

UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGENIERIE EN MATERIAUX
MECANIQUE ENERGETIQUE ET AERONOTIQUE

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes - Axe Génie Civil et Durabilité

Thèse N° 16-2012

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Génie Civil

Présentée et soutenue par

Mamadou MEITE

Date : 15/06/2012

Caractérisation des paramètres de fissuration par un couplage corrélation d'images et éléments finis

Thèse dirigée par : **Frédéric DUBOIS**

Codirigée par : **Joseph ABSI** et **Octavian POP**

Jury :

M. Stéphane MOREL	Maître de Conférences HDR, Bordeaux	Rapporteur
M. Joseph GRIL	Directeur de Recherche CNRS, Montpellier	Rapporteur
M. Valéry VALLE	Professeur des Universités, Poitiers	Examineur
Mlle. Myriam CHAPLAIN	Maître de Conférences, Bordeaux	Examineur
M. Rostand MOUTOU PITTI	Maître de Conférences, Clermont Ferrand	Examineur
M. Octavian POP	Maître de Conférences, Egletons	Examineur
M. Joseph ABSI	Professeur des Universités, Limoges	Examineur
M. Frédéric DUBOIS	Professeur des Universités, Egletons	Examineur

RESUME

Le travail de thèse consiste à développer un modèle permettant d'analyser les problèmes de fissuration dans les matériaux en vue de prévoir leur intégrité et durabilité structurale. Dans ce modèle, deux techniques sont couplées pour exploiter l'observation expérimentale et la modélisation numérique par éléments finis afin de déterminer l'état mécanique et les propriétés de rupture en pointe de fissure.

Une première partie de ce travail est consacrée à l'analyse expérimentale utilisant la technique de corrélation d'images numériques pour calculer, dans le voisinage du front de la fissure, les champs cinématiques de déformations. Le bruit expérimental inhérent aux données expérimentales et l'incertitude de localisation du front de fissure nécessite de développer un traitement d'optimisation des champs de déplacement expérimentaux. Cette optimisation consiste à trouver une bonne corrélation entre les données expérimentales et la solution analytique asymptotique de Williams en utilisant une procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires. La conséquence de cette corrélation a permis de déterminer à la fois la position précise du front de la fissure et le champ cinématique de déplacement des lèvres de la fissure le plus proche de la réalité. L'analyse cinématique permet alors de caractériser la cinétique de fissuration via les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure.

Une seconde partie est dédiée au développement d'un algorithme numérique utilisé dans la caractérisation mécanique et énergétique sous le code de calculs par éléments finis Castem. Dans le cas d'une fissure stationnaire, le modèle numérique est sollicité par une force imposée, contrairement au travail expérimental où le chargement se fait en déplacement imposé.

Cette approche que nous avons qualifiée de statique montre que l'amplitude de la singularité, caractérisée par le facteur d'intensité des contraintes déterminé à partir du formalisme des invariants intégraux, est indépendante de la loi de comportement matérielle et est proportionnelle à l'amplitude en effort du chargement.

Enfin, une dernière étape permet de reconstruire la totalité des propriétés de fissuration, tant cinématique, statique qu'énergétique. Cette reconstruction passe par le rapprochement des propriétés cinématiques fournies par l'analyse d'images et les propriétés en contrainte calculées par l'approche éléments finis. Ainsi, l'ensemble du protocole fait abstraction de la loi de comportement. De plus, le couplage cinématique et statique permet de déduire le taux de restitution d'énergie. Ce couplage permet au final de caractériser les propriétés élastiques locales qui peuvent, à termes, être employées pour alimenter une loi de propagation de fissure ou pour remonter aux propriétés globales d'élasticité du matériau employé. L'ensemble du travail est accompagné d'applications expérimentales et numériques pour des matériaux isotropes (PVC) et orthotrope (Douglas), les échantillons étant sollicités en modes d'ouverture (I) et mixte (I+II).

Mots clefs : PVC, Bois, Fissuration, Corrélation d'images numériques, Eléments finis

ABSTRACT

The thesis work consists in developing a model allowing analyzing crack problems in materials in order to predict their integrity and structural durability. In this model, two techniques are coupled to exploit the experimental observation and numerical modeling by finite elements in order to determine the mechanical state and the fracture properties into crack tip vicinity.

A first part is dedicated to the experimental analysis using Digital Images Correlation to calculate, in the crack tip vicinity, the kinematics fields of deformations. The experimental noise inherent to the experimental data and the uncertainty of the crack tip localization require developing a procedure for measurements fields' optimization. This optimization consists in finding a good correlation between the experimental data and the Williams' asymptotic analytical solution based on the development of mathematical series of weighting coefficients, by using Newton-Raphson iterative procedure based on nonlinear least squares. The consequence of this correlation allowed determining at the same time, the crack tip position and kinematics field of crack lips displacement nearest to reality. The kinematic analysis then allows characterizing the kinetics of cracking via the crack opening intensity factors.

One second part deals with the development, into the computer finite elements code Castem, of a specific numerical algorithm to the mechanical and energy characterization. In the case of a stationary crack, although the experimental tests are monitoring under machine displacement (correlated with the crack opening), the numerical model is defined by imposing a load given by synchronization between the testing machine and the images acquisition. This approach, that we described as statics (piloting in force or stress), shows that the amplitude of the singularity, characterized by the stress intensity factor which is determined from the integral invariants formalism, is not only independent of the material behavior law, but also proportional to the loading amplitude.

Lastly, a last stage allows rebuilding the totality of the cracking properties, as well as kinematic, static and energetic. This rebuilding passes by the bringing together of kinematics properties provided by images analysis and stress properties calculated by finite elements approach. Thus, the whole of the protocol disregards law of behavior. Moreover, the kinematic and static coupling allows deducing the energy release rate. This coupling allows finally characterizing the local elastic properties which can, at terms, being employed to feed a crack propagation law or to go back to the global elasticity properties of the employed material. The whole of work is accompanied by experimental and numerical applications for isotropic (PVC) and orthotropic (Douglas) materials, the samples being subjected to tension in opening (I) and mixed (I+II) modes loading.

Key Words: Identification, PVC, Wood, Fracture Mechanics, Digital images correlation and Finite elements

Avant propos

80% des informations intéressantes sont disponibles gratuitement, il faut simplement" aller les chercher". Un bon renseignement peut faire gagner la bataille !

« En cette ère de la globalisation, de la mondialisation de l'économie, de l'intensification de la course aux marchés, de la concurrence féroce et agressive, la compétitivité apparaît comme étant la clé de la réussite voire même de la survie de l'entreprise.

Mais qui dit compétitivité, dit qualité et coût de production. Ainsi, le bois, matière ligneuse et compacte, est le matériau sain et esthétique par excellence. Produit de la nature, il ne nécessite pour sa mise en œuvre que fort peu d'énergie et offre une richesse d'aspect inégalée ».

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé dans le Laboratoire du Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogène (**GEMH**) de l'Université de Limoges. Je tiens donc à remercier Monsieur **Christophe PETIT**, Professeur des Universités, Limoges et en même temps directeur de recherche du Laboratoire **GEMH**, axe **Génie Civil et Durabilité** de m'avoir accueilli dans son laboratoire durant ces trois années de thèses. Je lui suis entièrement reconnaissant pour ces conseils et ses idées apportés à la réussite de ce travail.

Ce travail ne serait pas bien finalisé sans la collaboration de mon directeur de thèse Monsieur **Frédéric DUBOIS**, Professeur des Universités, Limoges. Je lui adresse toute ma profonde gratitude et mes vifs remerciements pour sa bienveillance et l'attention qu'il m'a accordée, l'assistance qu'il m'a portée et aussi pour sa disponibilité, les connaissances et la documentation dont il a su me faire profiter. Toutes les orientations productives qu'il a su donner à ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Joseph ABSI**, Professeur des Universités, Limoges. Je lui suis sincèrement reconnaissant pour ses conseils, son soutien indéfectible, pour sa disponibilité et l'attention toute particulière qu'il a témoigné vis-à-vis de la correction et l'examen de ce manuscrit malgré la distance et son immense occupation.

Je remercie très sincèrement Monsieur **Octavian POP**, Maître de conférences, Egletons, pour sa grande générosité intellectuelle et son soutien indéfectible, ses conseils et surtout pour sa grande contribution à la réalisation du protocole expérimental.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à :

- Monsieur **Joseph GRIL**, Directeur de recherches CNRS à l'Université de Montpellier 2, pour avoir accepté de rapporter ce document et pour son appui sans lequel ce travail n'aurait pu être effectué à l'Université de Limoges.
- Monsieur **Stéphane Morel**, Maître de conférences HDR, Bordeaux pour avoir accepté de rapporter mon travail de thèse. Qu'il trouve ici ma profonde gratitude.
- Monsieur **Valéry VALLE**, Professeur des Universités, Poitiers pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ce travail. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.
- Mademoiselle **Myriam CHAPLAIN**, Maître de conférences, Bordeaux qui a bien voulu porter un intérêt à ce travail en acceptant de l'examiner. Qu'elle soit vivement remerciée.

➤ *Monsieur **Rostand MOUTOU PITTI**, Maitre de conférences, Clermont Ferrand pour avoir manifesté à l'égard de ce travail en acceptant de l'examiner. Qu'il trouve ici mes sincères amitiés.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous les membres de jury, pour l'honneur qu'ils me font d'accepter l'examen de ce manuscrit.

Je remercie très sincèrement tout le personnel administratif de L'IUT d'Egletons et de l'école doctorale pour leur aide administrative et d'avoir facilité mes déplacements dans les séminaires, formations et congrès.

Toute ma profonde gratitude et vifs remerciements à la Région du Limousin pour avoir octroyé le financement de ma thèse.

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les ingénieurs et techniciens de l'IUT d'Egletons pour avoir accepté de mettre à ma disposition tous les dispositifs expérimentaux et leur aide à la confection et réalisation des éprouvettes destinées aux essais expérimentaux. Je pense plus particulièrement à l'Ingénieur **Hamidou SEBBAH** et au Technicien **Janie CACAULT**. Qu'ils soient vivement remerciés.*

Mes remerciements vont enfin à tous ceux ou celles qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail, mes amis et collègues ainsi que tous les enseignants chercheurs de l'équipe Génie Civil et Durabilité sur le site de l'IUT d'Egletons et du Laboratoire GEMH.

*Je remercie plus profondément ma très chère mère **Mariam MEITE** et toute ma famille pour leur soutien moral indéfectible et leur nombreux encouragements qu'elles n'ont cessé de porter à ma connaissance.*

*A mon défunt père Monsieur **MEITE Médiamourou**, pour son soutien financier, moral et ses encouragements qui ont contribué à mener à bien mes études. Je lui suis entièrement reconnaissant et tout le mérite de ma réussite lui revient également. Que son « âme » repose à jamais en paix.*

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE.....	1
I. ETUDE PRELIMINAIRES.....	5
II. ALGORITHME DE CARACTERISATION EN MECANIQUE DE LA RUPTURE : APPROCHE PAR CORRELATION D'IMAGES ET ELEMENTS FINIS.....	63
III. APPLICATION DU COUPLAGE EXPERIMENTAL-NUMERIQUE AUX MILIEUX ISOTROPES ET ORTHOTROPE FISSURES.....	107
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	151
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	153
ANNEXES	

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE 1 : ETUDES PRELIMINAIRES.....5

CHAPITRE 2 :

ALGORITHME DE CARACTERISATION EN MECANIQUE DE LA RUPTURE :
APPROCHE PAR CORRELATION D'IMAGES ET ELEMENTS FINIS.....63

CHAPITRE 3 :

APPLICATION DU COUPLAGE EXPERIMENTAL-NUMERIQUE AUX MILIEUX
ISOTROPES ET ORTHOTROPE FISSURES.....107

Tableau 3.1a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ 114

Tableau 3.1b : Termes de mouvements de corps rigide.....115

Tableau 3.1c : Position et orientation de la pointe de fissure.....115

Tableau 3.2 : Etat mécanique et propriétés d'élasticité du PVC pour une force de 390N.....117

Tableau 3.3 : Dimensions de la zone d'intérêt vs taux de mixité.....121

Tableau 3.4a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 0^{\circ}$).....122

Tableau 3.4b : Mouvements de corps solide, ($\beta = 0^{\circ}$).....123

Tableau 3.4c : Position et orientation de la pointe de fissure, ($\beta = 0^{\circ}$).....123

Tableau 3.5a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 15^{\circ}$)123

Tableau 3.5b : Termes de mouvements de corps solide, ($\beta = 15^{\circ}$).....123

Tableau 3.5c : Localisation exacte de la pointe de fissure, ($\beta = 15^{\circ}$).....123

Tableau 3.6a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 45^{\circ}$).....124

Tableau 3.6b : Termes de mouvements de corps solide, ($\beta = 45^{\circ}$).....124

Tableau 3.6c : Position et orientation de la pointe de fissure, ($\beta = 45^{\circ}$).....124

Tableau 3.7a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 75^{\circ}$)124

Tableau 3.7b : Termes de mouvements de corps rigide, ($\beta = 75^\circ$).....	124
Tableau 3.7c : Localisation exacte de la pointe de fissure, ($\beta = 75^\circ$).....	125
Tableau 3.8 : Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure pour différents taux de mixité...	129
Tableau 3.9 : Facteurs d'intensité de contraintes pour chaque taux de mixité.....	130
Tableau 3.10 : Etat mécanique et énergétique, part de mode I.....	130
Tableau 3.11 : Etat mécanique et énergétique, part de mode II.....	130
Tableau 3.12 : Propriétés d'élasticité.....	131
Tableau 3.13 . Dimensions géométrique de la zone d'étude.....	133
Tableau 3.14a : Coefficients A_α^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) donné en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$	134
Tableau 3.14b : Termes de mouvements de corps rigide.....	134
Tableau 3.14c : Position et orientation de la pointe de fissure.....	135
Tableau 3.14 : Propriétés d'élasticité du Douglas.....	137
Tableau 3.15 : Dimensions de la zone d'intérêt.....	140
Tableau 3.16a : Coefficients d'optimisation A_α^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 15^\circ$)....	142
Tableau 3.16b : Mouvements de corps solide ($\beta = 15^\circ$).....	142
Tableau 3.16c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 15^\circ$).....	142
Tableau 3.17a : Coefficients d'optimisation A_α^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 45^\circ$)...	142
Tableau 3.17b : Mouvements de corps solide ($\beta = 45^\circ$).....	143
Tableau 3.17c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 45^\circ$).....	143
Tableau 3.18a : Coefficients d'optimisation A_α^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 75^\circ$)...	143
Tableau 3.18b : Mouvements de corps solide ($\beta = 75^\circ$).....	143
Tableau 3.18c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 75^\circ$).....	143
Tableau 3.19 : Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure pour différents taux de mixité..	147

Tableaux 3.20 : Facteurs d'intensité de contraintes pour différents taux de mixité.....148

Tableau 3.21 : Taux de restitution d'énergie pour chaque part de mode de rupture.....148

Tableau 3.22 : Complaisances élastiques réduites.....149

Tableau 3.23 : Propriétés d'élasticité des échantillons de Douglas (MC=10%).....149

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE 1 : ETUDES PRELIMINAIRES.....	5
Figure 1.1 : Fissure dans un milieu continu.....	7
Figure 1.2 : Différents modes de rupture.....	8
Figure 1.3 : Définition du repère local au voisinage du front de la fissure.....	9
Figure 1.4 : Ouverture des lèvres de la fissure.....	12
Figure 1.5 : Milieu élastique fissuré sous chargement statique.....	17
Figure 1.6 : Milieu élastique fissuré soumis aux chargements appliqués et aux déplacements imposés.....	20
Figure 1.7 : Différentes descriptions spatiales.....	21
Figure 1.8 : Domaine et contour d'intégration.....	24
Figure 1.9 : Contour fermé Γ et chemins Γ_1 et Γ_2 entre deux points O_1 et O_2	27
Figure 1.10 : Γ et Γ' délimités par la couronne S entourant la pointe de fissure.....	29
Figure 1.11 : Chargements sur les lèvres de la fissure.....	30
Figure 1.12 : Corps solide fissuré d'une longueur de fissure initiale a dans un référentiel.....	31
Figure 1.13 : Intégration surfacique.....	34
Figure 1.14 : Enrichissements ajoutés à l'approximation éléments finis.....	47
Figure 1.15 : Image de référence et image déformée.....	50
Figure 1.16 : Pattern initial (ABCD centré m) et pattern final ($A^*B^*C^*D^*$ centré m^*).....	51
Figure 1.17 : Calculs du champ de déplacement sur un pattern.....	52
Figure 1.18 : Calcul des déplacements verticaux par corrélation d'images.....	53
Figure 1.19 : Discontinuité entre deux points M et N	55
Figure 1.20 : Différentes positions d'une discontinuité dans un pattern quelconque.....	56
Figure 1.21 : Evolution du critère de discontinuité sur l'image de référence.....	56
Figure 1.22 : Evolution du critère de discontinuité après seuillage.....	57
Figure 1.23 : Détection de la position du front de fissure par jauges de déformation.....	59
Figure 1.24 : Localisation des coordonnées du front de fissure par l'outil <i>Sobel edge-finding</i>	59
CHAPITRE 2 :	
ALGORITHME DE CARACTERISATION EN MECANIQUE DE LA RUPTURE : APPROCHE PAR CORRELATION D'IMAGES ET ELEMENTS FINIS.....	63
Figure 2.1 : Eprouvette CT.....	66
Figure 2.2 : Eprouvette DCB.....	67
Figure 2.3 : Eprouvette SENB.....	67
Figure 2.4 : Eprouvette à entaille centrale.....	68
Figure 2.5 : Géométrie d'éprouvette DEC.....	68
Figure 2.6 : Eprouvette Cantilever à inertie variable.....	69
Figure 2.7 : Géométrie d'éprouvette DCB à inertie variable modifiée.....	69
Figure 2.8 : Géométrie d'éprouvette mTDCB.....	70
Figure 2.9 : Géométrie d'éprouvette SENT.....	70
Figure 2.10 : Géométrie d'éprouvette WS.....	71

