

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ÉCOLE DOCTORALE Sciences et Ingénierie pour l'Information
FACULTÉ des SCIENCES et TECHNIQUES
Département de Mathématiques et Informatique
Laboratoire XLIM (UMR 7252)

Thèse N° 29 - 2013

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Mathématiques et ses applications

présentée et soutenue publiquement par

Hadia RAMMAL

le 19 Septembre 2013 à 15h

Problèmes de Complémentarité aux Valeurs Propres : Théories, Algorithmes et Applications

dirigée par Samir ADLY

devant le jury composé de

Rapporteurs :

Mounir HADDOU
Alberto SEEGER

Professeur, INSA de Rennes
Professeur, Université d'Avignon

Examineurs :

Vincent ACARY
Samir ADLY
Paul ARMAND
António PINTO DA COSTA
Adnan YASSINE (Président)

Chargé de Recherche, INRIA Rhône-Alpes
Professeur, Université de Limoges
Professeur, Université de Limoges
Professor, Instituto Superior Técnico, Lisbonne
Professeur, Université du Havre

*Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers
par qui nos âmes sont fleuries.*
Marcel Proust

*À mon père et ma mère,
À mes sœurs Sanaa, Farah et Darine,
À mon amour Hussein.*

Remerciements

Les émotions sont faites pour être partagées.

Marc Levy

Le meilleur ami de “merci” est “beaucoup”.

Michel Bouthot

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été effectués au sein du département DMI (Département Mathématiques Informatique) de l’Institut de Recherche XLIM UMR CNRS 7252, à l’Université de Limoges.

En premier lieu, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Samir ADLY qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m’ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

Je suis très reconnaissante envers Mounir HADDOU et Alberto SEEGER d’avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je les remercie pour le temps qu’ils ont consacré pour bien lire ce manuscrit, pour leurs remarques constructives et pour leurs jugements pertinents.

Je remercie également Vincent ACARY, Paul ARMAND, António PINTO DA COSTA et Adnan YASSINE d’avoir accepté d’examiner cette thèse et de participer à mon jury. J’exprime plus particulièrement ma sincère gratitude à Paul pour son soutien et ses conseils précieux et avisés tout au long de cette thèse.

J’exprime tous mes remerciements aux personnels du Département Mathématiques Informatique (DMI) de l’Université de Limoges de m’avoir accueillie chaleureusement parmi eux. Merci tout particulièrement à mes tuteurs pédagogiques Driss BOULARAS et Abdelkader NERCER de m’avoir guidée dans mes premiers pas dans le monde académique. Merci également à Odile DUVAL, Henri MASSIAS, Annie NICOLAS, Patricia VAREILLE et Yolande VICELLI pour leur disponibilité pour répondre à tous nos besoins.

Mais une thèse ne saurait être réduite à son aspect scientifique. Ce sont aussi des années de vie, au long desquelles l’amitié humaine fut pour moi un carburant indispensable.

– Ba-khiet LE, mon compagnon de conférence et mon voisin de bureau durant trois ans. Merci pour ces années durant lesquels nous avons partagé notre travail. Merci pour ta patience et de me supporter au quotidien. Je te souhaite sincèrement une grande carrière parce que tu la mérites.

– Mes remerciements vont également à tous mes collègues du Département Mathématiques qui ont contribué à créer une ambiance cordiale. Plus particulièrement, je remercie Riadh OMHANI et Gaël THOMAS avec qui j’ai partagé mes années de thèse.

Mention spéciale à ma chère amie Carole EL BACHA qui m’a supporté et m’a permis de me lever motivé, le cœur léger et l’esprit tranquille depuis le début de ma thèse. Je voudrais te dire merci pour ton soutien pendant mes périodes de doutes et pour tes multiples encouragements répétés.

Merci à tous mes amis pour leur amitié et notamment Rim RAMMAL, Nivine SROUR, Ahmad EL HAJ, Ali HRAYBI, Ahmad KANSO, Hussein MELHEM, Khelifi NOUREDDINE et Ahmad SKAYKI avec qui, j'ai partagé de bons et mauvais moments. Merci à vous tous pour les agréables soirées passées à Limoges.

A toi *Hussein* pour ton réconfort, ta compréhension, ton soutien moral surtout dans les moments difficiles durant cette thèse, de m'avoir poussée et encouragée à aller au delà de mes capacités et surtout d'avoir été présent à chaque fois que j'ai eu besoin de toi. Sans toi, je n'aurais pas surmonté les périodes de stress.

Je remercie enfin et porte une énorme pensée à mes parents *Mohamed* et *Insaf*, qui sont la graine de mon existence, pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

Papa, tu es une vraie école de la vie, je ne cesse d'apprendre tous les jours avec toi.

Maman, une femme aussi adorable que toi je n'en connais pas, tu as toujours été là pour moi, et à aucun moment tu n'as cessé de me couvrir de ta tendresse et de me laisser quitter le nid familial pour réaliser mon rêve de devenir docteur.

A une personne unique au monde, *Sanaa* ma soeur, ma psychologue et ma confidente. C'est grâce à vous que je suis ce que je suis maintenant. Je ne pourrais vous remercier assez... que Dieu vous protège.

A *Farah*, ma deuxième soeur, tu m'as toujours soutenue... je remercie Dieu de t'avoir connue.

A *Darine*, ma petite soeur, je t'aime beaucoup...

Merci pour tout, comme on dit "sans vous rien de tout cela n'aurait été possible". Je vous dédicace ce mémoire même s'il contient plein de "formules compliquées".

Hadia RAMMAL

La science est le capitaine, et la pratique, ce sont les soldats.

Léonard de Vinci

Entre une pratique sans tête et une théorie sans jambes, il n'y aura jamais à choisir.

Régis Debray

Le fondement de la théorie c'est la pratique.

Mao Tsé-Toung

Notations

\emptyset	Ensemble vide
\mathbb{R}	Corps des réels
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles d'ordre n
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n	\mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire sur \mathbb{R}^n
$\ \cdot \ $	Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n
$\text{co}(C)$	Enveloppe convexe de l'ensemble C de \mathbb{R}^n
$\bar{\text{co}}(C)$	Enveloppe convexe fermée de l'ensemble C
C°	Cône polaire d'un ensemble C de \mathbb{R}^n
C^+	Cône dual d'un ensemble C de \mathbb{R}^n
$N_C(x)$	Cône normal d'un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n au point x
$\text{epi } f$	Epigraphe d'une fonction f
$\text{dom } f$	Domaine d'une fonction f
$f'(x; d)$	Dérivée directionnelle d'une fonction f au point x dans la direction d
$\nabla f(x)$	Gradient d'une fonction f au point x
$\partial_B f(x)$	B-sous-différentiel d'une fonction f au point x
$\partial f(x)$	Sous-différentiel de Clarke d'une fonction f au point x
\mathcal{K}^n	Cône du second-ordre de dimension n
\mathcal{K}	Produit des cônes de second-ordre dans \mathbb{R}^n
$\text{int } \mathcal{K}^n$	Intérieur de cône du second-ordre \mathcal{K}^n
$\text{bd } \mathcal{K}^n$	Frontière de cône du second-ordre \mathcal{K}^n
L_x	Matrice symétrique d'un élément x de \mathcal{K}^n
$\dim(E)$	Dimension d'un espace vectoriel E
\mathbf{I}_n	Matrice identité de \mathbb{R}^n
A^T	Transposé d'une matrice/d'un vecteur A
A^{-1}	Inverse d'une matrice carrée A
$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$	Matrice diagonale (en bloc) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$
$\det(A)$	Déterminant d'une matrice carrée A
$\text{Ker}(A)$	Noyau d'une matrice A
$\text{Im}(A)$	Image d'une matrice A
$a_{i,j}$	La (i, j) -ème entrée d'une matrice A
A_{IJ}	Sous-matrice d'une matrice A telle que ses éléments $a_{i,j}, i \in I, j \in J$

DP	Matrice définie positive
SDP	Matrice semi-définie positive
C	Matrice copositive
SC	Matrice strictement copositive
P	P -matrice
P_0	P_0 -matrice
Z	Z -matrice
R_0	R_0 -matrice
S	S -matrice
$\mathbf{1}_n$	Vecteur unité d'ordre n ($\mathbf{1}_n = [1, \dots, 1]^T$)
$0_{\mathbb{R}_n}$	Vecteur zéros d'ordre n
$x^+ = P_{\mathbb{R}_+^n}(x)$	Projection de x sur \mathbb{R}_+^n
$x \vee y$	$\max\{x, y\}$
$x \wedge y$	$\min\{x, y\}$
$\text{Sign}(x)$	Fonction signe de $x \in \mathbb{R}$ définie par $\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
\odot	Opération binaire sur \mathbb{R}^n
$\bar{F}(\cdot) = \mathbb{E}[F(\cdot, \omega)]$	Espérance d'une fonction F par rapport à la variable ω
LCP	Problème de complémentarité linéaire
NCP	Problème de complémentarité non-linéaire
EiCP	Problème de complémentarité aux valeurs propres
biEiCP	Problème de complémentarité aux valeurs propres bivariées
SOC	Cône de second-ordre
SOCCP	Problème de complémentarité du cône de second-ordre
SOCEiCP	Problème de complémentarité aux valeurs propres au sens du cône de second-ordre
StocNCP	Problème stochastique de complémentarité non-linéaire
StocLCP	Problème stochastique de complémentarité linéaire
StocEiCP	Problème stochastique de complémentarité aux valeurs propres
StocSOCEiCP	Problème stochastique de complémentarité aux valeurs propres au sens du cône de second-ordre
IEiP	Problème inverse aux valeurs propres
IPEiCP	Problème inverse de complémentarité aux valeurs propres
ϕ_{FB}	Fonction Fischer-Burmeister
ϕ_{min}	Fonction min
NM	Méthode de Newton
SNM_{FB}	Méthode de Newton semi-lisse en utilisant la fonction Fischer-Burmeister
SNM_{min}	Méthode de Newton semi-lisse en utilisant la fonction min
NFA	Algorithme de flux normal
AJA	Algorithme de la Jacobienne augmentée

Table des figures

1	Une discrétisation par éléments finis d'un corps élastique sur une fondation rigide avec frottement.	8
2	Éléments finis à deux nœuds en glissement imminent vers la gauche.	9
1.1	Exemples des ensembles convexes et non convexes.	19
1.2	Exemple d'un enveloppe convexe.	20
1.3	Exemples des cônes convexes.	20
1.4	Exemple des cônes polyédrique et non-polyédrique.	21
1.5	Exemples des cônes polaire et dual.	21
1.6	Cône normal.	22
1.7	L'épigraphe de f .	22
1.8	Interprétation géométrique de $IV(F, C)$.	23
1.9	Condition nécessaire d'un minimum.	24
1.10	Exemple d'une fonction convexe non-différentiable.	26
1.11	Exemple d'une fonction semi-lisse : $f(x) = \ln(1 + x)$.	28
1.12	Exemples des cônes de Lorentz.	29
1.13	Illustration de la méthode régulière de Newton.	42
2.1	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.	66
2.2	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.	67
2.3	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	67
2.4	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.	68
2.5	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps d'exécution.	75
2.6	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	76
2.7	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.	76
2.8	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.	77
2.9	Profils de performance de LPM et SNM _{FB} où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.	77
2.10	Profils de performance de LPM et NM où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.	79
2.11	Profils de performance de LPM et NM où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.	79
2.12	Profils de performance de LPM et MN où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	80
2.13	Profils de performance de LPM et MN où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.	80
2.14	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.	82
3.1	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.	100
3.2	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	101
3.3	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.	101
3.4	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.	103
3.5	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.	103
3.6	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	104
5.1	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.	127
5.2	Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.	128

Table des matières

1	Notions Générales	19
1.1	Convexité	19
1.1.1	Ensembles convexes et cônes	19
1.1.2	Fonctions convexes	22
1.2	Problème d'inéquation variationnelle	23
1.3	Différentiabilité et sous-différentiabilité	25
1.3.1	Différentiels généralisés	26
1.4	Fonctions semi-lisses	27
1.4.1	Exemples des fonctions semi-lisses	28
1.5	Cône du second-ordre (cône de Lorentz)	29
1.5.1	Factorisation spectrale	31
1.6	Problème de complémentarité aux valeurs propres	32
1.6.1	Problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP : cas symétrique	35
1.6.2	Problème de complémentarité aux valeurs propres : cas asymétrique APCVP	39
1.6.3	Méthode de Newton semi-lisse SNM	41
2	Un Nouvel Algorithme pour Résoudre le Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres au Sens de Pareto	45
2.1	Introduction	45
2.2	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres au sens de Pareto	48
2.2.1	Méthode de reformulation	49
2.3	“Lattice Projection Method”	52
2.3.1	Expérience numérique : Test sur une matrice d'ordre 4 avec 23 valeurs propres de Pareto	54
2.4	Conditions de la non singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$	55
2.4.1	Exemples	61
2.5	Résultats numériques	63
2.5.1	Test sur trois matrices particulières	64
2.5.2	Profils de performance	65
2.6	Applications aux problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto	68
2.6.1	Problèmes classiques aux valeurs propres bivariées (bi-EiP)	68
2.6.2	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées (avec contraintes)	69
2.6.3	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto	71
2.6.4	“Lattice projection method” appliquée au bi-PCVP	74
2.6.5	Expérience numérique de bi-PCVP	74
2.7	Méthode de Newton	78
2.7.1	“Squaring technique”	78
2.7.2	Résultats numériques	78
2.8	Solveur Path	81
2.9	Conclusions	83

3	Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Contraint par le Cône du Second-Ordre	85
3.1	Introduction	85
3.2	Projection sur le cône du second-ordre	87
3.3	Fonction de complémentarité du cône de second-ordre (fonction SOCC)	90
3.3.1	B-sous-différentiel de la fonction SOCC Fischer-Burmeister $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$	91
3.4	Problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre	92
3.4.1	Reformulation de PCVPL	94
3.5	Extension du “Lattice projection method” LPM au cône du second-ordre	96
3.6	Conditions de la non-singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$	97
3.7	Résultats expérimentaux	100
3.7.1	Premier test numérique	100
3.7.2	Deuxième test numérique	102
3.8	Conclusions	104
4	Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Stochastiques	105
4.1	Introduction	105
4.1.1	Application	108
4.2	Partie I- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques de Pareto StocPCVP	108
4.2.1	Reformulation de StocPCVP de Pareto	109
4.2.2	Conditions de la non singularité de $\partial\Psi_{\text{FB}}(z^*)$ et problème de minimisation	111
4.3	Partie II- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques contraint par le cône Lorentz StocPCVPL	112
4.3.1	Reformulation de StocPCVPL	112
4.3.2	Conditions de la non-singularité de $\partial_B\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z^*)$ et problème de minimisation	113
4.4	Conclusions	115
5	Problème Inverse de Complémentarité aux Valeurs Propres de Pareto	117
5.1	Introduction	117
5.2	Problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto	118
5.3	Approche lisse pour résoudre le problème inverse de complémentarité aux Valeurs propres de pareto PICVP	121
5.3.1	Algorithme de flux normal (NFA) pour PICVP	121
5.3.2	Algorithme de la Jacobienne augmentée (AJA)	122
5.3.3	Extensions de NFA	123
5.4	Approche semi-lisse pour résoudre un PICVP	124
5.4.1	Algorithme semi-lisse de flux normal	124
5.4.2	Algorithme semi-lisse de la Jacobienne augmentée	125
5.5	“Inverse lattice projection method” pour résoudre PICVP	125
5.6	Expérience numérique	126
5.7	Conclusions	128
	Conclusions et Perspectives	129
	Bibliographie	133

Introduction

Cette thèse traite le sujet des problèmes de complémentarité aux valeurs propres engendré par le cône de Pareto (l'orthant positif \mathbb{R}_+^n) et le cône du second-ordre (cône de Lorentz). Nous étudions aussi le cas stochastique de tels problèmes au sens de ces deux cônes et abordons les problèmes inverses de complémentarité aux valeurs propres de Pareto.

Un thème central des mathématiques appliquées concerne la conception de modèles mathématiques précis pour une variété de problèmes issus de la finance, la médecine ainsi que de nombreuses autres disciplines, et le développement d'algorithmes numériques efficaces pour leurs solutions. Souvent, ces modèles contiennent des paramètres qui devraient être réglés de manière optimale, que ce soit pour maximiser la précision du modèle (identification des paramètres), ou pour contrôler le système simulé dans un chemin désiré (contrôle optimal). L'optimisation, et en particulier le problème de complémentarité, est à la base des modèles utilisés.

L'étude systématique des problèmes de complémentarité a commencé dans les années 1960. Il serait difficile d'estimer l'importance de tels problèmes qui sont devenus l'une des disciplines les plus fructueuses dans le domaine de l'optimisation mathématique. Grâce à ses diverses applications en ingénierie, économie et science, de nombreux chercheurs ont concentré leur attention afin de développer des résultats théoriques et des méthodes numériques efficaces pour résoudre ces problèmes. La littérature des problèmes de complémentarité a bénéficié des contributions apportées par les mathématiciens (pure, appliquée et informatique), les informaticiens et les différents ingénieurs (génie civil, électrique, mécanique et systèmes). Plusieurs livres et plus d'un millier d'articles concernant ce sujet ont été publiés [28, 38, 84, 90]. Beaucoup de résultats théoriques de base pour les problèmes de complémentarité sont connus depuis longtemps ; une excellente étude dans ce domaine peut-être trouvée dans [47]. Autres références et des travaux plus récents peuvent également être trouvés dans [38, 89].

Une raison importante pour laquelle les problèmes de complémentarité sont si répandus dans l'ingénierie et l'économie est que la notion de complémentarité est synonyme d'équilibre du système étudié. L'équilibre de l'offre et la demande est au centre de tous les systèmes économiques. La complémentarité est également au coeur des problèmes d'optimisation avec contraintes.

Plus particulièrement, le calcul des valeurs propres d'une matrice carrée A est aussi très important en mathématiques appliquées, en physique et en ingénierie. Ces valeurs propres sont les solutions de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$. Les méthodes d'optimisation peuvent être utilisées lorsque la dimension de la matrice A est très grande. Beaucoup de problèmes sont liés au calcul des valeurs propres. Nous nous limiterons, dans cette thèse, aux études des problèmes de complémentarité aux valeurs propres, connus en littérature sous le nom, *Eigenvalue Complementarity Problems* EiCP [4, 55, 56, 57, 95, 96, 104, 111, 112]. Ces problèmes consistent à trouver un scalaire (valeur propre) et un vecteur non nul (vecteur propre) satisfaisant une relation de complémentarité sur un cône convexe fermé dans un espace de dimension finie : Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in K$, tels que

$$\text{EiCP}(A, B) \quad x \in K, \quad Ax - \lambda Bx \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda Bx \rangle = 0, \quad (1)$$

où A et B sont deux matrices réelles d'ordre n et B est définie positive.

L'importance grandissante de EiCP est mesurée par les domaines pratiques et mathématiques qu'il couvre. Une large variété d'applications est modélisée comme des problèmes de complémentarité, comme par exemple, les problèmes d'équilibre mécanique et économique, les problèmes

de mécanique de contact, les problèmes de conception de réseau, les problèmes de contrôle optimal, les problèmes d'obstacle non-linéaire, les problèmes d'équilibre de la circulation, etc. Une attention particulière est portée aux instabilités dans les problèmes mécaniques engendrées par le frottement sec de type Coulomb et à la réalisation de modèles phénoménologiques permettant de détecter les principaux modes de vibration des systèmes associés. Par exemple, le problème d'instabilité par divergence d'états d'équilibre statique, avec des forces extérieures constantes qui a été étudié auparavant par Martins et al. [77] et par Martins et Pinto da Costa [78, 79, 80, 81], implique la nécessité de résoudre le problème de complémentarité aux valeurs propres.

Actuellement, EiCP constitue l'un des sujets de recherche les plus étudiés dans le domaine de l'optimisation numérique. Le but est de développer une méthodologie adéquate. A ce propos, il est impératif de traiter des questions ouvertes déjà étudiées au niveau des problèmes de complémentarité, comme par exemple, trouver une méthode efficace pour résoudre EiCP, donner les conditions de la non-singularité de la Jacobienne généralisée en une solution pour assurer la convergence des algorithmes, etc.

Notre objectif dans cette thèse est de contribuer à la résolution de EiCP en utilisant des méthodes adéquates qui mènent à un résultat efficace et performant.

Notre travail consiste d'abord à effectuer une étude bibliographique approfondie des problèmes EiCP, en mettant l'accent sur les principaux développements en vue de synthétiser les travaux existants. Ensuite, nous proposons une nouvelle méthode, *Lattice Projection Method* LPM, pour la résolution d'un tel problème. Une attention particulière sera donnée aux cas de l'orthant positif \mathbb{R}_+^n et de cône de Lorentz. Nous abordons aussi le cas stochastique de EiCP qui joue un rôle important dans la conception de l'analyse et des opérations de systèmes modernes soumis à des incertitudes. Nos contributions pour ce problème se résument par sa reformulation pour trouver une solution globale d'un problème de minimisation. Nous étudions, enfin, les problèmes inverses de EiCP qui consistent à trouver une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que chaque élément de $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ est une valeur propre de Pareto de A , c'est-à-dire, une solution du problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP de Pareto

$$\text{(EiCP)} \quad x \geq 0, Ax - \lambda x \geq 0, \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0. \quad (2)$$

Pour motiver notre problématique étudiée dans cette thèse, nous proposons deux applications en mécanique où le modèle est décrit par un EiCP.

Applications de EiCP

Exemple 1 Nous nous inspirons de cet exemple traité dans [97] et qui montre le lien entre l'instabilité des systèmes mécaniques et les problèmes EiCP.

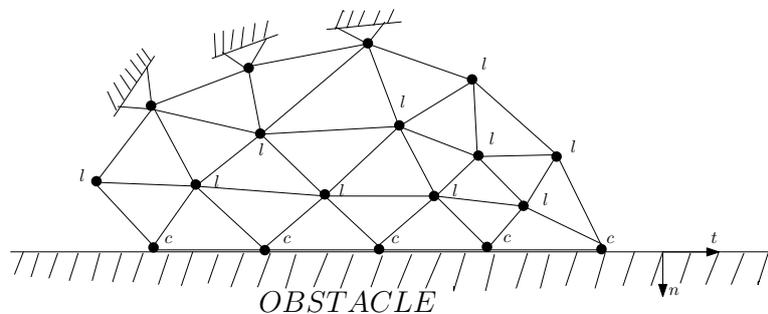


FIGURE 1 – Une discrétisation par éléments finis d'un corps élastique sur une fondation rigide avec frottement.

Dans la figure ci-dessus, nous considérons une discrétisation par éléments finis d'une configuration d'équilibre d'un solide en contact frotté avec une fondation rigide. Soient l le nombre de

noeuds libres (non soumis à une quelconque contrainte géométrique) et c le nombre de noeuds en contact avec la fondation. Dans l'article [97], les auteurs montrent que le problème de l'instabilité directionnelle (dite aussi divergentielle) équivaut à résoudre un problème de complémentarité aux valeurs propres. En effet, soient x le vecteur des variables cinématiques (c'est-à-dire les vitesses) et y le vecteur des variables statiques (les taux de réactions). Nous avons

$$x = \begin{bmatrix} x_l \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_l+n_c}, \quad y = \begin{bmatrix} y_l \\ y_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_l+n_c}, \quad 0_c \leq x_c \perp y_c \geq 0_c,$$

où x_l et y_l désignent les variables libres (qui ne satisfont aucune inégalité ou condition de complémentarité). Cependant, x_c et y_c regroupent les variables de contact (qui doivent satisfaire des inégalités et des conditions de complémentarité). Notons que y_l est nul puisqu'il n'y a pas de contact avec la fondation, c'est-à-dire, la réaction est nulle. Les auteurs ont montré (voir [97]) que l'instabilité directionnelle a lieu, si et seulement si, il existe un scalaire $\lambda > 0$ et un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_l+n_c} \times \mathbb{R}^{n_l+n_c}$, avec $x \neq 0$ tels que

$$\begin{cases} (M^{\text{raideur}} + \lambda M^{\text{masse}})x = y, \\ 0_c \leq x_c \perp y_c \geq 0_c, \end{cases}$$

où M^{masse} et M^{raideur} représentent les matrices des masses et de rigidité (supposées non-symétriques en général). Notons que ce problème s'écrit bien sous la forme EiCP(A, B) avec

$$A = M^{\text{raideur}}, \quad B = -M^{\text{masse}} \quad \text{et} \quad K = \mathbb{R}^{n_l} \times \mathbb{R}_+^{n_c}.$$

De plus, λ est censé être strictement positif.

Exemple 2 *Un exemple avec 2 degrés de liberté.*

Le modèle considéré dans la figure ci-dessous est représenté par quatre noeuds d'éléments finis fait d'un matériau élastique isotrope linéaire. Nous supposons qu'à la configuration d'équilibre, les noeuds E et F sont en glissement imminent vers la gauche.

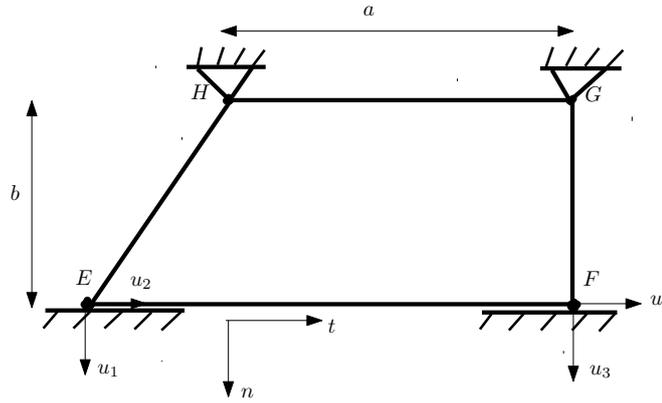


FIGURE 2 – Éléments finis à deux noeuds en glissement imminent vers la gauche.

Le problème de trouver le coefficient de frottement critique et les correspondantes directions instables au voisinage de l'état d'équilibre donné se formule comme un EiCP (voir [81] pour plus de détails). Il s'agit donc de trouver la valeur du coefficient de frottement $\mu \geq 0$ sur la frontière de l'instabilité directionnelle et un couple $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_c}$, avec $x_c \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} (K_0 - \mu K_1)x_c = y_c, \\ 0_{n_c} \leq x_c \perp y_c \geq 0_{n_c}, \end{cases}$$

où

$$K_0 = \begin{pmatrix} 4\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta} & -4\beta + \frac{1-\nu}{\beta} \\ -4\beta + \frac{1-\nu}{\beta} & 4\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -\frac{3}{2}(1+\nu) \end{pmatrix}.$$

Les paramètres β et ν représentent, respectivement, l'élanement par rapport à l'obstacle et le coefficient de Poisson du matériau (pour plus détails, voir [81]).

Contenu de la Thèse

Dans cette thèse, nous répartissons notre étude en six volets : Le premier volet traite une étude intensive en théorie de la complémentarité aux valeurs propres contraintes par un cône. Le deuxième concerne la résolution d'un problème de complémentarité aux valeurs propres, noté par PCVP, au sens des cônes de Pareto et de second-ordre. En effet, nous reformulons le PCVP comme un problème d'optimisation avec contraintes, ensuite comme la recherche de zéros d'une fonction semi-lisse Φ . Le troisième volet s'intéresse à l'étude et l'implémentation d'un nouvel algorithme pour résoudre PCVP. Plus précisément, nous proposons une nouvelle méthode, *Lattice Projection Method* LPM, pour résoudre un tel problème. L'originalité de cet algorithme réside dans le fait qu'il n'utilise pas les fonctions de complémentarité, connues dans la littérature sous le nom, *Nonlinear Complementarity Problem* NCP. Nous montrons que PCVP équivaut à résoudre un problème aux valeurs propres non-linéaires. Nous appliquons la méthode de Newton semi-lisse SNM sur LPM pour la résoudre. Des simulations numériques sur des matrices dont la taille varie entre 3 et 350 sont faites pour tester l'efficacité de notre méthode. À l'aide des profils de performances développés par Dolan et Moré [33] comme un outil de comparaison, nous comparons notre algorithme avec deux méthodes largement étudiées dans la littérature, à savoir, SNM_{FB} et SNM_{min} . La batterie de tests numériques révèle que LPM est la plus performante et efficace pour résoudre un PCVP. Dans le quatrième volet, nous étudions, sous quelles conditions les éléments des matrices Jacobiennes de Φ en une solution sont inversibles. Nous présentons, ensuite, quelques exemples pour illustrer ces résultats. Le cinquième volet traite le cas stochastique du problème PCVP au sens des cônes de Pareto et de second-ordre. La contribution de ce volet est la reformulation d'un tel problème sous la forme d'un problème de minimisation en tenant compte de la fonction de complémentarité Fischer-Burmeister. Le dernier volet aborde les problèmes inverses de complémentarité aux valeurs propres de Pareto. Nous présentons une nouvelle méthode, *Inverse Lattice Projection Method* ILPM, pour résoudre de tels problèmes.

Ce mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 1 présente quelques notions de base de l'analyse convexe, du calcul sous-différentiel et un rappel de certains aspects de cône du second-ordre que nous avons été amenés à utiliser dans les chapitres suivants. En outre, nous rassemblons quelques résultats et propriétés de EiCP aux cas symétrique et asymétrique. Ce chapitre ne présente aucune contribution théorique, cependant nous avons donné des résultats que nous utilisons dans la suite. Les quatre autres chapitres contiennent nos contributions. Nous résumons ci-dessous le contenu de chacun.

Chapitre 2 : Un Nouvel Algorithme pour Résoudre le Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres au Sens de Pareto

Ce chapitre est le sujet de l'article publié [3], en collaboration avec S. Adly.

Nous considérons le problème EiCP au sens du cône de Pareto défini par (2). Afin d'appliquer notre méthode numérique, nous allons réécrire EiCP sous la forme

$$(\text{PCVP}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \lambda x - Ax \geq 0, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0. \end{cases} \quad (3)$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et PCVP désigne le Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres. Notons que dans cette formulation, nous demandons à λ d'être strictement positif. Nous reformulons un tel problème, d'une façon équivalente, en un système d'équations semi-lisses. Comme une première étape vers la méthode de reformulation, nous écrivons

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ \langle x, y \rangle = 0, \\ \lambda x - Ax - y = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

En utilisant les fonctions ϕ de complémentarité non-linéaires NCP, nous allons ainsi résoudre le système suivant de $2n + 1$ équations semi-lisses

$$\Phi(z) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}, \quad (5)$$

où $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, $z = (x, y, \lambda) \mapsto \Phi(x, y, \lambda)$ est définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, y_n) \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ensuite, nous proposons une nouvelle formulation de PCVP, qu'on appelle *Lattice Projection Method* LPM qui nous conduit à résoudre un système non-linéaire et semi-lisse

$$\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = \Phi_{\text{LPM}}(x, \tilde{y}, \lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{y}^+ - \lambda x \\ Ax - \tilde{y} \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Puis, comme une première expérience numérique pour tester la méthode LPM pour trouver les solutions de PCVP, nous prenons une matrice particulière d'ordre 4 admettant exactement 23 valeurs propres de Pareto. Le test montre que LPM réussit à détecter les 23 valeurs propres.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions, sous quelles conditions, tous les éléments des matrices Jacobiennes de Clarke $\partial\Phi(z)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$, respectivement, en une solution z et \tilde{z}^* sont inversibles. Par ailleurs, quelques exemples sont établis pour illustrer ce concept de régularité.

Nous comparons, ensuite, LPM avec deux autres solveurs : SNM_{FB} et SNM_{min} : méthodes de Newton semi-lisses SNM en prenant ϕ_{FB} et ϕ_{min} comme des fonctions NCP. Nous proposons les profils de performance [33] comme un outil de comparaison pour accomplir cette expérience. Nous choisissons le temps de calcul, le nombre d'itérations, le nombre d'échecs et le nombre

maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur en tant que mesures de performance. Les résultats numériques obtenus montrent l'efficacité, la robustesse et la performance de LPM.

La deuxième étape de ce chapitre concerne les problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées de Pareto bi-EiCP

$$(\text{bi-EiCP}) \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } (x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \quad Ax + By - \lambda x \geq 0, \quad \langle x, Ax + By - \lambda x \rangle = 0, \\ y \geq 0, \quad Cx + Dy - \mu y \geq 0, \quad \langle y, Cx + Dy - \mu y \rangle = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Pour des raisons analogues au cas précédent, nous reformulons le problème bi-EiCP sous la forme suivante

$$(\text{bi-PCVP}) \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } (x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \quad \lambda x - Ax - By \geq 0, \quad \langle x, \lambda x - Ax - By \rangle = 0, \\ y \geq 0, \quad \mu y - Cx - Dy \geq 0, \quad \langle y, \mu y - Cx - Dy \rangle = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Notons que les termes (λ, μ) doivent être strictement positifs. Nous reformulons le système ci-dessus pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse $\Phi : \mathbb{R}^{2(n+m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n+m+1)}$ définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, u, y, v, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, u_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, u_n) \\ \phi(y_1, v_1) \\ \vdots \\ \phi(y_m, v_m) \\ \lambda x - Ax - By - u \\ \mu y - Cx - Dy - v \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \langle \mathbf{1}_m, y \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ensuite, nous présentons la méthode LPM pour résoudre le système (9) où la fonction $\Phi_{\text{LPM}} : \mathbb{R}^{2(n+m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n+m+1)}$ est donnée par

$$\Phi_{\text{LPM}}(z) = \begin{bmatrix} u^+ - \lambda x \\ Ax + By - u \\ v^+ - \mu y \\ Cx + Dy - v \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \langle \mathbf{1}_m, y \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Nous confirmons l'efficacité de LPM en présentant une expérience numérique de bi-PCVP. Par ailleurs, nous comparons LPM avec une nouvelle technique appelée *squaring technique* et l'utilisation de l'itération de la méthode de Newton classique. Cette technique permet d'enlever les contraintes de positivité en introduisant le changement de variables suivant

$$x = u^{[2]} = u \odot u, \quad (12)$$

$$y = v^{[2]} = v \odot v, \quad (13)$$

où \odot représente l'opération binaire sur \mathbb{R}^n donnée par $a \odot b = a_i b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Le test évalue la robustesse de LPM en présentant les profils de performance de deux méthodes pour les mêmes critères de comparaison utilisés précédemment.

Enfin, nous terminons ce chapitre par la comparaison de LPM avec la généralisation de la méthode de Newton semi-lisse. Nous parlons du “solveur Path” [31]. Les résultats numériques confirment la robustesse de LPM.

Chapitre 3 : Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Contraint par le Cône du Second-Ordre

Ce chapitre est le sujet de l'article soumis [1], en collaboration avec S. Adly.

Nous avons vu au chapitre précédent comment résoudre le problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP de Pareto en proposant la nouvelle méthode LPM. Dans ce chapitre, nous montrons l'efficacité de cette méthode, qui est l'un de nos objectifs majeurs, en l'étendant au problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre

$$(\text{SOCEiCP}) \begin{cases} \text{Trouver un scalaire } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et un vecteur } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ satisfaisant} \\ x \in \mathcal{K}, Ax - \lambda x \in \mathcal{K}, \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0, \end{cases} \quad (14)$$

où $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ est le produit cartésien des cônes de second-ordre

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_r}, \quad (15)$$

avec $n_1, \dots, n_r \geq 1$, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ et $\mathcal{K}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ étant la n_i -dimensionnelle du cône de second-ordre SOC défini par

$$\mathcal{K}^{n_i} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i-1} : x_1 \geq \|x_2\|\}. \quad (16)$$

SOCEiCP est considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles à résoudre et ceci revient à la structure du spectre de Lorentz qui n'est pas toujours discret. Dans [112], Seeger et Torki ont étudié les propriétés essentielles et principales et la structure du tel spectre. Ils ont montré que le spectre de Lorentz n'est pas nécessairement fini, mais il peut être toujours écrit comme l'union d'un nombre fini d'ensembles connexes mutuellement disjoints [112, Théorème 4.1 et Corollaire 4.4].

Dans le but d'étendre la méthode LPM, nous allons réécrire SOCEiCP sous la forme

$$(\text{PCVPL}) \begin{cases} \text{Trouver un scalaire } \lambda > 0 \text{ et un vecteur } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ satisfaisant} \\ x \in \mathcal{K}, \lambda x - Ax \in \mathcal{K}, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0, \end{cases} \quad (17)$$

où PCVPL désigne le problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz. Ensuite, en nous basant sur les fonctions de complémentarité de second-ordre (fonctions SOCC) associées au cône \mathcal{K}^n , $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = 0 \iff x \in \mathcal{K}^n, y \in \mathcal{K}^n, \langle x, y \rangle = 0, \quad (18)$$

nous reformulons PCVPL pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, y, \lambda) := \begin{bmatrix} \varphi^1(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi^r(x_r, y_r) \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Par ailleurs, nous généralisons la méthode LPM pour résoudre PCVPL qui nous conduit à résoudre un système non-linéaire et semi-lisse

$$\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) := \begin{bmatrix} P_{\mathcal{K}}(\tilde{y}) - \lambda x \\ Ax - \tilde{y} \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2n+1}}, \quad (20)$$

où $P_{\mathcal{K}}(\cdot)$ désigne la projection sur le cône du second-ordre \mathcal{K} .

Une autre contribution de ce chapitre est l'étude des conditions de la non-singularité de la matrice Jacobienne de SNM pour résoudre PCVPL.

Finalement, nous évaluons la méthode LPM en abordant des simulations numériques basées sur les profils de performances. Nous nous sommes intéressés aux temps de calcul, nombre d'évaluations des fonctions et nombre d'échecs en tant que mesures de performance. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de notre méthode.

Chapitre 4 : Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Stochastiques

Ce chapitre est le sujet de l'article en préparation [2], en collaboration avec S. Adly.

De nombreux problèmes pratiques peuvent impliquer certains facteurs aléatoires et des données incertaines dans certains éléments de problèmes de complémentarité non-linéaires NCP. Pour cette raison, nous abordons, dans ce chapitre, le cas stochastique du problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP. Nous divisons ce travail en deux parties : la première est consacrée au cas du cône de Pareto et la deuxième partie présente le cas du cône de Lorentz.

Dans un premier temps, nous étudions le cas stochastique de PCVP au sens de Pareto noté par StocPCVP et qui consiste à trouver $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tels que

$$x \geq 0, F(x, \lambda, \omega_k) := \lambda x - A(\omega_k)x \geq 0, \langle x, F(x, \lambda, \omega_k) \rangle = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, m, \quad m > 1, \quad (21)$$

où (Ω, F, \mathcal{P}) est un espace de probabilité avec Ω ne dispose qu'un nombre fini d'éléments $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ et $A(\omega) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

En outre, résoudre (21) est équivalent à résoudre le problème suivant

$$x \geq 0, \lambda x - \bar{A}x \geq 0, \langle x, \lambda x - \bar{A}x \rangle = 0, \quad (22)$$

$$\lambda x - A(\omega_k)x \geq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (23)$$

où $\bar{A} = \sum_{k=1}^m A(\omega_k)p_k$.

En introduisant la variable d'écart $\nu = [\nu_{.1}, \nu_{.2}, \dots, \nu_{.m}] \in \mathbb{R}^{nm}$, où $\nu_{.i} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, et en utilisant les fonctions NCP, nous reformulons (21) au système semi-lisse suivant

$$\Psi(z) = \Psi(x, y, \lambda, \nu_{.1}, \nu_{.2}, \dots, \nu_{.m}) := \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, y_n) \\ \lambda x - \bar{A}x - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \lambda x - A(\omega_1)x - \nu_{.1} \\ \lambda x - A(\omega_2)x - \nu_{.2} \\ \vdots \\ \lambda x - A(\omega_m)x - \nu_{.m} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n(m+2)+1}}. \quad (24)$$

En tenant compte du chapitre 2, nous étudions sous quelles conditions tous les éléments des Jacobiennes généralisées de Clarke de Ψ sont inversibles en une solution z^* .

Dans un second temps, nous traitons le problème stochastique de complémentarité aux valeurs propres au sens du cône de second-ordre

$$(\text{StocPCVPL}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \in \mathcal{K}, \quad F(x, \lambda, \omega_k) := \lambda x - A(\omega_k)x \in \mathcal{K}, \quad \langle x, F(x, \lambda, \omega_k) \rangle = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \quad m > 1. \end{cases} \quad (25)$$

En nous basant sur StocPCVP de Pareto, nous reformulons StocPCVPL pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse Ψ^{soc} . De plus, nous généralisons les conditions de la non-singularité données dans le chapitre 3 au cas stochastique. Enfin, nous reformulons un tel problème pour trouver une solution globale d'un problème de minimisation.

Chapitre 5 : Problème Inverse de Complémentarité aux Valeurs Propres de Pareto

Pour clore ce mémoire, nous étudions, dans ce chapitre, le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto

$$(\text{IPEiCP}) \begin{cases} x_k \geq 0, \quad Ax_k - \lambda_k x_k \geq 0, \quad \langle x_k, Ax_k - \lambda_k x_k \rangle = 0, \\ \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle = 1, \end{cases} \quad (26)$$

où $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ est un ensemble donné de nombres réels distincts et strictement positifs et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Les variables inconnues sont les coefficients de la matrice A et les composantes des vecteurs $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$. Nous notons l'ensemble de solution de (26) par

$$S_n(\Lambda) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \Lambda \subset \sigma(A)\}, \quad (27)$$

où $\sigma(A)$ désigne le spectre de Pareto de A .

En nous basant sur les travaux de Seeger et Gajardo [41], nous étudions l'ensemble de solutions de IEiCP si $\tau_n = p \leq n(n+1)/2$. Dans ce cas, $S_n(\Lambda)$ peut contenir au moins $n!C_2^n$ éléments. Si $p < \tau_n$, alors $S_n(\Lambda)$ est un ensemble non-dénombrable et non-borné. Les matrices obtenues sont alors dites canoniques. Par ailleurs, nous illustrons le cas non-canonique, tout en décrivant la technique de mise au carré de l'approche régulière pour enlever les contraintes de positivité de IEiCP. Elle consiste à introduire le changement de variables

$$\begin{cases} x_k = u_k^{[2]} = u_k \odot u_k, \\ y_k = v_k^{[2]} = v_k \odot v_k. \end{cases} \quad (28)$$

Pour des raisons analogues aux chapitres précédents, nous allons réécrire le problème IPEiCP sous la forme

$$(\text{PICVP}) \begin{cases} x_k \geq 0, \quad \lambda_k x_k - Ax_k \geq 0, \quad \langle x_k, \lambda_k x_k - Ax_k \rangle = 0, \\ \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle = 1. \end{cases} \quad (29)$$

Notons que (29) peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = F(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, A_1, \dots, A_n) = \begin{bmatrix} u_1 \odot v_1 \\ \vdots \\ u_p \odot v_p \\ (\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)u_1^{[2]} - v_1^{[2]} \\ \vdots \\ (\lambda_p \mathbf{I}_n - A)u_p^{[2]} - v_p^{[2]} \\ \|u_1\|^2 - 1 \\ \vdots \\ \|u_p\|^2 - 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2pn+p}}, \quad (30)$$

où A_i , $i = 1, \dots, n$ représentent les colonnes de la matrice A et $F : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ est une fonction vectorielle différentiable.

Nous présentons, en outre, l'approche non-régulière tout en décrivant la technique de la fonction de complémentarité. Cette technique se base sur la fonction Fischer-Burmeister

$$\varphi(x, y) = x + y - [x^{[2]} + y^{[2]}]^{[1/2]}, \quad (31)$$

où $w^{[1/2]} = (\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})^T$. Le modèle considéré consiste alors à trouver les zéros de la fonction semi-lisse

$$F(z) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_p, y_p) \\ (\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)x_1 - y_1 \\ \vdots \\ (\lambda_p \mathbf{I}_n - A)x_p - y_p \\ \langle \mathbf{1}_n, x_1 \rangle - 1 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, x_p \rangle - 1 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

qui est ensuite utilisée dans l'algorithme semi-lisse de flux normal SNFA.

Par ailleurs, nous proposons, une nouvelle méthode basée sur LPM introduite dans le chapitre 2 de ce travail, appelée *Inverse Lattice Projection Method* ILPM. Nous reformulons alors PICVP pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse

$$F_{\text{ILPM}}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^+ - \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_p^+ - \lambda_p x_p \\ Ax_1 - \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ Ax_p - \tilde{y}_p \\ \langle \mathbf{1}_n, x_1 \rangle - 1 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, x_p \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Enfin, nous effectuons une première expérience numérique pour tester l'efficacité de notre méthode. Nous comparons ILPM avec les algorithmes lisse et semi-lisse de flux normal NFA

et SNFA en utilisant les profils de performance comme un outil de comparaison. Nous nous intéressons au temps de calcul et au nombre d'échecs pour détecter les solutions par chaque solveur en tant que mesures de performance.

Nous terminerons enfin par une synthèse de différents apports et contributions de cette thèse, et les perspectives qui peuvent s'en dégager.

Notions Générales

Sommaire

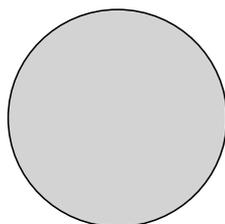
1.1 Convexité	19
1.1.1 Ensembles convexes et cônes	19
1.1.2 Fonctions convexes	22
1.2 Problème d'inéquation variationnelle	23
1.3 Différentiabilité et sous-différentiabilité	25
1.3.1 Différentiels généralisés	26
1.4 Fonctions semi-lisses	27
1.4.1 Exemples des fonctions semi-lisses	28
1.5 Cône du second-ordre (cône de Lorentz)	29
1.5.1 Factorisation spectrale	31
1.6 Problème de complémentarité aux valeurs propres	32
1.6.1 Problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP : cas symétrique . .	35
1.6.2 Problème de complémentarité aux valeurs propres : cas asymétrique APCVP	39
1.6.3 Méthode de Newton semi-lisse SNM	41

Nous rassemblons dans ce chapitre les outils mathématiques utilisés tout au long de ce travail. En particulier, nous allons présenter des définitions et propriétés de l'analyse convexe ainsi que les notions de différentiabilité, de sous-différentiabilité et les inéquations variationnelles qui nous seront utiles par la suite. De plus, nous rappelons la notion des fonctions semi-lisses. Pour plus de détails sur ces outils, le lecteur pourra se référer aux ouvrages [50, 83, 109]. La dernière partie est consacrée au problème de complémentarité aux valeurs propres où nous effectuons un état de l'art sur ce sujet.

