École Doctorale Science – Technologie – Santé

Faculté des Sciences et Techniques

Laboratoire XLIM – UMR CNRS 7252

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques

Régularité métrique, multi-applications implicites et applications

présentée et soutenue publiquement le 26 octobre 2012 par

NGUYEN Huu Tron

devant le jury composé de

Rapporteurs :

Abderrahim JOURANI	Professeur, Université de Bourgogne
Alexander KRUGER	Professeur, Université de Ballarat, Australie

Examinateurs :

Samir ADLY	Professeur, Université de Limoges
René HENRION	Professeur, Weierstrass Institute, Berlin, RFA
HUYNH Van Ngai	HDR, Université de Quy Nhon, Vietnam, co-directeur de thèse
Marco LÓPEZ CERDÁ	Professeur, Université de Alicante, Espagne
Michel THÉRA	Professeur, Université de Limoges, Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude au Professeur Michel Théra, Directeur de thèse et au Professeur Huynh Van Ngai, co-directeur de thèse qui ont encadré mon travail durant les trois années passées dans le laboratoire XLIM. Grâce à leur aide inconditionnelle et l'orientation scientifique qu'ils ont apportées à mes recherches, ils m'ont fait découvrir, non seulement des théories mathématiques passionnantes comme l'analyse variationnelle et l'optimisation, mais aussi tellement de choses utiles qui me servent dans la vie. Ils sont et resteront mes grands maîtres.

Je souhaite associer à ces remerciements Mesdames Odile Duval, Annie Nicolas et Yolande Vieceli pour leur disponibilité, leur gentillesse et pour toute l'aide qu'elles m'ont apportée durant ces années.

La Région Limousin a financé ces trois années d'études à Limoges. Qu'elle en soit remerciée.

Le directeur du Département Mathématiques-Informatique d'XLIM Samir Adly, ainsi que son prédécesseur Moulay Barkatou ont toujours été à mon écoute, qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance.

J'exprime ma gratitude aux professeurs Abderrahim Jourani et Alexander Kruger qui ont accepté de servir de rapporteur pour mon travail.

Une thèse nécessite des examinateurs. Les professeurs Samir Adly, René Henrion et Marco López Cerdá ont accepté de participer au jury et de lire mes travaux. Qu'ils en soit remerciés.

Ce travail a bénéficié de collaborations fructueuses avec mes collègues Marius Durea et Radu Strugariu de l'université "Al. I. Cuza". Ils m'ont accueilli chaleureusement durant trois mois à l'université de Iasi, et j'ai profité de leurs conseils et aussi de leur compétence.

L'action ECOS-SUD conduite par les professeurs Abderrahim Hantoute et Michel Théra m'a fourni l'occasion de découvrir le Centro Modelmiento Matematico de l'université du Chili à Santiago. Abderrahim Hantoute a supervisé avec gentillesse et compétence mon stage d'un mois. Qu'il en soit remercié.

Je voudrais exprimer mes remerciements à mes mmaîtres et à tous mes collègues du Département de Mathématiques de l'Université de Quy Nhon pour leurs encouragements.

Finalement, je souhaite exprimer mon respect et ma gratitude, à mes parents, à mes beaux-parents, à ma famille, en particulier à ma femme Huong My et à mon fils Hoang Dang qui m'ont donné une grande motivation pour étudier et pour mener cette thèse jusqu'à son dénouement sans avoir à affronter les difficultés de la vie.

Cuoi cung toi muon bieu lo long biet on va su kinh trong cua toi den ba ma toi, bo me vo, gia dinh toi, dac biet la vo toi Huong My va con trai toi Hoang Dang. Ho luon la nguon dong luc to lon de toi nghien cuu va lam viec de hoan thanh luan an nay cung nhu vuot qua nhung kho khan trong cuoc song.

à mes parents, ma femme Huong My et mon fils Hoang Dang

Table des matières

Synthèse des travaux de recherche

1 Introduction

Dans ce qui suit, sauf précision supplémentaire, X et Y sont des espaces métriques. Étant donnée une application $f : X \to Y$, on est souvent amené à résoudre l'équation :

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire, à trouver un élément de l'ensemble

$$S := \{x \in X : f(x) = 0\}. \tag{2}$$

On peut aussi considérer la résolution d'une équation dépendant d'un paramètre, c'est-à-dire, une équation de la forme

$$f(x, p) = 0, \tag{3}$$

où $f : X \times P \to Y$ est une fonction de $X \times P$ dans Y ; X, Y sont des espaces métriques, P est un espace topologique (l'espace des paramètres). Il s'agit donc de trouver un élément x dépendant de p dans l'ensemble

$$S(p) := \{x \in X : f(x, p) = 0\}. \tag{4}$$

Nous noterons $x(p)$ cet élément qui vérifie $f(x(p), p) = 0$.

Si $(\bar{x}, \bar{p})$ vérifie l'équation (3) ou de manière équivalente, si $\bar{x} \in S(\bar{p})$, peut-on obtenir une fonction $p \mapsto x(p)$ qui satisfasse l'équation (3) pour tout p dans un voisinage de $\bar{p}$?

Cette fonction, lorsqu'elle existe est appelée *fonction implicite* et elle est déterminée par l'équation $f(x(p), p) = 0$. La réponse à cette question est le contenu du *théorème classique des fonctions implicites* qui est l'un des plus importants, et l'un des plus anciens paradigmes des mathématiques.

Ce théorème remonte historiquement aux travaux d'Isaac Newton (1642-1727), et de Gottfried Leibniz (1646-1716), puis de Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) a été le premier à appliquer le théorème des fonctions implicites avec toute la rigueur mathématique nécessaire. Ulisse Dini (1845-1918) l'a ensuite généralisé pour les fonctions de plusieurs variables réelles.

Le théorème des fonctions implicites classique est enseigné sous la forme suivante :

Theorem 1 *Soient E et P des espaces de Banach. U un ouvert de $E \times P$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans P. Si, pour un point $(\bar{x}, \bar{p})$ de U on a $f(\bar{x}, \bar{p}) = 0$ et si la différentielle partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{p})$ est un élément inversible de l'ensemble $\mathcal{L}(F)$ des applications linéaires continues sur F, il existe un voisinage V de $\bar{x}$, un voisinage W de $\bar{p}$, et une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ de W dans V tels que $V \times W \subset U$, que $\bar{x} = \varphi(\bar{p})$ et que, pour $(x, p) \in V \times W$,*

$$f(x, p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \varphi(p).$$

De plus la différentielle de φ est donnée par

$$\varphi'(\bar{p}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{p})\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial p}(\bar{x},\bar{p}).$$

En dimension finie, dans le cas d'un système d'équations données implicitement

$$f_i(x,p) = 0,\ i = 1, ...m, \tag{5}$$

le théorème des fonctions implicites s'énonce ainsi :

Theorem 2 *Si $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ sont m fonctions de n variables réelles, continûment différentiables dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{p}) := (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n, \bar{p}_{n+1}, ..., \bar{p}_{n+m})$ avec $f(\bar{x},\bar{p}) = 0$, et si en plus, la matrice Jacobienne de f*

$$Jf(\bar{x},\bar{p}) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{p})\right)_{i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n}, \tag{6}$$

où $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{p})$ est la dérivée partielle de f_i correspondant à x_j en $(\bar{x},\bar{p})$, est non singulière, c'est-à-dire, le déterminant de $Jf(\bar{x},\bar{p})$ en $(\bar{x},\bar{p})$ ne s'annule pas, alors il existe des voisinages V, W de $\bar{x}, \bar{p}$ respectivement, et une fonction $\varphi : W \to V$ telle que $f(\varphi(p), p) = 0$ pour tout $p \in W$. En plus, cette fonction est différentiable en $\bar{p}$.

Ce théorème a de nombreuses applications dans des domaines variés des mathématiques : en algèbre, en géométrie différentielle, en topologie différentielle, en analyse fonctionelle, en calcul différentiel, etc. Notons aussi qu'il existe des formes plus évoluées du théorème des fonctions implicites, comme par exemple le théorème de Nash et Moser et que le lecteur intéressé est renvoyé à l'ouvrage récent de Krantz et Parks [62].

Le traitement des problèmes d'optimisation peut nous conduire à considérer un système d'inégalités dépendant d'un paramètre p,

$$f_i(x,p) \leq 0,\ i = 1, ..., m. \tag{7}$$

Le théorème classique des fonctions implicites, n'est plus adapté pour résoudre un tel système. En outre, pour un paramètre p fixé, un tel système d'inégalités, n'a pas forcément de solution unique, mais généralement, un ensemble de solutions

$$S(p) := \{x \in X : f_i(x,p) \leq 0,\ i = 1, , m\}. \tag{8}$$

représenté par une application multivoque $S : P \rightrightarrows X$ de P dans X. Il est donc nécessaire de considérer l'équation (3) sous une forme multivoque, c'est-à-dire, que nous considérons *l'équation généralisée* sous la forme

$$0 \in F(x,p), \tag{9}$$

où $F : X \times P \rightrightarrows Y$ est une application multivoque de $X \times P$ dans Y. Il est clair que si nous posons pour chaque $(x,p) \in X \times P$, $F(x,p) := (f_i(x,p)_{i=1,...,m} + (\mathbb{R}_+)^m$, où $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs, nous pouvons écrire le système d'inégalités (7) sous la forme (9). Un autre cas intéressant est de considérer l'équation généralisée

$$0 \in f(x,p) + F(x),$$

où $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque. Un sous-cas important est fourni par celui d'une *inéquation variationelle paramétrée*, c'est-à-dire, lorsque l'application multivoque F représente le cône normal à un convexe fermé C de $\mathbb{R}^n$:

$$F(x) := N_C(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle p, x \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C\}.$$

L'équation généralisée

$$0 \in f(x,p) + N_C(x), \tag{10}$$

équivaut alors au problème de trouver x tel que

$$\langle f(x,p), v - x \rangle \geq 0, \text{ pour tout } v \in C.$$

En particulier, lorsque $f(x,p) = p - \nabla g(x)$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, l'équation (10) correspond à la condition d'optimalité premier ordre du problème d'optimisation perturbé

$$\min_{x \in C} (g(x) - \langle p, x \rangle).$$

L'étude du comportement de ces équations paramétriques généralisées est liée au théorème des multi-applications implicites et joue un rôle primordial dans l'analyse variationnelle et l'optimisation. C'est le cas, pour les problèmes concernant l'analyse de sensibilité par rapport aux paramètres. Le livre récent de Dontchev & Rockafellar [31] fournit de nombreuses formulations de théorèmes des multi-applications implicites ainsi que des applications variées.

L'étude des théorèmes des multiapplications implicites se pose dans les problèmes liés au concept de régularité métrique, dans les inégalités variationnelles et dans de nombreux autres domaines. En effet, l'outil mathématique central dans l'analyse de sensibilité des problèmes variationnels est le concept de *la régularité métrique (metric regularity)* pour des multiapplications. Rappelons qu'une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ entre deux espaces X et Y est une application qui à chaque $x \in X$ associe une partie $F(x)$ de Y. Nous noterons F^{-1} l'inverse de F (qui contrairement au cas univoque existe toujours) la multiapplication définie par : $x \in F^{-1}(y) \iff y \in F(x)$, par gph F, le graphe de F, c'est-à-dire l'ensemble des $(x,y) \in X \times Y$ tels que $y \in F(x)$, et par Dom F le domaine de F, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $F(x)$ est non vide.

Considérons l'équation généralisée suivante

$$y \in F(x), \tag{11}$$

où, $F : X \rightrightarrows Y$ est une multiapplication de X dans Y et $y \in Y$ donné. Une question importante est la suivante :

“ *L'ensemble $F^{-1}(y)$ des solutions de (11)) est-il stable par rapport à une “petite" perturbation du paramètre y ?* "

Un outil essentiel pour répondre à cette question est la notion de *régularité métrique*. Une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ est dite *métriquement régulière* dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$ s'il existe un réel $\tau > 0$, et deux voisinages U, V de $\bar{x}, \bar{y}$ respectivement, tels que

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \tau d(y, F(x)), \text{ pour tout } (x,y) \in U \times V. \tag{12}$$

L'infimum des τ satisfaisant la relation (12) est notée par reg $F(\bar{x}, \bar{y})$ ([29]) ; il est appelé *module de régularité métrique* de F et il mesure la sensibilité ou le conditionnement de l'équation généralisée (11). Notons qu'en général, la distance $d(y, F(x))$ est plus facile à calculer que la distance $d(x, F^{-1}(y))$ car on ne connait pas forcément l'ensemble $F^{-1}(y)$.

Dans le cas, par exemple, d'une multiapplication F avec un graphe convexe et fermé, le théorème de Robinson-Ursescu ([89] et [95]), assure que F est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$, si et seulement si $\bar{y}$ est un point intérieur de l'image de F, c'est-à-dire, $\bar{y} \in \text{int Dom } F^{-1}$. Ce résultat a été généralisé par Rolewicz [94] pour les multiapplications paraconvexes et ensuite par Jourani [52] pour les multiapplications γ-paraconvexes.

Le concept de régularité métrique remonte à la surjectivité d'une application linéaire continue et par conséquent au célèbre théorème de l'application ouverte de Banach et de son extension aux opérateurs non-linéaires connue sous le nom du théorème de Lyusternik & Graves [39, 66], voir aussi [26] et [28]). Citons quelques références (non exhaustives) donnant des résultats théoriques sur la régularité métrique ainsi que diverses applications : [7, 8, 14, 16, 18, 19, 20, 23, 24, 27, 29, 45, 46, 48, 54, 60, 61, 66, 71, 72, 70, 74, 77, 78, 81, 83, 87, 100].

Donnons une illustration simple de la régularité métrique. Considérons l'équation $F(x) = y$, où $F : R^n \to R^m$ est une application univoque. En cherchant à mesurer la distance $d(x, F^{-1}(y))$ en fonction de la distance $d(y, F(x))$, on cherche une borne d'erreur, c'est à dire une relation du type

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq kd(y, F(x))$$

vérifiée globalement ou localement pour tout (x, y) dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$), avec $\bar{y} = F(\bar{x})$. Par exemple si $F : R \to R$ est une application à valeurs réelles dérivable et vérifiant $F^{'}(\bar{x}) \neq 0$, en observant que $|x - F^{-1}(y)| \approx \frac{|F(x)-y|}{|F^{'}(\bar{x})|}$, on constate que F est métriquement régulière et que son module de régularité est donné par reg $F = |F^{'}(\bar{x})|^{-1}$. Lorsque $F^{'}(\bar{x}) = 0$, alors F est irrégulière et par conséquent des petites perturbations de y peuvent entrainer des grands changements dans $F^{-1}(y)$ (et même l'insolvabilité de l'équation $y = F(x)$). Lorsque A est un opérateur linéaire on peut observer que A métriquement régulière (globalement) si et seulement si A est surjective. Plus généralement, le théorème de Lusternik (1936) - Graves (1950) dit qu'une application différentiable (pas nécessairement linéaire) $F : R^n \to R^m$ est métriquement régulière en x exactement lorsque son gradient $\nabla F(x)$ est surjectif et de plus son module de régularité reg $F(x)$ gouverne la rapidité du schéma itératif naturel qui résout $F(x) = y$.

L'exemple suivant illustre l'importance de la régularité métrique en optimisation et en analyse variationelle. Considérons le système d'égalités et d'inégalités suivant :

$$x \in \mathbb{R}^n,\ f_i(x) = 0,\ i = 1, ..., r,\ et\ f_i(x) \leq 0,\ i = r+1, ..., m,$$

où, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., m$. En posant $f = (f_1, ..., f_m)$ et $K = \{0\}^r \times \mathbb{R}_+^{m-r}$, on observe aisément que le système équivaut à l'équation généralisée :

$$0 \in F(x),$$

avec

$$F(x) := f(x) + K.$$

Supposons que $0 \in F(\bar{x})$ et $f \in C^1$. Nous désignons par

$$J := \{j \in \{r+1, ..., m\} : f_j(\bar{x}) = 0\}.$$

Un résultat classique (voir par exemple ([30]) dit que l'application multivoque $F(\cdot) = f(\cdot) + K$ est métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, 0)$, si et seulement si, la condition de Mangasarian & Fromovitz ($MFCQ$) ([67]) est vérifiée : les vecteurs gradients de f_i en $\bar{x}, \nabla f_i(\bar{x}), i = 1, ..., r$ sont linéairement indépendants et il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla f_j(\bar{x})v = 0,\ \text{pour}\ j = 1, ..., r,$$

$$\nabla f_j(\bar{x})v < 0, \text{ pour } j \in J.$$

La propriété de régularité métrique fournit donc une *condition de qualification* pour l'existence de multiplicateurs en optimisation différentiable.

