? La diakoptique non linéaire remet en question l'aspect novateur pur de l'innovation pour proposer cette seconde éventualité. Mais l'un n'empêche pas l'autre et le formalisme accepte les deux sources d'innovation comme réservoirs de transformations potentielles. Des preuves seront trouvées dans les cas où ces transformations étaient cachées mais disponibles en répétant l'expérience dans des environnements différents.

Toute une méthodologie reste à mettre au point, pour appliquer au plus efficacement les idées présentées à de nombreux cas pour améliorer la méthode et la développer, l'aspect gestion des transformations par modélisation dans le formalisme de l'analyse tensorielle des réseaux nous semblant de son côté bien entamé.

L'éventualité d'une continuité des travaux initiés ici constituerait la plus belle conclusion de ce travail et la meilleure récompense pour son auteur.

Septième partie

Glossaire

- ATR : analyse tensorielle des réseaux
- v_i : vecteur covariant, covecteur
- v^i vecteur contravariant, vecteur
- $\partial_a \rightarrow \frac{\partial}{\partial a}$
- $v_{(i)} v^{(i)}$: composante i du vecteur ou du covecteur v
- $v_{[i]} v^{[i]}$: vecteur ou covecteur pour le domaine $[i]$
- p : opérateur de Laplace
- $a_{jk} b^k$: convention de l'indice muet, somme sur l'indice k : $\sum_k a_{jk} b^k$
- $v_a = z_a (b^b)$: fonction non linéaire des flux b^b donnant v_a ($z_a (b^b)$ est un vecteur de fonctions)
- \hat{u}^a : base duale
- $op(\bullet)$: opérateur agissant sur l'objet mis en lieu et place du bullet
- Un système est un ensemble d'organes couplés
- Un organe est une partie d'un système qui ne peut être subdivisée sans porter atteinte à son intégrité avant son montage dans le système
- cycle : suite fermée de branches
- \vec{c}_ν vecteur de base de l'espace des cycles
- $s^{*\mu}$ covecteur de l'espace dual de l'espace des cycles
- n-forme : terme d'ordre n sous une intégrale. Par exemple, $\int dxv$: 1-forme cxv
- R_{jk} réluctance
- μ_{jk} tenseur de perméabilité
- A^k potentiel vecteur contravariant
- fmm : forces magnétomotrices
- fém : forces électromotrices
- e_μ fém de maille
- C_n espace des chaînes fermées de dimension n
- T_1 espace des branches
- ddp : différence de potentiels
- J^ν vecteur des mailles virtuelles
- MV : mailles virtuelles
- MR : mailles réelles
- AC : arbre couvrant
- $g_{\mu\nu}$ métrique dans l'espace des mailles
- $z_{\mu\nu}$ métrique dans l'espace des branches
- $g_{\mu\nu}^{\{d\}}$, sous-métrique d ou ensemble de composantes de la métrique regroupées dans la matrice d
- m : masse généralisée - charge électrique, masse magnétique, masse pesante, courant, ...
- \vec{A}, \mathbf{A} potentiel vecteur
- CR : corde réelle
- CV : corde virtuelle
- n matrice de connexion d'espace
- B matrice incidence reliant branches et sommets ou jonctions dans l'AE
- m^x moment de branche ou de maille
- L matrice de connectivité. Peut aussi être notée C
- $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$
- $\bar{\mu} = \frac{\mu}{4\pi}$
- Séparabilité : une composante c de métrique non linéaire est séparable si on peut ressortir un produit de cette composante par un flux de la fonction de métrique : $g_a (b^k, c) = g_a (b^k) + ck^x$
- Modèle de Branin : modèle de propagation guidée associé au système d'équations :

$$\begin{cases} e_0 = (\psi_\chi - z_c \iota^3) e^{-\tau P} \\ e_\chi = (\psi_0 + z_c \iota^2) e^{-\tau P} \end{cases}$$

- ge : géodésiques électriques
- topologie cellulaire : topologie basée sur les ensembles de sommets, branches, mailles
- \bullet : pointe l'emplacement d'une variable sur laquelle un opérateur est appliqué

- $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ métrique de la relativité restreinte en format $(+, -, -, -)$
- (A^0, \mathbf{A}) 4-vecteur A
- $(A_0, -\mathbf{A})$ 4-covecteur A
- T, T_H énergie cinétique, magnétique
- Q^μ "charge" de maille
- k^ν, f^ν flux de mailles
- Ω_{ab}^a objet non holonomique
- $R_{\beta\sigma\nu}^\gamma$ tenseur de Riemann
- $R_{\mu\nu}$ tenseur de Ricci
- $\Gamma_{\beta\sigma}^\gamma$ coefficient de Christoffel de seconde espèce
- \hat{A} opérateur quantique associé à la mesure A
- ψ, ϕ fonctions d'ondes
- h, \hbar constante de Planck
- Q_b^a connectivité entre la branche classique et la mesure quantique
- G fonction de Green de propagation du champ
- $\delta_{nm}H = H_n - H_m$
- \tilde{k} flux calculés sur les réseaux primitifs, avant couplage
- $g_\mu(\nu k^\nu, p^\nu)$ métrique non linéaire appliquée au vecteur flux k^ν et réglée par les paramètres p^ν
- $\overset{p}{D}_k$ domaine sur le paramètre p de retard k
- \mathcal{T} groupe des transformations de rotations, positions
- \mathcal{F} groupe des transformations de structures des réseaux (incidence, connectivité)
- \hat{F} groupe des transformations portant sur les formats. Opère sur les produits directs de métriques
- \mathcal{P}, \mathcal{E} groupe des transformations qui agissent sur les parties respectivement propres et de couplages des métriques
- \mathcal{S} groupe des transformations qui agissent sur les fonctions associées aux domaines dans des descriptions non linéaire de la métrique
- I vecteur d'information
- γ propagateur
- \check{u} tenfold : liste des objets (T, g, E)
- \acute{e} événement - rythme élémentaire du temps d'évolution
- C_δ matrice de croissance
- D_δ matrice de dégénérescence
- t_{mk} transformateur, applicable à des tenfolds
- AE arbre d'évolution
- CG : espace de représentation choix - gain
- Probabilité pondérée : produit des probabilités d'un chemin par le gain du chemin
- Arbre de Kuhn : forme extensive de représentation du jeu par un arbre ouvert
- Un équilibre parfait en sous-jeu est un profil de stratégies pour un joueur j_i qui conduit à un équilibre de Nash quelle que soit l'histoire h^n (donc $I^k, k \in 0, \dots, n$)
- (t_{mk}, p_{mk}) composantes du propagateur complet - transformations et probabilités associées
- EG : espérance de gain ou gain pondéré
- $(X : Y)$ vecteur qui relie la jonction X à la jonction Y dans l'espace CG
- $\{\}_i = \mathcal{C}_i$ ensemble des jonctions appartenant au chemin i
- Horizon : ensemble des jonctions créées à un instant d'évolution de l'AE
- I^+ vecteur d'information à l'instant $\acute{e} + 1$
- OG : objectif de gain
- $\varrho(\mathcal{O})$ loi qui relie observable \mathcal{O} et gain
- $\tilde{\mu}$ variable aléatoire repérée par la présence du tilde
- MPE : Markov perfect equilibrium
- T ensemble des transformations possibles ou topologie d'un réseau. Encore noté $\{T\}$
- \mathcal{T} groupe des déplacements, rotations
- \mathcal{F} groupe qui opère sur les structures des réseaux

- \hat{F} groupe de modification des formats associés à un réseau
- \mathcal{P}, \mathcal{E} groupe de modification des métriques propres et de couplages
- \mathcal{S} groupe de modification des domaines en métrique non linéaire
- \vec{C}_{ab} chemin dans l'espace CG
- Λ_i matrice de transformation généralisée
- T_i direction dans l'espace CG (groupe associé)
- γ_i propagateur pour une direction T_i
- $\overset{c}{h}, \overset{c}{f}$ parties hautes fréquences d'un circuit (composants parasites : h) et puissance (f : composants fonctionnels) pour une électronique de commutation - repère c
- \vec{k}^σ composantes du vecteur flux k dans le domaine harmonique
- RSIL : réseau stabilisateur d'impédance de ligne - filtre utilisé en essais de compatibilité électromagnétique
- $dB\mu V$: tension exprimée en décibels - microvolts, soit $20\text{Log}\left(\frac{V}{1\mu V}\right)$
- Horizon : ensemble des dernières jonctions créées à un moment donné de l'évolution de l'arbre de vie (ou arbre d'évolution AE)
- Horizon de Nash : On appelle **horizon de Nash** dans un espace CG une courbe vers laquelle convergent tous les chemins qui ne sont pas de bords et certains des chemins de bords
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$: formule de Bayes
- $\mathcal{O}(\check{u})$ fonction des observables identifiées dans le tenfold \check{u}
- GP gain pondéré
- $\vec{I} = (I^k, \tilde{I}^k)$ vecteur d'information complet
- $\overset{c}{h}_{\sigma\alpha}$ métrique des termes sources de bruit
- $\overset{c}{h}_{\sigma\alpha}$ métrique des termes fonctionnels
- $t_{k+1,k}$ transformation entre les étapes k et $k+1$
- r ensemble des transformations possibles
- k étape
- OG objectif de gain
- $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{k+n})$ loi appliquée aux observables pour calculer le gain
- \check{u}_{k+n} tenfold évoluant
- I_{k+n} vecteur d'information à l'étape $k+n$
- \tilde{I}_{k+n+1} un vecteur d'information possible parmi tous les possibles à l'étape $k+n+1$
- μ_{k+n} interaction d'un joueur avec tous les autres à l'étape $k+n$
- $\tilde{\mu}_{k+n+1}$ une interaction parmi toutes les possibles à l'étape $k+n+1$
- \mathcal{M}^x variété M
- $\partial\{\mathcal{M}^N \setminus f(b^N)\}$ bord d'une variété privée d'une fonction de sélection sur des branches
- $\theta[\bullet]$ boule ouverte (intervalle ouvert) définie sur un domaine spécifié
- EP : élément primitif
- \setminus : opérateur "privé de"
- $\#$: somme connexe.
- $\vec{C} \supset x_i$: transformation x_i incluse dans le chemin \vec{C}

Huitième partie

Annexe A : photon et champ classique

Résumé

Pour pouvoir maîtriser l'interprétation des résultats d'essais de compatibilité électromagnétique (CEM) en chambres réverbérantes à brassage de modes, il faut maîtriser la nature du champ et ses couplages dans les différents environnements de test et réel. La nature du champ couplé ou non à des particules chargées ne peut être comprise qu'en abordant ses propriétés quantiques. Cette étude permet d'éclaircir des points restant obscurs dans une description classique. Ensuite, la relecture de l'équation de Poynting et des réflexions sur ce vecteur permettent de voir le lien entre les différentes formes d'énergie et les différentes natures du champ y correspondant. L'établissement de l'équation du problème complet met en évidence la façon dont ces différents aspects du champ peuvent intervenir dans certains problèmes. Ce dernier résultat peut servir de base à des études théoriques plus poussées.

De la notion d'onde plane et d'onde stationnaire

Voir une cavité et des modes établis comme de simples superpositions d'ondes planes pose plusieurs questions. Nous allons montrer que cette identification est peut-être trop directe et ne répond pas aux questions essentielles auxquelles on doit répondre pour comparer les contraintes sur des équipements en essai en chambre réverbérante à brassages de modes (CRBM) et dans l'environnement réel. Pour bien préciser ces notions on part des principes de la mécanique quantique. Cette théorie différencie clairement le champ lié aux charges de celui libre des photons. Pourtant le passage entre le champ classique et quantique n'est pas trivial même dans cette théorie. Mais on obtient un premier bilan entre les formes d'énergie contenues dans les charges et leurs impulsions, les interactions coulombiennes et les photons. On retrouve ces différences dans l'équation de Poynting et dans l'expression de l'impédance d'une structure à 1 port sur laquelle on fait le bilan des énergies vues de ce port. En établissant les équations d'un tel système on commence à entrevoir les mécanismes subtils entre le champ et la matière présente et sous test. On peut alors espérer sous ces connaissances pouvoir maîtriser l'essai et l'interprétation des résultats par rapport au besoin. La compréhension fine de ces mécanismes est fondamentale pour notre approche topologique, les interactions d'ondes planes se traitant sous la seule formulation du potentiel vecteur en jauge de Coulomb.

A.1 Photon, champ coulombien et impulsion

La notion d'onde plane est souvent considérée dans des situations où pourtant elle n'existe pas. Une onde plane est une onde où les champs électrique et magnétique forment un trièdre direct. Mais cette définition ne suffit pas. On peut trouver des cas où des champs électrostatiques et magnétostatiques forment ce trièdre sans pour autant former une onde plane. Nous allons montrer ce point.

À la base des natures quantiques du champ on trouve une décomposition de Fourier spatiale du champ spatio-temporel. On crée un espace réciproque à partir de la transformation :

$$\mathcal{E}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r E(r, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

(les quantités k, r, \mathcal{E}, E sont évidemment vectorielles). Dans l'espace réciproque, les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} ik \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ ik \cdot \mathcal{B} = 0 \\ ik \times \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}} \\ ik \times \mathcal{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathcal{E}} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{J} \end{cases}$$

Dans l'espace réciproque, la notion de champ longitudinal ou transverse est claire. Le champ est longitudinal quand il est parallèle à k , transverse lorsqu'il est transverse à k . Nous verrons que, pour autant, la création de l'espace réciproque n'est pas triviale.

L'énergie contenue dans le champ est donnée par : $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2$ soit dans l'espace réciproque $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \mathcal{E}^* \mathcal{E}$. Décomposons le champ en une composante longitudinale \mathcal{E}_L et une composante transverse \mathcal{E}_T . On trouve :

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k |\mathcal{E}_L|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k |\mathcal{E}_T|^2$$

Le premier terme doit correspondre à l'énergie coulombienne V_{coul} des interactions électriques entre particules. Le second terme est l'énergie du champ transverse H_{trans} . L'énergie totale du système s'écrit :

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^2 + V_{coul} + H_{trans}$$

Le premier terme est l'énergie cinétique des particules.

A.2 Variables normales

On peut réécrire deux des équations de Maxwell pour les champs transverses dans l'espace réciproque sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{B}} = -ik \times \mathcal{E}_T \\ \dot{\mathcal{E}}_T = ic^2 k \times \mathcal{B} - \frac{1}{\epsilon_0} J_T \end{cases}$$

Le terme de champ longitudinal peut être exprimé en fonction des charges. Il ne constitue donc pas une variable dynamique.

Réécrivons les équations précédentes sous une forme un peu différente :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}_T = ic^2 k \times \mathcal{B} - \frac{1}{\epsilon_0} J_T \\ k \times \dot{\mathcal{B}} = ik^2 \mathcal{E}_T \end{cases}$$

En l'absence de sources on déduit de ce système d'équations : $\partial_t (\mathcal{E} \pm k \times \mathcal{B}) = i (c^2 k \times \mathcal{B} \pm k^2 \mathcal{E})$
Cette relation invite à définir un nouveau champ α tel que :

$$\begin{cases} \alpha = i (c^2 k \times \mathcal{B} + k^2 \mathcal{E}) \\ \alpha^* = i (c^2 k \times \mathcal{B} - k^2 \mathcal{E}) \end{cases}$$

Le champ électrique de l'espace primal s'exprime alors par transformée inverse de Fourier spatiale en fonction des variables normales α :

$$E(r, t) = \frac{1}{ik^2 (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \{ \alpha e^{ikr} - \alpha^* e^{-ikr} \}$$

De cette égalité on déduit que le champ libre (on trouve une expression similaire pour le champ magnétique) est décomposable en série d'ondes planes progressives. Mais, comme le souligne [1] cette décomposition n'est valable qu'en l'absence de sources. Dans le cas contraire, des échanges d'énergie s'effectuent entre les particules et le champ et il faut considérer l'ensemble des termes de l'hamiltonien pour résoudre le problème. On peut par exemple légitimement se poser la question de la limite de validité d'une décomposition des champs en ondes planes dans les mesures en champs proches où par définition, le champ est lié aux sources.

A.3 Photons

Les éléments introduit précédemment sont de premières pistes pour poser déjà des questions non triviales. Entre autre ils posent clairement le problème des conditions d'application de l'idée suivant laquelle le champ est décomposable en ondes planes. Le résultat peut être formulé en disant "à partir de quand considérons-nous que nous sommes en espace libre?". Il est clair en tout cas que dans les conditions d'ondes guidées ou de champ proche, la condition d'espace libre n'est pas atteinte. Le champ peut-il être considéré en espace libre dans un volume éloigné des parois dans une CRBM? C'est la question à laquelle nous allons tenter de répondre.

Pour cela il faut se donner un critère le plus simple précis sur ce que l'on considère comme preuve d'espace libre. La définition d'onde plane est finalement peut-être insuffisamment précise, car comme le souligne Jackson, on peut avoir des champs électrique et magnétique perpendiculaires sans pour autant avoir une onde plane. C'est typiquement le cas dans un coaxial où les champs guidés sont statiques et présentent pourtant toutes les caractéristiques apparentes d'une onde plane. Un autre point qui interroge est le fait que l'on admet en général que deux photons ne peuvent interagir. De fait comment pourraient-ils "s'additionner" pour former une onde stationnaire?

Si l'on raisonne au niveau particule, nous allons voir que le photon peut avoir une définition claire par le biais de son impulsion. On admet ensuite le fait que deux photons ne peuvent additionner ou soustraire leurs impulsions par chocs. C'est une façon précise de réécrire l'interrogation précédente. Un autre point est qu'il

est finalement impossible de mesurer le champ de photons. Dès que l'on insère une sonde, on implique une interaction entre les champs évanescents de la sonde et le photon, on se replace donc dans la situation du champ avec sources et le photon ne peut être mesuré directement. On ne peut que déduire son apport indirectement.

Bref le photon se retrouve au centre de nos interrogations, détaillons de fait son apparition telle que présentée dans [2].

Dans la jauge de Coulomb, le champ électromagnétique libre satisfait aux équations :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Il respecte aussi l'équation de propagation :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (A1)$$

Cette équation de propagation n'admet de solution unique que si l'on fixe des conditions aux limites. C'est d'ailleurs en soit une difficulté conceptuelle, puisqu'en espace libre on n'a pas de conditions limites évidentes. On ne veut pas se doter de conditions limites réflexives ou conductrices. Simplement on considère un volume L qui autorise un flux de puissance au travers de ses parois. Soit des conditions aux limites périodiques :

$$\begin{cases} \mathbf{A}(0, x_2, x_3) = \mathbf{A}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{A}(x_1, 0, x_3) = \mathbf{A}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{A}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{A}(x_1, x_2, L) \end{cases}$$

On développe alors $\mathbf{A}(r, t)$ suivant une série de Fourier sur L , par exemple en 1 dimension pour une polarisation λ :

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \cos\left(2\pi \frac{r}{L}\right) + \dots + \mathcal{B}_1 \sin\left(2\pi \frac{r}{L}\right) + \dots$$

Soit :

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \sum_n \mathcal{A}_n \cos\left(n2\pi \frac{r}{L}\right) + \mathcal{B}_n \sin\left(n2\pi \frac{r}{L}\right)$$

Cette décomposition peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{A}_\lambda = \sum_n c_{\lambda n} e^{in2\pi \frac{r}{L}} + c_{\lambda n}^* e^{-in2\pi \frac{r}{L}} \quad (A2)$$

Nous pouvons négliger la composante continue dans le développement car de toute façon elle ne saurait être rattachée à un champ dynamique. On a par exemple :

$$\begin{aligned} c_{\lambda n}(t) &= \frac{1}{2} (A_n - iB_n) = \dots \\ \dots &\frac{1}{2L} \left[\int_0^L dr \mathbf{A}_\lambda(r, t) \cos\left(n2\pi \frac{r}{L}\right) \right] \dots \\ \dots &- \frac{1}{2L} \left[i \int_0^L dr \mathbf{A}_\lambda(r, t) \sin\left(n2\pi \frac{r}{L}\right) \right] \end{aligned}$$

(nous avons utilisé ici une formulation un peu différente de celle employée usuellement et partant de la transformée de Fourier et non de sa série).

En remplaçant A2 dans A1 on trouve pour une composante n :

$$\partial_t^2 (c_\lambda(t) + c_\lambda^*(t)) + \omega_n^2 (c_\lambda(t) + c_\lambda^*(t)) = 0$$

(avec $\omega_n = cn2\pi L^{-1}$ et $c_\lambda = c_{\lambda n} \exp(in2\pi \frac{r}{L})$). C'est l'équation d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont de la forme :

$$c_\lambda + c_\lambda^* = f_{n\lambda} e^{-i\omega_n t} + f_{n\lambda}^* e^{i\omega_n t}$$

On peut se doter d'une base modale en écrivant :

$$\psi_{n\lambda}(r) = e^{in2\pi \frac{r}{L}}, \quad \psi_{n\lambda}^*(r) = e^{-in2\pi \frac{r}{L}}$$

Le potentiel vecteur se développe alors comme :

$$\mathbf{A}_\lambda(r, t) = \sum_{n\lambda} f_{n\lambda} e^{-i\omega_n t} \psi_{n\lambda}(r) + f_{n\lambda}^* e^{i\omega_n t} \psi_{n\lambda}^*(r) \quad (A3)$$

On retrouve bien l'expression (1.140) page 23 de [2]. Ce sont les conditions initiales qui fixent les coefficients $f_{n\lambda}$. On a dans cette expression

$$\psi_{n\lambda} = \psi_{n\lambda} \mathbf{u}_\lambda$$

On s'aperçoit alors qu'en posant :

$$f_{n\lambda} = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_n} \right)^{1/2} \alpha_{n\lambda}$$

Le développement du potentiel vecteur devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r, t) &= \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \sum_{n\lambda} \frac{\mathbf{u}_\lambda}{\sqrt{2\omega_n}} \dots \\ &\dots [\alpha_{n\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_n t)} + \alpha_{n\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_n t)}] \end{aligned}$$

Soit l'énergie électromagnétique stockée que l'on écrit : $E^{em} = \int_\Lambda dr \frac{1}{2} (\epsilon_0 |E|^2 + \mu_0^{-1} |B|^2)$

En utilisant le potentiel vecteur cette expression devient :

$$E^{em} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \int_\Lambda d\mathbf{r} \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}^\beta}{\partial t} \right)^2 + \mu_0^{-1} |\nabla \mathbf{A}^\beta|^2 \right] \quad (A4)$$

En remplaçant le champ par son expression suivant A3 on obtient :

$$E^{em} = \sum_{n\lambda} \hbar \omega_n |\alpha_{n\lambda}|^2$$

Le flux de Poynting qui s'exprime par :

$$S = \frac{1}{\mu_0} \int_\Lambda dr (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

devient :

$$S = \frac{1}{\mu_0} \int_\Lambda dr \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

en remplaçant par le développement harmonique on trouve :

$$S = c^2 \sum_{n\lambda} \hbar \mathbf{k} |\alpha_{n\lambda}|^2$$

Cette dernière relation est importante. Elle stipule que $|\alpha_{n\lambda}|^2$ peut être interprété comme le nombre moyen de photons d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ et de polarisation λ . Le photon apparaît comme pourvu d'une impulsion, ce qui le différencie du champ simple entre autre stocké qui a une énergie quantique mais pas d'impulsion. C'est cette propriété remarquable qui va nous servir de base pour le photon et le champ radiatif. De cette impulsion née la résistance de rayonnement qui traduit le freinage des résonateurs sources du champ rayonné, une impulsion devant être transmise à chaque émission de quanta de champ. Lorsque cette impulsion est restituée, la perte par rayonnement s'annule. **Une trace de ce champ est donc la divergence du vecteur de Poynting** que l'on va étudier dans le paragraphe suivant. En pratique, une résistance de rayonnement traduit l'émission de photons. Cette résistance traduit la perte d'impulsion à l'émission. Nous allons, après avoir exprimé le bilan en champ classique, réfléchir au contexte particulier des ondes guidées et des milieux fermés pour comprendre comment y intervient le bilan sur l'impulsion.

A.4 Bilan d'énergie classique

Nous voulons montrer ici que l'hamiltonien du champ quantifié peut être retrouvé (doit être retrouvé) en électrodynamique classique.

Le travail instantané accompli par les champs E et B sur une charge q animée d'une vitesse v est $qv \cdot \mathbf{E}$, la force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse n'induit pas de travail. On en déduit que dans un volume ν le travail instantané accompli est :

$$W = \int_{\nu} d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

En exploitant le théorème de Maxwell - Ampère, on remplace le courant dans cette expression pour obtenir (avec $\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot \nabla \times E + E \cdot \nabla \times H$) :

$$W = - \int_{\nu} d^3x \left[\nabla \cdot (E \times H) + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right] \quad (A5)$$

(on ne met plus en gras les grandeurs implicitement vectorielles). On désigne par E^{em} la densité d'énergie électromagnétique totale : $E^{em} = \frac{1}{2} (E \cdot D + B \cdot H)$.

Alors on a :

$$-W = \int_{\nu} d^3x \left[\frac{\partial E^{em}}{\partial t} + \nabla \cdot (E \times H) \right]$$

La grandeur $S = E \times H$ est appelée vecteur de Poynting. Le bilan classique d'énergies électromagnétiques s'exprime donc pour un volume arbitraire par [3] :

$$\frac{\partial E^{em}}{\partial t} + \nabla \cdot S = -J \cdot E \quad (A6)$$

On retrouve de façon classique l'analogie avec le bilan en mécanique quantique donné en A4. Les énergies cinétiques des particules se retrouvent dans le terme avec J tandis que l'hamiltonien transverse correspond au flux de Poynting. Enfin l'énergie coulombienne couvre à la fois l'énergie électrique stockée et l'énergie magnétique stockée. Cette dernière est équivalente à cette première vue d'une particule : en effet une particule en mouvement dans un référentiel comprenant un courant subit un champ magnétique, mais le même problème formulé dans le référentiel de la particule se transforme en force de Coulomb.

Parmi les résultats importants que l'on peut déduire de ce bilan on trouve la quantité de mouvement du champ électromagnétique souvent notée g telle que : $g = \frac{S}{c^2}$. Comme nous avons identifié les photons comme porteurs de l'impulsion du champ, on retrouve ici cette idée confirmée et le lien entre le vecteur de Poynting et cette grandeur d'impulsion. D'autre part dans le bilan d'énergie on trouve le flux du vecteur de Poynting et non le vecteur directement. Cette apparition du flux permet d'écarter les solutions d'ondes trans-électromagnétiques qui n'en sont pas pour autant des ondes planes au sens d'ensembles de photons. Ainsi l'onde TEM d'une ligne, de divergence nulle sur un tronçon quelconque de la ligne n'est pas une onde plane photonique. Elle résulte d'ailleurs du champ coulombien des charges portées par la ligne et du champ magnétostatique des courants de la ligne. Il s'agit du terme E^{em} dont rien n'interdit qu'il dépende du temps ([3] page 271, 3° paragraphe). L'impulsion consommée par la création du champ est rendue par interactions entre les deux conducteurs de la ligne.

Considérons un système électromagnétique passif arbitraire, linéaire à deux bornes d'accès. Une surface A fermée entoure complètement ce système sauf une surface A' correspondant à l'accès, forcément ouvert. En traduisant en harmonique la relation A5 et en notant w_e l'énergie stockée électrique et w_m son pendant magnétique, n étant une normale à A en tout point de A , le bilan de puissance s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_i^* V_i &= \frac{1}{2} \int_{\nu} J^* \cdot E d^3x + \dots \\ \dots + 2i\omega \int_{\nu} (w_e - w_m) d^3x &+ \oint_{A-A'} da S \cdot n \end{aligned}$$

V_i et I_i sont les tensions et courants relevés sur le port d'accès au système.

L'impédance relevée à l'entrée de ce système $Z = R + iX$ doit donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{|I_i|^2} \left(\mathcal{R} \int_{\nu} d^3x J^* \cdot E + 2 \oint_{A-A'} S \cdot nda \right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{|I_i|^2} (4\omega \mathcal{I} \int_{\nu} d^3x (w_m - w_e)) \\ X = \frac{1}{|I_i|^2} (4\omega \mathcal{R} \int_{\nu} d^3x (w_m - w_e) - \mathcal{I} \int_{\nu} J^* \cdot E d^3x) \end{array} \right. \quad (A7)$$

Ce résultat important montre que d'une part, l'impédance d'entrée d'une antenne alimentant une CRBM doit redonner l'image des échanges d'énergies recensées dans cette expression et d'autre part que si le flux de Poynting est nul, les seules énergies en présence sont les pertes dans des éléments dispersifs véhiculant des courants et les énergies stockées sous forme électromagnétique. Aucun photon ni flux radiatif ne doivent être présents.

Le flux du vecteur de Poynting va revêtir des intégrales différentes au cours du temps, dans un référentiel d'espace-temps qui évolue avec le flux. Une impulsion de champ émise de l'antenne ne voit les murs de la CRBM qu'après un temps écoulé. L'espace couvert permet de définir un flux non nul au début, qui traduit la puissance perdue dans l'émission des photons. Puis ces photons atteignent les murs de la chambre et transmettent leurs impulsions aux charges en créant des courants induits. Le bilan d'impulsion devient nul et le flux également. C'est le temps de "charge" de la chambre qui donne la valeur au-delà de laquelle cet équilibre est complet. Dès lors la divergence du vecteur de Poynting est nulle car aucun champ n'est émis à l'extérieur de la chambre (on néglige ici le champ infrarouge thermique rayonné). Les champs dans la chambre sont corrélés aux charges dans les murs. Au niveau de l'antenne d'émission, la puissance apportée permet de compenser les pertes dans les murs et alimente les zones de stockage. Si cette source s'arrête, les zones de stockages vont alimenter les pertes et rapidement décroître. Un flux est maintenu entre les zones de stockages qui équilibre ces dernières dont l'amplitude n'est pas reliée à la distance à la source mais à l'existence de modes propres locaux ou globaux. Une autre façon d'exprimer cela est de dire que la seule connaissance des charges dans les murs (et de leurs débits) suffit à connaître le champ dans le volume. Ce n'est pas le cas s'il y a rayonnement, une antenne n'a ainsi aucune connaissance de ce que devient le champ qu'elle rayonne.