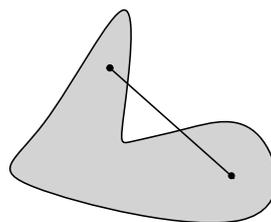
1.1 Convexité

1.1.1 Ensembles convexes et cônes

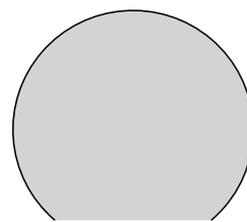
Définition 1.1.1. *Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit ensemble convexe si, pour tout x, y dans C et pour tout λ dans l'intervalle $[0, 1]$, le point $(1 - \lambda)x + \lambda y$ est dans C .*



Ensemble convexe



Ensemble non-convexe



Ensemble non-convexe

FIGURE 1.1 – Exemples des ensembles convexes et non convexes.

D'une autre manière,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda C + (1 - \lambda)C \subset C.$$

On appelle *enveloppe convexe* (respectivement *enveloppe convexe fermée*) de C , notée par $\text{co}(C)$ (resp. $\bar{\text{co}}(C)$), le plus petit ensemble convexe (respectivement ensemble convexe fermé) contenant C .

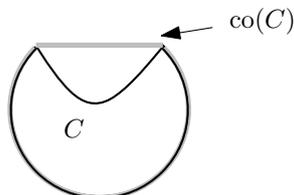


FIGURE 1.2 – Exemple d'un enveloppe convexe.

Remarque 1.1.1. En général, $\text{co}(C)$ n'est pas un ensemble fermé. De plus, si C est convexe et fermé, alors $\text{co}(C) = C$ et réciproquement. D'autre part, si C est borné (respectivement compact), alors $\text{co}(C)$ est borné (respectivement compact).

Définition 1.1.2. Soit K un sous ensemble non vide de \mathbb{R}^n . K est un cône convexe si

- $\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0$, on a $\lambda x \in K$.
- $\forall u, v \in K, u + v \in K$.

Autrement dit, K est un cône convexe si et seulement si

$$\mathbb{R}_+ K \subset K \text{ et } K + K \subset K.$$

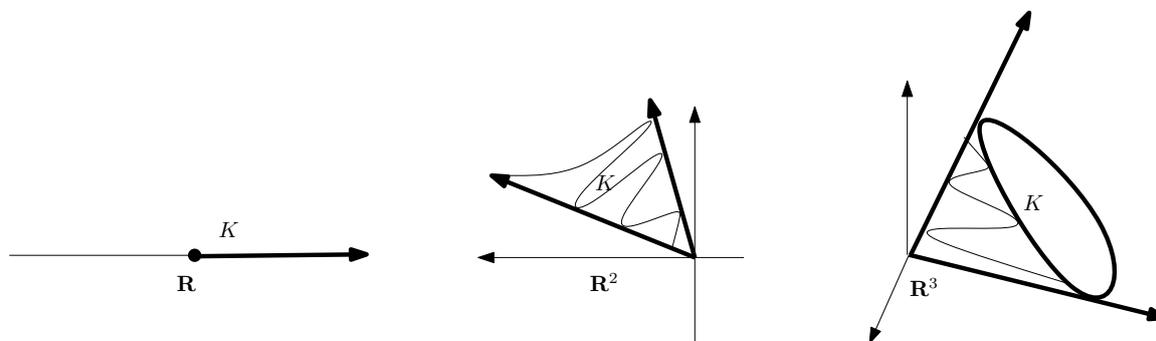


FIGURE 1.3 – Exemples des cônes convexes.

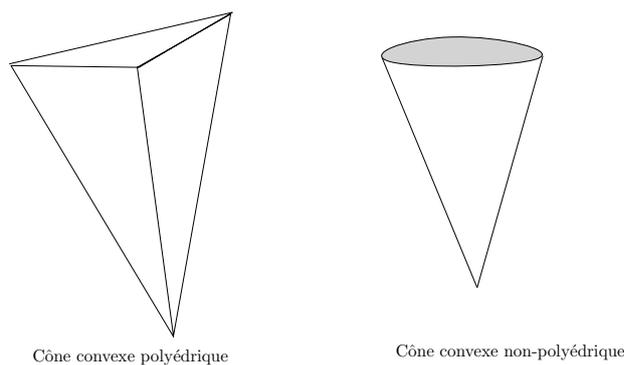


FIGURE 1.4 – Exemple des cônes polyédrique et non-polyédrique.

Définition 1.1.3. Soit K un cône convexe de \mathbb{R}^n . On définit le cône polaire de K par

$$K^\circ = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\}$$

et le cône dual de K par

$$K^+ = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}.$$

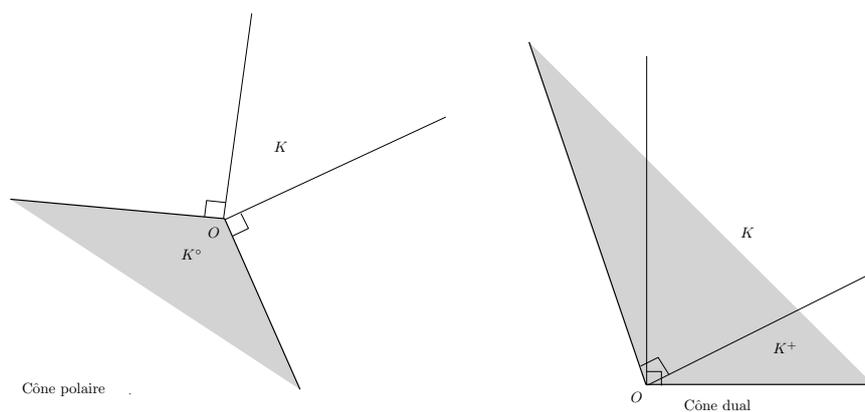


FIGURE 1.5 – Exemples des cônes polaire et dual.

Remarquons que le cône dual est toujours un cône convexe même si K n'est ni convexe, ni un cône. Il est facile de vérifier que $K^\circ = -K^+$ pour tout ensemble K de \mathbb{R}^n .

Pour terminer, on appelle *cône normal* de K au point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble défini par

$$N_K(\bar{x}) = \begin{cases} \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in K\} & \text{si } \bar{x} \in K, \\ \emptyset & \text{si } \bar{x} \notin K. \end{cases}$$

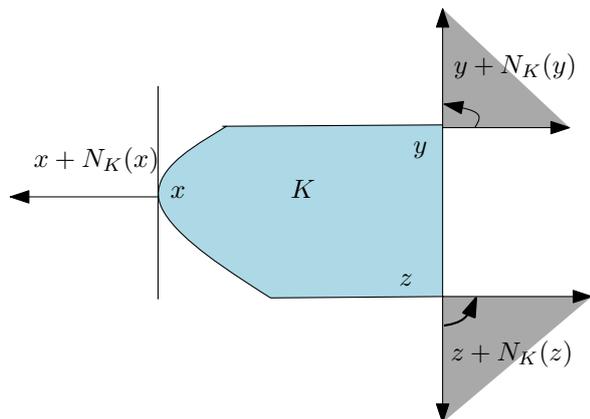


FIGURE 1.6 – Cône normal.

1.1.2 Fonctions convexes

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction arbitraire.

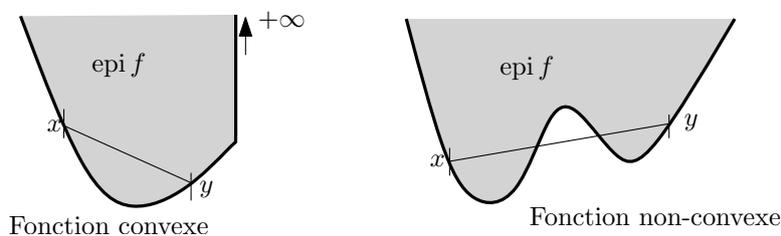
Nous appelons *épigraphe* de la fonction f , l'ensemble noté par

$$\text{epi } f = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\}.$$

Nous notons par

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}$$

le domaine de la fonction f .

FIGURE 1.7 – L'épigraphe de f .

Définition 1.1.4. (a) La fonction f est dite convexe si pour tout $x, y \in \text{dom } f$, nous avons

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ pour tout } \lambda \in]0, 1[.$$

(b) La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour tout $x \neq y$.

(c) Elle est dite fortement convexe de module $\varepsilon > 0$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \frac{1}{2}\varepsilon\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

Exemple 1.1.1. Il est évident que toute fonction fortement convexe est strictement convexe, et toute fonction strictement convexe est convexe. Par exemple, une fonction linéaire est convexe mais non strictement convexe. La fonction $f(x) = e^x$ est strictement convexe, mais pas fortement convexe, et $f(x) = x^2$ est fortement convexe.

Remarque 1.1.2. La Convexité joue un rôle crucial dans le domaine de l'optimisation. En particulier, si les fonctions g_1, \dots, g_m et φ dans le problème d'optimisation

$$\min \varphi(x) \quad \text{tel que } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

sont convexes, alors tout minimum local de ce problème est un minimum global.

1.2 Problème d'inéquation variationnelle

Dans cette section, nous allons présenter le problème d'inéquation variationnelle (IV) [90, 91]. Les premiers travaux impliquant une inéquation variationnelle étaient le problème de Signorini, posés par Antonio Signorini en 1959 et résolus par Gaetano Fichera en 1963. Aujourd'hui, cette théorie est devenue plus importante et plus attrayante. Son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré fructueux dans de nombreux domaines comme la mécanique unilatérale, l'économie mathématique, les sciences de l'ingénieur, la mécanique classique, etc. Plus récemment, elle est devenue une des méthodes essentielles pour l'étude des problèmes d'équilibre. Nous citons quelques références [85, 120]. Le cône normal joue un rôle important dans l'étude de IV. Ce dernier est utilisé dans de nombreux problèmes provenant de la programmation mathématique comme les systèmes non-linéaires, les problèmes d'optimisation, les problèmes de complémentarité.

Définition 1.2.1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, convexe et non-vide et $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle Inéquation Variationnelle (IV) tout problème de la forme

$$\text{IV}(F, C) \begin{cases} \text{trouver } x^* \in C \text{ tel que} \\ \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C, \end{cases} \quad (1.1)$$

où d'une manière équivalente

$$\text{NCI} \begin{cases} \text{trouver } x^* \in C \text{ tel que} \\ 0 \in F(x^*) + N_C(x^*), \\ \text{c-à-d } -F(x^*) \in N_C(x^*), \end{cases} \quad (1.2)$$

où NCI représente l'inclusion du type cône normal, "normal cone inclusion".

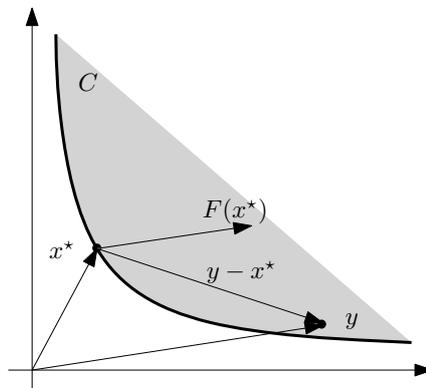


FIGURE 1.8 – Interprétation géométrique de $\text{IV}(F, C)$.

Remarque 1.2.1. L'existence et l'unicité de la solution du problème $IV(F, C)$ dépendent des propriétés de la fonction F et l'ensemble C . Par exemple, si F est continue et C est compact alors le problème $IV(F, C)$ admet au moins une solution.

Dans la suite, nous allons illustrer des exemples pouvant être formulés comme un problème $IV(F, C)$.

Exemple 1.2.1.

Le problème de trouver la valeur minimale d'une fonction à valeurs réelles :

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On note F' la dérivée de F . On suppose qu'une solution x^* minimise F dans l'intervalle $[0, 1]$. Trois cas peuvent apparaître :

1. Si $0 < x^* < 1$, alors $F'(x^*) = 0$.
2. Si $x^* = 0$, alors $F'(x^*) \geq 0$.
3. Si $x^* = 1$, alors $F'(x^*) \leq 0$.

Ces trois conditions peuvent être résumées comme

$$IV(F, [0, 1]) : F'(x^*)(x - x^*) \geq 0, \forall x \in [0, 1],$$

c'est-à-dire

$$-F'(x^*) \in N_{[0,1]}(x^*).$$

La figure suivante illustre cette condition nécessaire.

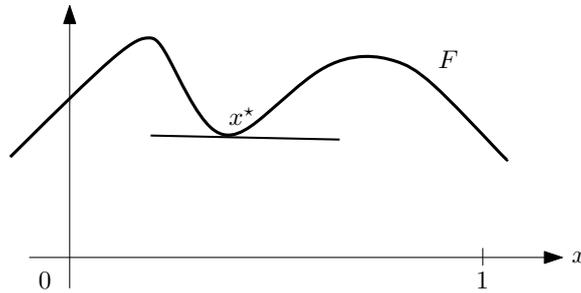


FIGURE 1.9 – Condition nécessaire d'un minimum.

Exemple 1.2.2.

Le problème de complémentarité non-linéaire : Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un cône convexe, fermé et non-vide et K^+ son cône dual.

On suppose que $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $\langle y, z - x \rangle \geq 0, \forall z \in K$. Ceci implique que, pour $z = 2x$, on a

$$\langle y, x \rangle \geq 0.$$

D'autre part, en posant $z = \frac{1}{2}x$, on obtient $\langle y, x \rangle \leq 0$.

D'où, $\langle y, x \rangle = 0$. Par conséquent,

$$0 \leq \langle y, z - x \rangle = \langle y, z \rangle - \langle y, x \rangle = \langle y, z \rangle, \forall z \in K.$$

Ce qui donne que $y \in K^+$.

Nous avons donc montré que si $x \in K$ et $\langle y, z - x \rangle \geq 0, \forall z \in K$, alors $x \in K$, $y \in K^+$ et $\langle y, x \rangle = 0$. La réciproque est obtenue facilement. D'où, on obtient l'équivalence suivante :

$$0 \in y + N_K(x) \quad \text{si et seulement si} \quad x \in K, y \in K^+ \quad \text{et} \quad \langle y, x \rangle = 0.$$

Cas particulier : si le cône K est l'orthant positif, $K = \mathbb{R}_+^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors on obtient l'équivalence suivante :

$$0 \in F(x^*) + N_{\mathbb{R}_+^n}(x^*) \quad \text{si et seulement si} \quad x^* \geq 0, F(x^*) \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0.$$

C'est le problème de complémentarité non-linéaire.

1.3 Différentiabilité et sous-différentiabilité

L'optimisation non-lisse est consacrée aux problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction objectif f et les contraintes ne sont pas différentiables. Nous allons nous concentrer dans la plupart de notre étude à des problèmes où f est convexe et finie partout (donc localement lipschitzienne), mais pas continûment différentiable. Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de considérer un objet spécial : le *sous-différentiel* d'une fonction f convexe, noté $\partial f(x)$, qui est un concept fondamental en analyse convexe.

Nous présentons ici une brève revue des concepts de base de calcul sous-différentiel. Plusieurs différentiels généralisés connus dans la littérature (sous-différentiel de Clarke et le B-sous-différentiel) et leurs propriétés sont considérés. Pour plus de détails, nous nous référons aux ouvrages [12, 50]. Le livre de Rockafellar [109] est une référence classique de ce domaine. Nous considérons des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. Nous appelons *dérivée directionnelle* de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$, et on note $f'(x; d)$, la limite suivante si elle existe dans \mathbb{R} :

$$f'(x; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Exemple 1.3.1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. En appliquant Définition 1.3.1, nous obtenons

$$f'(0; 1) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0; -1) = -1.$$

Définition 1.3.2. Nous appelons $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction *localement lipschitzienne* si pour tout ensemble borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

La constante k est appelée *constante de Lipschitz* de f sur Ω .

Par ailleurs, si k ne dépend pas de Ω , alors la fonction f est dite *globalement Lipschitzienne*.

Exemple 1.3.2. Toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^n . Toute fonction affine est globalement lipschitzienne. Pour un contre-exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha) := \sqrt[3]{\alpha}$ n'est pas localement Lipschitzienne.

Soit f une fonction convexe définie sur l'ensemble de \mathbb{R}^n . Alors f est continue et localement lipschitzienne. Par ailleurs, sa dérivée directionnelle $f'(x; d)$ existe pour chaque x et $d \in \mathbb{R}^n$ fixes. En conséquence, f a un gradient en x , noté par $\nabla f(x)$, presque partout. Lorsque $\nabla f(x)$ n'existe pas, le point x est appelé un *point de rebroussement*, "a kink" [12]. Même si les points de rebroussement (points non-lisses) forment un ensemble de mesure nulle, en pratique, les minimiseurs sont souvent des points de rebroussement. L'exemple le plus simple d'une fonction convexe non-différentiable est la valeur absolue qui confirme notre observation.

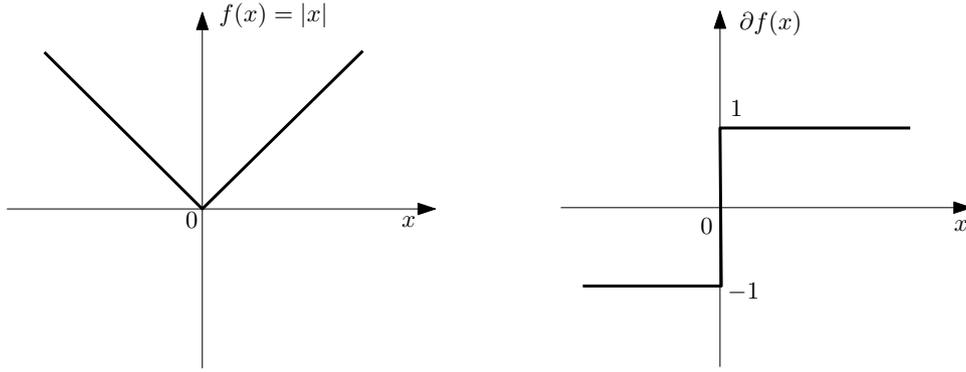


FIGURE 1.10 – Exemple d’une fonction convexe non-différentiable.

Pour décrire le comportement de la fonction près de son point de rebroussement, le concept de différentiabilité de f doit-être généralisée. Au lieu d’avoir un seul vecteur x , un certain ensemble sera associé à x . C’est le sous-différentiel de f en x :

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.3)$$

Cet ensemble est non vide, fermé, convexe et localement borné, il se réduit au singleton $\{\nabla f(x)\}$ si et seulement si f est dérivable en x . Chaque élément de $\partial f(x)$ est appelé un sous-gradient. Une définition équivalente, exprimée en termes de la dérivée directionnelle, est la suivante :

$$\partial f(x) := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq f'(x; d), \forall d \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.4)$$

Autrement dit,

$$\partial f(x) = \text{co} \left\{ \lim_{x_k \rightarrow x} \nabla f(x_k) \text{ pour tout } x_k \text{ tel que } \nabla f(x_k) \text{ et la limite existent} \right\}.$$

Cette dernière définition implique une généralisation du calcul sous-différentiel à des fonctions non-convexes, appelé le sous-différentiel de Clarke, [25].

1.3.1 Différentiels généralisés

Définition 1.3.3. [25, 92, 103] Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue Lipschitzienne près de $x \in V$. L’ensemble

$$\partial_B f(x) = \left\{ M \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists (x_k) \subset D_f : x_k \rightarrow x \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla f(x_k) = M \right\}, \quad (1.5)$$

où D_f est l’ensemble des points de différentiabilité de f , est appelé le B -sous-différentiel (“ B ” pour Bouligand) de f en x . Par ailleurs, la Jacobienne généralisée de Clarke [25] de f en x est l’enveloppe convexe

$$\partial f(x) = \text{co}(\partial_B f(x)). \quad (1.6)$$

Les sous-différentiels $\partial_B f$ et ∂f ont les propriétés suivantes.

Proposition 1.3.1. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue et localement Lipschitzienne. Alors, pour $x \in V$, nous avons

- (a) $\partial_B f(x)$ est non-vide et compact.
- (b) $\partial f(x)$ est non-vide, compact et convexe.

- (c) Les fonctions multivoques $\partial_B f$ et ∂f sont localement bornées et semi-continues supérieurement.
- (d) Si f est continûment différentiable au voisinage de x , alors

$$\partial f(x) = \partial_B f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Preuve. Les résultats pour $\partial_B f(x)$ et $\partial f(x)$ sont établis dans [25, Proposition 2.6.2]. La partie (d) découle immédiatement de la définition des sous-différentiels respectifs. ■

Exemple 1.3.3. Soit la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = |x|$, nous avons

$$\partial_B H(0) = \{-1, 1\} \text{ et } \partial H(0) = [-1, 1].$$

Ces Jacobiennes généralisées sont des prolongements naturels de la Jacobienne originale pour les fonctions différentiables. En effet, si H est continûment différentiable en x , alors on voit facilement que

$$\partial_B H(x) = \partial H(x) = \{\nabla H(x)\}.$$

Proposition 1.3.2. [25] Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^l$ deux ensembles ouverts et non-vides. Soient $g : V \rightarrow W$ une fonction continûment Lipschitzienne près de $x \in V$, et $h : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ continûment Lipschitzienne près de $g(x)$. Alors, $f = h \circ g$ est continûment Lipschitzienne près de x et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\partial f(x)v \subset \text{co}(\partial h(g(x))\partial g(x)v) = \text{co}\{M_h M_g v : M_h \in \partial h(g(x)), M_g \in \partial g(x)\}.$$

Si, en outre, h est continûment différentiable à proximité de $g(x)$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f(x)v = \nabla h(g(x))\partial g(x)v.$$

1.4 Fonctions semi-lisses

Nous donnons maintenant un aperçu sur l'organisation de cette section. Nous allons rappeler des résultats importants de l'analyse non-lisse : les fonctions semi-lisses (semi-régulières) et donner des exemples importants pour telles fonctions.

La notion de *semi-lisse*, "semismoothness", a été introduite par Mifflin [82] pour les fonctions réelles définies sur des espaces de dimension finie, et étendue aux fonctions entre les espaces de dimension infinie par Qi [98] et Qi et Sun [103].

En utilisant le sous-différentiel et la dérivée directionnelle, nous définissons la semi-régularité et la semi-régularité forte, qui jouent un rôle crucial dans l'établissement de la convergence rapide des méthodes de type Newton pour les fonctions non-lisses. Surtout, la semi-régularité est liée à la convergence superlinéaire et la semi-régularité forte est liée à la convergence quadratique.

Définition 1.4.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et non-vide.

La fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite semi-lisse en $x \in U$, connue en littérature sous le nom semismooth, si f est directionnellement différentiable, localement Lipschitzienne près de x et

$$V^T d - f'(x; d) = o(\|d\|)$$

pour tout $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ suffisamment petit et $V \in \partial f(x + d)$. Par ailleurs, si $o(\|d\|)$ peut-être remplacé par $O(\|d\|^2)$, alors la fonction f est dite fortement semi-lisse.

Notons que $o(\|h\|)$ signifie une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaisant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0,$$

alors que $O(\|h\|^2)$ représente une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaisant

$$\|\alpha(h)\| \leq c\|h\|^2, \text{ pour tout } \|h\| \leq \delta,$$

pour des constantes $c > 0$ et $\delta > 0$.

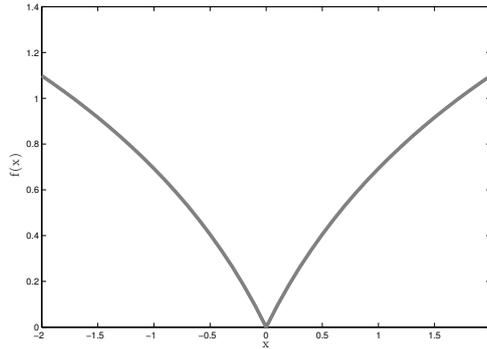


FIGURE 1.11 – Exemple d'une fonction semi-lisse : $f(x) = \ln(1 + |x|)$.

Proposition 1.4.1. [120] Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction donnée. Soit $\bar{x} \in V$.

- (a) Si f est continûment différentiable au voisinage de $\bar{x} \in V$, alors f est semi-lisse en \bar{x} .
- (b) Si f est continûment différentiable avec un gradient continu Lipschitzien au voisinage de $\bar{x} \in V$, alors f est fortement semi-lisse en \bar{x} .
- (c) Si f est convexe au voisinage de \bar{x} , alors f est semi-lisse en \bar{x} .

Proposition 1.4.2. La fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est semi-lisse en $x \in V$ si et seulement si ses composantes sont semi-lisses en x .

1.4.1 Exemples des fonctions semi-lisses

1. Norme euclidienne $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2 = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$ est un exemple important d'une fonction semi-lisse qui se pose, par exemple, comme la partie non-lisse de la fonction de Fischer-Burmeister. f est évidemment une fonction Lipschitzienne dans \mathbb{R}^n et elle est C^∞ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avec

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

De plus, nous avons

$$\partial f(x) = \partial_B f(x) = \left\{ \frac{x}{\|x\|_2} \right\}, \text{ pour } x \neq 0,$$

et

$$\partial_B f(0) = \left\{ v : v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1 \right\} \quad \text{et} \quad \partial f(0) = \left\{ v : v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 \leq 1 \right\}.$$

2. Fonction Fischer-Burmeister $\varphi_{\text{FB}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

est une fonction semi-lisse. On peut facilement voir que φ_{FB} est la différence de la fonction linéaire $g(x) = x_1 + x_2$ et la norme euclidienne $f(x) = \|x\|_2$. De plus, pour $x \neq 0$, on a

$$\partial_B \varphi_{\text{FB}}(x) = \nabla g(x) - \partial_B f(x) = \partial \varphi_{\text{FB}}(x) = \nabla g(x) - \partial f(x) = \left\{ (1, 1)^T - \frac{x}{\|x\|_2} \right\}$$

et

$$\partial_B \varphi_{\text{FB}}(0) = \left\{ (1, 1)^T - v : \|v\|_2 = 1 \right\} \quad \text{et} \quad \partial \varphi_{\text{FB}}(0) = \left\{ (1, 1)^T - v : \|v\|_2 \leq 1 \right\}.$$

3. Fonctions Différentiables (régulières) par morceaux : Toute fonction différentiable par morceaux¹ est semi-lisse. En outre, Toute fonction différentiable par morceaux est fortement semi-régulière si toutes les dérivées des ses composantes régulières sont localement Lipschitziennes.

1.5 Cône du second-ordre (cône de Lorentz)

Soit \mathcal{K} le produit cartésien des cônes de second-ordre dans \mathbb{R}^n , définie par

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_r},$$

avec $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ et $\mathcal{K}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ la n_i -dimensionnelle du cône de second-ordre (SOC), appelé aussi le cône de Lorentz, définie par

$$\mathcal{K}^{n_i} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i-1} : x_1 \geq \|x_2\|\}, \quad (1.7)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne définie par $\|x\| := \sqrt{x^T x}$ pour un vecteur x .

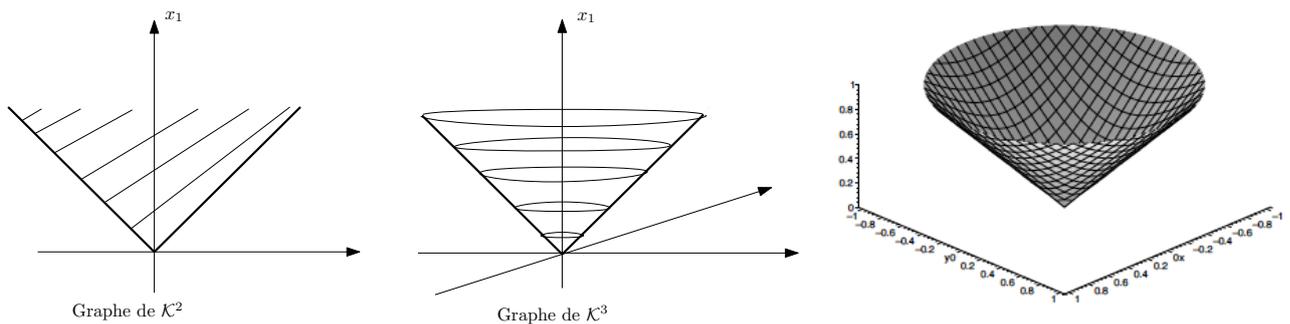


FIGURE 1.12 – Exemples des cônes de Lorentz.

\mathcal{K} est auto-dual, c'est-à-dire, $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}$. Une large gamme d'applications en ingénierie, science de gestion, ... peut être trouvée dans des problèmes d'optimisation avec des contraintes de cône du second ordre [76]. Dans cette section, nous allons rappeler certains aspects du contexte et des résultats préliminaires sur les algèbres de Jordan euclidiennes qui fournissent une méthodologie

1. une fonction $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite lisse par morceaux en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un nombre fini de fonctions continûment différentiables $H_i : \mathbb{B}(x, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($i = 1, \dots, N$) tel que pour tout $x^* \in \mathbb{B}(x, \varepsilon)$, il existe un indice i tel que $H(x^*) = H_i(x^*)$, où $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ désigne la sphère de centre x et de rayon ε .

utile pour SOC. Pour plus de détails, voir [36, 64].

Pour deux vecteurs de dimension n , $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, nous définissons leurs produits de Jordan par

$$x \circ y := (x^T y, x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (1.8)$$

Nous notons $x \circ x$ par x^2 et le vecteur d'identité dans ce produit par

$$e := (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Nous rappelons maintenant quelques propriétés de l'algèbre de Jordan.

Propriétés 1.5.1. *Pour x, y et $z \in \mathbb{R}^n$, on a*

1. $e \circ x = x$,
2. $x \circ y = y \circ x$,
3. $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$,
4. $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$.

Notons que le produit de Jordan “ \circ ” n'est pas associatif en général, c'est-à-dire,

$$x \circ (y \circ z) \neq (x \circ y) \circ z.$$

Par exemple, soit $n = 3$ et $x = (2, -1, 2)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$, alors, on obtient

$$(x \circ y) \circ z = (3, 3, 4) \neq x \circ (y \circ z) = (3, 1, 4).$$

Propriétés 1.5.2. (associés au cône de Lorentz)

(a) *Le cône de second order \mathcal{K}^n n'est pas fermé pour le produit de Jordan.*

Par exemple, soit

$$x = (\sqrt{3}, -1, 1) \in \mathcal{K}^3 \quad \text{et} \quad y = (\sqrt{3}, 1, 1) \in \mathcal{K}^3.$$

Alors, on a

$$x \circ y = (3, 0, 2\sqrt{3}) \notin \mathcal{K}^3.$$

(b) *Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, le déterminant de x est défini par*

$$\det(x) = x_1^2 - \|x_2\|^2, \quad (1.9)$$

et on a, en général, $\det(x \circ y) \neq \det(x)\det(y)$, sauf si $x_2 = y_2$.

(c) *Pour $x \in \mathcal{K}^n$, on définit la matrice symétrique, appelée aussi la transformation de Lyapunov, par*

$$L_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2^T \\ x_2 & x_1 I_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Il est facile de vérifier que $L_x y = x \circ y$, pour tout $y \in \mathcal{K}^n$.

En outre, L_x est définie positive (et donc inversible) si et seulement si

$$x \in \text{int}(\mathcal{K}^n),$$

où

$$\text{int}(\mathcal{K}^n) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 > \|x_2\|\}.$$

Dans ce cas, la matrice inverse L_x^{-1} est donnée par

$$L_x^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^T \\ -x_2 & \frac{\det(x)}{x_1} I_{n-1} + \frac{x_2 x_2^T}{x_1} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

1.5.1 Factorisation spectrale

Une caractéristique importante de l'algèbre de Jordan est sa *décomposition propre*, appelée également *la factorisation spectrale* par rapport au cône du second-ordre. Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement quelques propriétés de cette décomposition de SOC. Pour plus de détails, voir [36, 40].

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, sa factorisation spectrale est définie par

$$x = \lambda_1(x)u^{(1)}(x) + \lambda_2(x)u^{(2)}(x), \quad (1.12)$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ sont les valeurs spectrales et les vecteurs spectraux associés du vecteur x , donnés respectivement, par

$$\lambda_i(x) = x_1 + (-1)^i \|x_2\|, \quad i = 1, 2, \quad (1.13)$$

et

$$u^{(i)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1, (-1)^i \frac{x_2}{\|x_2\|}), & \text{si } x_2 \neq 0, \\ \frac{1}{2}(1, (-1)^i w), & \text{si } x_2 = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (1.14)$$

avec $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, tel que $\|w\| = 1$. Pour plus de détails, voir [6].

Nous rappelons maintenant les principales propriétés de la factorisation spectrale d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Propriétés 1.5.3. (a) $x^2 = \lambda_1^2(x)u^{(1)}(x) + \lambda_2^2(x)u^{(2)}(x) \in \mathcal{K}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\lambda_1, \lambda_2, u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont, respectivement, donnés par (1.13) et (1.14),

(b) Si $x \in \mathcal{K}^n$, alors $x^{1/2} = \sqrt{\lambda_1(x)}u^{(1)}(x) + \sqrt{\lambda_2(x)}u^{(2)}(x) \in \mathcal{K}^n$.

Avant de passer à la section suivante, nous rappelons les concepts suivants.

Définition 1.5.1. Soit A une matrice réelle d'ordre n .

1. A est une matrice copositive (C) si $x^T Ax \geq 0, \forall x \geq 0$.
2. A est strictement copositive (SC) si $x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.
3. A est une P -matrice si ses mineurs principaux sont strictement positifs. (Nous rappelons que les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices principales).
4. A est une P_0 -matrice si ses mineurs principaux sont positifs.
5. A est une Z -matrice si tous ses éléments extra-diagonaux sont négatifs, c'est-à-dire,

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ avec } i \neq j, \text{ on a } A_{ij} \leq 0.$$

6. A est une S -matrice s'il existe $x \geq 0$ tel que $Ax > 0$.

1.6 Problème de complémentarité aux valeurs propres

Soit $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ est un cône convexe fermé}\}$, A et B deux matrices réelles d'ordre n et B est définie positive. Le problème de complémentarité aux valeurs propres, connu en littérature sous le nom, *Eigenvalue Complementarity Problem* EiCP, reste toujours une zone intensément étudiée à la fois sur les plans théorique et numérique et est défini par : Trouver $\lambda \in \mathbb{R}, x \in K$, tels que

$$x \in K, \quad Ax - \lambda Bx \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda Bx \rangle = 0.$$

Le spectre de (A, B) par rapport à K , noté par $\sigma(A, B, K)$, est l'ensemble des valeurs propres qui sont définies par le système de complémentarité ci-dessus. Si B est la matrice identité, alors nous notons le spectre de (A, B) par $\sigma(A, K)$. Plusieurs problèmes posés dans divers domaines, tels que la programmation mathématique, la théorie des jeux, l'équilibre économique, mécanique, l'étude des états d'équilibre statiques des systèmes mécaniques avec frottement unilatérale [94], ... peuvent être exprimés comme :

$$(\text{EiCP}) : \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ t.q. } \begin{cases} y = (A - \lambda B)x, \\ y \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y^T x = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où $y \in \mathbb{R}^n$, $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et B est définie positive. C'est le problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP avec K étant l'orthant positif \mathbb{R}_+^n .

Le système EiCP est apparu par Seeger dans [111] et par Lavilledieu et Seeger dans [69]. D'autres formulations légèrement différentes (inégalité variationnelle) sont apparues beaucoup plutôt dans les ouvrages de Riddel [107] en 1977 sur les inégalités variationnelles elliptiques non linéaire sur un cône, Kúcera [67, 68], et Quittner [105] sur l'analyse de bifurcation des valeurs propres par rapport à un cône. Queiroz et al. [104] et Júdice et al. [56] ont récemment étudié le problème EiCP.

Dans cette partie du chapitre, nous allons rassembler quelques résultats et propriétés du problème EiCP et composer ce problème en deux grandes catégories : la première est le cas symétrique c-à-d lorsque A et B sont deux matrices symétriques et la deuxième est le cas asymétrique.

Existence de K-valeurs propres

Définition 1.6.1. [111] Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. La valeur réelle λ est appelée *K-valeur propre* de A s'il existe un vecteur propre non nul $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0. \quad (1.16)$$

Proposition 1.6.1. [112] Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Le spectre $\sigma(A, K)$ est non-vide si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (a) A est une matrice symétrique, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et $K \neq \{0\}$.
- (b) K n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- (c) K est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension impaire.

Remarque 1.6.1. Comme mentionné dans [112], si K est un sous-espace vectoriel de dimension $d \in \{1, \dots, n\}$, alors EiCP(A, \mathbf{I}_n) devient un problème aux valeurs propres usuel.

En effet, soient $\{c_1, \dots, c_d\} \subset \mathbb{R}^n$ une base de K et C la matrice définie par $C := \{c_1, \dots, c_d\}$. Alors,

$$\forall x \in K, x = \sum_{i=1}^d \alpha_i c_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \iff K = \text{Im}(C).$$

Cependant

$$\begin{aligned} p \in K^+ &\iff \langle p, y - x \rangle \geq 0, \forall y \in K, \\ &\iff \langle p, Cu - Cx_1 \rangle \geq 0, \forall u, x_1 \in \mathbb{R}^d, \\ &\iff \langle C^T p, u - x_1 \rangle \geq 0, \forall u, x_1 \in \mathbb{R}^d, \\ &\iff C^T p = 0, \text{ pour } u \neq x_1, \\ &\iff p \in \text{Ker}(C^T). \end{aligned}$$

D'où,

$$K^+ = \text{Ker}(C^T).$$

Par suite, (1.16) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ ACu - \lambda Cu \in \text{Ker}(C^T). \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons

$$\sigma(A, K) = \sigma(A, \text{Im}(C)) = \sigma(A_C, \mathbb{R}^d),$$

avec

$$A_C := (C^T C)^{-1} C^T A C \in M_d.$$

Exemple 1.6.1. Soit $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ un sous-espace de \mathbb{R}^4 et $\dim(K) = 3 = d$.

L'ensemble $\{(1, 0, 0, -1)^T, (1, -1, 0, 0)^T, (1, 0, -1, 0)^T\}$ forme évidemment une base de K . Dans ce cas, C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Nous avons,

$$\sigma(A, \text{Im}(C)) = \sigma(A_C, \mathbb{R}^3)$$

avec

$$A_C = (C^T C)^{-1} C^T A C = \begin{pmatrix} -3 & -2.5 & -1.5 \\ -1 & 0.5 & -1.5 \\ 2 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

A_C admet une valeur propre réelle $\lambda = 1.4888$, alors un vecteur propre réel

$$u = [-0.3763, 0.8688, -0.3218]^T.$$

Donc le vecteur propre réel de A est donné par

$$x = Cu = [0.1707, -0.8688, 0.3218, 0.3763]^T.$$

De plus, $\sum_{i=1}^4 x_i = 0$, cela veut dire que x est bien dans K .

Exemple 1.6.2. Soit $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0\}$ un sous-espace de \mathbb{R}^6 et $\dim(K) = 5 = d$.

Soit $\{(1, 0, -1, 0, 1, -1)^T, (1, -1, 0, 0, 0, 0)^T, (1, 0, 0, -1, 0, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 0, 1)^T\}$ une base de K . Alors, C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{R}).$$

Donc,

$$A_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1.1667 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -0.1667 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.3333 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R}).$$

A_C admet une valeur propre réelle $\lambda = -0.19$, alors un vecteur propre réel

$$u = [0.1051, 0.1986, 0.6811, 0.1210, 0.6862]^T,$$

Donc le vecteur propre réel de A est donné par

$$x = Cu = [0.1777, -0.1986, -0.1051, -0.6811, 0.2260, 0.5812]^T.$$

Vérification : $\sum_{i=1}^6 x_i = 0$, c'est-à-dire, $x \in K$.

Exemple 1.6.3. Soit $K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ un sous-espace de \mathbb{R}^3 et $\dim(K) = 2 = d$. $\{(1, 0, -1)^T, (1, -1, 0)^T\}$ forme une base de K . Alors,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

Donc,

$$A_C = \begin{pmatrix} 0 & -0.6667 \\ 1 & 0.3333 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$

Puisque A_C n'admet pas des valeurs propres réelles, on déduit que $\sigma(A, K) = \emptyset$.

1.6.1 Problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP : cas symétrique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas symétrique du problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP suivant

$$(PCVP) : \text{Trouver } \lambda > 0, x \neq 0 \text{ t.q. } \begin{cases} y = (\lambda B - A)x, \\ y \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y^T x = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

où (A, B) sont des matrices symétriques et B est définie positive. D'abord, nous allons rappeler qu'est-ce-qu'un problème aux valeurs propres connu en littérature sous le nom *Eigenvalue Problem* (EiP) et présenter la liaison entre EiP et PCVP.

(a) Problème aux valeurs propres

Définition 1.6.2. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Le problème classique des valeurs propres EiP est défini par

$$(EiP) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R}, x \neq 0, \text{ tel que} \\ Ax = \lambda x. \end{cases} \quad (1.18)$$

EiP admet une solution si et seulement si le noyau de $(A - \lambda I_n)$, noté par $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$, est non vide, c-à-d, si et seulement si λ est une solution de l'équation polynomiale

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Puisque le polynôme ci-dessus est de degré n et les solutions de EiP sont les valeurs propres de A , alors EiP admet au plus n solutions

Une approche classique pour résoudre EiP avec des matrices réelles symétriques est d'appliquer, au quotient de Rayleigh

$$\lambda(x) = \frac{x^T A x}{x^T x},$$

des techniques d'optimisation sans contraintes [104]

$$\min_{x \neq 0} \left(\lambda(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} \right). \quad (1.19)$$

Ce quotient est défini pour $x \neq 0$ et son gradient est donné par

$$\nabla \lambda(x) = \frac{2Ax(x^T x) - 2x(x^T A x)}{(x^T x)^2} = \frac{2}{x^T x} [A - \lambda(x)I] x. \quad (1.20)$$

Puisque $\nabla \lambda(x) = 0$ si et seulement si $[A - \lambda(x)I_n] = 0$, alors tout point d'équilibre $(x, \lambda(x))$ du quotient de Rayleigh est une solution de EiP.

Il faut bien noter que l'expression du gradient du quotient de Rayleigh donné ci-dessus est uniquement valable lorsque A est symétrique.

Exemple 1.6.4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la commande $\text{eig}(A)$ en MATLAB, nous obtenons

$$\text{Sp}(A) = \{1, 3\},$$

où Sp désigne le spectre de A . Dans ce cas,

$$\lambda(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Pour résoudre le problème d'optimisation sans contrainte (1.19)

$$\min_{x \neq 0} \left(\lambda(x) = \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

nous allons utiliser la commande fminunc de MATLAB, alors, nous obtenons

$$\lambda_{\min} = 1 \text{ et } \nabla \lambda(x) = 0.$$

Puisque nous avons $\max(-f) = -\min(f)$ alors, si nous remplaçons $\lambda(x)$ par $-\lambda(x)$ dans (1.19), nous obtenons

$$\lambda_{\max} = 3.$$

(b) Relation entre EiP et PCVP :

Soient A, B deux matrices réelles symétriques d'ordre n et B est définie positive. Le problème PCVP consiste à trouver $\lambda > 0, x \neq 0$ tel que

$$(\text{PCVP}) \begin{cases} y = (\lambda B - A)x, \\ y \geq 0, x \geq 0, \\ x^T y = 0, \\ e^T x = 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

Puisque $x \geq 0$ et l'ensemble des vecteurs propres de complémentarité associés aux valeurs propres est un cône, alors on a introduit la contrainte $\|x\|_1 = e^T x = 1$ où e est un vecteur unité, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Comme x est un vecteur non nul, alors la condition de complémentarité $x^T y = 0$ peut-être écrite sous la forme

$$x^T (\lambda B x - A x) = 0,$$

ou d'une manière équivalente,

$$\lambda(x) = \frac{x^T A x}{x^T B x}, \quad (1.22)$$

avec B étant définie positive. (1.22) est évidemment le quotient de Rayleigh généralisé qui implique à la proposition suivante.

Proposition 1.6.2. [55] *Le problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP (cas symétrique) est équivalent au problème d'optimisation (non-linéaire) suivant*

$$(\text{OPCVP}) \begin{cases} \min \phi(x) = -\lambda(x) \\ \text{tel que } e^T x = 1 \text{ et } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

où la fonction mérite ϕ est continûment différentiable.

Les conditions Karush-Kuhn-Tucker qui définissent le point stationnaire de ce problème constituent le problème de complémentarité et sont les suivantes :

$$\begin{cases} \nabla\phi(x) + \alpha e = y, \\ e^T x = 1, \\ x^T y = 0, \\ y \geq 0, x \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où α est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $e^T x = 1$.

Cette proposition montre que chaque solution de (1.23) est une solution de PCVP.

Exemple 1.6.5. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = I_2$$

deux matrices symétriques. B est évidemment définie positive. Nous avons

$$\sigma(A, B) = 3 \text{ une solution de PCVP}(A, B).$$

D'autre part, pour trouver la solution d'équilibre du programme non-linéaire (1.23)

$$\begin{cases} \min \phi(x) = -\frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \\ \text{t.q. } e^T x = \|x\|_1 = 1, \text{ et } x \geq 0, \end{cases}$$

nous utilisons la commande *fmincon* de MATLAB et nous trouvons $\lambda = 3$.

D'autres résultats pour le cas symétrique ont été étudiés, nous allons brièvement présenter quelques uns dans ce qui suit.