Comme le montre l'exemple ci-après, pour des problèmes d'optimisation avec une fonction objectif et des contraintes localement lipschitiennes et non-différentiables, un concept affaibli de la régularité métrique fournit également une condition pour l'existence de multiplicateurs de Lagrange.

Considérons le problème d'optimisation $(\mathcal{P})$:

$$\inf\{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m;\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \cdots, m$ sont des fonctions localement lipschitziennes.

On pose

$$g(x) = (g_1(x), \cdots, g_m(x)), \quad h(x) = \max_{i=1,\cdots,m} g_i(x) \quad \text{et} \quad h^+(x) = \max_{i=1,\cdots,m} (g_i^+(x)),$$

avec $g_i^+(x) = \max(g_i(x), 0)$. On définit les multiapplications $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ en posant

$$H(x) := h^+(x) + [0, +\infty[\quad \text{et} \quad G(x) = g(x) + (\mathbb{R}^m)_+$$

On considère un minimum local $\bar{x}$ du problème $(\mathcal{P})$.

On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

H est *métriquement sous-régulière* en $\bar{x}$ pour 0, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$d(x, H^{-1}(0)) \leq kd(0, H(x)) \quad \text{pour tout } \ x \text{ dans un voisinage } U \ \text{ de } \ \bar{x}.$$

On remarque que :

- $d(0, H(x)) = h^+(x)$;
- $H^{-1}(0) = G^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) \leq 0\}$;
- $d(x, H^{-1}(0)) = \inf\{\|x - x'\| \ : \ h(x') \leq 0\}$.

Dans ces conditions, on a :

$$d(x, H^{-1}(0)) = \inf\{\|x - x'\| \ : \ h(x') \leq 0\} \leq kd(0, H(x)) = kh^+(x). \tag{13}$$

pour x dans un voisinage U de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Comme f est localement Lipschitzienne, en notant k_f la constante de Lipschitz (qui dépend de $\bar{x}$), et quitte à réduire le voisinage U de $\bar{x}$, on a toujours

$$f(x') \leq f(x) + k_f\|x - x'\|.$$

En particulier, pour x' vérifiant $h(x') \leq 0$, on en déduit en passant à la borne inférieure à gauche que $f(\bar{x}) \leq f(x) + k_f\|x - x'\|$. En posant $L := kk_f$ et en passant à la borne inférieure dans la dernière expression, on obtient l'inégalité

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + k_f \inf\{\|x - x'\| : h(x') \leq 0\} \leq f(x) + kk_f h^+(x) = f(x) + Lh^+(x).$$

Il en résulte que si $\bar{x}$ minimise localement f sur $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h(x) \leq 0\}$, $\bar{x}$ minimise aussi localement la fonction $x \mapsto f(x) + Lh^+(x)$. Par suite, si ∂f désigne le sous-différentiel limite de f, d'après la règle de Fermat on a :

$$0 \in \partial(f(\cdot) + Lh^+(\cdot))(\bar{x}).$$

En appliquant la règle du sous-différentiel de la somme, il vient :

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + L\partial h^+(\bar{x}).$$

Par conséquent en posant

$$S(\bar{x}) := \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}^m)_+ \ : \ \text{tels que} \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ et } g_i^+(\bar{x}) = 0 \text{ si } \lambda_i \neq 0\right\}$$

et en appliquant la formule sur le sous-différentiel d'une fonction maximum (voir par exemple [96]) on obtient l'existence de scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda) \in S(\bar{x})$ tels que

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m L\lambda_i \partial g_i^+(\bar{x}).$$

Notons que l'argument de pénalisation a été utilisé par Jourani & Thibault ([51, 56]).

Un autre concept de régularité important est lié au comportement de type Lipschitz de l'ensemble solution. Il s'agit de la notion de *pseudo-Lipschiztianité (Pseudo-Lipschitz property)*, encore connue dans la littérature sous le nom de *propriété d'Aubin (Aubin property)* (voir [2]) : soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$. F est dite *pseudo-Lipschitz* dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$, s'il existe une constante $\kappa \geq 0$ et des voisinages $\mathcal{U}$ du point $\bar{x}$ et $\mathcal{V}$ du point $\bar{y}$

$$d(x, S(y_1)) \leq \kappa d(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{V}, \forall x \in S(y_1) \cap \mathcal{U}. \tag{14}$$

Le concept de régularité est celui *d'ouverture à un taux linéaire (openness at a linear rate)* est très souvent utilisé en analyse variationnelle et en optimisation :

On dit que $S : X \rightrightarrows Y$ est *ouverte à un taux linéaire* $\tau > 0$ dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } S$ s'il existe des voisinages $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de $\bar{x}, \bar{y}$, respectivement, et un nombre positif $\varepsilon > 0$ tels que pour tous $(x, y) \in \text{gph } F \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ et $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(y, \rho\tau) \subset F(B(x, \rho)).$$

Nous nous référons à Aubin [2], Dmitruk, Milyutin & Osmolovsky [26], Ioffe [46], Kruger [63], Mordukhovich [71], [83], Rockafellar & Wets [91] pour les différents développements de ces notions.
La relation suivante est établie :

$$\text{Régularité métrique} \iff \text{Ouverture à taux linéaire} \iff \text{Propriété d'Aubin de l'inverse.} \tag{15}$$

Ainsi la régularité métrique ou ses équivalents sont désormais considérés comme les concepts centraux en analyse variationnelle (voir Mordukhovich [71] ou Ioffe [46]).

Un des objectifs que nous nous sommes assignés dans ce mémoire est de donner de façon similaire au théorème classique des fonctions implicites :

(i) une condition suffisante pour l'existence de la solution d'une équation généralisée ;
(ii) une formule pour la dérivée (la codérivée) de la multiapplication implicite (le cas échéant) ;
(iii) une estimation métrique de cette dérivée.

Les théorèmes de multiapplications implicites ont été étudiés par de nombreux auteurs, sous différents noms, sous différentes conditions, et par différentes méthodes. Le tout premier travail dans ce domaine est probablement dû à Aubin et Wets [5] qui ont formulé la régularité métrique d'une multiapplication basée sur le cône contingent à la représentation graphique de la multiapplication. Cette méthode a également été développée par Azé [8] et Penot [83], et plus récemment, par Dontchev, Quincampoix & Zlateva [30]. Dans les travaux de Penot [83] et [84], le rôle des cônes tangents était important. Une autre approche pour obtenir des théorèmes de multiapplications implicites, basée sur les cônes normaux aux graphes des multiapplications, peut être trouvée dans Azé, Corvellec & Lucchetti [9], Ledyaev & Zhu [64], Ngai & Théra [78], Yen & Yao [98], ainsi que dans le livre de Dontchev & Rockafellar [31]. Les outils principaux utilisés par ces auteurs sont, l'inégalité de la valeur moyenne multidirectionnelle, les formules de règle de la somme, le principe extrémal et les règles de somme non locales. Les principes variationnels de Borwein & Preiss [17] et d'Ekeland [36] sont primordiaux dans toutes ces études.

Dans [46], Ioffe a utilisé des méthodes variationnelles diverses pour établir la régularité métrique pour les systèmes d'équations avec des données non-lisses ; ensuite, Aubin & Frankowska [4] ont discuté les théorèmes d'ouverture ; dans [92], Rockafellar a étudié les propriétés Lipschitziennes des multiapplications, puis, Borwein [15] a obtenu des conditions de régularité métrique pour un système d'inégalités généralisées ; Modurkhovich & Shao [70] ont établi des conditions nécessaires et suffisantes pour la régularité métrique, l'ouverture à taux linéaire, la continuité d'Aubin des multiapplications et ont montré que ces propriétés sont équivalentes.

Une autre approche a été utilisée récemment dans Azé & Benhamed [12]. Elle consiste à perturber une multiapplication métriquement régulière par une multiapplication pseudo-Lipschitzienne. Cette approche introduite dans Azé, Corvellec & Lucchetti [9] a été également développée indépendamment par Ioffe [46]. Dans ce travail, nous utilisons la théorie des bornes d'erreurs pour établir une nouvelle caractérisation de la régularité métrique des multiapplications implicites. Une approche différente, utilisant les bornes d'erreurs a également été utilisée par Azé, Corvellec & Lucchetti [9] et Ngai & Théra [78] pour obtenir des théorèmes de multiapplications implicites dans les espaces lisses. Notre approche est basée sur la propriété de borne d'erreur de l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction distance à l'image définie par une multiapplication donnée. Il s'agit de la fonction

$$\varphi(x,y) := \liminf_{(u,v)\to(x,y)} d(v,F(u)) = \liminf_{u\to x} d(y,F(u)).$$

L'intérêt de cette approche est qu'elle nous permet d'éviter la complétude de l'espace image. Grâce à ces nouvelles caractérisations, il est possible de formuler des théorèmes de multiapplications implicites basés sur des co-dérivées asbtraites et des dérivées contingentes ainsi que la stabilité de la perturbation des multiapplications implicites.

La question qui se pose naturellement est la suivante : "*la régularité métrique est-elle stable par rapport à une perturbation ?*" Ce problème est à la source du principe de l'application ouverte de Banach. On sait que l'ensemble des applications linéaires continues $L(X,Y)$ qui sont surjective de l'espace de Banach X dans l'espace de Banach Y est un ensemble ouvert. En d'autres termes, si $A \in L(X,Y)$ est surjectif, alors, tous les opérateurs B avec $\|B-A\|$ suffisamment petit restent surjectifs. En plus, si $A \in L(X,Y)$ est inversible et $B \in L(X,Y)$ vérifie $\|B\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|(A+B)^{-1}\| \leq (\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|)^{-1}.$$

La généralisation de ce résultat se trouve dans Dmitruk, Miljutin & Osmolovski [26]. Ce résultat a été étendu dans [46] par Ioffe aux applications multivoques (voir aussi [29]) ; si on perturbe une application multivoque F métriquement régulière en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ de module $\tau > 0$ par une application f lipschitzienne en $\bar{x}$ de constante de Lipschitz $\lambda > 0$ telle que $\tau\lambda < 1$, alors on obtient

$$\operatorname{reg}(F + f)(\bar{x}, \bar{y} + f(\bar{x})) \leq (\tau^{-1} - \lambda)^{-1}.$$

Plus généralement, étant donné deux applications multivoques F et G entre des espaces de Banach, si F est métriquement régulière, une question naturelle, posée par Ioffe [47] est de savoir " *estimer la proximité de la multiapplication G par rapport à F pour quelle soit métriquement régulière.* " Ioffe a utilisé la quantité suivante qui est considérée comme la mesure de "*proximité* " entre deux multiapplications afin de résoudre ce problème. Soient deux multiapplications F et Φ et soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \operatorname{gph} F \cap \operatorname{gph} \Phi$, un point fixé (voir Ioffe [47])

$$\Sigma_{F,\Phi}(x, t_1, t_2, r) := \sup_{\eta \in \Phi(x) \cap B(\bar{z}, t_1)} \inf_{v \in F(x) \cap B(\bar{y}, t_2)} \sup_{d(u,x) < r, w \in F(u)} \inf_{\xi \in \Phi(u)} \|\eta - v + w - \xi\|, \tag{16}$$

avec $x \in X$; $t_1, t_2, r \in (0, +\infty)$.

Ce problème a été développé par Ngai & Théra [80]. Dans ce travail, nous modifions cette quantité dans le cas paramétrique afin d'étudier la régularité métrique des multiapplications implicites. Soient deux multiapplications $F_p := F(\cdot, p)$ et $\Phi_p := \Phi(\cdot, p)$ et soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, un point fixé. Pour $p \in P$, on pose :

$$\Sigma_{F_p,\Phi_p}(x, t_1, t_2, r) := \sup_{\eta \in \Phi_p(x) \cap B(\bar{z}, t_1)} \inf_{v \in F_p(x) \cap B(\bar{y}, t_2)} \sup_{d(u,x) < r, w \in F_p(u)} \inf_{\xi \in \Phi_p(u)} \|\eta - v + w - \xi\|, \tag{17}$$

avec $x \in X$; $t_1, t_2, r \in (0, +\infty)$.

La notion de *borne d'erreur (Error bound)*. Étant données des fonctions (à valeurs réelles étendues), plusieurs notions de régularité ont été examinées. Du point de vue des applications à l'optimisation (l'analyse de sensibilité, le calcul sous-différentiel, les conditions d'optimalité, l'analyse de la convergence des algorithmes numérique d'optimisation, les méthodes de pénalités, etc), la propriété de la borne d'erreur est l'une des propriétés de régularité importantes. Elle fournit une estimation de la distance d'un certain point dans un espace métrique à l'ensemble des solutions d'un système d'inégalités. Cette notion est née de considérations numériques dans l'implémentation de méthodes itératives pour résoudre des problèmes d'optimisation ou d'équilibre. Les méthodes algorithmiques requièrent des règles d'arrêt qui s'écrivent en pratique sous la forme

$$r(x^k) \leq \quad \text{une certaine tolérance},$$

où $r(x)$ est une fonction résiduelle et x^k le k-ième itéré de l'algorithme utilisé. Si cette règle est vérifiée, alors x^k est une solution (approchée) acceptable du problème considéré, sinon l'algorithme se poursuit. Plusieurs questions se posent :

- x^k est-il proche d'une solution exacte ?
- et si c'est le cas, peut-on quantifier la proximité à l'ensemble des solutions ? Plus précisément si S est l'ensemble solution, supposé non vide et inconnu, peut-on borner la distance de x^k à S en fonction de $r(x^k)$?

Pour illustrer ce propos, considérons un problème standard d'optimisation

$$\min\{f(x) \ : \ x \in C\}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable et minorée sur un convexe fermé C de $\mathbb{R}^n$ telle que le gradient ∇f soit Lipschitzien de constante $L > 0$. A l'optimum $x^\star$, si P_C désigne la projection orthogonale sur C, on a :

$$x^\star = P_C(x^\star - t\nabla f(x^\star)$$

pour un certain $t > 0$. Si f est fortement convexe de paramètre $m > 0$ (en particulier la solution est unique) :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - mt(1-t)\|x-y\|^2, \quad \text{pour tous } x \in C, y \in C \text{ et } \ t \in [0,1]$$

en posant $R(x) = \|P_C(x - t\nabla f(x)) - x\|$ on a la borne d'erreur suivante (voir Beck [11]) :

$$\|x - x^\star\| \leq \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 2mt + t^2L^2}} R(x), \text{ pour tout } x \in C.$$

Étant donnée une fonction f à valeurs réelles étendues $f : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$ définie sur un espace métrique X, la propriété de la borne d'erreur (globale) est définie par l'inégalité suivante :

$$d(x, S_f) \leq c[f(x)]_+ \text{ pour tout } x \in X, \tag{18}$$

où, $S_f := \{x \in X : f(x) \leq 0\}$, $c > 0$, désigne le sous-niveau de f en 0, et la notation $\alpha_+ := \max(\alpha; 0)$ est utilisée. Étant donné $x_0 \in S_f$, nous dirons que le système (18) admet un borne d'erreur locale à x_0 quand on peut trouver des réels $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que la relation (18) soit satisfaite pour tout x dans un voisinage de x_0, c'est-à-dire, dans une boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ de centre x_0 et rayon ε.

La propriété de la borne d'erreur donne une estimation la distance du point x dans l'espace X à l'ensemble de la solution du système d'inégalités S_f en fonction de la partie positive de la fonction f. Celle-ci est plus facile de calculer que la distance $d(x, S_f)$ car nous ne connaissons pas en général les éléments de S_f. C'est la raison pour laquelle la propriété de la borne d'erreur est devenue un outil qui a de nombreuses applications dans différents domaines des mathématiques, en particulier en optimisation et en analyse variationelle.

La propriété de borne d'erreur a donné lieu à de nombreuses contributions ainsi qu'à diverses caractérisations en termes de dérivées et de co-dérivées, soit dans l'espace primal en termes de dérivées directionnelles ([21, 53, 75, 78, 102]), la pente forte au sens de Giorgi, Marino & Tosques ([7, 10]), soit dans l'espace dual en termes de sous-différentiels ou de cônes normaux ([9, 10, 21, 41, 42, 43, 53, 64, 65, 75, 78, 79, 82, 99]) et soit dans l'espace primal et dual [37, 38]. L'utilisation de la pente forte a ouvert la voie à une théorie unifiée de la régularité métrique. Rappelons que *la pente forte* $|\nabla f|(x)$ d'une fonction semi-continue inférieurement f en $x \in \mathrm{dom} f$ ([10, 25]) est la quantité définie par : $|\nabla f|(x) = 0$ si x est un minimum local de f, et

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \to x, yx} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)},$$

sinon. Lorsque $x \notin \mathrm{Dom} f$, nous poserons $|\nabla f|(x) = +\infty$.

La théorie des bornes d'erreurs a été initiée par un résultat de Hoffman [44] dont une preuve élégante est donnée dans la monographie de Shapiro-Dentcheva-Ruszcynski [97], P.348.