Figure 2.11 : Eprouvette CTS.....	71
Figure 2.12 : Eprouvette 2MGC.....	72
Figure 2.13 : Eprouvette Wedge Splitting pour le mode d'ouverture.....	73
Figure 2.14 : Eprouvette SEN et système Arcan en mode mixte.....	73
Figure 2.15 : Eprouvette en Douglas pour une sollicitation en mode d'ouverture.....	74
Figure 2.16 : Mode d'ouverture et symétrie des déplacements.....	75
Figure 2.17 : Dispositif expérimental et système de chargement en mode mixte.....	76
Figure 2.18 : Orientation de la caméra CCD en mode mixte (exemple pour 45°).....	77
Figure 2.19 : Préparation de l'éprouvette en PVC (exemple du mode I).....	78
Figure 2.20 : Préparation de l'éprouvette en Douglas (exemple du mode mixte).....	78
Figure 2.21 : Définition de la zone d'étude en corrélation d'images numériques.....	79
Figure 2.22 : Génération d'un maillage EF à partir des données expérimentales.....	80
Figure 2.23 : Déformée éléments finis de la zone d'intérêt (mode I).....	80
Figure 2.24 : Déplacement de corps rigide et pointe de fissure inconnue.....	82
Figure 2.25 : Système de coordonnées autour de la pointe de fissure.....	83
Figure 2.26 : Modélisation numérique de l'essai de fissuration en mode d'ouverture.....	94
Figure 2.27 : Modélisation numérique de l'essai de fissuration en mode mixte.....	95
Figure 2.28 : Algorithme d'évaluation pour $G\theta$ et $M\theta$	97
Figure 2.29 : $\tilde{G}\theta$ et $\tilde{K}_\alpha^{(\sigma)}$ fonction de \tilde{C}_I	97
Figure 2.30 : $\tilde{K}_\alpha^{(\sigma)}$ en fonction de la complaisance réduite et des rapports d'orthotropie.....	98
Figure 2.31 : Evolution de $\tilde{M}\theta_I$ et $\tilde{M}\theta_{II}$ en fonction de la complaisance réduite \tilde{C}_I et \tilde{C}_{II}	99
Figure 2.32 : ${}^u\tilde{K}_I^{(\sigma)}$ et ${}^u\tilde{K}_{II}^{(\sigma)}$ en fonction des complaisances réduites \tilde{C}_I et \tilde{C}_{II}	100
Figure 2.33 : Schéma du couplage CIN-MEF.....	101
Figure 2.34 : Fermeture virtuelle de fissure.....	103
Figure 2.35 : Energie nécessaire pour la fermeture de la fissure.....	103
Figure 2.36 : Algorithme de caractérisation.....	105

CHAPITRE 3 :

APPLICATION DU COUPLAGE EXPERIMENTAL-NUMERIQUE AUX MILIEUX ISOTROPES ET ORTHOTROPE FISSURES.....107

Figure 3.1 : Géométrie de l'éprouvette (dimensions en mm).....	109
Figure 3.2 : Synchronisation capteurs de force et LVDT avec caméra CCD.....	110
Figure 3.3 : Sélection de la zone d'étude en corrélation d'images numériques.....	111
Figure 3.4 : Cartographies de déplacements (en mm).....	112
Figure 3.5 : Maillage EF et sa déformé à $F = 390N$	112
Figure 3.6 : Evolution de ξ en fonction de N	114
Figure 3.7 : Cartographies des champs de déplacement : (a) optimisés et (b) bruts.....	115
Figure 3.8 : Déformée expérimentale et par éléments finis.....	118
Figure 3.9 : Evolution des propriétés d'élasticités et de rupture en fonction du chargement...118	118
Figure 3.10 : Dimensions géométriques de l'éprouvette et configurations de chargement.....	119
Figure 3.11 : Courbes caractéristiques force-déplacement.....	120
Figure 3.12 : Dimensions de la zone d'intérêt.....	121
Figure 3.13 : Evolution de la moyenne des écarts en fonction de N	122
Figure 3.14 : Comparaison entre les champs de déplacement brut et optimisé.....	125

Figure 3.15: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux.....	126
Figure 3.16: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux.....	127
Figure 3.17: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux.....	128
Figure 3.18: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux.....	129
Figure 3.19 : Comparaison entre les champs optimisés et les champs numériques.....	131
Figure 3.20: Dimensions géométriques de l'éprouvette (en mm).....	132
Figure 3.21: Courbe force-déplacement.....	133
Figure 3.22 : Evolution de la moyenne de l'écart et de champs optimisés en fonction de N....	134
Figure 3.23 : Les cartographies des champs de déplacements optimisés et bruts.....	135
Figure 3.24 : Comparaison entre les champs optimisés et les champs numériques.....	137
Figure 3.25 : Evolution du taux de restitution d'énergie en fonction du niveau de chargement	138
Figure 3.26: Dimensions des éprouvettes.....	139
Figure 3.27 : Courbes force-déplacement.....	140
Figure 3.28 : Evolution de la moyenne des écarts en fonction du nombre de la série Williams	141
Figure 3.29 : Comparaison entre les champs de déplacement brut et optimisé.....	144
Figure 3.30 : Cartographies des champs de déplacement.....	145
Figure 3.31 : Cartographies des champs de déplacement.....	146
Figure 3.32 : Cartographies des champs de déplacement.....	147
Figure 3.33 : Comparaison entre champs expérimentaux optimisés et calculs éléments finis..	149

NOMENCLATURE

μ :	Module de cisaillement
E :	Module d'Young
ν :	Coefficient de Poisson
κ :	Constante de Kolossov
α :	Modes de rupture avec $\alpha \in \{I; II; III\}$
$K_{\alpha}^{(\sigma)}$:	Facteurs d'intensité de contrainte en modes I, II et III désigné par α
$K_{\alpha}^{(\varepsilon)}$:	Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure en modes I, II et III désigné par α
σ_{ij} :	Tenseur de contraintes, ($i=1,2,3$ et $j=1,2,3$)
ε_{ij} :	Tenseur de déformations, ($i=1,2,3$ et $j=1,2,3$)
u_i :	Vecteur déplacement, ($i=1,2,3$)
r :	Coordonnées polaire
θ :	Coordonnées polaire
M :	Point quelconque de l'espace
x_i :	Coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de l'espace, ($i=1,2,3$)
C_{α} :	Complaisances élastiques réduites en modes I, II et III désigné par α
ρ_j :	Fonction complexe avec $j \in \{1; 2\}$
s_j :	Racines de l'équation caractéristique polynômiale
a_{ij} :	Composantes du tenseur de complaisance élastique, ($i=1,2,3$ et $j=1,2,3$)
L :	Axe de coordonnée dans la direction des fibres longitudinales ($L = x$)
R :	Axe de coordonnée dans la direction des fibres radiales ($R = y$)
T :	Axe de coordonnée dans la direction des fibres transversales ($T = z$)
E_L :	Module d'élasticité orthotrope dans la direction des fibres longitudinales ($L = x$)
E_R :	Module d'élasticité orthotrope dans la direction des fibres radiales ($R = y$)
E_T :	Module d'élasticité orthotrope dans la direction des fibres transversales ($T = z$)
G_{LT} :	Module de cisaillement orthotrope associé au système d'axe (L, T)
ν_{LR}, ν_{RL} :	Coefficients de poissons orthotrope correspondant au système d'axe (L, R)
ν_{LT}, ν_{TL} :	Coefficient de poissons orthotrope correspondant au système d'axe (L, T)
ν_{RT}, ν_{TR} :	Coefficient de poissons orthotrope correspondant au système d'axe (R, T)
$\Re e$:	Partie réelle d'une fonction complexe
$K_{IC}^{(\sigma)}$:	Ténacité en mode d'ouverture
$K_{IIC}^{(\sigma)}$:	Ténacité en mode de cisaillement
λ :	Coefficient de couplage entre les modes de fissuration
dA :	Accroissement d'une fissure à la variation d'aire
γ :	Energie surfacique de rupture
dW_{fis} :	Variation d'énergie
E_i :	Energie interne

E_c :	Energie cinétique
P_{ext} :	Travail des efforts extérieurs
Q :	Taux de chaleur reçu
t :	Temps
$\frac{\partial}{\partial t}$:	Dérivée partielle par rapport au temps
W :	Energie de déformation élastique
σ :	Tenseur des contraintes de Cauchy
\mathbf{D} :	Tenseur taux de déformation
F_{ext} :	Efforts extérieurs surfaciques
u :	Champ de déplacement
G :	Taux de restitution d'énergie
G_I :	Taux de restitution d'énergie en mode I
G_{II} :	Taux de restitution d'énergie en mode II
J :	Intégrale invariante de Rice
T_i :	Force de traction surfacique
Ω :	Domaine délimitant la surface de la région occupée par le solide
R :	Région occupée par le solide
a :	Longueur de fissure initiale
δa :	Croissance infinitésimale de la fissure
n_j :	Vecteur normal unitaire sortant de la surface
$\delta \tilde{u}$:	Variation des déplacements selon une configuration arbitraire
x_i^0 :	Position initiale d'une particule
x_i^t :	Position actuelle d'une particule
L :	Lagrangien
b :	Largeur
ds :	Infinitésimal curviligne (1D)
dS :	Infinitésimal surfacique (2D)
dV :	Infinitésimal volumique (3D)
S :	Surface
∂S :	Contour fermé
δL :	Variation du Lagrangien
Γ, Γ' :	Contours ouverts
$AB, A'B'$:	Segments appartenant aux lèvres de la fissure
Q_j :	Intégrale
τ_{ij} :	Composantes du tenseur de rotation non symétrique et non nul de petite déformation
$\Pi(a)$:	Energie potentielle
Γ_u :	Contour d'intégration curviligne à déplacement imposé
Γ_t :	Contour d'intégration curviligne à effort de traction appliqué
X_1, X_2 :	Coordonnées cartésiennes en pointe de fissure
$G\theta$:	Intégrale de domaine surfacique
$\vec{\theta}$:	Champ de vecteur arbitraire et continuellement différentiable
V :	Couronne surfacique

M :	Intégrale invariante en mode mixte
λ, μ :	Coefficients de Lamé
u_i :	Champs de déplacements réels ($i=1,2,3$)
v_i :	Champs de déplacements auxiliaires ($i=1,2,3$)
σ_{ij}^u :	Champs des contraintes réels ($i=1,2,3$ et $j=1,2,3$)
σ_{ij}^v :	Champs des contraintes auxiliaires ($i=1,2,3$ et $j=1,2,3$)
$M\theta$:	Intégrale invariante de domaine surfacique en mode mixte
${}^u K_\alpha^{(\sigma)}$:	Facteurs d'intensité des contraintes réels
${}^v K_\alpha^{(\sigma)}$:	Facteurs d'intensité des contraintes auxiliaires
\bar{U} :	Approximation classique des champs de déplacements (méthode des éléments finis)
$\{N_i\}_{i \in \mathcal{N}}$:	Fonctions de formes
\mathcal{N} :	Ensemble des nœuds support des fonctions de formes $\{N_i\}_{i \in \mathcal{N}}$
$\bar{u}_i(t)$:	Vecteur des degrés de libertés nodaux au temps t
$\mathcal{N}_{cut}^e(t)$:	Ensemble des nœuds qui ont eu leur support entièrement coupé par la fissure
$\#$:	Fonctions sauts
$a_i^e(t)$:	Degrés de libertés nodaux correspondant aux fonctions sauts $\#$
$\mathcal{N}_{tip}^e(t)$:	Ensemble des nœuds qui contiennent le front de fissure dans leur support
B_j^e :	Fonctions singulières
$b_{ij}^e(t)$:	Degrés de libertés nodaux correspondant aux fonctions singulières B_j^e
$f(x_1, x_2)$:	Fonctions discrètes représentant le niveau de gris d'un pattern sur l'image initiale
$f^*(x_1^*, x_2^*)$:	Fonctions discrètes représentant le niveau de gris d'un pattern sur l'image déformée
(x_1, x_2) :	Coordonnées du centre d'un pattern de l'image initiale
(x_1^*, x_2^*) :	Coordonnées du centre d'un pattern de l'image déformée
(U_1, U_2) :	Champ de déplacement (mesures en Corrélation d'Images Numériques)
$\{\ell_j\}$:	Fonction de la base bilinéaire choisie
c :	Coefficient de corrélation croisé
S_p :	Surface du pattern de l'image de référence
A, B, C, D :	Carrés centrés représentant un pattern
m :	Centre de sommet du pattern
η :	Amplitude du bruit expérimental engendré par l'acquisition de l'image
(x_1^0, x_2^0) :	Coordonnées du front de fissure
K :	Critère de discontinuité
\bar{K} :	Moyenne arithmétique du critère de discontinuité K sur l'ensemble de l'image
β :	Coefficient modifiable par l'utilisateur dont la valeur est prise égale à 2 par défaut
K_T :	Valeur seuil du critère de discontinuité K
I^{int} :	Intégrale d'interaction
$f_i(\kappa, \theta)$:	Fonctions polaires des champs de déplacements
$g_i(\kappa, \theta)$:	Fonctions polaires des champs de déplacements

$l_i(\kappa, \theta)$:	Fonctions polaires des champs de déplacements
$z_i(\kappa, \theta)$:	Fonctions polaires des champs de déplacements
k :	$k^{\text{ième}}$ pattern dont le déplacement correspond aux composantes u_1^k et u_2^k
T_1 :	Mouvements de corps rigide de translations horizontales suivant les directions x_1
T_2 :	Mouvements de corps rigide de translations verticales suivant les directions x_2
R :	Mouvements de corps rigide de rotation dans le plan $(x_1 O x_2)$
(x_1^k, x_2^k) :	Coordonnées cartésiennes, propres au $k^{\text{ième}}$ pattern
ω_0 :	Angle de défaut d'alignement de la fissure par rapport à l'orientation x_1 de la fissure ou défaut de cadrage de la caméra CCD
A_I^i :	Coefficient de pondération de la série de Williams en mode I
A_{II}^i :	Coefficient de pondération de la série de Williams en mode II
N :	Nombre de coefficients de la série de William
\mathbf{a} :	Matrice des fonctions polaires
\mathbf{X} :	Vecteur des coefficients inconnus
h :	Fonction résidu correspondant à la différence entre les champs de déplacement asymptotiques et expérimentaux
ΔA_I^i :	Termes correctifs des coefficients A_I^i
ΔA_{II}^i :	Termes correctifs des coefficients A_{II}^i
ΔT_1 :	Termes correctifs des coefficients T_1
ΔT_2 :	Termes correctifs des coefficients T_2
ΔR :	Termes correctifs des coefficients R
Δx_1^0 :	Termes correctifs des coefficients x_1^0
Δx_2^0 :	Termes correctifs des coefficients x_2^0
$\Delta \omega_0$:	Termes correctifs des coefficients ω_0
$\Delta \kappa$:	Termes correctifs des coefficients κ
n :	Itération
Δ_n :	Termes correctifs
ξ :	Moyenne des écarts
\bar{F} :	Vecteur force
λ_L, λ_G :	Rapport d'orthotropie
'~' :	Symbole de typographie pour le paramètre définis par les propriétés d'élasticité arbitraires
df :	Force de cohésion
a_{ZI} :	Longueur de la fissure dans la zone d'intérêt
V_{ZI} :	Longueur verticale de la zone d'intérêt
H_{ZI} :	Longueur horizontale de la zone d'intérêt
β :	Taux de mixité

Introduction générale

La mécanique de la rupture est une science assez récente et qui a vu la plupart de ses développements théoriques au cours du 20^{ème} siècle [GRIFFITH 1921, 1924 ; IRWIN 1957]. Les mécanismes de fissuration sont caractérisés par de fortes singularités des champs mécaniques compliquant ainsi leur étude en employant des outils classiques de la mécanique. La conception des structures dans le domaine de la mécanique et du Génie Civil demande d'intégrer les risques de rupture par fissuration sous l'effet de chargements mécaniques statiques ou de fatigue et de prévenir les désordres en limitant, d'une part, les points singuliers et, d'autre part, en proposant des formes stabilisant d'éventuelles propagations de fissures préexistantes dans les matériaux comme le bois et les matériaux composites fortement hétérogènes.

La mécanique de la rupture a permis, jusqu'à aujourd'hui, de développer des outils analytiques comme, par exemple, les distributions asymptotiques des champs mécaniques au voisinage de la fissure, des caractérisations expérimentales à travers des paramètres intrinsèques comme la ténacité ou le taux de restitution d'énergie critique et des approches numériques basées sur des considérations locales et énergétiques. Dans le domaine de la mécanique, nous trouvons dans la littérature un grand nombre de travaux traitant de ce sujet avec des généralisations à des comportements élastiques anisotropes, élastoplastiques et viscoélastiques pour des sollicitations statiques, de fatigue ou en dynamique.

Un des points importants que nous pouvons mettre en exergue aujourd'hui est la démarche généralement employée dans la littérature; à savoir, le développement de modèles numériques afin de reproduire par simulations l'observation expérimentale. Or, nous constatons que la mécanique de la rupture est une discipline suffisamment complexe pour éviter de confronter systématiquement les approches expérimentales et numériques dans un but de caractériser l'aptitude des matériaux à fissurer ou d'optimiser leur forme en étape de conception. A l'heure où les outils de caractérisations se sont complétés par l'apport de l'analyse d'images, nous pensons que l'étape de calcul numérique ne doit plus systématiquement être comparée ou confrontée aux approches expérimentales. Bien au contraire, la richesse de ces nouveaux outils de développement et les puissances de calcul actuelles doivent être regardées non plus comme des approches concurrentes mais complémentaires. Ce constat, nous ne sommes pas les premiers à le faire. Cependant, ce mémoire de thèse a pour objectifs de développer notre approche présentant un couplage optimisé entre l'analyse d'images, étape expérimentale employant la corrélation d'images numériques et la modélisation par éléments finis. Ce premier travail thématique se limite à l'étude de fissures statiques sans propagation pour des matériaux isotropes et orthotropes. Nous avons limité notre étude à des éléments plans sous l'hypothèse des contraintes planes. Enfin, seule l'élasticité linéaire est abordée. Nous nous plaçons donc dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture fragile en négligeant ainsi

tout phénomène de plasticité, d'endommagement localisé ou de comportement non linéaire pouvant caractériser, par exemple, une process zone.

L'approche expérimentale repose sur l'utilisation de la corrélation d'images numériques. Cette technique expérimentale, récemment mise en œuvre par Sutton et al. [SUTTON 1983, 1986], a montré sa capacité à mesurer des champs cinématiques globaux (calculs des champs de déplacements et de déformations en tout point de la surface du corps d'épreuve), allant du nano aux observations macroscopiques. Ce nouveau moyen de mesure, de par sa grande richesse en informations qualitatives et quantitatives qu'il délivre, renouvelle de très nombreux aspects de la mécanique expérimentale et permet au chercheur de supplanter la limite des systèmes classiques de mesure locale standard que sont les extensomètres, les jauges de déformation et les capteurs de déplacement. Dans notre travail, la technique de corrélation d'images numériques va permettre la caractérisation des cinétiques d'ouverture et de cisaillement de fissure à travers la détermination des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure. Les mesures de champs au voisinage des lèvres de fissure étant entachées de bruits, le champ des déplacements expérimentaux sera remplacé par un champ théorique asymptotique dont les propriétés seront optimisées via un algorithme de minimisation d'erreur basé sur la méthode de Newton-Raphson. La procédure d'optimisation est également développée afin de déterminer avec précision les coordonnées exactes du front de fissure; les champs singuliers étant définis dans un repère dont l'origine est située à la pointe de fissure. Une dernière correction permet de prendre en compte l'incertitude d'alignement de la fissure ainsi que les déplacements de corps rigide (translation et rotation) enregistrés durant les essais.

L'approche numérique repose sur la méthode des éléments finis. Elle a pour but de caractériser le champ de contraintes via les facteurs d'intensité de contrainte. Les approches classiques consistent à déterminer ces facteurs soit en estimant l'ouverture de fissure (méthode locale) soit en calculant le taux de restitution d'énergie (méthode globale ou énergétique) via les invariants intégraux. Ces deux approches permettent théoriquement d'estimer les facteurs d'intensité de contrainte. Cependant, l'approche par les déplacements ou par les énergies suppose la connaissance de la loi de comportement. Si pour des matériaux modèles, ces approches sont satisfaisantes et pertinentes, elles perdent de leur attrait et de leur efficacité dans la modélisation de matériaux hétérogènes dont les propriétés d'élasticité peuvent être très dispersées. Il est donc nécessaire de développer une stratégie faisant abstraction de la loi de comportement. Or, en modélisation des états fissurés sous chargement en force imposée, nous montrons que les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être dissociés des propriétés du matériau. En ce sens, les calculs seront menés en considérant un matériau virtuel dont les propriétés d'élasticité seront choisies de façon arbitraire.