Proposition 1.6.3. *Le problème PCVP admet une solution (λ, x) si et seulement si il existe un certain vecteur $x \geq 0$ tel que $x^T A x > 0$.*

Preuve. Supposons que PCVP est solvable, alors toute solution (λ, x) doit satisfaire $x \geq 0$. Comme $x \neq 0$, $\lambda > 0$ et B est définie positive, alors $x^T A x = \lambda x^T B x > 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $\bar{x} \geq 0$ tel que $\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$.

$y^T x = 0$ est équivalent à

$$\lambda(x) = \frac{x^T A x}{x^T B x}.$$

$\lambda(\cdot)$ est une fonction continue (pour $x \neq 0$) et l'ensemble $X = \{x \geq 0 : e^T x = 1\}$ est compact, alors il existe $\hat{x} \in X$, tel que $\lambda(\hat{x}) \geq \lambda(x)$, pour tout $x \in X$.

Donc \hat{x} est une solution pour le problème PCVP (1.23) et en particulier, $\lambda(\hat{x}) \geq \lambda(\bar{x}) > 0$. D'où, \hat{x} est une solution de PCVP. Pour plus de détails, voir [104].

■

Proposition 1.6.4. [104] *Supposons que la matrice A satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. $\exists i : A_{ii} > 0$;
2. $\exists i, j : A_{jj} \leq 0$ et $A_{ij} > 0$;
3. $A \geq 0$ (c'est-à-dire $A_{i,j} \geq 0, \forall i, j$), $A \neq 0$;
4. A est une S -matrice c-à-d $\exists x \geq 0 : Ax > 0$.

Alors, tout point $\hat{x} \in X = \{x \geq 0 : e^T x = 1\}$ t.q. $\hat{x}^T A \hat{x} > 0$ peut-être facilement obtenu et PCVP correspondant est résoluble.

Définition 1.6.3. Une matrice carrée réelle M d'ordre n est une Z -matrice si tous ses éléments extra-diagonaux sont négatifs :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ avec } i \neq j, \text{ on a } M_{ij} \leq 0.$$

Proposition 1.6.5. [111] Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle et B l'identité. Supposons que A satisfait l'une des conditions suivantes :

1. A est symétrique.
2. A est une Z -matrice.
3. $-A$ est une Z -matrice.

Alors PCVP admet au plus $\alpha_n = 2^n - 1$ valeurs propres.

Exemple 1.6.6.

(i) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

Alors

$$\sigma(A, K = \mathbb{R}_+^2) = \{4.6180\},$$

c'est-à-dire $\alpha_2 = 1$.

(ii) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ une Z -matrice. PCVP admet le spectre

$$\sigma(A, \mathbb{R}_+^2) = \{2, 3, 4\} \text{ et } \alpha_2 = 3.$$

(c) Fonction Logarithmique

Nous allons introduire la fonction logarithmique suivante

$$\phi(x) = L_{AB}(x) = \ln(x^T Bx) - \ln(x^T Ax), \quad (1.25)$$

son gradient et sa matrice hessienne sont donnés par

$$\nabla L_{AB}(x) = \frac{2Bx}{x^T Bx} - \frac{2Ax}{x^T Ax}, \quad (1.26)$$

$$\nabla^2 L_{AB}(x) = \frac{2B}{x^T Bx} - \frac{4(Bx)(Bx)^T}{(x^T Bx)^2} - \frac{2A}{x^T Ax} + \frac{4(Ax)(Ax)^T}{(x^T Ax)^2}. \quad (1.27)$$

$\nabla^2 L_{AB}$ est défini si A est strictement copositive et nous avons évidemment $x^T Bx > 0$, pour tout $x \neq 0$ car B est symétrique et définie positive.

Théorème 1.6.1. [55] Si A est strictement copositive, alors tout point stationnaire \bar{x} de la fonction $L_{AB}(x)$ dans l'ensemble convexe

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : e^T x = 1, x \geq 0\}$$

conduit à une solution $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ de EiCP, où $\bar{\lambda} = \frac{\bar{x}^T A \bar{x}}{\bar{x}^T B \bar{x}}$.

Exemple 1.6.7. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deux matrices symétriques. A est strictement copositive.

Nous avons $\sigma(A, B) = \{10\}$ une solution de PCVP. D'autre part, comme dans l'exemple 1.6.5, nous utilisons la commande `fmincon` pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \min \phi(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2) - \ln(7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2), \\ \text{t.q. } e^T x = \|x\| = 1, \text{ et } x \geq 0. \end{cases}$$

Nous obtenons alors

$$\bar{x} = [0.5, 0.5]^T.$$

Parsuite,

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{x}^T A \bar{x}}{\bar{x}^T B \bar{x}} = 10.$$

(d) Formulation quadratique

EiCP peut-être aussi résolu en nous basant sur la formulation quadratique suivante :

$$\begin{cases} \max x^T A x \\ \text{tel que } x^T B x \leq 1 \text{ et } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

avec A et B deux matrices symétriques et B définie positive.

Théorème 1.6.2. [55] *Si A est strictement copositive et $\bar{x} \neq 0$ est un point stationnaire de (1.28), alors $(\bar{x}, \bar{\lambda} = \bar{x}^T A \bar{x})$ est une solution de PCVP.*

Exemple 1.6.8. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ deux matrices symétriques et B définie positive. Nous avons

$$\sigma(A, B) = \{2.6667\}$$

une solution de PCVP. D'autre part, et de la même manière précédente, en utilisant `fmincon`, nous obtenons

$$\lambda = 2.6667$$

une solution du problème

$$\begin{cases} \min -x^T A x = -(5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2) \\ \text{t.q. } 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0. \end{cases}$$

1.6.2 Problème de complémentarité aux valeurs propres : cas asymétrique APCVP

Dans cette section, nous allons décrire la deuxième partie de PCVP. C'est le problème de complémentarité aux valeurs propres pour le cas asymétrique APCVP, connu en littérature sous le nom, *Asymmetric Complementarity Eigenvalue Problem*, et qui est équivalent à la définition de PCVP mais avec au moins l'une des matrices A, B est non-symétrique.

Ainsi, il sera défini comme suit : Trouver $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tels que

$$(\text{APCVP}) \begin{cases} y = (\lambda B - A)x, \\ y \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y^T x = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive.

Nous allons montrer que APCVP est équivalent à l'inégalité variationnelle en dimension finie.

Dans toute cette section, nous allons considérer le simplexe

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : e^T x = 1, x \geq 0\}, \quad (1.30)$$

où e est un vecteur unité.

Nous définissons l'application $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^T A x \\ x^T B x \end{pmatrix} B - A x, \quad (1.31)$$

où B est une matrice strictement copositive (SC), c-à-d,

$$x^T B x > 0, \forall x > 0,$$

puisque toute matrice définie positive (PD) est également SC.

Nous rappelons que l'inégalité variationnelle $IV(F, K)$ est de trouver un vecteur $\bar{x} \in K \subset \mathbb{R}^n$, tel que

$$F(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in K,$$

où F est une fonction continue.

Les deux théorèmes ci-dessous montrent que APCVP et $IV(F, K)$ sont des problèmes équivalents.

Théorème 1.6.3. [57] *Si K et F sont donnés par (1.30) et (1.31), respectivement, alors \bar{x} est une solution de $IV(F, K)$ si et seulement si \bar{x} satisfait le problème de complémentarité*

$$\begin{cases} y = (\lambda B - A)x, \\ y \geq 0, x \geq 0, \\ e^T x = 1, \\ y^T x = 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

où

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{x}^T A \bar{x}}{\bar{x}^T B \bar{x}}.$$

Pour garantir que la solution λ de APCVP est positive, nous avons besoin d'introduire une autre condition sur la matrice A . Pour accomplir cette mission, le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution de APCVP.

D'abord, nous donnons la définition suivante.

Définition 1.6.4. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A est une matrice R_0 si et seulement si*

$$(x \geq 0, Ax \geq 0, x^T Ax = 0) \Rightarrow x = 0. \quad (1.33)$$

Théorème 1.6.4. *Si $B \in SC$, $A \in C$ et $-A \in R_0$, alors APCVP admet une solution \bar{x} avec*

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{x}^T A \bar{x}}{\bar{x}^T B \bar{x}}.$$

Preuve. Puisque $A \in C$ et $B \in SC$, alors il existe $\bar{x} \in K$ qui satisfait (1.32) du théorème précédent, tel que

$$\lambda = \frac{\bar{x}^T A \bar{x}}{\bar{x}^T B \bar{x}} \geq 0.$$

Si $\lambda = 0$, alors $\bar{x}^T A \bar{x} = 0$ et le système (1.32) sera réduit à

$$\begin{cases} y = -A\bar{x}, \\ y \geq 0, \bar{x} \geq 0, \\ \bar{x}^T y = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Noter que (1.34) ne donne pas nécessairement que $\bar{x} = 0$ (car B est *SC*). Donc, contradiction car $-A \in R_0$. Par suite, λ est strictement positif. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [57] pour plus de détails. ■

Remarque 1.6.2.

1. Toute matrice *DP* est également *SC*, et toute *SC* satisfait $A \in C$ et $-A \in R_0$. Ensuite le théorème 1.6.4 est également vrai si B est *DP* et A est *SC*.
2. La proposition 1.6.3 n'est plus vraie dans le cas asymétrique (prop. 1.6.3 : si A et B sont deux matrices symétriques, alors EiCP admet une solution $\lambda > 0$ si et seulement si il existe $\bar{x} > 0$ tel que $\bar{x}^T A \bar{x} > 0$), elle satisfait seulement une condition nécessaire.

1.6.3 Méthode de Newton semi-lisse SNM

Parmi les nombreux aspects de recherche dans les problèmes de complémentarité, celui qui a reçu une grande attention ces dernières années est le développement d'algorithmes robustes et efficaces pour résoudre les applications toujours croissantes de ces problèmes. Il existe actuellement une grande variété de méthodes de calcul pour résoudre les problèmes de complémentarité. Parmi ces méthodes, nous avons les méthodes de points intérieurs, algorithme énumérative lié à la méthode branch and bound, algorithme (convexifié) scaling and projection SPA (CSPA), méthode de région de confiance, méthode de Josephy, méthode de Newton semi-lisse, etc.

Dans notre étude, nous fixons notre attention à la méthode de Newton semi-lisse, connue en littérature sous le nom, *Semismooth Newton Method* SNM. Cette méthode a été proposée par P. Alart et A. Curnier dans [5] pour le problème de Coulomb. Quelques développements peuvent être trouvés dans [103].

La recherche des méthodes efficaces pour résoudre des problèmes semi-lisses est toujours en progrès. SNM est le coeur de ces méthodes. Nous allons voir dans la suite de ce travail, que les problèmes PCVP peuvent-être reformulés d'une façon équivalente à un système d'équations semi-lisses [4]. Alors SNM consiste à résoudre ce système et par suite à trouver les zéros d'une fonction semi-lisse $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Un des principaux avantages des méthodes SNM que nous considérons dans cette section est qu'elles sont très similaires aux méthodes classiques de Newton NM pour des fonctions Φ lisses c'est-à-dire différentiables. Nous gardons ensuite les principales caractéristiques de NM qui sont applicables à des systèmes non et semi-lisses. Cela permet d'une extension facile de tous les outils techniques et numériques qui sont disponibles pour les systèmes réguliers. La méthode classique de Newton est le prototype de nombreux algorithmes locaux et rapides pour résoudre des équations lisses. Ces algorithmes ont un taux de convergence excellent au voisinage d'un zéro de Φ .

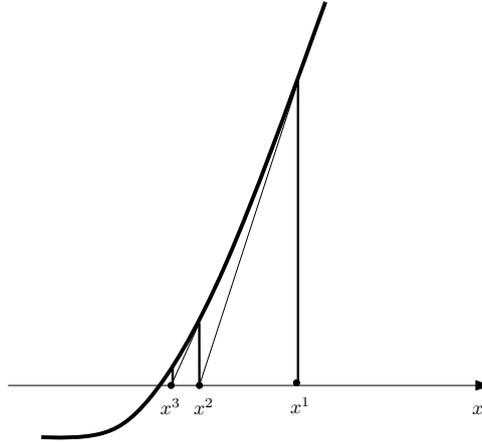


FIGURE 1.13 – Illustration de la méthode régulière de Newton.

Nous considérons alors la méthode SNM pour trouver les solutions du système d'équations semi-lisses de la forme

$$\Phi(z) = 0, \quad (1.35)$$

où $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement Lipschitzienne et Ω un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . A titre d'illustration, nous allons décrire, dans la suite de cette section, l'algorithme SNM et ses propriétés de convergence.

ALGORITHME 1. Méthode de Newton semi-lisse SNM

1. INITIALISATION : Choisir un point initial z^0 et une tolérance $\epsilon > 0$. Poser $k = 0$.
2. ITÉRATION : Au point courant z^k , si $\|\Phi(z^k)\| \leq \epsilon$, alors STOP.
3. Sinon, choisir une matrice $M^k \in \partial\Phi(z^k)$ et calculer la direction d^k en résolvant le système linéaire
$$\Phi(z^k) + M^k d^k = 0.$$
4. Poser $z^{k+1} = z^k + d^k$, $k = k + 1$ et passer à l'étape 2.

Avec $\partial\Phi(z) = \text{co } \partial_B\Phi(z)$ donnée par (1.6).

Dans la suite de ce mémoire, nous allons donner les conditions nécessaires pour avoir une matrice Jacobienne M^k (définie dans l'algorithme ci-dessus) inversible en une solution (voir chapitre 2).

Définition 1.6.5. [90] Soit $(z^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ une suite des vecteurs qui tend vers la limite z^* , pour tout z . On appelle convergence

(a) *Q-linéaire* si

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|z^{k+1} - z^*\|}{\|z^k - z^*\|} < +\infty.$$

(b) *Q-superlinéaire* si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|z^{k+1} - z^*\|}{\|z^k - z^*\|} = 0.$$

(c) *Q-quadratique si*

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|z^{k+1} - z^*\|}{\|z^k - z^*\|^2} < +\infty.$$

(d) *R-linéaire si*

$$0 < \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\|z^k - z^*\|)^{\frac{1}{k}} < 1.$$

Théorème 1.6.5. [103] *Soit z^* une solution de l'équation $\Phi(z) = 0$. Supposons que*

- Φ est semi-lisse (respectivement fortement semi-lisse) en z^* ;
- toutes les matrices de $\partial\Phi(z^*)$ sont inversibles.

Alors, il existe un voisinage V en z^ tel que la méthode SNM initialisée en $z^0 \in V$ génère une suite $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge Q -superlinéairement (respectivement Q -quadratiquement) vers z^* .*

Un Nouvel Algorithme pour Résoudre le Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres au Sens de Pareto

Sommaire

2.1	Introduction	45
2.2	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres au sens de Pareto	48
2.2.1	Méthode de reformulation	49
2.3	“Lattice Projection Method”	52
2.3.1	Expérience numérique : Test sur une matrice d’ordre 4 avec 23 valeurs propres de Pareto	54
2.4	Conditions de la non singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$	55
2.4.1	Exemples	61
2.5	Résultats numériques	63
2.5.1	Test sur trois matrices particulières	64
2.5.2	Profils de performance	65
2.6	Applications aux problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto	68
2.6.1	Problèmes classiques aux valeurs propres bivariées (bi-EiP)	68
2.6.2	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées (avec contraintes)	69
2.6.3	Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto	71
2.6.4	“Lattice projection method” appliquée au bi-PCVP	74
2.6.5	Expérience numérique de bi-PCVP	74
2.7	Méthode de Newton	78
2.7.1	“Squaring technique”	78
2.7.2	Résultats numériques	78
2.8	Solveur Path	81
2.9	Conclusions	83

2.1 Introduction

Vu son importance en optimisation non-linéaire, la thématique des problèmes de complémentarité est devenue l’une des disciplines les plus étudiées à la fois sur les plans théorique et numérique. Grâce à ses diverses applications en ingénierie, économie et science, de nombreux chercheurs ont concentré leur attention afin de développer des résultats théoriques et des méthodes numériques efficaces pour résoudre ces problèmes (voir l’étude exhaustive [38]). Un cas important et attirant est l’étude des problèmes de complémentarité aux valeurs propres, connu en littérature sous le nom, *Eigenvalue Complementarity Problems* EiCP, appelé aussi, problèmes aux valeurs propres contraints par des cônes [3, 4, 55, 56, 57, 95, 96, 104, 111, 112]. Ces problèmes consistent à trouver un scalaire (valeur propre) et un vecteur non nul (vecteur propre)

satisfaisant une relation de complémentarité sur un cône convexe fermé dans un espace de dimension finie. Ce cas recouvre le problème classique aux valeurs propres lorsque le cône convexe fermé coïncide avec l'espace tout entier. Les problèmes aux valeurs propres au sens de Pareto correspondent au cas où le cône convexe fermé coïncide avec l'orthant positif \mathbb{R}_+^n . Ce problème est formulé comme un problème d'optimisation non-linéaire.

Une grande variété d'applications en sciences et ingénierie exigent la résolution de EiCP comme par exemple, l'analyse dynamique des systèmes mécaniques structurelles, les systèmes vibro-acoustiques, la simulation de circuit électrique, le traitement du signal, la dynamique des fluides, les problèmes de contact en mécanique, etc (le lecteur pourra se référer aux ouvrages [77, 78, 79, 80, 81] pour plus de détails). Dans certaines applications, la connaissance des valeurs propres peut éviter l'instabilité et la résonance indésirable pour un système donné. Par exemple, dans les structures mécaniques, les valeurs propres sont liées à la fréquence de résonance et l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques correspondants. Le calcul des valeurs propres est devenu un des éléments importants afin de localiser et amortir les valeurs propres correspondant à des modes instables ou impliquant de fortes vibrations (voir [118]). Pour motiver notre problématique, nous mentionnons ci-dessous deux exemples de EiCP.

Exemple 2.1.1. Considérons le système différentiel suivant de la forme

$$z(t) \geq 0, \dot{z}(t) - Az(t) \geq 0, \langle z(t), \dot{z}(t) - Az(t) \rangle = 0.$$

Une solution non-nulle $z(\cdot)$ pour le système ci-dessus est obtenue en posant

$$z(t) = e^{\lambda t} x,$$

où (λ, x) satisfait le problème EiCP.

Exemple 2.1.2. Une matrice symétrique A est copositive si $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. La vérification de la copositivité est une question difficile traitée par de nombreux auteurs. Comme mentionné dans [51], une matrice symétrique est copositive si et seulement si toutes ses valeurs propres de Pareto sont positives.

L'analyse théorique du spectre de Pareto est toujours en développement (voir [95]), tandis que la construction des algorithmes robustes et efficaces, pour résoudre le problème EiCP, a besoin d'une analyse approfondie. La théorie du spectre au sens de Pareto diffère sensiblement de la théorie classique spectrale surtout lorsqu'il s'agit de traiter des questions de cardinalité. La structure des valeurs propres de Pareto d'une matrice carrée fournit une information précieuse sur la matrice elle-même. Par exemple, une matrice d'ordre 10 admet au plus 10 valeurs propres, mais la matrice peut avoir plus de 1500 valeurs propres au sens de Pareto! Par conséquent, trouver l'ensemble du spectre de Pareto d'une matrice de grande taille est une tâche difficile et reste une question ouverte. A. Seeger avait étudié les limites ou les bornes pour la cardinalité du spectre de Pareto pour des matrices particulières (pour plus de détails, voir [111]). Dans la suite, nous allons, brièvement, rappeler quelques résultats de son travail.

(a) Les valeurs propres de Pareto d'une matrice diagonale coïncident avec les éléments diagonaux. En particulier, une matrice diagonale d'ordre n peut avoir au plus n valeurs propres au sens de Pareto.

(b) Une matrice anti-symétrique admet exactement une valeur propre au sens de Pareto, $\lambda = 0$.

(c) Une matrice réelle A d'ordre n peut avoir au plus $n2^{n-1}$ valeurs propres de Pareto.

(d) Une matrice carrée avec des éléments hors diagonaux négatifs a exactement une valeur propre au sens de Pareto.

(e) Supposons que les entrées hors diagonale sur une ligne particulière d'une matrice réelle A d'ordre n sont négatives, alors A admet au plus $(n+1)2^{n-2}$ valeurs propres de Pareto. Si, de plus, A est symétrique ou A est une Z -matrice (voir Définition 1.6.3) alors A admet au plus 2^{n-1} valeurs propres de Pareto.

Récemment, S. Adly et A. Seeger [4] ont reformulé le problème EiCP comme un système d'équations semi-lisses, en utilisant les fonctions de complémentarité NCP les plus fréquemment étudiées dans la littérature à savoir, ϕ_{\min} et ϕ_{FB} , puis ont appliqué la méthode de Newton semi-lisse (voir Algorithme 1 du chapitre 1) (SNM_{\min} et SNM_{FB}). Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle méthode à savoir, *Lattice Projection Method* LPM pour résoudre un tel problème. L'originalité de cet algorithme réside dans le fait qu'il n'utilise pas les fonctions de complémentarité NCP. A l'aide des profils de performance [33], nous comparons LPM avec SNM_{\min} et SNM_{FB} . Les simulations numériques soulignent l'efficacité de notre solveur LPM. De plus, nous étudions également sous quelles conditions les éléments des matrices Jacobiennes de Clarke $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ définies respectivement par (2.17) et (2.24) en une solution z^* et \tilde{z}^* de (2.16) et (2.23), respectivement sont inversibles.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous définissons le problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP au sens de Pareto et nous discutons quelques résultats théoriques liés à un tel problème. De plus, afin d'introduire notre méthode, nous réécrivons EiCP sous forme d'un autre problème noté par PCVP. Ce dernier se reformule ensuite sous forme d'un système d'équations semi-lisses. Dans la section 2.3, nous introduisons la nouvelle méthode, appelée, *Lattice Projection Method*, notée par LPM et basée sur la méthode de Newton semi-lisse SNM. Comme une première expérience numérique, nous testons notre algorithme sur des matrices particulières admettant un nombre maximal des valeurs propres de Pareto. Nous étudions, dans la section 2.4, sous quelles conditions les éléments des matrices Jacobiennes de Clarke $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ définies respectivement par (2.17) et (2.24) en une solution z^* et \tilde{z}^* sont inversibles. Par ailleurs, quelques exemples sont établis pour illustrer ce concept de régularité. Nous comparons ensuite dans la section 2.5, comme une deuxième expérience numérique, LPM avec deux autres solveurs SNM_{FB} et SNM_{\min} en donnant quelques résultats numériques relatifs à certaines matrices d'ordre 3, 4 et 5. En outre, nous illustrons d'autres tests numériques approfondis dans la section 2.5.2 qui montrent que LPM est extrêmement robuste et efficace. Afin de compléter cette troisième expérience, nous proposons les profils de performance [33] pour analyser les performances de trois algorithmes. Temps de calcul, nombre d'itérations, nombre d'échecs et nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur sont choisis comme des mesures de performance pour comparer ces solveurs. Dans la section 2.6, nous montrons que LPM peut être généralisée pour résoudre les problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées bi-PCVP au sens de Pareto. Les résultats numériques sont ensuite présentés pour confirmer l'efficacité de LPM. Dans la section 2.7, nous comparons LPM avec une nouvelle technique simple appelée *squaring technique* basée sur l'utilisation de l'itération de la formule de Newton classique. Nous introduisons le solveur Path dans la section 2.8 qui est basée sur la méthode de Newton semi-lisse avec recherche linéaire. De plus, nous le comparons avec LPM en prenant le nombre d'évaluations des fonctions comme un outil de comparaison. Enfin, dans la section 2.9, nous fermons le chapitre par une conclusion.

2.2 Problèmes de complémentarité aux valeurs propres au sens de Pareto

Pour une matrice réelle d'ordre n , $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, le problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP associé au cône de Pareto \mathbb{R}_+^n est défini comme suit :

$$(\text{EiCP}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, Ax - \lambda x \geq 0, \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le scalaire λ et le vecteur x satisfaisant (2.1) sont appelés respectivement *la valeur propre de Pareto* de A et *le vecteur propre de Pareto* associé. L'ensemble de toutes les valeurs propres λ est appelé *le spectre de Pareto* de A et est défini par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \perp (Ax - \lambda x) \geq 0\}. \quad (2.2)$$

Le résultat suivant, dû à A. Seeger dans [111], caractérise entièrement le spectre de Pareto et sert à trouver toutes les valeurs propres au sens de Pareto d'une matrice de petite taille.

Lemme 2.2.1. [111] *λ est une valeur propre de Pareto de A si et seulement s'il existe un ensemble d'indice non-vide $I \subseteq N = \{1, \dots, n\}$, et un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^{|I|}$ tels que*

$$A_I \eta = \lambda \eta, \quad \eta \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{|I|}), \quad (2.3)$$

$$\sum_{j \in I} a_{ij} \eta_j \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus I, \quad (2.4)$$

où $A_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{R})$ désigne la sous-matrice principale de A obtenue en supprimant la i -ème ligne et la i -ème colonne de A , pour tout $i \notin I$. Dans ce cas, le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ donné par

$$x_i = \begin{cases} \eta_i & \text{si } i \in I, \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus I. \end{cases} \quad (2.5)$$

est le vecteur propre de Pareto de A associé à la valeur propre λ .

Remarque 2.2.1. Ce lemme montre que la résolution de EiCP (2.1) est équivalente à résoudre $2^n - 1$ sous-problèmes classiques aux valeurs propres impliquant les sous-matrices A_I et à ne sélectionner que les solutions satisfaisant la condition (2.4).

Nous illustrons, dans ce qui suit, le lemme ci-dessous par un simple exemple.

Exemple 2.2.1. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour $I = N = \{1, 2\}$, nous avons $\lambda = 5$ et $\lambda = 9$ deux valeurs propres de Pareto (qui vérifient les conditions (2.3) et (2.4) du lemme 2.2.1). Si $I = \{1\}$, nous obtenons la matrice $A_I = 10$ qui admet évidemment la valeur propre classique $\lambda = 10$. Puisque les conditions (2.3) et (2.4) sont vérifiées pour n'importe quel $\eta_1 > 0$, alors $\lambda = 10$ est une valeur propre de Pareto. Si $I = 2$, alors $A_I = 4$ qui admet $\lambda = 4$ comme valeur propre classique, or il n'existe pas un $\eta_2 > 0$ satisfaisant (2.4) alors 4 n'est pas une valeur propre de Pareto. Par suite, le spectre de Pareto associé à la matrice A est donné par

$$\sigma(A) = \{5, 9, 10\}.$$

Nous définissons la capacité de Pareto de l'espace $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\pi_n = \max_{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})} \text{card}[\sigma(A)],$$

où $\text{card}[\sigma(A)]$ désigne le cardinal du spectre de Pareto de A . L'analyse théorique de ce spectre est toujours en développement surtout savoir la valeur exacte de π_n est une tâche difficile et reste une question ouverte. En 1999, A. Seeger avait étudié la cardinalité du spectre de Pareto et avait démontré dans son article [111], que toute matrice réelle d'ordre n , admet au plus $n2^{n-1}$ valeurs propres de Pareto, c'est-à-dire

$$\pi_n \leq n2^{n-1}.$$

Après un an, il avait estimé, en collaboration avec Pinto da Costa, les bornes inférieure et supérieure de π_n . Ils avaient démontré dans [95] que :

$$2^n - 1 \leq \pi_n \leq n2^{n-1} - (n - 1).$$

En 2011, Seeger et Vincente-Pérez avaient donné un encadrement plus précis à π_n , [113] :

$$3(2^{n-1} - 1) \leq \pi_n \leq n2^{n-1} - (n - 1). \quad (2.6)$$

Alors, d'après ces formules, nous remarquons que le nombre des valeurs propres de Pareto d'une matrice réelle A d'ordre n augmente exponentiellement par rapport à la dimension n , ce qui diffère complètement avec le spectre classique de A qui admet au plus n valeurs propres.

Exemple 2.2.2. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0.5 \\ 2 & -0.5 & 6 \end{bmatrix}.$$

En se basant sur le lemme 2.2.1, nous trouvons que A admet 9 valeurs propres de Pareto. Alors, $\pi_3 \geq 9$. Le nombre des valeurs propres de Pareto est au plus 10 mais nous ne connaissons pas d'exemples de matrices d'ordre 3 admettant exactement 10 valeurs propres de Pareto.

Notons aussi que, pour $n = 20$ par exemple, nous avons

$$\pi_{20} \geq 1572861.$$

Alors, obtenir une formule explicite pour π_n ou améliorer les bornes inférieure et supérieure de (2.6) sont des questions ouvertes.

Dans de nombreuses applications, la valeur propre de Pareto λ est supposée être strictement positive (voir par exemple [55, 56, 57]). Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc supposer que λ soit strictement positive.

2.2.1 Méthode de reformulation

A partir de cette section et afin d'introduire notre méthode numérique, nous allons réécrire le problème EiCP (2.1) sous la forme suivante

$$(\text{PCVP}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \lambda x - Ax \geq 0, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où PCVP désigne le problème de complémentarité aux valeurs propres. Ensuite, nous allons reformuler le PCVP, d'une façon équivalente, en un système d'équations semi-lisses en se basant

sur le travail de S. Adly et A. Seeger [4].

Comme une première étape vers la méthode de reformulation, nous écrivons

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{vecteur propre primal,} \\ y \geq 0 & \text{vecteur propre dual,} \\ \langle x, y \rangle = 0 & \text{complémentarité,} \\ \lambda x - Ax - y = 0 & \text{stationnarité,} \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0 & \text{normalisation,} \end{cases} \quad (2.8)$$

où $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$. La dernière condition du système (2.8) est utilisée pour assurer que x soit un vecteur non nul. Nous pouvons aussi utiliser certaines conditions de normalisation comme $\|x\|_2^2 = 1$, qui ne changerait pas sensiblement ce travail.

En utilisant les fonctions NCP, c'est-à-dire les fonctions pour les problèmes de complémentarité non-linéaires, il est possible de réécrire les trois premières conditions de (2.8) sous la forme

$$U_\phi(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

avec, $U_\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction vectorielle définie par

$$U_\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, y_n) \end{bmatrix},$$

et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction NCP, c'est-à-dire

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0. \quad (2.9)$$

Plus précisément, nous sommes amenés à résoudre le système suivant de $2n + 1$ équations

$$U_\phi(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.10)$$

$$\lambda x - Ax - y = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.11)$$

$$\langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0. \quad (2.12)$$

Les fonctions NCP sont souvent des fonctions non-régulières. Pour cette raison, le bloc (2.10) est la partie la plus gênante à résoudre dans ce système. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur les fonctions NCP les plus fréquemment utilisées dans la littérature : la fonction *Fischer-Burmeister* (FB) [39] et la fonction *naturelle résiduelle*, appelée aussi la fonction min [47, 88], et elles sont respectivement définies par

$$\phi_{\text{FB}}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2.13)$$

$$\phi_{\text{min}}(a, b) = \min(a, b). \quad (2.14)$$

Nous notons que d'autres fonctions NCP [29, 60, 99, 115] peuvent être traitées de la même manière.

Considérons maintenant la fonction vectorielle $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, $z = (x, y, \lambda) \mapsto \Phi(x, y, \lambda)$ définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} U_\phi(x, y) \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Par conséquent, le problème PCVP (2.7) peut-être reformulé comme un système d'équations non-linéaires et non-lisses, c'est-à-dire (x, y, λ) est une solution de (2.7) si et seulement si

$$\Phi(x, y, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (2.16)$$

Lemme 2.2.2. *La fonction Φ définie par (2.15) est semi-lisse avec ϕ étant l'une des fonctions NCP, ϕ_{\min} ou ϕ_{FB} . En outre, sa jacobienne généralisée de Clarke en $z = (x, y, \lambda)$ est donnée par*

$$\partial\Phi(z) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|c} E & F & 0 & \\ \lambda \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x & \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 & \end{array} \right] : [E, F] \in \partial U_\phi(x, y) \right\}, \quad (2.17)$$

où \mathbf{I}_n représente la matrice identité d'ordre n .

$E = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $F = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont ainsi définis :

Premier cas : si $\phi = \phi_{\text{FB}}$, alors, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} a_i = 1 - \frac{x_i}{\|(x_i, y_i)\|} \\ b_i = 1 - \frac{y_i}{\|(x_i, y_i)\|} \end{cases} \quad \text{si } (x_i, y_i) \neq (0, 0), \quad (2.18)$$

et

$$\begin{cases} a_i = 1 - \xi_i \\ b_i = 1 - \rho_i \end{cases} \quad \text{si } (x_i, y_i) = (0, 0), \quad (2.19)$$

pour tout $(\xi_i, \rho_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(\xi_i, \rho_i)\| \leq 1$.

Deuxième cas : si $\phi = \phi_{\min}$, alors, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} a_i = 0, & b_i = 1 & \text{si } x_i > y_i, \\ a_i = 1, & b_i = 0 & \text{si } x_i < y_i, \\ a_i = \alpha_i, & b_i = 1 - \alpha_i, & \text{si } x_i = y_i \text{ tel que } \alpha_i \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.20)$$

Preuve. Les dernières $n + 1$ composantes de la fonction Φ (2.15) sont continûment différentiables, alors elles sont localement Lipschitziennes et semi-lisses. Concernant les n premiers éléments, nous avons deux cas :

1. La fonction NCP, ϕ_{\min} (2.14), n'est que le minimum de deux fonctions linéaires, elle est donc globalement Lipschitzienne et semi-lisse. Par conséquent, U_ϕ est semi-lisse.
2. La fonction NCP, ϕ_{FB} (2.13), est globalement Lipschitzienne. En outre, elle est continûment différentiable partout, sauf à l'origine, où elle est semi-lisse. Par suite, U_ϕ est semi-lisse.

Pour plus de détails, voir [4]. Les preuves de (2.18), (2.19) et (2.20) peuvent être trouvées dans [90].

■

Définition 2.2.1. *Soit x^* un vecteur propre de Pareto. Alors, nous écrivons*

$$\lambda^* = \frac{\langle x^*, Ax^* \rangle}{\langle x^*, x^* \rangle}, \quad y^* = \lambda^* x^* - Ax^*, \quad z^* = (x^*, y^*, \lambda^*).$$

Le vecteur propre de Pareto x^* est appelé :

- (a) "Strict" si $x_i^* + y_i^* > 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (b) "Non-dégénéré" par rapport à ϕ , si la fonction Φ définie par (2.15) est telle que chaque matrice de $\partial\Phi(z^*)$ est inversible.

"Strict" signifie simplement que les variables x_i^* et y_i^* ne peuvent pas s'annuler en même temps.

Exemple 2.2.3. Considérons le problème aux valeurs propres de Pareto avec

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

En choisissant la fonction NCP, ϕ_{\min} , nous trouvons les solutions strictes suivantes :

$$z_1^* = (\underbrace{0, 1}_{x^*}, \underbrace{1, 0}_{y^*}, \underbrace{4}_{\lambda^*})^T, \quad z_2^* = ((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (0, 0), 5) \quad \text{et} \quad z_3^* = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 0), 7).$$

Avant de passer à la section suivante, nous allons définir les notations suivantes :

- $\forall u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, \min\{u, v\}$ est le vecteur dont la k -ième composante est donnée par $\min\{u_k, v_k\}$.
- $\forall u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, \max\{u, v\}$ est le vecteur dont la k -ième composante est $\max\{u_k, v_k\}$.

2.3 “Lattice Projection Method”

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle formulation du problème de complémentarité aux valeurs propres de Pareto qui nous conduit à résoudre un système non-linéaire et non-lisse de $(2n + 1)$ équations impliquant le même nombre de variables [3]. L’originalité de cette formulation, en comparaison avec la littérature existante, est qu’elle ne repose pas sur l’approche de complémentarité, c’est-à-dire, nous n’utilisons aucune fonction NCP dans la formule que nous allons aborder. Nous transformons PCVP à trouver les valeurs propres d’un problème non-linéaire. Le lemme suivant est dans ce sens.

Lemme 2.3.1. *Le problème aux valeurs propres de Pareto défini par (2.7) avec $\lambda > 0$ est équivalent à trouver les racines de la fonction non-linéaire et non-lisse $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda) = (Ax)^+ - \lambda x. \tag{2.21}$$

Preuve. Supposons que $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le problème aux valeurs propres de Pareto

$$0 \leq x \perp (\lambda x - Ax) \geq 0$$

est équivalent au problème suivant

$$\min\{x, \lambda x - Ax\} = 0.$$

Puisque $\lambda > 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \min\{x, \lambda x - Ax\} = 0 &\Leftrightarrow \min\{\lambda x, \lambda x - Ax\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \max\{-\lambda x, Ax - \lambda x\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \max\{Ax, 0\} = \lambda x, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Ce lemme montre que

$$0 \leq x \perp (\lambda x - Ax) \geq 0 \iff (Ax)^+ = \lambda x,$$

ce qui signifie que PCVP est équivalent à résoudre le problème non-linéaire aux valeurs propres suivant

$$(P_{\mathbb{R}_+^n} \circ A)(x) = \lambda x,$$

où $P_{\mathbb{R}_+^n}$ est l’opérateur de projection sur \mathbb{R}_+^n . Alors de la même manière que Section 2.2.1, nous sommes maintenant amenés à résoudre le système suivant de $2n + 1$ équations

$$\begin{cases} \tilde{y}^+ - \lambda x = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ Ax - \tilde{y} = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0. \end{cases}$$

Nous utilisons aussi la condition de normalisation $\langle \mathbf{1}_n, x \rangle = 1$ pour assurer que x soit un vecteur propre non-nul. Nous considérons, maintenant, la fonction $\Phi_{\text{LPM}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\Phi_{\text{LPM}}(x, \tilde{y}, \lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{y}^+ - \lambda x \\ Ax - \tilde{y} \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Il est clair alors que résoudre PCVP est équivalent à résoudre le système non-linéaire

$$\Phi_{\text{LPM}}(x, \tilde{y}, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (2.23)$$

Pour la méthode de résolution de ce système, nous allons aussi utiliser la méthode de Newton semi-lisse SNM illustrée dans le chapitre 1 de ce travail. Nous allons appeler cette méthode *Lattice Projection Method* LPM.

Nous choisissons “Lattice Projection Method” comme un nom pour la nouvelle méthode puisque la résolution de PCVP est équivalent à résoudre le problème non-linéaire aux valeurs propres suivant

$$Ax \vee 0 = \lambda x \iff (\mathbf{P}_{\mathbb{R}_+^n} \circ A)(x) = \lambda x.$$

Un treillis, c’est-à-dire “lattice”, est un ensemble non vide M avec un ordre \leq tel que tout couple d’éléments $x, y \in M$ possède à la fois un supremum $x \vee y$ et un infimum $x \wedge y$. Par exemple, tout ensemble muni d’une relation d’ordre total est un treillis.

Le lemme suivant donne une description de la représentation de la Jacobienne généralisée de Clarke de Φ_{LPM} .

Lemme 2.3.2. *La fonction Φ_{LPM} , définie par (2.22), est semi-lisse. De plus, sa Jacobienne généralisée de Clarke en $\tilde{z} = (x, \tilde{y}, \lambda)$ est donnée par*

$$\partial \Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_n & \tilde{F} & -x \\ A & -\mathbf{I}_n & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} : \tilde{F} \in \partial(\cdot)^+(\tilde{y}) \right\}, \quad (2.24)$$

où $\tilde{F} = \text{diag}(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice diagonale dont son i -ème élément diagonal est donné par

$$u_i = \frac{1 + \text{Sign}(\tilde{y}_i)}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{y}_i > 0, \\ [0, 1] & \text{si } \tilde{y}_i = 0, \\ 0 & \text{si } \tilde{y}_i < 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Preuve. Découle immédiatement en utilisant le théorème (Chain Rule II) dans [25].

■

2.3.1 Expérience numérique : Test sur une matrice d'ordre 4 avec 23 valeurs propres de Pareto

Notre première expérience numérique concerne une matrice d'ordre 4 qui est connue à avoir 23 valeurs propres de Pareto. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 179 & -179 & -52 & 72 \\ -160 & 216 & -44 & 61 \\ -97 & -92 & 341 & 37 \\ -77 & -73 & -21 & 397 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

cette matrice. Nous voulons résoudre le problème aux valeurs propres de Pareto

$$x \geq 0, \quad \lambda x - Ax \geq 0, \quad \langle x, \lambda x - Ax \rangle.$$

Nous testons alors la méthode LPM en appliquant la méthode SNM sur (2.26) en utilisant un échantillon de 10^3 points initiaux aléatoires. Le tableau 2.1 présente les résultats obtenus. La matrice (2.26) possède exactement 23 valeurs propres de Pareto, et LPM trouve chacun d'eux. Nous remarquons que les vecteurs propres de Pareto obtenus sont tous stricts dans le sens de la définition 2.2.1.

Valeurs propres de Pareto	Vecteur propre de Pareto				Vecteur dual			
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
$\lambda_1 = 0.5523$	0.4234	0.3589	0.2176	0	0	0	0	63.3766
$\lambda_2 = 27.2583$	0.5412	0.4588	0	0	0	0	94.7060	75.1648
$\lambda_3 = 29.9013$	0.3611	0.3061	0.1856	0.1472	0	0	0	0
$\lambda_4 = 56.6292$	0.4433	0.3758	0	0.1809	0	0	70.8821	0
$\lambda_5 = 152.2735$	0.6605	0	0.3395	0	0	120.6197	0	57.9888
$\lambda_6 = 179.000$	1	0	0	0	0	160.000	97.000	77.000
$\lambda_7 = 181.6219$	0.5204	0	0.2675	0.2121	0	82.0927	0	0
$\lambda_8 = 189.3134$	0	0.6225	0.3775	0	131.0532	0	0	53.3682
$\lambda_9 = 208.3947$	0.7101	0	0	0.2899	0	95.9312	58.1529	0
$\lambda_{10} = 216.000$	0	1.000	0	0	179.0000	0	92.000	73.000
$\lambda_{11} = 218.6354$	0	0.4791	0.2906	0.2303	84.2901	0	0	0
$\lambda_{12} = 245.3669$	0	0.6750	0	0.3250	97.4314	0	50.0783	0
$\lambda_{13} = 341$	0	0	1.000	0	52.000	44.000	0	21.000
$\lambda_{14} = 366.3542$	0	0	0.5934	0.4066	1.5796	1.3053	0	0
$\lambda_{15} = 367.6053$	0.2763	0	0	0.7237	0	0.0579	0.0215	0
$\lambda_{16} = 367.6331$	0	0.2869	0	0.7131	0.0067	0	0.0074	0
$\lambda_{17} = 367.6343$	0.0260	0.2599	0	0.7141	0	0	0.0052	0
$\lambda_{18} = 367.6542$	0.0188	0.2363	0.0628	0.6821	0	0	0	0
$\lambda_{19} = 367.6601$	0	0.2464	0.0819	0.6717	0.0032	0	0	0
$\lambda_{20} = 367.6789$	0.1919	0	0.1772	0.6309	0	0.0184	0	0
$\lambda_{21} = 367.6992$	0.1714	0	0.2204	0.6083	0	0.0100	0	0
$\lambda_{22} = 367.7045$	0	0.1863	0.2036	0.6101	0.0020	0	0	0
$\lambda_{23} = 367.7094$	0.0316	0.1463	0.2180	0.6041	0	0	0	0

TABLE 2.1 – LPM appliquée à la matrice (2.26) avec 10^3 points initiaux aléatoires.

2.4 Conditions de la non singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$

Après la reformulation du problème PCVP (2.7) en un système d'équations semi-lisses, nous allons passer à la méthode de résolution où nous allons appliquer la méthode de Newton semi-lisse, connue en littérature par "Semismooth Newton Method" SNM et illustrée dans le chapitre 1 de ce travail. Puisque les résultats théoriques de convergence de cette méthode sont assurés sous l'hypothèse cruciale que toutes les matrices jacobiniennes généralisées de Φ (respectivement Φ_{LPM}) soient inversibles en z^* (respectivement \tilde{z}^*) solution de PCVP (voir Théorème 1.6.5 du premier chapitre), alors nous allons étudier, dans cette section, sous quelles conditions tous les éléments de la Jacobienne généralisée de Clarke dans $\partial\Phi(z^*)$ définie par (2.17) (respectivement $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ définie par (2.24)) en une solution z^* (respectivement \tilde{z}^*) sont inversibles.

L'ensemble des indices $\{1, 2, \dots, n\}$ sera noté par I . Si $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subseteq I$, alors $M_{\mathcal{J}\mathcal{K}}$ désigne la sous-matrice dans $\mathbb{M}_{|\mathcal{J}|, |\mathcal{K}|}(\mathbb{R})$ avec ses éléments m_{ij} , $i \in \mathcal{J}$, $j \in \mathcal{K}$. Nous rappelons que $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une P-matrice si tous ses mineurs sont strictement positifs. En outre, M est un P-matrice si et seulement si pour tout vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, il existe un indice $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ et $x_i[Mx]_i > 0$.

Nous introduisons maintenant la fonction, de classe C^1 , $\mathbb{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$z = (x, y, \lambda) \mapsto \mathbb{G}(z) = \begin{bmatrix} y \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Proposition 2.4.1. *Toute matrice Jacobienne $H \in \partial\Phi(z)$, avec ϕ étant l'une des fonctions NCP ϕ_{\min} ou ϕ_{FB} , peut être écrite sous la forme*

$$H = D_a + D_b \mathbb{G}'(z), \quad (2.28)$$

où $D_a, D_b \in \mathbb{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ sont deux matrices diagonales semi-définies positives de telle sorte que leur somme $D_a + D_b$ soit définie positive et elles sont données par

$$D_a = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_b = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix},$$

où E et F sont les matrices diagonales d'ordre n déjà mentionnées dans le lemme 2.2.2, dépendant du choix de la fonction NCP, ϕ_{FB} (2.13) ou ϕ_{\min} (2.14).