On peut comprendre que par ce raisonnement, tout volume clos est à terme source de zones de stockages et de flux d'échanges mais pas de flux radiatifs. Cette interprétation peut être vérifiée en mesurant l'impédance d'entrée d'une antenne alimentant une cavité. Cependant le couplage vient moduler la vue de ces énergies.

En mécanique quantique, la quantification du champ d'énergie stockée correspond à des photons dits virtuels. Par exemple, Feynman [4] calcule l'interaction relativiste de particules et souligne l'interaction de Coulomb comme la composante reliée aux photons virtuels. Les photons ne pouvant interagir entre eux, peut-on imaginer l'existence d'ondes stationnaires en espace libre ? Quel est le processus des ondes stationnaires en ondes guidées ?

A.5 Ondes stationnaires

Même en ondes entretenues, on ne peut cumuler dans l'espace libre plus que la simple somme des champs en un point de l'espace-temps. Ceci est une conséquence du fait que par définition en espace libre, le champ ne peut être confiné et se propage à l'infini. Dans un système fermé d'ondes guidées, le stockage devient possible par les ondes stationnaires qui s'établissent aux niveaux des charges. Le champ n'en est que l'image. Or le cumul des charges lui est possible, comme dans un condensateur. Ce phénomène est une autre confirmation du fait que le champ concerné est un champ lié et non un champ libre. Si l'on accepte la terminologie d'onde plane pour le photon, on accepte alors l'idée que **les ondes stationnaires ne sont pas des sommes d'ondes planes**, constat également formulé par [1]. En ondes guidées, nous sommes en présence de modes "TEM" qui ne sont pas des ondes planes. La distinction est importante, pas au sens étymologique, mais au sens où le mode TEM n'engendre pas de résistances de rayonnement. Ces réflexions avaient été menées dans l'étude [7].

A.6 Modélisation topologique

Une approche topologique va nous permettre de mieux comprendre les mécanismes du système complet, chambre plus objet sous test. Un point important relevé dans les développements précédents est que l'expression de l'impédance par le biais des énergies est porteuse de l'information sur les échanges qui se réalisent dans le volume. Le point difficile est d'appréhender l'impact de la fonction de couplage entre le champ qui s'établit dans le volume et l'excitation externe.

Pour débiter notre réflexion nous nous intéressons à l'exemple canonique donné par le professeur Jean-Jacques Labarthe [5]. On considère un champ électromagnétique oscillant dans une cavité autour d'un mode particulier non entretenu. L'énergie de l'oscillation décroît au cours du temps suivant une loi de la forme : $E(t) = E(0)e^{-2\alpha t}$. L'énergie perdue par pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est $\delta E = 2\alpha T E(t)$. Le coefficient d'amortissement α est donné par le coefficient de qualité Q de la cavité tel que :

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Le coefficient de qualité exprime le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie dissipée. On montre ([3] §§ 8.1, 8.7 et 8.8) que :

$$Q = K \frac{\mu}{\mu_c} \left(\frac{V}{S\delta} \right)$$

K étant un facteur dépendant du mode, proche de 1. μ_c est la perméabilité magnétique du conducteur des parois de la cavité. V est le volume de la cavité, S sa surface interne et δ est l'effet de peau : $\delta = \sqrt{2} (\mu_c \omega_0 \sigma)^{-1/2}$, σ étant la conductivité du matériau des parois.

Du point de vue topologique, une cavité autour d'un mode peut être modélisée par un résonateur. Dans l'espace des branches, une branche porte les énergies de dissipation dans les parois (résistance R) et une branche portent l'énergie électrostatique emmagasinée (condensateur C). Ce système "bibranche" est ensuite regardé depuis l'espace des mailles. Une connectivité très simple ([1; 1]) relie les deux branches et l'on ajoute dans cet espace l'énergie magnétique stockée par une inductance propre à la maille. Au final on trouve une impédance de maille donnée par : $Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \approx R \left(1 + 2iQ \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right)$ [5][6]. Quand on compare cette expression avec A6, on voit que pour la partie imaginaire, le terme C représente la contribution w_e en énergie et que l'inductance L couvre à la fois la partie réelle de w_m et la partie imaginaire de l'effet de peau dans $\mathcal{I} \int_{\nu} J^* \cdot E d^3x$. Pour la partie réelle on a évidemment l'effet Joule dans les parois, le rayonnement de photons mais aussi la partie imaginaire des contributions du champ en w_m et w_e . A quoi peut bien correspondre ce terme ? Il s'agit des pertes dans les milieux, par exemple la conductance d'un diélectrique. Le complexe $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ va engendrer des pertes réelles sous forme de conductance. Il en va de même pour la perméabilité magnétique : $\mu = \mu' - j\mu''$. Considérons une cavité vide de ces éléments.

Si l'on plonge une petite boucle pour créer du champ dans la cavité, cela revient à créer un second réseau de branches résistives (une porte une fém e et une résistance de générateur R_0 , l'autre la résistance du circuit fermé que constitue la boucle R_b), complété de même dans l'espace des mailles par une inductance de boucle L_b . Le couplage des deux réseaux est traduit par une mutuelle inductance M telle que, si k est le vecteur des courants de mailles :

$$\begin{cases} e = (i\omega L_b + R_0 + R_b) k^1 + iM\omega k^2 \\ 0 = iM\omega k^1 + \left(R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) k^2 \end{cases}$$

En toute rigueur l'insertion de la sonde dans la cavité modifie les composants du résonateur. Mais nous supposons ici la sonde très petite et modifiant ces composants au second ordre. L'impédance vue de l'entrée de la sonde est alors donnée par :

$$Z_E = \frac{e - R_0 k^1}{k^1} = \left\{ i\omega L_b + R_b + \frac{M^2 \omega^2}{\left[R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]} \right\} \quad (A8)$$

Comme le coefficient de qualité est aussi donné par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

on peut écrire :

$$Z_E \approx \left\{ i\omega L_b + R_b + \frac{M^2 \omega^2 / R}{\left(1 + i2Q \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right)} \right\}$$

En notant l'acuité $a_\omega = \delta_\omega / \omega_0$ et le coefficient de couplage $\beta = M^2 \omega^2 / R$ on obtient :

$$Z_E \approx \left(R_b + \frac{\beta}{1 + 4Q^2 a_\omega^2} \right) + i \left(\omega L_b - 2Q \frac{a_\omega \beta}{1 + 4Q^2 a_\omega^2} \right) \quad (A9)$$

Si le coefficient de couplage est assez fort, Q tend vers $2\omega_0/\delta\omega$. Dans ce cas

$$Z_E \approx (R_b + 0,06\beta) + i(\omega L_b - 0,25\beta)$$

La relation A9 montre clairement que si l'on diminue le coefficient de qualité, on accroît la partie réelle de l'impédance d'entrée. On peut d'ailleurs garder la forme d'origine en écrivant à partir de A8 :

$$\begin{aligned} Z_E = & \left\{ R_b + \frac{\beta}{1 + \left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \right)^2} \right\} + \dots \\ & \dots + i \left\{ L_b \omega - \frac{(L\omega - 1/C\omega)\beta}{R \left[1 + \left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \right)^2 \right]} \right\} \end{aligned} \quad (A10)$$

A10 doit recouper A7.

On peut alors exprimer la variation de cette impédance lorsque l'on fait varier le coefficient de qualité. Il ne s'agit pas de modifier au premier ordre les modes, sans quoi une simplification ne sera pas possible, mais par exemple de modifier le métal des murs.

Dans le cas général on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{R}(Z_E)}{\partial R} = \frac{M^2 \omega^2 R^2 \left[(L\omega - 1/C\omega)^2 - 2 \right]}{\left[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2 \right]^2} \quad (A11)$$

A la résonance où les énergies électrique et magnétique se compensent, cette variation se réduit à $-2M^2\omega^2/R^2$. On trouve donc qu'aux résonances, la partie réelle de l'impédance d'entrée doit décroître lorsque l'on augmente les pertes internes à la cavité. Ce résultat n'est pas du tout intuitif. Mais en regardant A11 on comprend qu'en augmentant R on diminue k^2 et de fait on diminue Z_E . La vue de la cavité au travers du couplage fausse les interprétations.

On voit que avant couplage, l'antenne d'excitation a une impédance de rayonnement intrinsèque qui n'apparaît que dans l'espace des moments. Mais cet espace voyant sa composante disparaître dans le confinement dans la cavité, ne reste que les composantes L-R de l'excitateur en cavité. La difficulté est ici que la modification des natures intrinsèques intervient dans le processus de couplage qui ne se contente pas de connectivités et de cordes, mais doit intégrer des groupes de transformations des métriques.

A.7 Références de l'annexe partie VIII

1. C.Cohen-Tanoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, "Photons et atomes". EDP Sciences, page30.
2. P.A.Martin, F.Rothen, "Problèmes à N-corps et champs quantiques". Presses polytechniques et universitaires Romandes, page 23.
3. J.D.Jackson, "Classical Electrodynamics". Edition Française chez Dunod, page 270.
4. R.P.Feynman, "Quantum electrodynamics". Edition Wiley, pages 121 à 127.
5. J.J.Labarthe, "Travaux pratiques d'électromagnétisme". Policopié de l'université Paris-Sud Orsay, Licence et Magistère de Physique. Exemple page 13.
6. O.Maurice, "La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes". Edition Hermès-Lavoisier. Page 161.
7. S.Dubois, O.Maurice, A.Reineix, "Réflexions sur les propriétés du champ modal". Congrès CEM2010, Limoges.

Neuvième partie

Annexe B : lois par domaines sur une variété

Résumé

La création d'un ensemble de variétés sur lesquelles on a pu définir un espace de référence présuppose en général que les lois reliant les stimuli et les flux sur ces variétés sont uniques et de premier ordre. Ainsi dans une méthode numérique en éléments finis, la matrice de raideur élémentaire est-elle unique et constante pour tout le domaine de calcul [5]. Pourtant on peut envisager des éléments finis d'ordres plus élevés. De la même façon et dans le contexte du formalisme plus général que nous présentons ici, on peut établir la caractérisation d'un objet vu comme une variété à différents ordre de complexité qui engendreront en ensemble de domaines sur lesquels diverses lois pourront être définies.

Du besoin de définir des lois sur des domaines

Lorsque l'on veut modéliser assez finement les comportements observés en réel, on doit tenir compte de tout un ensemble de paramètres comme la température, la vitesse, etc. Les modélisations linéaires que l'on exploite implicitement sont très pauvres et encore bien loin d'être satisfaisantes. Les matériaux ou objets ont des comportements qui basculent entre des modes différents suivant les valeurs de ces paramètres. Ces basculements sont plus ou moins violents mais sont non linéaires car l'impact des différentes grandeurs ne peut agir linéairement du fait que les énergies mises en jeu sont d'amplitudes différentes. La conservation de l'énergie et les échanges entre des énergies différentes imposent la non linéarité des relations entre flux et stimuli dépendantes de l'environnement.

B.1 Associer une propagation à chaque variété

Considérons une variété \mathcal{M} bornée, orientée. En tout point i appartenant à cette variété on peut définir un espace vectoriel \mathcal{E}_i orthogonal de dimension 3 local dont un axe pointe suivant l'orientation de la variété, un axe pointe vers l'extérieur (parallèle à la normale locale) de la variété, le troisième axe étant défini par le produit vectoriel et la relation d'orthogonalité. Soit B la surface qui borde cette variété, l'application d'un stimuli sur une extrémité $N \in B$ va engendrer un mouvement de masses f dans la variété dont on peut suivre l'évolution sur chacun des espaces vectoriels associés. En associant une dimension temps commune à toute la variété et aux espaces \mathcal{E}_i définis alors en 4 dimensions, on crée une application de $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{Z}_i$ l'ensemble des résonateurs associés aux particules de \mathcal{M} , orientés. Nous avons montré chapitre 3 qu'un ensemble couplé de tels résonateurs peut se ramener à un Branin regroupant deux mailles. Nous allons montrer qu'implicitement, un Branin est une métrique définie sur plusieurs domaines.

B.2 Modèle de Branin dans le domaine harmonique

Dans le modèle de Branin, la ligne est représentée par deux branches couplées par deux cordes [1]. Sur chaque branche reliée aux entrée-sortie de la ligne on vient connecter une source en entrée et une charge en sortie. Chaque branche a pour impédance propre l'impédance caractéristique de la ligne Z_c . Le couplage est réalisé par deux forces électromotrices reportées : e_1 pour l'entrée, e_2 pour la sortie. La figure 1 montre le schéma de ce modèle.

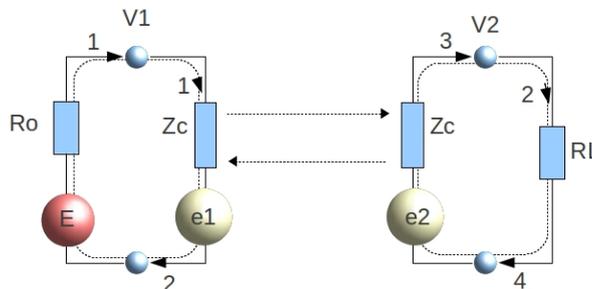


Figure 1 : schéma de Branin

Les équations fondamentales du système de Branin expriment les deux fém induites en fonction des tensions de couples V_1 et V_2 et des courants i_2 et i_3 en entrée-sortie de ligne :

$$\begin{cases} -e_1 = V_2 e^{-\frac{p}{v}x} - Z_c i^3 e^{-\frac{p}{v}x} \\ e_2 = V_1 e^{-\frac{p}{v}x} + Z_c i^1 e^{-\frac{p}{v}x} \end{cases} \quad (13.14)$$

On peut remplacer les deux tensions de couples par leurs expressions en fonction des fém et en utilisant les courants de mailles :

$$\begin{cases} -e_1 = (RLk^2) e^{-\frac{p}{v}x} - Z_c k^2 e^{-\frac{p}{v}x} \\ e_2 = (E - Rok^1) e^{-\frac{p}{v}x} + Z_c k^1 e^{-\frac{p}{v}x} \end{cases} \quad (13.15)$$

De ces expressions on veut sortir des impédances de couplages. On écrit :

$$\begin{cases} e_1 = (Z_c - RL) k^2 e^{-\frac{p}{v}x} \\ e_2 = E e^{-\frac{p}{v}x} + (Z_c - Ro) k_1 e^{-\frac{p}{v}x} \end{cases} \quad (13.16)$$

On en déduit les impédances de couplages :

$$\begin{aligned} Z_{12} &= (Z_c - RL) e^{-\frac{p}{v}x} \\ Z_{21} &= (Z_c - Ro) e^{-\frac{p}{v}x} \end{aligned} \quad (13.17)$$

et la source reportée sur la branche 3 : $E e^{-\frac{p}{v}x}$.

B.3 Comparaison à une formule analytique

On peut confronter ce modèle au tracé de l'expression de l'impédance ramenée pour une ligne désadaptée en extrémité [2] (certains jeux de signes proviennent du choix de changement de signe à la conjugaison sous Scilab). Soit à l'expression :

$$Z_R = Z_c \frac{Z_T + Z_c \tanh(\gamma L)}{Z_c + Z_T \tanh(\gamma L)}$$

Le script du programme scilab [3] de validation est le suivant :

```
clear;clf();
eo=1;
fo=1E6;
Lo=2;
tau=Lo/3E8;
Ro=50;
RL=10000;
Rc=50;
res=[];
ZE=[];
L=[1 0
1 0
0 1];
for f=[1 :100]
p=%i*2*%pi*f*fo;
bet=2*%pi*f*fo/3E8;
z=[Ro 0 0 0
0 Rc (RL-Rc)*exp(tau*p) 0
0 (Rc-Ro)*exp(-tau*p) Rc 0
0 0 0 RL];
E=[eo 0 eo*exp(-tau*p) 0];
Em=L'*E';
```

```

g=L'*z*L;
k=pinv(g)*Em;
res=[res;abs((eo-Ro*k(1))/k(1))];
ZE=[ZE;abs(Rc*(RL+Rc*tanh(%i*bet*Lo))/(Rc+RL*tanh(%i*bet*Lo)))]);
end
plot2d([1 :100]*fo,res,logflag='nl',style=2);xgrid(9);
plot2d([1 :100]*fo,ZE,logflag='nl',style=-3);
La figure 2 montre que les deux courbes se superposent parfaitement.

```

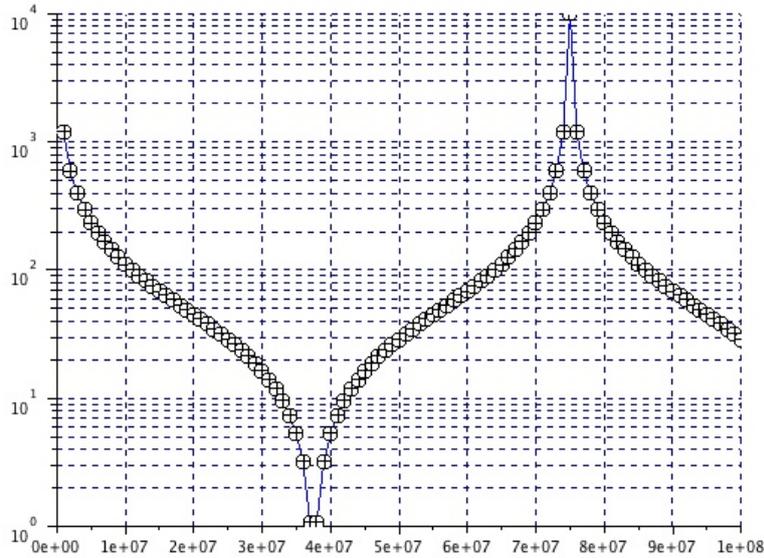


Figure 2 : superposition des deux courbes de Branin (courbe bleue) et de la formule analytique (marques : cercles)

Cette exacte correspondance confirme l'exactitude de la projection de l'expression en calcul symbolique du couplage de Branin dans le domaine des fréquences. Sa projection dans le domaine du temps, classique, est implicite du modèle (voir entre autre les travaux de J.P. Vabre [4]). On peut noter que l'avantage de cette formulation, comparée par exemple à celle en matrice chaîne, est que l'on est tout de suite ici en grandeur impédance. On va maintenant faire apparaître les divers domaines inclus dans le propagateur et dont l'ordre zéro est celui classiquement retenu pour associer une variété à une simple branche.

B.4 Décomposition du couplage

Le terme en exponentielle peut être développé suivant :

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2} - \frac{\tau^3 p^3}{6} + \frac{\tau^4 p^4}{24} + \dots \tag{13.18}$$

Du coup les expressions des termes de couplages deviennent :

$$\begin{aligned} Z_{12} &= (Z_c - RL) \left\{ 1 + \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2} + \frac{\tau^3 p^3}{6} + \frac{\tau^4 p^4}{24} + \dots \right\} \\ Z_{21} &= (Z_c - Ro) \left\{ 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2} - \frac{\tau^3 p^3}{6} + \frac{\tau^4 p^4}{24} + \dots \right\} \end{aligned} \tag{13.19}$$

et la source reportée sur la branche 3 : $E \left\{ 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2} - \frac{\tau^3 p^3}{6} + \frac{\tau^4 p^4}{24} + \dots \right\}$.

La somme des différents termes d'ordres croissants constitue un ensemble de cordes en parallèles traduisant les interactions non symétriques entre la branche de sortie et la branche d'entrée dans le modèle de Branin.

Si l'on calcule le couplage en supprimant tous les termes en p , on retrouve le résultat de fils branchés, où l'impédance de sortie est visible depuis l'entrée. Dans ce cas de par cette équivalence, tous les espaces \mathcal{E}_i sont synchrones et la variété peut être associée à un espace unique et un domaine temporel (ou harmonique) unique. C'est la situation classique considérée par exemple en décomposition en éléments finis.

Si l'on considère un couplage en $1 \pm p$, on retrouve la première pente traduisant un couplage de type mutuelle inductance.

En ajoutant petit à petit les termes de puissances de p croissantes, on tend vers la courbe finale, montrant ainsi les effets des différents modes du champ. A chacun de ces modes (ou groupes de modes) peut être associé un domaine sur lequel la métrique que l'on va allouer à la variété correspond à une loi définie pour des intervalles d'appartenance des paramètres. La figure 3 montre cette évolution pour les quatre premiers termes. On retrouve cette tendance que quand le nombre de modes est insuffisant, les résonances ne sont pas correctement retrouvées, sauf pour le cas limite basses fréquences. Les différents termes en τp peuvent être exprimés en termes fonctions de puissances de $x\lambda^{-1}$. On comprend qu'au premier ordre les deux premiers termes suffisent. En effet lorsque la longueur de propagation x tend vers $\frac{\lambda}{4}$ les termes d'ordres supérieurs à 1 sont non significatifs. Par contre, passé cette valeur (par exemple vers la demi-longueur d'onde), de nombreux termes suivants deviennent significatifs. On distingue ainsi très bien les trois zones de fonctionnement :

1. la zone continue (DC : direct current) pour laquelle aucun retard n'existe ;
2. la zone évanescente équivalente aux interactions de champ proche : mutuelles, capacitances, etc. ;
3. la zone de propagations de modes TEM.

Ces trois comportements apparaissent donc ici comme des conséquences de la causalité dans la fonction de calcul symbolique de retard. Elles traduisent directement le rapport entre la distance parcourue dans la variété et la vitesse de propagation des stimuli pour cette même variété.

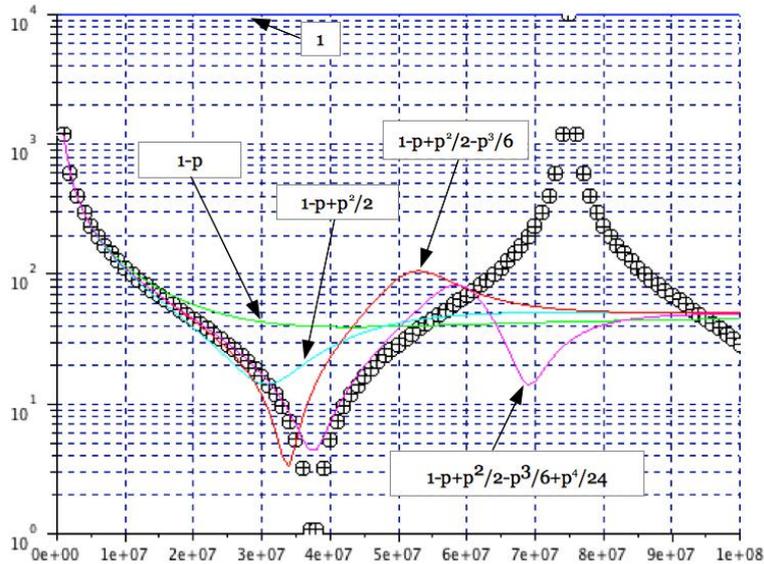


Figure 3 : effets des termes de puissances de p croissantes

Sur la base de l'étude d'un seul paramètre on voit que la loi associée à une variété est intrinsèquement liée à des définitions de domaines. Pour les cas réels où les paramètres sont nombreux, on comprend qu'un modèle fin passe par tout un ensemble de domaines précisés. Evidemment on aurait pu réaliser le produit tensoriel des variables impliquées dans une modélisation d'une variété. Mais l'expression devient très vite inutilisable et, de plus, le système de ces variables n'est pas holonome. L'approche par projection sur des domaines s'avère à ce titre beaucoup plus maniable.

B.5 Références de l'annexe partie IX

1. C.R.Paul. "Electromagnetics for engineers". Edition Wiley International, 2004. Page 279.
2. D.Pasquet. "Propagation Guidée". Edition Hermès-Lavoisier 2011. Page 32.
3. www.scilab.org
4. J.P.Vabre : monographie sur les lignes couplées. Disponible sur <http://www.springerlink.com/content/15475rqp520842w5/>
5. P.Thomas, "Éléments finis pour l'ingénieur". Collection EDF, R&D. Edition Lavoisier, 2005.

Dixième partie

Annexe C : du modèle de Branin

Résumé

Le modèle de Branin revêt de nombreuses propriétés singulières riches d'enseignement sur les propriétés fondamentales des ondes guidées. Nous avons vu que l'on pouvait l'utiliser pour comprendre des phénomènes généraux comme le principe d'incertitude (§5.4). Nous avons aussi établi les propriétés des ondes conduites par rapport aux ondes rayonnées. Mais la structure même du modèle de Branin révèle d'autres points : la présence d'une source déportée est la preuve d'une nature d'onde guidée. Par ailleurs, la création d'une ligne duale, fantôme, permet d'ajouter avec élégance et efficacité les couplages provenant d'autres lignes ou d'un champ externe.

Le modèle de Branin généralisé

Le modèle de Branin permet de faire une forme de diakoptique assez simplement puisque le générateur déporté “isole” quelque part les deux circuits couplés dès lors qu’ils sont adaptés. Mais lorsque l’on enrichit les extrémités de générateurs provenant de l’environnement, ces générateurs participent aux allers-retours d’ondes alors même que l’on dispose parfois d’expression les intégrant déjà. De façon à ne pas refaire le travail, et parce que cet ajout de générateurs ne se maîtrise pas de façon triviale, on a imaginé un modèle de Branin enrichi d’une paire fantôme sur laquelle s’intègre sans difficulté tous couplages de l’environnement.

C.1 Le modèle de Branin

Le schéma type du modèle de Branin est donné figure “ligne élémentaire”, §3.2.1. On le reconnaît à la présence d’un générateur reporté dans la maille réceptrice et d’une métrique non symétrique de la forme générale :

$$z = \begin{bmatrix} z_c + R_0 & (z_c - R_L) e^{-\tau p} \\ (z_c - R_0) e^{-\tau p} & z_c + R_L \end{bmatrix}$$

Si la ligne est adaptée au générateur et la charge également on a : $z_c = R_0 = R_L$. La métrique devient alors purement diagonale et fonction de l’identité :

$$z = 2z_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On ne détecte alors la présence d’onde guidée que par l’existence de sources reportées. Dans le modèle de Branin, pour une générateur S , on a un covecteur source donné par (équation 3.5) :

$$e = \begin{pmatrix} S \\ S e^{-\tau p} \end{pmatrix}$$

Où l’on voit que les deux circuits ne sont plus reliés par une corde mais totalement disjoints. Or si l’interaction était portée par un champ libre, la fonction de Green de cette interaction ne serait pas en $\exp(-\tau p)$ mais avec une atténuation en $1/R$ de la forme : $\exp(-\tau p)/R$ avec R la distance de propagation. De fait, modélisant un processus d’ondes guidées, le modèle de Branin doit impacter la métrique mais également les sources. Ce constat est cohérent avec le fait que lorsque la ligne est adaptée et idéale (sans pertes), on sait bien que sa longueur n’intervient plus et que l’on peut considérer un schéma équivalent positionnant le générateur en extrémité de ligne sans plus d’éléments.

C.2 Modèle de Branin enrichi

Si l’on veut reporter sur un Branin un couplage avec une autre ligne, ou avec un champ extérieur, on peut être tenté de rajouter simplement des générateurs aux extrémités du dit Branin. Ces générateurs vont ensuite être sources d’ondes progressives et régressives lorsque les conditions limites de la ligne ne sont pas adaptées. Ainsi, en remplaçant e_χ dans le cas précédent par $e_\chi + e_{ext}$ on trouve pour la source réfléchi :

$$e_0 = R_L k^2 e^{-\tau p} = \frac{R_L}{R_L + z_c} (e_0 + e_{ext}) e^{-\tau p}$$

La fém couplée e_{ext} est renvoyée vers le début de la ligne.

Si l’on désire réutiliser les formules de Vabre pour réaliser des calculs de lignes couplées, on veut pouvoir ajouter les effets de ces couplages sans insérer les fém provenant de ces formules dans un processus d’ondes

réfléchies, car les formules en question intègrent déjà ce processus. Après adaptation à une forme de métrique, elles donnent les tensions de paradiaphonie et télédiaphonie suivantes :

$$e_p = \left(\frac{Z_c + Z_s}{Z_s} \right) \left\{ \frac{\alpha}{2} \frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0 \gamma_L e^{-2\tau p}} \frac{1 - \Gamma_0}{1 - \Gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}} \right. \\ \left. \left[\frac{k+1}{2} (1 - e^{-2\tau p}) (1 + \gamma_L \Gamma_L e^{-2\tau p}) - \frac{k-1}{2} (\gamma_L + \Gamma_L) p \tau e^{-2\tau p} \right] V_s(p) \right\}$$

et en télédiaphonie :

$$e_t = \left(\frac{Z_c + Z_s}{Z_s} \right) \left\{ \frac{\alpha}{2} \frac{1 + \gamma_L}{1 - \gamma_0 \gamma_L e^{-2\tau p}} \frac{1 - \Gamma_0}{1 - \Gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}} \right. \\ \left. \left[\frac{k+1}{4} (1 - e^{-2\tau p}) (\gamma_0 + \Gamma_L) - \frac{k-1}{2} (1 + \gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}) p \tau e^{-2\tau p} \right] V_s(p) e^{-\tau p} \right\}$$

On voit que dans les expressions de Vabre apparaissent les termes propagatifs en fonction des désadaptations.

On a :

- Γ_0 et Γ_L respectivement, les coefficients de réflexions en source et charge de la ligne à l'origine des perturbations ;
- γ_0 et γ_L les mêmes coefficients pour la ligne réceptrice de la perturbation ;
- τ la constante de temps de la ligne ;
- α et k les coefficients de couplages qui dépendent des caractéristiques géométriques des lignes et de leurs installations : $\alpha = \gamma / (C + \gamma)$ et $k = M(C + \gamma) / L\gamma$. γ est le coefficient de couplage capacitif entre lignes, M le coefficient de mutuelle inductance, C et L les capacités et inductances linéiques des lignes.