Le point d'orgue de ce travail de thèse réside dans le couplage entre l'approche expérimentale et numérique. Ce couplage résulte de la combinaison des informations cinématiques provenant de la corrélation d'images (facteurs d'intensité d'ouverture de fissure) et de l'état de contrainte fourni par la méthode des éléments finis (Facteurs d'intensité de contrainte). Le regroupement "cinématique" et "statique" permet de déterminer le taux de restitution d'énergie. Même si l'approche permet de contourner la loi de comportement, elle apporte cependant des informations complémentaires sur cette loi à travers la détermination

des complaisances élastiques réduites qui sont une représentation locale des propriétés d'élasticité du milieu. Les applications reposent sur des essais de mécanique de la rupture employant des éprouvettes pré-fissurées en polychlorure de vinyle (PVC) et douglas (bois résineux) de dimensions $200 \times 150 \times 10 \text{ mm}^3$ et sollicitées en mode d'ouverture ou en mode mixte avec, dans ce dernier cas, un découplage des différents modes, rendu nécessaire vis-à-vis des critères d'amorçage de propagation de fissure.

- Le premier chapitre présente un état de l'art sur la mécanique linéaire de la rupture d'un point de vue théorique, numérique et expérimentale. Il y est rappelé les différentes propriétés caractérisant l'état mécanique au voisinage de la pointe de fissure en termes de facteurs d'intensité de contrainte, de taux de restitution d'énergie. Afin d'adapter les outils à l'analyse de champs, les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure sont présentés. Enfin, l'ensemble des lois de comportement locales est rappelé afin de préciser les liens entre les différents paramètres de fissuration.
- Le deuxième chapitre présente les moyens expérimentaux, analytiques et numériques mis en place pour analyser les paramètres de fissuration. Sont décrits les différents types de géométrie de fissuration employés en mécanique de la rupture, les techniques développées pour, à la fois, optimiser les champs expérimentaux et localiser exactement la pointe de fissure ainsi que les formulations développées pour le calcul des facteurs d'intensité d'ouverture et les facteurs d'intensité de la singularité durant un essai de fissuration. Le calcul du taux de restitution d'énergie peut s'effectuer à travers la complémentarité entre les approches expérimentale et numérique. Un algorithme de caractérisation des propriétés mécaniques est mis en œuvre moyennant cette complémentarité.
- Le troisième chapitre présente plusieurs applications en vue d'une validation des différents algorithmes développés. Pour se faire, sont menés les essais de fissuration en modes d'ouverture (mode I) et mixte (modes I et II) sur des éprouvettes fissurées en PVC et en Douglas. Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés et discutés.

Chapitre 1

Etudes préliminaires

Ce premier chapitre présente un état de l'art sur l'étude des propriétés de fissuration en mécanique de la rupture d'un point de vue théorique, numérique et expérimentale. La caractérisation des propriétés de fissuration, primordiale à l'intégrité structurale, suscite beaucoup d'attention. Le besoin de développer des méthodes robustes et fiables permet de fixer le cadre d'étude de ce travail.

Sommaire

Introduction	7
1.1 Mécanique de la rupture fragile en statique	7
1.1.1 Généralités en élasticité linéaire.....	7
1.1.2 Analyse asymptotique isotrope	8
1.1.3 Analyse asymptotique orthotrope.....	12
1.1.4 Critère de rupture	15
1.1.5 Approche énergétique.....	16
1.2 Méthodes de simulation numérique.....	45
1.2.1 Méthode des éléments finis	45
1.2.2 Méthode des éléments de frontière.....	46
1.2.3 Méthode sans maillage	46
1.2.4 Méthode des éléments finis étendue (X-FEM)	46
1.3 Détermination expérimentale des paramètres de fissuration	49
1.3.1 Corrélation d'images numériques	49
1.3.2 Calcul de champ de déplacements par corrélation d'images numériques.....	50
1.3.3 Sources d'erreurs de mesures en corrélation d'images numériques.....	52
1.3.4 Calcul du facteur d'intensité des contraintes.....	59
Conclusions	61

Introduction

Ce premier chapitre présente les fondements de la théorie de la mécanique de la rupture appliqués au cas de la fissuration dans les structures sous sollicitations monotones. Nous présentons, dans un premier temps, les concepts de facteurs d'intensité des contraintes et d'ouverture des fissures, caractérisant respectivement l'état mécanique en contrainte et cinématique dans le voisinage de la pointe de fissure. Du fait de la singularité en pointe de fissure où les contraintes sont difficilement accessibles car singulières, une vision énergétique du problème permet de donner un sens à la variation du domaine formulé dans le problème de référence. Ainsi, on définit un paramètre énergétique qui pilote le processus de fissuration. Il s'agit du taux de restitution d'énergie. Cette approche permet aussi d'écrire ce taux de restitution d'énergie sous la forme d'une intégrale le long d'un contour entourant la pointe de fissure. En introduisant les développements asymptotiques, on peut alors relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et de contrainte. L'analyse présente le cas de chargement en modes d'ouverture (mode I) et mixte (mode I-II), et ce, pour des problèmes plans.

Enfin, les méthodes numériques, généralement employées pour la simulation des phénomènes de fissuration, sont présentées suivies de l'étude expérimentale de la rupture à travers la méthode optique de corrélation d'images numériques.

1.1 Mécanique de la rupture fragile en statique

1.1.1 Généralités en élasticité linéaire

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu (Ω) en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique (S) de séparation (Figure 1.1). Elle représente une surface de discontinuité du champ de déplacements $\llbracket u_i \rrbracket = u_i^+ - u_i^-$.

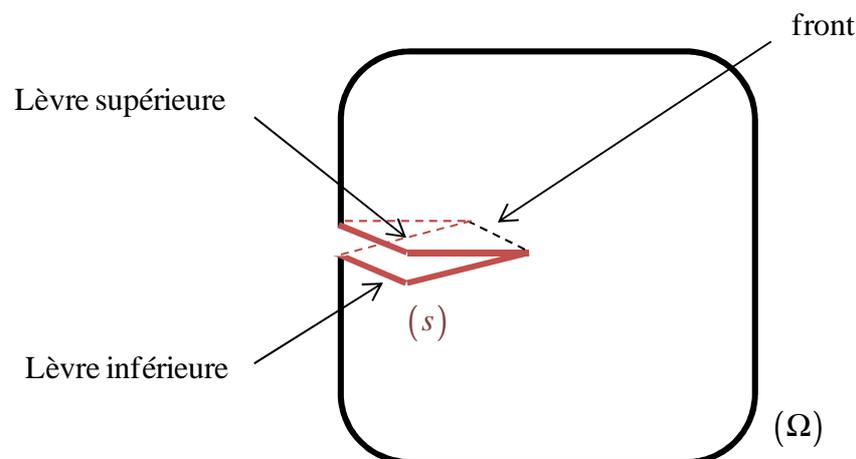


Figure 1.1 : Fissure dans un milieu continu

D'un point de vue purement cinématique, la forme de la discontinuité du champ de déplacement, à travers cette surface, définit alors le mode de rupture (Figure 1.2) :

Mode I : ouverture : le déplacement est perpendiculaire au plan de la fissure.

Mode II : glissement plan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et normal au front.

Mode III : glissement anti-plan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et au front.

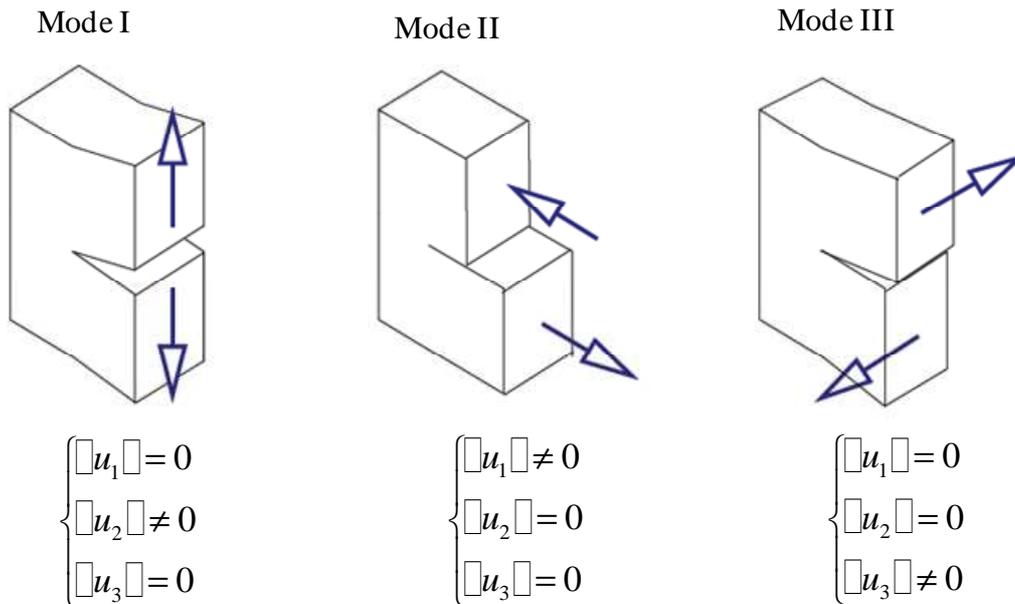


Figure 1.2 : Différents modes de rupture

Le cas réel est une superposition de ces modes. On parle alors de mode mixte. On supposera par ailleurs que le mode I d'ouverture est toujours présent. On considérera donc les lèvres de la fissure comme étant libres de pression.

1.1.2 Analyse asymptotique isotrope

On considère un matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire. Conformément à la figure 1.3, on se place dans le plan (O, x_1, x_2) , plan de symétrie de la fissure. L'axe (O, x_1) est tangent au plan de la fissure et normal au front. L'axe (O, x_2) est perpendiculaire au plan de la fissure. Les repères locaux cartésiens (x_1, x_2) et polaires (r, θ) ont leur origine en pointe de fissure, Figure 1.3. Si M est un point de coordonnées (x_1, x_2) dans le plan (O, x_1, x_2) , nous avons : $x_1 = r \cdot \cos(\theta)$ et $x_2 = r \cdot \sin(\theta)$.

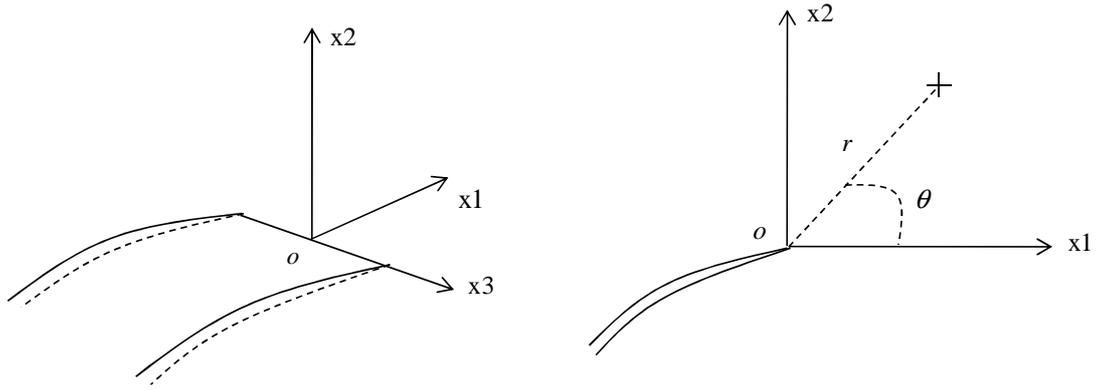


Figure 1.3 : Définition du repère local au voisinage du front de la fissure

Au voisinage immédiat du front de fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$, singularité caractérisée par les facteurs d'intensité des contraintes $(K_I^{(\sigma)}, K_{II}^{(\sigma)})$ introduits par Irwin [IRWIN 1957].

En élasticité plane, l'approche de Westergaard [WESTERGAARD 1939], Williams [WILLIAMS 1957], Irwin [IRWIN 1957] et Eshelby [ESHELBY 1968], reprise dans les ouvrages de Tada et al. [TADA 1973] et Bui [BUI 1978], permet d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les déplacements et les contraintes au voisinage du front de fissure.

1.1.2.1 Champs de contraintes

Le tenseur des contraintes, au voisinage de la pointe de fissure, est caractérisé par les facteurs d'intensité de contraintes d'Irwin [IRWIN 1957]. L'amplitude de cette singularité est décrite par les composantes du tenseur de contrainte [ANDERSON 1995] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &\quad - \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{12} &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &\quad - \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

1.1.2.2 Champs de déplacements

Dans le voisinage immédiat de la pointe de fissure, le champ des déplacements est défini par :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[(2 \cdot \kappa - 1) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[(2 \cdot \kappa + 3) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \\ u_2 &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[(2 \cdot \kappa + 1) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[(2 \cdot \kappa - 3) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \right] \\ u_3 &= \frac{2}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot K_{III}^{(\sigma)} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

μ représente le module de cisaillement défini par :

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{1.3}$$

E et ν désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau élastique isotrope. Appropriée pour des problèmes plans, κ est la constante de Kolossov définie par :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4 \cdot \nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases} \tag{1.4}$$

En effectuant une analyse locale des solutions en déplacement et en contrainte en pointe de fissure, une solution non triviale en élasticité linéaire montre que les contraintes sont infinies en pointe de fissure (1.1). Sous une sollicitation statique ou quasi-statique, une mesure de l'intensité de la singularité de ces contraintes est quantifiée par les facteurs d'intensité de

contrainte $K_\alpha^{(\sigma)}$ avec $\alpha \in \{I; II; III\}$ caractérisant l'état mécanique au voisinage du front de fissure pour les modes d'ouverture, de cisaillement plan et anti-plan respectifs :

$$\begin{aligned}
 K_I^{(\sigma)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sigma_{22}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot [u_2(\theta = \pi)] \\
 K_{II}^{(\sigma)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sigma_{12}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot [u_1(\theta = \pi)] \\
 K_{III}^{(\sigma)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sigma_{23}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot [u_3(\theta = \pi)]
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$[u_i(\theta = \pi)] = u_i(\theta = +\pi) - u_i(\theta = -\pi)$ est le saut de déplacement au passage de la discontinuité. Ce passage à la limite est aujourd'hui employé pour déterminer, par la méthode des éléments finis, les facteurs d'intensité de contrainte. Cette méthode, appelée méthode statique, est principalement justifiée dans des formulations en contrainte ne nécessitant pas d'interpolations aux nœuds du maillage.

Le saut de déplacement au passage de la discontinuité, symbolisé par les lèvres de la fissure, représente une image de l'état cinématique de l'ouverture des lèvres de la fissure. Il se définit par le déplacement relatif de deux points situés en opposition sur les lèvres supérieure et inférieure de la fissure. D'après la figure 1.4, l'ouverture de fissure est définie par :

$$[\bar{u}](M) = [\bar{u}](r) = \bar{u}_{sup}(M) - \bar{u}_{inf}(M) \tag{1.6}$$

Dans le repère polaire associé à la figure 1.4, l'équation (1.6) s'exprime par :

$$[\bar{u}](r) = \bar{u}(r, \theta = +\pi) - \bar{u}(r, \theta = -\pi) \tag{1.7}$$

A partir de la définition de l'ouverture de la fissure introduite dans l'équation (1.7), la notion de facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure $K_\alpha^{(\varepsilon)}$ a été introduite pour les modes d'ouverture et de cisaillement plan par Dubois et al. [DUBOIS 1996] :

$$[u]_I = \sqrt{\left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)} \cdot K_{II}^{(\varepsilon)}, [u]_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)} \cdot K_I^{(\varepsilon)} \text{ et } [u]_3 = \sqrt{\left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)} \cdot K_{III}^{(\varepsilon)} \tag{1.8}$$

Cette formulation est indirectement employée dans les approches par éléments finis pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte via les relations (1.2) dans des formulations en déplacement. La méthode est justement appelée méthode cinématique ou méthode d'ouverture de fissure (méthode COD).

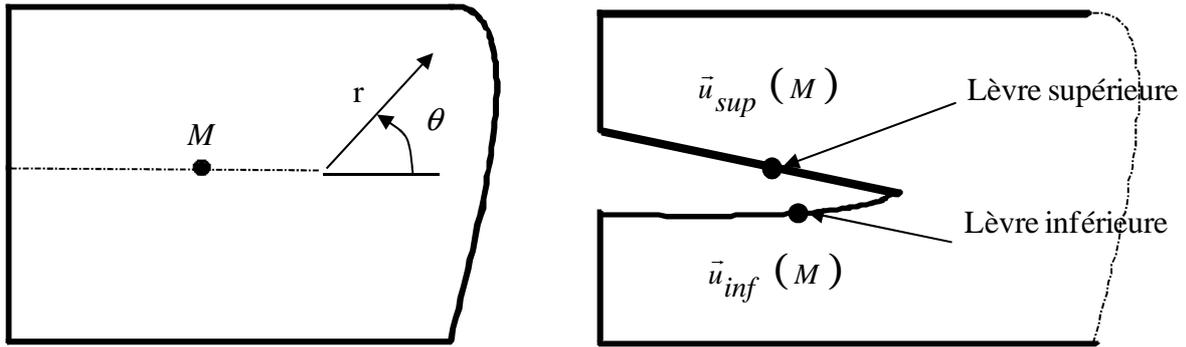


Figure 1.4 : Ouverture des lèvres de la fissure

1.1.2.3 Loi de comportement élastique locale

Le facteur d'intensité de contraintes $K_{\alpha}^{(\sigma)}$ définit l'état de contrainte dans le voisinage de la pointe de fissure, tandis que le facteur d'intensité d'ouverture de la fissure $K_{\alpha}^{(\varepsilon)}$ représente l'état cinématique de l'ouverture de la fissure. Ces deux paramètres de fissuration caractérisent l'état mécanique en termes de contraintes et de déplacements dans la zone englobant le front de la fissure. Puisque les contraintes et déformations sont liées par une loi de comportement matérielle [HOOKE 1663], par analogie, les facteurs d'intensité de contraintes et d'ouverture de la fissure sont également liés par une loi de comportement locale moyennant les complaisances élastiques réduites C_{α} du matériau [DUBOIS 1997] :

$$K_{\alpha}^{(\varepsilon)} = C_{\alpha} \cdot K_{\alpha}^{(\sigma)} \quad (1.9)$$

En considérant le champ des déplacements (1.2) et la définition des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure (1.8), il est alors possible d'écrire les liens entre complaisances élastiques réduites et propriétés d'élasticité du matériau :

$$C_{\alpha} = \frac{\kappa+1}{\mu} \quad \alpha \in \{I; II\} \quad \text{et} \quad C_{III} = \frac{4}{\mu} \quad (1.10)$$

Une généralisation des notions de facteurs d'intensité de contraintes et d'ouverture de la fissure à une symétrie orthotrope est effectuée dans la section suivante.

1.1.3 Analyse asymptotique orthotrope

Considérons un repère en pointe de fissure orienté suivant les directions principales d'orthotropie. Du fait du fort rapport d'orthotropie entre la direction longitudinale et les deux autres directions, la fissure se développe, généralement, parallèlement aux fibres. Pour simplifier les développements, nous nous restreindrons, dans la suite de notre étude, à une fissuration en mode I et II en laissant de côté le mode III.