Preuve. Soit $H \in \partial\Phi(z)$. Alors, d'après le lemme 2.2.2, nous avons,

$$H = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'autre part, la Jacobienne de la fonction \mathbb{G} (2.27) est donnée par

$$\mathbb{G}'(z) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_n & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Ainsi, à partir de ces égalités et en utilisant [59, Proposition 2.6], l'énoncé de la proposition suit facilement et nous obtenons

$$H = D_a + D_b \mathbb{G}'(z).$$

■

Pour étudier les conditions de la non-singularité des éléments de la Jacobienne généralisée de Clarke dans $\partial\Phi(z^*)$ en une solution $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Soit $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la fonction définie par

$$w = (x, \lambda) \mapsto G(w) = \begin{bmatrix} \lambda x - Ax \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Nous posons,

$$w^* = (x^*, \lambda^*),$$

et

$$J = \Delta_a + \Delta_b G'(w^*), \quad (2.31)$$

où

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

deux matrices diagonales de $\mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $(x_i^*, y_i^*) = (x_i^*, (\lambda^* x^* - Ax^*)_i)$ en une solution $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ et le gradient de la fonction $G(w^*)$ est donné par

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_n^* - A & x^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Nous notons aussi que

$$\lambda^* \Delta_a = \Delta_{\lambda^* a},$$

où

$$\lambda^* a = (\lambda^* a_1, \lambda^* a_2, \dots, \lambda^* a_n).$$

Nous posons

$$\tilde{J} = \Delta_{\lambda^* a} + \Delta_b G'(w^*). \quad (2.34)$$

Proposition 2.4.2. [59] *Une matrice de la forme*

$$\Delta_a + \Delta_b M$$

est inversible pour toutes les matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_a, \Delta_b \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que leur somme $\Delta_a + \Delta_b$ est définie positive si et seulement si $M \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est une P-matrice.

Preuve. Nous reprenons la preuve présentée dans [59]. Tout d'abord, montrons la condition suffisante, c'est-à-dire, si M est une P-matrice alors $\Delta_a + \Delta_b M$ est inversible. Soient Δ_a et $\Delta_b \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ deux matrices quelconques semi-définies positives telles que $\Delta_a + \Delta_b$ soit définie positive. Nous posons $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vecteur arbitraire tel que

$$(\Delta_a + \Delta_b M)X = 0. \quad (2.35)$$

Comme Δ_a et Δ_b sont deux matrices diagonales, alors nous posons $\Delta_a = \text{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\Delta_b = \text{diag}(b_1, \dots, b_{n+1})$. Ainsi, l'équation (2.35) devient

$$a_i X_i + b_i [MX]_i = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n+1.$$

Multiplions la i -ème équation ci-dessus par X_i , alors nous obtenons

$$a_i (X_i)^2 + b_i X_i [MX]_i = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n+1. \quad (2.36)$$

Supposons que X est un vecteur non-nul. Comme M est une P-matrice, alors il existe un indice $i_0 \in \{1, \dots, n+1\}$ tel que $X_{i_0} \neq 0$ et $X_{i_0}[MX]_{i_0} > 0$. De plus, nous avons $a_{i_0}, b_{i_0} \geq 0$ et $a_{i_0} + b_{i_0} > 0$, alors nous obtenons une contradiction d'après (2.36)

$$0 = a_{i_0}(X_{i_0})^2 + b_{i_0}X_{i_0}[MX]_{i_0} > 0.$$

Par suite, $X = 0$ et $\Delta_a + \Delta_b M$ est inversible.

Réciproquement, supposons que M n'est pas une P-matrice. Alors, il existe un vecteur non-nul X , tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, nous avons $X_i = 0$ ou $X_i[MX]_i \leq 0$. Si, $X_i = 0$, prenons $a_i := 1$ et $b_i := 0$. Autrement, définissons $a_i := |[MX]_i|$ et $b_i := |X_i|$. Posons alors $\Delta_a := \text{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\Delta_b := \text{diag}(b_1, \dots, b_{n+1})$. Nous obtenons évidemment deux matrices diagonales semi-définies positives telles que leur somme $\Delta_a + \Delta_b$ soit définie positive. De plus, il est clair que

$$(\Delta_a + \Delta_b M)X = 0,$$

ce qui prouve la condition nécessaire de cette proposition. ■

Dans ce qui suit, nous allons définir les ensembles d'indices standards :

$$\begin{aligned} \alpha &:= \{i \in \{1, \dots, n+1\} : w_i^* > 0 = G_i(w^*)\}, \\ \beta &:= \{i \in \{1, \dots, n+1\} : w_i^* = 0 = G_i(w^*)\}, \\ \gamma &:= \{i \in \{1, \dots, n+1\} : w_i^* = 0 < G_i(w^*)\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.3. [29, 59] *Soit $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une racine fixe de Φ définie par (2.15), avec $w^* = (x^*, \lambda^*)$. Si la sous-matrice $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible et son complément de Schur*

$$G'(w^*)_{\beta\beta} - G'(w^*)_{\beta\alpha}G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(w^*)_{\alpha\beta} \in \mathbb{M}_{|\beta|}(\mathbb{R})$$

est une P-matrice, alors les matrices jacobiniennes J et \tilde{J} définies respectivement par (2.31) et (2.34), sont inversibles.

Dans ce cas, la solution z^* est dite R-régulière.

Preuve. Dans ce qui suit, nous allons reprendre la preuve présentée dans [59]. Il est facile de voir que PCVP (2.7) peut-être écrit, d'une façon équivalente, au système suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \text{ tel que} \\ w \geq 0, G(w) \geq 0, \langle w, G(w) \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

où le vecteur G est donné par (2.30).

L'étape suivante s'établit en supposant que nous pouvons écrire $G'(w^*)$, définie par (2.33), sous la forme

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} G'(w^*)_{\alpha\alpha} & G'(w^*)_{\alpha\beta} & G'(w^*)_{\alpha\gamma} \\ G'(w^*)_{\beta\alpha} & G'(w^*)_{\beta\beta} & G'(w^*)_{\beta\gamma} \\ G'(w^*)_{\gamma\alpha} & G'(w^*)_{\gamma\beta} & G'(w^*)_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

et, de la même manière, nous avons

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \Delta_{a,\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{a,\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{a,\gamma\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} \Delta_{b,\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{b,\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{b,\gamma\gamma} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

où Δ_a et Δ_b sont donnés par (2.31). Soit $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vecteur arbitraire, tel que

$$JX = 0. \quad (2.40)$$

Ensuite, en partitionnant le vecteur X sous forme $X = (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ et en utilisant les matrices définies par (2.31), (2.38) et (2.39), le système (2.40) se réécrit alors sous forme

$$\Delta_{a,\alpha\alpha}X_\alpha + \Delta_{b,\alpha\alpha}[G'(w^*)_{\alpha\alpha}X_\alpha + G'(w^*)_{\alpha\beta}X_\beta + G'(w^*)_{\alpha\gamma}X_\gamma] = 0_\alpha, \quad (2.41)$$

$$\Delta_{a,\beta\beta}X_\beta + \Delta_{b,\beta\beta}[G'(w^*)_{\beta\alpha}X_\alpha + G'(w^*)_{\beta\beta}X_\beta + G'(w^*)_{\beta\gamma}X_\gamma] = 0_\beta, \quad (2.42)$$

$$\Delta_{a,\gamma\gamma}X_\gamma + \Delta_{b,\gamma\gamma}[G'(w^*)_{\gamma\alpha}X_\alpha + G'(w^*)_{\gamma\beta}X_\beta + G'(w^*)_{\gamma\gamma}X_\gamma] = 0_\gamma. \quad (2.43)$$

Or, en se basant sur les deux cas du lemme 2.2.2, nous avons

$$\Delta_{a,\alpha\alpha} = 0_\alpha, \quad \Delta_{b,\alpha\alpha} = \mathbf{I}_\alpha,$$

$$\Delta_{a,\gamma\gamma} = \mathbf{I}_\gamma, \quad \Delta_{b,\gamma\gamma} = 0_\gamma.$$

Par suite, l'équation (2.43) nous donne immédiatement

$$X_\gamma = 0_\gamma, \quad (2.44)$$

alors, (2.41) devient

$$G'(w^*)_{\alpha\alpha}X_\alpha + G'(w^*)_{\alpha\beta}X_\beta = 0_\alpha. \quad (2.45)$$

D'après l'énoncé de ce lemme, nous avons que $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible, alors (2.45) se réécrit d'une façon équivalente à

$$X_\alpha = -G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(w^*)_{\alpha\beta}X_\beta. \quad (2.46)$$

En remplaçant X_α par l'expression ci-dessus et en utilisant (2.44), l'équation (2.42) devient

$$[\Delta_{a,\beta\beta} + \Delta_{b,\beta\beta}(G'(w^*)_{\beta\beta} - G'(w^*)_{\beta\alpha}G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(w^*)_{\alpha\beta})]X_\beta = 0_\beta. \quad (2.47)$$

Puisque le complément de Schur de $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$

$$G'(w^*)_{\beta\beta} - G'(w^*)_{\beta\alpha}G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(w^*)_{\alpha\beta}$$

est une P-matrice (d'après l'énoncé du lemme) et les matrices diagonales Δ_a et Δ_b sont semi-définies positives telles que leur somme est définie positive (d'après la proposition 2.4.1), alors nous obtenons, d'après (2.47), et la proposition 2.4.2 que

$$X_\beta = 0_\beta.$$

Ainsi, $X_\alpha = 0_\alpha$, d'après (2.46) et alors, $X = 0$. Ce qui prouve que J est une matrice singulière. ■

En se basant sur la proposition ci-dessus, nous illustrons, dans ce qui suit, deux théorèmes de la non-singularité des matrices jacobiniennes de Φ et Φ_{LPM} .

Théorème 2.4.1. *Soient $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une racine de Φ et $w^* = (x^*, \lambda^*)$. Alors, la Jacobienne J définie par (2.31) est inversible si et seulement si tous les éléments $H \in \partial\Phi(z^*)$ sont inversibles.*

Preuve. Soit $H \in \partial\Phi(z^*)$ et soit $X = (p, q, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un vecteur arbitraire tel que

$$HX = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (2.48)$$

L'équation précédente s'écrit explicitement comme

$$\begin{bmatrix} E & F & 0 \\ \lambda^* \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix},$$

avec E and F deux matrices diagonales déjà définies dans le lemme 2.2.2. Par suite,

$$Ep + Fq = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.49)$$

$$(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p - q + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.50)$$

$$\langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \quad (2.51)$$

En utilisant (2.50), nous obtenons

$$q = (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p + rx^*. \quad (2.52)$$

Par conséquent, (2.49) devient

$$Ep + F(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p + rFx^* = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.53)$$

Donc,

$$\begin{cases} Ep + F(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p + rFx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0, \end{cases}$$

qui peut être réécrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} E + F(\lambda^* \mathbf{I}_n - A) & Fx^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

En fixant $Y = (p, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, il est clair que (2.54) est équivalent à

$$JY = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2.55)$$

D'où,

$$HX = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \iff \begin{cases} JY = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}, \\ q = (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p + rx^*. \end{cases}$$

La conclusion souhaitée du théorème 2.4.1 découle immédiatement de la dernière équivalence. ■

Théorème 2.4.2. Soient $\tilde{z}^* = (x^*, \tilde{y}^*, \lambda^*)$ une racine de Φ_{LPM} et $w^* = (x^*, \lambda^*)$. Alors, la Jacobienne \tilde{J} définie par (2.34) est inversible si et seulement si tous les éléments $\tilde{H} \in \partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ sont inversibles.

Preuve. Soit $\tilde{H} \in \partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ et soit $X = (p, q, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un vecteur arbitraire tel que

$$\tilde{H}X = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (2.56)$$

L'équation précédente s'écrit explicitement comme

$$\begin{bmatrix} -\lambda^* \mathbf{I}_n & \tilde{F} & -x^* \\ A & -\mathbf{I}_n & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix},$$

avec \tilde{F} définie dans le lemme 2.3.1. Par suite,

$$-\lambda^* p + \tilde{F}q - rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.57)$$

$$Ap - q = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.58)$$

$$\langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \quad (2.59)$$

En utilisant (2.58), nous obtenons

$$q = Ap. \quad (2.60)$$

Par conséquent, (2.57) devient

$$(\lambda^* \mathbf{I}_n - \tilde{F}A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.61)$$

Donc,

$$\begin{cases} (\lambda^* \mathbf{I}_n - \tilde{F}A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Notons que $E + F = \mathbf{I}_n$, où E and F sont deux matrices diagonales déjà définies dans le lemme 2.2.2 (deuxième cas). Par suite, (2.62) devient

$$\begin{cases} \lambda^* Ep + (\lambda^* F - \tilde{F}A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

Puisque $y^* = \lambda^* x^* - Ax^*$, alors nous obtenons $\tilde{y}^* = Ax^* = \lambda^* x^* - y^*$. Donc, $\tilde{F} = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ dont l' i ème élément diagonal est donné par

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda^* x_i^* > y_i^*, \\ [0, 1] & \text{si } \lambda^* x_i^* = y_i^*, \\ 0 & \text{si } \lambda^* x_i^* < y_i^*. \end{cases} \quad (2.64)$$

Rappelons que $F = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ est défini par

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^* > y_i^*, \\ [0, 1] & \text{si } x_i^* = y_i^*, \\ 0 & \text{si } x_i^* < y_i^*. \end{cases} \quad (2.65)$$

De plus, en utilisant l'approche de complémentarité

$$0 \leq x^* \perp y^* \geq 0,$$

et le fait que $\lambda^* > 0$, nous obtenons

$$0 \leq \lambda^* x^* \perp y^* \geq 0 \text{ et } x_i^* = 0 \text{ ou } y_i^* = 0.$$

D'où,

$$\tilde{F} = F.$$

Nous notons aussi que nous avons évidemment

$$Fx^* = x^* \quad (\text{car } E + F = \mathbf{I}_n).$$

Par conséquent, (2.63) devient

$$\begin{cases} \lambda^* Ep + F(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

qui peut être réécrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} + F(\lambda^* \mathbf{I}_n - A) & Fx^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

avec $\tilde{E} = \lambda^*E$. En fixant $Y = (p, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, il est clair que (2.67) est équivalent à

$$\tilde{J}Y = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2.68)$$

D'où,

$$\tilde{H}X = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \iff \begin{cases} \tilde{J}Y = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}, \\ q = Ap. \end{cases}$$

La conclusion souhaitée du théorème 2.4.2 découle immédiatement de la dernière équivalence. \blacksquare

Afin d'illustrer les résultats ci-dessus, nous considérons les exemples suivants.

2.4.1 Exemples

Exemple 2.4.1. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

En utilisant le lemme 2.2.1, il est facile de voir que $\lambda^* = 4$ est une solution de PCVP avec $x^* = (0, 1)^T$ un vecteur propre associé. Nous posons alors

$$z^* = (\underbrace{0, 1}_{x^*}, \underbrace{1, 0}_{y^*}, \underbrace{4}_{\lambda^*})^T, \quad \tilde{z}^* = (\underbrace{0, 1}_{x^*}, \underbrace{-1, 4}_{\tilde{y}^*}, \underbrace{4}_{\lambda^*}),$$

et nous montrons que z^* (respectivement \tilde{z}^*) est une ‘bonne solution’ de l'équation non-linéaire $\Phi(z) = 0$ définie par (2.16) (respectivement $\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = 0$ définie par (2.23)). D'une part, en tenant compte de la proposition 2.4.3, nous avons

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G'(w^*)_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{qui est une matrice inversible}),$$

avec $w^* = (0, 1, 4)^T$, $\alpha = \{2, 3\}$, $\beta = \emptyset$ et $\gamma = \{1\}$.

Par conséquent, la première condition de cette proposition est satisfaite et est ainsi la seconde, puisque β est vide. Donc, J , \tilde{J} , H et \tilde{H} sont des matrices inversibles (d'après les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2).

D'autre part, un calcul direct de la matrice Jacobienne $H \in \partial\Phi(z^*)$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec ϕ étant l'une des fonctions NCP, ϕ_{\min} ou ϕ_{FB} , montre qu'elle est inversible.

De plus, nous avons

$$\tilde{F} = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $\tilde{y}^* = Ax^* = (-1, 4)^T$. Le calcul direct de la matrice Jacobienne $\tilde{H} \in \partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ montre qu'elle est inversible et est donnée par

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 2.4.2. Soit

$$B = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 0 \\ -11 & 9 & -1 \\ 6 & -10 & 23 \end{bmatrix}.$$

Le lemme 2.2.1 assure que $\lambda^* = 23$ est une solution de PCVP associé à la matrice B avec $x^* = (0, 0, 1)^T$ le vecteur propre associé. Dans ce cas, nous avons $y^* = \lambda^*x^* - Bx^* = (0, 1, 0)^T$ et $\tilde{y}^* = Bx^* = (0, -1, 23)^T$. Nous posons alors

$$z^* = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 23)^T, \quad \tilde{z}^* = (0, 0, 1, 0, -1, 23, 23)^T,$$

et nous montrons que z^* est une “bonne solution” de $\Phi(z) = 0$ (respectivement $\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = 0$). Une application directe de la proposition 2.4.3 donne

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & 14 & 1 & 0 \\ -6 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G'(w^*)_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{qui est une matrice inversible}),$$

avec $w^* = (0, 0, 1, 23)^T$, $\alpha = \{3, 4\}$, $\beta = \{1\}$ et $\gamma = \{2\}$. De plus, le complément de Schur de $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$

$$G'(w^*)_{\beta\beta} - G'(w^*)_{\beta\alpha}G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(w^*)_{\alpha\beta} = 8 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 > 0$$

est évidemment une P -matrice. D'où, J , \tilde{J} , H et \tilde{H} sont des matrices inversibles d'après les théorèmes 2.4.1 et 2.4.1. D'autre part, le calcul direct de H , avec ϕ étant la fonction ϕ_{\min} définie par (2.14), implique

$$H = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 1-\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 14 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $\delta \in [0, 1]$. Le déterminant de H est donné par

$$\det(H) = 8 - 7\delta.$$

Nous notons que puisque $\delta \in [0, 1]$, alors H est inversible. De même, le déterminant de la matrice jacobienne \tilde{H}

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -23 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 15 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 9 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -10 & 23 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

est

$$\det(\tilde{H}) = -23(23 - 15\delta).$$

Donc, \tilde{H} est inversible puisque $\delta \in [0, 1]$.

Exemple 2.4.3. Soit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De façon analogue aux deux exemples ci-dessus, en utilisant le lemme 2.2.1, $\lambda^* = 1$ est une solution de PCVP associé à C avec $x^* = (1, 0)^T$ le vecteur propre, $y^* = \lambda^* x^* - Cx^* = (0, 0)^T$ et $\tilde{y}^* = Cx^* = (1, 0)^T$. Nous allons montrer que

$$z^* = (1, 0, 0, 0, 1)^T, \quad \text{et} \quad \tilde{z}^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T$$

sont des “mauvaises solutions” en montrant que les matrices Jacobiennes H et \tilde{H} ne sont pas toujours inversibles. Alors, en considérant la fonction min, un calcul direct de $H \in \partial\Phi(z^*)$ donne

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $\delta \in [0, 1]$. Nous avons

$$\det(H) = -\delta,$$

ce qui signifie que

$$H \text{ est inversible si et seulement si } \delta \in]0, 1].$$

De la même façon, puisque

$$\det(\tilde{H}) = 1 - \delta,$$

où $\delta \in [0, 1]$, et

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \delta & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$\tilde{H} \text{ is inversible si et seulement si } \delta \in [0, 1[.$$

D'autre part, en utilisant la proposition 2.4.3, nous obtenons

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G'(w^*)_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ une matrice inversible,}$$

avec $\alpha = \{1, 3\}$, $\beta = \{2\}$ et $\gamma = \emptyset$. Cependant, puisque le complément de Schur de $G'_{\alpha\alpha}(w^*)$ est égal à zéro, alors, ce n'est pas une P -matrice. Donc, la deuxième condition de la proposition 2.4.3 n'est pas satisfaite.

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons comparer les trois solveurs suivants : LPM, SNM_{FB} et SNM_{min} . Notons que SNM_{FB} signifie la méthode SNM en prenant ϕ_{FB} comme fonction NCP et de même pour SNM_{min} mais en considérant la fonction ϕ_{min} . D'abord nous allons les tester sur trois matrices particulières puis sur un nombre plus grand d'exemples.

2.5.1 Test sur trois matrices particulières

La deuxième expérience numérique sera donnée en prenant des matrices d'ordre 3, 4 et 5 qui sont connues à avoir exactement 9, 23 et 57 valeurs propres de Pareto, respectivement.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 2 \\ -4 & 9 & 1 \\ -6 & -1 & 13 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 132 & -106 & 18 & 81 \\ -92 & 74 & 24 & 101 \\ -2 & -44 & 195 & 7 \\ -21 & -38 & 0 & 230 \end{bmatrix}$$

et

$$A_3 = \begin{bmatrix} 788 & -780 & -256 & 156 & 191 \\ -548 & 862 & -190 & 112 & 143 \\ -456 & -548 & 1308 & 110 & 119 \\ -292 & -374 & -14 & 1402 & 28 \\ -304 & -402 & -66 & 38 & 1522 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la méthode SNM, nous allons comparer la méthode LPM avec SNM_{FB} et SNM_{min} . Nous choisissons ainsi le nombre d'itérations, le temps d'exécution et le nombre d'échecs comme des outils de comparaison.

Remarque 2.5.1. Dans notre cas, un échec est déclaré si l'un des deux cas suivants est satisfait :

1. La matrice Jacobienne est mal conditionnée.
2. Le nombre d'itérations dans l'algorithme SNM dépasse 100.

Les résultats de la comparaison sont résumés dans le tableau ci-dessous où "Iter" désigne la moyenne du nombre d'itérations, "Temps" désigne la moyenne du temps de calcul et "Echec (%)" représente le pourcentage du nombre d'échec pour trouver une solution de Pareto.

Méthodes	A_1			A_2			A_3		
	Iter	Temps	Echec (%)	Iter	Temps	Echec (%)	Iter	Temps	Echec (%)
LPM	4	0.0003	0	6	0.0006	0	7	0.0004	0
SNM_{FB}	8	0.0012	5	10	0.0015	16	11	0.0014	31
SNM_{min}	2	0.0003	47	2	0.0008	71	2	0.0007	95

TABLE 2.2 – Comparaison des trois solveurs en appliquant SNM aux matrices A_1 , A_2 et A_3 .

Remarque 2.5.2. Nous notons que la méthode LPM trouve les 57 valeurs propres de Pareto de A_3 en prenant 10^3 points initiaux tandis que les deux autres solveurs ont besoin d'un nombre plus grand de points. Pour cela, dans cette expérience, nous avons augmenté le nombre des points initiaux à 10^5 , afin d'obtenir ses solutions simultanément par les trois solveurs.

Conclusion. Comme un premier test numérique de la comparaison de trois solveurs, il est clair qu'en comparant le pourcentage d'échecs de chaque solveur, LPM capte notre attention. Nous pouvons également observer que le nombre d'itérations de SNM_{FB} est élevé par rapport aux deux autres. Dans la section suivante, nous confirmons notre résultat en élargissant l'ensemble des exemples testés. Par ailleurs, nous allons comparer le temps nécessaire pour résoudre chaque problème par les trois solveurs, car pour le moment, LPM et SNM_{min} ont presque le même temps de calcul.

2.5.2 Profils de performance

Dans cette section, nous allons comparer les trois méthodes déjà mentionnées dans les sections 3 et 4, nommées : LPM, SNM_{FB} et SNM_{min}. Afin de compléter cette expérience, nous proposons les *profils de performance*, développés par E. D. Dolan et J. J. Moré [33], comme un outil pour l'analyse comparative de ces solveurs. Le profil de performance pour un solveur est la fonction de distribution (cumulative) pour une métrique de performance. Les résultats de référence, "Benchmark results", sont générés par l'exécution d'un solveur sur un ensemble des problèmes et l'enregistrement des informations d'intérêts. Pour cela, nous introduisons, dans cette section, la notion d'un profil de performance comme un moyen d'évaluer et de comparer les performances de l'ensemble des solveurs $S = \{\text{LPM}, \text{SNM}_{\text{FB}}, \text{SNM}_{\text{min}}\}$ sur un ensemble de test $P = \{\text{ensemble des matrices}\}$. Nous posons " $n_s = 3$ " le nombre des solveurs et en raison de l'absence d'une bibliothèque consacrée au problème PCVP, nous avons choisi " $n_p = 100$ " problèmes ou matrices à tester, dont la plupart d'elles sont prises du *Matrix Market* [11], avec une taille inférieure à 350. Comme un critère d'arrêt, nous utilisons, dans l'algorithme 1 du chapitre 1,

$$\|\Phi(z^k)\| < 10^{-8}.$$

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés par la comparaison du temps de calcul, nombre d'itérations, nombre d'échecs et nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur, en tant que mesures de performance, bien que, les idées ci-dessous peuvent être utilisées avec autres mesures. Pour chaque problème p et solveur s , nous définissons

$t_{p,s}$ = mesure de performance d'intérêt et qui représente soit

- le temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème p par le solveur s correspondant à la figure 2.1, soit
- le nombre maximal des solutions correspondant à la figure 2.2, soit
- le nombre d'échecs (dans le sens de la remarque 2.5.1) correspondant à la figure 2.3, soit
- la moyenne du nombre d'itérations correspondant à la figure 2.4.

Nous avons besoin des données de référence pour la comparaison. Pour cela, nous allons comparer la performance du problème p détectée par le solveur s avec la meilleure performance trouvée par n'importe quel solveur pour ce même problème. Alors, nous allons utiliser le rapport de performance suivant, connu en littérature sous le nom, *ratio de performance*

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : s \in S\}},$$

Nous supposons qu'un paramètre $r_M \geq r_{p,s}$, pour tout p, s , est choisi, et $r_{p,s} = r_M$ si et seulement si un solveur s n'arrive pas à résoudre le problème p . Nous notons que le choix de r_M n'affecte pas l'évaluation des performances.

La performance du solveur s pour un problème donné peut être intéressante, mais nous préférons obtenir une évaluation globale de la performance du solveur. Pour cela, nous définissons le *profil de performance* d'un solveur s par

$$\rho_s(t) = \frac{1}{n_p} \text{size} \{p \in P : r_{p,s} \leq t\},$$

où t est un facteur dans \mathbb{R} . Alors $\rho_s(t)$ est la probabilité pour que le solveur s ait un rapport de performance inférieur à t . La fonction $\rho_s(t)$ est une fonction de distribution (cumulative) pour le rapport de performance.

Nous utilisons *profil de performance* pour la fonction de distribution d'une métrique de performance. Notre exigence est que la courbe de $\rho_s(t)$ révèle toutes les caractéristiques de la

performance majeure. En particulier, si l'ensemble des problèmes P est suffisamment grand, alors les solveurs ayant la grande probabilité doivent être préférés.

Le profil de performance $\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ pour un solveur s est une fonction croissante et constante par morceaux. La valeur $\rho_s(1)$ donne la probabilité du solveur qui va gagner parmi les trois, tandis que, pour une grande valeur de t , $\rho_s(t)$ mesure la robustesse du solveur s . Par suite, avec les profils de performance, nous pouvons maintenant comparer la façon de l'exécution d'un solveur par rapport aux autres en prenant, en considération, les quatre critères.

Les expériences numériques sont effectuées dans un système d'exploitation Mac Powerbook 10.6.8 avec un processeur de 2.33 GHz Intel Core 2 Duo et de mémoire 2Go. Tous les codes sont exécutés en MATLAB 7.7. Au lieu d'afficher et présenter les résultats obtenus dans un tableau, nous allons les illustrer par des figures. Autrement dit, nous traçons

$$\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$

Par suite, les figures, qui suivent, montrent les profils de performance dans différentes gammes afin de refléter les différents domaines d'intérêt. L'échelle utilisée dans notre étude est une échelle semi-logarithmique. Notre but est de montrer comment les profils de performance fournissent des informations objectives pour l'analyse d'un large ensemble P .

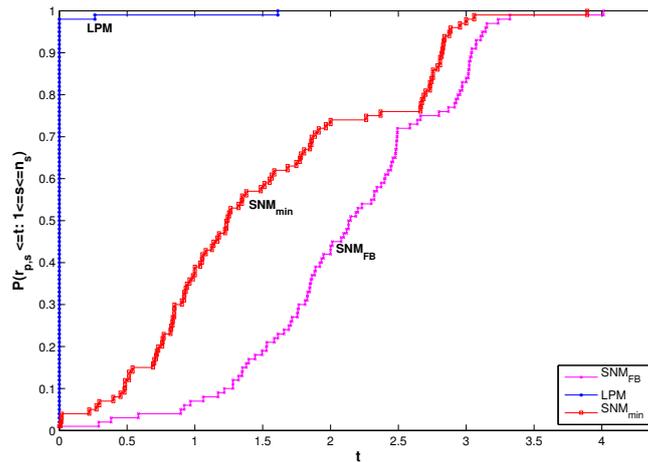


FIGURE 2.1 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.

La figure ci-dessus présente les profils de performance de trois solveurs où la mesure de performance est le temps d'exécution. Il est clair que la méthode LPM capte notre attention (admet la plus grande valeur de probabilité). En fait, dans l'intervalle $[0, 1]$, LPM est capable de résoudre 99% des problèmes, tandis que les autres solveurs n'ont pas atteint les 40% et nécessitent plus de temps. Nous remarquons aussi que SNM_{FB} est le plus lent par rapport aux autres. Cependant, pour $t \geq 2$, les trois algorithmes confirment leur robustesse. Figure 2.1 indique également que, par rapport au temps de calcul, avec les mêmes points initiaux et sous le même critère d'arrêt, LPM est le solveur le plus rapide, suivi respectivement par SNM_{min} et SNM_{FB}.

Figure 2.2 affiche les profils de performance de trois méthodes en tenant compte de nombre maximal des valeurs propres de Pareto. Nous remarquons que LPM est le gagnant, il est capable de résoudre 99% des problèmes et détecter le nombre maximal de solutions. Nous notons aussi que SNM_{FB}, par comparaison avec les autres solveurs, n'arrive pas à trouver le nombre maximal de valeurs propres pour chaque problème mais sa performance augmente avec la croissance du

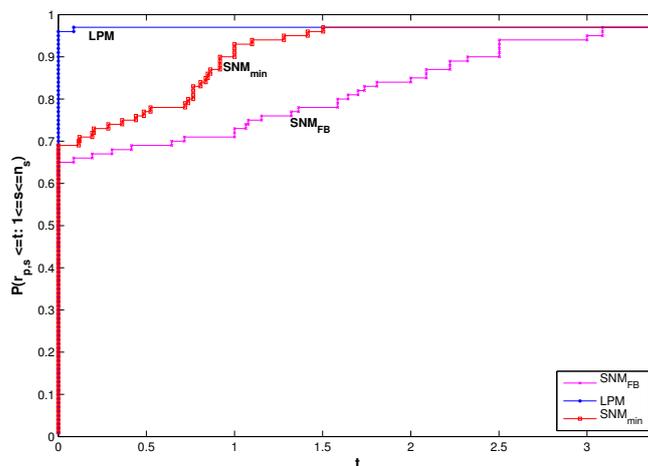


FIGURE 2.2 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.

facteur t .

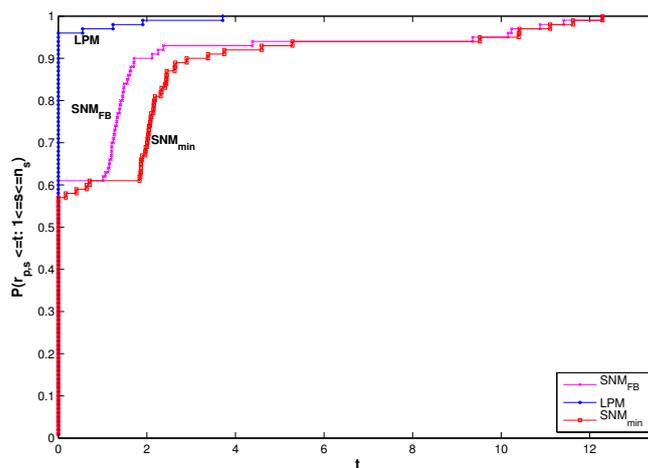


FIGURE 2.3 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.

LPM attire notre attention dans la figure 2.3, avec sa capacité à résoudre plus que 99% des problèmes. Nous avons choisi le nombre d'échecs comme mesure de performance. Nous rappelons que le nombre d'échecs est pris suivant la remarque 2.5.1. Un autre point important à dire, d'après cette figure, est que le nombre d'échecs trouvé par SNM_{min} est beaucoup plus grand que celui trouvé par les autres solveurs. Par suite, nous déduisons, à nouveau, que LPM est le gagnant, suivi respectivement par SNM_{FB} et SNM_{min}.

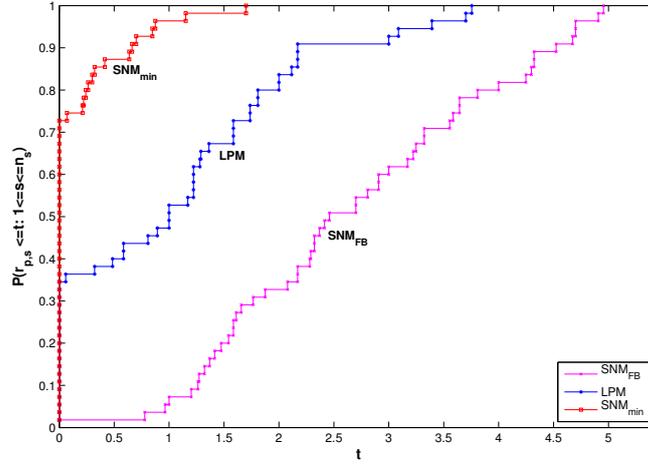


FIGURE 2.4 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.

Dans la figure 2.4, nous illustrons les profils de performance de trois solveurs en considérant le nombre d'itérations nécessaire comme mesure de performance. Nous remarquons que SNM_{\min} est le gagnant (admet la plus grande valeur de probabilité) suivi par LPM. Nous notons aussi que SNM_{FB} a besoin plus de nombre d'itérations pour résoudre les problèmes. La performance de LPM devient intéressante au delà de $t = 2$.

Conclusion. Nous déduisons, d'après la comparaison de trois solveurs sur un ensemble de problèmes et en tenant compte de temps de calcul, nombre d'échec, nombre maximal de solutions et nombre d'itérations, que LPM confirme son efficacité, sa robustesse et sa capacité à résoudre le problème PCVP. Il est donc plus performant que les deux autres solveurs.

2.6 Applications aux problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto

Dans cette section, nous allons étendre notre étude aux problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées (ou bi-valeurs propres) bi-PCVP au sens de Pareto, connus en littérature sous le nom *bivariate eigenvalue complementarity problems*. Surprenant, les simulations numériques pour ce sujet n'ont jamais été étudiées avant. Nous proposons de généraliser la méthode LPM, définie dans la section 3, et d'utiliser les mêmes outils mentionnés dans la section précédente comme des mesures de performance pour comparer notre méthode avec SNM_{FB} et SNM_{\min} pour résoudre bi-PCVP. Tout d'abord, nous allons décrire brièvement un tel problème.

2.6.1 Problèmes classiques aux valeurs propres bivariées (bi-EiP)

Soient les matrices réelles $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Le problème classique sans contrainte aux valeurs propres bivariées (bi-EiP) est défini par

$$(\text{bi-EiP}) \begin{cases} \text{Trouver le couple } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \text{ tels que} \\ Ax + By = \lambda x \\ Cx + Dy = \mu y \\ \|x\| = \|y\| = 1. \end{cases} \quad (2.69)$$

Le problème (2.69) peut être réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} Ez = \Lambda z, \\ \|z_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (2.70)$$

où

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \Lambda := \text{diag}\{\lambda \mathbf{I}_n, \mu \mathbf{I}_m\} \quad \text{et} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Un tel couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est appelé une forte bi-valeur propre de la matrice bloc E . Si B et C sont des matrices nulles, alors le système (2.69) se divise en deux types distincts de problèmes classiques aux valeurs propres. Sinon, B et C induisent un couplage entre les vecteurs d'état x et y .

Les problèmes sans contraintes aux valeurs propres bivariées (bi-EiP) se posent dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et d'ingénierie [63, 117]. Ils sont nécessaires pour la compréhension des problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées bi-EiCP. Bi-EiP ont d'abord été étudiés par Hotelling dans un bref document [53] en 1935. Son étude définitive du problème est apparue un an plus tard dans [54] et reste toujours comme une référence clé dans la littérature statistique multivariée. En 1961, une méthode itérative, proposée par Horst [52], a été utilisée pour résoudre bi-EiP. Trois décennies plus tard, Chu et Watterson [23] ont prouvé la convergence de la méthode itérative de Horst. Parmi les contributions récentes de bi-EiP, nous pouvons citer [8, 24, 46, 75]. Dans cette section, nous proposons l'utilisation de SNM pour résoudre bi-EiCP.

2.6.2 Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées (avec contraintes)

Le problème aux valeurs propres bivariées abordé dans cette section est une généralisation de (2.69). Le vecteur d'état x appartient au cône convexe fermé P de \mathbb{R}^n . Grosso modo, P sert à modéliser un nombre éventuellement infini de contraintes d'inégalité. De même, le vecteur d'état y se trouve dans un cône convexe fermé Q de \mathbb{R}^m . Au lieu d'un système d'équations, comme dans (2.69), le modèle d'équilibre considéré est maintenant un système de problèmes de complémentarité :

$$\begin{cases} P \ni x \perp (Ax + By - \lambda x) \in P^+, \\ Q \ni y \perp (Cx + Dy - \mu y) \in Q^+, \end{cases} \quad (2.71)$$

où P^+ et Q^+ représentent les cônes duales de P et Q , respectivement.

Notons que le système (2.71) peut être reformulé comme une inéquation variationnelle, à savoir

$$\begin{cases} (x, y) \in P \times Q \quad \text{et} \\ (Ax + By - \lambda x)^T(\bar{x} - x) + (Cx + Dy - \mu y)^T(\bar{y} - y) \geq 0, \quad \text{pour tout } (\bar{x}, \bar{y}) \in P \times Q. \end{cases}$$

Ce type d'inéquations variationnelles permet de modéliser un certain nombre de modèles d'équilibre en mécanique non-lisse discuté par certains chercheurs (voir par exemple, [10]).

Nous avons mentionné dans les sections précédentes la grande importance apportée par EiCP, définie par (2.1), durant les dernières décennies. De même, il y a de bonnes raisons pour l'étude d'un problème aux valeurs propres bivariées avec contraintes comme le système (2.71). Imaginons un instant qu'on doit résoudre un problème de minimisation

$$\begin{cases} \min & x^T U x + y^T W x + y^T V y, \\ & x \in P, \quad y \in Q, \\ & \|x\| = 1, \quad \|y\| = 1, \end{cases} \quad (2.72)$$

avec un effet de couplage sur les vecteurs x et y induit par une certaine matrice W . Si nous ne prenons pas en compte la stationnarité ou les conditions d'optimalités de premier ordre pour (4.16), alors, à côté de la condition de la double normalisation, nous obtenons le système (2.71) avec

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U + U^T}{2} & \frac{W^T}{2} \\ \frac{W}{2} & \frac{V + V^T}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [7].

Exemple 2.6.1. Soit P un cône convexe fermé non nul dans un espace euclidien \mathbb{R}^n . L'angle maximal de P , noté par $\theta_{\max}(P)$, est le plus grand angle qui peut être formé en sélectionnant une paire de vecteurs unitaires de P . En d'autres termes,

$$\cos[\theta_{\max}(P)] = \min_{\substack{x, y \in P, \\ \|x\|=1, \|y\|=1}} y^T x$$

Ceci est un cas particulier du problème de minimisation (4.16).

2.6.2.1 Bi-spectre du problème aux valeurs propres avec contraintes

Nous distinguons deux spectres de bi-valeurs propres, différents en général :

$$\mathbf{S}(E, P, Q) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : (2.71) \text{ admet une solution dans } \mathbb{S}_{n,m}\},$$

et

$$\mathbf{T}(E, P, Q) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : (2.71) \text{ admet une solution dans } \mathbb{T}_{n,m}\},$$

où

$$\mathbb{S}_{n,m} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : \|x\| = 1, \|y\| = 1\},$$

et

$$\mathbb{T}_{n,m} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \neq 0, y \neq 0\}.$$

Chaque ensemble a ses avantages et ses inconvénients. Nous nous référons au premier ensemble $\mathbf{S}(E, P, Q)$ (respectivement, le deuxième $\mathbf{T}(E, P, Q)$) comme le bi-spectre fort (respectivement, le bi-spectre faible) du système (2.71). Nous avons toujours l'inclusion

$$\mathbf{S}(E, P, Q) \subset \mathbf{T}(E, P, Q).$$

Un point important à dire est que $\mathbf{S}(E, P, Q)$ pourrait avoir un nombre infini des éléments. Comme illustré dans l'exemple suivant :

Exemple 2.6.2. Soit

$$E = \begin{bmatrix} A & 0 \\ c^T & d \end{bmatrix}.$$

Le bi-spectre fort de E n'est pas fini si le bloc A admet une valeur propre réelle λ de multiplicité géométrique supérieure à une, et de telle sorte que c n'est pas orthogonal à l'espace propre correspondant $\text{Ker}(A - \lambda \mathbf{I}_n)$. Par exemple, considérons $n = 3, m = 1$ et

$$E = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le bi-spectre fort de E est formé du segment $7 \times [-4, 6]$ et des points isolés $(8, -5)$ et $(8, 7)$.

Les bi-spectres fort et faible sont de nature différente. Deux observations sont utiles pour mettre les choses dans une perspective adéquate et appropriée. Premièrement, $\mathbf{S}(E, P, Q)$ est toujours fermé. En revanche, $\mathbf{T}(E, P, Q)$ peut être non fermé. Un bi-spectre faible est souvent une union finie de courbes lisses sur lesquelles il y a des points manquants. Deuxièmement, $\mathbf{S}(E, P, Q)$ est toujours borné. Par contre, $\mathbf{T}(E, P, Q)$ est souvent non borné.

Nous présentons dans la suite quelques résultats donnés par A. Amri et A. Seeger dans [7] concernant l'existence des bi-valeurs propres.

Proposition 2.6.1. [7] *Soit P (respectivement, Q) un cône convexe, fermé et non-nul dans \mathbb{R}^n (respectivement, \mathbb{R}^m).*

- (a) *Si E est une matrice symétrique, alors le bi-spectre fort $\mathbf{S}(E, P, Q)$ est non-vide.*
- (b) *Si E est donnée par la formule (2.73) et γ dénote la valeur minimale du problème de minimisation (4.16), alors*

$$\gamma = \min\{\lambda + \mu : (\lambda, \mu) \in \mathbf{S}(E, P, Q)\}.$$

- (c) *Soit E une matrice bloc, symétrique ou non. Si P et Q sont des cônes saillants (pointed en anglais, c'est-à-dire, $P \cap -P = \{0\}$) alors $\mathbf{T}(E, P, Q)$ est non vide.*

Nous passons maintenant au problème bi-EiCP au sens de Pareto, c'est-à-dire au cas particulier où

$$(P, Q) = (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^m).$$

2.6.3 Problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto

Pour des matrices réelles $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, le problème de complémentarité aux valeurs propres bivariées (bi-EiCP) associé aux cônes de Pareto $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^m)$ est un cas particulier du système (2.71) et est défini comme suit :

$$(\text{bi-EiCP}) \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } (x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \quad Ax + By - \lambda x \geq 0, \quad \langle x, Ax + By - \lambda x \rangle = 0, \\ y \geq 0, \quad Cx + Dy - \mu y \geq 0, \quad \langle y, Cx + Dy - \mu y \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Le couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est, dans ce cas, appelé les *valeurs propres bivariées de Pareto* de la matrice bloc E . A. Amri et A. Seeger ont généralisé le lemme 2.2.1 pour caractériser le spectre du problème (2.74). Pour plus de détails, voir [7]. Le lemme suivant est dans ce sens.

Lemme 2.6.1. [7] *Soit le couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Le problème bi-EiCP défini par (2.74) admet une solution non-nulle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*
- (ii) *Il existe des ensembles d'indices $I \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ et $J \subseteq M = \{1, \dots, m\}$ tels que le système*

$$\begin{cases} A_{II}\xi + B_{IJ}\eta = \lambda\xi, \\ C_{JI}\xi + D_{JJ}\eta = \mu\eta, \end{cases} \quad (2.75)$$

admet une solution $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{|I|+|J|}$ satisfaisant les conditions d'intériorités

$$\xi \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{|I|}), \quad \eta \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{|J|}) \quad (2.76)$$

et les conditions de liaison

$$\sum_{k \in I} a_{ik}\xi_k + \sum_{l \in J} b_{il}\eta_l \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus I, \quad (2.77)$$

$$\sum_{k \in I} c_{jk} \xi_k + \sum_{l \in J} d_{jl} \eta_l \geq 0, \quad \forall j \in M \setminus J. \quad (2.78)$$

En outre, (x, y) peut être construit à partir de (ξ, η) en posant

$$x_i = \begin{cases} \xi_i & \text{si } i \in I, \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus I, \end{cases} \quad \text{and} \quad y_j = \begin{cases} \eta_j & \text{si } j \in J, \\ 0 & \text{si } j \in M \setminus J. \end{cases} \quad (2.79)$$

Afin d'appliquer notre méthode LPM, nous allons réécrire le bi-EiCP sous la forme

$$(\text{bi-PCVP}) \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } (x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, \quad \lambda x - Ax - By \geq 0, \quad \langle x, \lambda x - Ax - By \rangle = 0, \\ y \geq 0, \quad \mu y - Cx - Dy \geq 0, \quad \langle y, \mu y - Cx - Dy \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Le couple (λ, μ) est censé être strictement positif. Ensuite, et de la même manière que PCVP (voir (2.27)), comme une première étape de la reformulation de bi-PCVP en un système d'équations, nous écrivons

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & y &\geq 0, \\ u &\geq 0, & v &\geq 0, \\ u^T x &= 0, & v^T y &= 0, \\ \lambda x - Ax - By - u &= 0, & \mu y - Cx - Dy - v &= 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 &= 0, & \langle \mathbf{1}_m, y \rangle - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant les fonctions NCP, les trois premières conditions du système ci-dessus peuvent être brièvement réécrites sous la forme $\mathcal{U}_\phi(x, u) = 0$ et $\mathcal{V}_\phi(y, v) = 0$, où $\mathcal{U}_\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}_\phi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont respectivement données par

$$\mathcal{U}_\phi(x, u) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, u_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, u_n) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_\phi(y, v) = \begin{bmatrix} \phi(y_1, v_1) \\ \vdots \\ \phi(y_m, v_m) \end{bmatrix}.$$

Avec, ϕ est l'une des fonctions NCP définies par (2.13) ou (2.14).