Si l'on crée des réseaux semblables aux réseaux d'extrémités de la ligne, mais sans les coupler, c'est à dire sans insérer la propagation, on pourra dès lors utiliser les générateurs de Vabre sans soucis ; il suffira d'ajouter les courants calculés sur la ligne réelle et sur la ligne image. En remplaçant dans les expressions précédentes la source V_s par un terme de type Z_i , on trouve facilement la fonction de couplage associée. Soit α_p et α_t ces couplages en paradiaphonie et télédiaphonie pour une onde provenant de la gauche de la ligne et les mêmes coefficients β_x avec $x = p, t$ pour une onde provenant de la droite de la ligne, on trouve une métrique pour 2 lignes couplées qui prend la forme (Les chiffres 1 et 2 renvois aux lignes perturbatrice (ligne 2) et réceptrice (ligne 1). On ne considère pas ici le couplage de la ligne 2 vers la ligne 1. Mais son ajout suit exactement le même principe.) :

$$\begin{bmatrix} Z1_c + R1 & (Z1_c - R1_L) e^{-\tau p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Z1_c - R1_0) e^{-\tau p} & Z1_c + R1_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z1_c + R1_0 & 0 & \alpha_p & \beta_t \\ 0 & 0 & 0 & Z1_c + R1_L & \alpha_t & \beta_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z2_c + R2_0 & (Z2_c - R2_L) e^{-\tau p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (Z2_c - R2_0) e^{-\tau p} & Z2_c + R2L \end{bmatrix}$$

Cette technique a été validée en comparaison à des mesures dans [1].

Une connectivité simple permet d'automatiser l'obtention du résultat complet. Du calcul ressort un 6 vecteurs de courants de mailles (dans l'exemple précédent). On trouve les courants totaux par la connexion :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit k^T les courants totaux et k^d les courants détaillés, on a : $k^T = Q_d^T k^d$.

C.3 Ajout d'un couplage avec un champ externe

Comme pour la diaphonie, les expressions du couplage entre un champ incident et une ligne avait été déterminées dans les années 60 entre autre par Lee puis rappelées par Clayton R.Paul [2]. On traduit ces relations dans notre formalisme pour trouver en extrémité de ligne :

$$e_L = \frac{E^i(p)b}{(Z_c + Z_1)2M(p)} \left[2Z_c - (Z_c - Z_1)e^{-\gamma L(1+\sin\theta)} - (Z_c + Z_1)e^{\gamma L(1-\sin\theta)} \right]$$

et en début de ligne :

$$e_0 = \frac{E^i(p)b}{(Z_c + Z_2)2M(p)} \left[2Z_c - (Z_c - Z_2)e^{\gamma L(1+\sin\theta)} - (Z_c + Z_2)e^{-\gamma L(1-\sin\theta)} \right]$$

Dans ces expressions, L est la longueur de ligne, Z_c son impédance caractéristique, Z_1 et Z_2 les impédances de source et charge. La fonction M est définie par :

$$M(p) = Z_c(Z_1 + Z_2) \cosh(\gamma L) + (Z_c^2 + Z_1 Z_2) \sinh(\gamma L)$$

C.4 Références de l'annexe partie X

1. R.Casagrande, O.Maurice, A.Reineix, "High Frequency Bundles Modeling". Congrès EMC Europe 2013, Brugge.
2. C.R.Paul, "Analysis of multiconductor transmission lines".Wiley-interscience press. 2008.

Onzième partie

**Annexe D : Modélisation multiéchelle,
multiphysique**

Résumé

Nous avons vu que les éléments de la métrique se déclinaient sur plusieurs domaines, réglés par des paramètres qui sont eux-mêmes des variables d'un autre espace, par exemple l'environnement. Se pose alors la question de l'implémentation de ces espaces à multiples dimensions : comment choisir un repère de rythme commun ? Comment interagissent-ils ?

L'objet de cette annexe est de montrer sur un cas concret comment le problème peut être traité et d'analyser son évolution au travers de la méthode de Newton déjà abordée §6.9.

Déplacement d'un point de fonctionnement dans un espace multidimensionnel

Dans un problème multiphysique, les divers phénomènes rattachés aux diverses physiques ont en général des rythmes également différents. Considérons par exemple un problème impliquant de l'électronique et de la thermique. L'évolution de la température est beaucoup plus lente que celle des phénomènes électroniques. En même temps les deux systèmes sont liés dans leurs évolutions : une résistance peut dépendre de la température et la température être engendrée par le courant circulant dans cette résistance. Le fait d'ailleurs de séparer les phénomènes en thermique et électronique est une séparation d'échelles. Car les deux processus sont fondamentalement des processus électromagnétiques, mais à des échelles tellement différentes que ce sont des physiques avec des lois différentes aussi qui les traitent. La métrique du système global thermique plus électronique est non linéaire, comme peut l'être la gravitation, car elle interagit avec elle-même. Le courant engendre de la chaleur qui impacte le courant, etc. Comme tout processus non linéaire, une méthode de résolution efficace est la méthode de Newton[1], qui permet d'exprimer les solutions dans une recherche par approximations successives.

D.1 Exemple considéré

On considère un système très simple constitué d'une seule résistance de valeur R et de résistance thermique avec l'environnement R' . Au-delà d'une valeur de température donnée, l'échauffement s'emballe et la résistance tend vers une valeur infinie. Le système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} e = \left\{ (1 + \alpha T) e^{\left(\frac{T-T_1}{\sigma_1}\right)^\beta} + \gamma T^2 e^{\left(\frac{T-T_2}{\sigma_2}\right)^\zeta} \right\} Rk \\ T = T_0 + R'k^2 \end{cases}$$

On considère des conditions initiales telles que : $k = k_i$, $T = T_i$. Si (k_e, T_e) est la solution exacte, on pose :

$$k_e = k_i + \epsilon^{(p)} \quad T_e = T_i + \tau^{(p)}$$

p étant l'ordre de calcul.

On réécrit le système sous la forme :

$$f : \begin{cases} \left[(1 + \alpha T_i) e^{\left(\frac{T_i-T_1}{\sigma_1}\right)^\beta} + \gamma T_i^2 e^{\left(\frac{T_i-T_2}{\sigma_2}\right)^\zeta} \right] Rk_i - e = 0 \\ T_0 + R'k_i^2 - T_i = 0 \end{cases}$$

On calcule ensuite les termes de la matrice Jacobienne W à partir du vecteur de fonction f précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial k_i} = \left[(1 + \alpha T_i) e^{\left(\frac{T_i - T_1}{\sigma_1}\right)^\beta} + \gamma T_i^2 e^{\left(\frac{T_i - T_2}{\sigma_2}\right)^\zeta} \right] R \\ \frac{\partial f_1}{\partial T_i} = \left\{ \alpha e^{\left(\frac{T_i - T_1}{\sigma_1}\right)^\beta} + (1 + \alpha T_i) \left(-\frac{\beta}{\sigma_1} \left(\frac{T_i - T_1}{\sigma_1}\right)^{\beta-1} \right) e^{\left(\frac{T_i - T_1}{\sigma_1}\right)^\beta} + 2\gamma T_i e^{\left(\frac{T_i - T_2}{\sigma_2}\right)^\zeta} \dots \right. \\ \left. \dots + \gamma T_i^2 \left(-\frac{\zeta}{\sigma_2} \left(\frac{T_i - T_2}{\sigma_2}\right)^{\zeta-1} \right) e^{\left(\frac{T_i - T_2}{\sigma_2}\right)^\zeta} \right\} R k_i \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_i} = 2R' k_i \\ \frac{\partial f_2}{\partial T_i} = -1 \end{array} \right.$$

A ce moment là on sait exprimer les solutions à l'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} k_e \\ T_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i \\ T_i \end{bmatrix} - W^{-1} f \left(\begin{bmatrix} k_i \\ T_i \end{bmatrix} \right)$$

On peut pousser le calcul à un ordre supérieur si la convergence n'est pas très rapide ou la précision visée très fine.

D.2 Processus avec phénomènes temporellement disjoints

La température évolue beaucoup plus lentement que le courant. Lors de la première évaluation, les conditions initiales choisies peuvent être relativement éloignées des valeurs exactes. Le premier calcul peut donc conduire à un ordre assez élevé (mais ce n'est pas obligé). Par contre, aux instants suivants, la variation de courant ne donnera pas lieu à une variation de température importante. De fait l'estimation de température au second pas sera très proche de la réalité et la convergence sera très rapide (en 2 calculs, on doit tendre vers la solution).

Ces vitesses d'évolution relatives peuvent être exploitées pour atténuer des faibles variations de valeurs qui peuvent induire des erreurs plus qu'apporter de la précision. On se dote d'un rythme de référence, s . Les temps les plus rapides seront directement reliés à s : en espace-temps on déduira t_i de s .

Des processus plus lents seront reliés non pas à s mais à une sous-division de s . Par exemple, un temps t_l peut être déduit de :

$$t_l = INT \left(\frac{s}{100} \right)$$

t_l évolue ainsi 100 fois moins vite que s .

Ce type de relation va permettre de gérer des systèmes non holonomiques, non linéaires et multiéchelles, où les enchaînements de boucles imbriquées compliqueraient la programmation. Par ailleurs, dans un intervalle où la valeur est statique, on en déduira de même automatiquement son approximation au pas suivant.

L'usage de rythmes différents peut atténuer les instabilités liées aux schémas numériques. Ainsi pour un schéma instable pour des pas faibles, on pourra imposer un pas plus grand pour rester dans le strict périmètre de son efficacité[2].

D.3 Références de l'annexe partie XI

1. B.Démidovitch, I.Maron, "Eléments de calcul numérique". Edition MIR, 1979, Moscou.
2. B.Einarsson & al., "Accuracy and reliability in scientific computing". Edition SIAM, 2005, Philadelphie.

Douzième partie

Annexe E : Concept de similarité

Résumé

Pour pouvoir dire si deux trajectoires dans l'espace CG sont identiques il faut pouvoir juger de leurs points semblables. Comme les directions de l'espace CG sont des groupes de transformations et non des transformations précises, une construction peut suivre une évolution similaire à une autre ayant suivi la même trajectoire sans pour autant lui être identique en tout point. L'écart entre deux évolutions doit donc être mesurable et détectable. On peut dès lors que cette distance est établie fixer la notion de similarité entre deux trajectoires ou plus.

Evolutions similaires

La seule existence au sein d'une même race d'un nombre immense de membres proches mais non identiques prouve que l'évolution ne conduit pas à un exemplaire unique mais à des exemplaires semblables.

On reconnaît bien les traits de famille tout en constatant que deux frères ne sont pas semblables comme deux jumeaux. On doit pouvoir traduire l'intelligence de la reconnaissance de ces traits. Si l'on trouve un mécanisme suffisant, on pourra discerner les trajectoires similaires de celles proches mais finalement différentes. On peut ainsi regrouper une quantité d'objets incurvés et munis d'un manche sous la dénomination de cuillère. Mais si cette cuillère atteint une certaine taille et est munie d'un manche de bois, elle quitte la famille des cuillères pour rejoindre celle des pelles.

La détection de similitude doit pouvoir faire correspondre à tous les éléments d'un objet un correspondant sur l'autre objet. Cette correspondance doit être bijective, démontrant qu'aucun des deux objets n'a d'éléments que n'aurait l'autre. Cette bijection assurée, si l'on trouve la bonne correspondance intégrant les variations d'échelles, on disposera d'une base pour établir la similarité entre trajectoires.

E.1 Chirurgie

On admet que tout objet réel peut être décrit comme un assemblage de variétés. Pour pouvoir manipuler ces variétés et y appliquer des opérations de chirurgie, on les considérera compactes, orientées et différentiables[1][2].

Une opération simple de chirurgie que l'on pourra imaginer extensible à d'autres opérations permettant de construire un objet est l'ajout d'une anse. On reprend ici le développement présenté dans [3]. On considère une variété M comme une surface compacte, orientée. Sur cette surface on découpe un disque. Ce disque D^1 est défini par le produit cartésien d'une sphère de dimension 0 : S^0 par un disque ouvert B^2 : $D^1 = S^0 \times B^2$ [1]. On peut ensuite venir coller à ce découpage un cylindre à bord ouvert A que l'on fabrique par le produit cartésien d'un segment B^1 par un cercle S^1 : $A = B^1 \times S^1$. On réunit donc la variété M privée d'une surface de disque, ce que l'on note : $M \setminus (S^0 \times B^2)$ à la seconde à bord ouvert : A . On peut opérer de même sur une deuxième variété N en y collant l'autre extrémité du cylindre. On réunit d'abord les deux variétés : $M \cup N$ puis on fait une somme connexe, ce que l'on note : $M\# = M\#N$.

Ces opérations appliquées à des variétés peuvent être traduites dans notre formalisme de l'analyse tensorielle des réseaux sous la forme d'opérations appliquées à des graphes et leurs composantes.

E.2 Chirurgie sur des graphes

Admettant l'existence d'une relation associant à toute variété M une branche b avec ses propriétés déduites de celles de la variété (en particulier, la perte de dimensions lors du passage de la variété à la composante branche du graphe est compensée par l'intégration des propriétés spatiales par exemple dans la fonction reliant les flux dans la branche aux potentiels aux noeuds de la même branche), on peut suivre la même démarche d'ajout ou suppression d'éléments dans un graphe que celle de la chirurgie appliquée aux variétés. Nous proposons ici de premières réflexions en ce sens avec des notations utilisées pour cette occasion.

Imaginons un graphe G de genre M , c'est à dire comportant M mailles et de caractéristiques topologiques B, N, R telles que $M = B - N + R$, B, N, R étant respectivement les nombres de branches, noeuds, réseaux. On peut supprimer de ce graphe une branche en préservant les noeuds du graphe d'origine.

Notons $]b^{(k)}$ l'ouvert associé à la branche $b^{(k)}$ tel que, soit $\partial b^{(k)}$ les deux sommets de bords de la même branche, on écrit la somme connexe :

$$b^{(k)} = \partial b^{(k)} \#]b^{(k)}$$

On peut alors imaginer l'opération inverse, à savoir ajouter une branche à deux graphes G_1 et G_2 au départ non connexes. Soit :

$$G \setminus]b^{(k)} = (G_1 \cup G_2) \setminus]b^{(k)}$$

Puis on fait la somme connexe, n étant un nombre quelconque inférieur strictement à B , nombre de branches :

$$G^{\#(B+1)} = G_1^{(B-n)} \# G_2^{(B+n)}$$

E.3 Similitude

Deux objets auront pu suivre des chirurgies (transformations) dans un ordre différent sans pour autant être eux-mêmes différents si leurs caractéristiques topologiques (pas seulement le genre, mais la liste B, N, R enrichie des moments et cordes m, C) sont identiques. Pour autant est-ce suffisant ? Cela répond à la question de divergences de formes. Puisque le graphe est homotope à l'assemblage de variétés qui représente l'objet, deux graphes identiques ont des formes similaires. Les opérations d'homotopie peuvent être différentes mais la projection des variétés 3D sur un graphe qui garderait cette information de trois dimensions assurerait une similitude de forme. Or les graphes que nous élaborons ont cette information via la connexion η qui peut d'ailleurs même se rapporter à l'espace-temps. L'égalité des définitions topologiques incluant la connexion η assure donc la similitude de forme.

Il n'en reste pas moins que des différences peuvent subsister au niveau des propriétés intrinsèques des éléments du graphe. Dans les opérations de rétractions des variétés en éléments de graphe on garde par étiquetage celles fournissant les propriétés de conductivité, etc. Elles sont finalement intégrées dans les fonctions d'impédances généralisées ou métriques. Pour que deux objets soient identiques il faut de fait qu'ils aient aussi les mêmes métriques. Cela suppose que l'on ait travaillé sur des variétés différentiables.

La similitude va donc s'exprimer au final comme une équivalence entre deux tenfolds auxquels ont aurait soustrait les sources E : soit deux objets O_1 et O_2 de tenfolds \check{o}_1 et \check{o}_2 , on les considère identiques si : $\check{o}_1 \setminus E_1 = \check{o}_2 \setminus E_2$.

Pour avoir une équivalence entre deux tenfolds, notion moins restrictive que l'identité, il faut définir un écart dans les métriques. Les écarts de formes sont déjà admis via les opérations de rétractions qui n'ont pas forcément des coefficients identiques. L'impact de ces différences se traduit aussi dans les métriques. Mais des propriétés différentes peuvent conduire sous des géométries différentes à des comportements identiques. Sous des hypothèses de domaines d'études définis (limites en environnements, etc.) Ω , on peut justifier de l'équivalence de deux métriques si les écarts entre les flux obtenus (respectivement k^ν et k^μ pour les deux tenfolds) quels que soient les stimuli E_μ dans le domaine fixé sont en-deçà d'une limite ϵ elle-même définie. Soit :

$$\forall E_\mu \in \Omega \text{ si } k^\nu = k^\beta \pm \epsilon \in \mathcal{R}, \Rightarrow g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\beta}$$

On peut alors proposer une **définition de la similitude** :

soit un espace de valeurs limites Ω : si $g_{\mu\nu} \in \check{o}_1 \setminus E_\mu$ et $g_{\mu\beta} \in \check{o}_2 \setminus E_\mu$ sont telles que $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\beta}$, alors $\check{o}_1 \setminus E_\mu \equiv \check{o}_2 \setminus E_\mu$.

E.3 Continuité

Lorsque l'on applique une somme connexe sur deux branches, on peut se demander s'il est légitime de considérer implicite la continuité des propriétés appartenant au départ aux branches séparées. Si l'on voit les branches comme des projections sur une topologie cellulaire d'entités (variétés généralisées), cela revient à de poser la question de l'existence d'une fonction F sur des particules x_1 et x_2 attachée à des propriétés P de branches b^1 et b^2 telle que :

$$F = \frac{P(x_1 \in b^1) - P(x_2 \in b^2)}{d(x_1, x_2)} \Bigg|_{d \rightarrow 0}$$

La continuité géométrique est assurée par la carte (l'incidence B) associée à l'opération de chirurgie (via la connectivité L) : $\exists E, B_x^{(n)} \text{ st } L_{(x_1)}^{(k)} = L_{(x_2)}^{(k)}$.

Au niveau des propriétés, la continuité est moins évidente. Soit une première entité de métrique :

$$\left(\mathcal{D}_{[1 \dots n]}^{p_1 \dots p_m} \right) g_{\mu\nu}^{[1\dots n]}$$

et une seconde de métrique : $\left(\mathcal{D}_{[1 \dots n]}^{q_1 \dots q_m} \right) h_{\mu\nu}^{[1\dots n]}$. Si les domaines des paramètres p et q sont identiques, on pourra sans difficulté sommer les deux métriques dans la somme connexe et la connexion de maille. On a bien ici $P(b^1 + b^2) = P(b^1) + P(b^2)$ car les domaines assurent les points de fonctionnement en régime non linéaire, incluant les valeurs mêmes prises par les flux dans les variations de leur environnement. Or le branchement n'est jamais qu'une variation d'environnement comme une autre. Il inclut également d'éventuelles interactions par cordes créées lors du branchement.

Par contre si les domaines ne sont pas identiques, on ne peut présager du maintien d'une métrique dans la réunion des entités. L'hypothèse de domaines communs est donc incontournable pour assurer les branchements dans la construction des systèmes.

Théorème : la réunion (somme connexe) d'entités dans des opérations de chirurgie topologique n'est envisageable que sous la condition que les métriques non linéaires soient définies sur les mêmes intersections de domaines.

Sous cette hypothèse on pourra calculer des formes comme :

$$\frac{\Delta F}{\Delta k^\nu} = \left\{ \frac{\left(\mathcal{D}_{[1 \dots n]}^{p_1 \dots p_m} \right) \left[g_{\mu\nu}^{[1\dots n]} - h_{\mu\nu}^{[1\dots n]} \right] \cdot k^\nu}{\Delta k^\nu} \right\}$$

Dont on pourra déduire les autres opérateurs.

E.4 Dérivation covariante sur une métrique non linéaire

On peut être amené à calculer des expressions de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial k^{(\alpha)}} \left[\left(\mathcal{D}_{[1 \dots n]}^{p_1 \dots p_m} \right) g_{\mu}^{[1\dots n]} (\nu u^\nu [k^1, k^2, \dots, p^1, \dots]) \right]$$

Dans le développement, la dérivation va porter en partie sur les domaines. On voit ici l'intérêt de formuler ces domaines comme des fonctions gaussiennes, leur dérivation (dans le cas où l'un des domaines porte sur le flux lui-même) étant invariante, et ne venant que pondérer la métrique dérivée. Par exemple soit $p_m = k^1$, si :

$$\mathcal{D}_n^{p_m} = \exp \left(-\sigma (k^1 - k^{10})^\beta \right)$$

La dérivation partielle de l'expression précédente donne :

$$\left(\mathcal{D}_{[1 \dots n]}^{p_1 \dots p_m} \right) \left\{ \left[-\sigma \beta (k^1 - k^{10})^{\beta-1} \right] g_{\mu}^{[1\dots n]} (\nu u^\nu) + \frac{\partial}{\partial u^\nu} g_{\mu}^{[1\dots n]} (\nu u^\nu) \frac{\partial}{\partial k^1} u^\nu \right\}$$

Où l'on retrouve ensuite, avec un terme supplémentaire pondéré d'un coefficient, les processus de la dérivation covariante.

E.5 Références de l'annexe E

1. M.A.Armstrong, "Basic topology". Edition Springer, 2010.
2. A.Hatcher, "Algebraic topology". Edition Cambridge university press, 2001.
3. J.Sokolowski, compte-rendu des journées Elie Cartan, sessions 2006 - 2007 - 2008 ; <http://www.iecn.u-nancy.fr/~sokolows/JIECN2008/journees.pdf>
4. H.Poincaré, "Géométrie & Analysis Situs (Topologie)". Edition Jacques Gabay, 1996.

Treizième partie

Annexe F : Coefficient de couplage

Résumé

Le couplage entre une antenne et une cavité, ou d'une manière générale entre deux objets interagissant par lignes de champs proches (on suppose des interactions de champs évanescents) reste difficile à calculer. On détaille ici les principe et technique pour calculer ce coefficient de couplage dans le cas général et par le biais des échanges de flux. D'autres approches sont possibles entre autre par les coefficients de qualité et les raisonnements en énergie. Ces dernières sont plus simples d'emploi mais ne permettent pas toujours d'évaluer l'amplitude du couplage de façon assez précise. Nous expliquons de fait ici une méthode qui pourra être utilisée dans le cas le plus général, mais cette généralité engendre des calculs plus compliqués.

Le principe statique et du transformateur

Le transformateur est le composant électronique courant dans lequel intervient un échange de flux. Une fois le système couplé, les lignes de réductances ou des forces électriques sont fixées par une métrique et l'excitation du couplage ne fait que créer un stimuli porté par ces lignes. On sait cependant que l'intensité du stimuli peut modifier la métrique, mais ces cas sont rares et en l'espèce et pour l'usage courant concernent principalement les matériaux magnétiques. On rappelle dans les deux cas électrostatique et magnétostatique comment se détermine le couplage pour ensuite proposer une démarche générale dans le cadre de cette approche.

F.1 Principe statique

A l'origine libre de toute excitation, une structure est dans un état statique à l'équilibre où les charges sont réparties également et le potentiel en tout point nul. Par l'application d'une force électrostatique externe on va modifier cette répartition des charges pour respecter l'équation de Poisson et les lignes de champ électrostatique vont suivre les géodésiques de l'espace[1]. C'est le phénomène d'influence à la base des études en décharges électrostatiques pour la CEM. Le principe physique à la base de ces produits scalaires de flux électriques est guidé par l'équation de Poisson. En écrivant cette équation sous forme intégrale :

$$\frac{1}{\nu} \iiint d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

On met en évidence le produit scalaire sur tout le volume des lignes de champ source \vec{E} avec les lignes de champ réceptrices $d\vec{S}$. Ce couplage peut s'exprimer aussi par la différence de potentiels induite $\vec{h} \cdot \vec{E}$, où \vec{h} représente cette fois les lignes en réception. Cette relation peut s'écrire :

$$hE \left(\vec{h}^1 \cdot \vec{u}_E^1 \right)$$

où les grandeurs \vec{h}^1 et \vec{u}_E^1 sont des vecteurs normalisés suivant les directions de \vec{h} et \vec{E} . Le coefficient de couplage en statique est donné par le produit scalaire des vecteurs normalisés donnés précédemment.

F.2 Principe du transformateur

Considérons deux mailles d'impédances a et b , couplées par une fonction α . L'équation de ce système pour les deux flux f^1 et f^2 des deux mailles est :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = af^1 + \alpha f^2 \\ 0 = \alpha f^1 + bf^2 \end{array} \right\}$$

Le transformateur est excité sur la maille 1 mais ne comporte aucune source sur la maille 2.

On trouve le flux de maille 2 : $f^2 = -\alpha/bf^1$, d'où

$$f^1 = \frac{e}{a + \frac{\alpha^2}{b}}$$

Finalement :

$$f^2 = -\frac{\alpha e}{ab + \alpha^2}$$

On trouve facilement le maximum de transmission du flux :

$$\frac{\partial f^2}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{-e(ab + \alpha^2) + \alpha e 2\alpha}{(ab + \alpha^2)^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{ab}$$

On peut ensuite pondérer ce coefficient suivant l'efficacité du couplage par un facteur β compris entre 0 et 1. De fait :

$$\alpha = \beta\sqrt{ab}$$

a et b dans un transformateur parfait sont les seules inductances du primaire et du secondaire. Dans le cas général ce sont les éléments par lesquels le couplage se réalise. Il est toujours possible dans la topologie d'appliquer la corde de couplage à certains éléments plutôt qu'à d'autres.

La question qui vient alors est : comment déterminer β ?

F.3 Facteur de couplage

Si les lignes de flux excitées par la source sont intégralement captées par le récepteur, le facteur de couplage vaut 1. De nouveau on peut déduire le facteur de couplage en calculant le produit scalaire normalisé entre les lignes de flux engendrées par la force magnétomotrice de l'émetteur, connaissant la réluctance du milieu et les lignes de flux du "magnétorécepteur". Le produit scalaire normalisé en statique des lignes de champs par le vecteur champ excitateur normé (ou le gradient de potentiel) devient ici le produit scalaire entre les lignes de flux magnétique et les normales des forces magnétomotrices excitatrices normées.

F.3.1 Exemple : couplage antenne guide

On considère une petite ligne quart d'onde de 3 cm de long sur 5 mm de distance à une paroi d'une cavité, réalisée avec un conducteur de 1 mm de diamètre. Cette antenne attaque une cavité cylindrique sur le mode TM010 de 30 cm de long et 10 cm de diamètre. Le pied de la ligne est centré sur une extrémité du cylindre, l'autre extrémité étant en court-circuit. On désire acquérir le paramètre S11 mesuré en entrée d'antenne.

F.3.1.1 Paramètres du réseau antenne

L'antenne est vue comme une ligne faite d'un fil au-dessus d'un plan de masse, d'impédance caractéristique : $Z_c = 60 \ln\left(\frac{4h}{\phi}\right)$. h est la hauteur du fil, ϕ son diamètre. On en déduit l'impédance ramenée par la ligne :

$$Z_R = Z_c \frac{Z_T + jZ_c \tan(kL)}{Z_c + jZ_T \tan(kL)}$$

En ajoutant l'impédance de source à cette impédance ramenée, on modélise dans une maille le générateur branchée sur l'antenne en extrémité de circuit ouvert, on fixe par exemple $Z_T = 10^6 \Omega$. On peut prendre comme nombre d'onde $k = \omega/c$, cela ne joue pas au premier ordre dans notre principe de fonctionnement.

F.3.1.2 Paramètres de la cavité sur un mode

A un mode particulier, ici le mode TM010, la cavité se comporte comme un résonateur. En choisissant l'inductance égale au condensateur, on trouve pour une résonance à 2,45 GHz :

$$L_{ca} = C_{ca} = \sqrt{\frac{1}{2\pi f_0}}$$

Pour un coefficient de qualité Q , on détermine une perte $R_{ca} = L_{ca}\omega_0/Q$.

F.3.1.3 Facteur de couplage entre l'antenne et le mode TM010

Suivant les principes émis précédemment, le facteur de couplage doit être déterminé par le rapport entre l'intensité des force magnétomotrices qui stimulent le plus un mode sur l'intensité intégrée des forces magnétomotrices induites par le couplage réel. A la résonance, la répartition du courant dans la ligne est en quart de longueur d'onde avec un courant nul en extrémité ouverte. La ligne image reflétée dans la fermeture métallique

du guide cylindrique constituée avec le fil réel une succession de “vroucle” pour lesquelles on peut caractériser les forces magnétomotrices. Soit l’axe y le long du fil, le coefficient de couplage β est donné par :

$$\beta = \int_y dy \left(\vec{\mathcal{F}}_y^1 \cdot \phi_y^1 \right)$$

$\vec{\mathcal{F}}_y^1$ est la FMM (force magnétomotrice) normalisée engendrée par l’excitateur et ϕ_y^1 les lignes de réluctances dans le volume pour le mode considéré. On trouve :

$$\beta = \int_0^L dy \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi(R-y)}{2R}\right)$$

L est la longueur d’antenne et R le rayon de la cavité. On a pu vérifier l’excellente adéquation du calcul avec la mesure.

Notons que le couplage s’effectue sur une longueur de zone de champs évanescents. Si la structure d’excitation est elle-même longue, il faut intégrer les couplages comme une succession de ces régions évanescents éventuellement séparées par des régions de propagations modales.

F.5 Conclusion

En ramenant le couplage à des expressions connues où apparaît un facteur qui pondère l’efficacité de transmission des impulsions vers les lignes de champs réceptrices, on généralise plus facilement cette méthode. Le facteur de couplage peut être trouvé de diverses manières et sa normalisation simplifie la difficulté de l’exprimer en absolu.

Références

1. L.Armand, “Encyclopédie de l’électricité”. Edition Larousse, 1969.

Quatorzième partie

Annexe G : Modélisation analytique de cavités
tordues

Résumé

Partant de la détermination des vecteurs d'ondes pour des hypothèses de fonction du champ dans un volume rectangulaire, on peut utiliser la même démarche pour chercher des fonctions plus compliquées répondant à des formes géométriques plus compliquées. Les modes du champ en propagation étant obtenus, on réutilise le vecteur d'onde dans un schéma de Branin pour modéliser la propagation du champ dans un guide court-circuité ou partiellement ouvert qui constitue la cavité étudiée.

Equation de Helmholtz & démarche classique

En résolvant les équations de Maxwell dans l'espace vide on trouve l'équation de Helmholtz qui régit la propagation des champs :

$$\sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\partial^2 E_y(x,z)}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x,z)}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation décrit, pour le référentiel choisi, la propagation suivant la direction z d'un champ électrique polarisé dans la direction y avec une distribution d'onde dans la direction x . Pour un profil de forme donné on pose la fonction supposée de répartition du champ et l'on réinjecte cette fonction dans l'équation de Helmholtz. On obtient alors le vecteur d'onde pour le mode considéré.