1.1.3.1 Champs de contraintes

Dans une plaque anisotrope infinie contenant une fissure, la dérivation des fonctions d'Airy a été entreprise par Sih, Paris et Irwin [SIH 1965]. La solution proposée par ces auteurs est une généralisation des solutions de Westergaard [WESTERGAARD 1939]. Ainsi, l'expression des champs de contraintes en pointe de fissure est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{s_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{s_2}{\rho_2^{0,5}} - \frac{s_1}{\rho_1^{0,5}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{s_2^2}{\rho_2^{0,5}} - \frac{s_1^2}{\rho_1^{0,5}} \right) \right] \\
\sigma_{22} &= \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{s_1}{\rho_2^{0,5}} - \frac{s_2}{\rho_1^{0,5}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_2^{0,5}} - \frac{1}{\rho_1^{0,5}} \right) \right] \\
\sigma_{12} &= \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{s_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1^{0,5}} - \frac{1}{\rho_2^{0,5}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(\frac{s_1}{\rho_1^{0,5}} - \frac{s_2}{\rho_2^{0,5}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.11}$$

ρ_j ($j \in \{1; 2\}$) sont des fonctions complexes définies par :

$$\rho_j = \cos(\theta) + i \cdot s_j \cdot \sin(\theta) \tag{1.12}$$

s_j sont les racines de l'équation caractéristique polynômiale suivante :

$$a_{11} \cdot s_j^4 + (2 \cdot a_{12} + a_{33}) \cdot s_j^2 + a_{22} = 0 \tag{1.13}$$

p_j et q_j sont donnés par :

$$\begin{cases} p_j = a_{11} \cdot (s_j)^2 + a_{12} \\ q_j = \frac{a_{22}}{s_j} + a_{12} \cdot s_j \end{cases} \tag{1.14}$$

a_{11} , a_{12} , a_{22} , et a_{33} sont les composantes du tenseur de complaisance élastique pour une symétrie orthotrope. En considérant les directions principales d'orthotropie (L, R, T) , les composantes du tenseur de complaisance élastique sont directement liées aux caractéristiques élastiques orthotropes pour une sollicitation en mode d'ouverture dans le plan (R, L) avec une fissure orientée dans la direction L des fibres :

→ contrainte plane :

$$a_{11} = \frac{1}{E_L}; a_{22} = \frac{1}{E_R}; a_{33} = \frac{1}{G_{LR}}; a_{12} = \frac{-\nu_{RL}}{E_R} = \frac{-\nu_{LR}}{E_L} \quad (1.15)$$

→ déformation plane :

$$a_{11} = \frac{1 - \nu_{LT} \cdot \nu_{TL}}{E_L}; a_{22} = \frac{1 - \nu_{RT} \cdot \nu_{TR}}{R_R}; a_{33} = \frac{1}{G_{LR}}; a_{12} = \frac{-(\nu_{RL} + \nu_{TL} \cdot \nu_{RT})}{E_R}$$

L'équation (1.11) montre que le champ de contraintes singulier est dépendant des caractéristiques matérielles contrairement au cas d'un matériau isotrope.

1.1.3.2 Champs de déplacements

Le champ de déplacement singulier, défini au voisinage du front de fissure dans un milieu élastique orthotrope fissuré, s'exprime par :

$$u_1 = 2 \cdot K_I^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot s_1 \cdot \rho_2^{0,5} - p_1 \cdot s_2 \cdot \rho_1^{0,5}) \right] + 2 \cdot K_{II}^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot \rho_2^{0,5} - p_1 \cdot \rho_1^{0,5}) \right] \quad (1.16)$$

$$u_2 = 2 \cdot K_I^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot s_1 \cdot \rho_2^{0,5} - q_1 \cdot s_2 \cdot \rho_1^{0,5}) \right] + 2 \cdot K_{II}^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot \rho_2^{0,5} - q_1 \cdot \rho_1^{0,5}) \right]$$

Dans le cas d'un comportement élastique orthotrope, l'ouverture de la fissure peut s'exprimer en intégrant le champ de déplacement singulier orthotrope (1.16), dans l'équation (1.7), de la façon suivante :

$$[\vec{u}] = K_{II}^{(\sigma)} \cdot C_{II} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \vec{x}_1 + K_I^{(\sigma)} \cdot C_I \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \vec{x}_2 \quad (1.17)$$

Les composantes du vecteur déplacement de l'ouverture de la fissure (1.17) sont définies par :

$$[u_1] = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{p_2 - p_1}{s_1 - s_2} \right] \cdot K_{II}^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \quad (1.18)$$

$$[u_2] = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \right] \cdot K_I^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}}$$

La définition des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure, équation (1.8), permet d'écrire la loi de comportement locale. Par conséquent, les équations (1.18) conduisent à établir les expressions des facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure comme suit :

$$K_I^{(\varepsilon)} = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \right] \cdot K_I^{(\sigma)} \quad (1.19)$$

$$K_{II}^{(\varepsilon)} = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{p_2 - p_1}{s_1 - s_2} \right] \cdot K_{II}^{(\sigma)}$$

Comparativement à l'équation (1.9), on démontre que les facteurs d'intensité de contraintes $K_\alpha^{(\sigma)}$ et les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure $K_\alpha^{(\varepsilon)}$ sont liés via les complaisances élastiques réduites C_I et C_{II} [DUBOIS 1996] :

$$K_I^{(\varepsilon)} = C_I \cdot K_I^{(\sigma)} \text{ et } K_{II}^{(\varepsilon)} = C_{II} \cdot K_{II}^{(\sigma)} \quad (1.20)$$

avec :

$$C_I = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \right] \text{ et } C_{II} = 4 \cdot \Re e \left[i \cdot \frac{p_2 - p_1}{s_1 - s_2} \right] \quad (1.21)$$

C_I et C_{II} représentent les complaisances élastiques réduites généralisées à un comportement orthotrope [ALMEIDA 1984 ; VALENTIN 1984 ; GUYON 1987 ; LARRICQ 1992].

1.1.4 Critère de rupture

Le facteur d'intensité de contraintes $K_\alpha^{(\sigma)}$ caractérise la singularité de contrainte qui apparaît en pointe de fissure pour chaque mode de chargement α (modes I, II et III). Le mode

I étant souvent présent dans la plupart des structures [BOYANCE, 1999], il suscite beaucoup d'attention dans la littérature car étant considéré comme le plus critique pour la stabilité de la fissure. Ainsi, parce qu'il définit l'intensité de contrainte en pointe de fissure, le facteur d'intensité de contrainte $K_I^{(\sigma)}$ peut être considéré comme un paramètre de rupture dont la valeur critique $K_{IC}^{(\sigma)}$ est appelée ténacité. Autrement dit, une fissure se propage dans le matériau lorsque $K_I^{(\sigma)}$ atteint une valeur critique $K_{IC}^{(\sigma)}$:

$$K_I^{(\sigma)} = K_{IC}^{(\sigma)} \quad (1.22)$$

$K_{IC}^{(\sigma)}$ est considéré comme intrinsèque au matériau et définit la résistance de celui-ci à la progression de la fissure. En d'autres termes, la ténacité est interprétée comme étant le seuil en dessous duquel l'énergie élastique n'est pas suffisante pour propager la fissure car inférieure à celle nécessaire à la création de deux nouvelles surfaces libres dans le matériau. Dans des cas plus complexes de fissuration en mode mixte, le critère de fissuration (1.22) peut s'écrire sous la forme d'une fonction de charge telle que :

$$f = \frac{K_I^{(\sigma)}}{K_{IC}^{(\sigma)}} + \lambda \cdot \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{K_{IIC}^{(\sigma)}} \leq 1 \quad (1.23)$$

$K_{IC}^{(\sigma)}$ et $K_{IIC}^{(\sigma)}$ représentent les ténacités respectives en ouverture et cisaillement. Le coefficient λ représente dans ce cas un couplage entre les modes de fissuration.

Par ailleurs, puisque la notion de facteur d'intensité de contrainte est définie au voisinage immédiat de la pointe de fissure, une estimation de ce paramètre à caractère local est difficilement accessible. Cet inconvénient réside dans le calcul des champs mécaniques en termes de contraintes infinies en pointe de fissure. Cette difficulté entraîne le facteur $K_\alpha^{(\sigma)}$ à ne pas être la solution complète du champ mécanique dans une structure fissurée, mais une solution approximative du champ de contraintes lorsque l'on s'approche de la pointe de la fissure. Cela signifie que $K_\alpha^{(\sigma)}$ dépend de la position exacte de la pointe de fissure difficilement observable expérimentalement. Une alternative à cette méthode locale est la méthode globale qui utilise les formulations énergétiques ayant pour avantage d'effectuer un calcul en intégrant des champs mécaniques éloignés de la pointe de fissure.

1.1.5 Approche énergétique

1.1.5.1 Concept de l'équilibre énergétique de GRIFFITH

Les premiers travaux en mécanique de la rupture sont généralement attribués à Griffith [GRIFFITH 1921, 1924]. Son analyse fondamentale est la possibilité de formuler un critère de rupture dérivant du principe de la thermodynamique reliant la variation d'énergie nécessaire à

l'accroissement d'une fissure à la variation d'aire dA ainsi créée et à une énergie surfacique de rupture γ , propriété supposée intrinsèque au matériau :

$$dW_{fis} = 2 \cdot \gamma \cdot dA \quad (1.24)$$

En introduisant cette hypothèse dans le premier principe de la thermodynamique écrit sur le domaine défini par la figure 1.5, il advient [LEMAITRE 1996]:

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_c}{\partial t} = P_{ext} + Q - 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.25)$$

E_i est l'énergie interne, E_c l'énergie cinétique, P_{ext} le travail des efforts extérieurs et Q le taux de chaleur reçu. t désigne le temps. $\frac{\partial}{\partial t}$ représente ici la dérivée partielle par rapport au temps.

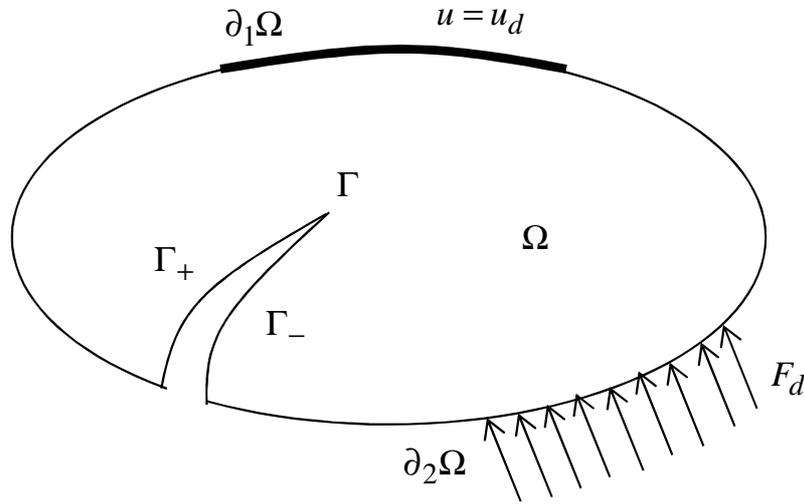


Figure 1.5 : Milieu élastique fissuré sous chargement statique

La variation d'énergie interne peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = Q + \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \int_{\Omega} \sigma : \mathbf{D} \cdot d\Omega \quad (1.26)$$

où W représente l'énergie élastique, σ le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{D} le tenseur taux de déformation. En absence des forces volumiques, le travail des efforts extérieurs peut s'écrire :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega_2} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dS \quad (1.26)$$

F_{ext} représente les efforts extérieurs surfaciques et u le champ de déplacement correspondant. Le premier principe thermodynamique de Griffith [GRIFFITH 1924] s'écrit alors :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E_c}{\partial t} = \int_{\partial\Omega_2} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dS - 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.27)$$

La condition de stationnarité du processus de fissuration impose le non accroissement de l'énergie cinétique $\left(\frac{\partial E_c}{\partial t} \approx 0\right)$. On obtient donc :

$$\int_{\partial\Omega_2} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dS - \frac{\partial W}{\partial t} - 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \leq 0 \quad (1.28)$$

Si on considère A comme étant la seule variable du bilan (1.28), il se réécrit sous la forme suivante :

$$\left(\int_{\partial\Omega_2} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial A} \cdot dS - \frac{\partial W}{\partial A} - 2 \cdot \gamma \right) \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \leq 0 \quad (1.29)$$

Le phénomène de propagation étant irréversible, l'énergie mécanique contribue à l'extension de la fissure tandis que l'énergie surfacique s'y oppose. Il advient :

$$\frac{\partial A}{\partial t} \geq 0 \quad (1.30)$$

On en déduit finalement l'inégalité suivante :

$$\int_{\partial\Omega_2} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial A} \cdot dS - \frac{\partial W}{\partial A} \leq 2 \cdot \gamma \quad (1.31)$$

Le taux de restitution d'énergie G est alors défini par l'expression suivante :

$$G = \int_{\partial\Omega} F_{ext} \cdot \frac{\partial u}{\partial A} \cdot dS - \frac{\partial W}{\partial A} \quad (1.32)$$

L'équation (1.31) est à l'origine du critère de propagation de fissure énoncé par Griffith :

$$\begin{cases} G < 2 \cdot \gamma & \rightarrow \text{absence de propagation} \\ G = 2 \cdot \gamma & \rightarrow \text{initiation ou propagation } \textit{stable}. \\ G > 2 \cdot \gamma & \rightarrow \text{propagation } \textit{instable}. \end{cases} \quad (1.33)$$

Par ailleurs, dans le but de relier taux de restitution d'énergie et facteurs d'intensité des contraintes [IRWIN 1957], nous allons réécrire G sous la forme d'une intégrale de contour indépendante du domaine d'intégration, appelée intégrale invariante J de Rice [RICE 1968].

1.1.5.2 Intégrale indépendante J de Rice

- Les lois de conservations en fissuration stationnaire

Considérons un corps solide élastique, homogène, dans un état d'équilibre statique sous l'action d'un système de force de traction surfacique T_i appliquée sur la partie S_T du solide, et des déplacements u_i imposés sur la partie S_u (figure 1.6). Sur le domaine Ω délimitant la surface de la région R occupée par le solide, on considère le système d'axe de coordonnées cartésiennes fixe (O, x_1, x_2, x_3) . Le corps solide est pré-fissuré avec une longueur de fissure initiale a . Cette fissure subit une croissance infinitésimale δa . Pour simplifier l'analyse, nous supposons l'hypothèse des petites déformations. Ainsi, le tenseur de contrainte est obtenu à partir de l'énergie de déformation élastique W tel que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W(0) = 0. \quad (1.34)$$

ε_{ij} est le tenseur de déformation. La densité d'énergie de déformation est considérée continuellement différentiable en fonction de la déformation. Pour un comportement élastique, l'équation (1.34) devient :

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (1.35)$$

En absence des forces de volume, les équations d'équilibre s'expriment par :

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (1.36)$$

Le vecteur traction T_j , appliqué sur la surface S_T , est donné par :

$$T_j = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (1.37)$$

avec n_j le vecteur normal unitaire sortant de la surface S_T .

Le tenseur de déformation est dérivé du champ de déplacement par :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.38)$$

Nous rappelons que pour alléger les différentes expressions employées dans la suite de ce chapitre, nous allons parfois avoir recours à des notations de dérivation sous la forme suivante :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (1.39)$$

Le problème ainsi posé, nous nous intéressons à l'identification des paramètres de fissuration en utilisant les invariants intégraux.

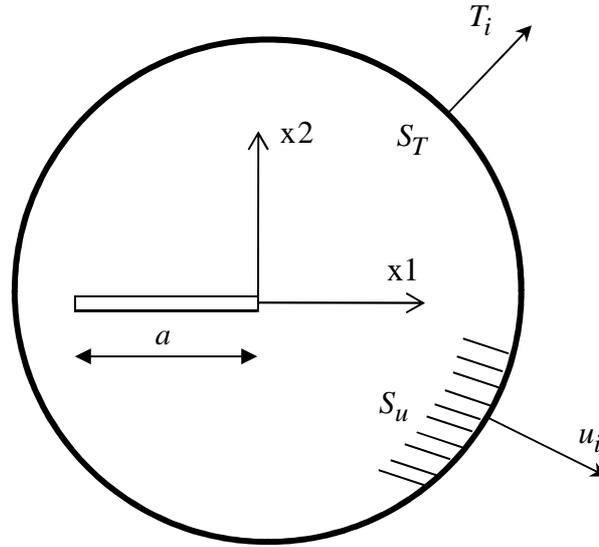


Figure 1.6 : Milieu élastique fissuré soumis aux chargements appliqués et aux déplacements imposés.

- Les référentiels

Considérons une transformation continue infinitésimale des coordonnées x_i vers \tilde{x}_i ($x_i \rightarrow \tilde{x}_i$) et des déplacements u_i vers \tilde{u}_i ($u_i \rightarrow \tilde{u}_i$). On définit une variation des déplacements $\delta\tilde{u}$ selon une configuration arbitraire telle que :

$$\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i \quad (1.40)$$

$$\tilde{u}_i(\tilde{x}_j) = u_i(x_j) + \delta u_i(x_j) \quad (1.41)$$

Dans le cas général, nous pouvons définir trois représentations, figure 1.7 :

- Description Lagrangienne

Les variables de Lagrange sont la position initiale ' x_i^0 ' de la particule et la date ' t '. Le point de vue de Lagrange est d'identifier une particule et d'en suivre le mouvement. C'est le point de vue essentiel en mécanique des solides. Un système de référence de Lagrange est lié au milieu continu, il se déforme donc avec lui. Le repère est construit sur la position initiale à la date $t = t_0$. La description Lagrangienne est schématisée par un domaine (Ω_0) qui suit le mouvement ($\delta\tilde{u}_i = \delta u_i$).

Cette description est adoptée à l'étude du processus d'amorçage de fissure mais dans le cadre d'une fissure stationnaire non propageante.

- Description Eulérienne

Les variables d'Euler sont la position actuelle ' x_i^t ' et le temps ' t '. Le point de vue d'Euler est de se placer en un point et d'observer quelles sont les particules qui passent en ce point. C'est le point de vue essentiel en mécanique des fluides. Un système de référence d'Euler est fixé en un point et ne se déforme pas. Dans une description Eulérienne, un repère est construit à une date quelconque. On note alors, en un point de l'espace, les vitesses, et éventuellement les accélérations, des particules qui passent en ce point de l'espace à une date donnée. Quel que soit la date, le point d'observation est le même. Nous schématisons la description Eulérienne par un repère et un domaine (Ω) qui restent fixe ($\delta \tilde{u}_i = 0$).

Cette description peut être retenue pour identifier la vitesse de propagation de la pointe de fissure par rapport à un repère fixe.