Par suite, nous sommes amenés à résoudre le système

$$\Phi(z) = 0_{\mathbb{R}^d}, \quad (2.81)$$

à $d = 2(n + m + 1)$ équations, où $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction localement lipschitzienne définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, u, y, v, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\phi(x, u) \\ \mathcal{V}_\phi(y, v) \\ \lambda x - Ax - By - u \\ \mu y - Cx - Dy - v \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \langle \mathbf{1}_m, y \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Lemme 2.6.2. *La fonction Φ définie par (2.82) est semi-lisse avec ϕ étant l'une des fonctions NCP, (2.13) ou (2.14). De plus, sa Jacobienne généralisée de Clarke en $z = (x, u, y, v, \lambda, \mu)$ est donnée par*

$$\partial\Phi(z) = \begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & F_2 & 0 & 0 \\ \lambda\mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & -B & 0 & x & 0 \\ -C & 0 & \mu\mathbf{I}_m - D & -\mathbf{I}_m & 0 & y \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_m^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

où $[E_1, F_1] \in \partial\mathcal{U}_\phi(x, u)$ et $[E_2, F_2] \in \partial\mathcal{V}_\phi(y, v)$. Plus précisément

$$E_1 = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad F_1 = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

et

$$E_2 = \text{diag}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m), \quad F_2 = \text{diag}(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

sont des matrices diagonales dont l' i -ème et le j -ème éléments diagonaux de chacune sont donnés par les deux cas suivants :

Premier cas : si

$$\phi(x, u) = \phi_{\text{FB}}(x, u) \quad \text{et} \quad \phi(y, v) = \phi_{\text{FB}}(y, v),$$

alors, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} a_i = 1 - \frac{x_i}{\|(x_i, u_i)\|} \\ b_i = 1 - \frac{u_i}{\|(x_i, u_i)\|} \end{cases} \quad \text{si } (x_i, u_i) \neq (0, 0), \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} a_i = 1 - \xi_i \\ b_i = 1 - \rho_i \end{cases} \quad \text{si } (x_i, u_i) = (0, 0), \quad (2.85)$$

pour chaque $(\xi_i, \rho_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(\xi_i, \rho_i)\| \leq 1$ et

$$\begin{cases} \tilde{a}_j = 1 - \frac{y_j}{\|(y_j, v_j)\|} \\ \tilde{b}_j = 1 - \frac{v_j}{\|(y_j, v_j)\|} \end{cases} \quad \text{si } (y_j, v_j) \neq (0, 0), \quad (2.86)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_j = 1 - \alpha_j \\ \tilde{b}_j = 1 - \beta_j \end{cases} \quad \text{si } (y_j, v_j) = (0, 0), \quad (2.87)$$

pour chaque $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(\alpha_j, \beta_j)\| \leq 1$.

Deuxième cas : si

$$\phi(x, u) = \phi_{\min}(x, u) \quad \text{et} \quad \phi(y, v) = \phi_{\min}(y, v),$$

alors, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} a_i = 0, & b_i = 1 & \text{si } x_i > u_i, \\ a_i = 1, & b_i = 0 & \text{si } x_i < u_i, \\ a_i = \gamma_i, & b_i = 1 - \gamma_i, & \text{si } x_i = u_i \text{ tel que } \gamma_i \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.88)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{a}_j = 0, & \tilde{b}_j = 1 & \text{si } y_j > v_j, \\ \tilde{a}_j = 1, & \tilde{b}_j = 0 & \text{si } y_j < v_j, \\ \tilde{a}_j = \Gamma_j, & \tilde{b}_j = 1 - \Gamma_j, & \text{si } y_j = v_j \text{ tel que } \Gamma_j \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.89)$$

2.6.4 “Lattice projection method” appliquée au bi-PCVP

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode LPM au problème bi-PCVP. Autrement dit, nous allons reformuler bi-PCVP en un système d'équations non-linéaires qui ne reposent pas sur l'approche de complémentarité. Pour cela, nous donnons le lemme suivant.

Lemme 2.6.3. *Résoudre bi-PCVP, avec $(\lambda, \mu) > 0$, est équivalent à trouver les racines de la fonction non-linéaire et semi-lisse $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par*

$$\Phi(z) = \Phi(x, u, y, v, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} u^+ - \lambda x \\ Ax + By - u \\ v^+ - \mu y \\ Cx + Dy - v \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \langle \mathbf{1}_m, y \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

De plus, la Jacobienne généralisée de Clarke Φ en $z = (x, u, y, v, \lambda, \mu)$ est donnée par

$$\partial\Phi(z) = \begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{I}_n & E & 0 & 0 & -x & 0 \\ A & -\mathbf{I}_n & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\mathbf{I}_m & F & 0 & -y \\ C & 0 & D & -\mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_m^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

où $E \in \partial(\cdot)^+(u)$ et $F \in \partial(\cdot)^+(v)$. Plus précisément,

$$E = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{et} \quad F = \text{diag}(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{avec}$$

$$a_i = \frac{1 + \text{Sign}(u_i)}{2} \quad \text{et} \quad b_j = \frac{1 + \text{Sign}(v_j)}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n \quad \text{et } j = 1, \dots, m.$$

2.6.5 Expérience numérique de bi-PCVP

Dans cette section, de la même manière que la section 2.5.2, nous allons étudier numériquement le problème bi-PCVP en comparant les mêmes trois solveurs mentionnés dans les sections précédentes et qui sont :

- (i) SNM_{FB}, où la fonction vectorielle $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie par (2.82) et ϕ est la fonction Fischer-Burmeister (2.13),
- (ii) SNM_{min}, avec Φ donnée par (2.82) et ϕ est la fonction min (2.14),

(iii) La généralisation de LPM, où Φ est définie par (2.90).

Pour accomplir cette expérience, nous allons utiliser les profils de performance et les mêmes critères de comparaison définis dans section 2.5.2, c'est-à-dire le temps de calcul, le nombre d'échecs, le nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur et le nombre d'itérations. En raison de la longue période nécessaire pour l'exécution de ces solveurs simultanément pour résoudre bi-PCVP, nous limitons notre analyse à un ensemble de 80 matrices. Nous allons garder les mêmes notations concernant la mesure de performance " $t_{p,s}$ ", le ratio de performance " $r_{p,s}$ " et le profil de performance " $\rho_s(t)$ " de la section 2.5.2. Nous obtenons les figures suivantes.

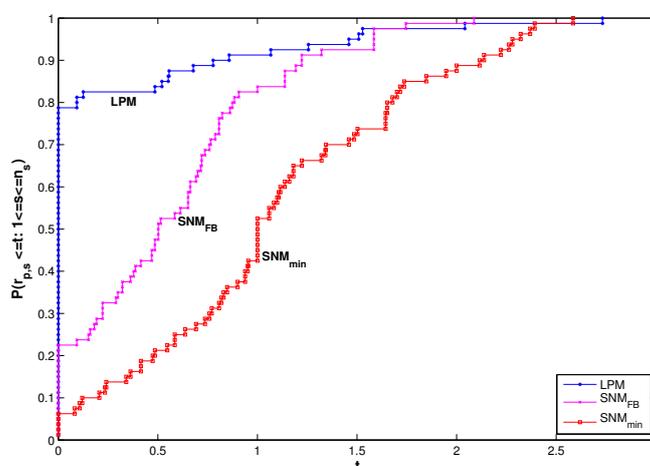


FIGURE 2.5 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps d'exécution.

Il est clair que, dans la figure ci-dessus, LPM capte notre attention car elle est capable de résoudre plus des problèmes que les autres solveurs. SNM_{FB} et SNM_{min} nécessitent plus de temps pour résoudre bi-PCVP. Alors, en tenant compte du temps d'exécution (mesure de performance), LPM est le solveur le plus rapide, suivi respectivement par SNM_{FB} et SNM_{min}.

Figure 2.6 représente les profils de performance de trois solveurs où l'outil de comparaison est le nombre d'échecs. Nous remarquons que, dans l'intervalle $[0, 1]$, LPM est capable de résoudre 95% de problèmes alors que SNM_{min} admet le plus grand nombre d'échecs que LPM et SNM_{FB}. Par suite, nous pouvons déduire que jusqu'à maintenant, LPM est le plus performant, en tenant compte des Figures 2.5 et 2.6.

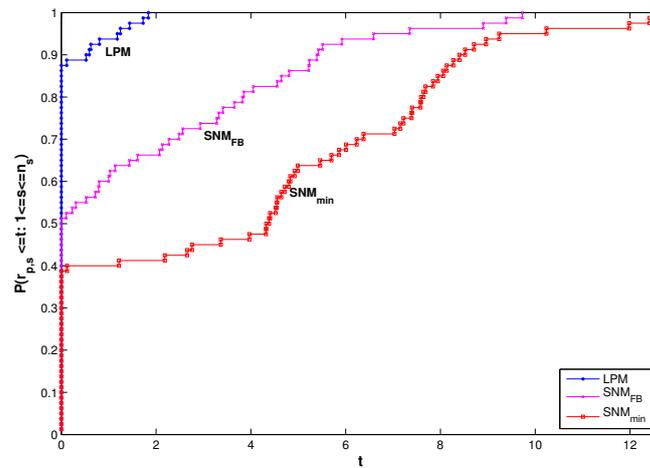


FIGURE 2.6 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs

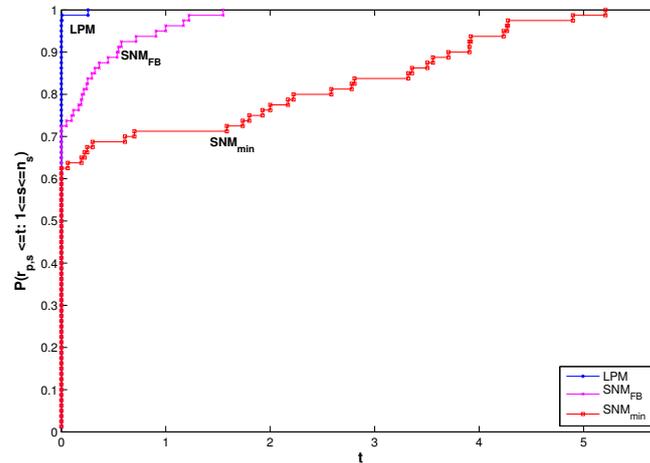


FIGURE 2.7 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.

Dans la figure ci-dessus, LPM confirme sa capacité à détecter le nombre maximal de solutions puisque dans l'intervalle $[0, 0.5]$, il résout plus de 90% de problèmes. SNM_{FB} devient intéressant au delà de $t = 1$. Nous notons également que la performance de SNM_{min} est faible par rapport aux autres. Pour cette raison, nous allons remarquer, dans la figure suivante, en tenant compte de nombre d'itérations (critère de comparaison), que les trois méthodes n'arrivent pas à résoudre 80% de problèmes.

Figure 2.8 affiche les profils de performance de trois solveurs où l'outil de comparaison est le nombre d'itérations correspondant aux valeurs propres communes de chaque problème détectées par les trois solveurs, simultanément. Nous remarquons que les performances de LPM et SNM_{min} sont très proches et lorsque $t \geq 0.4$, les trois solveurs deviennent comparables.

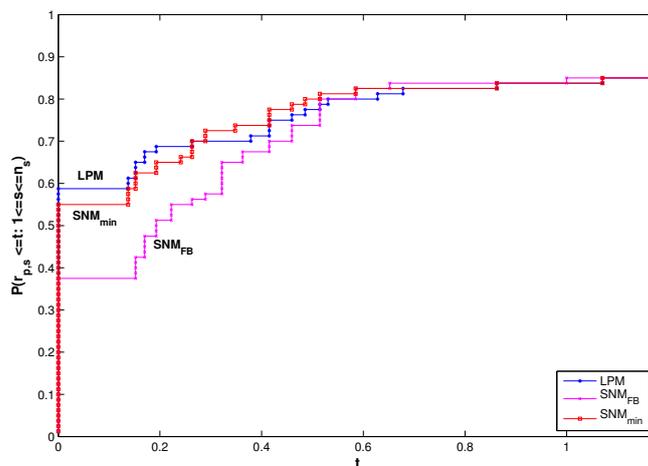


FIGURE 2.8 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d’itérations.

En raison de la grande différence de performance entre le couple (LPM, SNM_{FB}) et SNM_{min} dans la figure 2.7, où le nombre maximal de solutions est choisi comme un critère de comparaison, les performances de trois solveurs, données dans la figure 2.8, n’atteignent pas les 80%. Ceci revient à la liaison entre le nombre d’itérations et les solutions détectées, c’est-à-dire, nous comparons seulement le nombre d’itérations des solutions communes trouvées par les trois solveurs, simultanément. Pour cela, nous allons comparer, dans la figure qui suit, la performance des solveurs LPM et SNM_{FB} correspondante à l’outil de comparaison : nombre d’itérations.

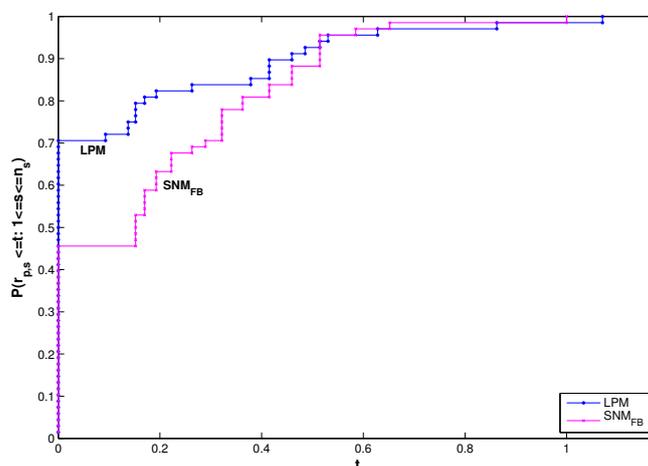


FIGURE 2.9 – Profils de performance de LPM et SNM_{FB} où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d’itérations.

Il est clair que, d’après cette figure, le nombre d’itérations détecté par SNM_{FB} est plus important que LPM puisque ce dernier est capable de résoudre plus de problèmes. SNM_{FB} a besoin plus d’itérations pour résoudre chaque problème. Par suite, LPM est le gagnant dans cette expérience. La robustesse des deux solveurs est confirmée lorsque $t \geq 0.6$.

Conclusion. Pour cette expérience numérique sur les problèmes de complémentarité aux valeurs propres bivariées au sens de Pareto bi-PCVP, la comparaison de trois solveurs montrent qu’en considérant les quatre outils de comparaison tels que le temps de calcul, le nombre d’échecs, le nombre maximal des solutions de Pareto et le nombre d’itérations, LPM confirme,

à nouveau, son efficacité, sa performance et sa robustesse à résoudre bi-PCVP.

2.7 Méthode de Newton

Dans cette section, nous continuons notre étude sur la comparaison de LPM avec des méthodes fournies dans la littérature pour résoudre le problème PCVP. Cette fois, nous allons comparer LPM avec une nouvelle technique, *Squaring technique*, basée sur l'utilisation de l'itération de la formule de Newton classique. Cette dernière est présentée par Seeger et Gajardo dans [41]. Tout d'abord, nous allons rappeler brièvement cette technique.

2.7.1 "Squaring technique"

La technique de mise au carrée, connue en littérature sous le nom, *squaring technique* permet d'enlever ou de se débarrasser des contraintes de positivité. Pour être plus précis, nous introduisons le changement de variables

$$x = u^{[2]} = u \odot u, \quad (2.92)$$

$$y = v^{[2]} = v \odot v, \quad (2.93)$$

où \odot représente l'opération binaire sur \mathbb{R}^n donnée par $a \odot b = a_i b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, en se basant sur la technique de mise au carrée, (2.8) devient un système

$$\begin{cases} u \odot v = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ (\lambda \mathbf{I}_n - A)u^{[2]} - v^{[2]} = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \|u\|^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (2.94)$$

de $2n + 1$ équations avec le même nombre de variables inconnues, à savoir,

$$z = (u, v, \lambda)^T = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, \lambda)^T \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Le système lisse donné par (2.94) peut être résolu en appliquant la formule de Newton récursive

$$z^{t+1} = z^t - [\Phi'(z^t)]^{-1} \Phi(z^t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.95)$$

à la fonction vectorielle $\Phi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} u \odot v \\ (\lambda \mathbf{I}_n - A)u^{[2]} - v^{[2]} \\ \|u\|^2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

La matrice Jacobienne de Φ au point z est donnée par

$$\partial \Phi(z) = \begin{bmatrix} D_v & D_u & 0 \\ 2(\lambda \mathbf{I}_n - A) \bullet u & -2D_v & u^{[2]} \\ 2u^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

où $M \bullet u$ est une matrice d'ordre n avec des entrées $(M \bullet u)_{i,j} = m_{i,j} u_j$ et $D_w = \mathbf{I}_n \bullet w$ est une matrice diagonale dont les entrées diagonales sont les composantes du vecteur $w \in \mathbb{R}^n$.

2.7.2 Résultats numériques

Dans cette section, nous comparons la méthode de Newton NM définie dans la section précédente avec LPM. Comme des outils de comparaison, nous choisissons les mêmes critères utilisées dans la section 2.5.2, telles que : le temps de calcul, le nombre d'itérations, le nombre d'échecs et le nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur. Les figures suivantes montrent les résultats obtenus.

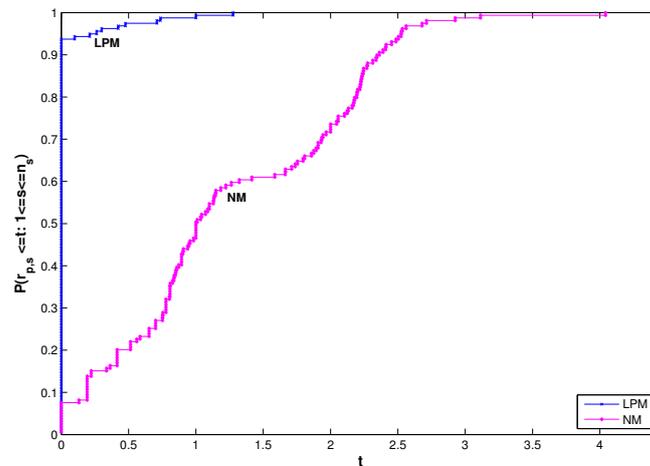


FIGURE 2.10 – Profils de performance de LPM et NM où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.

Figure 2.10 montre les profils de performance de LPM et NM où la mesure de performance est le temps de calcul. LPM attire notre attention puisque dans l'intervalle $[0, 0.5]$, ce dernier résout plus de 95% des problèmes, tandis que NM n'atteint pas les 20%.

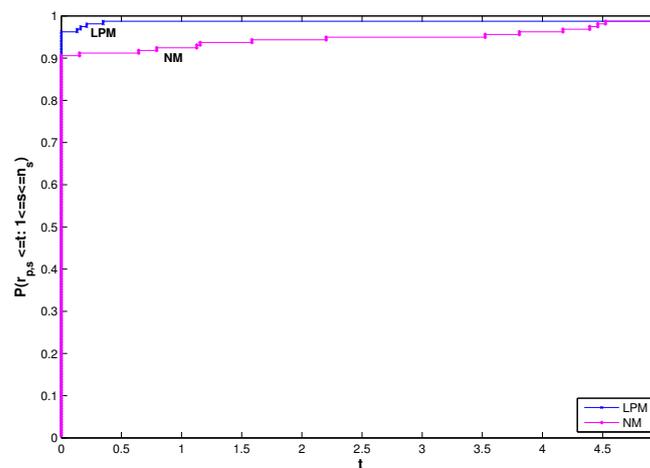


FIGURE 2.11 – Profils de performance de LPM et NM où $t_{p,s}$ représente le nombre maximal de solutions.

Dans la figure 2.11, nous comparons le nombre maximal des solutions détectées par LPM et NM. Nous remarquons que LPM est la gagnante puisqu'elle a la plus grande valeur de probabilité.

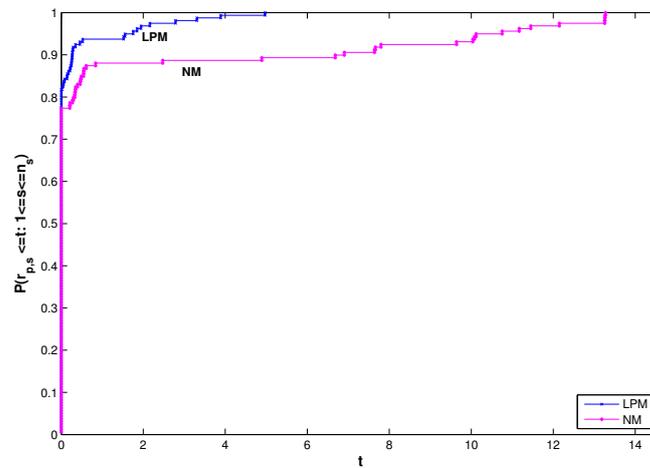


FIGURE 2.12 – Profils de performance de LPM et MN où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.

Figure 2.12 affiche les profils de performance de deux méthodes en tenant compte de nombre d'échecs (voir Remarque 2.5.1). LPM est toujours gagnant puisque NM a le plus grand nombre d'échecs.

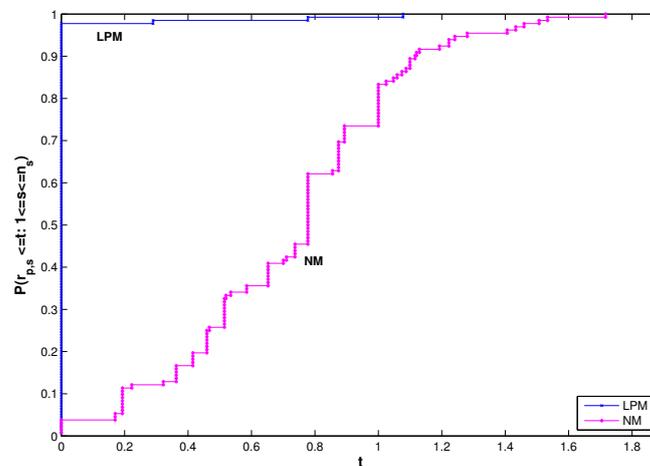


FIGURE 2.13 – Profils de performance de LPM et MN où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'itérations.

LPM capte notre attention dans la figure 2.13 où le nombre d'itérations représente la mesure de performance de deux solveurs. Dans l'intervalle $[0, 0.4]$, LPM est capable de résoudre 99% des problèmes, tandis que NM n'atteint pas les 20%. Cela veut dire que NM a besoin plus d'itérations pour détecter des solutions.

Dans la section suivante, nous allons étendre notre étude au cas du solveur Path, où nous allons le comparer avec notre nouvelle méthode LPM, en tenant compte de nombre d'évaluations de fonctions comme un outil de comparaison.

2.8 Solveur Path

Un problème mathématique fondamental est de trouver une solution d'un système d'équations non-linéaires et non-lisses. Parmi les méthodes qui abordent ce problème, la plus célèbre est la méthode de Newton semi-lisse (SNM). Dans cette section, nous allons décrire une généralisation de cette méthode, le *solveur Path* pour résoudre le problème PCVP.

Le *solveur Path* [31], pour les problèmes de complémentarité, a été introduit en 1995 et est devenu la norme à laquelle de nouveaux solveurs, pour résoudre des problèmes de complémentarité, sont comparés. Afin de décrire ce solveur, nous allons exprimer PCVP, pour construire la direction de Newton, comme l'équation *Normal Map* suivante

$$(NM) \quad G_+(z) = 0,$$

où G_+ est le *normal map* introduit par Robinson en 1992 dans [108] imposé à G définie par (2.30) sur \mathbb{R}_+^{n+1} .

$$G_+(z) := G(z^+) + z - z^+. \quad (2.98)$$

Notons que $\omega = (x, \lambda)$ résout le problème PCVP si et seulement si $\omega - G(\omega)$ résout (NM) et z résout (NM) si et seulement si z^+ résout PCVP. En effet, les *normal maps*, tels que, G , peuvent être utilisés dans un cadre plus général, où z^+ est remplacé par $P_\Omega(z)$, la projection de z sur un ensemble convexe fermé et non-vide Ω . Dans ce contexte, nous obtenons le *normal map de Robinson* suivant

$$0 = G_\Omega(z) := G(P_\Omega(z)) + z - P_\Omega(z).$$

Cela veut dire que le solveur *Path* est basée sur une méthode de Newton semi-lisse pour trouver les zéros du *normal map* (2.98). À chaque itération dans l'algorithme *Path*, une linéarisation du *normal map* (un problème de complémentarité linéaire) est résolu en utilisant l'algorithme de Lemke. Une partie essentielle de l'algorithme est le chemin construit entre le point courant x^k et le point x_N^k Newton. La forme générale de la technique de la construction du chemin, c'est-à-dire du *Path* est due à Ralph (1994) [106]. Ce chemin généralise la direction de Newton d^k dans le cas lisse et a deux objectifs : il fournit le point de Newton, et est le pivot d'un système de recherche de chemin qui permet d'amortir la méthode de Newton et d'améliorer ses propriétés de convergence. Ce chemin linéaire par morceaux est construit en utilisant des techniques pivotales ; chaque étape pivot résulte dans une nouvelle pièce linéaire du chemin.

Un chemin de recherche non-monotone [32] en utilisant le résiduel du normal map

$$\|G(z^+) + z - z^+\|$$

comme une fonction mérite est utilisé pour améliorer la robustesse du solveur *Path*. Une preuve des résultats de convergence et le taux de convergence peuvent être trouvés dans [106].

Les langages de modélisation sont de plus en plus importants aux développeurs d'applications. Ces langages, tels que AMPL, offrent un environnement adapté pour exprimer des constructions mathématiques. Ils peuvent gérer efficacement un grand volume de données et permettent aux utilisateurs de se concentrer sur le modèle plutôt que la méthodologie des solutions. Au fil du temps, les langages de modélisation ont évolué et se sont adaptés comme de nouveaux algorithmes et des classes de problèmes ont été explorées.

Une nouvelle syntaxe, *complements*, pour exprimer les relations de complémentarité a été ajoutée au langage de modélisation AMPL [37], un logiciel qui permet de formuler mathématiquement des problèmes d'optimisation et les décrire par l'utilisateur dans un langage humainement compréhensible. Les problèmes de complémentarité peuvent ainsi être formulés d'une manière naturelle, et sont facilement envoyés aux solveurs spécifiques pour les résoudre.

Afin de tester cette syntaxe pour résoudre notre problème PCVP, le solveur PATH a été relié à AMPL à l'aide des bibliothèques décrites dans [43]. Nous présentons, dans la suite, le modèle de notre problème PCVP en langage AMPL, en introduisant le nouveau opérateur, *complements*. Ensuite, nous donnons l'expression nécessaire qui fait appel au solveur *Path*.

Modèle : PCVP.mod

```

param n;
param A{1..n, 1..n};
param e{1..n};
var z{1..n+1};
subject to f1{i in 1..n}:
z[n+1] * z[i] - sum{j in 1..n} A[i, j] * z[j] >= 0;
subject to f2{i in 1..n}:
0 <= z[i] complements 0 <= z[n+1] * z[i] - sum{j in 1..n} A[i, j] * z[j];
subject to f3: sum{i in 1..n} e[i] * z[i] = 1;

```

Expression *pathampl* pour exécuter le modèle :

Afin d'exécuter le modèle du problème PCVP.mod , nous y faisons appel dans un fichier PCVP.ampl avec les données PCVP.dat et nous introduisons aussi les commandes suivantes pour faire appel au solveur *Path*.

```

option solver pathampl;
option path_options "logfile = path.log optfile=path.opt";
option presolve 0;

```

Le fichier *path.opt* ci-dessus contient des options supplémentaires pour le solveur *Path*. Pour plus de détails, voir [30].

Dans ce qui suit, nous allons comparer le solveur *Path* avec notre méthode LPM en résolvant le problème PCVP. Pour accomplir cette étude, nous allons utiliser les profils de performance comme un outil pour l'analyse comparative de ces deux solveurs en choisissant le nombre d'évaluations des fonctions comme une mesure de performance. De plus, nous gardons les mêmes notions que la section 2.5.2 avec $S = \{LPM, Path\}$, $n_s = 2$ et $n_p = 50$ matrices. Nous effectuons ce test en MATABL 7.7, en comparant LPM avec le solveur Path codé en langage AMPL qu'on fait appel à partir de MATLAB. Nous obtenons la figure suivante.

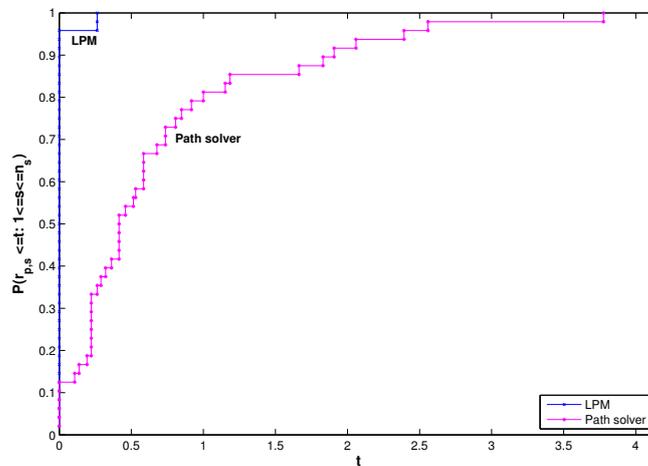


FIGURE 2.14 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.

Dans la figure 2.14, nous illustrons les profils de performance de deux solveurs en considérant le nombre d'évaluations de fonctions comme une mesure de performance. Nous remarquons que lorsque $t \in [0, 0.5]$, LPM est capable de résoudre plus que 99% des problèmes avec un moins nombre d'évaluations de fonctions que le solveur Path qui n'atteint pas les 60%. Par suite, cette expérience confirme, de nouveau, la robustesse de *Lattice Projection Method* LPM.

2.9 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons reformulé le problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP au sens de Pareto et le problème de complémentarité aux valeurs propres bivariées bi-PCVP au sens de Pareto sous forme d'un système d'équations semi-lisses. Ensuite, nous avons proposé un nouvel algorithme, *Lattice Projection Method* LPM, pour résoudre PCVP et bi-PCVP. De plus, nous avons étudié sous quelles conditions tous les éléments des matrices Jacobiennes de Clarke $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ définies respectivement par (2.17) et (2.24) en une solution z^* et \tilde{z}^* de (2.16) et (2.23), respectivement sont inversibles. LPM est comparée à SNM_{\min} et SNM_{FB} , deux algorithmes largement étudiés dans la littérature pour résoudre les problèmes de complémentarité non-linéaires. Les profils de performances, évalués sur plus de 100 exemples, ont indiqué l'efficacité et la robustesse de LPM en prenant quatre critères de comparaison telles que : temps de calcul, nombre d'itérations, nombre d'échecs et nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur. En outre, nous avons comparé LPM avec une nouvelle technique carrée basée sur l'utilisation de l'itération de la formule de Newton classique. Les résultats obtenus ont montré la performance de LPM. Enfin, nous avons introduit le solveur *Path* basée sur la méthode de Newton semi-lisse avec recherche linéaire pour le comparer avec LPM en prenant le nombre d'évaluations de fonctions comme un outil de comparaison. Les résultats numériques obtenus ont aussi confirmé l'efficacité de LPM.

Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Contraint par le Cône du Second-Ordre

Sommaire

3.1	Introduction	85
3.2	Projection sur le cône du second-ordre	87
3.3	Fonction de complémentarité du cône de second-ordre (fonction SOCC)	90
3.3.1	B-sous-différentiel de la fonction SOCC Fischer-Burmeister $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$	91
3.4	Problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre	92
3.4.1	Reformulation de PCVPL	94
3.5	Extension du “Lattice projection method” LPM au cône du second-ordre	96
3.6	Conditions de la non-singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$	97
3.7	Résultats expérimentaux	100
3.7.1	Premier test numérique	100
3.7.2	Deuxième test numérique	102
3.8	Conclusions	104

3.1 Introduction

Les problèmes de complémentarité se trouvent au cœur des problèmes d’optimisation numérique et offrent un cadre puissant pour la modélisation de nombreuses études. Sur les plans théorique et numérique, il y a eu un grand nombre d’études de tels problèmes. Le problème de complémentarité linéaire LCP (voir par exemple [84]) est la classe la plus fondamentale des problèmes de complémentarité, dont les études concentrées ont commencé dans les années 1960 pour résoudre des problèmes convexes de programmation quadratique [26, 27].

Le problème de complémentarité non-linéaire, connu en littérature sous le nom, *nonlinear complementarity problem* NCP [90], est le problème où la fonction linéaire dans LCP est remplacée par une fonction non-linéaire. Dans les années 1990, des études pour résoudre les NCP ont réalisé des progrès significatifs. En particulier, la reformulation non-lisse était l’un des principaux axes de recherche, c’est-à-dire, reformuler NCP en un système d’équations non-lisses en utilisant les fonctions de complémentarité non-linéaire (NCP-fonctions) : Fischer-Burmeister ou la fonction min [39, 47, 88, 115]. Ensuite, le deuxième axe d’étude était de résoudre un tel système en se basant sur les méthodes de Newton généralisées [103, 98] ou les méthodes lisses de Newton [15, 100, 101]. Grâce à ces études innovantes, beaucoup de résultats pour NCP ont été obtenus.

Récemment, le problème de complémentarité engendré par les cônes du second-ordre SOC a attiré l’attention. Ce problème est connu en littérature sous le nom *second order cone comple-*

mentarity problem SOCCP [17, 21, 40, 49, 93], et consiste à trouver $\zeta \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant

$$f(\zeta) \in \mathcal{K}, \quad g(\zeta) \in \mathcal{K}, \quad \langle f(\zeta), g(\zeta) \rangle = 0, \quad (3.1)$$

où $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des applications continûment différentiables, $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ est le produit cartésien des cônes du second-ordre (appelés aussi cônes de Lorentz). Autrement dit,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_r}, \quad (3.2)$$

où $n_1, \dots, n_r \geq 1$, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ et $\mathcal{K}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ étant la n_i -dimensionnelle du cône de second-ordre SOC défini par

$$\mathcal{K}^{n_i} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i-1} : x_1 \geq \|x_2\|\}. \quad (3.3)$$

Nous désignons par (3.1) - (3.2) le problème de complémentarité du cône de second-ordre SOCCP. En tenant compte de la structure cartésienne de \mathcal{K} , nous écrivons $f = (f_1, \dots, f_r)$, $g = (g_1, \dots, g_r)$ avec $f_i, g_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$.

SOCCP est une large classe des problèmes NCP et des problèmes de programmation du cône de second-ordre (second order cone programming SOCP problems) [76, 102]. Pour une fonction donnée $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, NCP consiste à trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T f(x) = 0. \quad (3.4)$$

Il est facile de voir que NCP (3.4) est équivalent à SOCCP (3.1)-(3.2) avec

$$m = n, \quad n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

puisque \mathcal{K}^1 est l'ensemble des réels positifs \mathbb{R}_+ .

Une vaste gamme d'applications en ingénierie et sciences de gestion peut être formulée comme des problèmes d'optimisation impliquant des contraintes de cône du second-ordre [76]. SOCCP a été étudié dans des travaux antérieurs qui ont traité différents sujets. Par exemple, Fukushima, Luo et Tseng [40], Chen, Sun et Sun [21], Chen, Chen et Tseng [17] avaient étudié les approches lisse et semi-lisse. Dans [40], il a été montré que les fonctions NCP, min et Fischer-Burmeister, peuvent être étendues au SOCCP via l'algèbre de Jordan.

De nombreuses propriétés théoriques de SOCCP ont été étudiées et une grande variété de méthodes numériques a été discutée pour résoudre SOCCP telles que les méthodes de points intérieurs, les méthodes de lissage, les méthodes de type SQP, les méthodes basées sur l'optimisation sans contrainte, etc... [13, 16, 17, 18, 21, 40, 49, 61, 116, 119, 122].

En outre, la projection sur SOC a aussi été traitée par plusieurs auteurs. Dans [17] et [21], il a été prouvé que la projection sur SOC est une fonction fortement semi-lisse. Plus tard, en 2005, Hayashi, Yamashita et Fukushima [49] ont donné une représentation explicite de la Jacobienne de la projection sur SOC.

Motivé par ces développements, nous abordons, dans ce chapitre, le problème de complémentarité du cône de second-ordre aux valeurs propres [1], connu en littérature sous le nom, *second order cone eigenvalue complementarity problem* SOCEiCP, qui consiste à trouver un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfaisant

$$(\text{SOCEiCP}) \quad x \in \mathcal{K}, \quad Ax - \lambda x \in \mathcal{K}, \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0, \quad (3.5)$$

où λ est appelé une valeur propre de Lorentz de la matrice réelle $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A partir de (3.1)-(3.2), il suffit de prendre

$$m = n + 1, \quad \zeta = (x, \lambda), \quad f(\zeta) = f(x, \lambda) = x \quad \text{et} \quad g(\zeta) = g(x, \lambda) = Ax - \lambda x.$$

Par suite, (3.1)-(3.2) se réduisent à (3.5). Afin d'introduire notre méthode, nous réécrivons SOCEiCP sous la forme suivante.

$$(\text{PCVPL}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \in \mathcal{K}, \lambda x - Ax \in \mathcal{K}, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où PCVPL désigne le problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz. Nous reformulons PCVPL, d'une manière équivalente, en un système d'équations semi-lisses en utilisant les fonctions de complémentarité du cône de second-ordre, *second order cone complementarity functions* (SOCC-fonctions), les plus fréquemment étudiées dans la littérature, à savoir, la fonction min $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ et la fonction Fischer-Burmeister $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$.

Un des objectifs majeurs de ce chapitre est de présenter une généralisation de la méthode LPM pour résoudre PCVPL. LPM a d'abord été introduite dans le chapitre 2 de ce travail pour résoudre les problèmes de complémentarité aux valeurs propres PCVP au sens de Pareto c'est-à-dire dans le cas où le cône \mathcal{K} est l'orthant positif \mathbb{R}_+^n . Ce type de problème, c'est-à-dire, PCVPL, est considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles à résoudre et ceci revient à la structure du spectre de Lorentz qui n'est pas toujours finie. Par conséquent, calculer toutes les valeurs propres de ce problème est une tâche difficile. Étonnamment et autant que les auteurs savent, ce genre de technique, pour résoudre PCVPL, n'a jamais été étudié auparavant.

En outre, nous étudions sous quelles conditions la matrice Jacobienne M^k dans l'algorithme de SNM en une solution est inversible. LPM est ensuite comparée aux méthodes de Newton semi-lisse avec recherche linéaire : SNM_{\min} et SNM_{FB} en utilisant les profils de performance [33] comme un outil de comparaison. Les expériences numériques, données dans ce chapitre, mettent en évidence et en valeur l'efficacité de LPM pour la résolution de PCVPL.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous illustrons un certain nombre des résultats préliminaires pour la projection sur un cône du second-ordre en tenant compte de l'algèbre de Jordan et de la factorisation spectrale associée à un cône de Lorentz. Dans la section 3.3, nous rappelons la définition de la fonction de complémentarité au cône du second-ordre (fonction SOCC) et fixons notre attention sur deux fonctions les plus étudiées dans la littérature à savoir, la fonction min, notée par $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ et la fonction Fischer-Burmeister, notée par $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$. Ensuite, nous présentons, dans la section 3.4, SOCEiCP tout en donnant sa définition. De plus, nous caractérisons les éléments du spectre de Lorentz en se basant sur les travaux de Seeger et Torki [112]. Puis, les fonctions SOCC nous amènent à reformuler le problème PCVPL en un système d'équations semi-lisses. Autrement dit, nous reformulons un tel problème pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse. Nous généralisons, dans la section 3.5, la méthode LPM pour résoudre PCVPL. Dans la section 3.6, nous étudions les conditions de la non-singularité des Jacobiennes de $\Phi(z^*)$ et $\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ définies respectivement par (3.37) et (3.42). Nous comparons LPM, dans la section 3.7, avec les solveurs SNM_{\min} et SNM_{FB} en utilisant la méthode de Newton semi-lisse SNM et la méthode de Newton classique NM. Nous proposons les profils de performance comme outil de comparaison pour examiner et analyser ces solveurs. Le temps de calcul, le nombre d'évaluations de fonctions et le nombre d'échecs sont choisis comme des mesures de performance. Les résultats obtenus évaluent l'efficacité de LPM. Enfin, dans la section 3.8, nous terminons le chapitre par une conclusion.

3.2 Projection sur le cône du second-ordre

Dans cette section, nous rappelons quelques propriétés de la projection sur un cône du second-ordre \mathcal{K}^n . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [49].

Pour $z \in \mathbb{R}^n$, $P_{\mathcal{K}^n}(z)$ est la projection de z sur le cône du second-ordre \mathcal{K}^n et est définie par

$$P_{\mathcal{K}^n}(z) = \arg \min_{z' \in \mathcal{K}^n} \|z' - z\|. \quad (3.7)$$

En particulier, pour $n = 1$,

$$P_{\mathcal{K}^1}(a) = \max\{0, a\}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, la fonction de projection $P_{\mathcal{K}^n}$ peut être également calculée facilement comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. [40, Proposition 3.3] *Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$),*

$$P_{\mathcal{K}^n}(z) = \max\{0, \lambda_1\}u^1 + \max\{0, \lambda_2\}u^2, \quad (3.8)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs spectrales de z définies par (1.13), et u^1 et u^2 sont les vecteurs spectraux de z définis par (1.14).

Nous étudions maintenant, en se basant sur [49], les propriétés différentielles de la fonction $P_{\mathcal{K}^n}$ définie par (3.7). Pour commencer, nous divisons l'espace \mathbb{R}^n en six sous-ensembles de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{z : 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2\} = \{z : z_1 > \|z_2\|\} &= \text{int } \mathcal{K}^n \\ S_2 &:= \{z : \lambda_1 < 0 < \lambda_2\} = \{z : -\|z_2\| < z_1 < \|z_2\|\} &= \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K}^n \cup -\mathcal{K}^n) \\ S_3 &:= \{z : \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0\} = \{z : z_1 < -\|z_2\|\} &= -\text{int } \mathcal{K}^n \\ S_4 &:= \{z : \lambda_1 = 0 < \lambda_2\} = \{z : 0 < z_1 = \|z_2\|\} &= \text{bd } \mathcal{K}^n \setminus \{0\} \\ S_5 &:= \{z : \lambda_1 < 0 = \lambda_2\} = \{z : -\|z_2\| = z_1 < 0\} &= -\text{bd } \mathcal{K}^n \setminus \{0\} \\ S_6 &:= \{z : \lambda_1 = 0 = \lambda_2\} = \{z : z_1 = \|z_2\| = 0\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où bd et int désignent respectivement la frontière et l'intérieur du cône \mathcal{K}^n , c'est-à-dire,

$$\text{bd}(\mathcal{K}^n) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 = \|x_2\|\}, \quad (3.10)$$

$$\text{int}(\mathcal{K}^n) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 > \|x_2\|\}. \quad (3.11)$$

Notons que $\cup_{i=1}^6 S_i = \mathbb{R}^n$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i \neq j$), et S_1, S_2 et S_3 sont des ensembles ouverts. Par ailleurs, nous définissons les fonctions $\Pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Pi_2 : D := \{z \in \mathbb{R}^n : z_2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Pi_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$\Pi_1(z) := \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 = z, \quad (3.12)$$

$$\Pi_2(z) := \lambda_2 u^2 = \frac{1}{2}(z_1 + \|z_2\|) \left(1, \frac{z_2}{\|z_2\|}\right), \quad (3.13)$$

$$\Pi_3(z) := 0. \quad (3.14)$$

Par suite, (3.8) est réécrite sous la forme

$$P_{\mathcal{K}^n}(z) = \begin{cases} \Pi_1(z) & (z \in S_1) \\ \Pi_2(z) & (z \in S_2) \\ \Pi_3(z) & (z \in S_3) \\ \Pi_1(z) = \Pi_2(z) & (z \in S_4) \\ \Pi_2(z) = \Pi_3(z) & (z \in S_5) \\ \Pi_1(z) = \Pi_3(z) & (z \in S_6). \end{cases} \quad (3.15)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$P_{\mathcal{K}^n}(z) = \begin{cases} z & (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0), \\ \frac{1}{2}(z_1 + \|z_2\|)(1, \frac{z_2}{\|z_2\|}) & (\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0), \\ 0 & (\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0). \end{cases} \quad (3.16)$$

La proposition suivante se réfère aux propriétés différentielles de Π_1, Π_2 et Π_3 .

Proposition 3.2.2. [49, Proposition 4.1] *Soient $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $D := \{z \in \mathbb{R}^n : z_2 \neq 0\}$. Soient Π_1, Π_2 et Π_3 les fonctions définies par (3.12), (3.13) et (3.14), respectivement. Alors, Π_1 et Π_2 sont différentiables sur \mathbb{R}^n et Π_3 est différentiable sur D . De plus, leurs Jacobiennes sont données par*

$$\nabla \Pi_1(z) := I, \quad (3.17)$$

$$\nabla \Pi_2(z) := \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{\|z_2\|} \right) I + \frac{1}{2\|z_2\|} \begin{pmatrix} -z_1 & z_2^T \\ z_2 & -\frac{z_1 z_2 z_2^T}{\|z_2\|^2} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\nabla \Pi_3(z) := O. \quad (3.19)$$

Par suite, $P_{\mathcal{K}^n}$ est composée des fonctions différentiables.