Soit A une matrice $m \times n$ et soit $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ la multiplication définie par

$$F(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}.$$

Alors, il existe un réel $k \geq 0$ tel que

$$d(x, F(b)) \leq k\|(Ax - b)_+\| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } b \in \text{Dom } F.$$

J.-B. Hiriart-Urruty nous a récemment indiqué que les traces de la notion de borne d'erreur peuvent être trouvées dans un travail de P.C. Rosenbloom [90], publié en 1951. Pour le résumé de la théorie des bornes d'erreurs et de ses applications diverses, le lecteur peut consulter les travaux de Azé [7], Fabian, Henrion, Kruger & Outrata [37], Lewis & Pang [65], Pang [82], Jourani [53], Ng [75], Zălinescu [99], Ngai & Théra [78, 79], ainsi que de nombreuses autres références, et par exemple, le livre de Auslender & Teboulle [6].

Nous étudions la propriété de la régularité métrique pour un type particulier de multiapplications, à savoir *les applications épigraphiques*. Plus précisément, soient deux espaces métriques X, Y ; considérons un ensemble fermé $K \subset Y$ et une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$. Définissons la multiapplication $\mathcal{E}_F : X \times Y \rightrightarrows Y$ en posant

$$\mathcal{E}_F(x, k) := \begin{cases} F(x) + k, & \text{if } k \in K, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet objet s'avère être important en optimisation vectorielle, c'est-à-dire, lorsque l'on cherche à caractériser des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème d'optimisation vectoriel :

$$(P) \quad \text{Min } F(x) \text{ tel que } x \in X, \tag{19}$$

où, F est une multiapplication entre espaces de Banach et la minimalité est comprise au sens de Pareto fort. Notons que dans [34], Durea et Strugariu ont utilisé un type d'application multivoque épigraphique un peu différent qui était défini par

$$\mathcal{E}(x, k) := F(x) + K.$$

La méthode que nous employons est l'étude de la borne d'erreur pour les fonctions semi-continues inférieurement. Pour cela, nous utilisons la pente forte ainsi que l'enveloppe semi-continue inférieurement associée à une multiapplication. Comme application, nous formulons une condition nécessaire d'optimalité pour les problèmes des optimisation vectoriels sans contrainte en utilisant l'incompatibilité entre minimalité et régularité métrique, dans le cadre de l'optimisation multivoque.

Il convient de mentionner que les idées de base que nous considérons dans ce travail ne sont pas nouvelles : nous renvoyons le lecteur à [7, 9, 10, 80] pour l'approche des bornes d'erreurs, et à [34, 40, 88], pour l'utilisation des résultats d'ouverture / régularité métrique pour formuler des conditions d'optimalité. Notre contribution consiste à adapter les techniques connues pour obtenir la régularité métrique des multiapplications épigraphiques et donner des conditions nécessaires d'optimalité au sens de Pareto fort en optimisation vectorielle.

L'origine de ce travail dans cette section de la thèse se situe dans les travaux [34, 76, 80]. À notre connaissance, notre travail poursuit des études antérieures débouchant sur des conditions d'optimalité pour la minimalité au sens de Pareto au moyen de méthodes d'analyse variationnelle. Chronologiquement, le premier travail a été mis en œuvre par Ng et Zheng [75] et a été poursuivi par Bao et Mordukhovich [13] et, grosso modo, consiste à appliquer le principe d'extémalité (voir [71], et [72]). Durea et Strugariu dans [34, 35] en utilisant des résultats sur l'ouverture ont déduit des conditions de (co)-dérivées (voir [84]). Les deux méthodes mentionnées sont dans un sens équivalentes, puisque le principe d'extrémalité caractérise en termes d'éléments de l'espace dual, l'absence de régularité métrique d'une certaine multiapplication. Dans cette thèse, nous adoptons une approche différente ; nous utilisons comme outil principal, les techniques basées sur le concept de borne d'erreur.

Dans la section suivante, nous nous intéressons à la régularité métrique de la somme de deux applications multivoques. Le point de départ de l'étude est le célèbre théorème de Lyusternik-Graves. Plus généralement, Dmitruk, Milyutin et Osmolovskii [26] ont établi que la somme d'une application ouverte à un taux linéaire $a > 0$ et d'une application lipschitzienne avec la constant $b > 0$ et $b < a$ est ouverte à un taux linéaire égal à $a - b$. Ce résultat a été étendu dans [28, 29, 46, 71] à la somme d'une application multivoque métriquement régulière et d'une application lipschitzienne.

Pour le cas paramétrique, J. Aragón Artacho, A.L. Dontchev, M. Gaydu, M.H. Geoffroy, et V.M. Veliov [1] prouvent que si F est métriquement régulière et si nous perturbons F par une application univoque Lipschitzienne $g(\cdot,\cdot)$ par rapport à x, uniformément en p avec une constante Lipschitzienne appropriée, alors l'application multivoque pertubée $F(\cdot)+g(\cdot,p)$ est métriquement régulière pour chaque p dans un voisinage de $\bar{p}$.

Lorsque nous perturbons une multiapplication métriquement régulière F par une application multivoque G qui est pseudo-Lipschitzienne, la multi-application perturbée n'est pas en général métriquement régulière (voir l'exemple dans l'article 3). Cependant, nous avons obtenu une propriété similaire à la régularité métrique de la somme de deux multiapplications qui est définie comme suit :

$$d(x,(F+G)^{-1}(y)) \leq \tau d(y, F(x)+G(x)\cap\mathcal{V}) \quad \text{pour tout} \quad (x,y)\in\mathcal{U}\times\mathcal{W}, \tag{20}$$

où, $\mathcal{U}\times\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ est un voisinage de $(\bar{x},\bar{k},\bar{y})$ et $\tau > 0$.

Si de plus, la propriété “sum-stable" a par exemple lieu, alors la régularité métrique ainsi que la propriété d'Aubin du système variationel reste vérifiée. Récemment, Durea & Strugariu [33] ont considéré la somme de deux multiapplications et ont obtenu un résultat similaire d'ouverture de la somme de deux multiapplications.

Motivé par les idées et les résultats de [33], nous avons attaqué ces problèmes en utilisant une autre méthode, avec des hypothèses différentes. En fait, en utilisant une approche basée sur la théorie de la borne d'erreur, nous étudions la régularité métrique d'une multiapplication spécifique, associant aux multiapplications F et G, la multiapplication : $\mathcal{E}_{(F,G)} : X\times Y \rightrightarrows Y$ définie par

$$\mathcal{E}_{(F,G)}(x,k) = \begin{cases} F(x)+k, & \text{si } k\in G(x), \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat intermédiaire nous permet d'étudier la régularité métrique / l'ouverture linéaire de la somme de deux multiapplications, aussi bien que la régularité métrique d'un *système variationel général* de la forme

$$0 \in F(x)+G(x,p), \tag{21}$$

en évitant l'hypothèse forte de la fermeture de la multiapplication.

2 Résumé des travaux de recherche

2.1 Caractérisations des bornes d'erreur pour un système d'inégalités paramétré

Soit X est un espace *métrique complet* et $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est une fonction donnée. Comme d'habitude, $\operatorname{Dom} f := \{x\in X : f(x) < +\infty\}$ désigne le domaine de f. On pose

$$S := \{x\in X : \quad f(x)\leq 0\}. \tag{1}$$

La propriété borne d'erreur (globale) est définie par l'inégalité

$$d(x,S) \leq c[f(x)]_+ \text{ pour tout } x \in X, \tag{2}$$

où, $c > 0$, et la notation $\alpha_+ := \max(\alpha; 0)$ est utilisée. Pour $x_0 \in S$, nous disons que le système (2) a un borne d'erreur locale à x_0, quand il existe des réels $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que la relation (2) soit satisfaite pour tout x dans un voisinage de x_0, c'est-à-dire, dans une boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ de centre x_0 et de rayon ε.

Dans la suite, nous utilisons le résultat suivant établi par Ngai & Théra [80], qui fournit, dans les espaces métriques complets, une estimation pour la distance $d(\bar{x}, S)$ d'un point donné $\bar{x} \notin S$ à l'ensemble fermé S.

Theorem 3 *Soit X un espace métrique complet, S un sous-ensemble de X défini par (1) et soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction semi-continue inférieurement et $\bar{x} \notin S$. Si on pose*

$$m(\bar{x}) := \inf \left\{ \sup_{y \in X, y \neq x} \frac{f(x) - [f(y)]_+}{d(x,y)} : \quad \begin{array}{c} d(x,\bar{x}) < d(\bar{x},S) \\ f(x) \leq f(\bar{x}) \end{array} \right\}, \tag{3}$$

on obtient alors l'estimation suivante :

$$m(\bar{x}) d(\bar{x}, S) \leq f(\bar{x}). \tag{4}$$

Ici et dans ce que suit on adopte la convention $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Nous considérons maintenant un système paramétrique d'inégalités. Il s'agit du problème de trouver $x \in X$ tel que

$$f(x,p) \leq 0, \tag{5}$$

où, $f : X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction à valeur réelles étendue, X un espace métrique complet et P un espace topologique. Notons par $S(p)$ l'ensemble des solutions du système (5)

$$S(p) := \{x \in X : \quad f(x,p) \leq 0\}.$$

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes sur l'existence d'une borne d'erreur uniformément locale pour le système paramétrique (5).

Theorem 4 *Soient X un espace métrique complet et P un espace topologique. Supposons que l'application $f : X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfasse les conditions suivantes pour certain $(\bar{x}, \bar{p}) \in X \times P$:*

(a) $\bar{x} \in S(\bar{p})$;

(b) l'application $p \mapsto f(\bar{x}, p)$ est semi-continue supérieurement en $\bar{p}$;

(c) pour p dans un voisinage de $\bar{p}$, l'application $x \mapsto f(x,p)$ est semi-continue inférieurement au voisinage de $\bar{x}$.

Soit $\tau > 0$ donné ; considérons les assertions suivantes :

(i) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que si $p \in W$, on ait $V \cap S(p) \neq \emptyset$ et

$$d(x, S(p)) \leq \tau [f(x,p)]_+ \quad \textit{pout tout} \quad (x,p) \in V \times W. \tag{6}$$

(ii) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que pour tout $(x, p) \in V \times W$ avec $f(x, p) > 0$ et $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $z \in X$ tel que

$$0 < d(x, z) < (\tau + \varepsilon)(f(x, p) - [f(z, p)]_+). \tag{7}$$

(iii) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que pour chaque $(x, p) \in V \times W$ avec $f(x, p) \in (0, \gamma)$ et tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $z \in X$ qui satisfasse

$$0 < d(x, z) < (\tau + \varepsilon)(f(x, p) - [f(z, p)]_+). \tag{8}$$

(iv) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que pour chaque $(x, p) \in V \times W$ avec $f(x, p) \in (0, \gamma)$ et chaque $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $z \in X$ avec $f(z, p) \geq 0$ qui vérifie (8).

(v) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que pour chaque $(x, p) \in V \times W$ avec $f(x, p) \in (0, \gamma)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $z \in X$ avec $f(z, p) > 0$ tel que (8) ait lieu.

Alors, on a $(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (i)$. Dans le cas où X est un espace de Banach et l'application $x \mapsto f(x, p)$ est continue dans un voisinage de $\bar{x}$ pour tout p dans un voisinage de $\bar{p}$, alors, les cinq assertions ci-dessus sont équivalentes.

Le théorème 4 implique directement le résultat suivant qui est une légère amélioration de Azé ([8], Théorème 2.3) et utilise la pente forte de la fonction $f(\cdot, p)$.

Corollary 5 *Soient X un espace métrique complet et P un espace topologique. Supposons que l'application $f : X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfasse les conditions (a), (b), (c) du Théorème 4. S'il existe un voisinage $V \times W$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $m > 0$ tels que $|\nabla f(\cdot, p)|(x) \geq m$ pour tout $(x, p) \in V \times W$ avec $f(x, p) \in (0, \gamma)$, alors il existe un voisinage $V_1 \times W_1$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que*

$$md(x, S(p)) \leq [f(x, p)]_+ \quad \textit{pour tout} \quad (x, p) \in V_1 \times W_1.$$

Le résultat suivant correspond au cas non paramétré ; il s'est avéré très utile dans la théorie de borne d'erreur donnée dans Ngai & Théra [80].

Corollary 6 *Soit X un espace métrique complet. Supposons que l'application $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement en $\bar{x} \in S$. S'il existe un voisinage U du point $\bar{x}$ et un réel $m > 0$ tels que $|\nabla f(\cdot)|(x) \geq m$ pour tout $x \in U$ avec $f(x) \in (0, \gamma)$, alors, il existe un voisinage V du point $\bar{x}$ tel que*

$$md(x, S) \leq [f(x)]_+ \quad \textit{pour tout} \quad x \in V.$$

2.2 Théorèmes de multiapplications implicites

Soient X, Y deux *espaces métriques* et P un *espace topologique*. Nous considérons la multiapplication implicite $S : X \times P \rightrightarrows Y$ définie par

$$S(y, p) := \{x \in X : \ y \in F(x, p)\}. \tag{9}$$

Dans cette section, nous utilisons pour chaque $p \in P$, lÕenveloppe semi-continue inférieurement $(x, y) \mapsto \varphi_p(x, y)$ de la fonction $(x, y) \mapsto d(y, F(x, p))$ c'est-à-dire, pour $(x, y) \in X \times Y$

$$\varphi_p(x, y) := \liminf_{(u,v) \to (x,y)} d(v, F(u, p)) = \liminf_{u \to x} d(y, F(u, p)).$$

Le lemme suivant est utile pour la suite.

Lemma 7 *Supposons que l'application $x \rightrightarrows F(x,p)$ soit une multiapplication fermée (c'est-à-dire, son graphe est fermé). Alors, pour chaque $y \in Y$, et chaque p dans un voisinage de $\bar{p}$:*

$$S(y,p) = \{x \in X : \ \varphi_p(x,y) = 0\}.$$

Le comportement local du théorème de la multiapplication implicite définie par (9) en un point $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ dans le graphe de F est donné sous forme d'assertions équivalentes dans le théorème suivant.

Theorem 8 *Soient X, Y deux espaces métriques complets et P un espace topologique et supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifie les conditions suivantes au point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in X \times Y \times P$:*

(a) $\bar{x} \in S(\bar{y}, \bar{p})$;

(b) la multiapplication $p \rightrightarrows F(\bar{x}, p)$ est semi-continue inférieurement en $\bar{p}$;

(c) pour p dans un voisinage de $\bar{p}$, la multiapplication $x \rightrightarrows F(x,p)$ est fermée.

Soit $\tau \in (0, +\infty)$, fixé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que $V \cap S(\bar{y}, p) \neq \emptyset$ pour tout $p \in W$ et

$$d(x, S(\bar{y}, p)) \le \tau d(\bar{y}, F(x,p)) \quad \textit{pour tout } (x,p) \in V \times W;$$

(ii) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que $V \cap S(\bar{y}, p) \neq \emptyset$ pour tout $p \in W$ et

$$d(x, S(\bar{y}, p)) \le \tau \varphi_p(x, \bar{y}) \quad \textit{pour tout } (x,p) \in V \times W;$$

(iii) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que $(x,p) \in V \times W$ avec $\bar{y} \notin F(x,p)$, $\varepsilon > 0$ et toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergeant vers x, il existe une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ avec

$$\liminf_{n\to\infty} d(u_n, x) > 0$$

telle que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(\bar{y}, F(x_n,p)) - d(\bar{y}, F(u_n,p))}{d(x_n, u_n)} > \frac{1}{\tau + \varepsilon}\,; \tag{10}$$

(iv) Il existe un voisinage $V \times W \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $\gamma \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $(x,p) \in V \times W$ avec $\bar{y} \notin F(x,p)$ et $\varphi_p(x, \bar{y}) < \gamma$, $\varepsilon > 0$, et pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergeant vers x avec

$$\lim_{n\to\infty} d(\bar{y}, F(x_n,p)) = \liminf_{u\to x} d(\bar{y}, F(u,p)),$$

il existe une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ avec $\liminf_{n\to\infty} d(u_n, x) > 0$ tel que (10).

Theorem 9 *Soient X, Y deux espaces métriques et P un espace topologique et supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ satisfasse les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8. S'il existe un voisinage $U \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et des réels $m, \gamma > 0$ tels que $|\nabla \varphi_p(\cdot, \bar{y})|(x) \ge m$ pour tout $(x,p) \in U$ avec $\varphi_p(x, \bar{y}) \in (0, \gamma)$, alors il existe un voisinage $V \times W$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que*

$$md(x, S(\bar{y}, p)) \le d(\bar{y}, F(x,p)) \quad \textit{pour tout} \quad (x,p) \in V \times W.$$

Le théorème suivant donne la régularité métrique des multiapplications implicites en utilisant la pente forte de l'enveloppe de la fonction $x \mapsto \varphi_p(x,y)$.