G.1 Structure de bandes parallèles

Pour cette structure classique, on pose une fonction du champ égale à : $E_y(x,z) = E_{y0} \sin(n\pi \frac{x}{X}) e^{-ikz}$. En injectant cette expression dans l'équation de Helmholtz on trouve pour le vecteur d'onde :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{X^2}}$$

C'est la dispersion classique donnée pour les guides d'ondes rectangulaires.

G.2 Structures compliquées

On peut imaginer des profils de champs plus compliqués que le cas classique parallélépipédique. Mais on reste néanmoins rapidement bloqué si les formes sont tordues. Une solution pour déterminer la dispersion et les modes dans la cavité est d'utiliser un outil numérique résolvant Maxwell en maillage. On pourra ensuite facilement traduire les résultats en résonateurs accordés dans un graphe d'interactions qui sera rapide et beaucoup plus maniable que le modèle maillé de départ. Mais on peut aussi proposer des techniques plus simples comme la discrétisation de l'équation de Helmholtz [2]. Maintenant, reprenant l'idée de diakoptique appliquée à la ligne, on peut représenter le volume comme un ensemble de résonateurs répartis et couplés. On part d'un réseau qui est une réduction pour une polarisation de la discrétisation des équations de Maxwell proposée par Kron [1] : c'est un pavage de circuits RLC comme autant de lignes de télégraphistes mais en "2D" et non en structure de filtre. Chaque cellule au centre est rattaché directement à une maille, pointée par un point dans le volume. L'impédance de ce point dans l'espace des mailles et pour une polarisation suivant z est :

$$R \left\{ \frac{dx}{dy} \right\} + L \left\{ \frac{dx}{dy} \right\} p + 2/Cp$$

Notons que le réseau peut discriminer des milieux hétérogènes en inductance comme en condensateur. Entre chaque cellule, la diakoptique étant effectuée sur la frontière électrique, on a un couplage de forme $\pm 1/Cp$. Le signe est négatif si les deux cellules appartiennent à la même direction de propagation. Positif si elles appartiennent à deux directions de propagation différentes. Enfin, les cellules qui sont au bord prennent en charge dans l'expression de leurs impédances les conditions limites du volume et ont un condensateur de valeur $1/Cp$.

Les points - c'est à dire chaque cellule - peuvent couvrir un volume élémentaire variable. Le pavage ainsi réalisé s'approche des techniques "meshless" et peut prendre en charge des variations de caractéristiques de propagation des milieux.

Par exemple pour un point unique - donc 4 cellules couplées - d'impédances identiques intégrant un bord z et de couplage γ , la métrique est donnée par :

$$g = \begin{bmatrix} z & \gamma & -\gamma & -\gamma \\ \gamma & z & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & -\gamma & z & \gamma \\ -\gamma & -\gamma & \gamma & z \end{bmatrix}$$

En résolvant l'équation tensorielle du réseau on trouve tous les courants de mailles. On en déduit le champ électrique :

$$E(z, q) = \frac{1}{zCp} \sum_{\nu \in A_\nu^q} k^\nu$$

Où q est le point du pavage où l'on considère le champ et A la matrice d'adhérence reliant points et mailles. Le champ magnétique est obtenu par :

$$L(k^\nu)^2 = \frac{v}{\mu} B^2 \left(\left\{ \begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} \right\}, b \right)$$

b est le centre de la cellule et non un point du pavage, v est le volume couvert par la cellule.

G.5 Conclusion : modèle analytique pour la cavité

La modélisation d'une cavité d'équipement ou quelconque se base sur trois principes parmi d'autres :

1. le principe de Collin : "une cavité compliquée peut être décomposée en un assemblage de cavités simples" ;
2. une cavité régulière même tordue est assimilable pour une polarisation et un stimulus donnés à un guide court-circuité ;
3. le volume peut être quadrillé par un ensemble de résonateurs couplés.

Utilisant ces principes, on peut approcher la modélisation analytique de cavités pleines avec ou sans ouvertures. Ce sont des assemblages de cavités simples, certaines étant couplées avec des antennes que constituent les ouvertures.

Pour une cavité simple donnée, le modèle analytique pour une excitation suivant une polarisation (on considère comme polarisation du champ dans la cavité l'une des deux directions des modes, c'est à dire l'une des deux directions transverses à la propagation) est un ensemble de deux branins éventuellement couplés, chaque branin prenant en charge une polarisation. L'expression de la dispersion de chacun d'eux est donnée par les calculs exposés précédemment.

Un branin permet de modéliser la propagation dans un guide. Une cavité est un branin particulier, où les conditions de charge sont en général un court-circuit. Lors de l'insertion d'un élément exciteur et suivant sa position, on doit faire le produit scalaire des champs évanescents de l'exciteur par les champs des modes du guide pour modéliser l'excitation du guide. On rejoint là la technique mise au point pour la modélisation de ces structures en analyse tensorielle des réseaux §3.6.3.

Références

1. N.V.Balasubramanian, J.W.Lynn, D.P.Sen Gupta, "Differential forms on electromagnetic networks". Daniel Davey & Co. Publisher. Hartford, Connecticut, 1970.
2. C.Gangnant, "Contribution à l'étude de la cartographie et la statistique du champ électromagnétique dans une chambre réverbérante à brassage de modes par une méthode hybride FDFD/développement modal". Thèse de doctorat, université de Limoges, 27 Juin 2008.

Quinzième partie

Annexe H : Points de vue

Résumé

Dans le cadre de la traduction d'évolution au sens de la systémique, on est rapidement amené à considérer la notion de point de vue. Ainsi un même problème sera abordé différemment suivant la personne qui s'y attèle. Dans le domaine physique, ce sont les groupes de transformations qui prennent en charge les différentes évolutions que la nature peut envisager. Mais la notion de point de vue rattache plus à celle de caractère et passe par les pondérations des probabilités de transformations dans le modèle CG. On doit donc envisager des transformations qui puissent s'appliquer à cette composante.

La modification des probabilités conditionnelles

Les probabilités bayésiennes sont les supports de la traduction des caractères. Elles sont aussi les composantes de la partie probabiliste du propagateur. Si l'on a pour cette composante une série de termes de la forme $p_{ij}(A|B)$, on peut vouloir les transformer en une série $p_{ij}(A|C)$. C'est l'objet de ce chapitre.

H1. Approche matricielle

On peut trouver une transformation qui permette de passer d'une composante p_{ij} à une autre p'_{ij} . On revient dans ce cas aux transformations classiques appliquées à des matrices. L'avantage de cette approche est sa simplicité mais son inconvénient est son côté primitif. De plus elle impose de rajouter des opérations de transformations appliquées au propagateur, alors même que c'est plutôt lui qui est en charge de porter les transformations. Cette approche ne convient donc finalement pas et on lui préfère l'approche intégrée du prochain paragraphe.

H2. Approche par conditions intégrées

Dans cette approche on profite du fait que les conditions peuvent intégrer les caractères. On peut ainsi développer une probabilité conditionnelle de la forme :

$$p_{ij} \left(A \left| \begin{array}{l} \text{caractère 1 : } B \\ \text{caractère 2 : } C \\ \dots \end{array} \right. \right)$$

Sous cette forme, les points de vue sont automatiquement et élégamment intégrés au propagateur de l'évolution. Dans la programmation, ils se traduisent par l'emploi de structures conditionnelles.

H3. Conclusion : référentiels psychiques

L'appréhension d'une situation et les choix qui s'en déduisent sont traduits par des vecteurs de conditions dans les probabilités bayésiennes. Comme dans tout le traitement de l'aspect "psychique" de l'évolution, ces vecteurs sont définis par des ergonomes ou des psychologues qui justifieront des variations de choix suivant les compréhensions de différents acteurs étudiés. L'intégration des points de vue se fait ainsi naturellement comme l'intégration d'autant de traductions d'un problème perçus de différentes façons. Ces perceptions relèvent de processus d'analogies variés qui associent à une existence physique donnée différentes pensées et interprétations[1].

Référence

1. "L'analogie au coeur de la pensée". D.Hofstadter, E.Sander. Edition Odile Jacob sciences, 2013.

Seizième partie

Publications

Articles dans des congrès

1. "On mathematical definition of chords between networks". O.Maurice, A.Reineix, P.Durand. Congrès EuroEM 2012, Toulouse.
2. "Analyse tensorielle des réseaux hybridée comme outil théorique pour la CEM et l'électromagnétisme". O.Maurice, A.Reineix. Congrès CEM2010, Limoges.
3. "Modèle de gamma matrices pour la prise en compte d'interactions rayonnées entre réseaux". A.Reineix, O.Maurice. Congrès CEM2012, Rouen.
4. "Modélisation de la relation client-fournisseur". O.Maurice, A.Reineix. Congrès CEM2012, Rouen.
5. "Proposal of a general method to study wave propagation". O.Maurice, A.Reineix, F.Paladian. General Assembly and Scientific Symposium URSI, 2011.
6. "Power chopper modelling using the Kron's method". Congrès Engineering and Applied Science IASTE 2012, Sri-Lanka.
7. "General interaction principle implemented in the Kron's method". P.Durand, O.Maurice, A.Reineix. Congrès IAENG 2013, Londres.
8. "Synthesis of the guided waves modelling principles under the tensorial analysis of network formalism". A.Reineix, O.Maurice, P.Hoffmann, B.Pecqueux, P.Pouliguen. Congrès EuroEM 2012, Toulouse.
9. "Simulate the variability of equipment with the MKME". M.Breant, O.Maurice, R.Xao-Gian-Kee. Congrès APEMC 2012. pp561-564.
10. "To improve the variability of one complex system with the MKME". M.Breant, O.Maurice, T.Dubois. G.Duchamp. Congrès EMCEurope 2012, Rome.
11. "Exploiter les résultats d'essais d'équipements pour l'objectif système par transformations des propriétés géométriques en propagations". O.Maurice. Congrès 2EMC, Rouen, 2010.
12. "Modélisation d'un échange client-fournisseur dans le cadre du métier de la compatibilité électromagnétique". Journée AFSCET d'Andé 2011.
13. "Analyse théorique d'un système de régulation de vitesse avec prise en compte du facteur humain". O.Maurice, A.Reineix. Congrès Ingénierie des systèmes complexes. Arcachon, 2012.
14. "CRBM et photons". Journée AREMIF 2013. O.Maurice, R.Demaison, S.Dubois, A.Reineix.
15. "Modélisation d'une gestion de non conformité en compatibilité électromagnétique". O.Maurice, A.Reineix. Congrès CONFERE 2013, Biarritz.

Articles dans des revues

1. "Des essais de validation plus robustes : des taux de réussite améliorés et la transversalité d'exploitation optimisée". O.Maurice, Revue "Essais & Simulation". ISSN 2103-8260. 2010, n°104-105, pp.16-20.
2. "Proposition d'un formalisme comme support pour les études théoriques en systémique". O.Maurice, A.Reineix. Revue Systemica, Bruxelles, Belgique 2011.
3. "Modélisation des systèmes complexes". O.Maurice, A.Reineix. Revue mensuelle n°127, 2012 : Robotique, vie artificielle, réalité virtuelle.
<http://www.admiroutes.asso.fr/larevue/2012/127/xtan.htm>.
4. "Analyse tensorielle des réseaux appliquée à la compatibilité électromagnétique de l'électronique de puissance". O.Maurice. Revue 3Ei, 2011.
5. "A formalism to compute the electromagnetic compatibility of complex networks". O.Maurice, A.Reineix, P.Hoffmann, B.Pecqueux, P.Pouliguen. Revue Advances in applied science research, ISSN : 0976-8610. Vol.2, iss5. pp439-448.
6. "Assessment of the radiated immunity of integrated circuits in the 3-40 GHz range". R.Perdriau, M.Ramdani, O.Maurice, S.Dubois, E.Sicard. Electronic letters. 06/2011.
7. "Shielded cables modeling with internal pigtailed". R.Casagrande, O.Maurice. Revue JBAP, accepté en Décembre 2012, parution avec le volume de Novembre 2013.

Présentations particulières - cours

1. Journée AREMIF2012, Simulation et complexité, notions et méthodes (O.Maurice) : présentation d'introduction.
2. Topologie appliquée. Cours donné pendant l'école d'été du GDR Onde, 2011. O.Maurice.
http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/61/73/63/PDF/topologieDeLaCEM_L.pdf
3. Cours de topologie appliquée en Master II, école centrale de Lyon sous la direction du Pr. Christian VOLLAIRE. *<http://olivier.maurice.pagesperso-orange.fr/TopologieAppliquee.html>*
4. "The tensorial analysis of networks applied to multiphysics problems of real systems". O.Maurice. Présentation invitée, congrès AMPERE 2011, Toulouse.
5. "La CEM des systèmes complexes". O.Maurice. Présentation invitée, assemblée générale du GDR Onde, Nice 2011.
6. "Usage de gamma matrices pour les études générales en diffraction ou en propagations". O.Maurice, A.Reineix. Présentation à une journée IEEE du 15 Décembre 2011.
7. "Modélisation de la simplicité en compatibilité électromagnétique". O.Maurice. Présentation au séminaire de mathématique appliquée. Département M2N, CNAM, Paris.
8. "Modéliser la complexité". O.Maurice. Conférence de clôture. Congrès CONFERE2012, Venise.

Dix-septième partie

Soutenance

Introduction d'une théorie des jeux dans des topologies dynamiques

Thèse soutenue par Olivier Maurice sous la
direction du Pr. Alain Reineix

Sommaire :

- . *Format de la présentation & choix d'un fil conducteur*
- 1. *Présentation de la scène, du jeu, du système complexe*
- 2. *Modélisation du système physique*
 1. *De la réalité perceptible au graphe*
 2. *Cordes virtuelles*
 3. *L'espace des mailles intégrant celui des moments*
 4. *Notre système : émetteur et récepteur*
- 3. *Tenfold du système et ses transformations*
- 4. *Jeu*
 1. *Acteurs P, V*
 2. *Gamma matrices, processus markovien*
 3. *Arbre d'évolution*
 4. *Profil de comportements et vecteur décisions*
 5. *Probabilité de toucher – arbre d'évolution à ce stade*
 6. *Probabilités bayésiennes et croyances*
 7. *Projection dans un espace choix – gains*
 8. *Bilan des espaces imbriqués et impliqués*
 9. *Présence de zones attractives (« équilibres »)?*
 10. *Application : gestion de crise en CEM*
- 5. *Conclusion : complexité, émergence*

TITRE

- Illustrations

Equations

$$\zeta = \eta \lambda$$

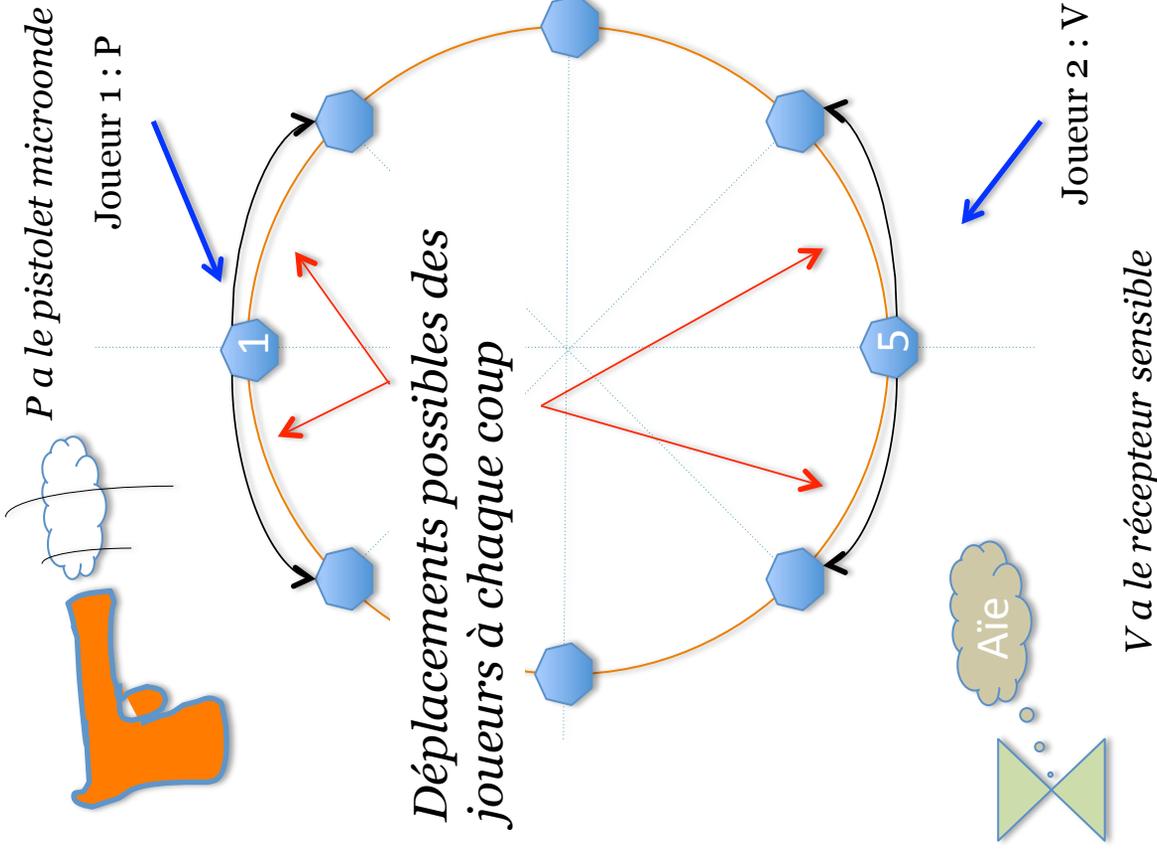


On peut mettre des commentaires ici : toute ressemblance avec des personnages ayant réellement existés serait fortuite.

Présentation de la scène, du jeu*, du système complexe.

Données du jeu :

1. Les 2 joueurs se déplacent ensemble d'une case à chaque coup et sont invisibles l'un pour l'autre
2. P est en position 1 au départ et peut tirer 1 fois dans tout le jeu. Son tir déclenche la fin du jeu
3. V est en position 5 au départ et ne peut pas tirer
4. La partie se joue en N coups



Les téléphones portables sont des armes microondes pour les chaînes HiFi ! *A Markov chain game with dynamic information. Olsder, Papavassilopoulos. Journal of optimization theory and applications. Vol 59, n°3, Déc.88.

Modélisation du système physique : de la réalité perceptible au graphe.

$$\mathcal{M} : \{x_i\}$$

$$\exists \mathbf{E} \forall x_i \in \mathcal{M}, \exists \vec{AB} \in \mathbf{E}/A = x_i, B \in \mathcal{M}$$

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \{\mathbf{E}_i\} : x_i \rightarrow \vec{AB}_i$$

$$\{\vec{AB}_i\}, i = \{1, 2, \dots, N\} \Rightarrow \vec{f} \equiv \alpha \sum_i \vec{AB}_i$$

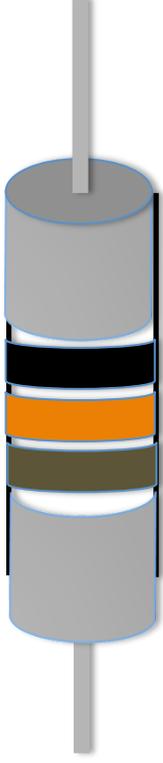
$\{b^k\}$: espace des branches B .

$$\partial \mathcal{M} \rightarrow \partial b^k$$

$$b^k = \partial b^k \cup]b^k[,]b^k[\rightarrow \{x_i\} \in \mathcal{M} \setminus \partial \mathcal{M}$$

$$\mathcal{M}^k \rightarrow b^k \Rightarrow \vec{b} = b^k \vec{f}_k$$

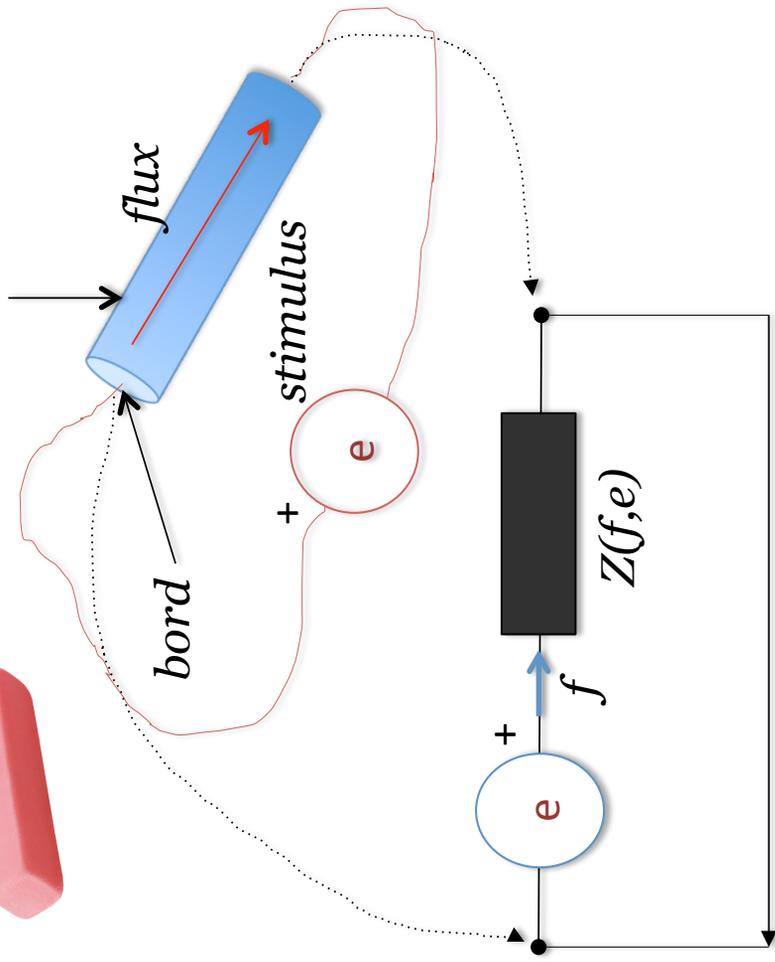
Considérons une résistance électronique :



Ou une gomme :



Milieu homogène



De la réalité perceptible
au graphe : comment
injecter e ?

$$k^\nu \rightarrow F^\nu$$

$$\phi_j = (R)^{-1}_{j\nu} F^\nu$$

$$e_j = \partial_t^* \phi_j$$

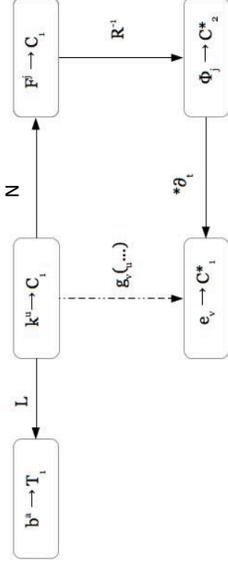
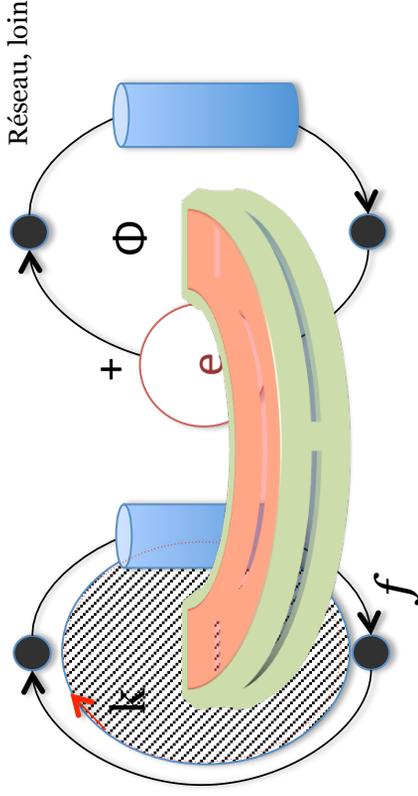
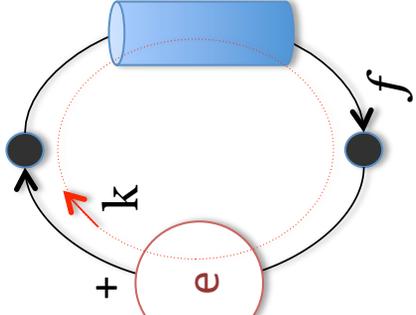


Diagramme de Roth

Mais comment injecter
ce stimulus ?

Rajouter un générateur
=> rajouter un objet



On injecte un flux magnétique de section
égale au disque dont le bord est le flux k

Gabriel Kron



L'invariant est la puissance généralisée

Métrie de Kron:

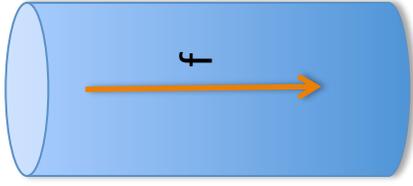
Entre 1 volt et 1 ampère on a une distance de 1 ohm*.

$$P = g_{\mu\nu} f_{\mu} f_{\nu}$$

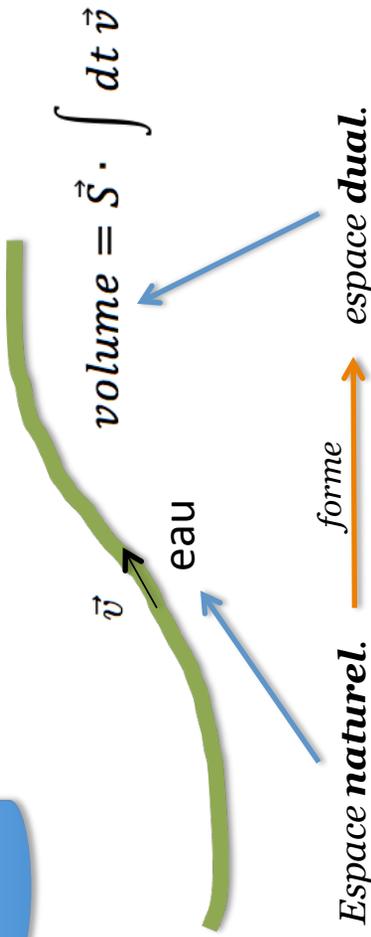


Direction vectorielle -> degrés de long. & lat.

Notion de métrique



Vitesse, déplacement, pression, ... : espace naturel **primal**



La **métrique** donne la distance entre la grandeur primale et la quantité duale

*Ce fut Claude JEANPERRIN qui eu le premier cette interprétation naturelle de la métrique de Kron.