Proposition 3.2.3. [58] *La projection $P_{\mathcal{K}^n}$ est différentiable en un point $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ si et seulement si $z_1 \neq \|z_2\|$ a lieu. En effet, $P_{\mathcal{K}^n}$ est continûment différentiable pour tout z tel que $z_1 \neq \|z_2\|$, c'est-à-dire, $z \notin \text{bd}(\mathcal{K}^n)$.*

Nous donnons maintenant une expression pour les éléments du B-sous-différentiel de $P_{\mathcal{K}^n}$ en un point arbitraire z . Notons qu'il existe des représentations similaires pour les éléments de $\partial_B P_{\mathcal{K}^n}(z)$ et de $\partial P_{\mathcal{K}^n}(z)$ dans les ouvrages suivants [17, Lemme 4], [49, Proposition 4.3], [58, Lemme 2.5] et [93, Lemme 14].

Lemme 3.2.1. [48] *Pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, un élément V du B-sous-différentiel $\partial_B P_{\mathcal{K}^n}(z)$ admet la représentation suivante :*

$$\begin{cases} V = \mathbf{I}_n & (z \in S_1), \\ V = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{I}_n + Z & (z \in S_2), \\ V = \mathbf{0}_n & (z \in S_3), \\ V \in \{\mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n + Z\} & (z \in S_4), \\ V \in \{\mathbf{0}_n, Z\} & (z \in S_5), \\ V = \mathbf{0}_n \text{ ou } V = \mathbf{I}_n \text{ ou } V \in S & (z \in S_6), \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$(r_1, r_2) := \frac{(z_1, z_2)}{\|z_2\|}, \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r_1 & r_2^T \\ r_2 & -r_1 r_2 r_2^T \end{pmatrix} \quad \text{et} \\ S := \left\{ \frac{1}{2}(1 + \beta)\mathbf{I}_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\beta & \omega^T \\ \omega & -\beta\omega\omega^T \end{pmatrix} : -1 \leq \beta \leq 1, \|\omega\| = 1 \right\}.$$

Nous étudions dans la suite la régularité de la projection $P_{\mathcal{K}^n}(z)$ en un point arbitraire z . Regardons d'abord les trois fonctions Π_1, Π_2 et Π_3 qui constituent $P_{\mathcal{K}^n}$ puisque nous avons déjà donné l'expression (3.15).

Lemme 3.2.2. *Soient Π_1, Π_2 et Π_3 les fonctions définies par (3.12), (3.13) et (3.14), respectivement. Alors, Π_1 et Π_3 sont fortement semi-lisses pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, et Π_2 est fortement semi-lisse pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $z_2 \neq 0$.*

Preuve. Nous savons, évidemment, que Π_1 et Π_3 sont fortement semi-lisses puisque leurs Jacobiennes sont des constantes (3.17) et (3.19). Soient $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ un vecteur arbitraire tel que $z_2 \neq 0$ et $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ un petit vecteur arbitraire tel que $z_2 + d_2 \neq 0$. En outre, soit V un vecteur quelconque de $\partial\Pi_2(z + d)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \|V^T d - \Pi'_2(z; d)\| &= \|\nabla\Pi_2(z + d)^T d - \nabla\Pi_2(z)^T d\| \\ &\leq \|\nabla\Pi_2(z + d) - \nabla\Pi_2(z)\| \|d\| \\ &= O(\|d^2\|), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Par suite, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3.2.3. [49] *La projection $P_{\mathcal{K}^n}$ est fortement semi-lisse pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.*

3.3 Fonction de complémentarité du cône de second-ordre (fonction SOCC)

Nous allons rappeler, dans cette section, la définition d'une fonction de complémentarité du cône de second-ordre, connue en littérature par, *second order cone complementarity function* (fonction SOCC) et donner les B-sous-différentiels de deux fonctions SOCC qui seront utilisés plus tard.

Définition 3.3.1. *Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée une fonction de complémentarité du cône de second-ordre (fonction SOCC) associée au cône \mathcal{K}^n ($n \geq 1$) si elle satisfait la condition suivante*

$$\varphi(x, y) = 0 \iff x \in \mathcal{K}^n, y \in \mathcal{K}^n, \langle x, y \rangle = 0. \quad (3.21)$$

En tenant compte de la définition du produit de Jordan, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Pour tous x et y dans \mathbb{R}^n , nous avons*

$$x \in \mathcal{K}^n, y \in \mathcal{K}^n, \langle x, y \rangle = 0 \iff x \in \mathcal{K}^n, y \in \mathcal{K}^n, x \circ y = 0. \quad (3.22)$$

Preuve. Le premier sens “ \Leftarrow ” est évident à montrer. Il suffit d'appliquer la définition du produit de Jordan (1.8), c'est-à-dire

$$x \circ y := (x^T y, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Pour prouver l'autre implication “ \Rightarrow ”, nous supposons que $\langle x, y \rangle = 0$, $x \in \mathcal{K}^n$, $y \in \mathcal{K}^n$. Alors,

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 + x_2^T y_2 = 0, \quad x_1 \geq \|x_2\|, \quad y_1 \geq \|y_2\|,$$

ce qui donne

$$-x_2^T y_2 = x_1 y_1 \geq \|x_2\| \|y_2\|.$$

D'autre part, nous avons $-x_2^T y_2 \leq \|x_2\| \|y_2\|$, ceci montre que x_2 et y_2 forment un angle de 180° et, en outre, $x_1 = \|x_2\|$ et $y_1 = \|y_2\|$. Par conséquent,

$$x \circ y := (x^T y, x_1 y_2 + y_1 x_2) = (0, \|x_2\| \|y_2\| + \|y_2\| \|x_2\|) = (0, 0) = 0.$$

Ceci termine la preuve. Pour plus de détails, voir [40]. ■

La proposition suivante montre que la condition de complémentarité sur $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_r}$, peut être décomposée en conditions de complémentarité sur chaque \mathcal{K}^{n_i} .

Proposition 3.3.2. *Soient $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_r}$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^r)$ et $y = (y^1, y^2, \dots, y^r)$. Alors, la relation suivante est vérifiée :*

$$x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}, x^T y = 0 \iff x^i \in \mathcal{K}^{n_i}, y^i \in \mathcal{K}^{n_i}, (x^i)^T y^i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Preuve. Le premier sens “ \Leftarrow ” est facile à démontrer. Il suffit alors de démontrer l’autre sens “ \Rightarrow ”. Notons que $x^i \in \mathcal{K}^{n_i}, y^i \in \mathcal{K}^{n_i}$ impliquent $x_1^i \geq \|x_2^i\|$ et $y_1^i \geq \|y_2^i\|$. De plus, pour chaque i , nous avons

$$(x^i)^T y^i = x_1^i y_1^i + (x_2^i)^T y_2^i \geq \|x_2^i\| \|y_2^i\| + (x_2^i)^T y_2^i \geq 0.$$

La dernière inégalité de l’expression ci-dessus provient de l’inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

D’autre part, nous avons $\sum_{i=1}^m (x_2^i)^T y_2^i = 0$, d’après $x^T y = 0$. Par conséquent, $(x_2^i)^T y_2^i = 0$, pour chaque i . Pour plus de détails, voir [49]. ■

Dans ce travail, nous nous concentrons à la fonction SOCC “naturelle résiduelle”, appelée aussi, la fonction “min” et elle est définie par

$$\varphi_{\min}^{\text{soc}}(x, y) := x - P_{\mathcal{K}^n}(x - y), \quad (3.23)$$

et à la fonction SOCC “Fischer-Burmeister” définie par

$$\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y) := x + y - (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Notons que la fonction $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ a été proposée par Gowda, Sznajder et Tao dans [44]. Xiu et al. ont aussi établi la définition de $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ dans [66] et ont prouvé qu’elle est lipschitzienne. Par ailleurs, D. Sun et J. Sun dans [116] ont montré qu’elle est fortement semi-lisse et est aussi la fonction $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ (voir [21] pour plus de détails).

3.3.1 B-sous-différentiel de la fonction SOCC Fischer-Burmeister $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$

Dans la proposition suivante, nous donnons une expression pour les éléments du B-sous-différentiel de la fonction $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Tout d’abord, nous introduisons quelques notations qui seront utilisées plus tard.

Pour tout $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, nous définissons $v, w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivement par

$$v = (v_1, v_2) = v(x, y) := x^2 + y^2, \quad (3.25)$$

$$w = (w_1, w_2) = w(x, y) := (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (3.26)$$

Un simple calcul de (3.25) montre que $v \in \mathcal{K}^n$, avec

$$v_1 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad v_2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Nous posons

$$\bar{v}_2 = \begin{cases} \frac{v_2}{\|v_2\|} & \text{si } v_2 \neq 0, \\ \tilde{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1} & \text{ailleurs, avec } \|\tilde{v}_2\| = 1. \end{cases}$$

Ainsi, en tenant compte de la propriété 1.5.3, nous obtenons

$$w = \left(\frac{\sqrt{\lambda_2(v)} + \sqrt{\lambda_1(v)}}{2}, \frac{\sqrt{\lambda_2(v)} - \sqrt{\lambda_1(v)}}{2} \bar{v}_2 \right) \in \mathcal{K}^n.$$

Lemme 3.3.1. [87] Soit $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Alors, la fonction $w(x, y)$ définie par (3.26) est continûment différentiable si et seulement si

$$x^2 + y^2 \in \text{int}(\mathcal{K}^n).$$

En outre,

$$\nabla_x w(x, y) = L_w^{-1} L_x \quad \text{et} \quad \nabla_y w(x, y) = L_w^{-1} L_y,$$

où L_w^{-1} est définie par (1.11) pour $w \in \text{int}(\mathcal{K}^n)$.

Par suite, nous obtenons la proposition suivante qui donne le B-sous-différentiel de $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$.

Proposition 3.3.3. Soient les deux vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Si $x^2 + y^2 \in \text{int}(\mathcal{K}^n)$, alors, chaque élément V_{FB} de $\partial_B \varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y)$ est donné par

$$V_{\text{FB}} = [\mathbf{I}_n - V_x \quad \mathbf{I}_n - V_y], \quad (3.27)$$

avec V_x et V_y admettant les représentations suivantes

$$V_x = L_w^{-1} L_x \quad \text{et} \quad V_y = L_w^{-1} L_y, \quad (3.28)$$

où L_w^{-1} est définie par (1.11) pour $w \in \text{int}(\mathcal{K}^n)$.

Preuve. Pour la preuve, voir [17, Proposition 4] et [87, Lemme 3.1 et Proposition 3.1]. Il existe autres conditions discutées dans [87, Proposition 3.1] et différentes de celles mentionnées dans la proposition 3.3.3. ■

Proposition 3.3.4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Donc, chaque élément V_{min} de $\partial_B \varphi_{\text{min}}^{\text{soc}}(x, y)$ est donné par

$$V_{\text{min}} = [\mathbf{I}_n - V \quad V], \quad (3.29)$$

où $V \in \partial_B P_{\mathcal{K}^n}(x - y)$ est défini par (3.20).

3.4 Problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre

Dans cette section, nous allons traiter le problème de complémentarité du cône de second-ordre aux valeurs propres SOCEiCP défini par (3.5) et qui consiste à trouver un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfaisant

$$x \in \mathcal{K}, \quad Ax - \lambda x \in \mathcal{K}, \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0.$$

L'ensemble

$$\sigma(A, \mathcal{K}) := \{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda, x) \text{ résout (3.5) pour } x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}\} \quad (3.30)$$

3.4. Problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre 93

est considéré comme le *spectre de Lorentz* de A . La composante λ est appelée la *valeur propre de Lorentz* de A , tandis que la composante x est le *vecteur propre de Lorentz* de A . Le problème de complémentarité aux valeurs propres au sens du cône de second-ordre a été récemment étudié. Pour cette raison, le nombre de publications est assez limité (voir [112]).

Dans [112], Seeger et Torki ont étudié les propriétés essentielles et principales et la structure du spectre de Lorentz $\sigma(A, \mathcal{K})$. Ils ont récupéré $\sigma(A, \mathcal{K})$ en joignant deux pièces et ont traité chacune d'elles :

$$\sigma(A, \mathcal{K}) = \sigma_{\text{int}}(A, \mathcal{K}) \cup \sigma_{\text{bd}}(A, \mathcal{K}),$$

où $\sigma_{\text{int}}(A, \mathcal{K})$ (respectivement, $\sigma_{\text{bd}}(A, \mathcal{K})$) est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A associées aux vecteurs propres appartenant à l'intérieur de \mathcal{K} (respectivement, la frontière de \mathcal{K}). Ils ont caractérisé les éléments du spectre de Lorentz et ont fourni des informations précieuses sur leurs nombres. Ils ont démontré que $\sigma(A, \mathcal{K})$ n'est pas nécessairement fini, mais il peut être toujours écrit comme l'union d'un nombre fini d'ensembles connexes mutuellement disjoints [112, Théorème 4.2 et Corollaire 4.4]. Par ailleurs, ils ont montré des classes de matrices sur lesquelles le cône de Lorentz peut seulement produire un nombre fini de valeurs propres.

Théorème 3.4.1. [112] *Considérons une matrice arbitraire $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme partitionnée suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & u \\ v^T & a \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tilde{A} \in \mathbb{M}_{n-1}, a \in \mathbb{R} \text{ et } u, v \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Le nombre réel λ est dans $\sigma_{\text{bd}}(A, \mathcal{K})$ si et seulement si, on peut écrire $\lambda = \mu + s$, avec $(\mu, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ résout (exactement) un des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 1. & \mu \text{ n'est pas une valeur propre de } \tilde{A}, \\ 2. & \langle v, (\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1})^{-1} u \rangle = a - \mu - 2s, \\ 3. & \|(\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1})^{-1} u\| = 1; \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} 1. & \mu \text{ est une valeur propre de } \tilde{A}, \\ 2. & u \in \text{Im}(\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 3. & v \in \text{Im}(\tilde{A}^T - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 4. & \langle v, (\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1})^\dagger u \rangle = a - \mu - 2s, \\ 5. & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1} \\ v^T \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| \leq 1; \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} 1. & \mu \text{ est une valeur propre de } \tilde{A} \text{ avec une multiplicité géométrique } = 1, \\ 2. & u \in \text{Im}(\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 3. & v \notin \text{Im}(\tilde{A}^T - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 4. & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1} \\ v^T \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| = 1; \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} 1. & \mu \text{ est une valeur propre de } \tilde{A} \text{ avec une multiplicité géométrique } \geq 2, \\ 2. & u \in \text{Im}(\tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 3. & v \notin \text{Im}(\tilde{A}^T - \mu \mathbf{I}_{n-1}), \\ 4. & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu \mathbf{I}_{n-1} \\ v^T \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| \leq 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

Le symbole E^\dagger se réfère à l'inverse de Moore-Penrose généralisée d'une matrice rectangulaire E .

Théorème 3.4.1 caractérise non seulement les éléments dans le spectre de Lorentz, mais fournit également une information précieuse sur leur nombre. Seeger et Torki [112] ont expliqué les détails dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.1. [112] *Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, nous pouvons écrire :*

$$\sigma_{\text{bd}}(A, \mathcal{K}) = \text{union d'un nombre fini d'ensembles connexes mutuellement disjoints.}$$

Dans la décomposition ci-dessus, nous avons :

- (a) Chaque ensemble connexe est soit un singleton ou un intervalle fermé de longueur positive ;
- (b) Le nombre total d'ensembles connexes mutuellement disjoints ne peut pas dépasser $4n - 4$;
- (c) Il y a au plus $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ intervalles fermés de longueur positive, où $\lfloor \alpha \rfloor$ désigne la partie entière par défaut de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la proposition suivante, Seeger et Torki ont étudié les cas où $\sigma(A, \mathcal{K})$ est un ensemble discret.

Proposition 3.4.1. [112] *Dans chacun des cas suivants, la matrice réelle $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ possède un nombre fini de valeurs propres de Lorentz :*

- (a) A est symétrique,
- (b) La sous-matrice $(n-1) \times (n-1)$ principale de A n'admet pas des valeurs propres (réelles) avec une multiplicité géométrique ≥ 2 .

3.4.1 Reformulation de PCVPL

Afin de présenter notre méthode, nous réécrivons SOCEiCP sous la forme suivante.

$$(\text{PCVPL}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \in \mathcal{K}, \lambda x - Ax \in \mathcal{K}, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples admettant des solutions discrètes et autres continues.

Exemple 3.4.1. Nous considérons la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

En tenant compte du théorème 3.4.1, A admet un spectre de Lorentz discret donné par

$$\sigma_{\text{PCVPL}}(A, \mathcal{K}) = \{3, 4, 5\}.$$

Exemple 3.4.2. Soit

$$B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

3.4. Problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre 95

Une application directe du théorème 3.4.1 donne

$$\sigma_{\text{PCVPL}}(B, \mathcal{K}) = \{3\} \cup [4.0009, 4.3333] \cup [5.0016, 5.3333],$$

qui est un spectre continu de la matrice B .

Comme une première étape vers une reformulation de PCVPL comme un système d'équations, nous écrivons

$$x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}, \langle x, y \rangle = 0, \lambda x - Ax - y = 0, \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0, \quad (3.36)$$

L'équation de normalisation (la dernière équation dans (3.36)) est utilisée pour assurer que x soit un vecteur non nul.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que λ est strictement positive. Si la matrice A a une valeur propre négative $\lambda < 0$, nous posons alors $\tilde{A} = A + \mu \mathbf{I}_n$, où $\mu > 0$ est assez grand. Il est alors facile de constater que les valeurs propres de \tilde{A} sont strictement positives.

Proposition 3.3.2 nous amène à construire une fonction non-lisse $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ vérifiant (3.36) et définie par

$$\Phi(z) = \Phi(x, y, \lambda) := \begin{bmatrix} \varphi^1(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi^r(x_r, y_r) \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

avec $\varphi^i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ étant l'une des fonctions SOCCP : $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ (3.23) ou $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ (3.24) satisfaisant

$$\varphi^i(x^i, y^i) = 0 \iff x^i \in \mathcal{K}^{n_i}, y^i \in \mathcal{K}^{n_i}, (x^i)^T y^i = 0.$$

Par suite, résoudre PCVPL est équivalent à résoudre le système de $2n + 1$ équations suivant

$$\Phi(z) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (3.38)$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter le B-sous-différentiel de la fonction Φ ci-dessus dans deux cas : Le premier cas est défini lorsque nous considérons la fonction SOCC $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ définie par (3.23) et le deuxième est lié à la fonction $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ définie par (3.24).

Lemme 3.4.1. *La fonction $\Phi_{\min} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par (3.37), avec φ étant $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$, est semi-lisse. De plus, chaque élément H_{\min} du B-sous-différentiel de Φ_{\min} en $z = (x, y, \lambda)$ est donné par*

$$H_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - V & V & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

où $V \in \partial_B P_{\mathcal{K}^n}(x - y)$ et \mathbf{I}_n est la matrice d'identité d'ordre n .

Lemme 3.4.2. *La fonction $\Phi_{\text{FB}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par (3.37), avec φ étant $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$, est semi-lisse. Par ailleurs, si $x^2 + y^2 \in \text{int}(\mathcal{K}^n)$, donc chaque élément H_{FB} du B-sous-différentiel de Φ_{FB} en $z = (x, y, \lambda)$ est donné par*

$$H_{\text{FB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_x & \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_y & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

où L_x et L_w^{-1} sont définies par (1.10) et (1.11), respectivement.

3.5 Extension du “Lattice projection method” LPM au cône du second-ordre

Dans cette section, nous généralisons la méthode décrite dans la section 2.3 du chapitre 2 pour résoudre PCVPL. Ce qui nous conduit à résoudre un système non-linéaire et non-lisse de $(2n + 1)$ équations impliquant le même nombre de variables. Notons que cette méthode ne se base pas non plus sur l’approche de complémentarité puisque nous n’utilisons pas des fonctions SOCC.

Lemme 3.5.1. *Le problème PCVPL défini par (3.35) avec $\lambda > 0$ est équivalent à trouver les zéros de la fonction non-linéaire et non-lisse suivante $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, \lambda) \mapsto h(x, \lambda)$ définie par*

$$h(x, \lambda) := P_{\mathcal{K}}(Ax) - \lambda x. \tag{3.41}$$

Preuve. Supposons que $\lambda > 0$ et $x \in \mathcal{K}$. PCVPL

$$x \in \mathcal{K}, \lambda x - Ax \in \mathcal{K}, \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0$$

est équivalent au suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \ni x \perp \lambda x - Ax \in \mathcal{K} &\iff \lambda x - Ax \in -N_{\mathcal{K}}(x) \\ &\iff Ax \in \lambda x + N_{\mathcal{K}}(x) \\ &\iff Ax \in (I_n + \frac{1}{\lambda}N_{\mathcal{K}})(\lambda x), \lambda > 0 \\ &\iff \lambda x = (I_n + \frac{1}{\lambda}N_{\mathcal{K}})^{-1}(Ax) \\ &\iff \lambda x = P_{\mathcal{K}}(Ax), \end{aligned}$$

où

$$N_{\mathcal{K}}(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in \mathcal{K}\}$$

est le cône normal de \mathcal{K} . La disparition du signe d’appartenance entre les lignes trois et quatre de la séquence d’équivalences est une conséquence de l’univocité de l’opérateur $(I_n + \frac{1}{\lambda}N_{\mathcal{K}})^{-1}$ qui, à son tour, dérive du fait que l’application $\frac{1}{\lambda}N_{\mathcal{K}}$, avec $\lambda > 0$, est un opérateur maximal monotone [91], ce qui termine la preuve. ■

Par suite, PCVPL est équivalent à résoudre le problème non-linéaire aux valeurs propres suivant

$$(P_{\mathcal{K}} \circ A)(x) = \lambda x.$$

PCVPL peut être écrit de façon équivalente au système d’équations non-lisses suivant $\Phi_{\text{LPM}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$

$$\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = \Phi_{\text{LPM}}(x, \tilde{y}, \lambda) := \begin{bmatrix} P_{\mathcal{K}}(\tilde{y}) - \lambda x \\ Ax - \tilde{y} \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.42}$$

Nous allons aussi utiliser la méthode de Newton semi-lisse (SNM) illustrée dans le chapitre 1 de ce travail pour résoudre le système ci-dessus. Cette méthode sera appelée la méthode LPM étendue. Le lemme suivant donne une brève description de la représentation du B-sous-différentiel de Φ_{LPM} .

Lemme 3.5.2. *La fonction $\Phi_{\text{LPM}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par (3.42) est semi-lisse. De plus, chaque élément \tilde{H} du B-sous-différentiel de Φ_{LPM} en $\tilde{z} = (x, \tilde{y}, \lambda)$ est donné par*

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_n & \tilde{V} & -x \\ A & -\mathbf{I}_n & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

où $\tilde{V} \in \partial_B P_{\mathcal{K}}(\tilde{y})$.

Preuve. Chen, Sun et Sun ont montré dans [21] que $P_{\mathcal{K}}(\cdot)$ est fortement semi-lisse afin que Φ_{LPM} est semi-lisse. Le calcul du B-sous-différentiel de Φ_{LPM} n'offre aucune difficulté et nous obtenons évidemment la formule de représentation (3.43). ■

3.6 Conditions de la non-singularité de $\partial\Phi(z^*)$ et $\partial\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$

Après la présentation de notre problème PCVPL, sa reformulation de façon équivalente à un système d'équations semi-lisses et l'extension de LPM pour résoudre un tel problème, nous allons aborder, dans cette section, les conditions de la non-singularité de la matrice Jacobienne M^k définie dans l'algorithme 2 de la section 4. Autrement dit, nous allons étudier sous quelles conditions la Jacobienne de Φ définie par (3.37) (respectivement Φ_{LPM} définie par (3.42)) en une solution z^* (respectivement \tilde{z}^*) est inversible.

En tenant compte de la section 2.4 du chapitre 2, nous allons adapter les mêmes étapes. Nous introduisons alors la fonction, de classe C^1 , $\mathbb{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$z = (x, y, \lambda) \mapsto \mathbb{G}(z) = \begin{bmatrix} y \\ \lambda x - Ax - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Proposition 3.6.1. *Toute matrice Jacobienne $H \in \partial_B \Phi(z)$, avec φ étant l'une des fonctions SOCC $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ ou $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$, peut être écrite sous la forme*

$$H = D_a + D_b \mathbb{G}'(z), \quad (3.45)$$

où $D_a, D_b \in \mathbb{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ sont deux matrices diagonales semi-définies positives de telle sorte que leur somme $D_a + D_b$ soit définie positive et elles sont données par

$$D_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_b = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

dans le cas où $\varphi(x, y) = \varphi_{\min}^{\text{soc}}(x, y)$ et

$$D_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_b = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_y & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

dans le cas où $\varphi(x, y) = \varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y)$ et $x^2 + y^2 \in \text{int}(\mathcal{K}^n)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer les mêmes étapes de la proposition 2.4.1. ■

Ensuite, nous fixons $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une solution de (3.38) et $w^* = (x^*, \lambda^*)$. A partir de la fonction \mathbb{G} définie par (3.44), nous posons

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad w^* = (x^*, \lambda^*) \mapsto G(w^*) \text{ définie par}$$

$$G(w^*) = G(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} \lambda^* x^* - Ax^* \\ \langle \mathbf{1}_n, x^* \rangle - 1 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

et

$$J = \Delta_a + \Delta_b G'(w^*), \quad (3.49)$$

où

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } \varphi = \varphi_{\min}^{\text{soc}}. \quad (3.50)$$

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_w^{-1} L_{(\lambda^* x^* - Ax^*)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } \varphi = \varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}, \quad (3.51)$$

et $G'(w^*)$ est donné par

$$G'(w^*) = \begin{bmatrix} \lambda^* \mathbf{I}_n - A & x^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Le point w^* est dit non-dégénéré si $w_i^* + G_i(w^*) \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i})$, pour tout $i \in \{1, \dots, r+1\}$. Donc, les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} \alpha &:= \{i \in \{1, \dots, r+1\} : w_i^* \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i}), G_i(w^*) = 0\}, \\ \beta &:= \{i \in \{1, \dots, r+1\} : w_i^* \in \text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i}), G_i(w^*) \in \text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i})\}, \\ \gamma &:= \{i \in \{1, \dots, r+1\} : w_i^* = 0, G_i(w^*) \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i})\}, \end{aligned}$$

où $\text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i}) = \text{bd}(\mathcal{K}^{n_i}) \setminus \{0\}$, forment une partition de $\{1, \dots, r+1\}$.

Par ailleurs, nous posons

$$\tilde{\Delta}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \tilde{V} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Delta}_b = \begin{bmatrix} \tilde{V} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $\tilde{V} \in \partial_B P_{\mathcal{K}}(\tilde{y})$. Nous notons que

$$\lambda^* \tilde{\Delta}_a = \tilde{\Delta}_{\lambda^* a},$$

et nous posons

$$\tilde{J} = \tilde{\Delta}_{\lambda^* a} + \tilde{\Delta}_b G'(w^*). \quad (3.53)$$

Proposition 3.6.2. *Soit $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une solution fixe de (3.38), avec $w^* = (x^*, \lambda^*)$ étant non-dégénéré. Si la sous-matrice $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible et son complément de Schur*

$$G'(w^*)_{\beta\beta} - G'(w^*)_{\beta\alpha} G'(w^*)_{\alpha\alpha}^{-1} G'(w^*)_{\alpha\beta} \in \mathbb{M}_{|\beta|}(\mathbb{R})$$

est une P-matrice, alors les matrices Jacobiennes J et \tilde{J} définies respectivement par (3.49) et (3.53), sont inversibles.

Preuve. Résoudre PCVPL est équivalent à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \text{ tel que} \\ w \in \mathcal{K}, G(w) \in \mathcal{K}, \langle w, G(w) \rangle = 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

où le vecteur G est donné par (3.48). Ensuite, il suffit de suivre la preuve de la proposition 2.4.3. ■

Remarque 3.6.1. *Si $r < n$, c'est-à-dire, $\alpha \subsetneq \{1, \dots, n+1\}$, alors $G'(w^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible si et seulement si $(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\alpha\alpha}$ est inversible, puisque dans ce cas, nous avons $G'(w^*)_{\alpha\alpha} = (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\alpha\alpha}$. De plus, son complément de Schur est une P-matrice si et seulement si*

$$(\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\beta\beta} - (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\beta\alpha} (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\alpha\alpha}^{-1} (\lambda^* \mathbf{I}_n - A)_{\alpha\beta}$$

est une P-matrice.

Par conséquent, nous obtenons les théorèmes suivants de la non-singularité des Jacobiennes de Φ et Φ_{LPM} .

Théorème 3.6.1. *Soit $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une solution fixe de (3.38), avec $w^* = (x^*, \lambda^*)$ étant non-dégénéré. Alors, tous les éléments $H \in \partial_B\Phi(z^*)$, avec φ étant l'une des fonctions SOCC $\varphi_{\min}^{\text{SOC}}$ ou $\varphi_{\text{FB}}^{\text{SOC}}$ sont inversibles si et seulement si la Jacobienne J définie par (3.49) est inversible.*

Preuve. Voir Théorème 2.4.1. ■

Théorème 3.6.2. *Soit $\tilde{z}^* = (x^*, \tilde{y}^*, \lambda^*)$ une racine fixe de Φ_{LPM} avec $w^* = (x^*, \lambda^*)$ étant non-dégénéré. Alors, tous les éléments $\tilde{H} \in \partial_B\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ sont inversibles si et seulement si la Jacobienne \tilde{J} définie par (3.53) est inversible.*

Preuve. Soient $\tilde{H} \in \partial_B\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z}^*)$ et $X = (p, q, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un vecteur arbitraire tel que

$$\tilde{H}X = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (3.55)$$

L'équation précédente s'écrit explicitement comme

$$\begin{bmatrix} -\lambda^*\mathbf{I}_n & \tilde{V} & -x^* \\ A & -\mathbf{I}_n & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix},$$

où $\tilde{V} \in \partial_B P_{\mathcal{K}}(\tilde{y})$. Donc,

$$-\lambda^*p + \tilde{V}q - rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (3.56)$$

$$Ap - q = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (3.57)$$

$$\langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \quad (3.58)$$

En utilisant (3.57), nous obtenons

$$q = Ap. \quad (3.59)$$

Par conséquent, (3.56) devient

$$(\lambda^*\mathbf{I}_n - \tilde{V}A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (3.60)$$

Donc,

$$\begin{cases} (\lambda^*\mathbf{I}_n - \tilde{V}A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Notons que

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n - \tilde{V} + \tilde{V}.$$

Alors, (3.61) devient

$$\begin{cases} \lambda^*(\mathbf{I}_n - \tilde{V})p + \tilde{V}(\lambda^*\mathbf{I}_n - A)p + rx^* = 0_{\mathbb{R}^n}, \\ \langle \mathbf{1}_n, p \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Nous notons aussi que nous avons

$$\tilde{V}x^* = x^*.$$

Par conséquent, (3.62) peut être réécrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \lambda^*(\mathbf{I}_n - \tilde{V}) + \tilde{V}(\lambda^*\mathbf{I}_n - A) & \tilde{V}x^* \\ \mathbf{1}_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

En posant $Y = (p, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, il est clair que (3.63) est équivalent à

$$\tilde{J}Y = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}. \tag{3.64}$$

D'où,

$$\tilde{H}X = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \iff \begin{cases} \tilde{J}Y = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}, \\ q = Ap. \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve. ■

3.7 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous allons passer à l'étape numérique afin de montrer l'efficacité de la généralisation de LPM pour résoudre PCVPL.

3.7.1 Premier test numérique

En utilisant la méthode de Newton semi-lisse SNM (algorithme 1 du chapitre 1), nous allons comparer LPM avec deux autres solveurs : SNM_{\min} où la fonction SOCC est $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ et SNM_{FB} où la fonction SOCC est $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$. Il est important de noter que ce genre de travail n'a jamais été fait avant, c'est-à-dire, nous examinons pour la première fois des résultats numériques pour PCVPL.

Pour accomplir cette mission, nous allons choisir le même outil de comparaison que dans la section 2.5.2 du chapitre 2, les *profils de performance* développés par E. D. Dolan et J. J. Moré [33] pour évaluer les performances de l'ensemble des solveurs $S = \{\text{LPM}, \text{SNM}_{\text{FB}}, \text{SNM}_{\min}\}$ sur un ensemble de test $P = \{\text{ensemble des matrices}\}$. Alors, nous choisissons " $n_s = 3$ " le nombre des solveurs et " $n_p = 160$ " matrices avec 10 000 points initiaux.

Nous nous sommes intéressés aux temps de calcul, nombre d'évaluations de fonctions et nombre d'échecs en tant que mesures de performance. Les expériences numériques sont effectuées dans un système d'exploitation Mac Powerbook 10.6.8 avec un processeur de 2.33 GHz Intel Core 2 Duo et de mémoire 2Go. Tous les codes sont exécutés en MATLAB 7.7.

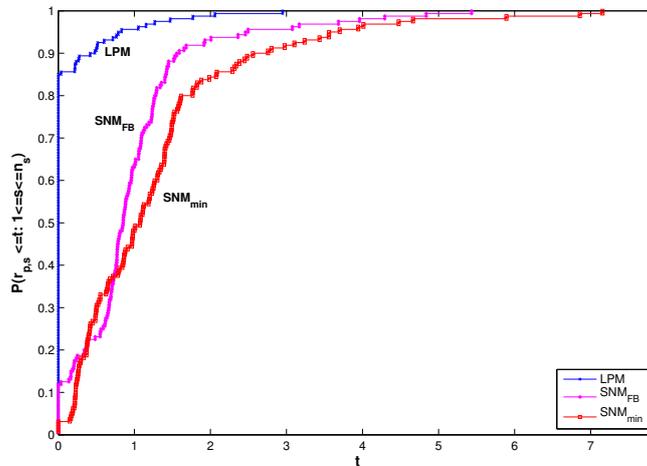


FIGURE 3.1 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.

Figure 3.1 montre les profils de performance de trois solveurs LPM, SNM_{FB} et SNM_{\min} où la mesure de performance est le temps de calcul. Il est clair que le profil de performance

de LPM est intéressant car il possède la plus haute probabilité pour résoudre les problèmes. D'autre part, SNM_{FB} et SNM_{min} nécessitent un temps d'exécution plus long pour trouver une solution et ont un nombre moins élevé de gains. Par exemple, dans l'intervalle $[0, 0.5]$, LPM est capable de résoudre 90% des problèmes, tandis que les autres solveurs n'ont pas atteint les 40% et nécessitent plus de temps.

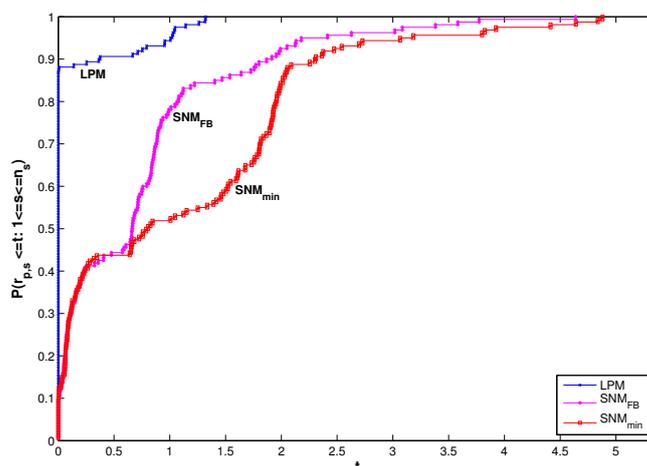


FIGURE 3.2 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.

Figure 3.2 montre l'efficacité de LPM où le nombre d'échecs pour trouver chaque solution est l'outil de comparaison. Il est clair que dans l'intervalle $[0, 0.5]$, LPM est capable de résoudre environ 90% des problèmes et détecte les valeurs propres de Lorentz tandis que les autres solveurs n'atteignent pas les 50%. Nous remarquons aussi que quand $t \geq 2$, la performance de SNM_{FB} devient intéressante. Ceci nous permet de conclure que le nombre d'échecs donné par SNM_{min} est élevé, ce qui l'empêche de trouver des solutions. Figure 3.2 indique également que, par rapport au nombre d'échecs, avec les mêmes points initiaux et sous le même critère d'arrêt, LPM est le solveur le plus rapide, suivi respectivement par SNM_{FB} et SNM_{min} .

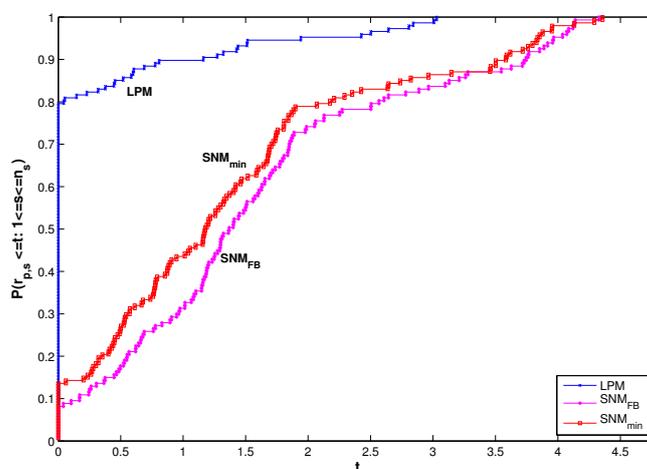


FIGURE 3.3 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.

Dans la figure 3.3, nous comparons le nombre d'évaluations de fonctions nécessaires pour

trouver une solution par chaque solveur. De toute évidence, LPM possède le plus grand nombre de gains (car elle a la plus haute probabilité). Dans l'intervalle $[0, 1]$, LPM est capable de résoudre 90% des problèmes, alors que SNM_{\min} et SNM_{FB} n'atteignent pas les 50%. Lorsque $t \geq 2$, la performance de ces derniers devient intéressante. Par suite, nous déduisons, à nouveau, que LPM est le gagnant, suivi respectivement par SNM_{\min} et SNM_{FB} .

Nous déduisons, d'après cette expérience et en tenant compte de temps de calcul, nombre d'échec et nombre d'évaluations de fonctions que LPM confirme son efficacité, sa robustesse et sa capacité à résoudre PCVPL.

3.7.2 Deuxième test numérique

Avant de passer au deuxième test numérique de LPM, nous allons donner la proposition suivante.

Proposition 3.7.1. [42] *Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit une valeur propre de Lorentz de A , c'est-à-dire du système (3.35) est que la situation suivante se produise : Il existe un vecteur $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ et un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{cases} (\lambda \mathbf{I}_n - A) \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -c \end{bmatrix} = 0, \\ 1 - \|c\|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

En appliquant la méthode de Newton NM au système (3.65), nous allons comparer la méthode LPM avec NM. Tout d'abord, (3.65) peut se reformuler, de façon équivalente, au système suivant $\Phi_{\text{NM}} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Phi_{\text{NM}}(z) = \Phi_{\text{NM}}(c, \mu, \lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda \mathbf{I}_n - A) \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -c \end{bmatrix} \\ 1 - \|c\|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Par ailleurs, chaque élément H du B-sous-différentiel de Φ_{NM} en $z = (c, \mu, \lambda)$ est donné par

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} B - \mu^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} & 0 & -2\mu \begin{bmatrix} 1 \\ -c \end{bmatrix} \\ -2c^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

où B est obtenue par la suppression de la première colonne de la matrice $(\lambda \mathbf{I}_n - A)$.

Pour accomplir ce test numérique, nous allons choisir le même outil de comparaison et les mêmes critères que dans la section précédente 3.7.1, avec $S = \{\text{LPM}, \text{NM}\}$ et " $n_p = 160$ " matrices. Les résultats obtenus sont affichés dans les figures suivantes.

Dans la figure 3.4, nous étudions les profils de performance de deux solveurs où le temps de calcul représente le critère de comparaison. Nous remarquons que la méthode NM nécessite plus de temps que LPM pour résoudre le problème PCVPL. Cependant, pour $t \geq 5$, les deux solveurs confirment leur robustesse.

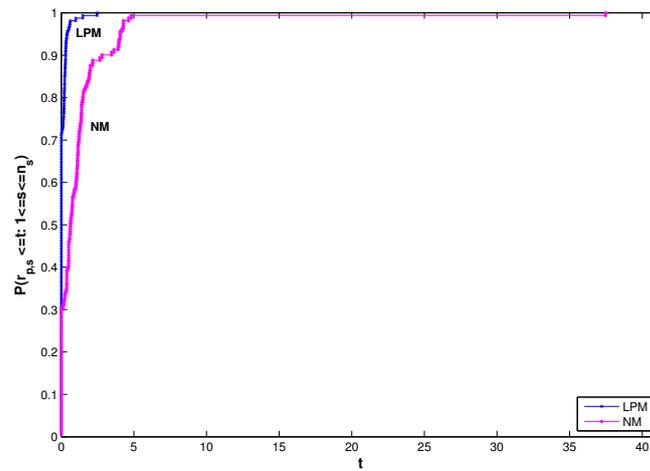


FIGURE 3.4 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.

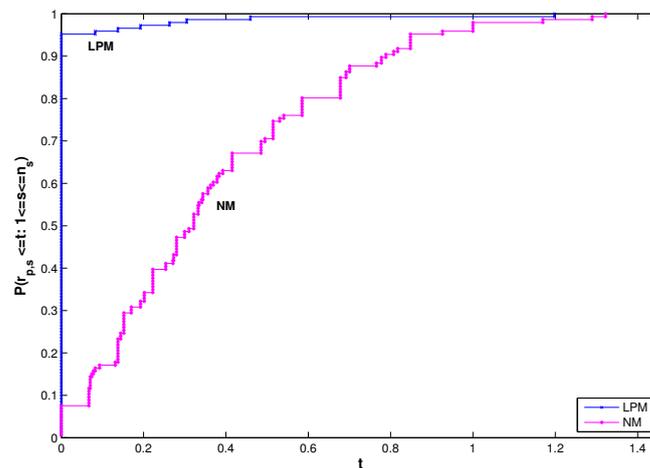


FIGURE 3.5 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de nombre d'évaluations de fonctions.

Nous comparons, dans la figure 3.5, le nombre d'évaluations de fonctions nécessaires pour trouver une solution par chaque solveur. LPM attire notre attention dans cette figure puisqu'elle possède le plus grand nombre de gains. Pour $t \in [0, 0.2]$, LPM est capable de résoudre 99% de problèmes tandis que NM a besoin beaucoup plus d'itérations pour compléter l'expérience. Figure 5, indique également que, par rapport au nombre d'évaluations des fonctions, avec les mêmes points initiaux et sous le même critère d'arrêt, LPM est le solveur le plus rapide.

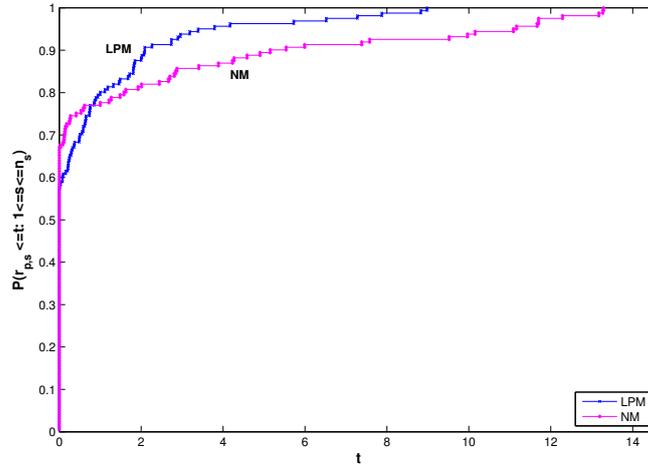


FIGURE 3.6 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.

Figure 3.6 présente les profils de performance de deux méthodes en tenant compte de nombre d'échecs comme critère de comparaison. Nous remarquons que NM est capable de résoudre un peu plus de problèmes que LPM mais au delà de $t = 1$, LPM a la plus grande valeur de probabilité.

3.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz PCVPL. Tout d'abord, nous avons rappelé quelques propriétés de la projection sur un cône du second-ordre. Ensuite, nous avons défini les fonctions de complémentarité du cône de second-ordre, en concentrant sur les fonctions les plus fréquemment utilisées dans la littérature, à savoir $\varphi_{\min}^{\text{soc}}$ et $\varphi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$. Puis, nous avons traité notre problématique, PCVPL, en présentant quelques propriétés essentielles du spectre de Lorentz. Nous avons reformulé un tel problème en un système d'équations semi-lisses. En outre, nous avons généralisé notre algorithme, connu sous le nom, Lattice Projection Method LPM pour résoudre PCVPL. De plus, nous avons abordé les conditions de la non-singularité des Jacobiennes de Φ et Φ_{LPM} définies respectivement par (3.37) et (3.42). Par ailleurs, nous avons donné quelques résultats numériques pour indiquer l'efficacité de l'algorithme proposé LPM pour résoudre PCVPL en tenant compte de trois critères de comparaison tels que : temps de calcul, nombre d'évaluations de fonctions et nombre d'échecs.