Theorem 10 *Soient X, Y deux espaces métriques complets et P un espace topologique et supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ satisfasse les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8. S'il existe un voisinage $U \subseteq X \times P$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et des réels $m, \gamma > 0$ tels que*

$$|\nabla \varphi_p(\cdot, y)|(x) \geq m \quad \textit{pour tout } (x,p,y) \in U \times W \times V \quad \textit{avec } \varphi_p(x,y) \in (0, \gamma), \tag{11}$$

alors, il existe un voisinage $\tilde{U} \times \tilde{W} \times \tilde{V}$ du point $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ tel que

$$d(x, F_p^{-1}(y)) \leq d(y, F(x,p))/m \quad \forall (x,p,y) \in \tilde{U} \times \tilde{W} \times \tilde{V}. \tag{12}$$

Si Y est un espace normé la réciproque a lieu.

Le Théorème 10, admet comme un corollaire une formule exacte pour le module de la régularité métrique dans les espaces métriques.

Corollary 11 *Soient X un espace métrique complet et Y un espace normé. Supposons que la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ soit fermée et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Si $\varphi(x,y)$ désigne l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction $d(y, F(x))$, alors, on a*

$$1/\mathit{reg}F(\bar{x}, \bar{y}) = \liminf_{(x,y) \xrightarrow{\varphi} (\bar{x}, \bar{y}), y \notin F(x)} |\nabla \varphi(\cdot, y)|(x).$$

Rappelons que la notation $(x,y) \xrightarrow{\varphi} (\bar{x}, \bar{y})$ signifie que $(x,y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ avec $\varphi(x,y) \to \varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

2.3 Théorèmes de multiapplications implicites en termes de co-dérivée

Dans cette section, on suppose que X est un *espace de Banach*. Le symbole ∂ désigne un sous-différentiel abstrait, c'est-à-dire, une multiapplication qui attribue à chaque fonction semi-continue inférieurement définie sur X et à chaque $x \in X$, le sous-ensemble (peut-être vide) $\partial f(x)$ du dual topologique X^* de X, vérifiant les propriétés suivantes :

(C1) Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe, alors ∂f coïncident avec le sous-différentiel de Fenchel-Moreau-Rockafellar :

$$\partial f(x) := \{x^\star \in X^* : \langle x^\star, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in X\}.$$

(C2) Lorsque f et g coïncident dans un voisinage du point x, alors leurs sous-différentiels coïncident en x : $\partial f(x) = \partial g(x)$.

(C3) Si $f_1 : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieusement et si $f_2, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions Lipschitziennes. Lorsque $f_1 + f_2 + ... + f_n$ atteint un minimum local en x_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_i \in x_0 + \varepsilon B_X$, $x_i^\star \in \partial f_i(x_i)$, $i \in \overline{1,n}$, tels que $|f_i(x_i) - f_i(x_0)| < \varepsilon$, $i \in \overline{1,n}$, et $\|x_1^\star + x_2^\star + ... + x_n^\star\| < \varepsilon$.

Il est bien connu que la classe des sous-différentiels abstraits inclut le sous-différentiel de Fréchet dans les espaces d'Asplund, le sous-différentiel de viscosité dans les espaces des Banach lisses, ainsi que le sous-différentiel de Ioffe et de Clarke-Rockafellar dans les espaces de Banach.

Soit un ensemble fermé C de X, le cône normal à C en $x \in C$, par rapport à un opérateur sous-différentiel ∂ est défini par

$$N_\partial(C, x) = \partial \delta_C(x),$$

où δ_C désigne la fonction indicatrice de C définie par $\delta_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon. Nos supposons dans la suite que $\partial \delta_C(x)$ est *un cône fermé* pour tous les ensembles fermés de X.

Soient X, Y des espaces de Banach, et soit ∂ un sous-différentiel sur $X \times Y$. Nous supposons aussi que

(C4) $N_\partial(A \times B, (a,b)) = N_\partial(A,a) \times N_\partial(B,b)$ pour chaque ensemble fermé $A \subset X$, $B \subset Y$ et $a \in A, b \in B$.

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication fermée et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$. Dans notre cadre, la *codérivée* de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ est une application multivoque $D_\partial^\star F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^\star \rightrightarrows X^\star$ définie par

$$D_\partial^\star F(\bar{x}, \bar{y})(y^\star) = \{x^\star \in X^\star : (x^\star, -y^\star) \in N_\partial(\text{gph } F, (\bar{x}, \bar{y}))\}.$$

Il est clair à partir de la définition que chaque notion de cône normal va engendrer une notion de co-dérivée. Par exemple si F est une fonction univoque de classe C^1, alors la co-dérivée de Fréchet de F n'est autre que la transposée de la dérivée de F.

Nous définissons aussi la *codérivée limite* $D_{\lim}^* F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^\star \rightrightarrows X^\star$ de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ comme suit :

$$D_{\lim}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^\star) = \left\{ x^\star \in X^\star : \begin{array}{l} \exists (x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y}), (x_n^\star, y_n^\star) \stackrel{w^*}{\to} (x^\star, y^\star), \text{ avec} \\ (x_n, y_n) \in \text{gph } F \text{ et } x_n^\star \in D_\partial^\star F(x_n, y_n)(y_n^\star) \end{array} \right\}.$$

Le lemme suivant donne une estimation pour la pente forte de la fonction $\varphi(\cdot, y)$ en utilisant l'opérateur sous-différentiel abstrait sur $X \times Y$.

Lemma 12 *Soit ∂ un opérateur sous-différentiel abstrait sur le produit $X \times Y$ de deux espaces de Banach. Alors, pour chaque $(x, y) \in X \times Y$ avec $y \notin F(x)$, on a*

$$|\nabla \varphi(\cdot, y)|(x) \geq \lim_{\eta \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^\star\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \text{gph } F, \ x^\star \in D_\partial^\star F(u,v)(y^\star), \ \|y^\star\| = 1, \ u \in B(x, \eta), \\ d(y, F(u)) \leq \varphi(x,y) + \eta, \ \|v - y\| \leq d(y, F(u)) + \eta, \\ |\langle y^\star, v - y \rangle - d(y, F(u))| < \eta \end{array} \right\} \right\}. \tag{13}$$

Combinant le Théorème 9 et le Lemme 12, on obtient le théorème de multiapplication implicite suivant qui généralise un résultat établi par Ledyaev and Zhu ([64]) dans le contexte des espaces de Fréchet lisses et par Ngai & Théra ([78]) dans les espaces lisses généraux. Notons que ce résultat est plus fin que celui mentionné dans [64, 78].

Theorem 13 *Soit ∂ un sous-différentiel sur $X \times Y$ qui satisfasse les trois conditions $(C1)-(C3)$. Supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifie les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8.*

On suppose qu'il existe un voisinage U du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et des réels $m, \gamma > 0$ tels que pour tout $(x,p) \in U$ avec $\bar{y} \notin F(x,p)$,

$$m \leq \lim_{\eta \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^\star\| : \begin{array}{l} v \in F(u,p); \ x^\star \in D_\partial^\star F_p(u,v)(y^\star), \ \|y^\star\| = 1, \ u \in B(x, \eta), \\ d(\bar{y}, F(u,p)) \leq \gamma + \eta, \ \|v - \bar{y}\| \leq d(\bar{y}, F(u,p)) + \eta, \\ |\langle y^\star, v - \bar{y} \rangle - d(\bar{y}, F(u,p))| < \eta \end{array} \right\} \right\}. \tag{14}$$

Alors, il existe un voisinage $V \times W$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que $V \cap S(\bar{y}, p) \neq \emptyset$ pour tout $p \in W$ et

$$d(x, S(\bar{y}, p)) \leq d(\bar{y}, F(x,p))/m \quad \forall (x,p) \in V \times W.$$

Le Théorème 13 fournit le corollaire suivant dont la première partie a été établie par Azé, Corvellec et Lucchetti [8] (voir aussi [9], Corollary 5.7). Nous désignons par $S_{Y^\star}$ la sphère unité dans $Y^\star$, et par $d_\star$ la métrique associée à la norme duale sur $X^\star$.

Corollary 14 *Soient X, Y deux espaces de Banach et soit ∂ un opérateur sous-différentiel sur $X \times Y$ qui satisfaisse les trois conditions $(C1) - (C3)$. Supposons que l'application multivoque $F : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifie les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8 dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Supposons qu'il existe un réel $m > 0$ tel que*

$$\liminf_{(x,p,y) \underset{F}{\to} (\bar{x},\bar{p},\bar{y})} d_\star(0, D^\star_\partial F_p(x,y)(S_{Y^\star})) > m > 0, \tag{15}$$

où, la notation $(x,p,y) \underset{F}{\to} (\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ signifie que $(x,p,y) \to (\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ avec $(x,p,y) \in \operatorname{gph} F$. Alors, il existe un voisinage $V \times W \times U$ du point $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ tel que

$$d(x, F_p^{-1}(y)) \le d(y, F(x,p))/m \quad \forall (x,p,y) \in U \times W \times V. \tag{16}$$

Inversement, si X, Y sont des espaces d'Asplund, si ∂ est un sous-différentiel de Fréchet, si la condition (16) a lieu pour un certain $m > 0$ et pour un certain voisinage $V \times W \times U$ du point $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$, alors

$$\liminf_{(x,p,y) \underset{F}{\to} (\bar{x},\bar{p},\bar{y})} d_\star(0, D^\star F_p(x,y)(S_{Y^\star})) \ge m.$$

Dans cette sous-section, nous utilisons *la dérivée graphique contingente* pour établir le théorème de multiapplication implicite. Soient X, Y des espaces normés. Rappelons que la dérivée graphique contingente de l'application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ en $(x,y) \in \operatorname{gph} F$ est une multiapplication $DF(x,y) : X \rightrightarrows Y$ définie par

$$v \in DF(x,y)(u) \quad \Longleftrightarrow \quad (u,v) \in T_{\operatorname{gph} F}(x,y),$$

où, $T_{\operatorname{gph} F}(x,y)$ est un cône tangent à gph F en (x,y), c'est-à-dire, $(u,v) \in T_{\operatorname{gph} F}(x,y)$ si et seulement si, il existe des suites $t_n \downarrow 0$, $u_n \to u$ et $v_n \to v$ telles que pour tout n, $y + t_n v_n \in F(x + t_n u_n)$.

Soit $H : Y \rightrightarrows X$ une multiapplication positivement homogène, appelée un processus dans [93], c'est-à-dire, une multiapplication H dont le graphe est un cône. La norme *intérieure* de H (voir, par exemple [30, 91]) est définie par

$$\|H\|^- = \sup_{y \in B_Y} \inf_{x \in H(y)} \|x\|.$$

Le lemme suivant dont la démonstration est très semblable à celle du lemme 12, donne une estimation de la pente forte de l'enveloppe semi-continue inférieurement de $d(y, F(x))$ en utilisant la dérivée graphique contingente.

Lemma 15 *Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication fermée. Désignons par $\varphi(x,y)$ l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction $d(y, F(x))$. Alors, pour chaque $(x, \bar{y}) \in X \times Y$ avec $\bar{y} \notin F(x)$, on a*

$$|\nabla \varphi(\cdot, \bar{y})|(x) \ge \frac{1}{\tau(x, \bar{y})},$$

où,

$$\tau(x,\bar{y}) := \lim_{\eta \downarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \|DF(z,y)^{-1}\|^- : \begin{array}{l} (z,y) \in \operatorname{gph} F,\ z \in B(x,\eta), \\ d(\bar{y}, F(z)) \le \varphi(x,\bar{y}) + \eta,\ \|\bar{y} - y\| \le d(\bar{y}, F(z)) + \eta \end{array} \right\} \right\}. \tag{17}$$

Du Lemme précédant et du Théorème 9, nous déduisons immédiatement le résultat suivant.

Theorem 16 *Soient X, Y des espaces de Banach et P un espace topologique. Supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifie les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8 dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in X \times P \times Y$.*

S'il existe un voisinage U du point $(\bar{x}, \bar{p})$ et des réels $\tau, \gamma > 0$ tels que pour tout $(x, p) \in U$ avec $\bar{y} \notin F(x, p)$,

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \|DF_p(z, y)^{-1}\|^- : \begin{array}{l} y \in F(z, p);\ z \in B(x, \eta) \\ d(\bar{y}, F(z, p)) \leq \gamma + \eta,\ \|y - \bar{y}\| \leq d(\bar{y}, F(z, p)) + \eta \end{array} \right\} \right\} < \tau, \tag{18}$$

alors, il existe un voisinage $V \times W$ du point $(\bar{x}, \bar{p})$ tel que $V \cap S(\bar{y}, p) \neq \emptyset$ pour tout $p \in W$ et

$$d(x, S(\bar{y}, p)) \leq \tau d(\bar{y}, F(x, p)) \quad \forall (x, p) \in V \times W.$$

De ce théorème, nous obtenons directement le théorème de multiapplication implicite suivant de Dontchev, Quincampoix et Zlateva [30].

Theorem 17 *([30], Theorem 2.1) Soient X, Y des espaces de Banach et P un espace topologique. Supposons que la multiapplication $F : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifie les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8 dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in X \times P \times Y$. Supposons que*

$$\liminf_{(x,p,y) \to_F (\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})} \|DF_p(x, y)^{-1}\|^- < \tau < +\infty.$$

Alors, il existe un voisinage $V \times W \times U$ du point $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ tel que

$$d(x, F_p^{-1}(y)) \leq \tau d(y, F(x, p)) \quad \forall (x, p, y) \in U \times W \times V.$$

2.4 Régularité métrique de la multiapplication implicite sous perturbation

Comme dans la section précédente, soit $F : X \times P \rightrightarrows Y$ une multiapplication. Considérons la multiapplication implicite S_F associée à F définie par $S_F : Y \times P \rightrightarrows X$,

$$S_F(y, p) := \{x \in X : \ \ y \in F(x, p)\}, \ \ (y, p) \in Y \times P\}.$$

Soit $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph } F$. La multiapplication implicite S_F est dite métriquement régulière en $\bar{x}$ par rapport à $(\bar{y}, \bar{p})$ avec le module $\tau \in (0, +\infty)$, s'il existe des voisinages U de $\bar{x}$, V de $\bar{y}$ et W de $\bar{p}$ tels que

$$d(x, S_F(y, p)) \leq \tau d(y, F(x, p)) \quad \text{pour tout} \ \ (x, p, y) \in U \times W \times V. \tag{19}$$

De manière similaire à la sous-section 2, $\varphi_p(\cdot, \cdot)$ désigne l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction $d(\cdot, F(\cdot, p))$.

Soient X un espace métrique complet et Y un espace normé. Soient $F, \Phi : X \times P \rightrightarrows Y$ des applications multivoques $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph } F et$ $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{z}) \in \text{gph } \Phi$. Nous allons utiliser la quantité suivante qui est considérée comme une mesure de "proximité" entre deux applications multivoques $F_p := F(\cdot, p)$ et $\Phi_p := \Phi(\cdot, p)$ dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, pour $p \in P$ donné (voir [80]) :

$$\Sigma_{F_p, \Phi_p}(x, t_1, t_2, r) := \sup_{\eta \in \Phi_p(x) \cap B(\bar{z}, t_1)} \ \inf_{v \in F_p(x) \cap B(\bar{y}, t_2)} \ \sup_{d(u,x) < r, w \in F_p(u)} \ \inf_{\xi \in \Phi_p(u)} \|\eta - v + w - \xi\|, \tag{20}$$

avec $x \in X$; $t_1, t_2, r \in (0, +\infty)$.

Theorem 18 *Soient X un espace métrique complet et Y un espace normé. Soient $F, \Phi : X \rightrightarrows Y$ des applications multivoques qui satisfassent les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8 en $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ et $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{z}) \in \operatorname{gph} \Phi$, respectivement. Supposons qu'il existe des réels $\alpha, \beta > 0$, $\tau > 0$ et un voisinage V du point $\bar{p}$ tels que*

$$d(x, S_F(y,p)) \le \tau d(y, F(x,p)) \quad \textit{pour tout } (x,y,p) \in B(\bar{x}, \alpha) \times B(\bar{y}, \beta) \times W. \tag{21}$$

S'il existe des réels positifs $t_1, t_2, s, \lambda, \delta$ avec $t_2 \in (0, \beta), \lambda \in (0, \tau^{-1})$ et un voisinage $W' \subseteq V$ du $\bar{p}$ tels que

$$\Sigma_{F_p, \Phi_p}(x, t_1, t_2, r) \le \lambda r \;\; \textit{pour tout } (x,p) \in B(\bar{x}, \delta) \times W', \;\; r \in (0, s), \tag{22}$$

alors, S_Φ est métriquement régulière dans un voisinage de $\bar{x}$ par rapport à $(\bar{p}, \bar{z})$ avec le module de régularité $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.