De la réalité perceptible au graphe : généralisation de la métrique.

$$\forall e_\mu, k^\nu \in G, \exists g/g_\mu ({}_\nu k^\nu, T, \dots) = e_\mu$$

$$S = g_\mu ({}_\nu k^\mu, T, \dots) k^\nu$$

$$g \leftarrow N \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \partial_t^*$$

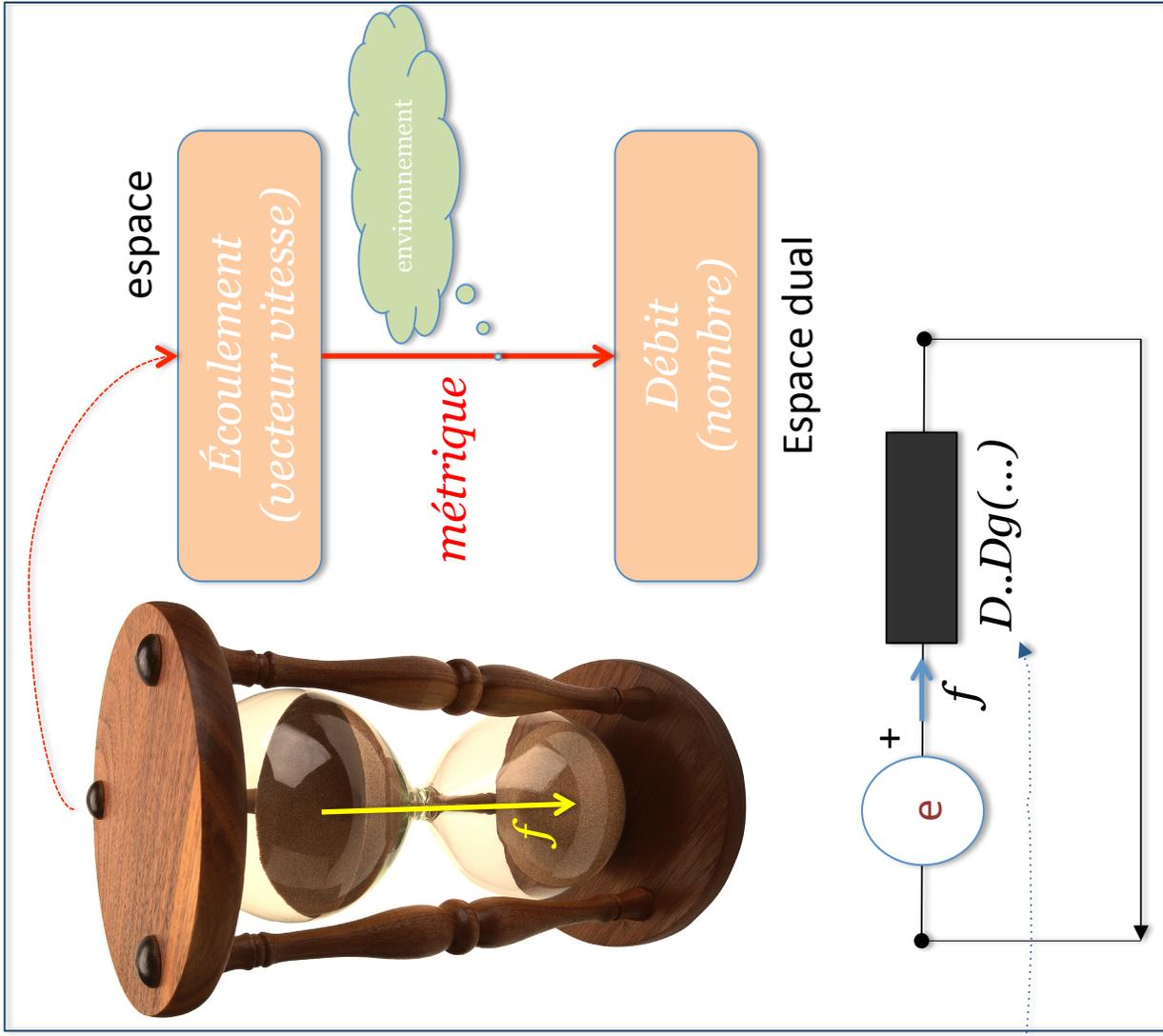
$$e_\mu = \mathcal{D}_1^{p_1} \mathcal{D}_2^{p_2} \dots \mathcal{D}_{19}^{\{1,1,1,\dots\}} k^\nu + \dots$$

$$\dots \mathcal{D}_2^{p_2} \mathcal{D}_1^{p_1} \dots \mathcal{D}_{19}^{\{2,1,1,\dots\}} k^\nu + \dots$$

$$\text{si } \exists \Omega / \mathcal{D}_a^{p_1} \mathcal{D}_b^{p_2} \dots \mathcal{D}_c^{p_N} = 1,$$

$$\forall \{a, b, \dots, c\}, \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

$$\Rightarrow e_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu$$



De la réalité perceptible au graphe : comment créer un système d'objets ?

$$e_a = dV_a + z_{ab}f^b, f^b = L^b_\nu k^\nu$$

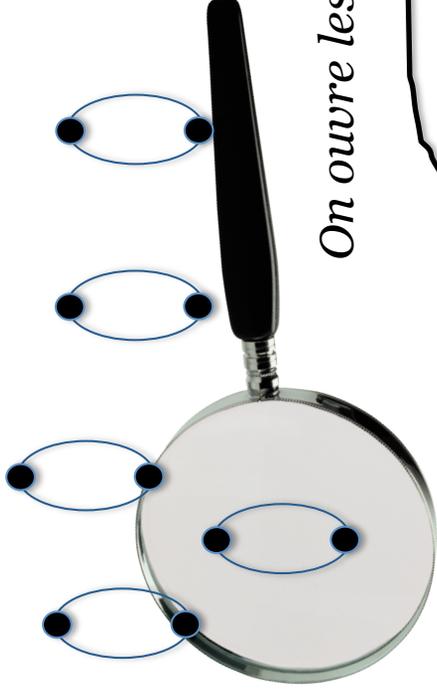
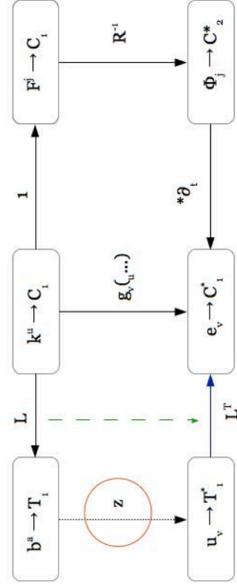
$$\Rightarrow e_a = dV_a + z_{ab}L^b_\nu k^\nu$$

$$\Rightarrow L^a_\mu e_a = L^a_\mu dV_a + L^a_\mu z_{ab}L^b_\nu k^\nu$$

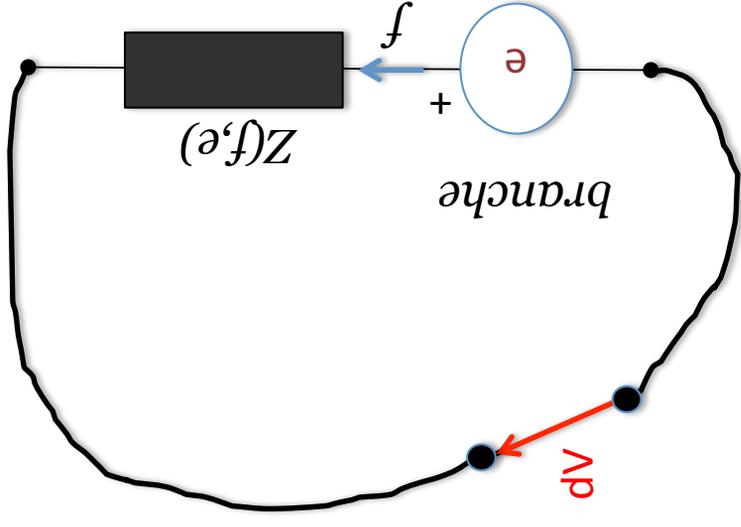
$$\Rightarrow e_\mu \parallel g_{\mu\nu}k^\nu,$$

$$L^a_\mu dV_a = 0,$$

$$g_{\mu\nu} = L^a_\mu z_{ab}L^b_\nu$$



On ouvre les connexions



L'ouverture :
travail $W = qdV$.



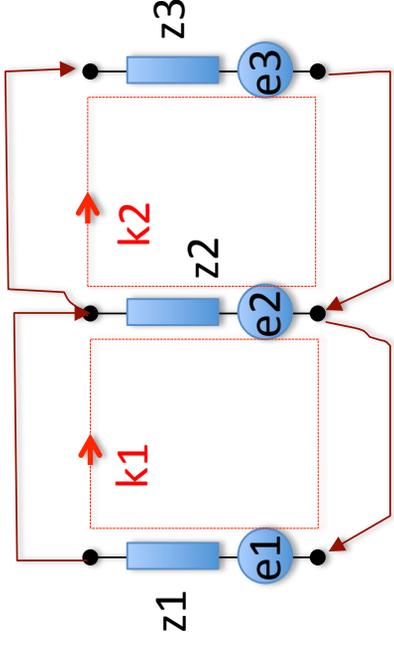
De la réalité perceptible au graphe : comment créer un système d'objets ?

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = L^T z L = \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_2 \\ -z_2 & z_2 + z_3 \end{bmatrix}$$

Chirurgie cellulaire !



Ça fait pas mal!

Connexions	Maille 1	Maille 2
Branche primitive 1	€	
Branche primitive 2	€	€
Branche primitive 3		€

De la réalité perceptible au graphe : comment choisir les mailles ?

$$B = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}$$

$$G \leftarrow B^q_\alpha b^\alpha$$

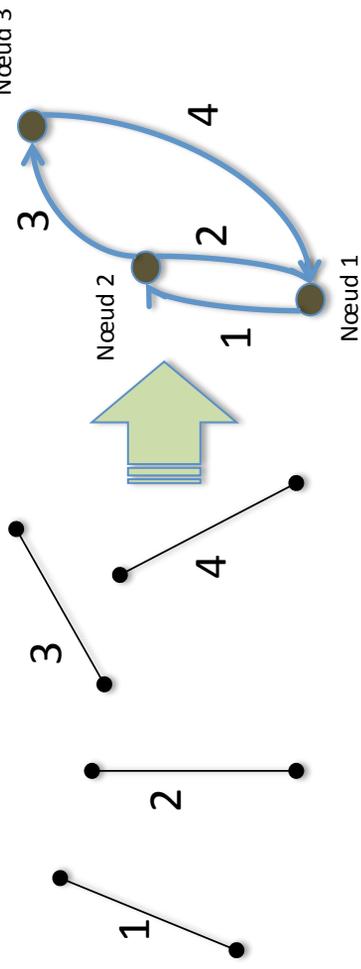
$$\text{soit : } \partial b^{(\alpha)} = (q^{(\alpha)}, q^{(\alpha')})$$

$$\text{si } \exists b^{(n)} / b^{(n)} = B^{(n)}_{(\alpha)} q^{(\alpha)} + B^{(n)}_{(\alpha')} q^{(\alpha')}$$

$$\text{alors : } \exists M^{(\beta)} \in \mathcal{M} / \left\{ \begin{array}{l} b^{(n)} = L^{(n)}_{(\beta)} M^{(\beta)} \\ b^{(\alpha)} = L^{(\alpha)}_{(\beta)} M^{(\beta)} \end{array} \right.$$

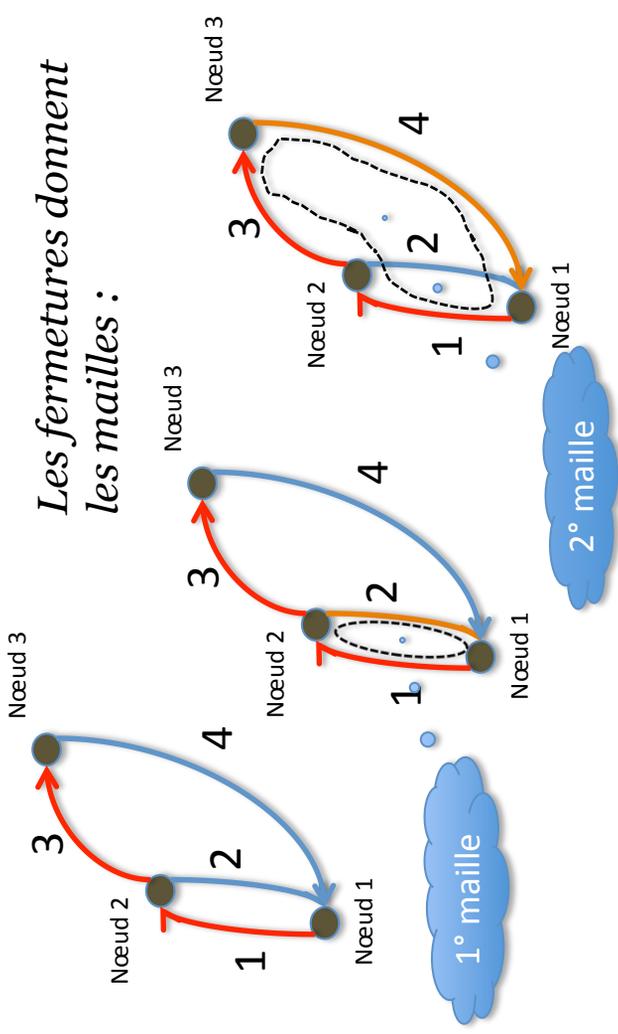
$$B \geq 0, B^{(i)}_{(j)} = \{0, 1\}, \forall i, j$$

1 On a fait une somme connexe de branches



2 On détermine l'arbre couvrant

Les fermetures donnent les mailles :



Cordes virtuelles.

S1 et S2 couplés par une force réciproque :

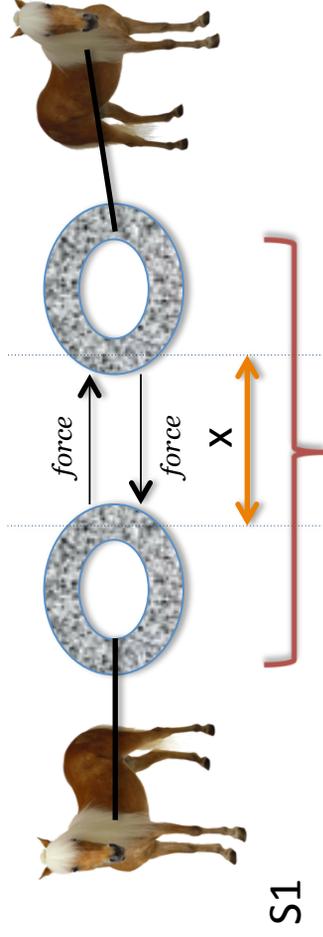
$$g_1 = \begin{bmatrix} z(\text{anneau}_1) & -\text{couplage} \\ -\text{couplage} & z(\text{anneau}_2) \end{bmatrix}$$

S1 et S2 collés :

$$g_2 = \begin{bmatrix} z(\text{anneau}_1) & -\text{collage} \\ -\text{collage} & z(\text{anneau}_2) \end{bmatrix}$$

Si couplage = collage, $g_1 = g_2$, S1 et S2 indiscernables.

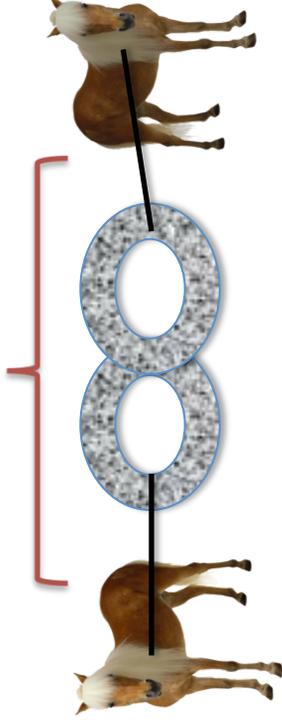
Les forces peuvent être de nature électrique, magnétique ou autres.



S1

Si $W = \int dx \text{ force} = \text{forces de liaisons internes} \Rightarrow$

$W \leftrightarrow \text{travaux virtuels } \int = 0$



S2

Le travail total des forces de liaisons est nul, il y a autant de forces dans un sens que dans l'autre, l'action est égale à la réaction.

$\Sigma p = 0 \rightarrow$ corde virtuelle.

Cordes virtuelles.

$$P = \frac{1}{2} \{ w i^* + w^* i \}$$

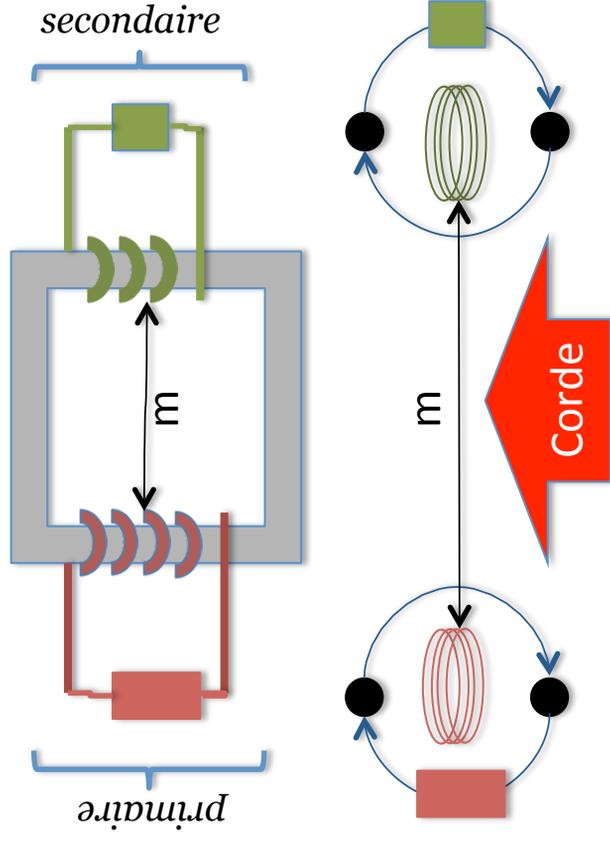
$$P = \frac{|i^k|^2}{2} \left\{ \begin{bmatrix} a + L_{1p} & -M_p \\ -M_p & b + L_{2p} \end{bmatrix} + \dots \right.$$

$$\left. \dots \left[\begin{bmatrix} a - L_{1p} & M_p \\ M_p & b - L_{2p} \end{bmatrix} \right] \right\}$$

$$M_p \notin P = i^k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} i^k$$

$$P = a(i^1)^2 + b(i^2)^2$$

Le transformateur



Remarque : la corde n'intervient pas dans la description de la topologie du graphe, M, B, N, R . Elle porte les interactions de champs évanescents.

L'espace des mailles intégrant celui des moments.

On imagine l'univers synthétisé en une antenne de réception, recevant l'énergie d'une antenne d'émission :

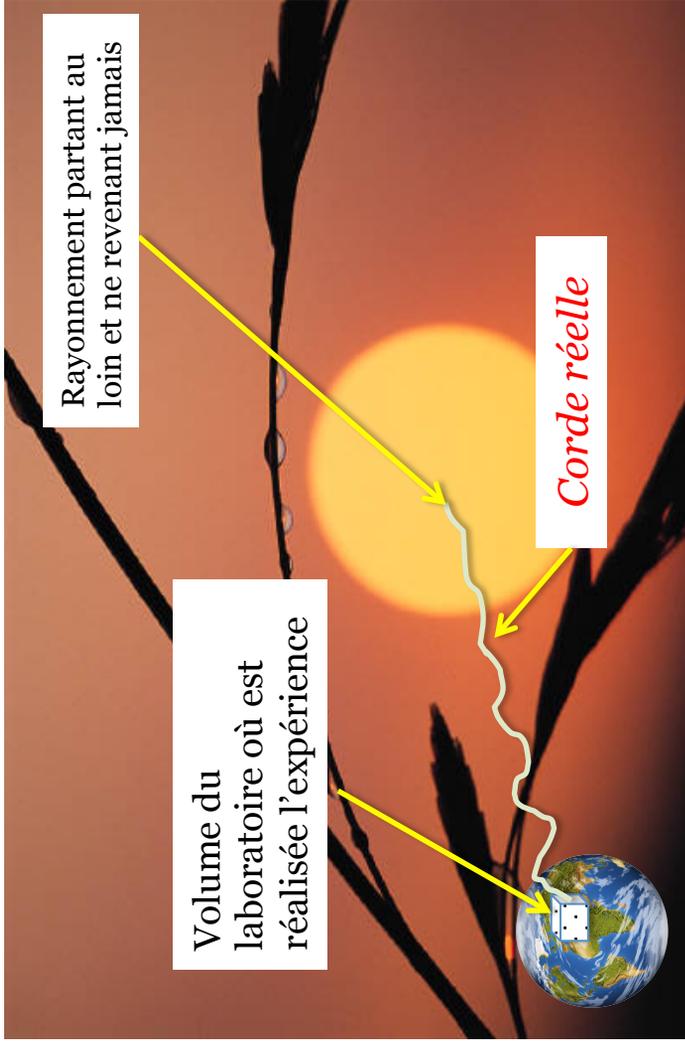
$$E = \frac{\sqrt{30GP}}{d}$$

$$V = h \cdot E = h \cdot \frac{\sqrt{30G\eta(R_{ray}i^2)}}{d}$$

$$z_{21} = \frac{V}{i} = \frac{h}{d} \sqrt{30GR_{ray}\eta} > 0, z_{21} \in \mathbb{R}$$

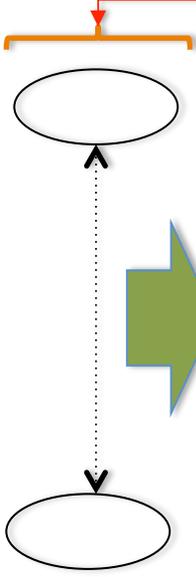
$$g = \begin{bmatrix} z_{11} & ? \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

Le problème du rayonnement lointain : Le problème entropique



L'espace des mailles intégrant celui des moments.

Graphe correspondant :



Équations de Branin

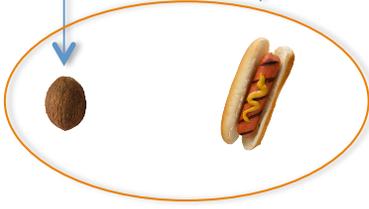


$$\begin{cases} e_D = (e - Rk^1 + Rk^1) e^{-\tau p} \\ -e_G = (Rk^2 - Rk^2) e^{-\tau p} \end{cases}$$

$$e = 2Rk^1$$

$$g = \begin{bmatrix} 2R & 0 \\ 2Re^{-\tau p} & 2R \end{bmatrix}$$

Le rayonnement pose le problème de la symétrie des couplages.



$$E_o = 1/2mv^2$$

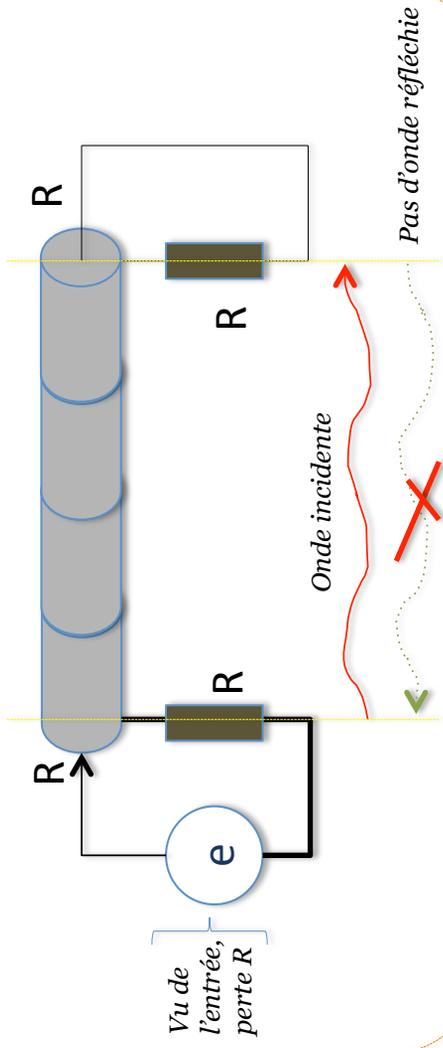
$$E_r = kCal$$

Processus entropique

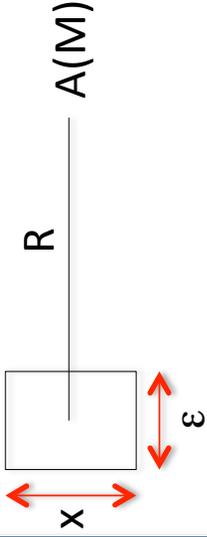
nature



Cas d'une ligne adaptée :



L'espace des mailles intégrant celui des moments.



$$A(M) = \frac{\mu i x}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk(R+\epsilon)}}{R+\epsilon} - \frac{e^{-jk(R-\epsilon)}}{R-\epsilon} \right\}$$

$$\epsilon^2 \ll R^2$$

$$A(M) \approx \frac{\mu i x e^{-jkR}}{2\pi R} \left[(jk\epsilon) - \frac{1}{R} (1 - k\epsilon) \right]$$

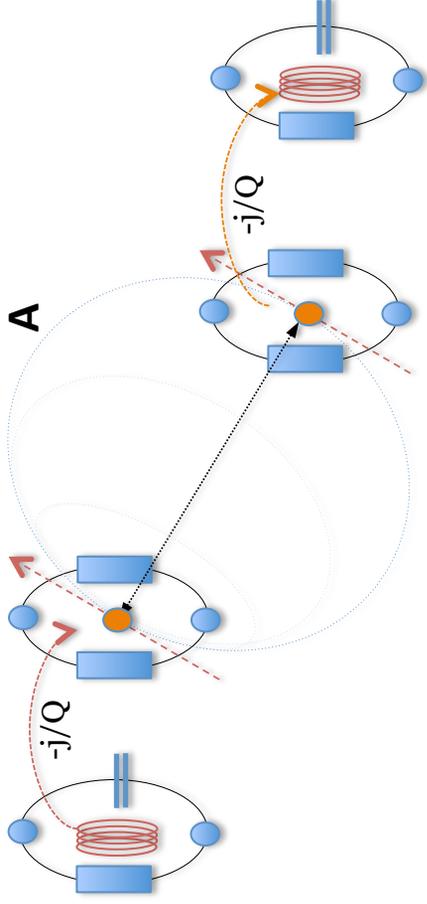
$$R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$A \approx j \frac{\mu G^k}{2\pi} i(x\epsilon) = j \frac{\mu G^k}{2\pi} i m$$

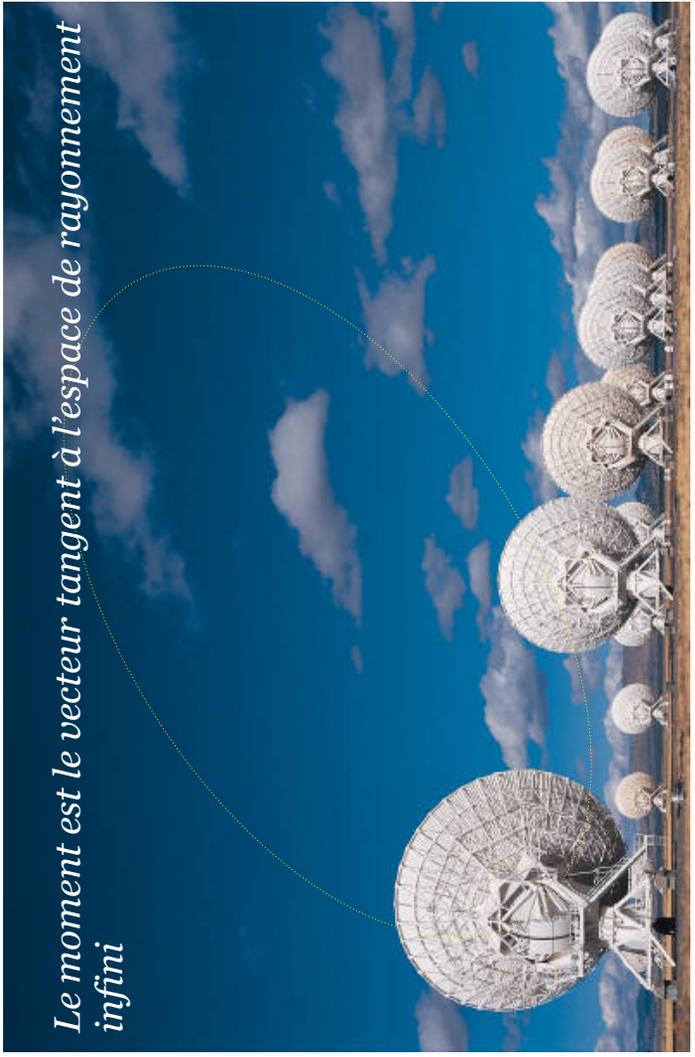
$$e = -p S' (\partial_x) \mathbf{A}_{[y]} \Rightarrow z_{21} = -j p \frac{\mu k}{2\pi} \left[\mathbf{m}'^1 \cdot \mathbf{m} \right] (\partial_x) \mathbf{G}_{[y]}$$

Appartient à l'espace des mailles

Appartient à l'espace des moments



Le moment est le vecteur tangent à l'espace de rayonnement infini



**L'espace des mailles
intégrant celui des moments :
multiphysiques.**

Invariant :

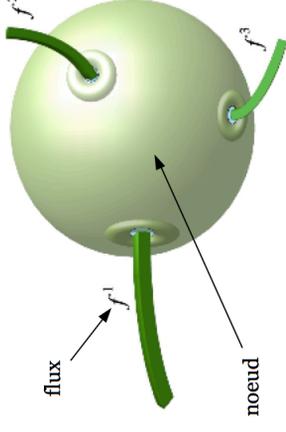
$$P = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \frac{1}{2} \left\{ T_{\mu\nu} p + \frac{1}{p} U^{\nu\mu} + F_{\mu\nu} \right\} k^\mu k^\nu$$

Équation de Lagrange :

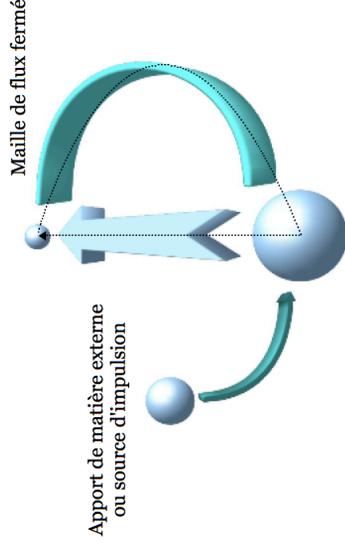
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu} \rightarrow p \left(\frac{1}{p} \right) [T_{\mu\nu} p] k^\nu \\ \frac{\partial U}{\partial q^\mu} \rightarrow \left(\frac{1}{p} \right) p \frac{1}{p U^{\nu\mu}} k^\nu \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\mu} \rightarrow \left(\frac{1}{p} \right) p F_{\mu\nu} k^\nu \end{array} \right.$$

$$e_u = g_{uv} (k^v).$$

**Conservation de la
matière :
incidence branches,
sommets**



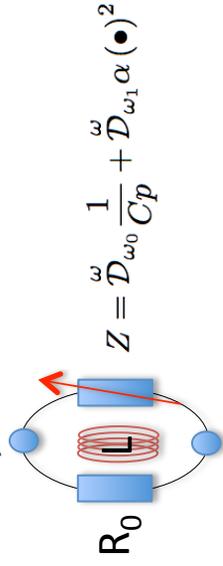
**Conservation de
l'énergie
cinétique :
connexion
branches mailles**



La conservation du flux a été appliquée entre autre à des flux d'information.

Notre système, émetteur et récepteur.