- Description Lagrangienne – Eulérienne – Arbitraire

En description Lagrangienne – Eulérienne – Arbitraire (LEA), le repère et le domaine $(\tilde{\Omega})$ subissent une variation virtuelle arbitraire $\delta \tilde{u}_i$. La description LEA a été développée à l'origine pour des problèmes d'interaction fluides – structures. Cette formulation a été introduite pour pallier les inconvénients des deux descriptions classiques à savoir la description Lagrangienne et la description Eulérienne. Ces deux descriptions ne permettent pas de décrire convenablement les problèmes qui font intervenir des localisations de déformations ou de contraintes. La description LEA est présentée ici pour montrer la possibilité d'étendre (en perspective) les formulations développées dans ce travail à des problèmes plus généraux qui nécessitent une description Lagrangienne – Eulérienne – Arbitraire.

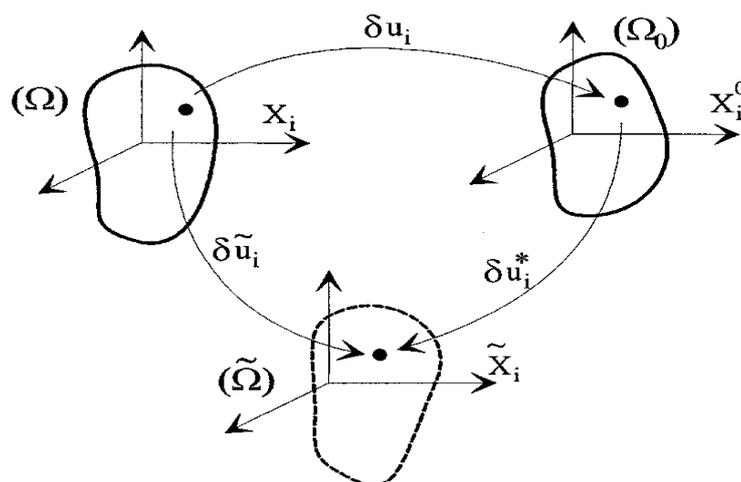


Figure 1.7 : Différentes descriptions spatiales.

Cette description peut être employée lorsque nous souhaitons imposer une propagation de fissure virtuelle de fissure afin d'appliquer le principe des travaux virtuels.

A partir de la figure 1.7, nous pouvons écrire que :

$$\delta\tilde{u}_i = \delta u_i + \delta u_i^* \quad (1.42)$$

où δu_i désigne le déplacement virtuel des points matériels alors que $\delta\tilde{u}_i$ représente le déplacement arbitraire du référentiel.

- Principe variationnel de Noether

Pour un volume homogène isotrope V , on définit le Lagrangien L donné par l'énergie totale W disponible dans le système par l'expression suivante :

$$L = \int \int_V W \cdot dV \cdot dt \quad (1.43)$$

Le théorème de Noether [NOETHER 1918] stipule que la variation de ce Lagrangien doit être nulle dans une simple translation des coordonnées et des déplacements liés aux variations des mêmes paramètres de base. La seule condition est de maintenir la quantité ' $W \cdot dV$ ' constante durant la translation. La variation de ce Lagrangien est donc nulle.

Ainsi, pour une variation cinématiquement admissible δu , nulle aux extrémités de l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ choisi arbitrairement, la variation du Lagrangien est nulle :

$$\delta L = \int \int_V \delta W \cdot dV \cdot dt = 0 \quad (1.44)$$

Le Lagrangien de l'équation (1.43) devient, avec les notations précédentes et dans le cas général d'une configuration quelconque Lagrangienne – Eulérienne – Arbitraire :

$$\delta L = \int \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta\tilde{u}_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta\tilde{u}_{i,t} \right) \cdot dV \cdot dt \quad (1.45)$$

Substituons l'équation (1.42) dans l'équation (1.45) :

$$\delta L = \int \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot dV \cdot dt \quad (1.46)$$

Rappelons l'hypothèse fixée dans le présent travail : on considère une fissure plane ayant un front rectiligne ; le problème étant bidimensionnel (2D). Le passage d'une formulation 3D à une formulation 2D est obtenu en considérant un problème de largeur b tel que $dV = b \cdot dS$.

L'équation (1.46) s'écrit alors :

$$\delta L = \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.47)$$

Avec :

ds : infinitésimal curviligne (1D),

dS : infinitésimal surfacique (2D),

dV : infinitésimal volumique (3D).

Pour une extension de la fissure de δa selon l'axe x_1 , le gradient de déplacement virtuel peut s'écrire :

$$\delta u_{i,j} = \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (1.48)$$

$$\delta u_{i,t} = \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (1.49)$$

Les équations (1.48) et (1.49), insérées dans l'équation (1.47), nous donnent :

$$\delta L = \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.50)$$

Après simplification de l'équation (1.50), nous obtenons :

$$\delta L = \int \int_S \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt + \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.51)$$

Puisque :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot (\delta u_i^*)_{,j} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot (\delta u_i^*)_{,t} \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot (\delta u_i^*)_{,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* \\ \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot (\delta u_i^*)_{,t} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} - \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* \end{cases} \quad (1.53)$$

Par substitution de l'équation (1.53) dans l'équation (1.51) et en utilisant le théorème de Gauss – Ostrogradsky, pour passer d'une intégrale de surface S à une intégrale sur le contour ∂S entourant la surface S (figure 1.8), nous avons :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_t \int_{\partial S} W \cdot n_1 \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt + \int_t \int_S \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & - \int_t \int_S \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.54)$$

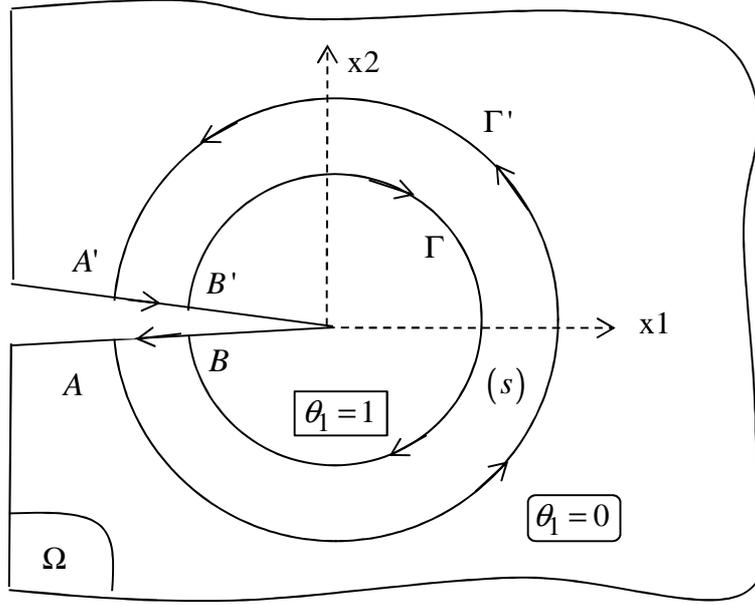


Figure 1.8 : Domaine et contour d'intégration.

Dans cette approche, nous considérons une vision Eulérienne ($\delta \tilde{u}_i = 0$). Ainsi, la variation du champ de déplacement est donnée par :

$$\delta u_i^* = -\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (1.55)$$

Reportons l'équation (1.55) dans l'équation (1.54) et utilisons à nouveau le théorème de Gauss – Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_t \int_{\partial S} \left(W \cdot n_1 - \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \right) \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt - \int_S \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot u_{i,1} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \\ & + \int_t \int_S \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \right] u_{i,1} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.56)$$

L'énergie totale disponible dans le système est donnée par l'énergie de déformation élastique :

$$W = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot u_{i,j} \quad (1.57)$$

En remplaçant l'équation (1.57) dans l'équation (1.56), nous obtenons :

$$\delta L = \int_t \int_{\partial S} (W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j) \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt + \int_t \int_S \sigma_{ij,j} \cdot u_{i,1} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.58)$$

Les équations d'équilibre permettent d'éliminer la dernière intégrale de l'équation (1.58), avec l'hypothèse d'absence de forces volumiques (1.36). Le théorème de Gauss – Ostrogradsky, appliqué à l'équation (1.58), permet d'écrire :

$$\delta L = \int_t \int_S \frac{\partial}{\partial x_j} [W \cdot \delta_{j1} - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1}] \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.59)$$

Appliquons à nouveau le théorème de Gauss – Ostrogradsky en intégrant le fait que le Lagrangien est stationnaire quelle que soit la variation infinitésimale δa . On obtient :

$$\int_t \int_{\partial S} [W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j] \cdot ds \cdot dt = 0 \quad (1.60)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} (W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j) \cdot ds = 0 \quad (1.61)$$

où ∂S est un contour fermé constitué par deux contours ouverts Γ , Γ' et deux segments AB $A'B'$ appartenant aux lèvres de la fissure (figure 1.8) :

$$\partial S = \Gamma' + A'B' - \Gamma + BA \quad (1.62)$$

- Indépendance du chemin d'intégration

Considérons les intégrales :

$$Q_j = \int_{\partial S} (W \cdot n_j - T_k \cdot u_{k,j}) \cdot ds, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.64)$$

La région S est supposée être libre de singularités. L'équation (1.64) peut se mettre sous la forme :

$$Q_j = \int_{\partial S} (W \cdot \delta_{jl} - \sigma_{lk} \cdot u_{k,j}) \cdot n_l \cdot ds \quad (1.65)$$

Le théorème de divergence de Gauss – Ostrogradsky appliqué à l'équation (1.65) donne :

$$Q_j = \int_S (W \cdot \delta_{jl} - \sigma_{lk} \cdot u_{k,j})_{,l} \cdot dS. \quad (1.66)$$

En introduisant les équations (1.34), (1.36) et (1.38), l'expression, dans l'intégrale (1.66), prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (W \cdot \delta_{jl} - \sigma_{lk} \cdot u_{k,j})_{,l} &= W_{,j} - \sigma_{lk,l} \cdot u_{k,j} - \sigma_{lk} u_{k,j,l} \\
 &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{lk}} \cdot \varepsilon_{lk,j} - \sigma_{lk} \cdot u_{k,l,j} = \sigma_{lk} \cdot (\varepsilon_{lk,j} - u_{k,l,j}) \\
 &= \sigma_{lk} \cdot (\varepsilon_{lk} - u_{k,l})_{,j} = \sigma_{kl} \cdot (\varepsilon_{kl} - u_{k,l})_{,j} \\
 &= -\sigma_{kl} \cdot \tau_{kl,j} = 0
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

τ_{ij} représente les composantes du tenseur de rotation non symétrique et non nul pour de petite déformation donnée par :

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{1.68}$$

Pour tout contour fermé, nous avons donc :

$$Q_j = 0 \tag{1.69}$$

D'une manière similaire, nous pouvons montrer que l'équation (1.69) s'obtient lorsque la densité d'énergie de déformation élastique dans l'équation (1.64) est remplacée par la densité d'énergie de déformation élastique complémentaire W^* donnée par :

$$W^* = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} \cdot d\sigma_{ij} \tag{1.70}$$

Or, nous avons :

$$W^*(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} - W(\varepsilon_{ij}), \quad W^*(0) = 0 \tag{1.71}$$

L'intégrale (1.70) est indépendante du chemin d'intégration dans l'espace des contraintes. La déformation est obtenue, à partir de W^* , par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.72}$$

Ayant mis en évidence l'indépendance du chemin de contour d'intégration ($Q_j = 0$) pour tout contour fermé, nous allons exploiter ce résultat pour montrer qu'autour d'une fissure, Q_j est non nulle, indépendamment du chemin d'intégration.

- Intégrale J

Pour le cas particulier d'un problème élastique plan bidimensionnel, considérons l'intégrale :

$$J = Q_1 = \int_{\Gamma} (W \cdot n_1 - T_k \cdot u_{k,1}) \cdot ds, \quad (1.73)$$

où Γ est le contour fermé limitant une région donnée du corps solide (figure 1.9). L'équation (1.73) définit l'intégrale J le long d'un contour fermé dans l'espace bidimensionnel. A partir de l'équation (1.69), il s'ensuit que $J = 0$. Puisque J est nulle pour tous les chemins de contours fermés, les intégrales J le long des chemins Γ_1 , Γ_2 reliant les points O_1 et O_2 sont égales (figure 1.9), c'est-à-dire :

$$J_1 = \oint_{\Gamma_1} (W \cdot n_1 - T_k \cdot u_{k,1}) \cdot ds = J_2 = \oint_{\Gamma_2} (W \cdot n_1 - T_k \cdot u_{k,1}) \cdot ds \cdot \quad (1.74)$$

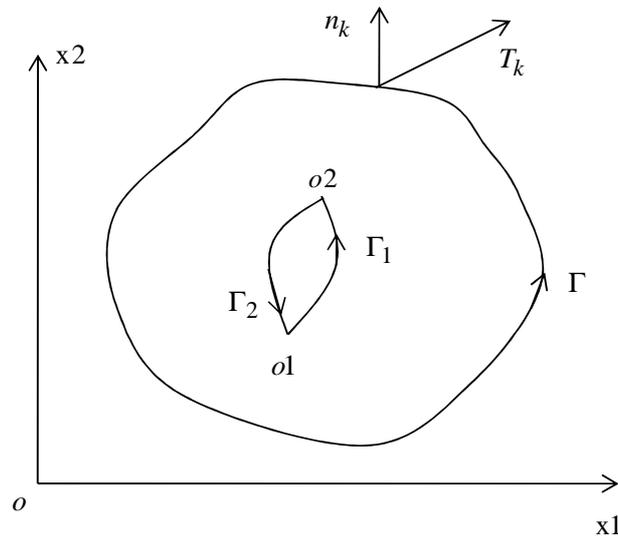


Figure 1.9 : Contour fermé Γ et chemins Γ_1 et Γ_2 entre deux points O_1 et O_2

- Application aux défauts de type fissures

Considérons une discontinuité géométrique de types fissures, dont les surfaces sont rectilignes, orientées parallèlement à l'axe x_1 (figure 1.10). L'intégrale J , définie via l'équation (1.73), est calculée le long d'un chemin dans le sens trigonométrique autour de la pointe de fissure. La région S , limitée par le contour fermé $AB\Gamma B' A' \Gamma' A$, est libre de toute singularité. L'intégrale J , calculée le long de $AB\Gamma B' A' \Gamma' A$, est nulle. Nous avons :

$$J_{AB\Gamma B' A' \Gamma' A} = J_{B\Gamma B'} + J_{B'A'} + J_{A'\Gamma' A} + J_{AB} = 0 \quad (1.75)$$

Les segments AB et $A'B'$, des surfaces de fissure parallèles à l'axe x_1 , étant libres de traction, ($dx_2 = 0$ et $T_k = 0$), il advient :

$$J_{A'B'} = J_{AB} = 0 \quad (1.76)$$

L'équation (1.75) admet alors la forme suivante :

$$J_{B\Gamma B'} + J_{A\Gamma A'} = 0 \quad (1.77)$$

ou encore, en inversant le sens d'intégration :

$$J_{B\Gamma B'} = J_{A\Gamma A'} \quad (1.78)$$

Le contour $A\Gamma A'$ est décrit dans le sens trigonométrique. Ainsi, l'équation (1.78) met en évidence une des propriétés fondamentales qu'est l'indépendance du contour d'intégration de l'intégrale J définie par l'équation (1.73) pour des problèmes de fissuration.

Nous rappelons que l'indépendance du chemin d'intégration (1.73), pour un contour arbitraire Γ (figure 1.10), est basée sur l'hypothèse que les lèvres de la fissure sont libres des forces de traction et qu'elles sont parallèles à l'axe x_1 . Le contour d'intégration pourrait, à ce propos, être pris plus ou moins éloigné du front de fissure, et peut être choisi de manière à rendre plus aisé le calcul de l'intégrale J en dehors des zones singulières en contrainte.

Par ailleurs, considérons le cas où les lèvres de la fissure sont chargées ($T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$) (figure 1.11). Reprenons l'équation (1.73). Le terme d'intégration sur les lèvres de la fissure devient :

$$\int_{A'B'} (W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j) \cdot ds = \int_{A'O+OB'} -\sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds \quad (1.79)$$

Car $n_1 = 0$ est la condition pour que la fissure se propage dans la direction x_1 .

Posons :

$$I_1 = W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \quad (1.80)$$

Par décomposition du contour d'intégration fermé ∂S , nous avons :

$$\int_{\Gamma} I_1 \cdot ds + \int_{BA} I_1 \cdot ds = \int_{\Gamma'} I_1 \cdot ds + \int_{A'B'} I_1 \cdot ds \quad (1.81)$$

A partir de la représentation des différents contours de la figure 1.11, l'équation (1.81) devient :

$$\int_{\Gamma} I_1 \cdot ds + \int_{BO+OA} -\sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds = \int_{\Gamma'} I_1 \cdot ds + \int_{A'O+OB'} -\sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds \quad (1.82)$$

$$\int_{\Gamma} I_1 \cdot ds + \int_{OB'+OB} \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds = \int_{\Gamma'} I_1 \cdot ds + \int_{OA'+OA} \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds \quad (1.83)$$

Ainsi, l'indépendance de l'intégrale J est établie dans le cas de chargement sur les lèvres de la fissure (L étant la surface des deux lèvres). L'intégrale J prend alors la forme générale suivante :

$$\int_{\Gamma} (W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j) \cdot ds + \int_L \sigma_{ij} \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds \quad (1.84)$$

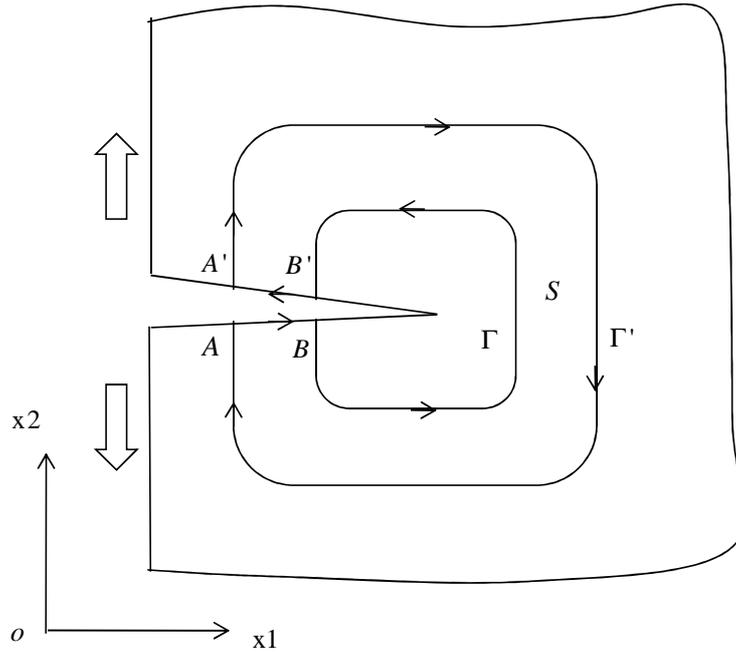


Figure 1.10 : Γ et Γ' délimités par la couronne S entourant la pointe de fissure.

Les lois de conservation d'énergie, issues du premier principe de la thermodynamique des processus réversibles, aboutissent à une formulation de l'intégrale invariante moyennant le principe variationnel de Noether [NOETHER 1918] considérant un espace de configuration Lagrangienne – Eulérienne – Arbitraire. Le développement théorique de cette intégrale invariante est basé, non seulement, sur une extension virtuelle de la fissure sans tenir compte de la variable temporelle, mais, plus généralement, sur une approche Eulérienne. Ceci se traduit par une extension virtuelle instantanée.