Rappelons que une application multivoque $G : X \times P \rightrightarrows Y$ est *localement uniformément Lipschitzienne* en $\bar{x}$ pour p dans un voisinage de $\bar{p}$ avec une constante $\lambda > 0$, s'il existe $\delta > 0$ et un voisinage W du $\bar{p}$ tels que

$$e(G(x,p), G(u,p)) \le \lambda d(x,u) \;\text{ pour tout }\; (x,u,p) \in B(\bar{x}, \delta \times B(\bar{x}, \delta) \times W, \tag{23}$$

où, $e(G(x), G(u))$ désigne l'écart entre $G(x)$ et $G(u)$, c'est-à-dire, $e(G(x), G(u)) = \sup_{y \in G(x)} d(y, G(u))$.

Du théorème 18, on obtient le lemme suivant :

Corollary 19 *Soient X un espace métrique complet et Y un espace normé. Soient $F, G : X \times P \rightrightarrows Y$ des applications multivoques et soit $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Supposons que G soit univoque en $(\bar{x}, \bar{p})$ avec $G(\bar{x}, \bar{p}) := \bar{z}$.*

Supposons que F et $\Phi := F + G$ vérifient les conditions (a), (b), (c) du Théorème 8 au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ et $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y} + \bar{z})$, respectivement, et que S_F soit métriquement régulière en $\bar{x}$ par rapport à $(\bar{y}, \bar{p})$ de module de régularité $\tau > 0$. Si $G(\cdot, p)$ est localement uniformément Lipschitzienne en $\bar{x}$ pour p dans un voisinage de $\bar{p}$ avec une constante $\lambda \in (0, \tau^{-1})$, et $G(\bar{x}, \cdot)$ est semi-continue supérieurement en $\bar{p}$, alors, S_Φ est métriquement régulière en $\bar{x}$ par rapport à $(\bar{y} + \bar{z}, \bar{p})$ avec un module de régularité égal à $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.

2.5 La loi de Fermat pour le problème d'optimisation multivoque

2.6 La régularité métrique de la multiapplication épigraphique

Dans cette section, X, Y sont des espaces métriques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. Comme dans les sections précédentes, désignons par $\varphi(x,y)$ l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction $(x,y) \mapsto d(y, F(x))$. Nous utilisons la notation clF de désigner l'application multivope entre X et Y dont le graphe est la fermeture $cl(\operatorname{gph} F)$ du graphe de F. Alors, on a le lemme suivant qui est semblable au Lemme 7.

Lemma 20 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors, pour chaque $y \in Y$*

$$\{x \in X : \varphi(x,y) = 0\} = (clF)^{-1}(y).$$

En particulier, si F est de graphe fermé, alors

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : \varphi(x,y) = 0\}.$$

De ce lemme, nous obtenons le théorème suivant pour la régularité métrique d'une multiapplication.

Theorem 21 *Soient Xun espace métrique complet, Y un espace métrique, $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication, et supposons que $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est tel que $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Étant donné $m > 0$, s'il existe un voisinage $U \times V$ du $(\bar{x}, \bar{y})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que*

$$|\nabla\varphi(\cdot, y)|(x) \geq m \quad \textit{pour tout } (x, y) \in U \times V \textit{ avec } \varphi(x, y) \in (0, \gamma), \tag{24}$$

alors, il existe un voisinage $\tilde{U} \times \tilde{V}$ du point $(\bar{x}, \bar{y})$ tel que

$$d(x, (clF)^{-1}(y)) \leq \frac{1}{m} d(y, F(x)) \quad \forall (x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V}. \tag{25}$$

En particulier, si F est de graphe fermé, alors l'inégalité ci-dessus devient :

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{m} d(y, F(x)) \quad \forall (x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V},$$

En d'autres termes, F est métriquement régulière en $(\bar{x}, \bar{y})$.

Soient à présent X un espace métrique et Y un espace vectoriel normé. Considérons un ensemble fermé $K \subset Y$ et une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$. Nous lui associons la multiapplication $\mathcal{E}_F : X \times Y \rightrightarrows Y$ donnée par

$$\mathcal{E}_F(x, k) := \begin{cases} F(x) + k, & \textit{si } k \in K, \\ \emptyset, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Si K est un cône, alors $\mathcal{E}_F$ est une multiapplication de type épigraphique. Son enveloppe semicontinue inférieurement $\varphi_{\mathcal{E}_F} : X \times Y \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est alors définie par

$$\varphi_{\mathcal{E}_F}((x, k), y) = \begin{cases} \liminf\limits_{u \to x} d(y, F(u) + k), & \text{si } k \in K, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant fournit la régularité métrique de la fonction $\mathcal{E}_F$. Observons que si $F : X \rightrightarrows Y$ est de graphe fermé, alors la multiapplication $\mathcal{E}_F$ est aussi de graphe fermé. Notons que si F est une multiapplication de graphe fermé, alors pour chaque $y \in Y$:

$$\{(x, k) \in X \times Y : y \in F(x) + k, k \in K\} = \{(x, k) \in X \times Y : \varphi_{\mathcal{E}_F}((x, k), y) = 0\}.$$

Theorem 22 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de Y et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication de graphe fermé. Fixons $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times K \times Y$ et supposons que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}$. Étant donné $m > 0$, s'il existe un voisinage $U \times V \times W$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que*

$$|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot, \cdot), y)|(x, k) \geq m \quad \forall (x, k, y) \in U \times V \times W \textit{ tel que } \varphi_{\mathcal{E}_F}((x, k), y) \in (0, \gamma), \tag{26}$$

alors, il existe un voisinage $\tilde{U} \times \tilde{V} \times \tilde{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ tel que

$$d((x, k), \mathcal{E}_F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{m} d(y, F(x) + k) \quad \forall (x, k, y) \in \tilde{U} \times [\tilde{V} \cap K] \times \tilde{W}. \tag{27}$$

Autrement dit, $\mathcal{E}_F$ est métriquement régulière dans un voisinage de $((\bar{x}, \bar{k}), \bar{y})$, donc $\mathcal{E}_F$ est ouverte dans un voisinage de $((\bar{x}, \bar{k}), \bar{y})$.

Le théorème donne une estimation inférieure de $|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|$, utile pour obtenir dans les espaces de Banach des conditions en termes de codérivées pour la régularité métrique/l'ouverture linéaire de la multiapplication $\mathcal{E}_F$. La principale nouveauté du résultat suivant, dont la preuve est très similaire à celle de [76, Lemma 11], tient au fait qu'il exprime une estimation inférieure pour $|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|$ en termes de la multiapplication initiale F.

Theorem 23 *Soient X, Y des espaces de Banach, K un cône convexe fermé de Y, et F une multiapplication de graphe fermé. Alors, pour chaque $(x,k_0,y) \in X \times K \times Y$ avec $y \notin F(x)+k_0$, on a*

$$|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k_0) \geq \lim_{\rho\downarrow 0}\left\{\inf\left\{\|x^*\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \operatorname{Gr} F,\ u \in B(x,\rho), \\ x^* \in D^\star_\partial F(u,v)(y^\star+z^\star), \\ y^\star \in K^\star \cap S^\star_Y,\ z^\star \in \rho B^\star_Y, \\ d(y,F(u)+k_0) \leq \varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k_0),y)+\rho, \\ \|y-v-k_0\| \leq d(y,F(u)+k_0)+\rho, \\ |\langle y^\star+z^\star, v+k_0-y\rangle - d(y,F(u)+k_0)| < \rho \end{array}\right\}\right\}. \tag{28}$$

Utilisant à présent le théorème 23, on déduit un résultat obtenu par Durea et Strugariu (voir [34, Theorem 3.6]), utile pour obtenir avec l'hypothèse supplémentaire de compacité normale, la condition suffisante “pointbased" pour la régularité métrique de la multiapplication épigraphique.

Corollary 24 *Soient X, Y des espaces de Banach, K un cône convexe fermé de Y, et F une multiapplication de graphe fermé. Supposons que $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ est tel que $\bar{y} \in F(\bar{x})$. S'il existe $r, c > 0$ tels que, pour chaque $(x,y) \in \text{gph } F \cap [B(\bar{x},r)\times B(\bar{y},r)], y^\star \in K^\star \cap S_{Y^\star}, z^\star \in 2cB_{Y^\star}, x^\star \in D^\star_\partial F(x,y)(y^\star+z^\star)$,*

$$c\,\|y^\star+z^\star\| \leq \|x^\star\|\,,$$

alors, $\mathcal{E}_F$ est ouverte avec un taux linéaire au voisinage de $((\bar{x},0),\bar{y})$, ou de manière équivalente, $\mathcal{E}_F$ est métriquement régulière dans un voisinage de $((\bar{x},0),\bar{y})$. $\mathcal{E}_F$ est donc ouverte au voisinage de $((\bar{x},0),\bar{y})$.

Afin d'obtenir la critère “pointbased" pour la régularité métrique de la multiapplication épigraphique, on a besoin d'adapter quelques définitions (pour plus de détails, voir [71][pages 76, 266]).

Definition 25 *1. Soit $S \subset Y$ un ensemble localement fermé dans un voisinage de $\bar{y} \in S$. On dit que S est $\partial-$ séquentiellement normalement compact normalement (en abrégé $\partial-$SNC) en $\bar{y}$ si et seulement si*

$$\left[y_n \xrightarrow{S} \bar{y}, y_n^\star \xrightarrow{w^\star} 0, y_n^\star \in N_\partial(S,y_n)\right] \Longrightarrow y_n^\star \to 0.$$

2. Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$, qui est localement fermée dans un voisinage de $(x^\star,y^\star) \in \text{gph } F$, est $\partial-$ partiellement séquentiellement normalement compacte (en abrégé $\partial-$PSNC,) en $(\bar{x},\bar{y})$ si et seulement si

$$\left[(x_n,y_n) \overset{\text{gph } F}{\to} (\bar{x},\bar{y}), x_n^\star \xrightarrow{w^\star} 0, y_n^\star \to 0, (x_n^\star,y_n^\star) \in N_\partial(\text{gph } F,(x_n,y_n))\right] \quad \Longrightarrow \quad x_n^\star \to 0.$$

Si $S = K$ est un cône convexe fermé, d'après (C1), $N_\partial(K, k) \subset -K^*$, pour chaque $k \in K$, et $N_\partial(K, 0) = -K^\star$. Dans ce cas, pour chaque sous-différentiel ∂, la propriété $\partial-$SNC en 0 est équivalente à l'implication suivante :

$$\left[(y_n^\star) \subset K^\star, y_n^\star \xrightarrow{w^\star} 0\right] \Longrightarrow y_n^\star \to 0.$$

Dans cette section on notera la relation de compacité normale par SNC, pour signifier qu'elle est la même pour chaque ∂ satisfaisant (C1). En particulier, si $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, alors $\operatorname{aff} K = Y$, et utilisant [71, Theorem 1.21], K est SNC en 0.

Dans le théorème suivant on déduit la régularité métrique de la multiapplication épigraphique $\mathcal{E}_F$ en utilisant la notion de compacié normale ainsi qu'une condition d'injectivité pour la codérivée limite de multiapplication d'origine F. Les résultats de ce type sont connus (voir [59, 60, 61, 68, 69, 70] et les références associées), mais, la principale nouveauté ici est que nous obtenons la régularité métrique de $\mathcal{E}_F$ en utilisant la compacité normale du cône.

Theorem 26 *Soient X un espace de Banach, Y un espace de Banach tel que $\bar{B}_{Y^\star}$ soit $w^\star-$séquentiellement compacte, K un cône convexe de Y, F une multiapplication de graphe fermé et $((\bar{x}, 0), \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ fixé. Supposons que K est **SNC** en 0 ou que F^{-1} est $\partial-$**PNSC** en $(\bar{y}, \bar{x})$ et de plus, que*

$$\operatorname{Ker} D^\star_{\lim} F(\bar{x}, \bar{y}) \cap K^\star = \{0\}.$$

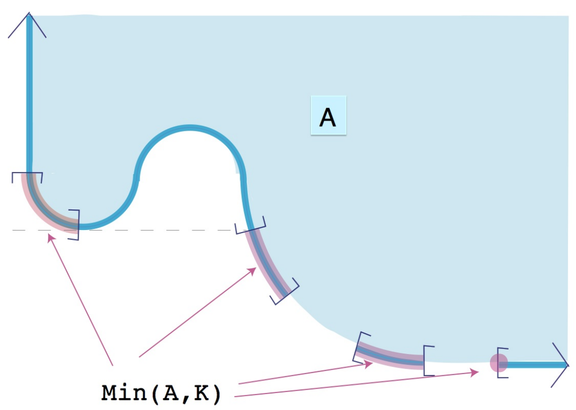
Alors $\mathcal{E}_F$ est métriquement régulière dans un voisinage de $((\bar{x}, 0), \bar{y})$.

2.7 La loi de Fermat pour le problème d'optimisation multivoque

Supposons que Y est un espace vectoriel normé. Nous considérons $K \subset Y$ un cône convexe fermé propre ($K \neq \{0\}$ et $K \neq Y$) induisant un préordre réflexif sur Y en posant $y_1 \leq_K y_2$ si et seulement si $y_2 - y_1 \in K$. Remarquons que nous ne requérons pas que K soit pointé ($K \cap -K = \{0\}$). Ainsi le préordre n'est pas antisymmétrique.

Definition 27 *Soit $A \subset Y$ un sous-ensemble non-vide de Y. Un point $\overline{y} \in A$ est dit être un point minimum Pareto de A par rapport à K (nous écrions $\overline{y} \in \operatorname{Min}(A, K)$) si et seulement si*

$$(A - \overline{y}) \cap (-K) \subset K.$$



Dans la figure précédente, K représente l'orthant positif de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que

$$\overline{y} \in \mathrm{Min}(T, K) \text{ si et seulement si } \overline{y} \in \mathrm{Min}(T + K, K).$$

Dans le cas où le cône K est pointé on a que $\overline{y} \in \mathrm{Min}(T, K)$ si et seulement si

$$(T - \overline{y}) \cap (-K) = \{0\}.$$

Le lemme qui suit est contenu dans [34, Remark 2.1].

Lemma 28 *Soit K un cône fermé convexe dans Y. Alors*

$$\operatorname{int} K = \emptyset \Leftrightarrow Y = \mathrm{cl}((Y \setminus (-K)) \cup K).$$

Dans cette section, nous considérons le problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}) \quad \mathrm{Min}\, F(x) \text{ tel que } x \in X.$$

Definition 29 *Un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F$ est dit un point minimum local de Pareto pour F (ou pour $(\mathcal{P})$) s'il existe un voisinage U du point $\bar{x}$ tel que $\bar{y} \in \mathrm{Min}(F(U), K)$.*

Le lemme suivant permet d'observer que la minimalité Pareto de F et l'ouverture de $\mathcal{E}_F$ ne peuvent avoir lieu simultanément.

Lemma 30 *Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F$ est un point minimum local de Pareto pour F et si K n'est pas un sous-espace linéair e de Y, alors $\mathcal{E}_F$ n'est pas ouverte en $((\bar{x}, 0), \bar{y})$.*

Nous donnons à présent les conditions pour l'existence d'un minimum local de Pareto pour F.

Theorem 31 *Soient X, Y des espaces de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication de graphe fermé et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$. Supposons que $K \subset Y$ soit un cône convexe fermé tel que $K \setminus (-K) \neq \emptyset$. Si $(\overline{x}, \overline{y})$ est un point minimum local de Pareto pour F, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathrm{Gr}\, F \cap B((\overline{x}, \overline{y}), \varepsilon)$, $y_\varepsilon^* \in S_{Y^*} \cap K^*$, $z_\varepsilon^* \in \varepsilon B_{Y^*}$, tels que*

$$0 \in D_\partial^* F(u_\varepsilon, v_\varepsilon)(y_\varepsilon^* + z_\varepsilon^*) + \varepsilon B_{X^*}.$$

Remarquons que les Théorèmes 21, 22, 23 peuvent être formulés pour $\mathrm{cl}\, F$ et la multiapplication épigraphique associée le $\mathcal{E}_{\mathrm{cl}\, F}$. Nous présentons maintenant un résultat similaire à celui du Lemme 30, dans le but d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalités pour $\mathrm{cl}\, F$.