Schéma équivalent de la radio (sans antenne) :



Fonctionnel :

$$e_0(\omega_0) = \left(R_0 + Lp_0 + \frac{1}{Cp_0} \right) k_0^1$$

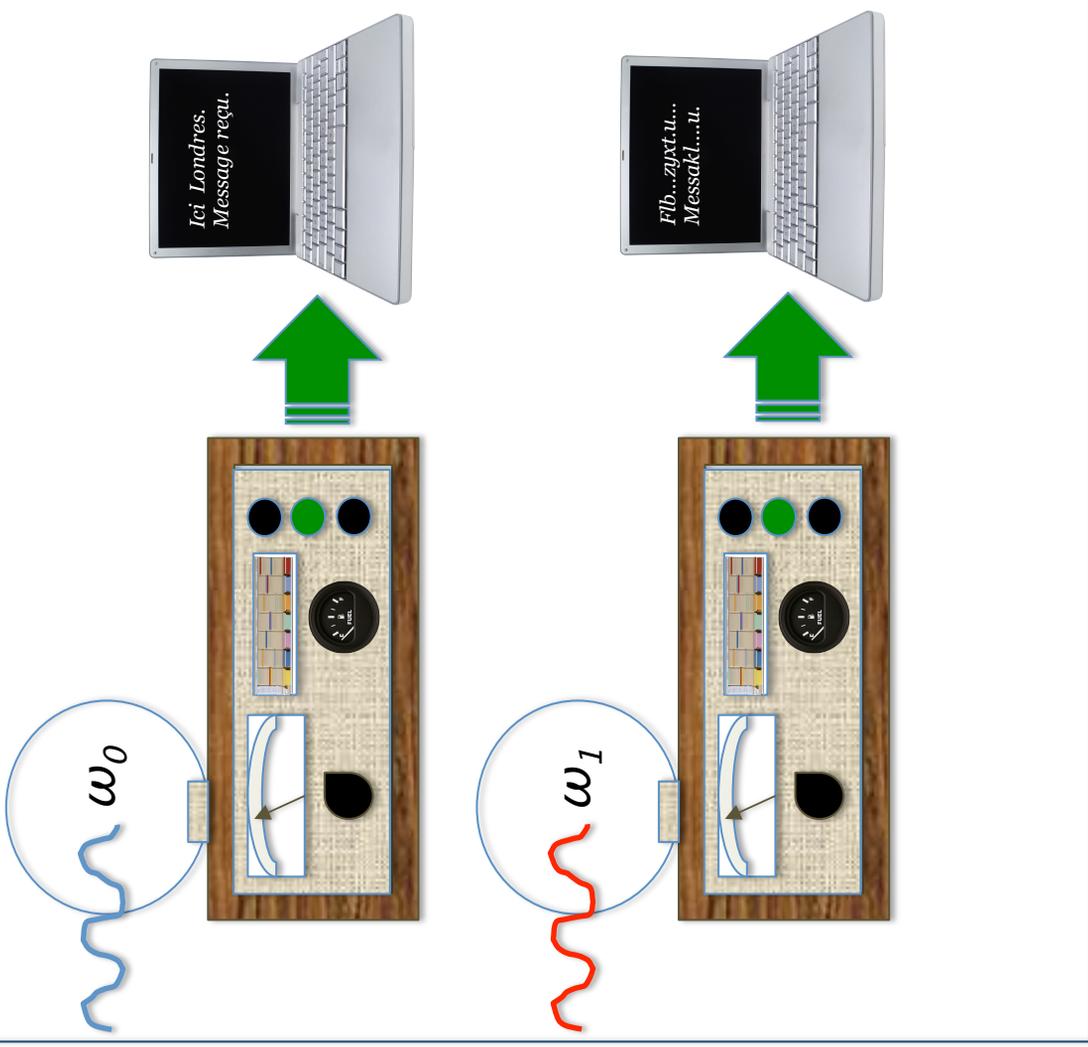
$$\Rightarrow k_0^1 = \frac{e_0(\omega_0)}{\left(R_0 + Lp_0 + \frac{1}{Cp_0} \right)}$$

Perturbateur :

$$e_1(\omega_1) = (R + Lp_1) k_1^1 + \alpha (k_1^1)^2$$

$$\text{si } 4\alpha e_1 \ll (R + Lp_1)^2$$

$$\Rightarrow k_1^1 \approx - \frac{(R + Lp_1)}{\alpha}$$



Notre système, émetteur et récepteur.

$$Z_s = \begin{bmatrix} [Z_1] & 0 \\ [C] & [Z_2] \end{bmatrix}$$

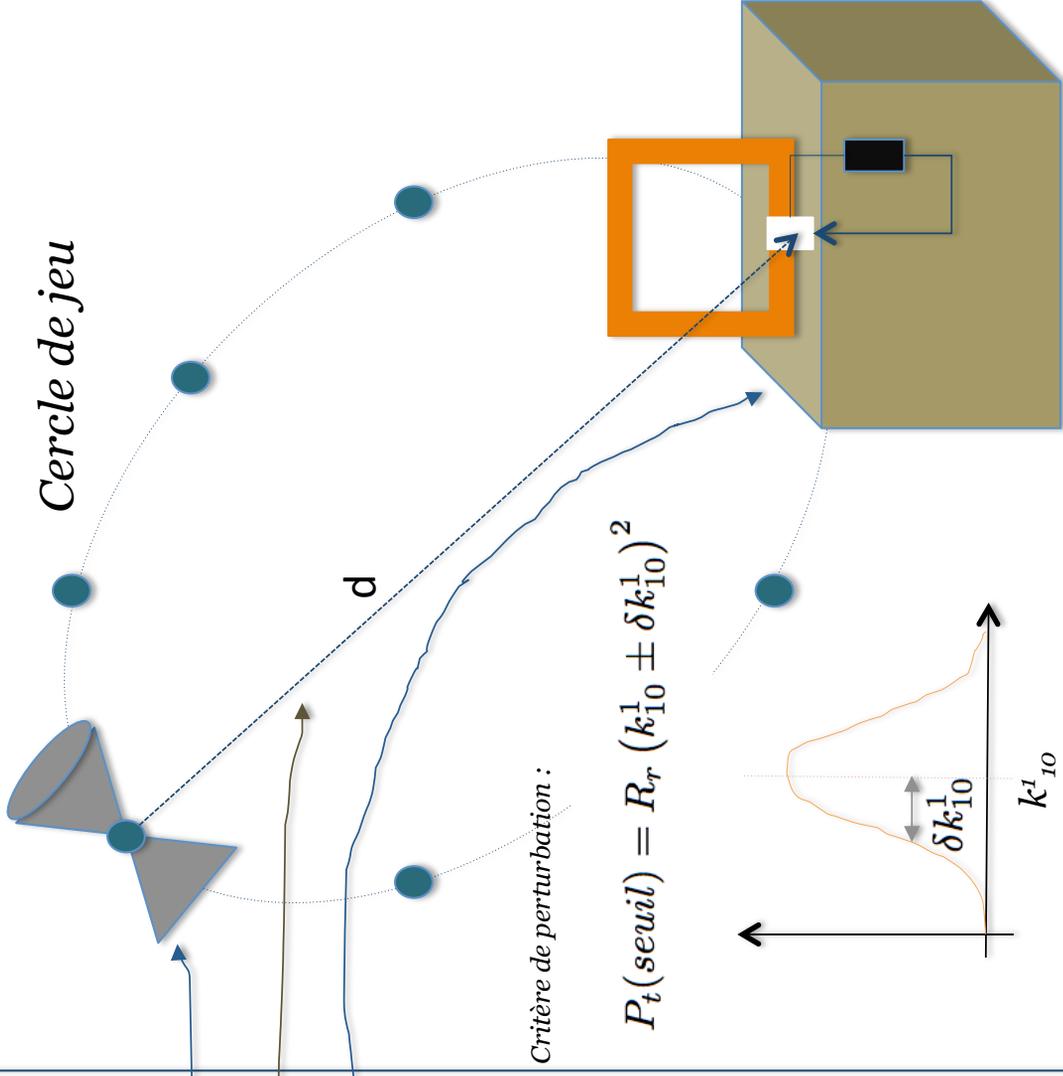
$$\begin{cases} e_1 = [Z_1] [K^1] \\ e_0 = C [K^1] + [Z_2] [K^2] \end{cases}$$

$$C \supset -jp \frac{\mu k}{2\pi} [\mathbf{m}'^1 \cdot \mathbf{m}] (\partial_x) \mathbf{G}_{[y]}$$

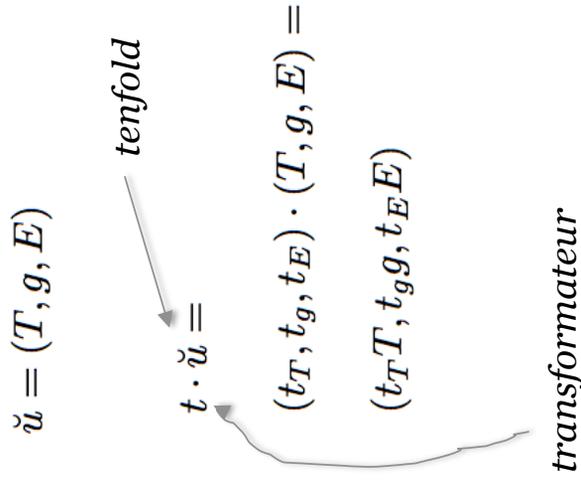
Pour chaque mouvement on résout :

$$e_\mu(\omega) = Z_{S\mu\nu}(k^\nu)$$

Diakoptique :

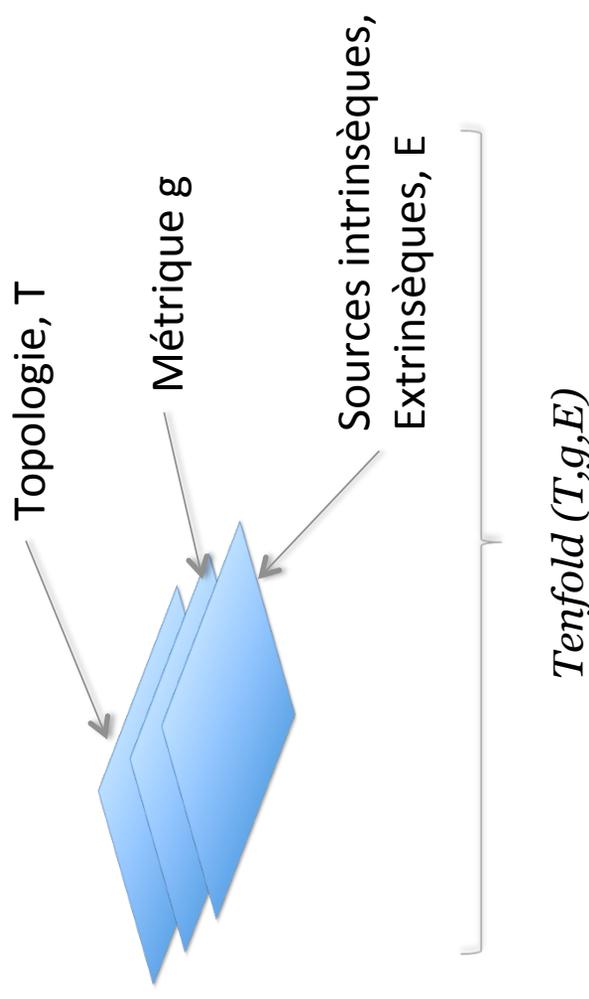


Tenfold du système et ses transformations.



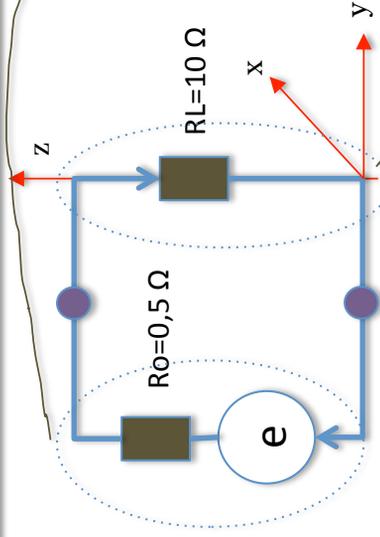
Tenfold* et transformateurs :

Ten : tenseur, fold : feuille.



Conteneur : liste, regroupant l'ensemble des objets nécessaires et suffisants pour décrire un système

Tenfold du système et ses transformations.



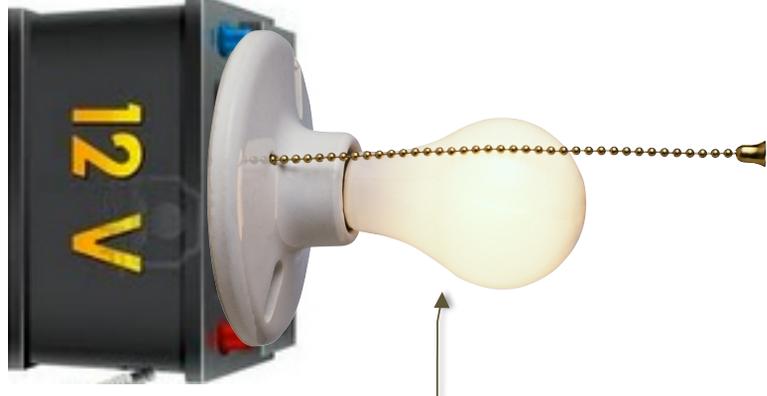
$$T = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-2} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$g = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_L \end{bmatrix} \quad E = [e, 0]$$

$$\ddot{u} = (T, g, E)$$

Exemple simple de tenfold

Une lampe à incandescence branchée sur une pile



Tenfold du système et ses transformations.

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = 2R \\ d_2 = \sqrt{[R + R\cos(\theta_2)]^2 + R^2\sin(\theta_2)^2} \\ d_3 = R\sqrt{2} \\ d_4 = \sqrt{[R - R\cos(\theta_2)]^2 + R^2\sin(\theta_2)^2} \end{array} \right.$$

Transformateur :

$$t : d_a \rightarrow d_b / G_a = \frac{e^{-jk d_a}}{d_a} \rightarrow G_b = \frac{e^{-jk d_b}}{d_b}$$

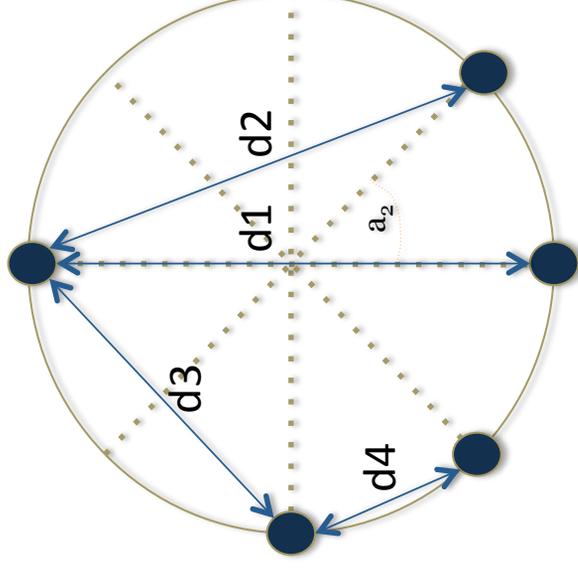
$$t_g = 1, t_E = 1$$

$$t_T, T = (B, L, \eta) \Rightarrow$$

$$t_T = \begin{bmatrix} 1|B| & 0 & 0 \\ 0 & 1|L| & 0 \\ 0 & 0 & \eta' / \eta \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} n_a & 0 \\ 0 & n_b \end{bmatrix}$$

$$G_x = \frac{e^{-jk d_x}(\eta_{11}, \eta_{22})}{d_x(\eta_{11}, \eta_{22})}$$



Distances possibles entre les joueurs.

La transformation sur le tenfold consiste à modifier les positions des joueurs dans l'interaction de rayonnement.

Jeu : introduction

jeu $G \rightarrow$ stratégies $x \in X, y \in Y$
 $\forall (x, y) \exists$ pertes $L(x, y)$

Matrices des paiements :

$$mp_1 = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$mp_2 = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Stratégies mixtes :

Stratégies affectées de probabilités d'occurrences.

THÉORIE DES JEUX

Jeu : comporte les 4 ingrédients suivants –

- ✓ Une liste de N individus = les joueurs
- ✓ Des règles & gains
- ✓ Des stratégies pures ou mixtes
- ✓ Une fonction qui fait correspondre une issue du jeu aux stratégies

(joueur 1, joueur 2)	pic	coeur
carreau	(gagne 3€, gagne 3€)	(perd 10€, gagne 10€)
trêfle	(gagne 10€, perd 10€)	(perd 1€, perd 1€)

Jeu : acteurs P, V

$$\ddot{u}(0) = \left\{ T, Z_s, \begin{bmatrix} e_x \\ e_0 \end{bmatrix} \right\}$$

Position à l'origine de V :

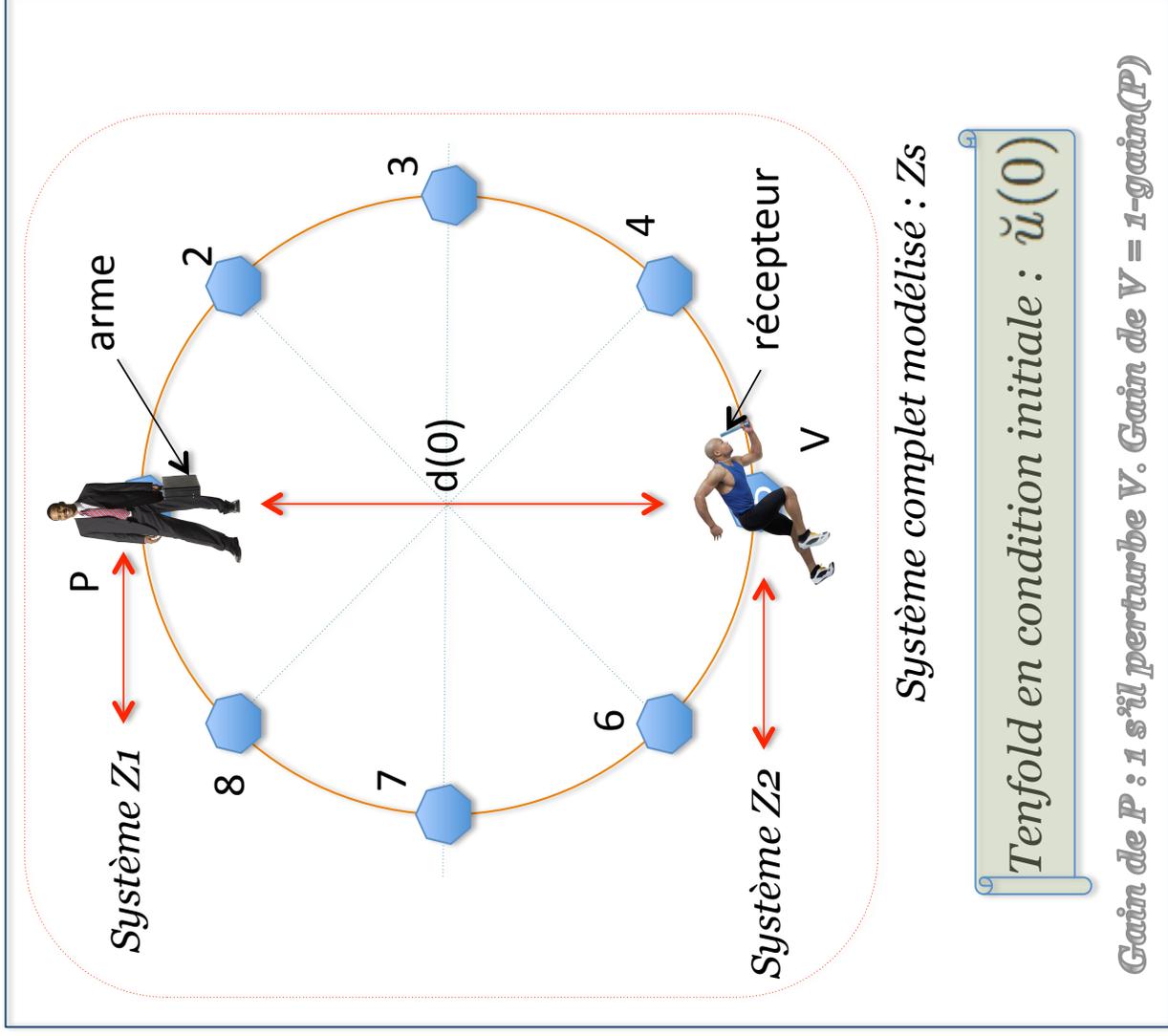
$$Pv_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Probabilité pour P de tirer en étant à la position i à l'instant t :

$$q_{it} = [q_{1t} \ q_{2t} \ q_{3t} \ q_{4t} \ q_{5t} \ q_{6t} \ q_{7t} \ q_{8t}]$$

Par exemple à l'instant t=1
(le joueur ne peut rester sur place):

$$q_{i1} = [0 \ q_{21} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_{81}]$$



Système complet modélisé : Zs

Tenfold en condition initiale : $\ddot{u}(0)$

Gain de P : 1 s'il perturbe V. Gain de V = 1-gain(P)

Jeu : *flash*

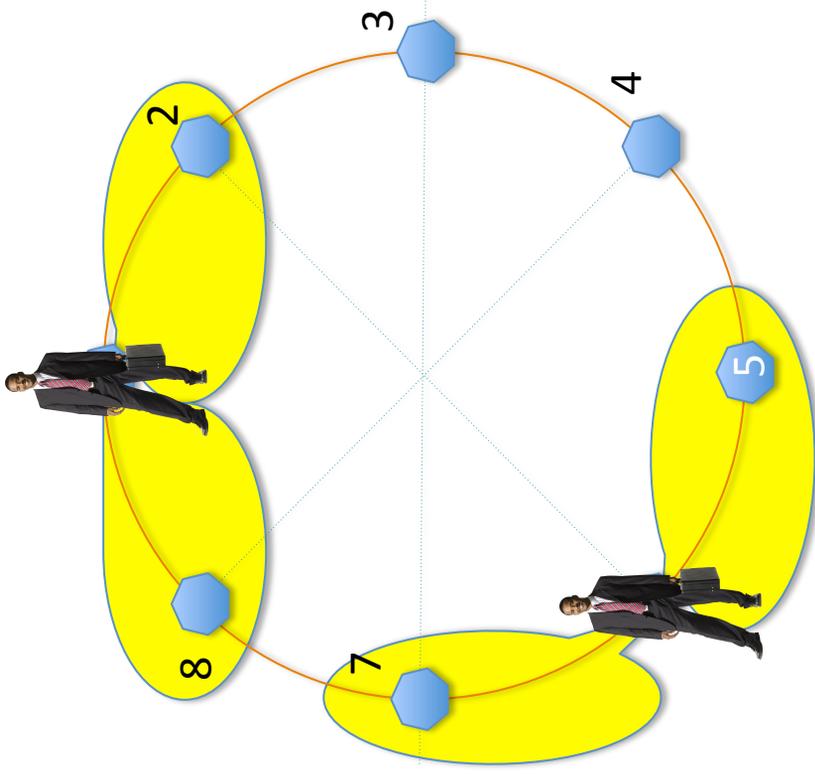
Matrice de visée :

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Probabilité pour P de toucher la zone j en étant à la position i à l'instant t :

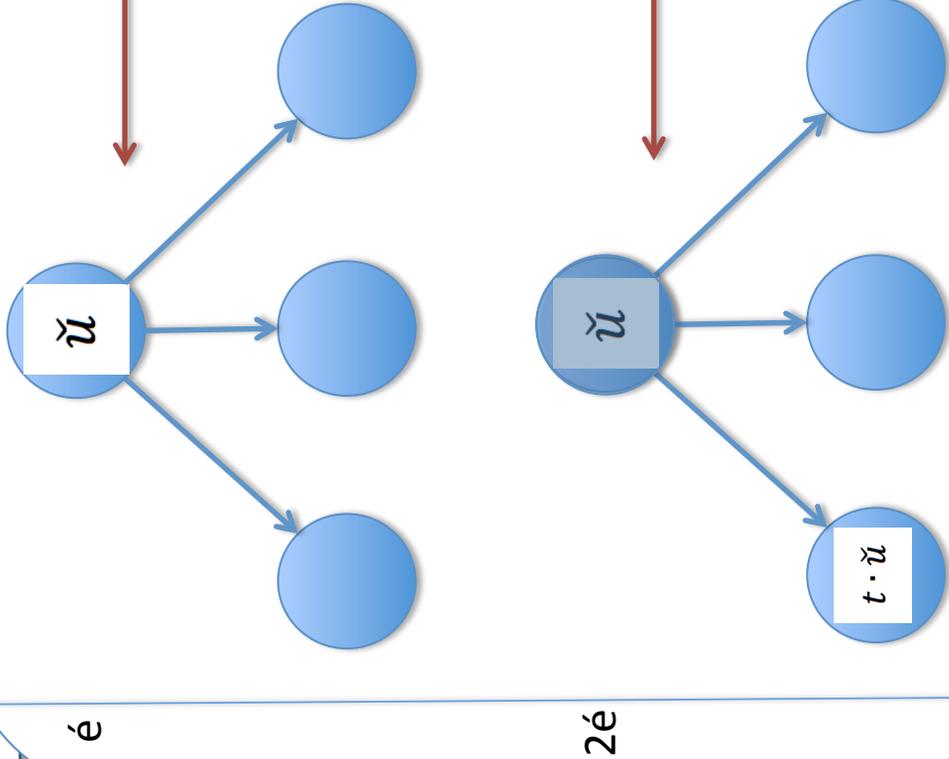
$$P = q_{it} \Pi_{ij}$$

$$\sum_{(i,t)} q_{it} = 1$$



Gamma matrices, processus markovien.

L'arbre d'évolution



$$I = \begin{bmatrix} \check{u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur d'information

propagateur

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

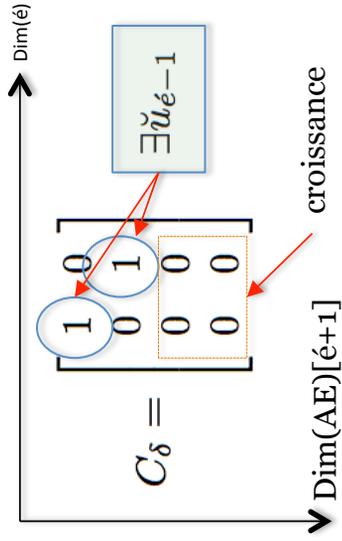
$$\gamma I = \begin{bmatrix} 0 \\ t \cdot \check{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de croissance, topologie dynamique.

Croissance lors d'un jet, initialisation :

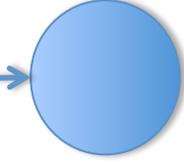
$$\begin{cases} \mathbf{I}_\epsilon = C_\delta \mathbf{I}_{\epsilon-1} \\ \gamma_\epsilon = C_\delta \gamma_{\epsilon-1} C_\delta^T \end{cases}$$

Génération : exemple 2 vers 4

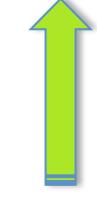


$$I = \ddot{a} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \end{bmatrix} \ddot{a} = \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_\delta \gamma C_\delta^T$$



$$\gamma(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

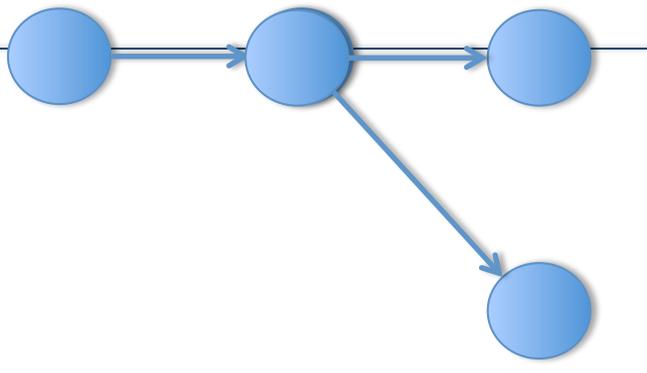


$$I(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \cdot \ddot{a} \end{bmatrix}$$

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



[a	b	0	0]
[c	d	0	0]
[0	0	0	0]
[0	0	0	0]



Arbre d'évolution (AE).

Chemins C_i :

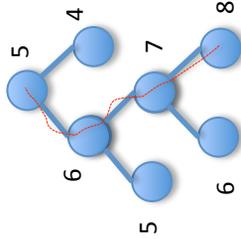
Les segments de chemin sont décrits dans

$$\{diag(\gamma \cdot \gamma^T)\}$$

La probabilité totale d'un chemin est obtenue par le produit des probabilités des segments du chemin :

$$C_i = (8 : 7) \cdot (7 : 6) \cdot (6 : 5)$$

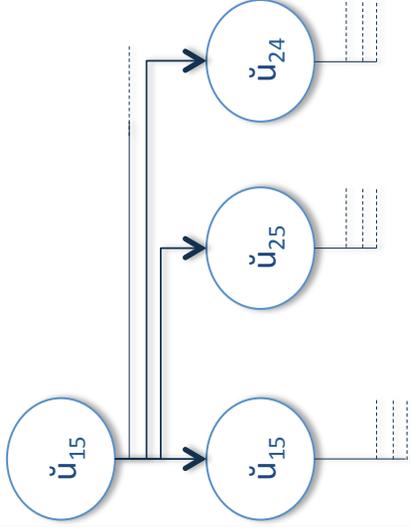
$$P(C_i) = \lambda_{87} \lambda_{76} \lambda_{65}$$



Le côté physique



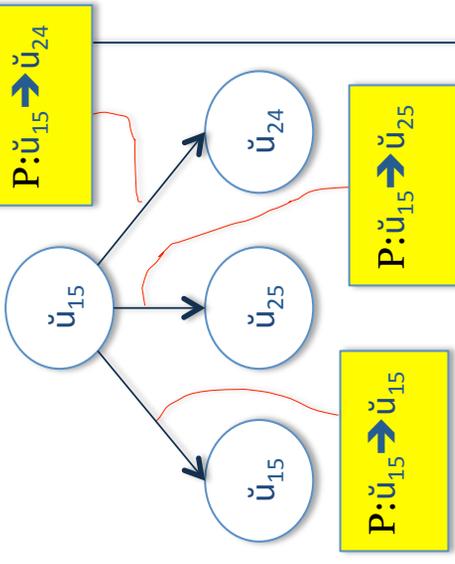
\check{u}_{pv} : \check{u} position P, position V
Les jonctions encapsulent des tenfolds :



Le côté psychique

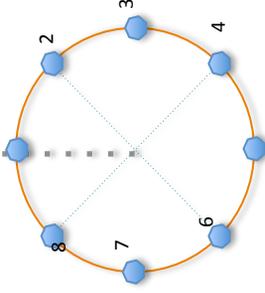


Par exemple (pour une partie de l'arbre) :



A chaque coup, 4 transformations sont possibles (4 positions relatives) :

6-8;2-4
8-4;2-6



Plus les probabilités :
d'être dans la visée ;
de tirer.

L'idée d'un arbre de choix en parallèle de l'arbre de transformations a conduit à l'arbre d'évolution.

Profils de comportement & vecteur de décision.

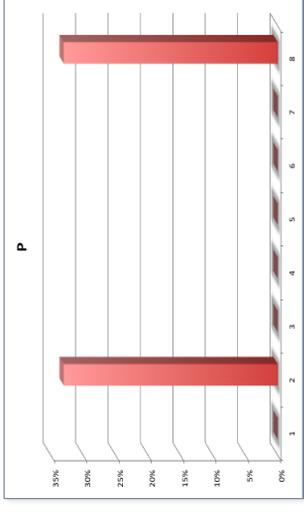
q_{it} , $t=1$:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{21} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{n1} \end{bmatrix}$$

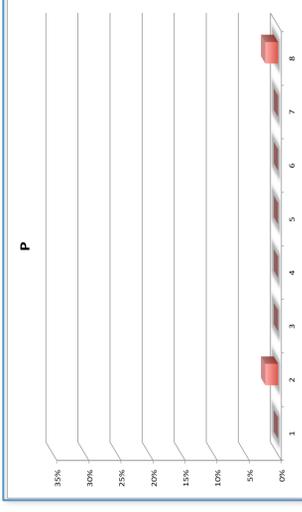
Caractère de P \longrightarrow q_{it}

q_{it} : probabilité pour P de se trouver en i et de tirer.
Par exemple au premier jet, profils possibles pour ce vecteur :

Personne paniquée qui tire au premier coup (sachant qu'elle est sûre de ne pas toucher V dans ce cas).