Puisque l'intégrale J est indépendante du contour d'intégration autour du front de fissure, J peut être vue comme un paramètre caractérisant les champs mécaniques en termes de contraintes et des déformations dans le voisinage de la pointe de fissure. Une interprétation physique donnée à ce paramètre, dans une analyse de fissuration, est mentionnée dans la section suivante.

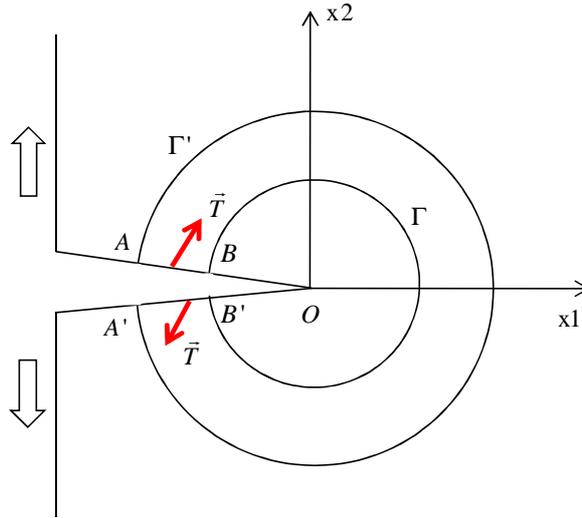


Figure 1.11 : Chargements sur les lèvres de la fissure.

- Taux de restitution d'énergie

Dans cette section, nous donnons une interprétation physique à l'intégrale J comme étant le taux de variation de l'énergie potentielle totale du système en fonction de la variation incrémentale de la longueur de fissure. La dérivation concerne un corps plan élastique linéaire ou non linéaire, avec une longueur de fissure initiale a soumis aux tractions appliquées ou des déplacements imposés le long des frontières du solide (figures 1.6 et 1.12). Les tractions et les déplacements sont supposés indépendants de la longueur de fissure. Le corps solide fissuré est inscrit dans un système référentiel fixe de coordonnées cartésiennes x_1, x_2 avec l'axe x_1 parallèle au plan de la fissure comme illustré dans la figure 1.12. En supposant une propagation de fissure dans le plan de la fissure initiale, nous montrerons qu'une application de l'intégrale invariante J , le long d'un contour linéique entourant la pointe de fissure, représente la variation d'énergie potentielle pour une extension virtuelle de la fissure da .

- Extension virtuelle de la fissure

En considérant le corps élastique présenté dans la figure 1.12, dans les conditions quasi statiques et en absence des forces de volume, l'énergie potentielle du corps est donnée par :

$$\Pi(a) = \int_S W \cdot dS - \oint_{\Gamma} T_k \cdot u_k \cdot ds \quad (1.85)$$

S est la surface du corps et Γ sa frontière. La différentiation de l'équation (1.85), en fonction de la longueur de fissure a et pour une extension virtuelle de la fissure, conduit à :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_S \frac{dW}{da} \cdot dS - \oint_{\Gamma} \left[T_k \cdot \frac{du_k}{da} + u_k \cdot \frac{dT_k}{da} \right] \cdot ds \quad (1.86-a)$$

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_S \frac{dW}{da} \cdot dS - \oint_{\Gamma_u} \left[T_k \cdot \frac{du_k}{da} + u_k \cdot \frac{dT_k}{da} \right] \cdot ds - \oint_{\Gamma_t} \left[T_k \cdot \frac{du_k}{da} + u_k \cdot \frac{dT_k}{da} \right] \cdot ds \quad (1.86-b)$$

L'équation (1.86-b) est obtenue à partir de l'équation (1.86-a) par une décomposition du contour d'intégration curviligne (Γ) en deux parties dont la première est soumise à un déplacement imposé (Γ_u) tandis que la seconde est sous l'effet des efforts de traction (Γ_t).

Puisque Γ_u est nul le long du chemin de contour, nous maintenons l'intégrale de contour fermé le long de Γ_t . En outre, le second terme de l'intégrale curviligne Γ_t est nul parce que la traction demeure constante durant le processus de propagation de la fissure. Ainsi, l'équation (1.86-b) se simplifie comme ci-dessous :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_s \frac{dW}{da} \cdot dS - \oint_{\Gamma_t} \left[T_k \cdot \frac{du_k}{da} \right] \cdot ds \quad (1.87)$$

De plus, l'extension de la fissure entraîne un mouvement de l'axe de coordonnées associé à la pointe de la fissure. De ce fait, un nouveau système de coordonnées $X_1 X_2$, dont l'origine coïncide avec la pointe de fissure, est introduit de telle sorte que (figure 1.12) :

$$X_1 = x_1 - a ; X_2 = x_2 \quad (1.88)$$

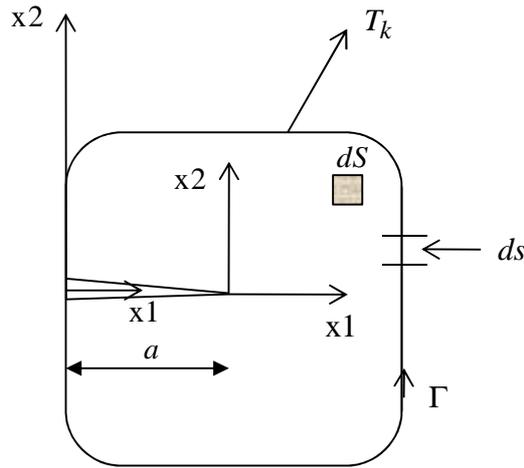


Figure 1.12 : Corps solide fissuré d'une longueur de fissure initiale a dans un référentiel

Nous pouvons donc écrire, pour une extension de fissure suivant a , que :

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (1.89)$$

Ainsi, par substitution de l'équation (1.89), l'équation (1.87) prend la forme suivante :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_s \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \cdot dS - \oint_{\Gamma_t} T_k \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial a} - \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \cdot ds \quad (1.90)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \quad (1.91)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtenons :

$$\int_S \frac{\partial W}{\partial a} \cdot dS = \int_S \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \cdot dS = \oint_{\Gamma_i} T_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a} \cdot ds \quad (1.92)$$

Le théorème de divergence transformant une intégrale surfacique en une intégrale curviligne (et vis-versa) conduit à :

$$\int_S \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot dS = \oint_{\Gamma_i} W \cdot n_1 \cdot ds \quad (1.93)$$

En introduisant les équations (1.92) et (1.93) dans l'équation (1.90), nous obtenons :

$$-\frac{d\Pi}{da} = \oint_{\Gamma_i} W \cdot n_1 \cdot ds - T_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \cdot ds \quad (1.94)$$

L'équation (1.94) devient :

$$-\frac{d\Pi}{da} = \oint_{\Gamma_i} \left(W \cdot n_1 - T_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \cdot ds \quad (1.95)$$

$$\Rightarrow -\frac{d\Pi}{da} = \oint_{\Gamma_i} \left(W \cdot n_1 - T_k \cdot u_{k,1} \right) \cdot ds \quad (1.96)$$

Par comparaison des équations (1.96) et (1.73), il convient naturellement que :

$$-\frac{d\Pi}{da} = J \quad (1.97)$$

L'équation (1.97) est d'une importance capitale car elle montre que l'intégrale invariante J décrit, en d'autres termes, le taux de variation de l'énergie potentielle totale du corps solide fissuré en fonction de la variation incrémentale de la longueur de fissure, et ceci indépendamment du chemin de contour d'intégration entourant la pointe de fissure.

L'intégrale J , étant le taux de décroissance de l'énergie potentielle, n'est valable qu'en propagation de fissure dans la direction initiale de la fissure. En comparant les équations (1.97) et (1.32), nous avons, pour un matériau dont le comportement est élastique linéaire, l'intégrale J simplement égale au taux d'énergie disponible G :

$$J = G \quad (1.98)$$

L'équation (1.98) reste vraie quelle que soit la nature du chargement (déplacement imposé ou chargement appliqué au corps solide fissuré) durant la propagation de fissure [VICTOR 2000]. Rice [RICE 1968] affirme alors que l'intégrale invariante J est le taux de restitution d'énergie de déformation pour la fissure à l'intérieur du contour. Par conséquent, elle exprime l'énergie dissipée par unité de surface fissurée.

- Relation entre taux de restitution d'énergie et facteurs d'intensité de contraintes

Après avoir écrit le taux de restitution d'énergie G sous forme d'une intégrale de contour, nous allons établir la formule d'Irwin [IRWIN 1957] reliant taux de restitution d'énergie et facteurs d'intensité des contraintes. Pour ce faire, nous introduisons séparément les champs asymptotiques (1.2) et (1.16) pour des milieux fissurés isotrope et orthotrope respectifs dans l'expression de l'intégrale invariante J (1.96). En considérant J comme étant la limite de cette formule lorsque le contour Γ tend vers la pointe de fissure, on obtient l'expression d'Irwin suivante [IRWIN 1957]:

$$J = G = \frac{\kappa+1}{8 \cdot \mu} \cdot \left(\left(K_I^{(\sigma)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(\sigma)} \right)^2 \right) \quad (1.99)$$

D'où la relation liant intégrale invariante J , taux de restitution d'énergie G et facteurs d'intensité des contraintes $K_\alpha^{(\sigma)}$ dans l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique, pour un milieu élastique isotrope et orthotrope [IRWIN 1962 ; RICE 1968 ; SIH 1969]:

- Milieu isotrope fissuré:

$$J = G = \left(\left(K_I^{(\sigma)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(\sigma)} \right)^2 \right) \cdot \begin{cases} \frac{1}{E} & \rightarrow \text{en contrainte plane} \\ \frac{1-\nu^2}{E} & \rightarrow \text{en déformation plane} \end{cases} \quad (1.100)$$

- Milieu orthotrope fissuré :

$$\begin{cases} J = G_I + G_{II} \\ G_I = \left(K_I^{(\sigma)} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{a_{11} \cdot a_{22}}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + \frac{2 \cdot a_{12} + a_{33}}{2 \cdot a_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ G_{II} = \left(K_{II}^{(\sigma)} \right)^2 \cdot \frac{a_{11}}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + \frac{2 \cdot a_{12} + a_{33}}{2 \cdot a_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.101)$$

a_{11} , a_{12} , a_{22} , et a_{33} sont les composantes du tenseur de complaisance élastique pour une symétrie orthotrope définies par l'équation (1.15).

Par ailleurs, l'intégrale invariante J est généralement déterminée par la méthode des éléments finis. Cette résolution pose des difficultés liées, non seulement, à la définition de la ligne d'intégration, mais aussi à l'intégration des champs mécaniques sur le contour curviligne [DUBOIS 1999; DUBOIS 2002; CHAZAL 2001; DUBOIS 2005]. En outre, reposant sur une formulation en déplacement, la résolution par éléments finis nécessite d'effectuer une interpolation des champs mécaniques (gradients de déplacement, contraintes, densité d'énergie et potentiel énergie libre...) aux nœuds appartenant à la ligne d'intégration, ce qui représente des sources d'erreur [DUBOIS 1997; OKADA 1999; YOSHIKA 1998; CHANG 2002]. Pour contourner ces difficultés et éviter ces erreurs de calculs, des méthodes d'intégration sur un contour surfacique ont été adoptées comme, par exemple, la méthode Gtheta proposée par Destuynder [DESTUYNDER 1983; SUO 1992] ou la méthode d'Intégrale de Domaine Equivalent (IDE) [NIKISHKOV 1987].

1.1.5.3 Intégrale invariante $G\theta$

L'intégrale $G\theta$ [DESTUYNDER 1983; SUO 1992] et l'Intégrale de Domaine Equivalent (IDE) [NIKISHKOV 1987] sont deux méthodes identiques, basées sur une formulation de mécanique des milieux continus, transformant l'intégrale J sur le contour curviligne en une intégrale de contour surfacique via le théorème de divergence de Gauss – Ostrogradsky. Ces techniques d'intégration surfaciques des champs mécaniques nécessitent d'introduire un champ de vecteur $\vec{\theta}$ arbitraire et continuellement différentiable dont les composantes à l'intérieur de la couronne surfacique V sont telles que $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 0$ d'une part et d'autres part, $\vec{\theta} = \vec{0}$ à l'extérieur de la couronne V (figure 1.13).

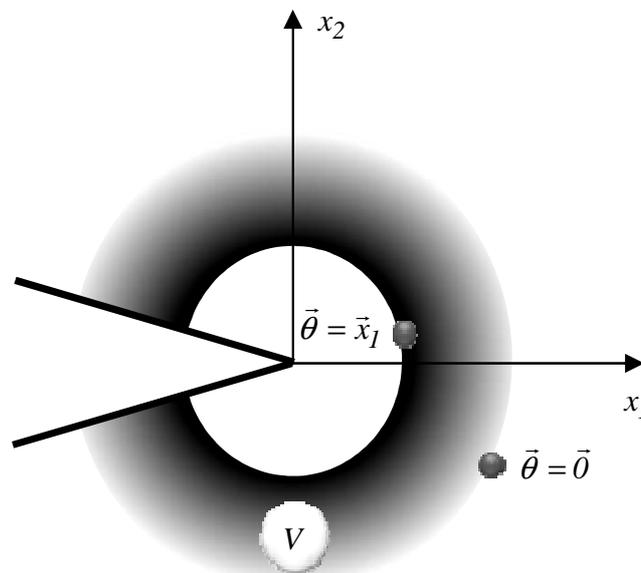


Figure 1.13 : Intégration surfacique.

Ce champ arbitraire $\vec{\theta}$ doit satisfaire certaines conditions [DESTUYNDER 1981, 1982], notamment :

- $\vec{\theta}$ est continument dérivable et varie linéairement dans la couronne V ,
- le support du champ $\vec{\theta}$ est limité au voisinage de la fissure.

En effet, considérant l'équation (1.73), nous écrivons [MORAN 1987] :

$$J = \int_{\Gamma} (W \cdot n_1 - T_k \cdot u_{k,1}) \cdot ds = \int_{\Gamma} (W \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot u_{i,1}) \cdot d\Gamma \quad (1.102)$$

où $J = \int_{\Gamma} (P_j)_{,1} \cdot n_j \cdot d\Gamma$; $(P_j)_{,1} = (P_j)_{,k} \cdot \theta_k$, avec $(P_j)_{,k} = W \cdot \delta_{jk} - \sigma_{ij} \cdot u_{i,k}$; en prenant sur Γ : $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 0$ (figure 1.13), nous avons :

$$J = \int_{\Gamma} (P_j)_{,k} \cdot n_j \cdot \theta_k \cdot d\Gamma \quad (1.103)$$

Définissons le contour $\partial S = (\Gamma' + A'B' - \Gamma + BA)$ (figure 1.8). L'intégrale J peut alors s'écrire, sous la même forme que l'équation (1.103), par intégration sur le domaine ∂S , et pour $\theta_k = 0$ sur Γ' tel que :

$$G\theta = J = \oint_{\partial S} (P_j)_{,k} \cdot \theta_k \cdot n_j \cdot ds \quad (1.104)$$

En appliquant le théorème de Gauss – Ostrogradsky à l'équation (1.104), le domaine d'intégration passe d'un contour curviligne fermé ∂S à une surface S contenue dans ce contour :

$$G\theta = \int_S \left(- (P_j)_{,k} \cdot \theta_k \right)_{,j} \cdot dS \quad (1.105)$$

En développant l'équation (1.105) et compte tenu de l'équation (1.36), nous avons :

$$\left((P_j)_{,k} \cdot \theta_k \right)_{,j} = W_{,k} \cdot \theta_k + W \cdot \theta_{k,k} - \sigma_{ij} \cdot u_{i,kj} \cdot \theta_k - \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \theta_{k,j} \quad (1.106)$$

En insérant l'équation (1.106) dans (1.105), nous obtenons l'expression suivante :

$$G\theta = \int_S \left(-W_{,k} \cdot \theta_k - W \cdot \theta_{k,k} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,jk} \cdot \theta_k + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \theta_{k,j} \right) \cdot dS \quad (1.107)$$

Pour un problème tridimensionnel, l'énergie libre (1.34) se généralise par :

$$\sigma_{ij} = \frac{dW}{d\varepsilon_{ij}} \quad (1.108)$$

En tenant compte de l'équation (1.36), l'équation (1.108) se développe par :

$$W_{,k} = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij,k} = \sigma_{ij} \cdot u_{i,jk} \quad (1.109)$$

Ainsi, par intégration de l'équation (1.109) dans (1.107), nous obtenons la forme finale de l'intégrale - $G\theta$ [DESTUYNDER 1981, 1983] :

$$G\theta = \int_S \left(-W \cdot \theta_{k,k} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \theta_{k,j} \right) \cdot dS \quad (1.110)$$

Dans le cas de pression sur les lèvres de la fissure, la forme précédente de l'intégrale $G\theta$ n'est plus stable en fonction de la couronne d'intégration. La forme générale de cette intégrale devient :

$$G\theta = \int_S \left(-W \cdot \theta_{k,k} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \theta_{k,j} \right) \cdot dS - \int_L \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot u_{i,k} \cdot \theta_k \cdot ds \quad (1.111)$$

L'équation (1.110) est la forme définitive de l'intégrale $G\theta$ qui constitue une intégrale sur une couronne surfacique entourant la pointe de fissure, facilement intégrable numériquement, comparativement à l'intégrale curviligne de Rice [RICE 1968] (1.73) dont l'intégration peut engendrer des erreurs de calculs des champs mécaniques aux nœuds de la ligne fermant la pointe de fissure par interpolation.

Bien que l'approche de l'intégrale J soit un outil puissant pour analyser les problèmes de fissuration, cette formulation de l'intégrale J de Rice [RICE 1968] reste pourtant limitée à une réponse élastique du matériau.

Jusqu'ici, nous avons étudié la propagation d'une fissure seulement dans le cas où le chargement de la structure est appliqué perpendiculairement à la fissure de telle sorte que celle-ci se propage dans le plan de la fissure initiale. Cependant, la présence aléatoire de microfissures préexistantes dans la zone endommagée peut créer une macro-fissure suite à l'effet d'un chargement complexe. Cette macro-fissure ayant une localisation et une orientation arbitraire, se propage dans la direction de la contrainte circonférentielle maximale. Autrement dit, la propagation de la macro-fissure est pilotée par de multi-défauts distribués au sein du matériau. Du fait de la distribution aléatoire des multi-défauts et de la nature complexe du chargement, la fissure ne peut se propager dans la direction initiale de la pré-fissure existante. Dans ces conditions, les déplacements de la structure sont élastiquement soumis aux chargements de modes mixtes.

L'utilisation des paramètres d'énergie appropriés, décrivant l'état global de ruine de la structure munis de multi-défauts de dommage, est, par conséquent, d'une importance pratique. Cependant, les intégrales invariantes J et $G\theta$ apparaissent insuffisantes pour analyser un tel problème de fissuration en mode de rupture mixte à cause de l'orientation arbitraire de la fissure gouvernée par des multi-défauts associés à la pointe de fissure [CHANG 2002].