Lemma 32 *Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$ est un point minimum local de Pareto de F et si $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, alors $\mathcal{E}_{\mathrm{cl}\, F}$ ne peut pas être métriquement régulière dans un voisinage de $((\bar{x}, 0), \bar{y})$.*

Theorem 33 *Soient X, Y des espaces de Banach et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication telle que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F$. Supposons que $K \subset Y$ est un cône convexe fermé tel que $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point minimum Pareto local de F, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathrm{cl}(\mathrm{gph}\ F) \cap B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$, $y_\varepsilon^\star \in S_{Y^\star} \cap K^\star$, $z_\varepsilon^\star \in \varepsilon B_{Y^\star}$, tels que*

$$0 \in D_\partial^\star(\mathrm{cl}\, F)(u_\varepsilon, v_\varepsilon)(y_\varepsilon^\star + z_\varepsilon^\star) + \varepsilon B_{X^\star}.$$

2.8 Régularité métrique de la somme de deux applications multivoques et applications aux systèmes variationnels

2.9 Régularité métrique de somme de deux multiapplications dans les espaces de Banach

Soient deux applications multivoques $F, G : X \rightrightarrows Y$, nous définissons la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)} : X \times Y \rightrightarrows Y$ en posant :

$$\mathcal{E}_{(F,G)}(x,k) = \begin{cases} F(x) + k, & \text{if } k \in G(x), \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné $y \in Y$, nous posons

$$\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y) := \{(x,k) \in X \times Y : \;\; y \in \mathcal{E}_{(F,G)}(x,k)\}. \tag{29}$$

L'envelope semi-continue inférieure $((x,k),y) \mapsto \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y)$ de la fonction distance $d(y, \mathcal{E}_{(F,G)}(x,k))$ est définie pour $(x,k,y) \in X \times Y \times Y$ par

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) &:= \liminf_{(u,v,w)\to(x,k,y)} d(w, \mathcal{E}_{(F,G)}(u,v)) \\ &= \begin{cases} \liminf\limits_{u\to x} d(y, F(u)+k) & \text{if } k \in G(x) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants sont utiles pour la suite.

Lemma 34 *Supposons que $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : X \rightrightarrows Y$ soient des multiapplications de graphe fermé. Alors, la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)}$ a graphe fermé et pour chaque $y \in Y$,*

$$\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y) = \{(x,k) \in X \times Y : \quad \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) = 0\} = \{(x,k) \in X \times Y; \quad k \in G(x), y \in F(x)+k\}. \tag{30}$$

Lemma 35 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Soit $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$.*

Soit $\tau \in (0, +\infty)$, fixé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \subseteq X \times Y \times Y$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ tel que

$$d((x,k), \mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y)) \leq \tau \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) \quad \textit{pour tout} \quad (x,k,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W};$$

(ii) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \subseteq X \times Y \times Y$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et un réel $\gamma \in (0, +\infty)$ tels que pour tout $(x,k,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ avec $y \notin F(x) + k, k \in G(x)$ et $\varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) < \gamma$, pour tout Ê $\varepsilon > 0$, et toutes suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergeant vers x, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ convergeant vers k avec

$$\lim_{n\to\infty} d(y - k_n, F(x_n)) = \liminf_{u\to x} d(y-k, F(u)),$$

il existe des suites $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ avec $\liminf_{n\to\infty} d((u_n,z_n),(x,k)) > 0$ telles que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(y-k_n, F(x_n)) - d(y-z_n, F(u_n))}{d((x_n,u_n),(k_n,z_n))} > \frac{1}{\tau+\varepsilon}\,; \tag{31}$$

(iii) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que

$$|\nabla \varphi_{\mathcal{E}}((\cdot,\cdot), y)|(x,k) \geq \frac{1}{\tau} \text{ pour tout } (x,k,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \text{ avec } \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) \in (0,\gamma).$$

Proposition 36 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Supposons que $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ soit tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$. Considérons les conditions suivantes :*

(i) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et $\tau > 0$ tels que

$$d((x,k), \mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y)) \leq \tau \varphi_{\mathcal{E}}((x,k),y) \quad \textit{pour tout} \quad (x,k,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$$

(ii) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et $\tau > 0$ tels que

$$d(x, (F+G)^{-1}(y)) \leq \tau d(y, F(x) + G(x) \cap \mathcal{V}) \quad \textit{pour tout} \quad (x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} \tag{32}$$

(iii) il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y} - \bar{k})$ et $\varepsilon, \tau > 0$ tels que pour chaque $(x,k,z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}, k \in G(x), z \in F(x)$ et $\rho \in (0,\varepsilon)$:

$$B(k+z, \rho\tau^{-1}) \subset (F+G)(B(x,\rho)).$$

Alors, on a les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Dans le résultat qui suit, nous donnons les conditions pour que la somme de deux applications métriquement régulières F, G reste métriquement régulière. On a besoin à ce point de rappeler une notion introduite par Durea et Strugariu [33].

Definition 37 *Soient F, G deux multiapplications et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times Y \times Y$ tels que $\bar{y} \in F(\bar{x}), \bar{z} \in G(\bar{x})$. On dit que le couple (F, G) est " localement sum-stable " au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\bar{x}, \delta)$ et tout $w \in (F+G)(x) \cap B(\bar{y} + \bar{z}, \delta)$, il existe $y \in F(x) \cap B(\bar{y}, \varepsilon)$ et $z \in G(x) \cap B(\bar{z}, \varepsilon)$ tels que $w = y + z$.*

La proposition suivante présente un cas simple assurant que d (F, G) est localement sum-stable.

Proposition 38 *Soient $F : X \rightrightarrows Y, G : X \rightrightarrows Y$ deux multiapplications et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times Y \times Y$ tels que $\bar{y} \in F(\bar{x}), \bar{z} \in G(\bar{x})$. Si $G(\bar{x}) = \{\bar{z}\}$ et G est semi-continue supérieurement en $\bar{x}$, alors le couple (F, G) est localement sum-stable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.*

Proposition 39 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Supposons que $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ est tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$.*
Si le couple (F, G) est stabilité-somme locale au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}, \bar{k})$ et s'il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ du $(\bar{x}, \bar{y})$ et $\tau, \theta > 0$ tels que

$$d(x, (F+G)^{-1}(y)) \leq \tau d(y, F(x) + G(x) \cap B(\bar{k}, \theta)) \quad \textit{pour tout} \quad (x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}, \tag{33}$$

alors, $F + G$ est métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$ avec module τ.

En conséquence, si G est semi-continue supérieurement en $\bar{x}$ et $G(\bar{x}) = \{\bar{k}\}$, alors $F + G$ est métriquement régulière dans un voisinage $(\bar{x}, \bar{y})$ avec module τ.

Le théorème suivant établit la régularité métrique de la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)}$ ainsi que la régularité métrique d'une application multivoque métriquement régulière perturbé par une multiapplication pseudo-Lipschitzienne.

Theorem 40 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Supposons que $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ soit tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$, F soit métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})$ avec module $\tau > 0$ et que G soit pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{k})$ de module $\lambda > 0$ avec $\tau\lambda < 1$. Supposons l'espace produit $X \times Y$ est muni de la métrique définie par*

$$d((x,k),(u,z)) = \max\{d(x,u), \|z-k\|/\lambda\}.$$

Alors, $\mathcal{E}_{(F,G)}$ est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ de module $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.

Si de plus on suppose que le couple (F, G) est stabilité-somme locale au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}, \bar{k})$, alors, $F + G$ est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$ de module $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.

Combinons les Proposition 36 et Théorème 40, pour obtenir le corollaire suivant qui est équivalent au résultat principal (Théorème 3.3 dans [33]), établi pour la différence entre une application ouverte et une application pseudo-Lipschitzienne.

Corollary 41 *Soient Xun espace métrique complet, Y un espace de Banach et $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Supposons que $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ soit tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$, F soit métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})$ de module $\tau > 0$ et G soit pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{k})$ de module $\lambda > 0$ avec $\tau\lambda < 1$. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y} - \bar{k})$ et $\varepsilon, \tau > 0$ tels que pour chaque $(x, k, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}, k \in G(x), z \in F(x)$, et $\rho \in (0, \varepsilon)$,*

$$B(k + z, \rho\tau^{-1}) \subset (F + G)(B(x, \rho)).$$

2.10 Régularité métrique de la multiapplication épigraphique en termes de codérivée

Dans cette section, X, Y sont des espaces d'Asplund, c'est-à-dire, des espaces de Banach tels que chaque sous-espace séparable possède un dual séparable (en particulier, tout espace réflexif est un espace d'Asplund ; voir par exemple, [18] pour plus de détails). Nous rappelons quelques notations, terminologies et définitions classiques de l'analyse variationnelle. Comme d'habitude, $\|\cdot\|$ désigne indifféremment la norme sur X ou Y et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre X et son dual topologique $X^\star$. Le symbole $\overset{w^\star}{\to}$ est utilisé pour la convergence dans la topologie faible $\star$ de $X^\star$ et le symbole cl^* pour la fermeture topologique faible $\star$ d'un ensemble. Étant donné une application multivoque $F\colon X \rightrightarrows X^\star$ entre X et $X^\star$, rappelons que le symbole

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} F(x) := \left\{ x^\star \in X^\star \middle| \, \exists\, x_n \to \bar{x}, \ \exists\, x_n^\star \overset{w^\star}{\to} x^\star \ \text{ avec } \ x_n^\star \in F(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\} \tag{34}$$

désigne la *limite supérieure séquentielle au sens de Painlevé-Kuratowski* de F comme $x \to \bar{x}$ par rapport à la topologie forte de X et la topologie faible $\star$ de $X^\star$. Étant donné une fonction semi-continue inférieurement à valeurs réelles étendues $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\bar{x} \in X$, la notation $x \overset{f}{\to} \bar{x}$ signifie que $x \to \bar{x}$ avec $f(x) \to f(\bar{x})$. Le *sous-différentiel de Fréchet* $\hat{\partial} f(\bar{x})$ de f en $\bar{x}$ est défini par

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) = \{x^\star \in X^\star : \liminf_{x\to\bar{x},\, x\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^\star, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} \geq 0\},$$

et $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \emptyset$ si $\bar{x} \notin \mathrm{Dom}\ f$.

La notation $\partial f(\bar{x})$ est utilisée pour désigner le sous-différentiel limite de f en $\bar{x} \in \mathrm{Dom}\ f$. On a :

$$\partial f(\bar{x}) := \operatorname*{Lim\,sup}_{x \xrightarrow{f} \bar{x}} \hat{\partial} f(x).$$

Pour un ensemble fermé $C \subset X$ et $\bar{x} \in C$, le cône normal de Fréchet à C en $\bar{x}$ est désigné par $\hat{N}(\bar{x}; C)$ et est défini comme le sous-différentiel de Fréchet de la fonction indicatrice δ_C d'ensemble C en $\bar{x}$, c'est-à-dire,

$$\hat{N}(\bar{x}; C) := \hat{\partial}\delta_C(\bar{x}),$$

où $\delta_C(x) = 0$ si $x \in C$, et $\delta_C(x) = +\infty$ si $x \notin C$.
Le cône normal limite de C en $\bar{x}$ est défini et noté par

$$N(\bar{x}; C) = \partial\delta_C(\bar{x}).$$

Pour une multiapplication de graphe fermé $F : X \rightrightarrows Y$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$, la *codérivée* de Fréchet de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ est une application multivoque $\hat{D}^\star F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^\star \rightrightarrows X^\star$ définie par

$$x^\star \in \hat{D}^\star F(\bar{x}, \bar{y})(y^\star) \Leftrightarrow (x^\star, -y^\star) \in \hat{N}((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\ F).$$

La *codérivée de Mordukhovich (codérivée limite)* de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ est une multiapplication $D^\star F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^\star \rightrightarrows X^\star$ définie par

$$x^\star \in D^\star F(\bar{x}, \bar{y})(y^\star) \Leftrightarrow (x^\star, -y^\star) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\ F).$$

Ici, $\hat{N}((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\ F)$ et $N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\ F)$ sont les cônes de Fréchet et normal limite à gph F en $(\bar{x}, \bar{y})$, respectivement.

Pour obtenir une condition “pointbased" pour la régularité métrique des multiapplications dans les espace de dimensions infinie, on utilise souvent la propriété appelée *compacité séquentielle normale partielle* ou (*partial sequential normal compactness (PSNC))*. Une multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ est **PSNC** si pour toutes suites $\{(x_k, y_k, x_k^\star, y_k^\star)\} \in \mathrm{gph}\ F \times X^\star \times Y^\star$ satisfaisant

$$(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y}), x_k^\star \in \hat{D}^\star(x_k, y_k)(y_k^\star), x_k^\star \xrightarrow{w^\star} 0, \|y_k^\star\| \to 0$$

on a $\|x_k^\star\| \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

Remark 42 *La proprieté **PSNC** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F$ est satisfaite si X est de dimension finie, ou si F est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de ce point.*

Dans la suite, on a besoin de rappeler la notion *d'inégalité métrique (metric inequality)* (voir par exemple, Ioffe [46], Ngai etThéra [77]). Rappelons que les ensembles $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ satisfont l'inégalité métrique au point $\bar{x}$ s'il existe des réels $\tau > 0$ et $r > 0$ tels que

$$d(x, \Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \tau[d(x, \Omega_1) + d(x, \Omega_2)] \text{ pour tout } x \in B(\bar{x}, r).$$

Proposition 43 *Soient $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ deux ensembles fermés de X et soit $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ fixé. Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ suivante soit satisfaite en $\bar{x}$:*
$(\mathcal{H})$ pour toutes suites $\{x_{ik}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega_i$, $\{x_{ik}\}^* \in \hat{N}(x_{ik}; \Omega_i)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\{x_{ik}\}_{k\in\mathbb{N}} \to \bar{x}$, i=1, 2 et

$$\|x_{1k}^\star + x_{2k}^\star\|_{k\in\mathbb{N}} \to 0 \textit{ implique } x_{1k}^\star \to 0, x_{2k}^\star \to 0,$$

alors, les ensembles $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ *satisfaisant l'inégalité métrique en* $\bar{x}$. *Sous cette hypothèse, on peut trouver* $r > 0$ *tel que pour tous* $\varepsilon > 0$ *et* $x \in B(\bar{x}, r)$, *il existe* $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon)$ *tels que*

$$\hat{N}(x; \Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \hat{N}(x_1; \Omega_1) + \hat{N}(x_2; \Omega_2) + \varepsilon B_{X^\star}. \tag{35}$$

Nous considérons deux multiapplications $F, G : X \rightrightarrows Y$ auxquelles nous associons deux ensembles

$$C_1 := \{(x, y, z) \in X \times Y \times Y : y \in G(x)\} \text{ et } C_2 := \{(x, y, z) \in X \times Y \times Y : z \in F(x)\}.$$

Remark 44 *L'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *appliquée aux ensembles* $\{C_1, C_2\}$ *en* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in C_1 \cap C_2$ *prend la forme suivante :*
(i) $(\mathcal{H})$ *: pour toutes suites*

$$\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \text{gph } G, \{(v_k, z_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \text{gph } F,$$

$$x_k^\star \in \hat{D}^\star G(x_k, y_k)(y_k^\star), u_k^\star \in \hat{D}^\star F(v_k, z_k)(z_k^\star),$$

telles que si

$$(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y}),$$

$$(v_k, z_k) \to (\bar{x}, \bar{z}),$$

$$\|x_k^\star + u_k^\star\| \to 0,$$

$$y_k^\star \to 0, z_k^\star \to 0,$$

alors

$$x_k^\star \to 0, u_k^\star \to 0, \textit{lorsque } \; k \to 0.$$

Dans ce cas, l'hypothèse $(\mathcal{H})$ *a lieu quand une des conditions suivantes est satisfaite :*
(ii) F^{-1} *or* G^{-1} *est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de* $(\bar{z}, \bar{x})$ *et* $(\bar{y}, \bar{x})$, *respectivement ;*
(iii) ou F *est* ***PSNC*** *en* $(\bar{x}, \bar{z})$ *ou* G *est* ***PSNC*** *en* $(\bar{x}, \bar{y})$, *et*

$$D^\star F(\bar{x}, \bar{z})(0) \cap -D^\star G(\bar{x}, \bar{y})(0) = \{0\}.$$

Le lemme suivant donne une estimation pour la pente forte de la function $\varphi_{\mathcal{E}}((x, k), y)$.

Lemma 45 *Étant donné* $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}, \bar{k}) \in X \times F(\bar{x}) \times G(\bar{x})$. *Supposons que les ensembles* $\{C_1, C_2\}$ *définis au-dessus satisfassent l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *en* $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y} - \bar{k})$. *Alors, il existe un réel* $\rho > 0$ *tel que pour tout* $(x, k, y) \in B((\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}), \rho)$ *avec* $y \notin F(x) + k, k \in G(x)$ *aussi bien que* $d(y, F(x) + k) < \rho$, *on a*

$$|\nabla \varphi_{\mathcal{E}}((\cdot, \cdot), y)|(x, k) \geq \lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^\star\| : \begin{array}{l} (u, w) \in \text{gph } F, (v, z) \in \text{gph } G, u, v \in B(x, \delta), \\ u^\star \in \hat{D}^\star G(v, z)(y^\star), \|y^\star\| = 1, z \in B(k, \delta) \\ x^\star \in \hat{D}^\star F(u, w)(y^\star + z^\star) + u^\star, z^\star \in \delta B_{Y^\star}, \\ d(y, F(u) + k) \leq \varphi_{\mathcal{E}}((x, k), y) + \delta, \\ \|w + k - y\| \leq d(y, F(u) + k) + \delta, \\ |\langle y^\star + z^\star, w + k - y\rangle - d(y, F(u) + k)| < \delta \end{array} \right\} \right\}.$$

En utilisant les résultats ci-dessus on obtient la régularité métrique de l'application multivoque $\mathcal{E}_{(F,G)}$.