Problème de Complémentarité aux Valeurs Propres Stochastiques

Sommaire

4.1 Introduction	105
4.1.1 Application	108
4.2 Partie I- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques de Pareto StocPCVP	108
4.2.1 Reformulation de StocPCVP de Pareto	109
4.2.2 Conditions de la non singularité de $\partial\Psi_{\text{FB}}(z^*)$ et problème de minimisation	111
4.3 Partie II- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques contraint par le cône Lorentz StocPCVPL	112
4.3.1 Reformulation de StocPCVPL	112
4.3.2 Conditions de la non-singularité de $\partial_B\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z^*)$ et problème de minimisation	113
4.4 Conclusions	115

4.1 Introduction

Les problèmes de complémentarité non-linéaires NCP, qui consistent à trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad \langle x, F(x) \rangle = 0, \quad (4.1)$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application donnée, ont connu une popularité croissante au cours des quatre dernières décennies, avec ses diverses applications en ingénierie, économie et science (voir l'étude exhaustive [38]). Cette discipline fructueuse est considérée comme la méthode la plus importante et puissante pour l'étude des problèmes d'équilibre. Cependant, de nombreux problèmes pratiques peuvent impliquer certains facteurs aléatoires et des données incertaines dans certains éléments de NCP et peuvent être modélisés comme le système suivant :

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : x \geq 0, F(x, \omega) \geq 0, \langle x, F(x, \omega) \rangle = 0\} = 1, \quad (4.2)$$

qui est équivalent à

$$x \geq 0, \quad F(x, \omega) \geq 0, \quad \langle x, F(x, \omega) \rangle = 0, \quad \text{p.p. } \omega \in \Omega, \quad (4.3)$$

où $F : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction à valeur vectorielle, (Ω, F, \mathcal{P}) est l'espace de probabilité, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et p.p. est l'abréviation de *presque partout* sous la mesure de probabilité donnée. Il s'agit du problème stochastique de complémentarité non-linéaire, connu en littérature sous le nom, *stochastic non-linear complementarity problem* StocNCP, qui joue un rôle significatif dans la conception de l'analyse et des opérations de systèmes modernes. Il est devenu un sujet d'une attention croissante entre les scientifiques et les ingénieurs dans les temps récents [9, 19, 20, 45,

[71, 72, 73]. En général, il n'existe pas une solution x satisfaisant StocNCP défini par (4.2) ou (4.3) pour presque tout $\omega \in \Omega$. Afin d'obtenir une résolution raisonnable, SocNCP a été étudié dans des travaux antérieurs qui ont traité différents sujets. Jusqu'à présent, pour résoudre un tel problème, trois types de formulations ont été proposés.

Le premier type donné par Gürkan et al. dans [45] est la valeur espérée, *expected value* EV, qui formule (4.3) comme suit

$$x \geq 0, \quad \bar{F}(x) \geq 0, \quad \langle x, \bar{F}(x) \rangle = 0, \quad (4.4)$$

où $\bar{F}(x) = \mathbb{E}[F(x, \omega)]$ et \mathbb{E} désigne l'espérance par rapport à la variable aléatoire ω . Puisque la fonction d'espérance $\mathbb{E}[F(\cdot, \omega)]$ est souvent difficile à évaluer exactement, Gürkan et al. ont supposé qu'une suite de fonctions déterministes $\{F^k\}$, convergente vers la fonction $\mathbb{E}[F(\cdot, \omega)]$ dans un certain sens, peut être observée. Ensuite, une solution du problème (4.4) peut être obtenue en résolvant une suite de problèmes de complémentarité déterministes. Il est montré que, sous certaines conditions de régularité sur F et une solution (inconnue) x^* de (4.4), le problème d'approximation NCP(F^k) possède une solution proche de x^* si F^k est suffisamment proche de $\mathbb{E}[F(\cdot, \omega)]$.

Plus récemment, Chen et Fukushima ont présenté le deuxième type, dans [19], en considérant la formulation de minimisation résiduelle espérée, *the expected residual minimization formulation* ERM. Ils ont traité le problème stochastique de complémentarité linéaire StocLCP suivant :

$$x \geq 0, \quad M(\omega)x + q(\omega) \geq 0, \quad \langle x, M(\omega)x + q(\omega) \rangle = 0, \quad \text{p.p. } \omega \in \Omega, \quad (4.5)$$

pour chaque ω , $M(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $q(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Les auteurs ont transformé (4.5), de façon équivalente, en utilisant une fonction de complémentarité non-linéaire (fonction NCP), au problème stochastique suivant :

$$\Phi(x, \omega) = 0, \quad \text{p.p. } \omega \in \Omega, \quad (4.6)$$

où $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\Phi(x, \omega) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, [M(\omega)x + q(\omega)]_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, [M(\omega)x + q(\omega)]_n) \end{bmatrix}.$$

Comme d'habitude, $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de NCP si elle satisfait

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0. \quad (4.7)$$

Les fonctions NCP utilisées dans [19] incluent les fonctions "Fischer-Burmeister" ϕ_{FB} et "min" ϕ_{min} définies respectivement par (2.13) et (2.14). Ensuite, ils ont formulé (4.6) comme un problème de minimisation d'une fonction résiduelle espérée, *problem of minimizing an expected residual function* :

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} f(x) := \mathbb{E}[\|\Phi(x, \omega)\|^2]. \quad (4.8)$$

Puis, sous des hypothèses convenables sur les matrices concernées, une méthode quasi-Monte Carlo a été utilisée et des résultats de convergence ont été donnés par eux. La formulation ERM (4.8) pour StocLCP a ensuite été étudiée dans [20, 35, 123, 124]. Récemment, Zhou et Cacceta ont examiné dans [124] le StocLCP défini par (4.5) dans le cas de variables aléatoires discrètes $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_L\}$. En introduisant des variables d'écart $y = [y_1, y_2, \dots, y_L] \in \mathbb{R}^{nL}$ et en utilisant la fonction Fischer-Burmeister pénalisée,

$$\phi_\alpha = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + \alpha a^+ b^+, \quad \alpha > 0,$$

où $c^+ = \max(0, c)$, ils ont formulé (5) comme le système d'équations non-lisses avec des contraintes positives suivant :

$$\tilde{\Phi}(x, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad (4.9)$$

où

$$\tilde{\Phi}(x, y) = \begin{bmatrix} \phi_\alpha(x_1, [\bar{M}x + \bar{q}]_1) \\ \vdots \\ \phi_\alpha(x_n, [\bar{M}x + \bar{q}]_n) \\ M(\omega_1)x + q(\omega_1) - y_{.1} \\ \vdots \\ M(\omega_L)x + q(\omega_L) - y_{.L} \end{bmatrix},$$

et $\bar{M} := \mathbb{E}[M(\omega)]$, $\bar{q} := \mathbb{E}[q(\omega)]$. Puis, ils ont transformé (4.9) au problème de minimisation suivant

$$\min_{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+nL}} \frac{1}{2} \|\tilde{\Phi}(x, y)\|^2. \quad (4.10)$$

Ensuite, une méthode faisable de Newton semi-lisse est proposée pour résoudre le problème (4.10).

Le dernier type a été donné par Lin et Fukushima dans [73] qui ont étudié le problème de complémentarité non-linéaire stochastique StocNCP défini par (4.3). Ils ont proposé la formulation de programmation mathématique stochastique avec contraintes d'équilibre et ont donné un algorithme pour résoudre le StocNCP dans le cas de variables aléatoires discrètes. Ils ont également fourni une étude des développements récents de sujets [74], tels que StocLCP, StocNCP et StocMPEC. Lin et al. ont également traité le StocNCP dans [70]. Ils ont trouvé des fonctions NCP restreintes au lieu de celles utilisées dans la littérature pour définir la formulation de minimisation résiduelle espérée pour StocNCP et StocMPEC.

Dans ce chapitre, nous abordons, pour la première fois, le problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques StocPCVP [2], *the stochastic eigenvalue complementarity problem*, qui est un cas particulier de StocNCP. Nous nous concentrons, dans notre étude, sur les cônes de Pareto et du second-ordre avec un nombre fini de réalisations. Des études préliminaires ont été effectuées pour résoudre le problème StocPCVP.

Les principales contributions de ce chapitre peuvent être résumées comme suit : Tout d'abord, nous reformulons le StocPCVP pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse Φ en utilisant la fonction de complémentarité Fischer-Burmeister. Nous étudions également les conditions de la non-singularité de la matrice Jacobienne de la fonction Φ mentionnée ci-dessus dans le cas stochastique. Puisque la fonction Φ peut ne pas avoir des racines, alors nous allons la transformer sous forme d'un problème de minimization.

La structure de ce chapitre est organisée comme suit. Dans la section 4.1.1, nous allons étudier, pour motiver notre problématique, un problème de réseaux de transport où le modèle se décrit par un StocLCP. Ensuite, nous allons diviser ce travail en deux grandes parties. Dans la première partie, nous abordons, dans la section 4.2, le problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques au sens du cône de Pareto StocPCVP dans le cas des variables aléatoires discrètes. Dans la section 4.2.1, nous reformulons notre problème, à savoir StocPCVP, d'une façon équivalente, en un système d'équations semi-lisses en utilisant les fonctions NCP. Dans la section 4.2.2, nous étudions les conditions de la non-singularité des Jacobiennes et nous reformulons StocPCVP sous forme d'un problème de minimisation. La deuxième partie est spécifiée au problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques contraint par le cône de Lorentz StocPCVPL. De la même manière que les sections précédentes, nous reformulons, dans la section

4.3.1, StocPCVPL en un système semi-lisse. Par ailleurs, nous donnons les conditions de la non-singularité dans la section 4.3.2 et nous présentons le problème de minimisation pour résoudre un tel problème. Enfin, dans la section 4.4, nous terminons le chapitre par une conclusion.

4.1.1 Application

Dans cette section, nous donnons un exemple pour montrer comment l'incertitude se pose dans la pratique. Pour plus de détails, voir [74].

Considérons un réseau de transport d'un ensemble de noeuds et un ensemble de chemins entre les couples origine-destination (OD). Notons

$$\begin{aligned} \xi &= \text{vecteur des flux de trajet,} \\ \tau &= \text{vecteur des coûts de transport minimum entre les couples OD,} \\ d &= \text{vecteur de la demande de déplacements entre les couples OD;} \\ A\xi + b &= \text{la fonction coût de déplacement des utilisateurs avec } A \text{ étant définie positive,} \\ B &= \text{chemin du couple OD matrice d'incidence.} \end{aligned}$$

D'après le principe de Wardrop, les conditions d'équilibre du trafic (ou de la circulation) peuvent être formulées comme un problème LCP :

$$\begin{cases} \xi \geq 0, & A\xi + b - B^T\tau \geq 0, & \xi^T(A\xi + b - B^T\tau) = 0, \\ \tau \geq 0, & B\xi - d \geq 0, & \tau^T(B\xi - d) = 0. \end{cases}$$

En pratique, la demande de transport n'est pas toujours constante, mais elle peut varier selon la météo, etc... . La fonction coût de déplacement peut également varier à cause de certaines raisons imprévisibles. Dans de telles situations incertaines, nous pouvons considérer la demande et les coefficients de coûts comme des variables aléatoires $d(\omega)$ et $(A(\omega), b(\omega))$ avec $\omega \in \Omega$ où Ω est un échantillon d'espace. Ainsi, les conditions d'équilibre du trafic peuvent être modélisées comme un StocLCP :

$$\begin{cases} \xi \geq 0, & A(\omega)\xi + b(\omega) - B^T\tau \geq 0, & \xi^T(A(\omega)\xi + b(\omega) - B^T\tau) = 0, \\ \tau \geq 0, & B\xi - d(\omega) \geq 0, & \tau^T(B\xi - d(\omega)) = 0. \end{cases}$$

Notons qu'il n'y a pas en général un vecteur (ξ, τ) satisfaisant les conditions ci-dessus, simultanément, pour tout $\omega \in \Omega$. Néanmoins, nous pouvons vouloir estimer un flux de trafic ξ ainsi que le coût de déplacement correspondant τ qui est le plus susceptible de se produire dans l'ensemble tout entier.

4.2 Partie I- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques de Pareto StocPCVP

Soit (Ω, F, \mathcal{P}) l'espace de probabilité, avec Ω ne dispose qu'un nombre fini d'éléments $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Pour des matrices aléatoires $A(\omega) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, le problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques StocPCVP associé au cône de Pareto \mathbb{R}_+^n est défini comme suit :

$$\text{(StocPCVP)} \begin{cases} \text{Trouver } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \geq 0, & F(x, \lambda, \omega_k) := \lambda x - A(\omega_k)x \geq 0, & \langle x, F(x, \lambda, \omega_k) \rangle = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, & m \geq 2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Le scalaire λ et le vecteur x satisfaisant le système (4.11) sont respectivement appelés la valeur propre stochastique de Pareto et le vecteur propre stochastique associé de Pareto.

$\forall k = 1, \dots, m$, posons

$$\bar{F}(x, \lambda) := \mathbb{E}[F(x, \lambda, \omega)] = \lambda x - \bar{A}x,$$

$$\text{où } \bar{A} = \sum_{k=1}^m A(\omega_k)p_k.$$

Lemme 4.2.1. *Soit $A(\omega_k) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $k = 1, \dots, m$. Trouver la solution de (4.11) est équivalent à résoudre le problème suivant*

$$x \geq 0, \lambda x - \bar{A}x \geq 0, \langle x, \lambda x - \bar{A}x \rangle = 0, \quad (4.12)$$

$$\lambda x - A(\omega_k)x \geq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.13)$$

Preuve. Soit (x, λ) une solution de (4.11), alors, nous avons $x \geq 0$. La deuxième condition de (4.11) donne (4.13) et

$$\bar{F}(x, \lambda) = \sum_{k=1}^m F(x, \lambda, \omega_k)p_k = \sum_{k=1}^m (\lambda x - A(\omega_k)x)p_k \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^m (\lambda x - A(\omega_k)x)p_k = (\lambda x - A(\omega_1)x)p_1 + \dots + (\lambda x - A(\omega_m)x)p_m, \\ &= \lambda x(p_1 + \dots + p_m) - \sum_{k=1}^m A(\omega_k)p_k x, \\ &= \lambda x - \bar{A}x. \end{aligned}$$

Ainsi, la deuxième condition de (4.12) a lieu. Pour terminer, la dernière condition de (4.11) implique

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda x - \bar{A}x \rangle &= \langle x, \bar{F}(x, \lambda) \rangle, \\ &= \langle x, \sum_{k=1}^m (\lambda x - A(\omega_k)x)p_k \rangle, \\ &= \langle x, (\lambda x - A(\omega_1)x)p_1 + \dots + (\lambda x - A(\omega_m)x)p_m \rangle, \\ &= \langle x, (\lambda x - A(\omega_1)x)p_1 \rangle + \dots + \langle x, (\lambda x - A(\omega_m)x)p_m \rangle, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inversement, si (4.12) et (4.13) ont lieu alors (4.11) l'est aussi. ■

4.2.1 Reformulation de StocPCVP de Pareto

L'idée fondamentale, dans cette section, consiste à reformuler (4.11) comme un système d'équations

$$\Psi(z) = 0.$$

Toutes les fonctions NCP sont équivalentes dans le sens où elles peuvent reformuler tout problème de complémentarité comme un système d'équations semi-lisses ayant la même solution. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la fonction ϕ_{FB} définie par (2.13). Notons que (4.12) est le

problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP standard. Donc, comme une première étape vers une reformulation de (4.12) comme un système d'équations semi-lisses, nous écrivons

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \lambda x - \bar{A}x - y = 0, \quad \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 = 0, \quad (4.14)$$

La dernière condition de (4.14) est ajoutée pour assurer que x soit un vecteur non-nul. Ensuite, nous observons que les trois premières conditions de (4.14) peuvent être écrites sous la forme $U_{\phi_{\text{FB}}}(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ où $U_{\phi_{\text{FB}}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par

$$U_{\phi_{\text{FB}}}(x, y) = \begin{bmatrix} \phi_{\text{FB}}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi_{\text{FB}}(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

Alors, résoudre (4.14) est équivalent à résoudre

$$\Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} U_{\phi_{\text{FB}}}(x, y) \\ \lambda x - \bar{A}x - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}. \quad (4.15)$$

Par suite, résoudre (4.14) est équivalent à trouver une solution globale du problème de minimisation suivant

$$\min_{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{2n+1}} \frac{1}{2} \|\Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda)\|^2. \quad (4.16)$$

Notons que $\frac{1}{2} \|\Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda)\|^2$ est connue à être une fonction continûment différentiable.

Plus précisément, en introduisant une variable d'écart $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m] \in \mathbb{R}^{nm}$, où $\nu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, à l'équation (4.13), nous sommes amenés à résoudre un système

$$\Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}, \quad (4.17)$$

$$\lambda x - A(\omega_1)x - \nu_1 = 0_{\mathbb{R}^n},$$

$$\lambda x - A(\omega_2)x - \nu_2 = 0_{\mathbb{R}^n},$$

$$\vdots$$

$$\lambda x - A(\omega_m)x - \nu_m = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

$$(4.18)$$

de $d = n(m+2) + 1$ équations impliquant le même nombre de variables..

Lemme 4.2.2. *Considérons la fonction vectorielle $\Psi_{\text{FB}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la forme suivante*

$$\Psi_{\text{FB}}(z) = \Psi_{\text{FB}}(x, y, \lambda, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) := \begin{bmatrix} \Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda) \\ \lambda x - A(\omega_1)x - \nu_1 \\ \lambda x - A(\omega_2)x - \nu_2 \\ \vdots \\ \lambda x - A(\omega_m)x - \nu_m \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Alors Ψ_{FB} est semi-lisse. De plus, sa Jacobienne généralisée de Clarke en $z = (x, y, \lambda, \nu)$ est donnée par

$$\partial \Psi_{\text{FB}}(z) = \left\{ \begin{bmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - \bar{A} & -\mathbf{I}_n & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_1) & 0 & x & -\mathbf{I}_n & 0 & \dots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_2) & 0 & x & 0 & -\mathbf{I}_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_m) & 0 & x & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} : [E, F] \in \partial U_{\phi_{\text{FB}}}(x, y) \right\}, \quad (4.20)$$

avec \mathbf{I}_n représentant la matrice identité d'ordre n .

Par conséquent, si le problème (4.11) admet une solution, alors résoudre (4.11) est équivalent à résoudre

$$\Psi_{\text{FB}}(z) = 0, \quad \nu \geq 0. \quad (4.21)$$

4.2.2 Conditions de la non singularité de $\partial\Psi_{\text{FB}}(z^*)$ et problème de minimisation

En tenant compte de la section 2.4 du chapitre 2, nous allons étudier, dans cette section, sous quelles conditions tous les éléments des Jacobiennes généralisées de Clarke $\partial\Psi_{\text{FB}}(z^*)$ définie par (4.20) sont inversibles.

Soit $V \in \partial\Psi_{\text{FB}}(z)$, alors

$$V = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M(\omega_1) & -\mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ M(\omega_2) & 0 & -\mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(\omega_m) & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

où

$$H = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ \lambda\mathbf{I}_n - \bar{A} & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \partial\Phi_{\text{FB}}(x, y, \lambda), \quad (4.23)$$

Φ_{FB} est définie par (4.15) et $M(\omega_k) = [\lambda\mathbf{I}_n - A(\omega_k) \quad 0 \quad x]$, $\forall k = 1, \dots, m$.

Soit maintenant $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*, \nu^*)$ une racine de Ψ_{FB} avec $u^* = (x^*, \lambda^*)$ et soit $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une fonction définie par

$$u = (x, \lambda) \mapsto G(u) = \begin{bmatrix} \lambda x - \bar{A}x \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Définir les ensembles d'indices suivants :

$$\alpha := \{i \in \{1, \dots, n+1\} : u_i^* > 0 = G_i(u^*)\},$$

$$\beta := \{i \in \{1, \dots, n+1\} : u_i^* = 0 = G_i(u^*)\},$$

$$\gamma := \{i \in \{1, \dots, n+1\} : u_i^* = 0 < G_i(u^*)\}.$$

Proposition 4.2.1. Soient $v^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ une racine de Φ_{FB} définie par (4.15) et $u^* = (x^*, \lambda^*)$. Si la sous-matrice $G'(u^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible et son complément de Schur

$$G'(u^*)_{\beta\beta} - G'(u^*)_{\beta\alpha}G'(u^*)_{\alpha\alpha}^{-1}G'(u^*)_{\alpha\beta}$$

est une P -matrice, alors la Jacobienne H définie par (4.23) est inversible. Pour plus de détails, voir Proposition 2.4.3 et Théorème 2.4.1 du chapitre 2.

Dans ce cas, $u^* = (x^*, \lambda^*)$ est appelée une solution R -lisse de PCVP (4.12). Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.2.2. Soit $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*, \nu^*)$ une racine de Ψ_{FB} telle que $u^* = (x^*, \lambda^*)$ soit une solution R -lisse de PCVP. Donc, tous les éléments $V \in \partial\Psi_{\text{FB}}(z^*)$ sont inversibles.

Soient $z = (x, y, \lambda, \nu) \in \mathbb{R}^d$ et la fonction mérite du problème (4.21)

$$\theta_{\text{FB}}(z) = \frac{1}{2} \|\Psi_{\text{FB}}(z)\|^2.$$

Si le problème (4.11) admet une solution, alors résoudre (4.21) est équivalent à trouver une solution globale du problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \min \theta_{\text{FB}}(z), \\ \text{tel que } z \geq 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Notons que la fonction θ_{FB} est continûment différentiable.

Comme la matrice Hessienne n'est pas disponible pour cette fonction, alors on va utiliser une méthode de Quasi-Newton pour prendre en compte les contraintes de bornes. Soit on utilise une méthode de contrainte active comme L-BFGS-B [86], ou bien, une méthode de points intérieurs comme IPOPT [121].

4.3 Partie II- Problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques contraint par le cône Lorentz StocPCVPL

Tout au long de cette partie, nous allons étendre le problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz PCVPL défini dans le chapitre 3 de ce travail au cas stochastique. Nous allons appliquer les mêmes étapes données dans les sections précédentes.

De manière similaire à StocPCVP défini par (4.11) et pour des matrices aléatoires $A(\omega) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, le problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques de Lorentz StocPCVPL est défini comme suit :

$$\text{(StocPCVPL)} \begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tels que} \\ x \in \mathcal{K}, \quad F(x, \lambda, \omega_k) := \lambda x - A(\omega_k)x \in \mathcal{K}, \quad \langle x, F(x, \lambda, \omega_k) \rangle = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \quad m > 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

Le scalaire λ et le vecteur x satisfaisant le système (4.26) sont respectivement appelés *la valeur propre stochastique de Lorentz* et *le vecteur propre stochastique de Lorentz associé*.

Lemme 4.3.1. *Soit $A(\omega_k) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $k = 1, \dots, m$. Alors, trouver la solution de (4.26) est équivalent à résoudre le problème suivant :*

$$x \in \mathcal{K}, \quad \lambda x - \bar{A}x \in \mathcal{K}, \quad \langle x, \lambda x - \bar{A}x \rangle = 0, \quad (4.27)$$

$$\lambda x - A(\omega_k)x \in \mathcal{K}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.28)$$

4.3.1 Reformulation de StocPCVPL

Dans cette section, nous procédons les mêmes étapes données dans la section 4.2.1 pour obtenir une nouvelle reformulation de StocPCVPL. Nous sommes amenés à résoudre un système à $d = n(m + 2) + 1$ équations impliquant le même nombre de variables.

Lemme 4.3.2. *Le problème StocPCVPL défini par (4.26) peut être reformulé comme le système d'équations semi-lisses suivant : $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la forme*

$$\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z) = \Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y, \lambda, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) := \begin{bmatrix} U_\phi(x, y) \\ \lambda x - \bar{A}x - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \\ \lambda x - A(\omega_1)x - \nu_1 \\ \lambda x - A(\omega_2)x - \nu_2 \\ \vdots \\ \lambda x - A(\omega_m)x - \nu_m \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

avec

$$U_\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi(x_r, y_r) \end{bmatrix},$$

où ϕ est la fonction $\phi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ définie par (3.24)

Par suite, si le problème (4.26) admet une solution, alors résoudre StocPCVPL est équivalent à résoudre

$$\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z) = 0, \quad \nu \in \mathcal{K}. \quad (4.30)$$

Dans ce qui suit, nous allons illustrer le B-sous-différentiel de $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$. Si $x_i^2 + y_i^2 \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i})$, où

$$\text{int}(\mathcal{K}^n) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 > \|x_2\|\},$$

alors, chaque élément D_{FB} du B-sous-différentiel de $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$, avec ϕ étant $\phi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$, est donné par

$$D_{\text{FB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_v^{-1}L_x & \mathbf{I}_n - L_v^{-1}L_y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - \bar{A} & -\mathbf{I}_n & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_1) & 0 & x & -\mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_2) & 0 & x & 0 & -\mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_m) & 0 & x & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

où

$$v := (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$L_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2^T \\ x_2 & x_1 \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \det(x) = x_1^2 - \|x_2\|^2 \quad \text{et} \quad L_x^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^T \\ -x_2 & \frac{\det(x)}{x_1} \mathbf{I}_{n-1} + \frac{x_2 x_2^T}{x_1} \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Conditions de la non-singularité de $\partial_B \Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z^*)$ et problème de minimisation

De la même façon que la section 4.2.2, nous étudions sous quelles conditions tous les éléments des Jacobiennes de $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ en z^* sont des matrices non-singulières.

Soit $D \in \partial_B \Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z)$, alors

$$D = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M(\omega_1) & -\mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ M(\omega_2) & 0 & -\mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(\omega_m) & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

où $H \in \partial \Phi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y, \lambda)$ est donnée par

$$H_{\text{FB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - L_v^{-1} L_x & \mathbf{I}_n - L_v^{-1} L_y & 0 \\ \lambda \mathbf{I}_n - \bar{A} & -\mathbf{I}_n & x \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

$\Phi_{\text{FB}}^{\text{soc}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2n+1}$ étant une fonction vectorielle définie par

$$\Phi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} U_\phi(x, y) \\ \lambda x - \bar{A}x - y \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

et

$$M(\omega_k) = [\lambda \mathbf{I}_n - A(\omega_k) \quad 0 \quad x], \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Soit maintenant $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*, \nu^*)$ une racine de $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ avec $u^* = (x^*, \lambda^*)$ et soit $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une fonction définie par

$$u = (x, \lambda) \mapsto G(u) = \begin{bmatrix} \lambda x - \bar{A}x \\ \langle \mathbf{1}_n, x \rangle - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Nous disons que u^* est non-dégénérée si $u_i^* + G_i(u^*) \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i})$, pour tout $i \in \{1, \dots, r+1\}$. Dans ce cas, les ensembles d'indices

$$\alpha := \{i \in \{1, \dots, r+1\} : u_i^* \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i}), G_i(u^*) = 0\},$$

$$\beta := \{i \in \{1, \dots, r+1\} : u_i^* \in \text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i}), G_i(u^*) \in \text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i})\},$$

$$\gamma := \{i \in \{1, \dots, r+1\} : u_i^* = 0, G_i(\tilde{u}^*) \in \text{int}(\mathcal{K}^{n_i})\},$$

où $\text{bd}^+(\mathcal{K}^{n_i}) = \text{bd}(\mathcal{K}^{n_i}) \setminus \{0\}$, forment une partition de $\{1, \dots, r+1\}$.

Proposition 4.3.1. Soient (x^*, y^*, λ^*) une racine de $\Phi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ définie par (4.34) et $u^* = (x^*, \lambda^*)$ étant non-dégénérée. Si la sous-matrice $G'(u^*)_{\alpha\alpha}$ est inversible et son complément de Schur

$$G'(u^*)_{\beta\beta} - G'(u^*)_{\beta\alpha} G'(u^*)_{\alpha\alpha}^{-1} G'(u^*)_{\alpha\beta}$$

est une P -matrice, alors la Jacobienne H (4.33) est une matrice inversible.

Par conséquent, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.3.2. Soit $z^* = (x^*, y^*, \lambda^*, \nu^*)$ un zéro de $\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ tel que (x^*, λ^*) est non-dégénérée. Par suite, tous les éléments $D \in \partial_B \Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z^*)$ sont inversibles si et seulement si H est inversible.

Soient $z = (x, y, \lambda, \nu) \in \mathbb{R}^d$ et la fonction mérite du problème (4.30)

$$\theta_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z) = \frac{1}{2} \|\Psi_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z)\|^2.$$

Si le problème (4.26) admet une solution, alors résoudre (4.30) est équivalent à trouver une solution globale du problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \min \theta_{\text{FB}}^{\text{soc}}(z) \\ \text{tel que } z \in \mathcal{K}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Noton que la fonction $\theta_{\text{FB}}^{\text{soc}}$ est continûment différentiable.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de complémentarité aux valeurs propres stochastiques une fois au sens de cône de Pareto StocPCVP et une autre au sens du cône de second-ordre StocPCVPL, dans le cas des variables aléatoires discrètes. Tout d'abord, nous avons rappelé quelques travaux antérieurs traitant les problèmes stochastiques de complémentarité non-linéaires StocNCP. Ensuite, nous avons montré l'importance de tels problèmes dans la pratique en considérant une étude d'un problème de réseaux de transport. Nous avons reformulé chaque problème StocPCVP et StocPCVPL pour trouver les racines d'une fonction semi-lisse. De plus, nous avons étudié les conditions de la non-singularité de la matrice Jacobienne de la fonction semi-lisse mentionnée ci-dessus dans le cas des cônes de Pareto et de second-ordre. Puisque ce genre de problème n'admet pas, en général, des solutions alors nous l'avons transformé pour trouver une solution globale d'un problème de minimisation.

Problème Inverse de Complémentarité aux Valeurs Propres de Pareto

Sommaire

5.1	Introduction	117
5.2	Problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto	118
5.3	Approche lisse pour résoudre le problème inverse de complémentarité aux Valeurs propres de Pareto PICVP	121
5.3.1	Algorithme de flux normal (NFA) pour PICVP	121
5.3.2	Algorithme de la Jacobienne augmentée (AJA)	122
5.3.3	Extensions de NFA	123
5.4	Approche semi-lisse pour résoudre un PICVP	124
5.4.1	Algorithme semi-lisse de flux normal	124
5.4.2	Algorithme semi-lisse de la Jacobienne augmentée	125
5.5	“Inverse lattice projection method” pour résoudre PICVP	125
5.6	Expérience numérique	126
5.7	Conclusions	128

5.1 Introduction

Un problème inverse est une situation dans laquelle on essaie de retrouver une fonction à partir des données obtenues. Prenons par exemple le problème de la transmission de la chaleur à travers un objet solide. Si on connaît u_{t_0} à un temps t_0 , alors le problème inverse consiste à retrouver les conditions initiales.

Dans ce chapitre, nous traitons le problème inverse aux valeurs propres, connu en littérature sous le nom, *Inverse Eigenvalue Problem IEiP*, qui consiste à déterminer une matrice structurée à partir de données spectrales fournies. En particulier, nous nous concentrons sur les problèmes inverses de complémentarité aux valeurs propres IEiCP.

IEiP se pose dans de nombreuses applications telles que la conception des contrôles, le traitement de réseau d’antennes, la physique des particules, la simulation du système mécanique, ainsi que de nombreux autres domaines. Il existe différents types de IEiP attirant un grand nombre de recherche. Pour plus de détails sur les différents problèmes, des résultats théoriques, des algorithmes numériques, des applications et des problèmes ouverts se reportent à l’excellent livre [22].

Traditionnellement, IEiP concerne la reconstruction d’une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ à partir des données spectrales. La matrice inconnue A est généralement requise d’avoir une structure particulière, comme par exemple étant symétrique, tridiagonale, ou non-négative. D’autre part, les données spectrales $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ qui est disponible, peuvent correspondre à la collection complète des valeurs propres de A ou à quelques-unes d’entre elles. Pour IEiP, deux questions fondamentales se posent : la première est de déterminer les conditions nécessaires et/ou suffisantes dans

lesquelles un problème inverse aux valeurs propres est résoluble. La deuxième question s'intéresse à des algorithmes efficaces et fiables pour résoudre ces problèmes, lorsqu'ils sont réalisables. Les deux questions sont difficiles et exigeantes. Il existe une vaste littérature, concernant ces deux questions sur les aspects théoriques et algorithmiques des problèmes inverses aux valeurs propres. En 1937, Kolmogorov [65] avait posé la question : quand est-ce qu'un nombre complexe donné z est une valeur propre d'une certaine matrice non-négative. Suleimanova [114] avait étendu la question de Kolmogorov en 1949 à ce qui est maintenant appelé le problème inverse non-négatif aux valeurs propres, connu en littérature sous le nom, *Non-negative Inverse Eigenvalue Problem NIEiP* : trouver des conditions nécessaires et suffisantes telles que l'ensemble $\sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ des nombres complexes soit le spectre d'une matrice positive $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Si une telle matrice A existe, nous disons que A réalise σ . NIEiP a également été abordé par Borovia [14], Kellogg [62], Salzmann [110], et d'autres auteurs, voir [34] pour une étude récente consacrée à ce problème et certaines de ses variantes.

Le problème inverse aux valeurs propres de Pareto étudié dans ce chapitre diffère considérablement de nombreux problèmes IEiP apparaissant dans la littérature. Ce n'est pas exactement la même chose. Notre but est de trouver une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que chaque élément de $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ est une valeur propre de Pareto de A , c'est-à-dire, une solution du problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP de Pareto

$$x \geq 0, Ax - \lambda x \geq 0, \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0. \quad (5.1)$$

Notre contribution, dans ce chapitre, est d'introduire la méthode inverse de LPM pour résoudre le problème IEiCP. Tout d'abord, nous allons étudier quelques résultats obtenus par Seeger et Gajardo dans [41]. Puis, nous allons définir les approches lisse et semi-lisse données par ces auteurs dans [42] pour résoudre un tel problème en présentant les algorithmes de flux normal NFA et de la Jacobienne augmentée AJA. En outre, nous définissons la méthode inverse de LPM et quelques résultats expérimentaux sont ensuite donnés.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 5.2, nous définissons le problème IEiCP au sens de Pareto. Puis, en nous basant sur les travaux de Seeger et Gajardo, nous étudions l'ensemble de solution de IEiCP dans le cas où $p \leq n(n+1)/2$. Les matrices obtenues sont alors dites canoniques [41, Proposition 3.4]. Ensuite, nous réécrivons IEiCP sous forme d'un autre problème noté par PICVP afin d'introduire notre méthode. Dans la section 5.3, nous illustrons le cas non-canonique, tout en décrivant la technique de mise au carré de l'approche lisse pour enlever les contraintes de la positivité de PICVP pour résoudre un tel problème. Cette technique est ensuite utilisée dans les algorithmes de flux normal NFA et de la Jacobienne augmentée AJA. En outre, nous étudions, dans la section 5.3.3, quelques cas particuliers de la solution A de PICVP. Dans la section 5.4, nous présentons l'approche non-lisse tout en décrivant la technique de la fonction de complémentarité pour résoudre un tel problème. En tenant compte de la fonction Fischer-Burmeister, nous reformulons PICVP, de façon équivalente, en un système d'équations semi-lisses. Nous proposons, dans la section 5.5, la nouvelle méthode qui est basée sur LPM introduite dans le chapitre 2 de ce travail. Nous reformulons PICVP pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse. Dans la section 5.6, nous effectuons une première expérience numérique pour tester l'efficacité de notre méthode. Enfin, dans la section 5.7, nous fermons le chapitre par une conclusion.

5.2 Problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto

Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble donné de nombres réels distincts. Le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto, connu en littérature sous le nom, *Inverse Pareto*

Eigenvalue Complementarity Problem IPEiCP, consiste à résoudre un système de la forme

$$(IPEiCP) \begin{cases} x_k \geq 0, & Ax_k - \lambda_k x_k \geq 0, & \langle x_k, Ax_k - \lambda_k x_k \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle = 1, \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.2)$$

où les variables inconnues sont les entrées de la matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et les composantes des vecteurs $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, IPEiCP consiste à trouver une matrice A telle que

$$\Lambda \subset \Pi(A). \quad (5.3)$$

Nous notons l'ensemble de solution de (5.3) par

$$S_n(\Lambda) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \Lambda \subset \Pi(A)\}, \quad (5.4)$$

avec $\Pi(A)$ étant le spectre de Pareto de A .

En général, l'ensemble $S_n(\Lambda)$ n'est pas un singleton (ensemble à un seul élément) car une fois, qu'une solution de (5.3) est trouvée, alors de nombreuses autres solutions peuvent être construites avec une opération de permutation à gauche et à droite.

Proposition 5.2.1. *Nous reprenons la preuve présentée dans [41]. Si $A \in S_n(\Lambda)$ et $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation, alors*

$$P^T A P \in S_n(\Lambda).$$

Preuve. Nous avons

$$\Pi(P^T A P) = \Pi(A),$$

pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Cette égalité implique le résultat souhaité. ■

La proposition 5.2.1 indique que $S_n(\Lambda)$ contient un grand nombre d'éléments. En fait, $S_n(\Lambda)$ peut être non-dénombrable. Nous allons voir ceci dans la proposition suivante.

Proposition 5.2.2. *Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble donné de nombres réels distincts et soit*

$$\tau_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = n(n+1)/2.$$

(a) *Si $p = \tau_n$, alors $S_n(\Lambda)$ contient au moins $n!C_2^n!$ éléments.*

(b) *Si $p < \tau_n$, alors $S_n(\Lambda)$ est un ensemble non-dénombrable et non-borné.*

Preuve. Nous reprenons la preuve présentée dans [41].

(a) Si $p = \tau_n$, nous plaçons les n plus petits éléments $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de Λ sur la diagonale de la matrice A . Dans ce cas, nous avons $n!$ façons pour le faire. Les C_2^n plus grands éléments $\{\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_p\}$ de Λ peuvent être marqués comme

$$\{\mu_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Nous avons, évidemment, $C_2^n!$ façons pour définir les scalaires $\mu_{i,j}$. Alors, nous complétons la matrice A en posant

$$a_{i,j} = \begin{cases} \mu_{i,j} - a_{i,i} & \text{si } i < j, \\ \mu_{j,i} - a_{j,j} & \text{si } j < i. \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que les entrées hors-diagonales de A sont tous strictement positives. Soit maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n , alors, chaque e_i est un vecteur propre de Pareto de A avec $a_{i,i}$ est la valeur propre associée de Pareto, et chaque $e_i + e_j$ est un vecteur propre de Pareto de A avec $\mu_{i,j}$ la valeur propre associée de Pareto. Par conséquent, la matrice A résout (5.3). Donc, nous avons montré, de cette manière, que (5.3) possède au moins $n!C_2^n!$ solutions.

- (b) Si $p < \tau_n$, nous élargissons l'ensemble original Λ , avec les scalaires $r = \tau_n - p$ afin d'obtenir un nouveau ensemble,

$$\tilde{\Lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, s_1, \dots, s_r\},$$

de cardinalité τ_n . Dans ce cas, nous appliquons (a) à l'ensemble $\tilde{\Lambda}$ et nous obtenons une matrice

$$A(s_1, \dots, s_r) \in S_n(\tilde{\Lambda}) \subset S_n(\Lambda)$$

paramétrée par les variables s_i . Alors, si nous laissons s_r étendre de $1 + \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, s_1, \dots, s_{r-1}\}$ à l'infinie, alors, $S_n(\Lambda)$ est, dans ce cas, un ensemble non-dénombrable et non-borné. ■

Remarque 5.2.1. Nous notons qu'une matrice A construite comme dans la démonstration ci-dessus est appelée *une solution canonique* de (5.3). Les solutions canoniques ne sont définies que pour $p \leq \tau_n$. Nous donnons, dans la suite, un exemple de petite dimension pour la construction d'une matrice canonique.

Exemple 5.2.1. Soit Λ un ensemble donné de nombres réels distincts et strictement positifs avec

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_5.$$

Alors, en tenant compte de la proposition 5.2.2, nous obtenons

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 - \lambda_1 & \lambda_5 - \lambda_1 \\ \lambda_4 - \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_6 - \lambda_2 \\ \lambda_5 - \lambda_3 & \lambda_6 - \lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

appartenant à l'ensemble $S_3(\Lambda)$. Cette solution est obtenue en posant

$$\mu_{1,2} = \lambda_4, \quad \mu_{1,3} = \lambda_5 \quad \text{et} \quad \mu_{2,3} = \lambda_6.$$

Dans la suite ce de chapitre, nous allons réécrire le problème IEiCP sous la forme

$$(\text{PICVP}) \begin{cases} x_k \geq 0, & \lambda_k x_k - Ax_k \geq 0, & \langle x_k, \lambda_k x_k - Ax_k \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle = 1, & & \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \end{cases} \quad (5.6)$$

afin d'introduire notre méthode numérique où PICVP désigne le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres et λ_k est censé être strictement positif pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

Tout d'abord, nous reformulons le système (5.6) comme suit

$$\begin{cases} x_k \geq 0, \\ y_k \geq 0, \\ \langle x_k, y_k \rangle \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - A)x_k - y_k = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.7)$$

Autrement dit, en introduisant les vecteurs colonnes de la matrice rectangulaire $X = [x_1, \dots, x_p]$ et le vecteur $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$, nous obtenons une formulation plus succincte de (5.6)

$$X \geq \mathbf{O}, \quad X \bullet \vec{\lambda} - AX \geq \mathbf{O}, \quad \langle X, X \bullet \vec{\lambda} - AX \rangle = 0,$$

où \mathbf{O} est la matrice nulle de taille appropriée, $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y)$ est la trace du produit de scalaire et le produit \bullet d'un vecteur v par une matrice M est une matrice dont ses entrées sont données par $(M \bullet v)_{i,j} = m_{i,j} v_j$. Ensuite, Pour des raisons de concision, nous écrivons le système (5.7) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbf{O} \leq X \perp Y \geq \mathbf{O}, \\ X \bullet \vec{\lambda} - AX - Y = \mathbf{O}, \\ X^T \mathbf{1}_n - \mathbf{1}_p = \mathbf{0}_p, \end{cases} \quad (5.8)$$

où Y est la matrice rectangulaire donnée par

$$Y = [y_1, \dots, y_p].$$

5.3 Approche lisse pour résoudre le problème inverse de complémentarité aux Valeurs propres de pareto PICVP

Récemment, Seeger et Gajardo avaient étudié ce genre de problème dans [41, 42]. Ils avaient utilisé deux façons pour se débarrasser des contraintes de la positivité dans (5.7) ou (5.8). La technique de mise au carré (respectivement, la technique de la fonction de complémentarité) conduit à un système d'équations lisses (respectivement non-lisses). Dans ce qui suit, nous allons décrire, brièvement, la première façon en présentant les deux algorithmes utilisés dans [42] pour résoudre le PICVP.

5.3.1 Algorithme de flux normal (NFA) pour PICVP

La technique de mise au carré consiste à introduire le changement de variables

$$\begin{cases} x_k = u_k^{[2]} = u_k \odot u_k, \\ y_k = v_k^{[2]} = v_k \odot v_k. \end{cases} \quad (5.9)$$

Les auteurs obtiennent, de cette manière, le système lisse

$$\begin{cases} u_k \odot v_k = 0_n, \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - A)u_k^{[2]} - v_k^{[2]} = 0_n, \\ \|u_k\|^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.10)$$

de $2pn + p$ équations et $2pn + n^2$ variables inconnues, à savoir, les composantes de vecteurs $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ et les entrées de la matrice A .

Puis, le système (5.10) peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = F(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, A_1, \dots, A_n) = 0, \quad (5.11)$$

où A_i , $i = 1, \dots, n$ représentent les colonnes de la matrice A et $F : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ est la fonction vectorielle différentiable définie par

$$F(z) = \begin{bmatrix} u_1 \odot v_1 \\ \vdots \\ u_p \odot v_p \\ (\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)u_1^{[2]} - v_1^{[2]} \\ \vdots \\ (\lambda_p \mathbf{I}_n - A)u_p^{[2]} - v_p^{[2]} \\ \|u_1\|^2 - 1 \\ \vdots \\ \|u_p\|^2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

La matrice Jacobienne $F'(z)$ agissant sur un vecteur $\Delta z = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_p, \Delta v_1, \dots, \Delta v_p, \Delta A_1, \dots, \Delta A_n)$ est donnée par

$$F'(z)\Delta z = \begin{bmatrix} v_1 \odot \Delta u_1 + u_1 \odot \Delta v_1 \\ \vdots \\ v_p \odot \Delta u_p + u_p \odot \Delta v_p \\ 2(\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)(u_1 \odot \Delta u_1) - (\Delta A)u_1^{[2]} - 2v_1 \odot \Delta v_1 \\ \vdots \\ 2(\lambda_p \mathbf{I}_n - A)(u_p \odot \Delta u_p) - (\Delta A)u_p^{[2]} - 2v_p \odot \Delta v_p \\ 2\langle u_1, \Delta u_1 \rangle \\ \vdots \\ 2\langle u_p, \Delta u_p \rangle \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Les auteurs avaient étudié le cas où $p \leq n^2$ puisque l'ensemble de solution $S_n(\Lambda)$ est probablement vide lorsque $p > n^2$ [41]. Dans la suite, nous décrivons l'algorithme de flux normal, connu en littérature sous le nom, *normal flow algorithm (NFA)*, donné par Seeger et Gajardo pour résoudre IPEiCP.

ALGORITHME DE FLUX NORMAL (NFA) : cet algorithme consiste à appliquer la formule de récurrence

$$z^{t+1} = z^t - [F'(z^t)]^\dagger F(z^t), \quad (5.14)$$

où M^\dagger désigne le Pseudo-inverse de Moore-Penrose pour la matrice rectangulaire M . En pratique, à chaque étape t , on calcule la solution en norme Euclidienne au système linéaire

$$F'(z^t)\Delta z = -F(z^t), \quad (5.15)$$

puis on met à jour le point actuel z^t en posant

$$z^{t+1} = z^t + \Delta z. \quad (5.16)$$

5.3.2 Algorithme de la Jacobienne augmentée (AJA)

Cet algorithme, connu en littérature sous le nom, *augmented Jacobian algorithm (AJA)*, utilise la formule (5.16), mais Δz représente désormais la solution du système linéaire suivant

$$\begin{cases} F'(z^t)\Delta z = -F(z^t), \\ B^t \Delta z = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

B^t est une application linéaire entre des espaces euclidiens de dimensions appropriées. L'idée de la formulation de AJA est la construction de B^t afin que la "Jacobienne augmentée"

$$\begin{bmatrix} F'(z^t) \\ B^t \end{bmatrix} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (5.18)$$

où \mathbb{Z} est un espace Euclidien, soit inversible. Dans un tel cas, le vecteur Δz , à l'étape t , est donné par

$$\Delta z = - \begin{bmatrix} F'(z^t) \\ B^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F(z^t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

5.3.3 Extensions de NFA

Si une solution A est demandée d'être dans un sous-ensemble particulier de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ alors les auteurs ont démontré dans [41] qu'il est possible d'adapter NFA à cette situation plus complexe. Ci-dessous, nous discuterons brièvement quelques cas intéressants.