Personnes de sang froid mais dont une proportion non nulle tire involontairement.



Du comportement : probabilités bayésiennes et croyances.

Proba(tir), V(4) et P faible ?

A posteriori

$$P(q_{32} | 4) = \frac{P(4 | q_{32}) P(4)}{P(q_{32})}$$

A priori

$P(4)_2 = 33\%$

$q_{32} = 70\%$ (par exemple)

$P(4 | q_{32}) = 20\%$ (par exemple,
dépend de la réaction de V/P)

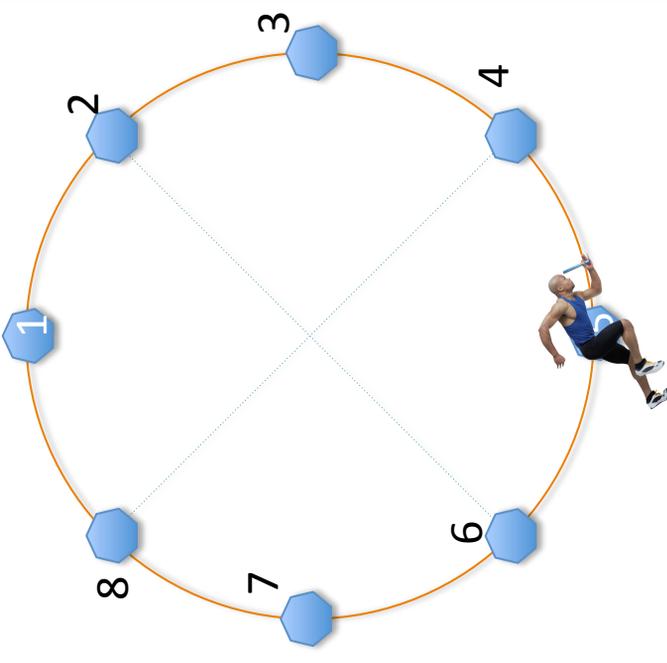
$\Rightarrow P(4 | q_{32}) = 0,09$

Augmenter la quantité d'information disponible



Complexifier les comportements individuels

Imaginons que V est une connaissance sur le profil de P . Suivant la distribution q_{it} il module ses choix de déplacements \Rightarrow les termes λ_{ij} ne sont plus uniformément distribués.



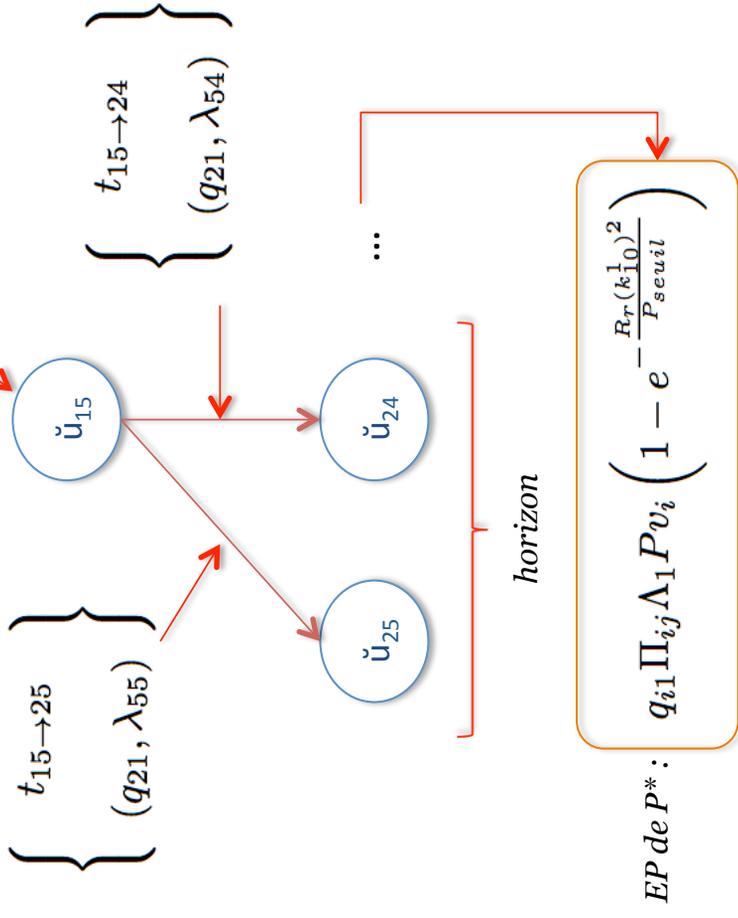
Par exemple :
 P craintif, V a
intérêt à ne pas
bouger pendant 2
tours.

$$\lambda_{ij} = P(A|B)$$

Bilan : arbre d'évolution à ce stade, comment modélise-t-on ce jeu ?



Conditions initiales du système :
position des joueurs, caractères q_{it} ,
environnement, ...



*On voit ici un apport de la méthode proposée qui ne s'arrête pas au jeu ou au risque de perturbation mais conjugue les deux.

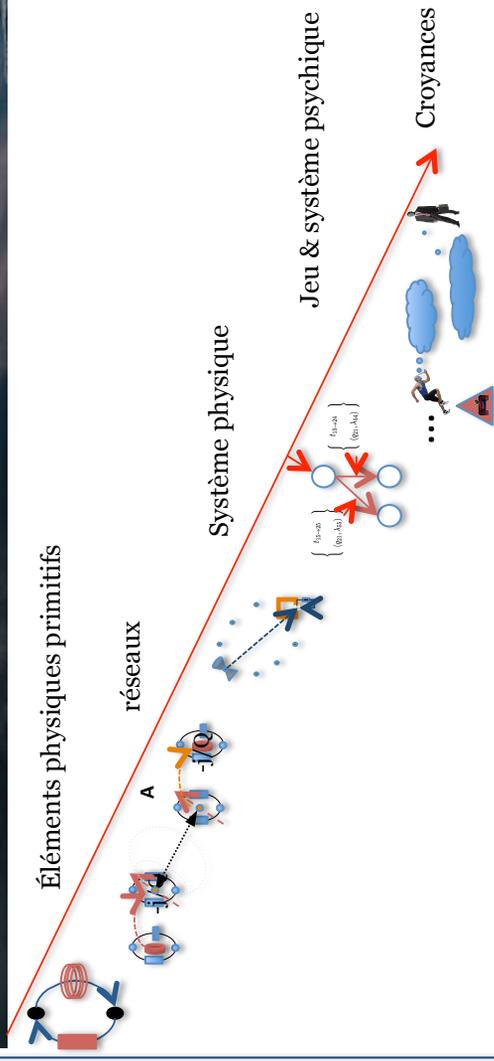
Projection dans un espace
choix-gain.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{(\mu)} = z_{(\mu)}(v) k^{(v)} \\ e_{\nu} = z_{\nu\nu} k^{\nu} \\ e_{\mu} = g_{\mu\nu} [k^{\nu} + J^{\nu}] \\ g_{\mu\nu} = (z_{\mu\mu} + \mu_{\mu\nu}) \\ \mathbf{I}_n \epsilon = \gamma_n \dots \gamma_1 \mathbf{I}_\epsilon \\ \Lambda_{ij}(\gamma) = P(A|B) \end{array} \right.$$

PROBLEME
PROBLEME

On arrive à un niveau d'abstraction très élevé

Comment se doter d'une représentation de tout cela ?



Projection dans un espace choix-gain : groupe.

Opération algébrique :

$$\forall (a, b) \in X^2, \exists \begin{Bmatrix} + \\ \times \end{Bmatrix} \text{ st } c \in X, c = a \times b, c = a + b$$

Opération algébrique associative
(demi groupe) :

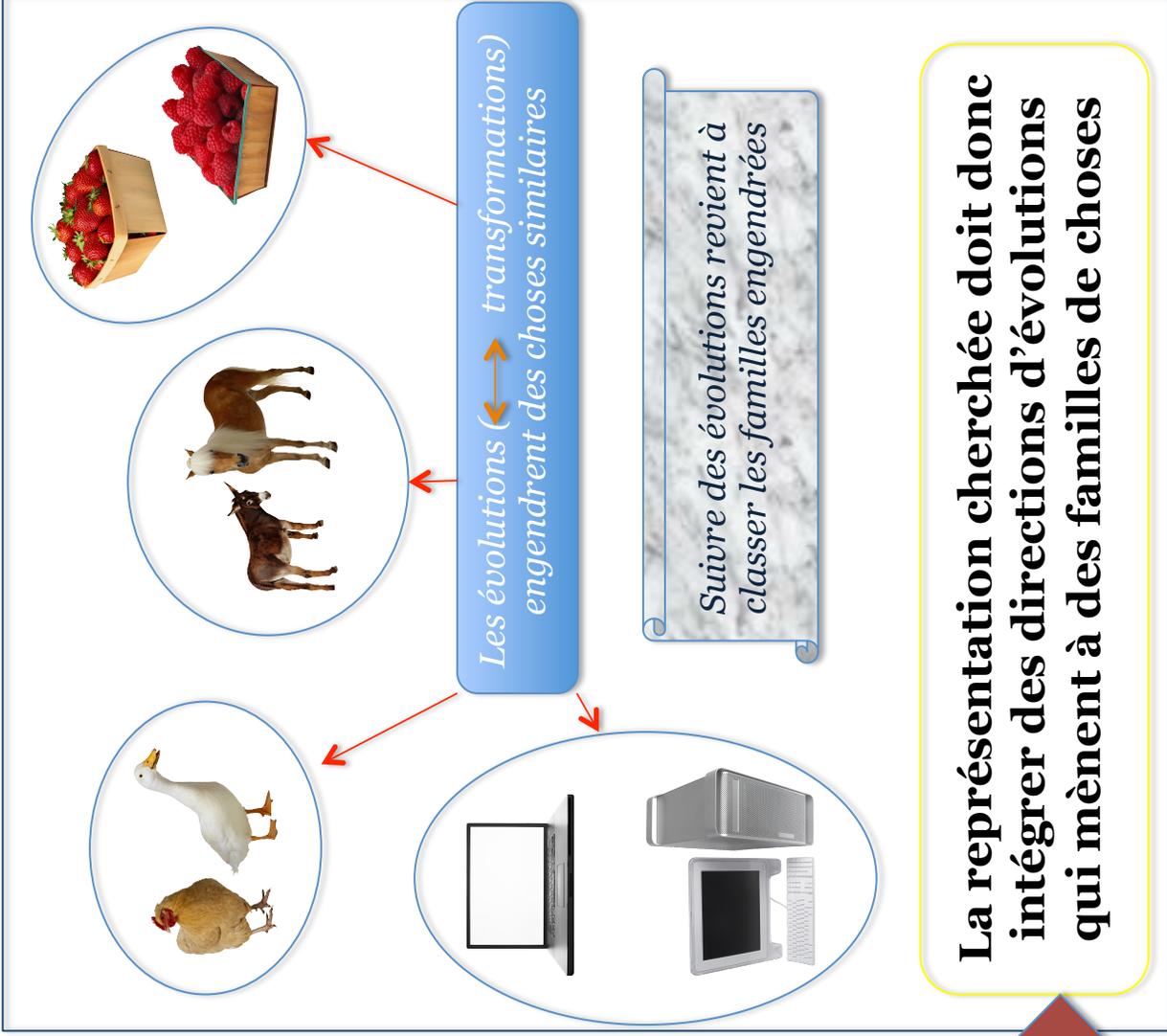
$$(ab)c = a(bc), (a+b) + c = a + (b+c)$$

Groupe pour la multiplication :

$$\exists e \in X \text{ st } \forall a \in X, ae = ea = a$$

$$\forall a \in X, \exists a^{-1} \text{ st } aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

Bioclassification des
espèces : concepts
darwiniens



Le regroupement par analogies est semble-t-il, d'après les théories les plus récentes, le mode de fonctionnement du cerveau dans ses analyses et non pas comme on l'a cru un moment, la logique pure.

Projection dans un espace choix-gain : déplacement dans l'espace des choix.

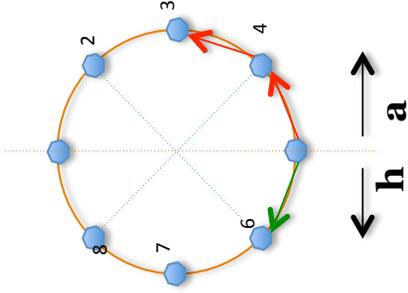
Chemin & algorithme des sandwiches :

$$\vec{C}_{45} = p_{45}\mathbf{a}$$

$$\vec{C}_{345} = p_{34}p_{45}\mathbf{a}$$

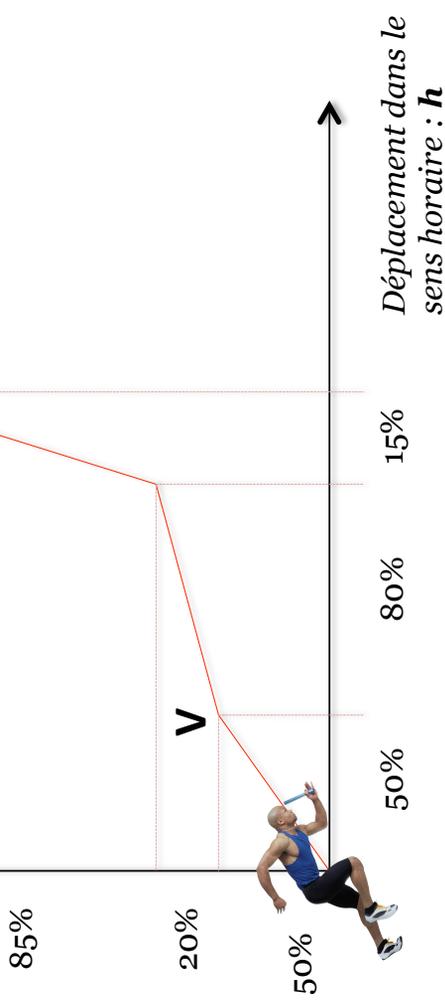
$$\vec{C}_{345} = \vec{C}_{34} + \vec{C}_{45} = p_{34}\mathbf{a} + p_{45}\mathbf{a}$$

$$\vec{C}_{45} + \vec{C}_{65} = p_{45}\mathbf{a} + p_{65}\mathbf{h}$$



Déplacement dans le sens anti-horaire : \mathbf{a}

Coordonnées des vecteurs : probabilités d'usage d'une transformation du groupe.



$$\mathbf{V} = p_{45}\mathbf{a} + (1 - p_{45})\mathbf{h}$$

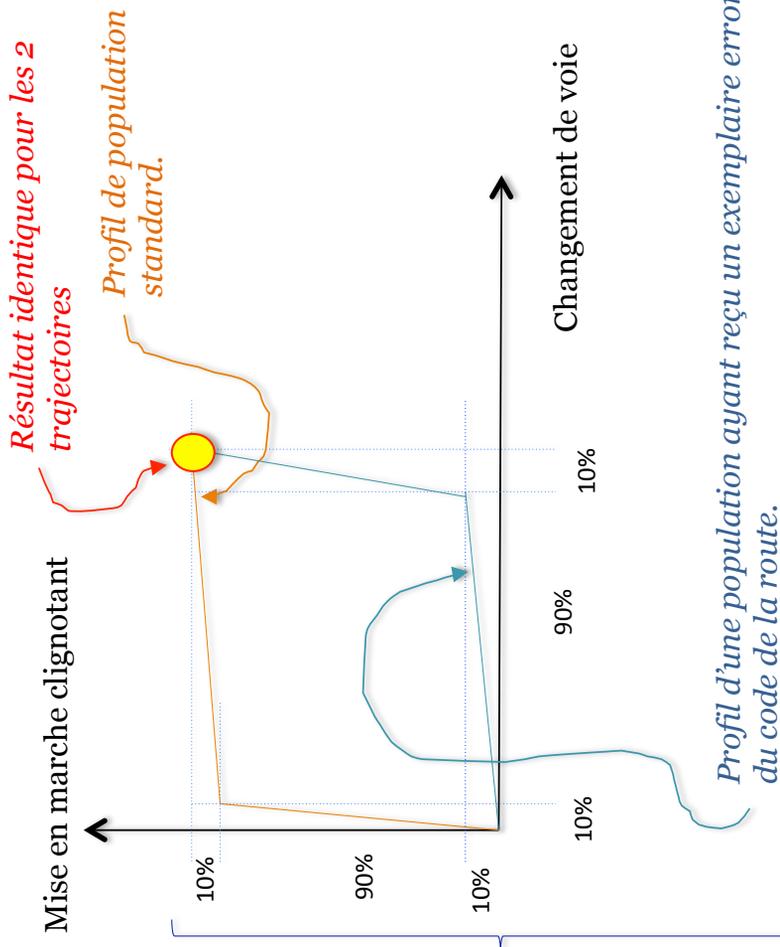
Projection dans un espace choix-gain : différenciation des trajectoires; gains.

$$T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$$
$$\mathcal{L} \{ \mathcal{O} (\gamma_{12} \gamma_{21}) \} = \mathcal{L} \{ \mathcal{O} (\gamma_{21} \gamma_{12}) \}$$

Loi ne portant que sur l'état final sans critères ni considérations socio-culturels ou d'environnement : gain « psychique » inexistant.

Aucune de ces deux trajectoires n'est différenciable au niveau du résultat d'état brut (càd, pas de jeu).

Action de dépassement en automobile :



Présence de zones attractives.

Stratégie :

$$\sigma_i \equiv \gamma_i(\text{Né}), \sigma_i^* \equiv (\gamma, \Lambda)_i(\text{Né})$$

Équilibre de Nash :

$$\gamma_{-i}^* \Rightarrow \gamma_i^*, \forall i$$

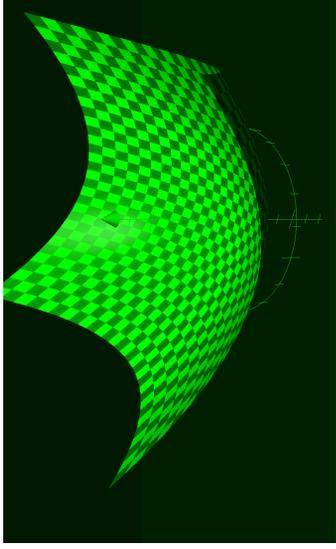
Horizon de Nash :

$$\exists \{\gamma_i\} \text{ st } G[\forall \vec{C}_i (\gamma_i \in \{\gamma_i\})] \rightarrow !G_0$$

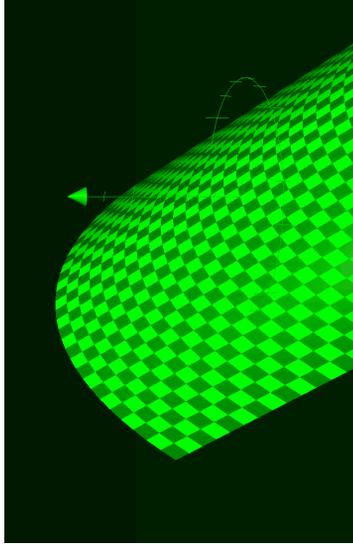
Trajectoire de bord :

$$\text{si } G[\vec{C}_i] < G[\vec{C}_j] \forall j \Rightarrow \vec{C}_i \text{ "tb"}$$

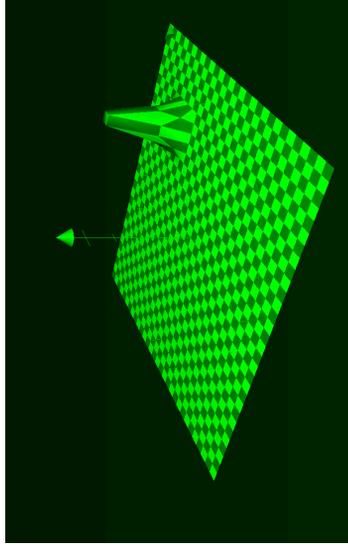
Lire une représentation CG à 2 groupes



Surfaces de trajectoires à quatre pôles (4 trajectoires de bords)



Surfaces de trajectoires en colline (2 trajectoires de bords)



Surfaces de trajectoires avec région singulière (plan de bords)

Présence de zones attractives : espace CG du joueur V.

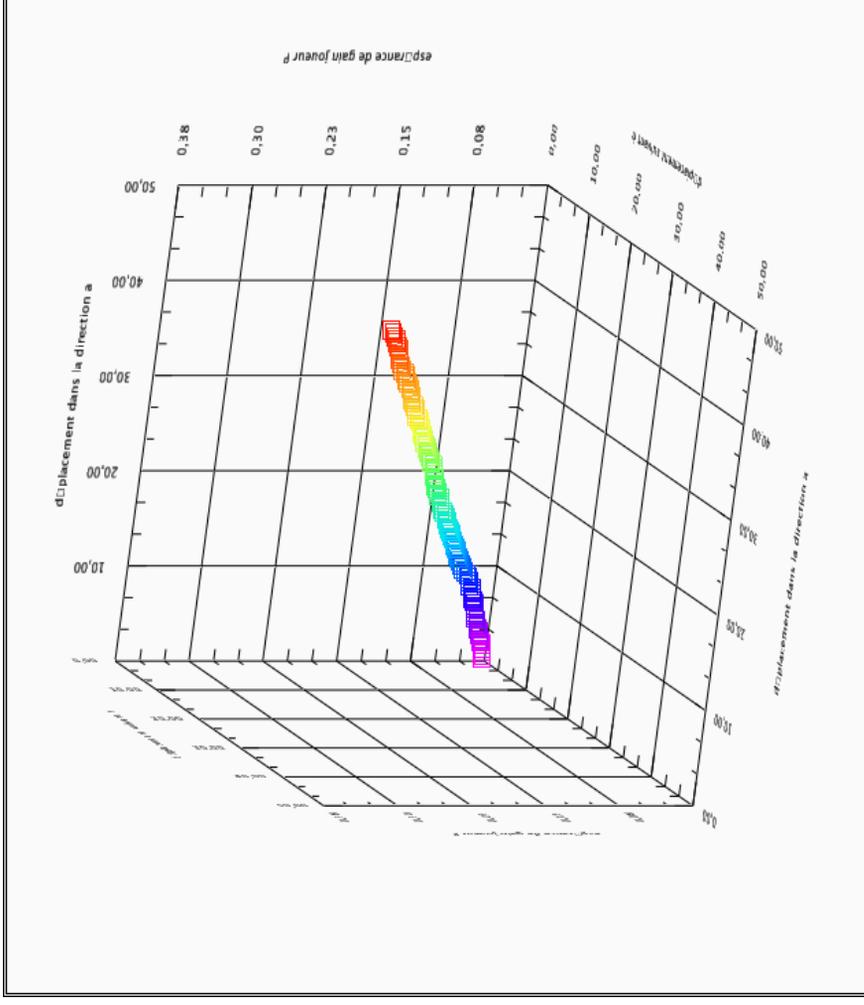
Espérance de gain de P calculée pour une probabilité de perturber de 1 si la cible est atteinte.

$$EG = \sum_t q_{it} \Pi \prod_1^t \Lambda \dots \Lambda P v_i$$

Partie à 100 tirages.

Jeu P & V

Trajectoire obtenue pour une probabilité de déplacement 50% – 50%, joueurs obligés de bouger et génération de q_{it} aléatoire.



Présence de zones attractives : partition du jeu.

$\forall i, \exists \gamma_h \text{ st } n > n_0 \Rightarrow$

$$\gamma_i(né) = \begin{bmatrix} \gamma_i(n \leq n_0) & 0 \\ 0 & \gamma_h(n > n_0) \end{bmatrix}$$

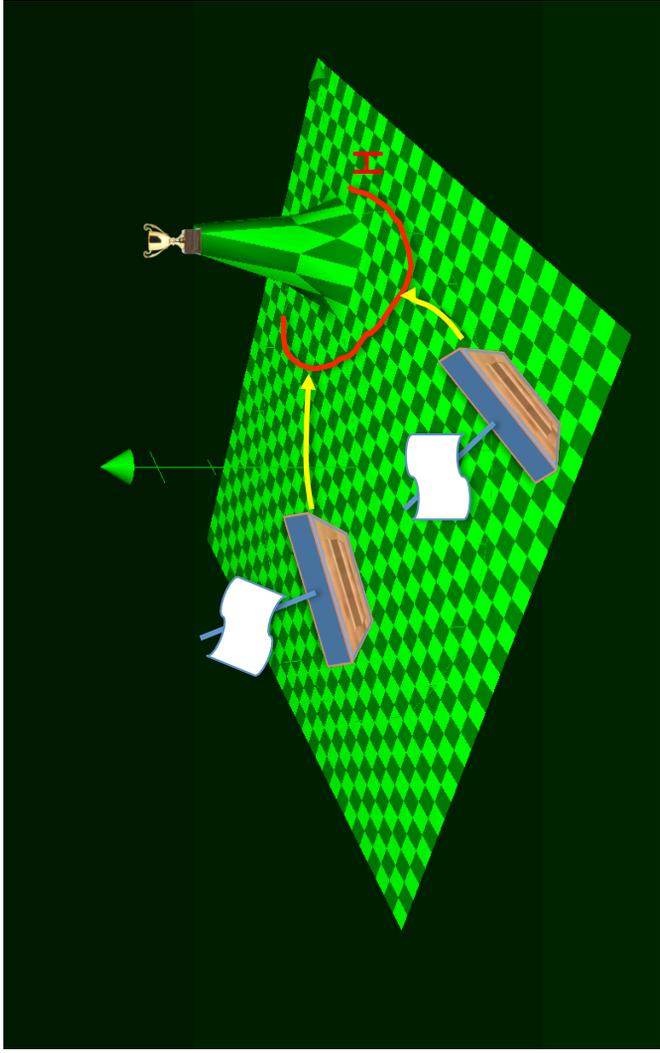
$\forall \tilde{I}^n, n \in H = \{n, k, \dots, N\} \exists! \gamma_{kn} \dots \gamma_{NN-1}$

Perfection : qui s'applique à tout sous-jeu.

Processus markovien.

Équilibre :

à partir d'un certain horizon dans le jeu, départ d'une partition commune, tous les joueurs suivent une stratégie similaire.



Peu importe d'où viennent les bateaux.

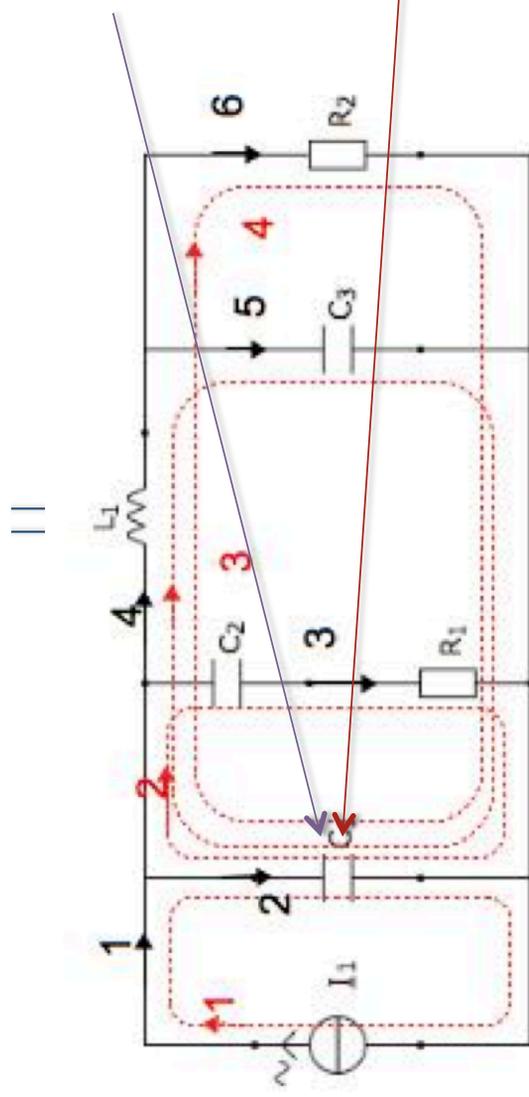
Dès qu'ils sont en vue de l'objectif, ils suivent tous les mêmes trajectoires

*=> On peut se limiter à l'analyse du jeu à partir de l'horizon **H(né)***

Application : gestion de crise en CEM.

Application : gestion de crise en CEM
✓ hypothèses de départ

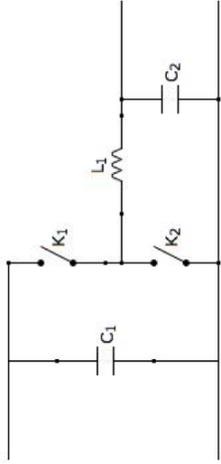
1. **Deux joueurs : un responsable projet et un expert en CEM ;**
2. Une électronique de puissance avec 2 transformations possibles ;
3. Un test normatif en CEM des émissions conduites ;
4. Un gabarit à ne pas dépasser à l'issue de ce test (fonction objectif) ;
5. Des lois de coûts en fonction du nombre de tests, des modifications apportées, ...



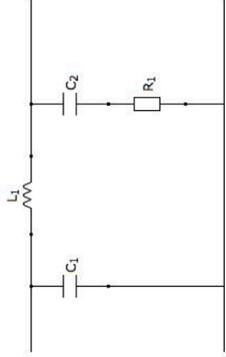
1° solution : condensateur rajouté en //

2° solution : remplacement par un condensateur de meilleure qualité

Application : gestion de crise en CEM.