Theorem 46 *Soient X, Y des espaces d'Asplund, et soient $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé. Supposons donné le point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$ et imposons que les ensembles $\{C_1, C_2\}$ satisfassent l'hypothèse $(\mathcal{H})$ en $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y} - \bar{k})$. Soit $m > 0$; s'il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ et un réel $\gamma > 0$ tels que pour chaque $(x, y, k) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ avec $y \notin F(x) + k, k \in G(x)$ on ait*

$$m \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^\star\| : \begin{array}{l} (u, w) \in \text{gph } F, (v, z) \in \text{gph } G, u, v \in B(x, \delta), \\ u^\star \in \hat{D}^\star G(v, z)(y^\star), \|y^\star\| = 1, z \in B(k, \delta), \\ x^\star \in \hat{D}^\star F(u, w)(y^\star + z^\star) + u^\star, z^\star \in \delta B_{Y^\star}, \\ d(y, F(u) + k) \leq \gamma + \delta, \\ \|w + k - y\| \leq d(y, F(u) + k) + \delta, \\ |\langle y^\star + z^\star, w + k - y \rangle - d(y, F(u) + k)| < \delta \end{array} \right\} \right\},$$

alors on a

$$md((x, k), \mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y)) \leq \varphi_{\mathcal{E}}((x, k), y) \quad \textit{pour tout} \quad (x, k, y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{W}_1.$$

Ce théorème implique le résultat suivant :

Theorem 47 *Soient X, Y des espaces d'Asplund, et soient $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé, et soit $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$. Étant donné $m > 0$, supposons que les ensembles $\{C_1, C_2\}$ satisfassent l'hypothèse $(\mathcal{H})$ en $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y} - \bar{k})$ ainsi que*

$$m < \liminf_{(x_1, w) \xrightarrow{F} (\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}), (x_2, z) \xrightarrow{G} (\bar{x}, \bar{k}), \delta \downarrow 0} \left\{ \|x^\star\| : \begin{array}{l} x^\star \in \hat{D}^\star F(x_1, w)(y^\star + \delta B_{Y^\star}) + u^\star \\ u^\star \in \hat{D}^\star G(x_2, z)(y^\star), \|y^\star\| = 1, \end{array} \right\} \tag{36}$$

où les notations $(x_1, w) \xrightarrow{F} (\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})$, $(x_2, z) \xrightarrow{G} (\bar{x}, \bar{k})$ signifient

$$(x_1, w) \to (\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}), (x_2, z) \to (\bar{x}, \bar{k}) \textit{ et } (x_1, w) \in \text{gph } F, (x_2, z) \in \text{gph } G.$$

Sous ces conditions, il existe un voisinage $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{W}_1$ du point $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$ tels que

$$md((x, k), \mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y)) \leq \varphi_{\mathcal{E}}((x, k), y) \quad \textit{pour tout} \quad (x, k, y) \in U_1 \times V_1 \times W_1.$$

Le résultat suivant donne une condition pointbased pour la régularité métrique de la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)}$.

Theorem 48 *Soient X, Y des espaces d'Asplund, $F, G : X \rightrightarrows Y$ des multiapplications de graphe fermé, et soit $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y}) \in X \times Y \times Y$ tel que $\bar{y} \in F(\bar{x}) + \bar{k}, \bar{k} \in G(\bar{x})$. Supposons que*

(i) F ou G est PSNC en $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})$ et $(\bar{x}, \bar{k})$, respectivement ;

(ii) $D^\star F(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})(0) \cap -D^\star G(\bar{x}, \bar{k})(0) = \{0\}$;

(iii) pour $u_n^\star \in \hat{D}^\star F(x_n, y_n - k_n)(y_n^\star + (1/n) B_{Y^\star}), v_n^\star \in \hat{D}^\star G(x_n, k_n)(y_n^\star)$ tels que

$$\|u_n^\star + v_n^\star\| \to 0, y_n^\star \xrightarrow{w^\star} 0 \textit{ il en résult que } y_n^\star \to 0.$$

Alors sous la condition :

$$(\star) \qquad Ker\big(D^\star F(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k}) + D^\star G(\bar{x}, \bar{k})\big) = \{0\},$$

la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)}$ est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{y})$.

Remark 49 *Si X, Y sont des espaces de dimension finie, alors les conditions (i), (iii) ont automatiquement lieu, tandis que la condition (ii) est vérifiée si F ou G est pseudo-Lipschitzienne en $(\bar{x}, \bar{y} - \bar{k})$ ou $(\bar{x}, \bar{k})$, respectivement.*

2.11 Applications aux systèmes variationnels

Dans cette section, on utilise les résultats ci-dessus pour étudier quelques propriétés des systèmes variationels de la forme

$$0 \in F(x) + G(x,p), \tag{37}$$

où X est un espace métrique complet, Y est un espace de Banach, P est un espace topologique considéré comme un espace de paramètres, $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ sont des donnés multiapplications. L'ensemble des solutions de (37) est défini par

$$\mathbf{S}_{(F+G)}(p) := \{x \in X : 0 \in F(x) + G(x,p)\}, \tag{38}$$

et on note

$$\mathbb{S}_{(F+G)}(y,p) := \{x \in X : y \in F(x) + G(x,p)\}.$$

Pour chaque $(y,p) \in Y \times P$,

$$\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y,p) = \{(x,k) \in X \times Y : y \in F(x) + k, k \in G(x,p)\},$$

et, pour chaque $p \in P$,

$$\mathbf{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(p) = \{(x,k) \in X \times Y : 0 \in F(x) + k, k \in G(x,p)\}.$$

On dit que la multiapplication $\mathbf{S}_{(F+G)}$ est *métriquement régulière au sens de Robinson* de module τ (voir [85, 86]) au voisinage de $(\bar{x},\bar{p})$, s'il existe des voisinages $\mathcal{U},\mathcal{V}$ du point $\bar{x},\bar{p}$, respectivement, tels que

$$d(x, \mathbf{S}_{(F+G)}(p)) \le \tau d(0, F(x) + G(x,p)), \text{ pour tout } (x,p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Nous rappelons également que la multiapplication $G : X \times P \rightrightarrows Y$ est pseudo-Lipschitzienne de constante $\kappa > 0$ au voisinage de $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ avec $\bar{y} \in G(\bar{x},\bar{p})$ par rapport à x, uniformément en p, si on peut trouver un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ de $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ tel que

$$G(x,p) \cap \mathcal{W} \subset G(u,p) + \kappa d(x,u)\bar{B}_Y \text{ pour tout } x,u \in \mathcal{U}, \text{et pour tout } p \in \mathcal{V}.$$

L'enveloppe semi-continue inférieurement $(x,p,k,y) \mapsto \varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y)$ de la fonction distance $d(y, \mathcal{E}_{(F,G)}((x,p),k))$ est définie pour chaque $(x,p,k,y) \in X \times P \times Y \times Y$ par

$$\varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y) := \liminf_{(u,v,w)\to(x,k,y)} d(w, \mathcal{E}_{(F,G)}((u,p),v))$$

$$= \begin{cases} \liminf\limits_{u\to x} d(y, F(u) + k) & \text{if } k \in G(x,p) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus, on a le lemme suivant.

Lemma 50 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et P un espace topologique. Supposons que les applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifient les conditions suivantes au point $(\bar{x},\bar{k},\bar{p}) \in X \times Y \times P$:*

(a) $(\bar{x},\bar{k}) \in \mathbf{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(\bar{p})$;

(b) la multiapplication $p \rightrightarrows G(\bar{x},p)$ est semi-continue inférieurement en $\bar{p}$;

(c) la multiapplication F a un graphe fermé et pour p proche de $\bar{p}$, l'application multivoque $x \rightrightarrows G(x,p)$ est de graphe fermé.
Alors,

(i) pour chaque p proche de $\bar{p}$, la multiapplication $\mathcal{E}_{(F,G)}$ a une graphique fermée et $\mathcal{E}_{(F,G)}((\bar{x},\cdot),\bar{k})$ est semi-continue inférieurement en $\bar{p}$;

(ii) la fonction $p \mapsto \varphi_{p,\mathcal{E}}((\bar{x},\bar{k}),0)$ est semi-continue supérieurement en $\bar{p}$;

(iii) pour chaque $(y,p) \in Y \times P$;

$$\{(x,k) \in X \times Y : \varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y) = 0\} = \mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y,p).$$

En utilisant la pente forte de l'enveloppe semi-continue inférieurement $\varphi_{p,\mathcal{E}}$, on a la résultat suivant.

Theorem 51 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et P un espace topologique. Supposons que les applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifient les conditions $(a),(b),(c)$ du Lemme 50 dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{k},\bar{p}) \in X \times Y \times P$. S'il existe un voisinage $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{W}_1$ du point $(\bar{x},\bar{p},\bar{k},0)$ et des réels $m,\gamma > 0$ tels que $|\nabla\varphi_{p,\mathcal{E}}((\cdot,\cdot),y)|(x,k) \geq m$ pour tout $(x,p,k,y) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{W}_1$ avec $\varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y) \in (0,\gamma)$, alors il existe un voisinage $\mathcal{T} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ du point $(\bar{x},\bar{p},\bar{k},0)$ tel que*

$$md((x,k),\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y,p)) \leq \varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y),$$

pour tout $(x,p,k,y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$.

Proposition 52 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et P un espace topologique. Supposons que les applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifient les conditions $(a),(b),(c)$ du Lemme 50 dans un voisinage de $(\bar{x},\bar{k},\bar{p}) \in X \times Y \times P$. S'il existe un voisinage $\mathcal{T} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset X \times P \times Y \times Y$ du point $(\bar{x},\bar{p},\bar{k},0)$ et un réel $m > 0$ tels que*

$$md((x,k),\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}(y,p)) \leq \varphi_{p,\mathcal{E}}((x,k),y) \quad \textit{pour tout} \quad (x,p,k,y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$$

il existe alors un réel $\theta > 0$ tel que

$$md(x,\mathbb{S}_{(F+G)}(y,p)) \leq d(y,F(x)+G(x,p) \cap B(\bar{k},\theta)) \quad \textit{pour tout} \quad (x,p,y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}.$$

Par suite,

$$md(x,\mathbf{S}_{(F+G)}(p)) \leq d(0,F(x)+G(x,p) \cap B(\bar{k},\theta)) \quad \textit{pour tout} \quad (x,p) \in \mathcal{T} \times \mathcal{U}.$$

Dans la suite nous utilisons pour le cas paramétré, la notion de locale sum-stabilité qui a été examinée dans la section précédente.

Definition 53 *Soient $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ deux multiapplications et $(\bar{x},\bar{p},\bar{y},\bar{z}) \in X \times P \times Y \times Y$ vérifiant $\bar{y} \in F(\bar{x}), \bar{z} \in G(\bar{x},\bar{p})$. On dit que le couple (F,G) est localement "sum-stable" au voisinage de $(\bar{x},\bar{p},\bar{y},\bar{z})$, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un voisinage W de $\bar{p}$ tels que pour chaque $(x,p) \in B(\bar{x},\delta) \times W$ et chacun $w \in (F+G)(x) \cap B(\bar{y}+\bar{z},\delta)$, on peut trouver $y \in F(x) \cap B(\bar{y},\varepsilon)$ et $z \in G(x) \cap B(\bar{z},\varepsilon)$ tels que $w = y + z$.*

Le cas simple suivant assure que le couple (F,G) est localement sum-stable.

Proposition 54 *Soient $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ deux multiapplications et $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times P \times Y \times Y$ tels que $\bar{y} \in F(\bar{x}), \bar{z} \in G(\bar{x}, \bar{p})$. Si $G(\bar{x}, \bar{p}) = \{\bar{z}\}$ et G est semi-continue supérieurement en $(\bar{x}, \bar{p})$, alors le couple (F, G) est localement sum-stable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y}, \bar{z})$.*

Proposition 55 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach et P un espace topologique. Supposons que les applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y, G : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifient les conditions $(a), (b), (c)$ du Lemme 50 dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{k}, \bar{p}) \in X \times Y \times P$. S'il existe un voisinage $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$ de $(\bar{x}, \bar{p})$ et un réel $\theta, \tau > 0$ tels que*

$$d(x, \mathbf{S}_{(F+G)}(p)) \leq \tau d(0, F(x) + G(x,p) \cap B(\bar{k}, \theta)) \quad \text{pour tout} \quad (x,p) \in \mathcal{T} \times \mathcal{U}, \tag{39}$$

et (F, G) est localement sum-stable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, -\bar{k}, \bar{k})$, alors $\mathbf{S}_{(\mathbf{F}+\mathbf{G})}$ est métriquement régulière au sens de Robinson au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ de module τ.
La conclusion reste vraie si l'hypothèse localement sum-stable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, -\bar{k}, \bar{k})$ est remplacée par l'hypothèse suivante : $G(\bar{x}, \bar{p}) = \{\bar{z}\}$ et G est semi-continue supérieurement en $(\bar{x}, \bar{p})$.

Le théorème suivant établit la pseudo-Lipschitzianité de la multiapplication solution $\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}$.

Theorem 56 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach, P un espace topologique. Supposons que $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : X \times P \rightrightarrows Y$ satisfassent les conditions (a), (b), (c) dans Lemme 50. Si F est métriquement régulière dans un voisinage de $(\bar{x}, -\bar{k})$ de module $\tau > 0$ et si G est pseudo-Lipschitzienne dans un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{k})$ par rapport à x, uniformément en p de module $\lambda > 0$ tel que $\tau\lambda < 1$, alors $\mathcal{E}_{(F,G)}$ est métriquement régulière dans un voisinage $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{k}, 0)$ par rapport à (x, k), uniformément en p, de module $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.*
Si de plus P est un espace métrique et si G est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{k})$ par rapport à p, uniformément en x de module $\gamma > 0$, alors $\mathbb{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}$ est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $((0, \bar{p}), (\bar{x}, \bar{k}))$ de module

$$L = \gamma + (\gamma + 1)(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}).$$

Surtout, $\mathbf{S}_{\mathcal{E}_{(F,G)}}$ est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $((0, \bar{p}), (\bar{x}, \bar{k}))$ de module

$$\gamma(1 + (\tau^{-1} - \lambda)^{-1}).$$

Si nous ajoutons l'hypothèse que (F, G) est localement sum-stable, on obtient la pseudo-Lipschitzianité de $\mathbf{S}_{(F+G)}$.

Theorem 57 *Soient X un espace métrique complet, Y un espace de Banach, P un espace topologique. Supposons que $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : X \times P \rightrightarrows Y$ vérifient les conditions (a), (b), (c) dans Lemme 50. En outre, supposons que*

(i) (F, G) est localement sum-stable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, -\bar{k}, \bar{k})$;

(ii) F est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x}, -\bar{k})$ de module $\tau > 0$;

(iii) G est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{k})$ par rapport à x, uniformément en p de module $\lambda > 0$ tel que $\tau\lambda < 1$;

(iv) G est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{k})$ par rapport à p, uniformément en x de module $\gamma > 0$.
Sous ces conditions, la multiapplication $\mathbf{S}_{(F+G)}$ est métriquement régulière au sens de Robinson au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ de module $(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$. En plus, $\mathbf{S}_{(F+G)}$ est pseudo-Lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ de constante $\gamma(\tau^{-1} - \lambda)^{-1}$.

Bibliographie

[1] Aragón Artacho, F. J., Dontchev, A.L., Gaydu, M., Geoffroy, M. H., Veliov.V. M., *Metric regularity of Newton's Iteration*, SIAM J. on Control and Optimization., 49, (2011), 339-362

[2] Aubin, J.-P, *Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems*, Math. Oper. Res. **9** (1984), 87-111.

[3] Aubin, J.-P., Ekeland I., *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons 1984.

[4] Aubin, J.P., Frankowska, H., *Set-valued Analysis*, Birkäuser, Basel, 1990.

[5] Aubin, J.-P., Wets R.J.-B., Stable approximations of set-valued maps, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire,* **5**, 519-535 (1988).

[6] Auslender, A., Teboulle, M., Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities, *Springer Monographs in Mathematics,* Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] Azé, D., A survey on error bounds for lower semicontinuous functions, *Proceedings of 2003 MODE-SMAI Conference*, 1–17, ESAIM Proc., **1**, EDP Sci., Les Ulis, 2003.