5.3.3.1 Matrices symétriques

Si l'on est à la recherche d'une solution symétrique A pour (5.6), alors il est naturel d'ajouter l'équation matricielle $A = A^T$ au système (5.10). Cependant, en procédant de cette façon, on augmente par $\frac{n(n+1)}{2}$ le nombre d'équations scalaires dans (5.10). Une autre option est de modifier le système (5.10) par

$$\begin{cases} u_k \odot v_k = 0, \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - \text{sym}(B))u_k^{[2]} - v_k^{[2]} = 0, \\ \|u_k\|^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.20)$$

où $\text{sym}(B) = (\frac{1}{2})(B + B^T)$ est la partie symétrique de B .

Comme la fonction $\text{sym}: \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire, continûment différentiable alors NFA est aisément applicable au système (5.20). Une fois la solution $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, B$ de (5.20) a été trouvée, nous obtenons la matrice symétrique $A = \text{sym}(B)$.

5.3.3.2 Matrices positives

Si l'on est à la recherche d'une solution positive A pour (5.6), alors au lieu de (5.20), on résout le système

$$\begin{cases} u_k \odot v_k = 0, \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - W^{[2]})u_k^{[2]} - v_k^{[2]} = 0, \\ \|u_k\|^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.21)$$

où $W^{[2]} = W \odot W$ est le produit de Hadamard (composante par composante) de $W \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec elle même.

5.3.3.3 Matrices dépendant de paramètres

Supposons qu'une solution de (5.6) est sollicitée dans la gamme

$$\text{gme}(\varphi) = \{\varphi(\omega) : \omega \in \mathbb{R}^p\} \quad (5.22)$$

d'une certaine application continûment différentiable à valeurs matricielles $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On voit $\varphi(\omega)$ comme une matrice dépendant d'un vecteur de paramètres ω . En fait, ω peut être une matrice elle-même ou, plus généralement, un élément de l'espace euclidien. Pour traiter ce genre de problème, nous proposons de résoudre le système

$$\begin{cases} u_k \odot v_k = 0, \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - \varphi(\omega))u_k^{[2]} - v_k^{[2]} = 0, \\ \|u_k\|^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.23)$$

et retenir après $A = \varphi(\omega)$.

5.4 Approche semi-lisse pour résoudre un PICVP

Dans cette section, nous allons décrire le cas lorsque la fonction φ donnée par (5.22) n'est pas différentiable. C'est la deuxième technique donnée par Seeger et Gajardo, appelée technique de la fonction de complémentarité. Cette dernière consiste la reformulation du système (5.7) comme suit

$$\begin{cases} \varphi(x_k, y_k) = 0, \\ (\lambda_k \mathbf{I}_n - A)x_k - y_k = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (5.24)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction de complémentarité Fischer-Burmeister

$$\varphi(x, y) = x + y - [x^{[2]} + y^{[2]}]^{[1/2]}, \quad (5.25)$$

où $w^{[1/2]} = (\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})$. La fonction (5.25) n'est pas différentiable, mais elle est semi-lisse. Par suite, deux algorithmes sont applicables au système (5.24).

5.4.1 Algorithme semi-lisse de flux normal

Nous considérons la formulation (5.24) de PICVP. Alors, Le modèle considéré maintenant correspond à un système non-lisse

$$F(z) = 0 \quad (5.26)$$

de $2pn + p$ équations et $2pn + n^2$ variables inconnues, à savoir,

$$z = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p, A_1, \dots, A_n).$$

La fonction $F : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ définie par

$$F(z) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_p, y_p) \\ (\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)x_1 - y_1 \\ \vdots \\ (\lambda_p \mathbf{I}_n - A)x_p - y_p \\ \langle \mathbf{1}_n, x_1 \rangle - 1 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, x_p \rangle - 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

est localement Lipschitzienne et semi-lisse.

Toute application linéaire $M : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ appartient à $\partial F(z)$ la Jacobienne généralisée de Clarke de F si et seulement si

$$M\Delta z = \begin{bmatrix} P_1 \odot \Delta x_1 + Q_1 \odot \Delta y_1 \\ \vdots \\ P_p \odot \Delta x_p + Q_p \odot \Delta y_p \\ (\lambda_1 \mathbf{I}_n - A)\Delta x_1 - (\Delta A)x_1 - \Delta y_1 \\ \vdots \\ (\lambda_p \mathbf{I}_n - A)\Delta x_p - (\Delta A)x_p - \Delta y_p \\ \langle \mathbf{1}_n, \Delta x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, \Delta x_p \rangle \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

où $(P_1, Q_1) \in \partial\varphi(x_1, y_1), \dots, (P_p, Q_p) \in \partial\varphi(x_p, y_p)$.

ALGORITHME SEMI-LISSE DE FLUX NORMAL : cet algorithme, connu en littérature sous le nom, *semismooth normal flow algorithm (SNFA)*, consiste à appliquer la formule de récurrence

$$z^{t+1} = z^t - (M^t)^\dagger F(z^t), \quad (5.29)$$

où $M^t \in \partial F(z^t)$.

5.4.2 Algorithme semi-lisse de la Jacobienne augmentée

Comme une alternative à l’itération (5.29), nous pouvons considérer la formule mise à jour $z^{t+1} = z^t + \Delta z$, avec Δz étant la solution du système linéaire

$$\begin{cases} M^t \Delta z = -F(z^t), \\ B^t \Delta z = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Cette itération s’appelle algorithme semi-lisse de la Jacobienne augmentée, connu en littérature sous le nom, *semismooth augmented Jacobian algorithm SAJA*.

5.5 “Inverse lattice projection method” pour résoudre PICVP

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle formulation du problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto qui nous conduit à résoudre un système non-linéaire et semi-lisse de $(2pn + p)$ équations et $(2pn + n^2)$ variables inconnues. C’est la méthode *Inverse Lattice Projection Method* ILPM.

Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un ensemble donné de nombres réels distincts et strictement positifs, le problème inverse aux valeurs propres de Pareto

$$0 \leq x_k \perp (\lambda_k x_k - Ax_k) \geq 0, \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\},$$

est équivalent au problème suivant

$$\max(Ax_k, 0) = \lambda_k x_k, \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}.$$

Autrement dit, pour $\Lambda > 0$,

$$0 \leq x_k \perp (\lambda_k x_k - Ax_k) \geq 0 \iff (Ax_k)^+ = \lambda_k x_k, \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}.$$

Alors, de cette manière, nous sommes maintenant amenés à résoudre le système suivant de $2pn + p$ équations

$$\begin{cases} \tilde{y}_k^+ - \lambda_k x_k = 0, \\ Ax_k - \tilde{y}_k = 0, \\ \langle \mathbf{1}_n, x_k \rangle - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\},$$

Nous considérons, maintenant, la fonction $F_{\text{ILPM}} : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ définie par

$$F_{\text{ILPM}}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^+ - \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_p^+ - \lambda_p x_p \\ Ax_1 - \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ Ax_p - \tilde{y}_p \\ \langle \mathbf{1}_n, x_1 \rangle - 1 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, x_p \rangle - 1 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

où $z = \{x_1, \dots, x_p, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p, A_1, \dots, A_p\}$. Cette fonction est localement Lipschitzienne et semi-lisse. Il est clair alors que résoudre IPEiCP est équivalent à résoudre le système non-linéaire

$$F_{\text{ILPM}}(z) = 0. \quad (5.32)$$

Nous allons appeler cette méthode *Inverse Lattice projection method* ILPM. De plus, toute application linéaire $H : \mathbb{R}^{2pn+n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{2pn+p}$ appartient à $\partial F_{\text{ILPM}}(z)$ la Jacobienne généralisée de Clarke de F_{ILPM} si et seulement si

$$H\Delta z = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \Delta x_1 + \tilde{F}_1 \odot \Delta \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ -\lambda_p \Delta x_p + \tilde{F}_p \odot \Delta \tilde{y}_p \\ A\Delta x_1 - (\Delta A)x_1 - \Delta \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ A\Delta x_p - (\Delta A)x_p - \Delta \tilde{y}_p \\ \langle \mathbf{1}_n, \Delta x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{1}_n, \Delta x_p \rangle \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

où $\tilde{F}_k \in \partial(\cdot)^+(\tilde{y}_k)$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

5.6 Expérience numérique

Dans cette section, nous allons comparer ILPM avec deux méthodes définies précédemment NFA et SNFA. Afin de compléter cette expérience, nous allons utiliser les profils de performance comme un outil de comparaison. Alors, nous posons $S = \{\text{ILPM}, \text{NFA}, \text{SNFA}\}$ l'ensemble des solveurs, $n_s = 3$ le nombre de solveurs, $n_p = 5000$ problèmes, c'est-à-dire 5000 vecteurs aléatoires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$ distribués uniformément sur l'hypercube $[0, 1]^p$ et une matrice aléatoire A uniformément distribuée sur $[-1, 1]^{n \times n}$. Comme c'est le premier test numérique, nous avons choisi n

de petites dimensions $n \leq 7$ avec $n < p \leq n^2$. D'autre part, nous avons volontairement évité de traiter le cas où $p > n^2$, car une telle situation conduit à un ensemble de solution probablement vide. De plus, nous avons évité le cas où $p > \tau_n$ puisque nous avons déjà montré dans la proposition 5.2.2 que pour $p \leq \tau_n$, PICVP est toujours résoluble pour un ensemble arbitraire Λ . Cependant, la situation $p > \tau_n$ n'est pas encore bien compris.

Comme critères d'arrêt, nous laissons les algorithmes en exécution jusqu'à ce que l'une des situations suivantes se produit :

(a) $t=1000$ Echec (absence de convergence),

(b) $\kappa(F'(z^t)) \geq 10^5$ Echec (mauvais conditionnement),

(c) $\|F(z^t)\| \leq 10^{-8}$ Succès (une solution a été détectée),

où $\kappa(M) = \sigma_{\max}(M)/\sigma_{\min}(M)$ désigne le conditionnement de la matrice M .

Puisque nous comparons les trois algorithmes en même temps, alors nous avons commencé par des mêmes points initiaux aléatoires uniformément distribués sur $[-1, 1]^{n \times p}$. Cette expérience numérique a été exécutée en MATLAB 7.7. Nous nous sommes intéressés au temps de calcul et au nombre d'échecs détecté par chaque méthode pour résoudre chaque problème en tant que mesures de performance. Les résultats obtenus sont illustrés par les figures suivantes.

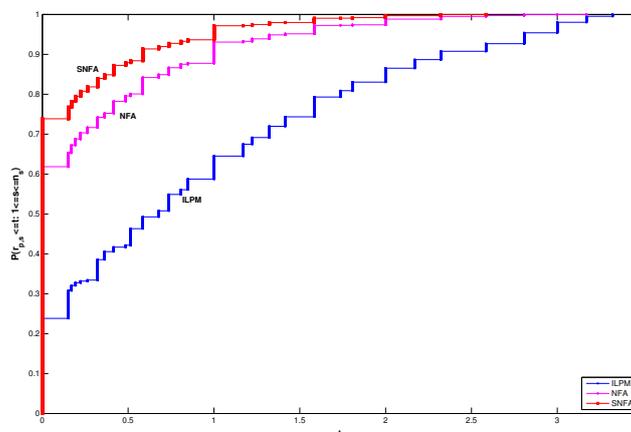


FIGURE 5.1 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente le nombre d'échecs.

La figure ci-dessus présente les profils de performance de trois solveurs en tenant compte de nombre d'échecs comme critère de comparaison. Nous rappelons que le nombre d'échecs est détecté suivant (a) et (b) des critères d'arrêt données ci-dessus. Pour un ensemble de problèmes de différentes dimensions et avec les même points initiaux, nous remarquons que NFA et SNFA sont plus performants que ILPM. Dans l'intervalle $[0, 0.5]$, SNFA résout 85% de problèmes, NFA arrive à détecter 75% de solutions mais ILPM résout 40% de problèmes. Alors, comme une première conclusion pour ce premier test numérique, nous déduisons que SNFA et NFA sont les plus efficaces.

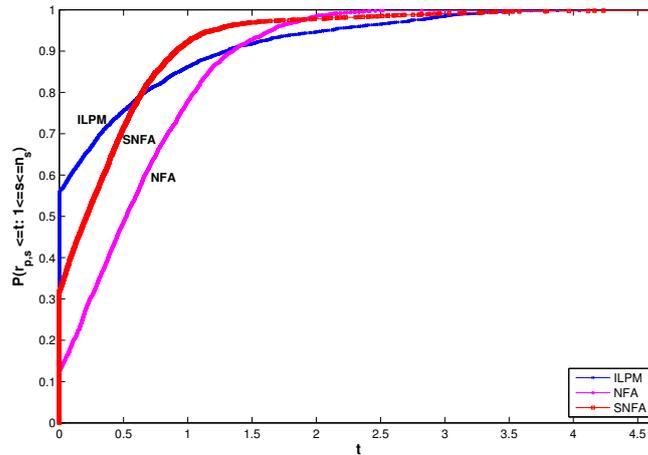


FIGURE 5.2 – Profils de performance où $t_{p,s}$ représente la moyenne de temps de calcul.

Figure 5.2 affiche les profils de performance de trois méthodes en considérant le temps d'exécution comme outil de comparaison. Notons que d'après la figure 5.1, puisque le nombre d'échecs de ILPM est important, nous comparons, dans la figure 5.2, le temps de calcul nécessaire pour résoudre les problèmes communs entre ILPM, NFA et SNFA. Nous remarquons que pour $t \in [0, 0.5]$, ILPM est la plus rapide pour détecter des solutions. Au delà de $t = 1$, les performances de NFA et SNFA attirent notre attention.

Nous nous sommes toujours intéressés par l'amélioration de notre méthode ILPM pour être plus performante puisque dans le cas de PCVP de Pareto et PCVPL et d'après nos expériences et simulations numériques, LPM est la méthode la plus efficace pour résoudre tels problèmes.

5.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto PICVP. Tout d'abord, nous avons étudié l'ensemble des solutions $S_n(\Lambda)$ de IPEiCP dans le cas où $p \leq n(n+1)/2$ en nous basant sur les travaux de Seeger et Gajardo [41]. Les matrices construites d'après cette situation sont appelées matrices canoniques. Ensuite, nous avons illustré le cas non canonique tout en décrivant les deux techniques données dans [42] pour résoudre un tel problème. La première technique était lisse et basée sur la mise au carré pour se débarrasser des contraintes de la positivité. Elle était ensuite utilisée dans les deux algorithmes NFA et AJA. La deuxième était semi-lisse et nécessite l'utilisation des fonctions NCP. En outre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour résoudre PICVP. C'était la méthode ILPM, inverse lattice projection method, qui avait reformulé un tel problème pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse. Enfin, nous avons effectué une expérience numérique pour tester la performance de ILPM. Les résultats obtenus ont montré que ILPM a besoin d'amélioration pour être plus efficace.

Conclusions et Perspectives

L'objectif initial de cette thèse était d'appréhender le problème de complémentarité aux valeurs propres PCVP et de contribuer à la recherche d'une méthode adéquate et efficace pour sa résolution.

Pour y parvenir, nous avons, tout d'abord, motivé notre problématique dans les domaines pratiques en nous présentant deux applications en mécanique où les modèles sont décrits par un problème de complémentarité aux valeurs propres. La première était liée à la recherche d'instabilités de systèmes mécaniques en présence d'obstacles avec frottement. La deuxième application était l'étude d'un modèle à quatre noeuds dont deux étaient en glissement vers la gauche.

Le coeur des travaux de cette thèse repose sur les problèmes de complémentarité aux valeurs propres PCVP engendrés par le cône de Pareto et le cône du second-ordre.

Dans un premier temps, nous avons pu reformuler PCVP de Pareto en un système d'équations semi-lisses en nous basant sur les fonctions NCP, les plus fréquemment utilisées dans la littérature, telles que la fonction Fischer-Burmeister ϕ_{FB} et la fonction $\min \phi_{\text{min}}$.

Ensuite, la contribution principale était de proposer une nouvelle méthode et une nouvelle reformulation de PCVP, appelée, *Lattice Projection Method* LPM. L'originalité de cette formulation, en comparaison avec la littérature existante, réside dans le fait qu'elle ne repose pas sur l'approche de complémentarité. Cette méthode nous a conduit à la résolution d'un système non-linéaire et semi-lisse.

De plus, une autre contribution était d'étudier les conditions de la non-singularité des matrices Jacobiennes utilisées dans la méthode de Newton semi-lisse SNM pour résoudre un tel problème. Nous avons illustré nos résultats obtenus en présentant quelques exemples.

En outre, nous avons comparé LPM avec deux autres solveurs très connus dans la littérature tels que SNM_{FB} et SNM_{min} . Pour effectuer cette expérience numérique, nous avons proposé les profils de performance comme un outil de comparaison. Nous avons choisi l'étude de temps de calcul, le nombre d'itérations, le nombre d'échecs et le nombre maximal des valeurs propres détectées par chaque solveur en tant que mesures de performance. Les résultats numériques obtenus ont montré l'efficacité de notre méthode LPM.

Nous avons aussi pu traiter le problème de complémentarité aux valeurs propres bivariées de Pareto bi-PCVP. Nous avons reformulé ce dernier en un système d'équations semi-lisses. Ensuite, nous avons appliqué LPM à ce problème. Les résultats obtenus sont prometteurs. Le principal avantage de notre méthode réside dans sa facilité d'utilisation et son implémentation rapide.

A côté de ces contributions, nous avons comparé notre solveur avec une technique basée sur la mise au carré et l'utilisation de l'itération de la méthode de Newton et avec le solveur Path. Les expériences ont montré la performance de LPM.

Dans un second temps, nous avons étendu notre travail au problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz PCVPL. Ce genre de problème PCVPL était considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles et ceci revient à la structure de Lorentz qui n'est pas polyédrique et au spectre associé qui n'est pas toujours discret.

En nous basant sur les fonctions de complémentarité de second-ordre (fonctions SOCC), nous avons reformulé un tel problème pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse.

Par ailleurs, la contribution initiale de cette étude était de généraliser la méthode LPM pour

résoudre un PCVPL. De plus, nous avons proposé des conditions de la non-singularité de la matrice Jacobienne de SNM qui ont servi à la résolution de PCVPL.

Nous avons aussi évalué notre méthode en abordant des expériences numériques. Nous avons comparé LPM avec les algorithmes $\text{SNM}_{\text{FB}}^{\text{soc}}$, $\text{SNM}_{\text{min}}^{\text{soc}}$ et NM en nous basant sur les profils de performances. Les résultats obtenus se sont avérés en accord avec les observations expérimentales et ont montré la robustesse de LPM.

D'autre part, nous avons attaqué le cas stochastique du problème de complémentarité aux valeurs propres au sens de cône de Pareto StocPCVP. Des études préliminaires ont été effectuées pour résoudre un tel problème. Tout d'abord, nous avons reformulé le StocPCVP en un système semi-lisse en nous basant sur la fonction Fischer-Burmeister. Puis, nous avons étudié les conditions de la non-singularité des Jacobiennes de ce système pour résoudre un tel problème. Nous avons, ensuite, transformé le StocPCVP pour trouver une solution globale d'un problème de minimisation.

Par ailleurs, nous avons aussi traité le cas stochastique du problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz StocPCVPL. Nous avons appliqué les mêmes étapes que le cas de Pareto StocPCVP.

Pour clore ce mémoire, nous avons étudié le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto PICVP. Cette tâche s'articulait plus précisément autour de la résolution d'un tel problème. Nous avons illustré quelques travaux donnés par Seeger et Gajardo tout en décrivant la technique de la mise au carré de l'approche lisse et ensuite l'utilisation des algorithmes de flux normal NFA et de la Jacobienne augmentée AJA pour résoudre PICVP. La deuxième technique est basée sur la fonction de complémentarité Fischer-Burmeister et ensuite la reformulation de IPEiCP en un système semi-lisse et l'utilisation des méthodes semi-lisses SNFA et SAJA.

En outre, nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur LPM, appelée, inverse lattice projection method ILPM, pour résoudre PICVP. Nous avons reformulé un tel problème pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse.

Par ailleurs, nous avons effectué une expérience numérique pour tester l'efficacité de notre algorithme ILPM. Nous l'avons comparé avec NFA et SNFA en nous basant sur les profils de performance. Les résultats ont montré que notre solveur ILPM a besoin d'amélioration pour la résolution de PICVP.

Perspectives

Les résultats de cette étude peuvent donc ouvrir sur de nouvelles perspectives pour les problèmes de complémentarité aux valeurs propres PCVP.

- Le premier point concerne notre méthode LPM et la possibilité de l'étendre aux espaces différents de l'orthant positif et du cône de Lorentz.

- Il paraît aussi important d'étudier la globalisation de la méthode LPM pour résoudre le problème de complémentarité aux valeurs propres de Lorentz PCVPL en construisant une fonction mérite associée à la fonction Φ_{LPM} (3.42)

$$\Psi_{\text{LPM}}(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \|\Phi_{\text{LPM}}(\tilde{z})\|^2.$$

L'inconvénient de cette fonction est la non-différentiabilité. Comme une conséquence immédiate est que les méthodes numériques basées sur le gradient de la fonction, comme la méthode de descente et la méthode de Newton, ne peuvent pas être directement applicables à la fonction Ψ_{LPM} . Pour surmonter cette difficulté, M. Fukushima, Z.Q. Luo et P. Tseng [40] et S. Hayashi, N. Yamashita et M. Fukushima [49] ont proposé des méthodes de régularisation en remplaçant la fonction d'origine non-différentiable par une suite d'approximations différentiables.

- Le deuxième point se base sur le cas stochastique du problème PCVP. Il paraît important de faire des tests numériques pour la résolution d'un tel problème. Un autre point important est de globaliser la méthode LPM pour résoudre le StocPCVP.

-Le troisième point concerne le problème inverse PICVP. Durant l'étude de ce genre de problème, nous avons remarqué qu'il paraît nécessaire d'améliorer la méthode ILPM pour montrer son efficacité pour résoudre un tel problème.

Bibliographie

- [1] S. Adly and H. Rammal. A new method for solving second order cone eigenvalue complementarity problems. *Submitted to Journal of Optimization Theory and Applications*. [13](#), [86](#)
- [2] S. Adly and H. Rammal. Stochastic pareto and lorentz eigenvalue complementarity problems. *En préparation*. [14](#), [107](#)
- [3] S. Adly and H. Rammal. A new method for solving pareto eigenvalue complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 55 :703–731, 2013. [11](#), [45](#), [52](#)
- [4] S. Adly and A. Seeger. A nonsmooth algorithm for cone-constrained eigenvalue problems. *Computational Optimization and Applications*, 49 :299–318, 2011. [7](#), [41](#), [45](#), [47](#), [50](#), [51](#)
- [5] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :353–375, 1991. [41](#)
- [6] F. Alizadeh and D. Goldfarb. Second-order cone programming. *Mathematical Programming*, 95(1) :3–51, 2003. [31](#)
- [7] A. Amri and A. Seeger. Spectral analysis of coupled linear complementarity problems. *Linear Algebra and its Applications*, 432 :2507–2523, 2010. [70](#), [71](#)
- [8] J. Barkmeijer and T. L. van Noorden. Computing optimal model perturbations : A constrained optimization problem. *preprint*. [69](#)
- [9] S. I. Birbil, G. Gürkan, and L. O. Simulation-based solution of stochastic mathematical programs with complementarity constraints : Sample-path analysis. Technical report, Econometric Institute Report EI 2004-03, Erasmus University Rotterdam, 2004. [106](#)
- [10] M. Bocea, P. Panagiotopoulos, and V. Radulescu. A perturbation result for a double eigenvalue hemivariational inequality with constraints and applications. *Journal of Global Optimization*, 14 :137–156, 1999. [69](#)
- [11] R. F. Boisvert, R. Pozo, K. Remington, R. F. Barrett, and J. J. Dongarra. Martix market : A web resource for test matrix collections. in *The Quality of Numerical Software : Assessment and Enhancement*, Chapman and Hall, London, pages 125–137, 1997. [65](#)
- [12] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. Sagastizábal. *Numerical Optimization : Theoretical And Practical Aspects*. Springer-Verlag, 2006. [25](#)
- [13] J. F. Bonnans and H. Ramírez. Perturbation analysis of second-order cone programming problems. *Mathematical Programming*, 104 :205–227, 2005. [86](#)
- [14] A. Borobia. On the nonnegative eigenvalue problem. *Linear Algebra Appl.*, 223/224 :131–140, 1995. [118](#)
- [15] C. Chen and O. L. Mangasarian. Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 71 :51–69, 1995. [85](#)
- [16] J. S. Chen. Alternative proofs for some results of vector-valued functions associated with second-order cones. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6 :297–325, 2005. [86](#)
- [17] J. S. Chen, X. Chen, and P. Tseng. Analysis of nonsmooth vector-valued functions associated with second-order cones. *Mathematical Programming*, 101 :95–117, 2004. [86](#), [89](#), [92](#)
- [18] J. S. Chen and P. Tseng. An unconstrained smooth minimization reformulation of the second-order cone complementarity problem. *Mathematical Programming*, 104 :293–327, 2005. [86](#)

- [19] X. Chen and M. Fukushima. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems. *Mathematics of Operations Research*, 30 :1022–1038, 2005. 106
- [20] X. Chen, C. Zhang, and M. Fukushima. Robust solution of monotone stochastic linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 117 :51–80, 2009. 106
- [21] X. D. Chen, D. Sun, and J. Sun. Complementarity functions and numerical experiments on some smoothing newton methods for second-order cone complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 25 :39–56, 2003. 86, 91, 97
- [22] M. Chu and G. H. Golub. *Inverse Eigenvalue Problems : Theory, Algorithms, and Applications*. Oxford University Press, New York, 2005. 117
- [23] M. T. Chu and J. L. Watterson. On a multivariate eigenvalue problem : I. algebraic theory and a power method. *SIAM J.Sci.Comput.*, 14 :1089–1106, 1993. 69
- [24] M. T. Chu and L. H. Zhang. On a multivariate eigenvalue problem : II. global solutions and the Gauss–Seidel method. *preprint*. 69
- [25] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1983. Reprinted by SIAM, Philadelphia, 1990. 26, 27, 53
- [26] R. W. Cottle and G. B. Dantzig. Positive (semi-definite) matrices and mathematical programming. *Report ORC 63-18 (RR)13*, 1963. 85
- [27] R. W. Cottle and G. B. Dantzig. Complementarity pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra and Its Applications*, 1 :103–125, 1968. 85
- [28] R. W. Cottle, J. S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, 1992. 7
- [29] T. De Luca, F. Facchinei, and C. Kanzow. A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 75 :407–439, 1996. 50, 57
- [30] S. P. Dirkse and M. C. Ferris. page personnelle. voir <http://mcs.anl.gov/more/cops/>. 82
- [31] S. P. Dirkse and M. C. Ferris. The PATH solver : A non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems. *Optimization Methods and Software*, 5 :123–156, 1995. 13, 81
- [32] S. P. Dirkse and M. C. Ferris. A pathsearch damped Newton method for computing general equilibria. *Annals of Operations Research*, 68 :211–232, 1996. 81
- [33] E. D. Dolan and J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91 :201–213, 2002. 10, 11, 47, 65, 87, 100
- [34] P. D. Egleston, T. D. Lenker, and S. K. Narayan. The nonnegative inverse eigenvalue problem. *Linear Algebra Appl*, 379 :475–490, 2004. 118
- [35] H. Fang, X. Chen, and M. Fukushima. Stochastic R_0 matrix linear complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, 18 :482–506, 2007. 106
- [36] J. Faraut and A. Korányi. *Analysis on Symmetric Cones*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1994. 30, 31
- [37] M. C. Ferris, R. Fourer, and D. M. Gay. Expressing complementarity problems and communicating them to solvers. Technical report, Mathematical Programming, Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1998. 81
- [38] M. C. Ferris and J. S. Pang. Engineering and economic applications of complementarity problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics : SIAM*, 39 :669–713, 1997. 7, 45, 105

- [39] A. Fischer. A special Newton-type optimization method. *Optimization*, 24 :269–284, 1992. [50](#), [85](#)
- [40] M. Fukushima, Z. Q. Luo, and P. Tseng. Smoothing functions for second-order cone complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, 12 :436–460, 2001. [31](#), [86](#), [88](#), [91](#), [131](#)
- [41] P. Gajardo and A. Seeger. Reconstructing a matrix from a partial sampling of pareto eigenvalues. *Computational Optimization and Applications*, 51 :1119–1135, 2012. [15](#), [78](#), [118](#), [119](#), [121](#), [122](#), [123](#), [128](#)
- [42] P. Gajardo and A. Seeger. Solving inverse cone-constrained eigenvalue problems. *Numerische Mathematik*, 123 :309–331, 2013. [102](#), [118](#), [121](#), [128](#)
- [43] D. M. Gay. Hooking your solver to AMPL. Technical report, Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1997, Revised 1994, 1997. [82](#)
- [44] M. S. Gowda, R. Sznajder, and J. Tao. P-properties for linear transformations on euclidean jordan algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, 393 :203–232, 2004. [91](#)
- [45] G. Gürkan, A. Y. Özge, and M. Robinson. Sample-path solution of stochastic variational inequalities. *Mathematical Programming*, 84 :313–333, 1999. [106](#)
- [46] M. Hanafi and J. M. F. Ten Berge. Global optimality of the successive maxbet algorithm. *Psychometrika*, 68 :97–103, 2003. [69](#)
- [47] P. T. Harker and J. S. Pang. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problem : A survey of theory, algorithms and applications. *Mathematical Programming*, 48 :161–220, 1990. [7](#), [50](#), [85](#)
- [48] S. Hayashi. *Studies On Second-Order Cone Complementarity Problems*. PhD thesis, Kyoto University, Japan, December 2004. [89](#)
- [49] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima. A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, 15 :593–615, 2005. [86](#), [87](#), [88](#), [89](#), [90](#), [91](#), [131](#)
- [50] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. [19](#), [25](#)
- [51] J.-B. Hiriart-Urruty and A. Seeger. A variational approach to copositive matrices. *SIAM Rev.*, 52 :593–629, 2010. [46](#)
- [52] P. Horst. Relations among m sets of measures. *Psychometrika*, 26 :129–149, 1961. [69](#)
- [53] H. Hotelling. The most predictable criterion. *Journal of Educational Psychology*, 26 :129–142, 1935. [69](#)
- [54] H. Hotelling. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 28 :321–377, 1936. [69](#)
- [55] J. J. Júdice, M. Raydan, S. S. Rosa, and S. A. Santos. On the solution of the symmetric eigenvalue complementarity problem by the spectral projected gradient algorithm. *Numerical Algorithms*, 47 :391–407, 2008. [7](#), [36](#), [38](#), [39](#), [45](#), [49](#)
- [56] J. J. Júdice, H. D. Serali, and I. M. Ribeiro. The eigenvalue complementarity problem. *Computational Optimization and Applications*, 37 :139–156, 2007. [7](#), [32](#), [45](#), [49](#)
- [57] J. J. Júdice, H. D. Serali, I. M. Ribeiro, and S. S. Rosa. On the asymmetric eigenvalue complementarity problem. *Optimization Methods and Software*, 24 :549–568, 2009. [7](#), [40](#), [41](#), [45](#), [49](#)
- [58] C. Kanzow, I. Ferenczi, and M. Fukushima. On the local convergence of semismooth Newton methods for linear and nonlinear second-order cone programs without strict complementarity. *SIAM Journal on Optimization*, 20 :297–320, 2009. [89](#)

- [59] C. Kanzow and H. Kleinmichel. A new class of semismooth Newton type methods for non-linear complementarity problems. *Journal of Computational Optimization and Applications*, 11 :227–251, 1998. [55](#), [56](#), [57](#)
- [60] C. Kanzow, N. Yamashita, and M. Fukushima. New NCP-functions and their properties. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 94 :115–135, 1997. [50](#)
- [61] H. Kato and M. Fukushima. An SQP-type algorithm for nonlinear second-order cone programs. *Optimization Letters*, 1 :129–144, 2007. [86](#)
- [62] R. B. Kellogg. Matrices similar to a positive or essentially positive matrix. *Linear Algebra Appl.*, 4 :191–204, 1971. [118](#)
- [63] J. R. Kettenring. Canonical analysis of several sets of variables. *Biometrika*, 58 :433–451, 1971. [69](#)
- [64] M. Koecher. *The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications*. edited and annotated by A. Brieg and S. Walcher, Berlin, 1999. [30](#)
- [65] A. N. Kolmogorov. Markov chains with countably many possible states. *Bull. Univ. Moscow (A)*, 3 :1–16, 1937 (in Russian). [118](#)
- [66] L. Kong, L. Tunel, and N. Xiu. Fischer-Burmeister complementarity function on Euclidean Jordan algebras. *Pacific Journal of Optimization*, 6 :423–440, 2007. [91](#)
- [67] M. Kůčera. Bifurcation points of variational inequalities. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 32 :208–227, 1982. [32](#)
- [68] M. Kůčera. A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities : operators with multiple eigenvalues. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 32 :197–207, 1982. [32](#)
- [69] P. Lavelledieu and A. Seeger. Existence de valeurs propres pour les systèmes multivoques : résultats anciens et nouveaux. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 25 :47–70, 2001. [32](#)
- [70] G. H. Lin, X. Chen, and M. Fukushima. New restricted NCP functions and their applications to stochastic NCP and stochastic MPEC. *Optimization*, 56 :641–653, 2007. [107](#)
- [71] G. H. Lin, X. Chen, and M. Fukushima. Solving stochastic mathematical programs with equilibrium constraints via approximation and smoothing implicit programming with penalization. *Mathematical Programming*, 116 :343–368, 2008. [106](#)
- [72] G. H. Lin and M. Fukushima. Regularization method for stochastic mathematical programs with complementarity constraints. *European Series of Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 11 :252–265, 2005. [106](#)
- [73] G. H. Lin and M. Fukushima. New reformulations for stochastic nonlinear complementarity problems. *Optimization Methods and Software*, 21 :551–564, 2006. [106](#), [107](#)
- [74] G. H. Lin and M. Fukushima. Stochastic equilibrium problems and stochastic mathematical programs with equilibrium constraints : A survey. Technical report, Technical Report 2009-008, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2009. [107](#), [108](#)
- [75] Z. Y. Liu and d. X. S. F. Qian, J a. On the double eigenvalue problem. *preprint*, 2009. [69](#)
- [76] M. S. Lobo, L. Vandenbergh, S. Boyd, and H. Lebert. Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and Its Applications*, 284 :193–228, 1998. [29](#), [86](#)
- [77] J. A. C. Martins, S. Barbarin, M. Raous, and A. Pinto da Costa. Dynamic stability of finite dimensional linearly elastic systems with unilateral contact and coulomb friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177 :289–328, 1999. [8](#), [46](#)

- [78] J. A. C. Martins and A. Pinto da Costa. Stability of finite-dimensional nonlinear elastic systems with unilateral contact and friction. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :2519–2564, 2000. [8](#), [46](#)
- [79] J. A. C. Martins and A. Pinto da Costa. Computation of bifurcations and instabilities in some frictional contact problems. *Second European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2001)*. Cracow, Poland, June 26 to 29. Complete article in CD-ROM (15 pages), 2001. [8](#), [46](#)
- [80] J. A. C. Martins and A. Pinto da Costa. Bifurcations and instabilities in frictional contact problems : Theoretical relations, computational methods and numerical results. *Fourth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2004)*. Eds. P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Periaux and D. Knörzer. Jyväskylä, Finland, July, 24 to 28. Complete article in CD-ROM, Volume II, ISBN 951-39-1869-6 (11 pages), 2004. [8](#), [46](#)
- [81] J. A. C. Martins, A. Pinto da Costa, I. N. Figueiredo, and J. J. Júdice. The directional instability problem in systems with frictional contacts. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :357–384, 2004. [8](#), [9](#), [10](#), [46](#)
- [82] R. Mifflin. Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15 :957–972, 1977. [27](#)
- [83] J. Moreau. Fonctionnelles convexes. *Séminaire Jean Leray*, pages 1–108, 1966–1967. [19](#)
- [84] K. G. Murty. *Linear complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Berlin : Heldermann Verlag, 1988. [7](#), [85](#)
- [85] A. Nagurney. Variational inequalities. Technical report, Isenberg School of Management University of Massachusetts Amherst, MA 01003, 2002. [23](#)
- [86] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2006. [112](#)
- [87] S. Pan and J. S. Chen. A damped Gauss-Newton method for the second-order cone complementarity problem. *Applied Mathematics and Optimization*, 59 :293–318, 2009. [92](#)
- [88] J. S. Pang. Newton’s method for B-differentiable equations. *Mathematics of Operations Research*, 15 :311–465, 1990. [50](#), [85](#)
- [89] J. S. Pang. *Complementarity Problems*. R. Horst and P. Pardalos, editors, Handbook in Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994. [7](#)
- [90] J. S. Pang and F. Facchinei. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Operations Research, Springer-Verlag, Vol. 2, New york, 2003. [7](#), [23](#), [42](#), [51](#), [85](#)
- [91] J. S. Pang and F. Facchinei. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Operations Research, Springer-Verlag, Vol. 1, New york, 2003. [23](#), [96](#)
- [92] J. S. Pang and L. Qi. Nonsmooth equations : motivation and algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 3 :443–465, 1993. [26](#)
- [93] J. S. Pang, D. Sun, and J. Sun. Semismooth homeomorphisms and strong stability of semidefinite and Lorentz cone complementarity problems. *Mathematics of Operations Research*, 28 :39–63, 2003. [86](#), [89](#)
- [94] A. Pinto da Costa, I. N. Figueiredo, and J. A. C. Martins. A complementarity eigen problem in the stability analysis of finite dimensional elastic systems with frictional contact. in : M. Ferris, O.L. Mangasarian, J.-S. Pang (Eds.), *Complementarity : Applications, Algorithms, and Extensions*, pages 67–83, 2001. [32](#)

- [95] A. Pinto da Costa and A. Seeger. Cone-constrained eigenvalue problems : Theory and algorithms. *Comput. Optim. Appl.*, 45 :25–57, 2008. 7, 45, 46, 49
- [96] A. Pinto da Costa and A. Seeger. Numerical resolution of cone-constrained eigenvalues problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 28 :37–61, 2009. 7, 45
- [97] A. Pinto da Costa and A. Seeger. Cone-constrained eigenvalue problems : theory and algorithms. *Comput. Optim. and Appl.*, 45 :25–57, 2010. 8, 9
- [98] L. Qi. Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations. *Mathematics of Operations Research*, 18 :227–244, 1993. 27, 85
- [99] L. Qi. Regular pseudo-smooth NCP and BVIP functions and globally and quadratically convergent generalized Newton methods for complementarity and variational inequality problems. Technical report, Technical Report AMR 97/14, The university of New South Wales, Sydney, Australia, 1997. 50
- [100] L. Qi and D. Sun. A survey of some nonsmooth equations and smoothing Newton methods. in *Progress in Optimization : Contributions from Australasia*, A. Eberhard, B. Glover, R. Hill, and D. Ralph, eds., Kluwer Academic Publisher, Boston, pages 121–146, 1999. 85
- [101] L. Qi and D. Sun. Nonsmooth and smoothing methods for nonlinear complementary problems and variational inequalities. in *Encyclopedia of Optimization*, C. A. Floudas and P. M. Pardalos, eds, Kluwer Academic Publisher, Nowell, MA, 4 :100–104, 2001. 85
- [102] L. Qi, D. Sun, and G. Zhou. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequalities. *Mathematical Programming*, 87 :1–35, 2000. 86
- [103] L. Qi and J. Sun. A nonsmooth version of Newton’s method. *Mathematical Programming*, 58 :353–367, 1993. 26, 27, 41, 43, 85
- [104] M. Quieroz, J. J. Júdice, and C. Humes. The symmetric eigenvalue complementarity problem. *Mathematics of Computation*, 73 :1849–1863, 2003. 7, 32, 35, 37, 45
- [105] P. Quittner. Spectral analysis of variational inequalities. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 27 :605–629, 1986. 32
- [106] D. Ralph. Global convergence of damped Newton’s method for nonsmooth equations. *Mathematics of Operations Research*, 19 :352–389, 1994. 81
- [107] R. C. Riddell. Eigenvalue problems for nonlinear elliptic variational inequalities on a cone. *Journal of Functional Analysis*, 26 :333–355, 1977. 32
- [108] S. M. Robinson. Normal maps induced by linear transformations. 81
- [109] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970. 19, 25
- [110] F. L. Salzmann. A note on eigenvalues of nonnegative matrices. *Linear Algebra Appl.*, 5 :329–337, 1972. 118
- [111] A. Seeger. Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions. *Mathematical Programming*, 292 :1–14, 1999. 7, 32, 38, 45, 46, 48, 49
- [112] A. Seeger and M. Torki. On eigenvalues induced by a cone constraint. *Elsevier, Linear Algebra and its Applications*, 372 :181–206, 2003. 7, 13, 32, 45, 87, 93, 94
- [113] A. Seeger and J. Vicente-Pérez. On cardinality of pareto spectra. *Elec. J. Lin. Alg.*, 22 :758–766, 2011. 49
- [114] K. R. Suleimanova. Stochastic matrices with real eigenvalues. *Soviet Math. Dokl.*, 66 :343–345, 1949. 118
- [115] D. Sun and L. Qi. On ncp-functions. *Computational Optimization and Applications*, 13 :201–220, 1999. 50, 85

-
- [116] D. Sun and J. Sun. Strong semismoothness of the Fischer-Burmeister SDC and SOC complementarity functions. *Mathematical Programming*, 103 :575–581, 2005. [86](#), [91](#)
- [117] Y. Tanaka. Some generalized methods of optimal scaling and their asymptotic theories : the case of multiple responses-multiple factors. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 30 :329–348, 1978. [69](#)
- [118] F. Tissuer and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics : SIAM Review*, 43 :235–286, 2001. [46](#)
- [119] P. Tseng. Smoothing methods for second-order cone programs/complementarity problems. Technical report, Talk presented at the SIAM Conference on Optimization, Stockholm, 2005. [86](#)
- [120] M. Ulbrich. *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2011. [23](#), [28](#)
- [121] A. Wächter and L. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106 :25–57, 2006. [112](#)
- [122] H. Yamashita and H. Yabe. A primal-dual interior point method for nonlinear optimization over second order cones. *Optimization Methods and Software*, 24 :407–426, 2009. [86](#)
- [123] C. Zhang and X. Chen. Smoothing projected gradient method and its application to stochastic linear complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, 20 :627–649, 2009. [106](#)
- [124] A. L. Zhou and L. Caccetta. Feasible semismooth newton method for a class of stochastic linear complementarity problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 139 :379– 392, 2008. [106](#)

Résumé : Cette thèse porte sur le développement des méthodes mathématiques applicables à l'étude théorique et numérique d'une large classe de problèmes unilatéraux. Nous considérons plus particulièrement les problèmes de complémentarité aux valeurs propres PCVP engendrés par le cône de Pareto et le cône de Lorentz. De tels problèmes apparaissent dans de nombreuses disciplines scientifiques comme la physique, la mécanique et l'ingénierie.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la résolution de PCVP en utilisant une méthode adéquate, "Lattice Projection Method LPM", menant à un résultat efficace et performant. L'originalité de cette formulation, en comparaison avec la littérature existante, réside dans le fait qu'elle ne repose pas sur l'approche de complémentarité. Notre contribution se reflète aussi par l'étude des conditions de la non-singularité des matrices Jacobiennes utilisées dans la méthode de Newton semi-lisse SNM pour détecter les solutions de tels problèmes. Ensuite, en nous basant sur les profils de performance, nous comparons LPM avec d'autres solveurs très connus dans la littérature. Les résultats obtenus s'avèrent en accord avec les observations expérimentales et montrent l'efficacité de LPM.

Dans un second temps, nous traitons le cas stochastique de PCVP au sens des cônes de Pareto et de Lorentz. Nous reformulons un tel problème pour trouver les zéros d'une fonction semi-lisse. Ensuite, nous étudions les conditions de la non-singularité de la Jacobienne de cette fonction pour résoudre de tels problèmes. Puis, nous transformons le problème sous forme d'un problème de minimisation.

Dans un dernier temps, nous abordons le problème inverse de complémentarité aux valeurs propres de Pareto PICVP. Cette tâche s'articule plus précisément sur la résolution de PICVP où nous présentons une nouvelle méthode, "Inverse Lattice Projection Method ILPM", pour résoudre ces problèmes.

Mots-clés : Problème de complémentarité aux valeurs propres, cône de Pareto, cône de Lorentz, lattice projection method, problème stochastique, problème inverse.

Abstract : This manuscript deals with the development of mathematical methods applicable to the theoretical and numerical study of a wide class of unilateral problems. To put it more precisely, we consider the Pareto and Lorentz cones eigenvalue complementarity problems PCVP. Such problems appear in many scientific disciplines such as physics, mechanics and engineering.

Firstly, we are interested to the resolution of PCVP using an adequate method, "Lattice Projection Method LPM", leading to an efficient and effective result. The originality of this formulation in comparison with the existing literature is that it is not based on the complementarity approach. Then, our contribution is reflected in the study of the non-singularity conditions of the Jacobian matrices used in the semismooth Newton method SNM to detect solutions of such problems. Then, by using the performance profiles, we compare LPM with other solvers known in the literature. The results prove in accordance with the experimental observations and show the efficiency of LPM.

Secondly, we treat the stochastic case of PCVP in the sense of Pareto and Lorentz cones. We reformulate such problem to find the zeros of a semismooth function. Furthermore, we study the non-singularity conditions of the Jacobian matrix of this function to solve such problems. Moreover, we transform the problem as a constrained minimization reformulation.

Finally, we discuss the inverse Pareto eigenvalue complementarity problem PICVP. This task focuses more precisely on the resolution of PICVP where we present a new method, "Inverse Lattice Projection Method ILPM", to solve such problems.

Keywords : Eigenvalue complementarity problem, Pareto cone, Lorentz cone, lattice projection method, stochastic problem, inverse problem.