Pour étudier la propagation de fissure en mode mixte de rupture, l'intégrale invariante M , bien connue de la loi de conservation d'énergie et dérivant du théorème de Noether

[NOETHER 1918] en élasticité plane, est généralement employée [CHEN 1977 ; FREUND 1978 ; BUDIANSKY 1973]. L'intégrale M , initialement proposée par Knowles et Sternberg [KNOWLES 1972], a fait l'objet de plusieurs études et a été développée par Yau [YAU 1980] et étendue à l'analyse de rupture inter faciale entre différents matériaux [YAU 1984]. Cette intégrale est reconnue être plus naturellement liée à l'énergie restituée due à la formation de microfissures préexistantes associée à l'endommagement du matériau plutôt que le taux de restitution d'énergie associé à l'extension de la fissure suivant son plan initial [MA 2001 ; JU 1994, 1994]. En outre, avec l'intégrale invariante M , une séparation des modes de rupture est possible [BUI 1985, ATTIGUI 1997, LESLIE 2004 ; MOUTOU 2007].

Une description de cette intégrale est donnée dans la section suivante, dérivant du théorème de Noether [NOETHER 1918] et développée sur la base des champs de déplacements réels et auxiliaires cinématiquement admissibles dans une configuration Lagrangienne-Eulérienne arbitraire établie précédemment.

1.1.5.4 Intégrale invariante M

L'intégrale M , proposée à l'origine par Knowles et Sternberg [KNOWLES 1972], a fait l'objet de plusieurs études pour analyser la problématique de la fissuration en mode mixte de rupture [JOHN 1987 ; ESHELBY 1987 ; BUDIANSKY 1973 ; HERMANN 1981 ; FREUND 1978 ; KING 1981, EISHEN 1987, CHANG 2002, MAIGRE 1993, MOUTOU 2008]. Permettant la séparation des modes de rupture, elle a été développée et proposée par Chen et Shield [CHEN 1977] tout en considérant une formulation bilinéaire de la densité de l'énergie de déformation. En élasto-statique, l'énergie totale, disponible dans le système, est réduite à l'énergie de déformation élastique W . Pour un milieu isotrope, considérons la forme bilinéaire associée à cette énergie (λ et μ étant les coefficients de Lamé) :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k} \cdot v_{i,j} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \cdot v_{i,j} \quad (1.112)$$

u_i et v_i représentent respectivement les champs de déplacements réels et auxiliaires. Reprenons le Lagrangien de l'équation (1.43), sa variation est donnée par :

$$\delta L = \int_t \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta \tilde{u}_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta \tilde{u}_{i,t} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta \tilde{v}_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta \tilde{v}_{i,t} \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \quad (1.113)$$

La relation (1.42) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_t \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t} + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & + \int_t \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_{i,j} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_{i,t} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.114)$$

Pour une extension de la fissure δa suivant l'axe x_1 , les déplacements virtuels peuvent être écrits sous la forme :

$$\delta u_{i,j} = \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a \text{ et } \delta u_{i,t} = \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (1.115)$$

$$\delta v_{i,j} = \frac{\partial v_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a \text{ et } \delta v_{i,t} = \frac{\partial v_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (1.116)$$

Les équations (1.114), (1.115) et (1.116) nous donnent l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & + \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \frac{\partial v_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \frac{\partial v_{i,t}}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.117)$$

Une forme générale et simplifiée de l'équation (1.117) se réduit à :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int \int_S \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & + \int \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_{i,t}^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_{i,j}^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_{i,t}^* \right) \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.118)$$

Puisque :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} &= \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot (\delta u_i^*)_{,j} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} &= \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* + \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot (\delta u_i^*)_{,t} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,j} &= \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \right)_{,j} \delta v_i^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot (\delta v_i^*)_{,j} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,t} &= \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \right)_{,t} \delta v_i^* + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot (\delta v_i^*)_{,t} \end{aligned} \right. \quad (1.119)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot (\delta u_i^*)_{,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* \\ \frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot (\delta u_i^*)_{,t} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} - \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* \\ \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot (\delta v_i^*)_{,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \right)_{,j} \delta v_i^* \\ \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot (\delta v_i^*)_{,t} = \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,t} - \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \right)_{,t} \delta v_i^* \end{cases} \quad (1.120)$$

En insérant les équations (1.119) et (1.120) dans l'équation (1.118) et en utilisant le théorème de Gauss – Ostrogradsky, pour passer d'une intégrale de surface S à une intégrale sur le contour ∂S entourant la surface S (figure 1.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int \int_{i \partial S} W \cdot n_1 \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt + \int \int_t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,t} \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & - \int \int_t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i^* + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \delta u_i^* \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt + \int \int_t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,t} \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt \\ & - \int \int_t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \right)_{,j} \delta v_i^* + \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \right)_{,t} \delta v_i^* \right] \cdot b \cdot dS \cdot dt \end{aligned} \quad (1.121)$$

Dans cette approche, nous considérons une vision Eulérienne avec $\delta \tilde{u}_i = 0$. La variation propre du champ de déplacement est donnée par :

$$\begin{cases} \delta u_i^* = -\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \delta a \\ \delta v_{i,j}^* = -\frac{\partial v_{i,j}}{\partial x_1} \cdot \delta a \end{cases} \quad (1.122)$$

Reportons l'expression (1.122) dans (1.121) et utilisons le théorème de Gauss – Ostrogradsky :

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \int_t \int_S W \cdot n_1 \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt - \int_t \int_S \left[\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot n_j + \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \cdot n_j \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt \\
 & - \int_S \left[\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \\
 & + \int_t \int_S \left\{ \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \right] \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \right)_{,j} + \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \right)_{,t} \right] \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right\} \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

Après simplification, l'équation (1.123) devient :

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \int_t \int_S \left[W \cdot n_1 - \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} \cdot n_j - \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \cdot n_j \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt \\
 & - \int_S \left[\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \cdot u_{i,1} + \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \cdot v_{i,1} \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \\
 & + \int_t \int_S \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \cdot u_{i,1} + \left(\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} \right)_{,t} \cdot u_{i,1} + \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} \right)_{,j} \cdot v_{i,1} + \left(\frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} \right)_{,t} \cdot v_{i,1} \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt
 \end{aligned} \tag{1.124}$$

La forme bilinéaire de l'énergie de déformation $W(\varepsilon_{ij}^u; \varepsilon_{ij}^v)$ nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^v \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial v_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^u \tag{1.125}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_{i,t}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial v_{i,t}} = 0 \tag{1.126}$$

Introduisons les expressions de l'énergie de déformation élastique dans l'équation (1.126) et appliquons à nouveau le théorème de Gauss – Ostrogradsky :

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \int_t \int_S \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot n_1 - (\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j \right] \cdot \delta a \cdot b \cdot ds \cdot dt \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \int_t \int_S (\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot \delta a \cdot b \cdot dS \cdot dt
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

σ_{ij}^u et σ_{ij}^v sont respectivement les champs des contraintes réels et auxiliaires.

En tenant compte des équations d'équilibre, la dernière intégrale se réduit à néant. A l'aide du théorème de Gauss – Ostrogradsky, l'équation (1.127) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\delta L = \int_t \int_S \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot \delta_{j1} - \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1} \right] \cdot dS \cdot dt = 0 \tag{1.128}$$

Rappelons que le Lagrangien est stationnaire quel que soit la variation infinitésimale δa .
 Appliquons à nouveau le théorème de Gauss-Ostrogradsky :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\partial S} (\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot n_1 - \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} \cdot n_j - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1} \cdot n_j) \cdot ds = 0 \quad (1.129)$$

Comme :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \cdot u_i \right)_{,j} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \right)_{,j} \cdot u_i + \frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \cdot u_{i,j} \\ \left(\sigma_{ij}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} = \sigma_{ij,j}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^v \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} \end{cases} \quad (1.130)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \cdot u_{i,j} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \cdot u_i \right)_{,j} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \right)_{,j} \cdot u_i \\ \sigma_{ij}^v \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} = \left(\sigma_{ij}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} - \sigma_{ij,j}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \end{cases} \quad (1.131)$$

En tenant compte de la transformation de Gauss – Ostrogradsky, le premier terme de l'équation (1.129) est développé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot n_1 \cdot ds &= \int_S (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j1}) \cdot dS \\ &= \int_S \sigma_{ij,1}^v \cdot u_{i,j} \cdot dS + \int_S \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j1} \cdot dS \end{aligned} \quad (1.132)$$

Par intégration de l'équation (1.131) dans l'équation (1.132), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot n_1 \cdot ds &= \int_S \sigma_{ij,1}^v \cdot u_{i,j} \cdot dS + \int_S \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j1} \cdot dS \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \cdot u_i \right)_{,j} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_1} \right)_{,j} \cdot u_i \right] \cdot dS + \int_S \left[\left(\sigma_{ij}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} - \sigma_{ij,j}^v \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] \cdot dS \end{aligned} \quad (1.133)$$

La transformation de Gauss – Ostrogradsky, appliquée à l'équation (1.133), permet d'écrire :

$$\int_{\partial S} \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j} \cdot n_1 \cdot ds = \int_{\partial S} \sigma_{ij,1}^v \cdot u_i \cdot n_j \cdot ds - \int_S \sigma_{ij,j1}^v \cdot u_i \cdot dS + \int_{\partial S} \sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} \cdot n_j \cdot ds - \int_S \sigma_{ij,j}^v \cdot u_{i,1} \cdot dS \quad (1.134)$$

En l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre permettent d'éliminer la 2^{ième} et la 4^{ième} intégrales de l'équation (1.134). L'équation (1.129) prend alors la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\partial S} (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j \cdot ds = 0 \quad (1.135)$$

Adoptons la notation suivante :

$$I = \tilde{P}_{j,1} \cdot n_j = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j \quad (1.136)$$

De la même façon que pour l'intégrale J , le passage du contour fermé ∂S au contour Γ est obtenu avec la condition de pression nulle sur les lèvres de la fissure. A partir de la représentation des différents contours de la figure 1.8, pour une fissure se propageant dans la direction x_1 , on obtient l'intégrale indépendante du contour :

$$\int_{\Gamma} I \cdot ds = \int_{\Gamma} I \cdot ds \quad (1.137)$$

L'intégrale M en statique est donc donnée par l'expression :

$$M = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j \cdot ds \quad (1.138)$$

Comme dans le cas de l'intégrale $G\theta$, nous faisons à nouveau appel à la notion de champ de vecteur $\vec{\theta}$ continu et arbitrairement dérivable dans le voisinage du front de la fissure. L'intégrale curviligne, sur laquelle est définie le champ mécanique (équation 1.138) nécessaire au calcul du paramètre M , sera convertie en intégrale surfacique moyennant le théorème de divergence de Gauss – Ostrogradsky. Cette technique d'intégration évite toute la difficulté liée au choix du contour linéique entourant la pointe de fissure. Ce champ de vecteur $\vec{\theta}$ admet les mêmes caractéristiques que celles décrites pour l'intégrale $G\theta$ (figures 1.8 et 1.13).

1.1.5.5 Intégrale invariante $M\theta$

Soit la notation suivante :

$$M = \int_{\Gamma} \tilde{P}_{j,1} \cdot n_j \cdot ds \quad (1.139)$$

Comme dans le développement de l'intégrale $G\theta$, le champ $\vec{\theta}$, unité à l'intérieur du contour et nul sur le domaine extérieur, est continument dérivable. Passant d'un contour ouvert Γ à

un contour fermé ∂S , formé par deux contours Γ et Γ' (figure 1.8) avec $\theta_k = 0$ sur Γ' , nous écrivons :

$$M\theta = \int_{\partial S} -\tilde{P}_{j,k} \cdot n_j \cdot \theta_k \cdot ds \quad (1.140)$$

Le théorème de Gauss – Ostrogradsky, appliqué à l'équation (1.140), nous donne :

$$M\theta = \int_S -\left(\tilde{P}_{j,kj} \cdot \theta_k + \tilde{P}_{j,k} \cdot \theta_{k,j}\right) \cdot dS \quad (1.141)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{j,kj} \cdot \theta_k &= (P_{j,k})_{,j} \cdot \theta_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_{ij,k}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k}\right)_{,j} \cdot \theta_k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_{ij,jk}^v \cdot u_i + \sigma_{ij,k}^v \cdot u_{i,j} - \sigma_{ij,j}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,jk}\right) \cdot \theta_k \end{aligned} \quad (1.142)$$

En introduisant les équations (1.136) et (1.142) dans l'équation (1.141), nous obtenons :

$$M\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left[\begin{aligned} &-\left(\sigma_{ij,jk}^v \cdot u_i + \sigma_{ij,k}^v \cdot u_{i,j} - \sigma_{ij,j}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,jk}\right) \cdot \theta_k \\ &-\left(\sigma_{ij,k}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k}\right) \cdot \theta_{k,j} \end{aligned} \right] \cdot dS \quad (1.143)$$

En absence des forces volumiques, les équations d'équilibre permettent d'éliminer la 1^{ière} et la 3^{ième} intégrale de l'équation (1.143). Cette dernière prend donc la forme suivante :

$$M\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_S \left(-\sigma_{ij,k}^v \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,jk}\right) \cdot \theta_k \cdot dS + \int_S \left(-\sigma_{ij,k}^v \cdot u_i + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k}\right) \cdot \theta_{k,j} \cdot dS \right) \quad (1.144)$$

Le premier terme de l'équation (1.144) s'annule en raison de la loi de conservation d'énergie mise en évidence par l'équation (1.128) ; d'où l'intégrale $M\theta$ en statique :

$$M\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^v \cdot u_i\right) \cdot \theta_{k,j} \cdot dS \quad (1.145)$$

Dans le cas où les lèvres de la fissure sont chargées (pressions par exemple), une intégrale supplémentaire vient s'ajouter à l'équation (1.145) (une intégrale curviligne sur les deux lèvres de la fissure L). L'intégrale $M\theta$ en statique est étendue à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} M\theta &= \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^v \cdot u_i\right) \cdot \theta_{k,j} \cdot dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \int_L \sigma_{ij}^u \cdot n_j \cdot v_{i,k} \cdot \theta_k \cdot ds \end{aligned} \quad (1.146)$$

Le champ auxiliaire v_i est cinématiquement admissible ; son expression est donnée par les champs asymptotiques respectivement définis dans les équations (1.2) et (1.12) pour des milieux élastiques isotrope et orthotrope. Les champs de contraintes auxiliaires σ_{ij}^v sont définis par les champs asymptotiques (1.1) et (1.11) pour des milieux élastiques isotrope et orthotrope.

- Interprétation physique de l'intégrale $M\theta$

Lorsque les champs de déplacements réels u_i et auxiliaires v_i cinématiquement admissibles sont égaux, l'intégrale M s'interprète physiquement comme étant le taux de restitution d'énergie ; c'est-à-dire :

$$M(u, u) = J = G \quad (1.147)$$

Dans ces conditions, on propose, via le principe de superposition, la relation entre l'intégrale M et les facteurs d'intensité des contraintes réels, ${}^u K_\alpha^{(\sigma)}$, et auxiliaires, ${}^v K_\alpha^{(\sigma)}$, dans une configuration de chargement en mode mixte:

$$M(u, v) = C_I \cdot \frac{{}^u K_I^{(\sigma)} \cdot {}^v K_I^{(\sigma)}}{8} + C_{II} \cdot \frac{{}^u K_{II}^{(\sigma)} \cdot {}^v K_{II}^{(\sigma)}}{8} \quad (1.148)$$

Ainsi, le découplage complet du mode de rupture est obtenu en effectuant deux calculs distincts à partir de l'intégrale $M(u, v)$. Ces calculs sont réalisés par le choix judicieux des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes virtuels ${}^v K_I^{(\sigma)}$ et ${}^v K_{II}^{(\sigma)}$. Par conséquent, la séparation de modes de rupture s'exprime à travers les facteurs d'intensité des contraintes réels ${}^u K_I^{(\sigma)}$ et ${}^u K_{II}^{(\sigma)}$ pour chaque mode de rupture respectif :

$${}^u K_I^{(\sigma)} = \frac{8 \cdot M(u, v) \cdot ({}^v K_I^{(\sigma)} = 1, {}^v K_{II}^{(\sigma)} = 0)}{C_I} \quad (1.149)$$

$${}^u K_{II}^{(\sigma)} = \frac{8 \cdot M(u, v) \cdot ({}^v K_I^{(\sigma)} = 0, {}^v K_{II}^{(\sigma)} = 1)}{C_{II}} \quad (1.150)$$

Finalement, pour chaque part de mode de rupture I et II, les taux de restitution d'énergie s'expriment par :

$$G_I = C_I \cdot \frac{({}^u K_I^{(\sigma)})^2}{8} \quad (1.151)$$

$$G_{II} = C_{II} \cdot \frac{({}^u K_{II}^{(\sigma)})^2}{8} \quad (1.152)$$

Il est à noter que les expressions des invariants intégraux $G\theta$ et $M\theta$ gardent les mêmes formes dans le cas des problèmes en déformation plane ou en contrainte plane. Ces paramètres de fissuration sont généralement déterminés par les méthodes de simulation numérique dont la plupart utilisent la méthode des éléments finis. Un état de l'art des méthodes de simulation numériques pour le calcul des paramètres de fissurations est donné dans les sections suivantes.

1.2. Méthodes de simulation numérique

1.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la principale méthode utilisée pour le calcul des structures en mécanique. Elle a donc été naturellement étudiée pour résoudre les problèmes de fissuration. Avec cette méthode, la fissure est, par principe, décrite explicitement. Cependant, deux difficultés majeures se posent :

La première concerne la nature singulière du champ de déplacements et des contraintes imposant un maillage très fin autour de la pointe de fissure. Cette représentation du champ singulier autour de la pointe de fissure a été améliorée par l'emploi d'éléments singuliers dits de Barsoum [BARSOUM 1974]. Ces éléments munis de nœuds supplémentaires aux quarts des côtés permettent d'intégrer exactement la singularité dans les fonctions de forme et ainsi obtenir de meilleurs résultats.

La seconde difficulté réside dans la description géométrique de la fissure et de son trajet lors de la simulation de la propagation. En effet, soit le maillage est construit avec une connaissance *à priori* du trajet, soit celui-ci est remaillé à chaque avancée de la fissure. Ainsi, nous distinguons deux grandes familles de méthodes selon la nature du chargement : celles simulant la fissure droite en mode d'ouverture et celles traitant des fissures inclinées en mode mixte.

1.2.1.1 Fissure sollicitée en mode I

Dans le cas des sollicitations de fissures en mode d'ouverture, le trajet de fissure est entièrement connu puisque celui-ci est rectiligne. La discrétisation du trajet est alors entièrement dépendante de la taille des mailles utilisées le long de celui-ci. La technique couramment employée est celle dite de déboutonnage ou relâchement de nœuds [MCCLUNG 1989a, 1989b ; SOLANKY 2003 ; SANDER 2005, 2006 ; CARIN 2000, KOBAYASHI 1976 ; JOLIFF 2006] dans laquelle les nœuds, situés sur la ligne de propagation, sont libérés à mesure que la fissure avance. Les positions successives du front de la fissure sont alors imposées par la discrétisation de la ligne de propagation.