[8] Azé, D., A Unified theory for metric regularity of multifunctions, *Journal of Convex Anal.,* **13**, no. 2, 225-252, (2006).

[9] Azé D., Corvellec J.-N., Luccheti R. E., Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis, *Nonlinear Anal.,* **49**, 643-670, (2002).

[10] Azé D., Corvellec J-N., Characterizations of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **10**, no. 3, 409–425, (2004).

[11] Beck, A., *Convergence analysis of gradient based algorithm*, PhD thesis, University of Tel Aviv, 2003.

[12] Azé D. Benahmed S., On implicit multifunction theorems, *Set-Valued Anal.,* **16**, 129-155, (2008).

[13] Bao, T.Q., Mordukhovich, B.S., Relative Pareto minimizers for multiobjective problems : existence and optimality conditions, *Math. Program. Ser. A*, **122**, 301–347, (2010).

[14] Bonnans J. F., Shapiro A., *Perturbation Analysis of Optimization Problems,* Springer-Verlag, New York, 2000.

[15] Borwein, J. M., Stability and regular points of inequality systems, *Journal of Optimization Theory and Applications.,* **48**, 9-52, (1986).

[16] Borwein, J. M, Dontchev, A. L, On the Bartle-Graves theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **131**, no. 8, 2553–2560, (2003).

[17] Borwein, J. M., and Preiss. D., A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiabilty of convex functions, *Transactions of the Americian mathematical society,* **303**, 1987.

[18] Borwein, J. M., and Zhu, Q. J., Techniques of Variational Analysis. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 20, Springer-Verlag, New York, 2005.

[19] Borwein, J. M., Zhu, Q. J. Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity, *SIAM J. Control Optim., 34, no. 5, 1568–1591 (1996).*

[20] Borwein J. M., Zhuang D. M., Verifiable necessary and sufficient conditions for openness and regularity of set-valued maps, *J. Math. Anal. Appl.,* **134**, 441-459, (1988).

[21] Bosch P., Jourani A., Henrion R., Sufficient conditions for error bounds and applications. *Appl. Math. Optim.* **50**, no. 2, 161–181 (2004).

[22] T. D. Chuong, A. Y. Kruger and J.-C Yao, Calmness of efficient solution maps in parametric vector optimization, *J. Global Optim.*, (2011). Published online 4 February 2001, DOI 10.1007/s10898-011-9651-z.

[23] Clarke, F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.

[24] Cominetti R., Metric regularity, tangent cones, and second-order optimality conditions, *Appl. Math. Optim.,* **21**, 265-287, (1990).

[25] De Giorgi E., Marino A., Tosques M., Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza (Evolution problems in metric spaces and curves of maximal slope), *Atti. Accad. Naz. Lincei rend. Cl. Sci. fis. Mat. Natur.,* **68**, 180-187, (1980).

[26] Dmitruk A. V., Milyutin, A. A., Osmolovskii N. P., The Lusternik theorem and the theory of extremum, *Uspekhi Math. Nauk,* **35**, no. 6, 11-52 (1980) : English translation in Russian Math. Surveys **35**, no. 6, 11-52, (1980).

[27] Dmitruk, A. V., Kruger, A. Y., Metric regularity and systems of generalized equations, J. Math. Anal. Appl. **342**, 2, 864-873 (2008).

[28] Dontchev, A.L., The Graves theorem revisited. *J. of Convex Analysis,* **3**, no. 1, 45-53, (1996).

[29] Dontchev, A. L., Lewis, A. S., and Rockafellar, R. T. The radius of metric regularity, Trans. Amer. Math. Soc. **355**, 2, 493-517, (2003).

[30] Dontchev A. L., Quincampoix, M. Zlateva N., Aubin criterion for metric regularity, *J. Convex Analysis,* **13**(2), 281-297, (2006).

[31] Dontchev A.L., Rockafellar R.T., Robinson's implicit function theorem and its extensions, *Math. Programming* **117**, 129-147, (2009).

[32] Durea, M., Nguyen, H.T., Strugariu, R., *Metric regularity of epigraphical multivalued mappings and applications to vector optimization* To be published.

[33] Durea, M., Strugariu, R., *Openness stability and implicit multifunction theorems : Applications to variational systems*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, In Press, Corrected Proof, Available online 23 February 2011.

[34] Durea, M., Strugariu, R., *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, **60**, (2011), 575–591.

[35] Durea, M., Strugariu, R., Optimality conditions in terms of Bouligand derivatives for Pareto efficiency in set-valued optimization, *Optim. Lett.*, **5**, 141–151, (2010).

[36] Ekeland I., On the variational principle, *J. Math. Anal. and Appl.,* **47**, 324–353, (1974).

[37] Fabian, M. J., Henrion, J., Kruger, A. Y., and Outrata, J. V., Error Bounds : Necessary and Sufficient Conditions, *Set-Valued Anal.,* **18**, no. 2, 121-149, (2010).

[38] Fabian, M. J., Henrion, J., Kruger, A. Y., and Outrata, J. V., About error bounds in metric spaces, *Proceedings Int. Conf. on Operations Research,* (2011)

[39] Graves L. M., Some mapping theorems, *Duke Math. J.,* **17**, 111-114, (1950).

[40] Halkin, H., Neustadt, L.W., General necessary conditions for optimization problems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **56**, 1066–1071, (1966).

[41] Hantoute, A., Contribution à la sensibilité et à la stabilité en optimisation et en théorie métrique des points critiques. *Thèse de doctorat, Université de Toulouse,* 2003.

[42] R. Henrion, A. Jourani, Subdifferential conditions for calmness of convex constraints, *SIAM Journal on Optimization* **13**, 520-534, (2002).

[43] R. Henrion, A. Jourani, J. Outrata, On calmness of a class of multifunctions, *SIAM Journal on Optimization* **13**, 603-618, (2002).

[44] Hoffman, A. J., *On approximate solutions of systems of linear inequalities,* J. Research Nat. Bur. Standards **49** (1952), 263-265.

[45] Ioffe A., Regular points of Lipschitz functions, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **251**, 61–69, (1979).

[46] Ioffe A. D., Metric regularity and subdifferential calculus (in Russian), *Uspeckhi Math. Nauk,* **55**, no. 3, 103-162 (2000) ; English translation in Russian Math. Surveys, **55**, no. 3, 103-162, (2000).

[47] Ioffe A. D., On perturbation stability of metric regularity, *Set-Valued Anal.,***9**, 101-109, (2001).

[48] Ioffe, A. D., Towards metric theory of metric regularity, *Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Pointe à Pitre, 1999),* 165–176, Physica, Heidelberg, (2001).

[49] Ioffe A. D., On regularity estimates for mappings between embedded manifolds, *Control and Cybernetics,* **36**, 3, 659-668, (2007).

[50] Ioffe, A. D., On regularity concepts in variational analysis, *Fixed Point Th. Appl.* **8** 339-363, (2010).

[51] Jourani, A., *Régularité métrique est ses applications en programmation mathématique, Thèse.* Université de Pau, 1989.

[52] Jourani, A., Open mapping theorem and inversion theorem for $\gamma-$paraconvex multivalued mappings and applications, *Studia Mathematica*, **117**, 123-13, (1996).

[53] Jourani A., Hoffman's error bound, local controlability and sensivity analysis, *SIAM J. Control Optim.,* **38**, 947–970, (2000).

[54] Jourani, A., On metric regularity of multifunctions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **44**, 1-9, (1991).

[55] Jourani, A., Thibault, L., Approximate subdifferential and metric regularity : Finite dimensional case, Mathematical Programming, 47 (1990), 203–218.

[56] Jourani, A., Thibault, L., Approximations and metric regularity in mathematical programming in Banach spaces, Math.Oper.Res., 18(1993), 390-401.

[57] Jourani, A., Thibault, Chain rules for coderivatives of multivalued mappings in Banach spaces, Proceeding of the American Mathematical Society, 126 (1998), 1479-1485.

[58] Jourani, A., Thibault, L., Metric regularity for strongly compactly Lipschitzian mappings, *Nonlinear Anal. TMA*, **24**, 229–240, (1995).

[59] Jourani, A., Thibault, L., Verifiable conditions for openness and metric regularity of multivalued mappings in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**, 1255–1268, (1995).

[60] Jourani A., Thibault L., Metric inequality and subdifferential calculus in Banach spaces, *Set-Valued Anal.,* **3**, 87–100, (1995).

[61] Jourani A., Thibault L., Coderivatives of multivalued mappings, locally compact cones and metric regularity. *Nonlinear Anal.* **35**, no. 7, 925–945(1994).

[62] Krantz,S. G., Parks,H. R., *The Implicit Function Theorem. History, Theory and Applications.* Birkäuser Boston, Inc., Boston, 2002.

[63] Kruger, A.Y., A covering theorem for set-valued mappings. *Optimization* **19**, 6, 763-780, (1988).

[64] Ledyaev Y., Zhu Q., Implicit multifunction theorems, *Set-Valued Anal.* **7** , 209-238, (1999).

[65] Lewis, A., Pang, J.S., Error Bounds for Convex Inequality Systems. In Generalized Convexity, Generalized Monotonicity : Recent Results (Luminy, 1996), vol. 27 of Nonconvex Optim. Appl. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 75Ð110, (1998).

[66] Lyusternik, L. A. On conditional extrema of functionals, *Math. Sbornik* **41**, 390-401, (1934). In Russian.

[67] Mangasarian, O. L., and Fromovitz, S., The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, *J. Math. Anal. Appl,* **17**, 37Ð47, (1967).

[68] Mordukhovich, B.S., Shao, Y., Differential characterizations of covering, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions between Banach spaces, *Nonlinear Anal. TMA*, **25**, 1401–1424, (1995).

[69] Mordukhovich, B.S., Shao, Y., Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**, 1235–1280, (1996).

[70] Mordukhovich, B.S., Shao, Y., Stability of set-valued mappings in infinite dimensions : point criteria and applications, *SIAM J. Control Optim.*, **35**, 285–314, (1997).

[71] Mordukhovich B.S, *Variational Analysis and Generalized Differentiation. I. Basic theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 330. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[72] Mordukhovich B.S, *Variational Analysis and Generalized Differentiation. II. Applications.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 331. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[73] Mordukhovich B.S, Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of extremal problems, Soviet Math. Dokl. **22**, 526-530, (1980).

[74] Mordukhovich B. S., Wang B., Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces, *Internat. J. Math. Sci.,* **50**, 2650-2683, (2004).

[75] Ng, K.F., Zheng, X.Y., Error bound for lower semicontinuous functions in normed spaces, *SIAM J. Optim.*, **12**, 1–17, (2001).

[76] Ngai, H.V., Nguyen, H.T, Théra, M., Implicit multifunction theorems in complete metric spaces, *Math. Program. Series B*, to appear.

[77] Ngai, H.V., Théra M., Metric inequality, subdifferential calculus and applications, *Set-Valued Anal.* **9**, 187-216, (2001).

[78] Ngai, H.V., Théra M., Error bounds and implicit multifunctions in smooth Banach spaces and applications to optimization, *Set-Valued Anal.,* **12**, no. 1-2, 195–223, (2004).

[79] Ngai, H.V., Théra M., Error bounds for systems of lower semicontinuous functions in Asplund spaces, *Math. Program.,* **116** no. 1-2, 397–427, (2009)

[80] Ngai H. V., Théra M., Error bounds in metric spaces and application to the perturbation stability of metric regularity, *SIAM J. Optim.* , **19**, no. 1, 1–20, (2008).

[81] Outrata, J., Kocvara, M., Zowe, J, Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints, vol. 28 of Nonconvex Optimization and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[82] Pang, J.S., Error bounds in mathematical programming, *Mathematical Programming,* **79**, N¡ 1-3, 299-332, (1997).

[83] Penot J.-P., Regularity, openess and Lipschitzian behavior of multifunctions, *Nonlinear Anal.,* **13**, no. 6, 629-643, (1989).

[84] Penot, J.-P., Compactness properties, openness criteria and coderivatives, *Set-Valued Anal.*, **6**, 363–380, (1998).

[85] Robinson, S.M., *Theory for systems of inequalities, I. Linear systems*, SIAM J. Numer. Anal., **12**, (1975), 754Ð769.

[86] Robinson, S.M., *Stability theory for systems of inequalities, II. Differentiable nonlinear systems*, SIAM J. Numer. Anal., **13**, (1976), 497Ð513.

[87] Robinson, S. M. Strongly regular generalized equations, Math. Oper. Res. **5**, 1, 43-62, (1980).

[88] Robinson, S.M., Extension of Newton's method to nonlinear functions with values in a cone, *Numer. Math.*, **19**, 341–347, (1972).

[89] Robinson S.M., An inverse function theorem for a class of multivalued functions, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **41**, 211-218, (1973).

[90] Rosenbloom, P.C., *Quelques classes de problèmes extrémaux*, Bulletin de la S. M. F., **79**, (1951), 1-58.

[91] Rockafellar, R. T., Wets R. J.-B., *Variational Analysis,* Springer, Berlin 1997.

[92] Rockafellar, R. T., Lipschitzian properties of multifunctions, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications,* **9**, 867-885, (1985).

[93] Rockafellar, R. T., Monotone Processes of Convex and Concave Type, Memoire **77**, Amer. Math. Soc., 1967.

[94] Rolewicz, S., On paraconvex multifunction, *Methods of Oper. Res,* **31**, 540 - 546, (1979).

[95] Urcescu, C., Multifunctions with closed graphs, *Czechoslovak Math. J.* **25**, 438-441, (1975).

[96] Vinter, R *Optimal Control*, Birkäuser, 2000.

[97] Shapiro, A., Dentcheva, D. Ruszczysńki, A., *Lectures on stochastic programming : modeling and theory,* MPS-SIAM series on optimization, 2009.

[98] Yen N.D., Yao J.-C., Point-based sufficient condition for metric regularity of implicit multifunctions, *Nonlinear Analysis TMA,* **70**, 2806-2815, (2009).

[99] Zălinescu, C., *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore, 2002.

[100] Zheng X. Y., Ng K. F., Metric regularity and constraint qualifications for convex inequalities on Banach spaces, *SIAM J. Optim.* **14**, no. 3, 757-772, (2003).

[101] Zheng, X.Y., Ng, K.F., The Fermat rule for multifunctions on Banach spaces, *Math. Program. Ser. A*, **104**, 69–90, (2005).

[102] Wu Z., Ye J., On error bounds for lower semicontinuous functions, *Math. Program.,* **92**, 301–314, (2002).

Exemplaires des publications

Résumé

Dans cette thèse, nous utilisons la théorie des bornes d'erreur afin d'étudier les propriétés variationnelles des multiapplications : la régularité métrique, la pseudo-Lipschitzianité, l'ouverture à taux linéaire. Nous donnons également des théorèmes de multiapplications implicites dans les espaces des métriques complets ainsi que dans les espaces de Banach. Nous utilisons les espaces d'Apslund lorsque les résultats sont donnés sous forme duale en termes de co-dérivées. Nous étudions aussi la stabilité de la régularité métrique des multiapplications implicites pour de "petites" perturbations, c'est-à-dire lorsque la multiapplication perturbée est assez proche de l'application multivoque d'origine. La régularité métrique de la somme des deux applications multivoques dans les espaces de Banach ainsi que dans les espaces d'Asplund est aussi étudiée, nos résultats généralisant des résultats récents obtenus par exemple par Durea et Strugariu. Cette étude s'inscrit dans la continuité du théorème classique de Luysternik-Graves, qui lui-même généralise le célèbre théorème de l'application ouverte de Banach. Nous utilisons nos résultats pour établir la régularité métrique d'un type particulier de multiapplications : les multiapplications épigraphiques qui jouent un rôle important en optimisation multicritères.

Mots clés : Analyse non-lisse, théorie des bornes d'erreur, régularité métrique, multiapplication implicite.

Abstract

In this thesis we use the theory of error bounds to study variational properties of set-valued mappings : metric regularity, pseudo-Lipschitzianity, openness at linear rate. We also establish multifunctions implicit theorems in metric spaces and in Banach spaces, as well as, some dual characterizations in Asplund spaces in terms of coderivatives. We also study stability properties of metric regularity of implicit multifunctions whenever the perturbed multifunction is "close" enough to the given multifunction. Metric regularity of the sum in Banach and in Asplund spaces is also studied. Our results extend previous one by Durea & Strugariu, for instance.

Our study is a modern extension of the classical Lusternik & Graves Theorem, which is himself an extension of the celebrated Banach Open mapping Theorem.

We use our results in order to establish metric regularity of a special epigraphical multifunction which, thanks to the work by Durea & Strugariu, plays an prominent role, in vector optimization.

Key words : Nonsmooth analysis, error bounds, metric regularity, implicit multifunction.