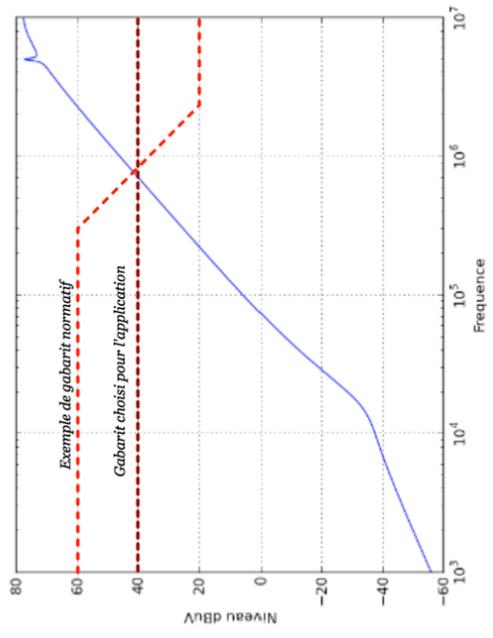
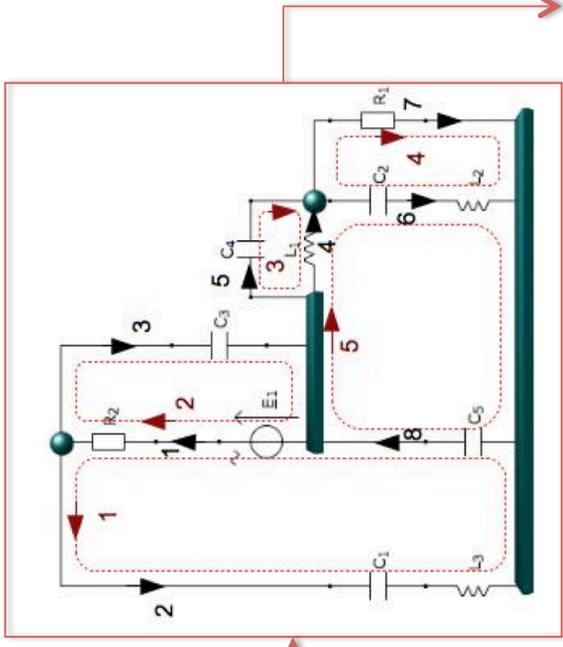


$$Z_{cp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 p} \end{bmatrix}$$



$$Z_{RSIL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2 p} + R_1 & 0 \end{bmatrix}$$

La source de bruit



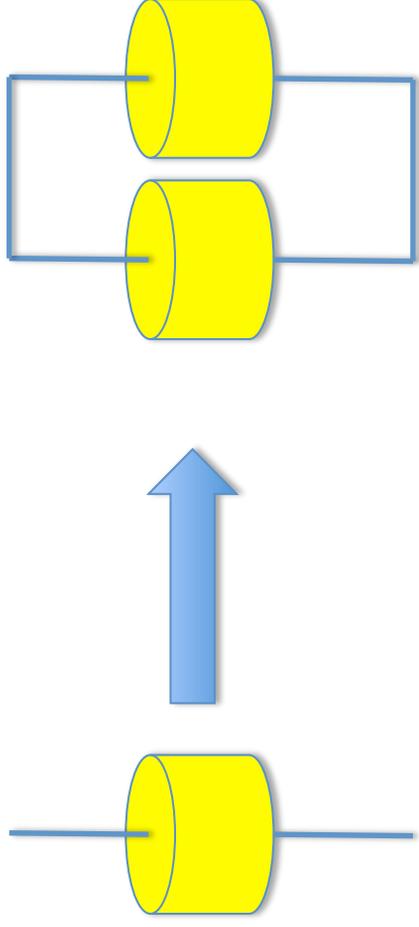
Application : gestion de crise en CEM.

$$Z_2 \xrightarrow{\Lambda_1} \underbrace{\frac{Z_2}{Z_2 C_h p + 1}}_{T_1}$$

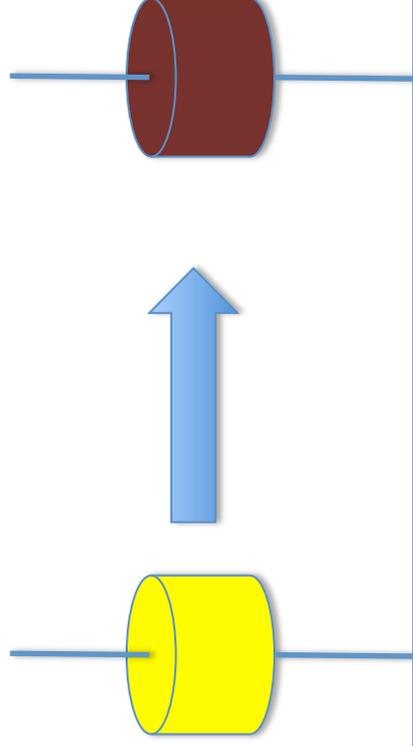
$$Z_2 \xrightarrow{\Lambda_2} \underbrace{R + \frac{L}{100} p + (Cp)^{-1}}_{T_2}$$

Transformations appliquées

1) Rajouter un composant



2) Remplacer un composant



Traduction des caractères des acteurs

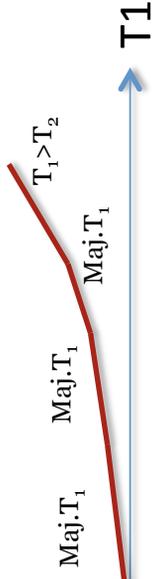
Application : gestion de crise en CEM.

Les caractères des acteurs sont traduits via des probabilités bayésiennes

$$P(T_2(\acute{e} + 1) | T_1(\acute{e}), \text{r\'esultat}(\acute{e}), \text{croyances}, \dots)$$

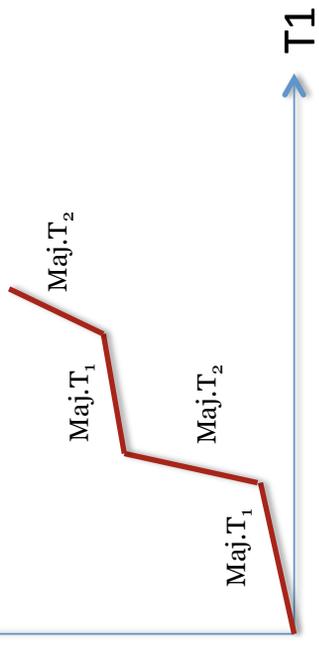
T2

Experts « têtus », convaincus d'une solution



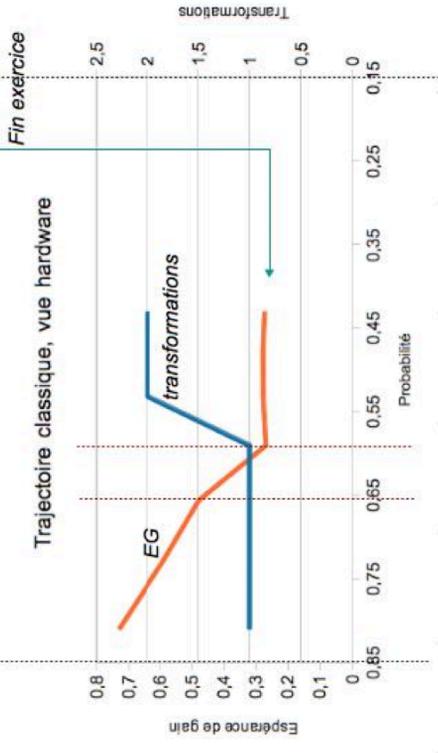
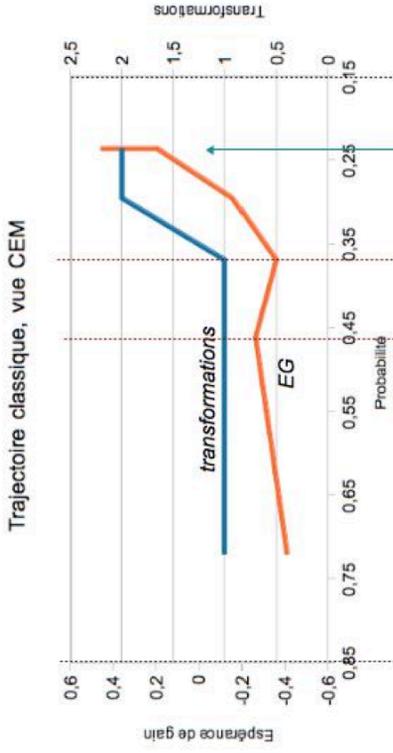
T2

Experts indécis, changeant fréquemment d'avis

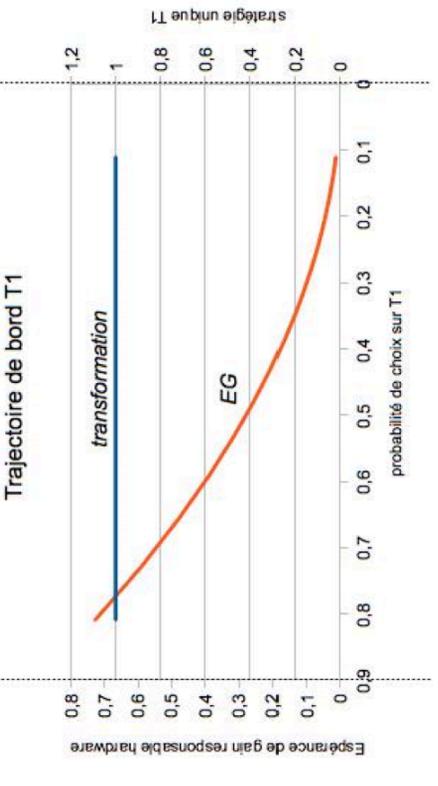
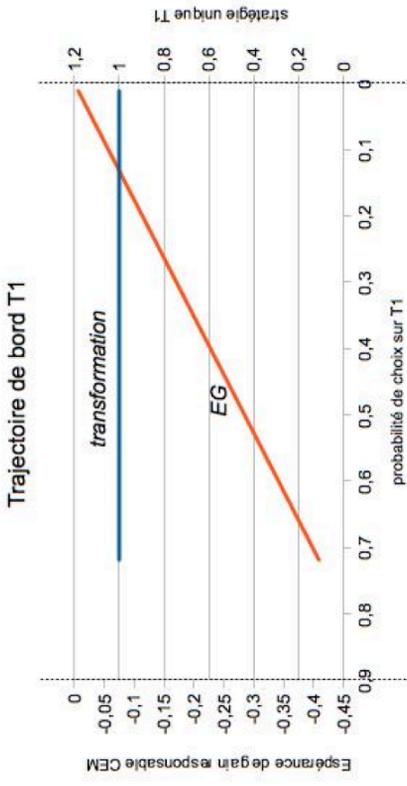


Application : gestion de crise en CEM.

Quelques résultats parmi d'autres ...



Fin exercice



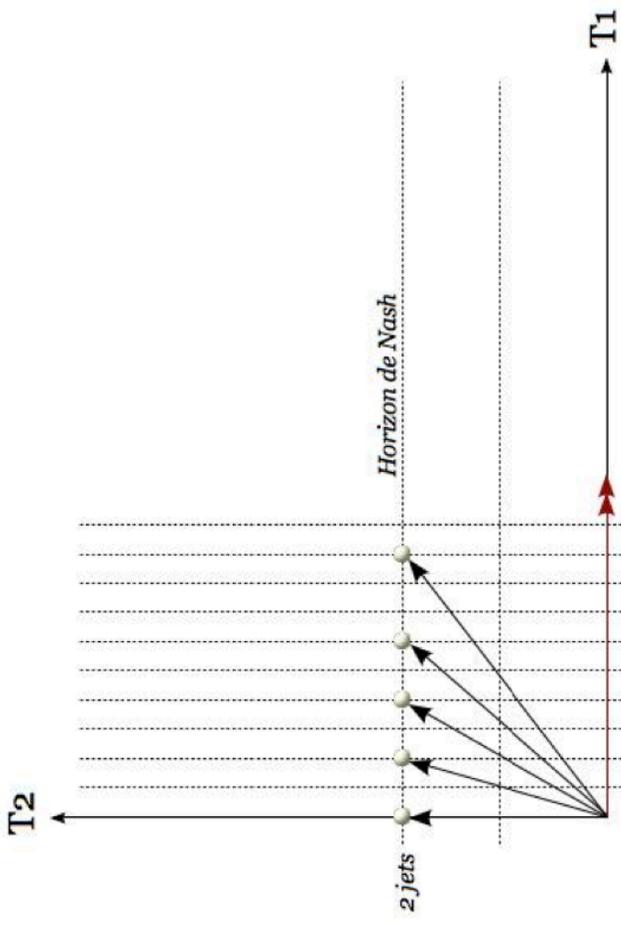
Trajectoire classique

Trajectoire de bord

Application : gestion de crise en CEM.

$$\vec{C}_{\{aaabaa\dots\}}, \forall \{aaabaa\dots\} \supset \{b, b\} = 2T_2 + \alpha T_1$$

Concept « d'horizon de Nash » pour ce jeu



$$\forall T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathcal{T}, \exists \{\gamma_x, \dots, \gamma_y\}(\mathcal{T}), \vec{C}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \supset \{\gamma_x, \dots, \gamma_y\}, \\ \vec{C}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \neq \alpha T_i, \forall i / P(G(k^u, k^v, \dots)) = G_{opt} | \vec{C}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \neq 0$$

Conclusion : complexité, émergence, perspectives.

Enchevêtrement :

$$g_{\sigma\zeta} = z_{\sigma\zeta} + \mu_{\sigma\zeta}$$

enchevêtrement : $\text{Dim}(\mu_{\sigma\zeta})$

Imprévisibilité :

$$\Lambda_{mk} \in \gamma_{mk} \neq [0]$$

Système complexe :

Complexité =>

1. Enchevêtrement (nombreuses interactions dont entre les petits modes et les grands modes)
2. Imprévisibilité (comportements probabilistes)
3. Émergence (apparitions inattendues)

Enchevêtrement :

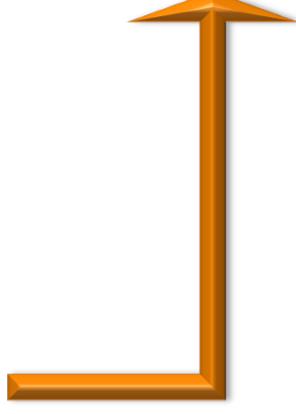
La dimension de l'enchevêtrement est chiffrable par la métrique des interactions dans les jonctions (petits modes).

Imprévisibilité :

Partie markovienne du propagateur (grands modes).

Émergence :

Gain le plus fort obtenu dans un chemin dont l'origine a une probabilité d'emprunt très faible (voire la plus faible).

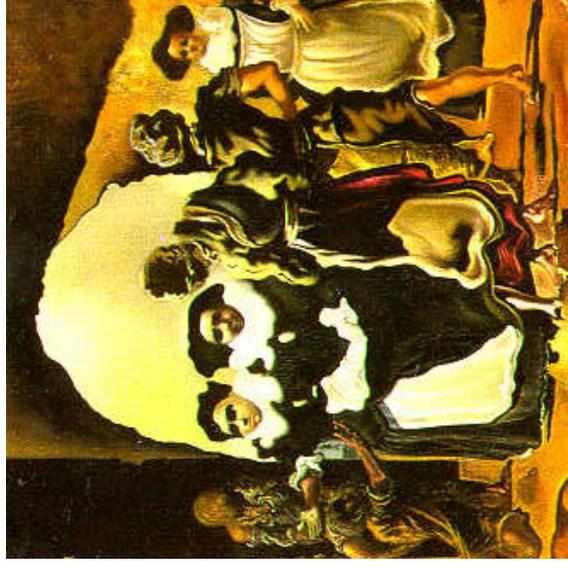
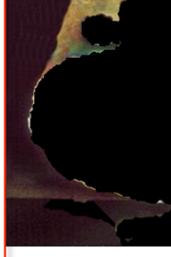


Conclusion : complexité versus émergence.

Cas d'émergence a priori avérés :

- ✓ *Supraconductivité (équation BCS rajoute un terme et ne fonctionne pas pour les SP « chauds ») ;*
- ✓ *Le Tardigrade (1 variété) se laisse geler – rentre en état de mort clinique – puis revient à la vie en cas de dégel ;*
- ✓ *La pensée ?*
- ✓ *L'effondrement de la fonction d'onde ;*
- ✓ *...*

in Ω , st $\mathcal{D}_{\text{im}}(\Omega) = D$, $g_{\beta}(\sigma \dots) \rightarrow$
 $g_{\beta}(\sigma \dots) + \mu_{\beta}(\sigma \dots, \mu \Rightarrow \mathcal{D}_{\text{im}}(\Omega) = D + 1$



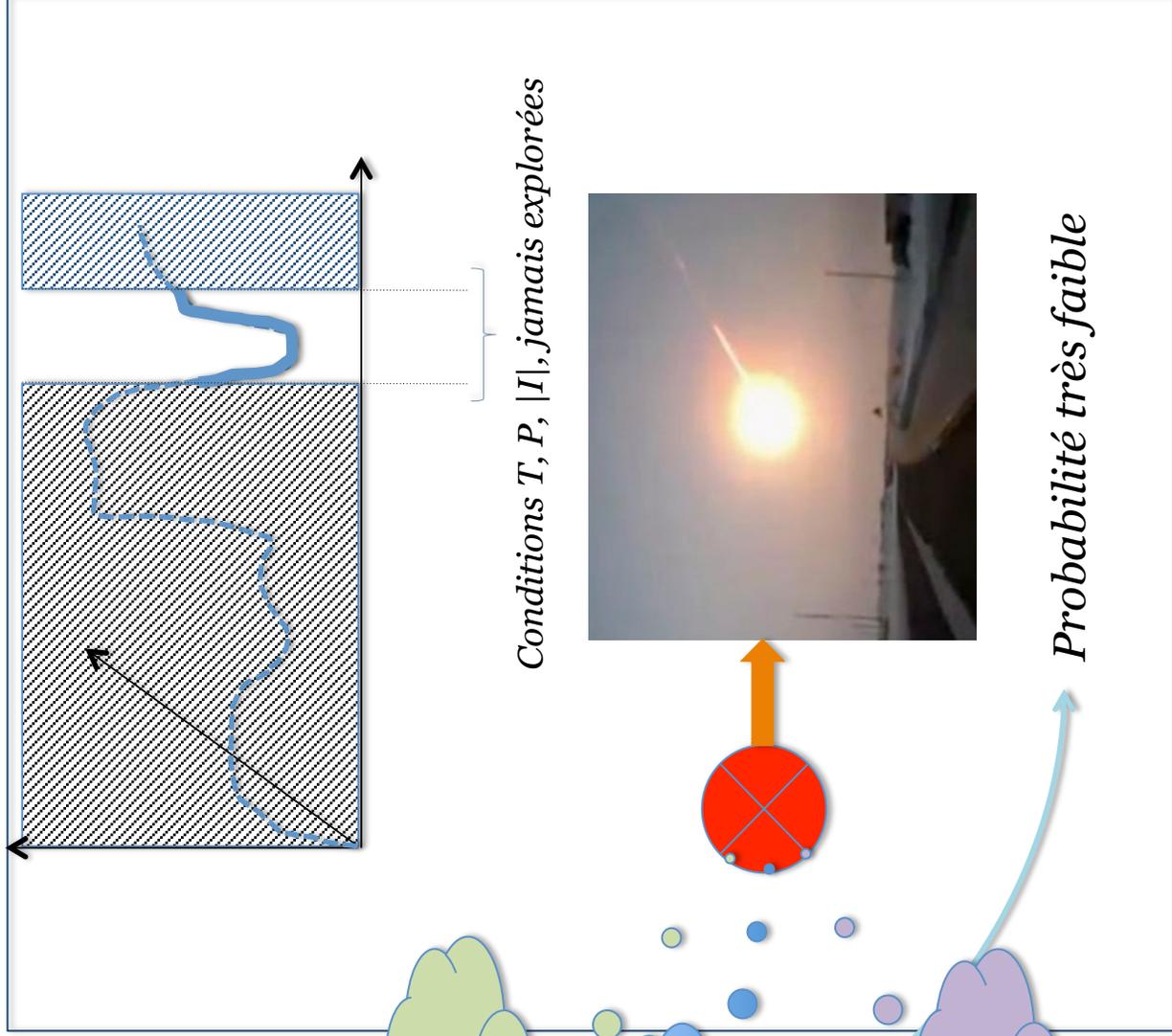
Conclusion : émergence physique.

Diagnostique non linéaire

Environnement 2

Environnement 1

Conditions internes 3

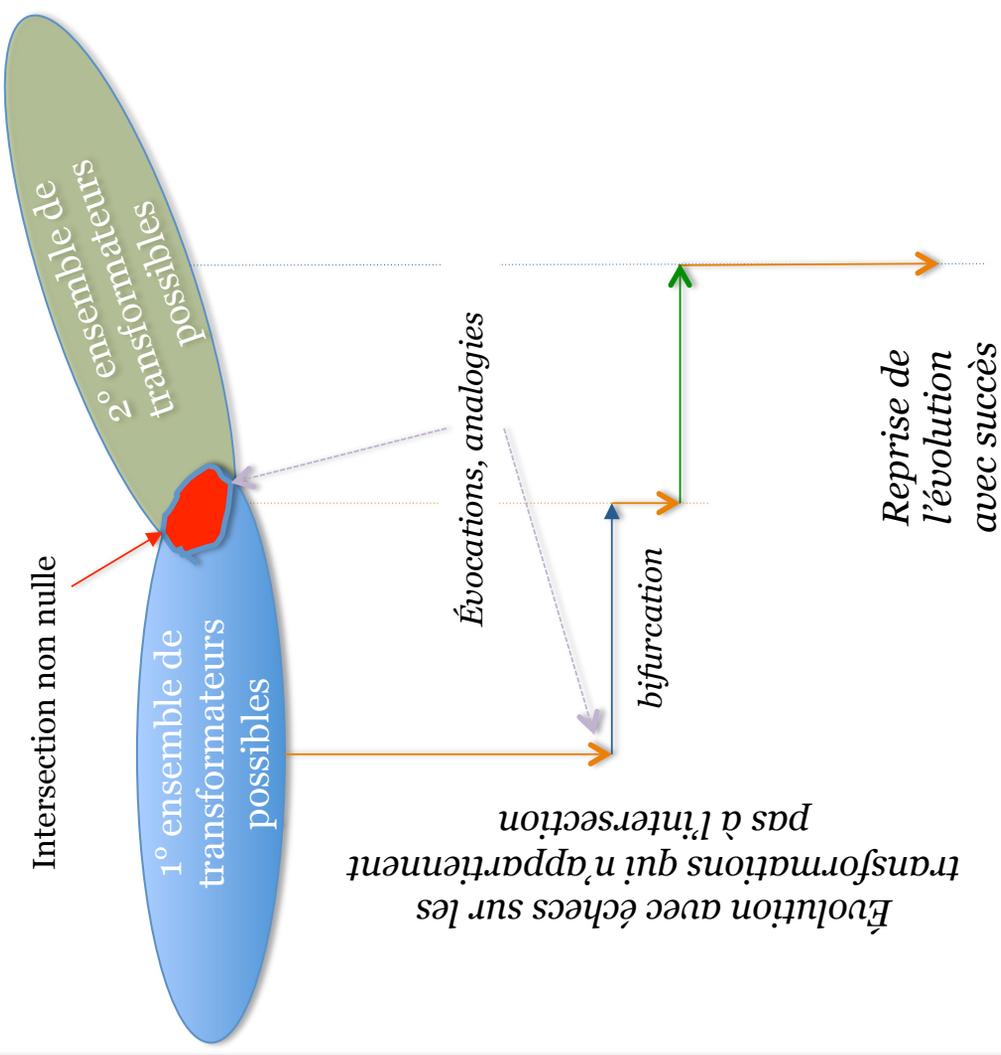


Et proposerait un modèle pour l'analyse des systèmes en conditions de fermeture.

Conclusion : émergence psychique.

$$P(G = G_0 \mid G \cap X \in X) \mid_{G \cap X \in X} \neq 0 \Rightarrow X \cap X \neq 0$$

Innovation



Les deux types d'émergences physique et psychique sont connectées, la première pouvant alimenter la seconde.

Conclusion :

Le propos des travaux proposés est de fournir une boîte à outils pour modéliser les processus complexes.

Ces processus peuvent englober une large gamme de modèles issus de physiques ou sciences cognitives variées.

L'objet n'est pas ici de trouver un modèle commun qui se transforme par des opérations

d'agrégats pour engendrer les objets des plus hautes échelles.

*On choisit une **technique capable de coupler les différents modèles existants et développés** séparément dans divers métiers, comme d'intégrer des processus émergents.*

Les premières applications timidement testées ont donné des démonstrations des capacités de la méthode proposée.

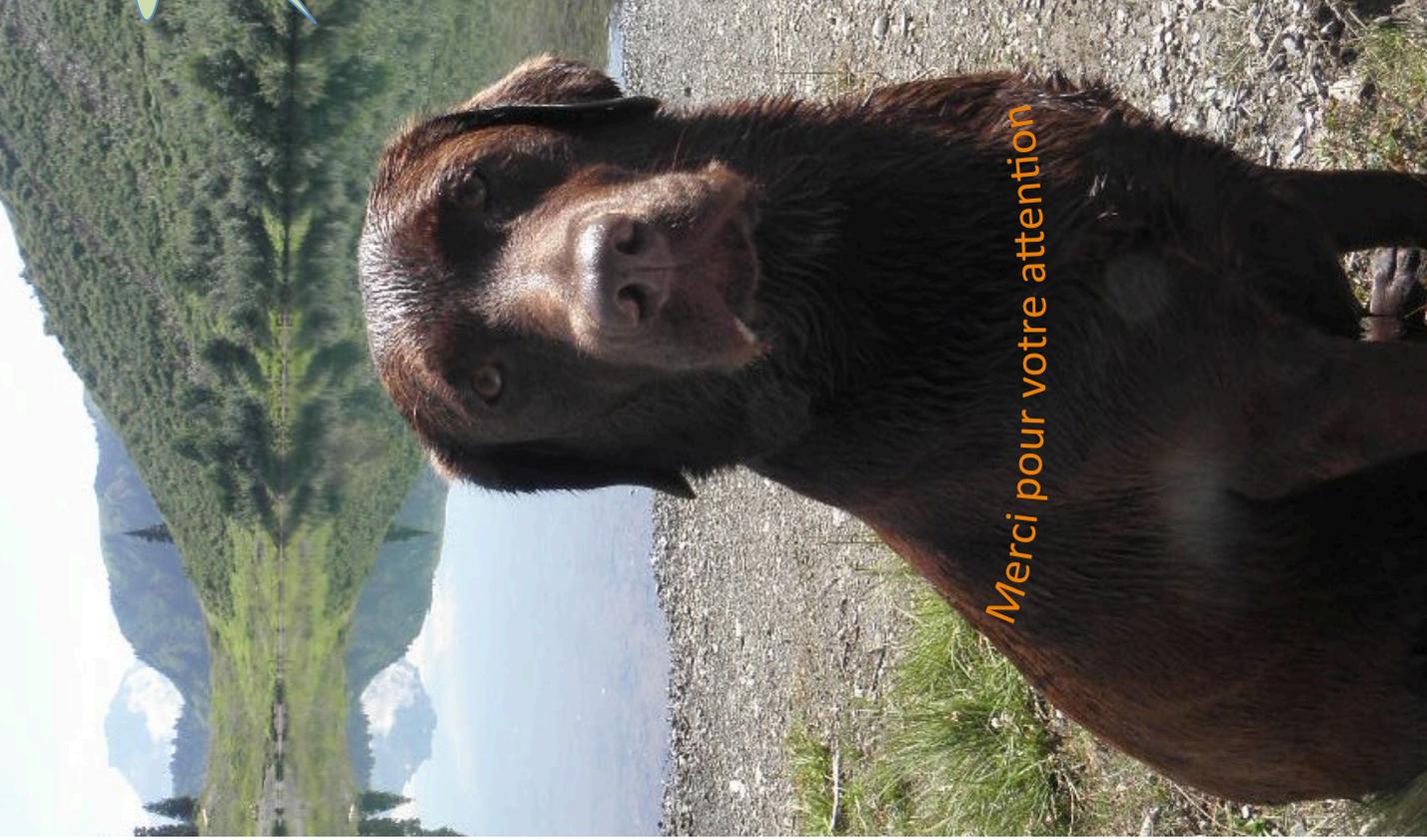
On a pu inventer dans le cadre de ces recherches :

- *La notion de cordes généralisées, réelles et virtuelles ;*
- *L'extension du modèle de Branin aux guides multimodaux ;*
- *L'espace des moments ;*
- *L'analyse tensorielle des réseaux à métrique et diakoptique non linéaire ;*
- *Les gamma matrices et les tenfolds ;*
- *La représentation par arbre d'évolution ;*
- *Les concepts d'horizon de Nash ou plus généralement d'équilibres dans des processus markoviens dans le cadre du formalisme développé.*

On espère que les pistes démarrées trouveront grâce auprès d'enseignants et d'étudiants pour des thèses à venir...

Des questions ?

Merci pour votre attention



Résumé

L'objet de cette thèse est de présenter une méthode de modélisation de la complexité. Partant de l'analyse tensorielle des réseaux, on montre tout d'abord que cette technique permet de modéliser tout processus physique en intégrant dans un formalisme efficace les modèles développés dans chaque branche actuelle de la physique. Il ne s'agit pas de proposer une méthode universelle, mais bien un formalisme qui est capable d'intégrer et de coupler les modèles développés par ailleurs et appelés à évoluer. Le formalisme encapsule ainsi ceux de la mécanique quantique ou de la relativité générale, etc. L'aspect "physique" du système pris en charge, on fait appel à la théorie des jeux pour aborder l'aspect "psychique" du système, pour modéliser son comportement. Ce lien passe par la création d'objets mathématiques comme les tenfolds et gamma matrices. On est alors à même de créer un arbre d'évolution et de représenter des trajectoires de transformations et décisions dans un espace "choix-gains".

Mots clés : analyse tensorielle des réseaux, théorie des jeux, tenfolds, gamma matrices.

Abstract

This thesis presents a method for modeling complexity. Starting from tensorial analysis of networks, we show that this technique allows to model any physical process. It gives in a common formalism all the tools to integrate equations coming from various physics. The purpose is not to develop an unique method rather than having one able to embed developments coming from any kind of physic material. The formalism embed quantum mechanics, relativity, etc. Once the physical part of the system take in charge, we use game theory to take the psychical part. Both methods linked by special mathematical objects like "tenfolds" or gamma matrices makes a global technique for complexity. A tree cross talking the two theories models the complex system evolution. A special representation in a "choices-utility" space gives a comprehensible image of the system evolution.

Keywords : tensorial analysis of networks, game theory, tenfolds, gamma matrices.