1.2.1.2 Fissure sollicitée en mode mixte (I+II)

Dans le cas de sollicitations en mode mixte représentant une combinaison de modes d'ouverture et de cisaillement plan, la technique de déboutonnage ne peut plus être mise en œuvre car le trajet de la fissure est quelconque, la plupart du temps complexe et non connu au préalable. La connaissance du trajet de fissure est *à priori* dictée par les données

expérimentales. Dans le cas générale où le trajet est inconnu, deux méthodes sont classiquement utilisées, notamment les méthodes de remaillages [BITTENCOUR 1996 ; TRÄDEGARD 1998 ; BOUCHARD 2000, 2003 ; TVEGAARD 2004 ; SWENSON 1988 ; NISHIOKA 2001] et les méthodes utilisant des éléments d'interfaces à zones cohésives [NGUYEN 2001 ; YANG 2005 ; XU 1994 ; CAMACHO 1996 ; ORTIZ 99]. Les méthodes avec remaillage posent le problème de transfert des champs d'un maillage sur l'autre tandis que les méthodes à éléments d'interface imposent le trajet de fissure par la discrétisation (le trajet doit suivre la frontière des éléments), les éléments d'interfaces étant placés à la frontière des éléments finis. Le choix de la loi de décohésion de l'interface peut également poser problème.

1.2.2 Méthode des éléments de frontière

De nombreux développement de méthodes par éléments de frontière ont été réalisés en mécanique de la rupture [CHIRINO 1994 ; ALBUQUERQUE 2004 ; SEELIG 1999 ; YANG 1995 ; TUHKURI 1997 ; LEITAO 1995, 2000]. La simplicité de la description de la fissure et de son évolution sont les avantages immédiats de la méthode. En effet, le travail de remaillage est beaucoup moins lourd et permet de représenter naturellement la fissure [SEELIG 1999 ; ALBUQUERQUE 2004]. Les quelques limitations sont des problèmes de conditionnement de matrice, de stockage de données et la nécessité de mailler classiquement les zones plastiques.

1.2.3 Méthode sans maillage

La méthode sans maillage, couramment utilisée en mécanique de la rupture, est celle dite EFG (Element Free Galerkin) proposée par Belytshko [BELYTSHKO 1994]. L'avantage principal de cette méthode est l'absence de discrétisation de la fissure. La structure est représentée par des particules, appelées nœuds ayant des domaines d'influence, remplaçant ainsi la notion d'éléments propre aux éléments finis [FLEMING 1997 ; XU 1998 ; RAO 2004a ; DUFLOT 2004 ; ORGAN 1996 ; KRYSL 1999]. L'inconvénient de la méthode réside dans la lourdeur du calcul des voisins avec l'application des critères de visibilité, la quadrature numérique, la taille du domaine d'influence et, surtout, la difficulté d'imposer des conditions aux limites cinématiques. Une vision simplifiée de ces méthodes a été récemment présentée dans [RABCZUK 04].

1.2.4 Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

Cette méthode a été développée pour résoudre des problèmes de propagation dynamique de fissure en mode mixte où, non seulement, le trajet de fissure demeure *à priori* inconnu, mais les fissures ne sont pas explicitement décrites par le maillage [RETHORE 2004, 2005, 2005a et 2005b ; GREGOIRE 2007]. La méthode des éléments finis étendue, basée sur une partition de l'unité [BABUSKA 1997], consiste à enrichir une approximation classique éléments finis avec différentes fonctions qui traduisent la discontinuité et la singularité d'une fissure dans un milieu matériel.

La méthode avait été développée au départ pour des cas quasi-statiques par [BELYTSHKO 1999 ; MOËS 1999]. Le succès de la méthode, à décrire les phénomènes de rupture

dynamique, a permis son utilisation successive pour la propagation de fissure en 2D [PRABEL 2007; MENOILLARD 2006], en 3D [DUARTE 2001; MOËS 2002; GRAVOUIL 2002 ; ROUX 2009], avec contact [DOLBOW 2001] ou avec zone cohésive [MOËS et BELYTCHKO, 2002].

Une meilleure compréhension de la méthode est donnée dans [RETHORE 2005] dont une description succincte est mentionnée ci-dessous.

- Discrétisation spatiale

Soit Ω un milieu matériel élastique homogène bidimensionnel fissuré. Le problème est formulé comme en mécanique classique des milieux continus en HPP (Hypothèses des Petites Perturbations) et en déformation plane en ajoutant une inconnue supplémentaire qui est la position du front de fissure au cours du temps : $a(t)$.

Dans la méthode des éléments finis, une approximation classique des champs de déplacements \bar{U} est donnée par :

$$\bar{U}(t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) \cdot \bar{u}_i(t) \quad (1.153)$$

où \mathcal{N} est l'ensemble des nœuds support des fonctions de formes $\{N_i\}_{i \in \mathcal{N}}$

et $\bar{u}_i(t)$ est le vecteur des degrés de libertés nodaux au temps t .

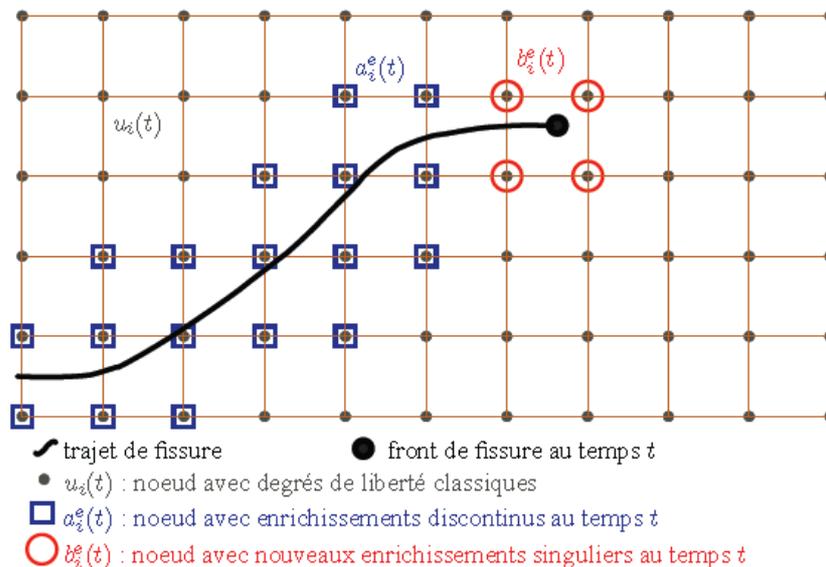


Figure 1.14 : Enrichissements ajoutés à l'approximation éléments finis

La fissure est représentée par un ensemble de segments rectilignes. Afin de rendre indépendante la description de la fissure du maillage de la structure, des enrichissements discontinus sont ajoutés sur l'ensemble des nœuds qui ont eu leur support entièrement coupé par la fissure alors que l'ensemble des nœuds, dont le support contient la pointe de la fissure,

est enrichi par des fonctions singulières comme illustré en figure 1.14. Lorsque la fissure se propage, tous les anciens enrichissements sont conservés. Les nouveaux enrichissements, correspondant à la nouvelle position de la fissure, sont simplement ajoutés aux anciens. L'approximation des champs de déplacements devient :

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(t) = & \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) \cdot \bar{u}_i(t)}_{\text{Approximation classique éléments finis}} \\
 & + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}^e(t)} N_i(x) \cdot \mathcal{H}(x) \cdot a_i^e(t)}_{\text{Enrichissements discontinus}} \\
 & + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}^e(t)} \sum_{j \in \{1, 4\}} N_i(x) \cdot B_j^e \cdot b_{ij}^e(t)}_{\text{Enrichissements singuliers}}
 \end{aligned} \tag{1.154}$$

où, au temps t :

\mathcal{N} est l'ensemble des nœuds support des fonctions de formes N_i ,

$\mathcal{N}_{cut}^e(t)$ est l'ensemble des nœuds qui ont eu leur support entièrement coupé par la fissure,

$a_i^e(t)$ sont les degrés de libertés nodaux correspondant aux fonctions sauts \mathcal{H} ,

$\mathcal{N}_{tip}^e(t)$ est l'ensemble des nœuds qui contiennent le front de fissure dans leur support,

$b_{ij}^e(t)$ sont les degrés de libertés nodaux correspondant aux fonctions singulières B_j^e .

En accord avec Moës et al., [MOËS 1999], on a :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est au-dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } x \text{ est en dessous de la fissure} \end{cases} \tag{1.155}$$

$$\{B_j^e(r, \theta)\}_{j \in \{1, 4\}} = \sqrt{r} \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin(\theta), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin(\theta) \right\} \tag{1.156}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires locales.

L'équation (1.156) représente la base de fonction d'enrichissement la plus judicieuse pour des problèmes en élasticité bi ou tridimensionnelles.

Si les différentes méthodes numériques, mentionnées précédemment, permettent de déterminer les propriétés de fissuration, elles reposent cependant sur une série d'hypothèses ne pouvant pas toujours satisfaire le comportement d'une structure réelle. Pour des raisons de validation expérimentale, les outils d'analyse des champs cinématiques par des techniques optiques de mesures ont fait l'objet de nombreux développements. Parmi ces méthodes

expérimentales, on peut citer la méthode d'holographie [FOTTENBURG 1969], l'interférométrie de moiré [POST 1983 ; ARAKAWA 1991 ; SANFORD 1991 ; WANG 1993], la photoélasticité [NIGAM et SHUKLA 1988; RAMULU 1983, 1984] et la méthode des caustiques [KALTHOFF 1987; NIGAM et SHUKLA 1988]. Ces techniques optiques ont été appliquées avec succès en mécanique de la rupture pour caractériser le processus de fissuration. Celle ayant donné les meilleurs résultats reste cependant la méthode des caustiques, développée par Rosakis [ROSAKIS 1980].

La technique par corrélation d'images numériques (DIC), a été développée grâce à sa polyvalence en termes d'échelle d'observation allant du nano aux observations macroscopiques avec essentiellement le même type d'analyses [SUTTON 1983, 1986, 1988, 1991 ; BRUCK 1989 ; BESNARD 2006]. La corrélation d'images numériques a été appliquée pour mesurer les déplacements et déformations réels en tout point de la surface d'un échantillon. Contrairement aux techniques optiques de mesures mentionnées précédemment, la méthode de corrélation d'images présente l'avantage d'un système assez simple et beaucoup plus facile à appliquer expérimentalement en raison de condition minimale de préparation de la surface des éprouvettes. Ensuite, elle permet de minimiser le potentiel d'erreurs de mesure ; d'où son application aux problèmes de fissuration.

Nous présentons la méthode de corrélation d'images numériques appliquée à un problème de fissuration.

1.3 Détermination expérimentale des paramètres de fissuration

1.3.1 Corrélation d'images numériques

La technique de corrélation d'images est une méthode optique sans contact de mesure de champs cinématiques. Cette méthode offre la possibilité de déterminer les champs de déplacements et de déformations en tout point de la surface des objets, basée sur la comparaison de deux images prises à différents pas de chargement, l'une dite de référence, l'autre correspondant à l'état déformé. De façon explicite, la corrélation consiste à rechercher le degré de ressemblance entre les deux images. Elle doit donc «reconnaître» un même motif d'une image à l'autre et de l'utiliser comme un « marqueur » d'un sous ensemble de cette image.

Développée depuis les années 80 par Sutton et al. [SUTTON 1983, 1986], la technique de corrélation d'images sert d'alternative aux méthodes classiques longtemps adoptées pour les mesures des champs de déplacements dans les structures en service. Comparativement aux méthodes de mesures locales standards, telles que les jauges de déformation, les extensomètres,..., la technique de corrélation présente de gros avantages, à savoir:

- Elle offre la possibilité d'effectuer et d'obtenir des mesures sans contact avec l'éprouvette testée. Les mesures ne sont donc pas affectées de la présence du capteur de mesures.

- Elle fournit des quantités locales et globales en termes de déplacements et de déformations.
- Elle offre la possibilité de générer un maillage éléments finis à partir des mesures [FEDELE 2009].

1.3.2 Calcul du champ de déplacements par corrélation d'images numériques

La mesure consiste à prendre une série d'images de la zone d'étude de la structure soumise au chargement avec une camera CCD. Chaque image capturée correspond à différents pas de chargement. La structure à étudier est recouverte de motifs aléatoires. On suppose disposer d'une image numérique initiale et d'une image numérique finalement déformée correspondante. Une image numérique se présente comme une fonction discrète de niveau de gris repartis sur les pixels formant une grille régulière. En corrélant les informations provenant des deux images, on peut estimer le déplacement de différents points de l'image initiale vers l'image finale (figure 1.15).

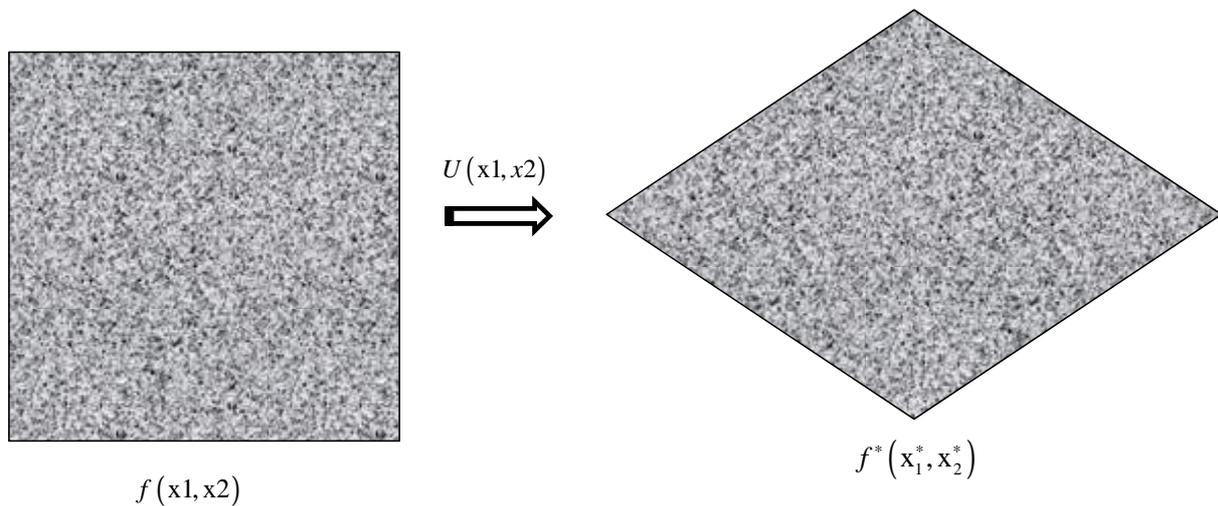


Figure 1.15 : Image de référence et image déformée

Afin d'obtenir une précision sub-pixels, les niveaux de gris des images sont interpolés par une fonction bilinéaire ou spline cubique, ce qui permet d'obtenir une fonction continue de niveaux de gris sur toute l'image.

D'un point de vue mathématique, considérons deux fonctions discrètes $f(x_1, x_2)$ et $f^*(x_1^*, x_2^*)$ représentant respectivement le niveau de gris d'un pattern sur l'image initiale et sa déformée. (x_1, x_2) et (x_1^*, x_2^*) représentent respectivement les coordonnées du centre d'un pattern de l'image initiale et de l'image déformée (figure 1.16).

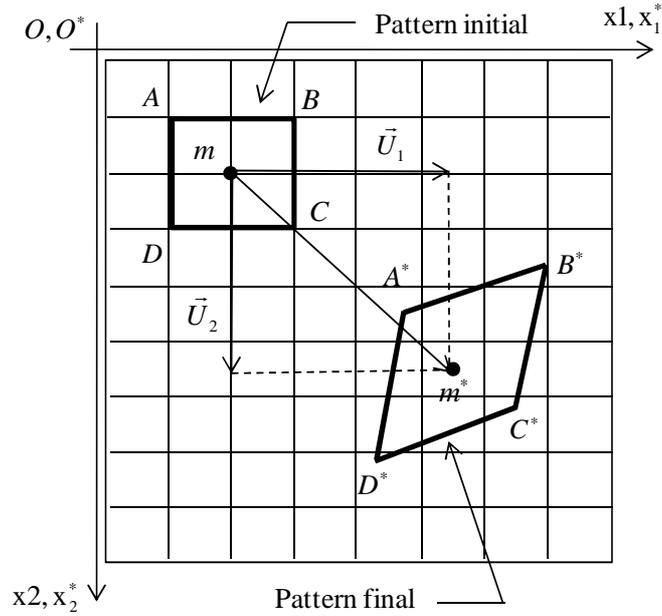


Figure 1.16 : Pattern initial (ABCD centré m) et pattern final ($A^*B^*C^*D^*$ centré m^*)

Le système de coordonnées choisi reste inchangé puisque la position de la caméra CCD demeure fixe durant la déformation de l'image initiale. La corrélation détermine alors un champ de déplacement (U_1, U_2) de l'image initiale qui satisfait au mieux la relation :

$$f^*(x_1^*, x_2^*) = f(x_1 + U_1(x_1, x_2), x_2 + U_2(x_1, x_2)) \quad (1.157)$$

En pratique, le champ de déplacement est supposé homogène bilinéaire $\{\ell_j\} = \{x_1, x_2, x_1 \cdot x_2, 1\}$ à l'intérieur du pattern. Une interpolation de type spline cubique est alors utilisée [TOUCHAL-MAGUIL 1997]. Ainsi, pour chaque point d'un pattern quelconque, le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2) = U_1^1 \cdot x_1 + U_1^2 \cdot x_2 + U_1^3 \cdot x_1 \cdot x_2 + U_1^4 \\ U_2(x_1, x_2) = U_2^1 \cdot x_1 + U_2^2 \cdot x_2 + U_2^3 \cdot x_1 \cdot x_2 + U_2^4 \end{cases} \quad (1.158)$$

U_1^i et U_2^i sont des pondérations des déplacements inconnus inscrits dans la fonction de la base bilinéaire choisie $\{\ell_j\} = \{x_1, x_2, x_1 \cdot x_2, 1\}$. Cette approximation du champ (1.158) permet de mesurer les déplacements de corps rigide et les déformations linéaires. Le champ de déplacement global (U_1, U_2) est enfin obtenu en minimisant un coefficient de corrélation croisé, c , sur un pattern de l'image de référence [BRUCK 1989]:

$$c = 1 - \frac{\int_{S_p} f(x_1, x_2) f^*(x_1^*, x_2^*) dx_1 dx_2}{\sqrt{\int_{S_p} (f(x_1, x_2))^2 dx_1 dx_2 \int_{S_p} (f^*(x_1^*, x_2^*))^2 dx_1 dx_2}} \quad (1.159)$$

où S_p désigne la surface du pattern de l'image de référence.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz [JAHNE 2002], c est défini par l'inégalité $0 \leq |c| \leq 1$. Cela veut dire que la corrélation parfaite se produit si et seulement si $|c| = 1$.

Durant le processus d'initialisation de l'algorithme (1.159), la position d'un pattern de référence, sur les images initiale et finale, est définie. Ceci permet d'avoir une solution approximative du champ de déplacements (U_1, U_2) pour le pattern considéré. Les composantes du champ de déplacement pour ce pattern (centré en m) sont déterminées par un processus itératif comme présenté sur la figure 1.17. La corrélation est alors effectuée sur les quatre carrés centrés en A, B, C et D , sommet du pattern centré en m . Lors du calcul en corrélation, la convergence est atteinte lorsque la précision, entre deux itérations, est satisfaite (figure 1.17d). La solution, calculée pour le premier pattern, est utilisée comme solution initiale pour les patterns voisins. La corrélation est ainsi réalisée de proche en proche sur l'ensemble du domaine de la zone d'intérêt. On obtient ainsi un champ de déplacement discrétisé sur la grille de corrélation avec une précision de l'ordre de 1/100 de pixel [TOUCHAL-MAGUIL 1997].

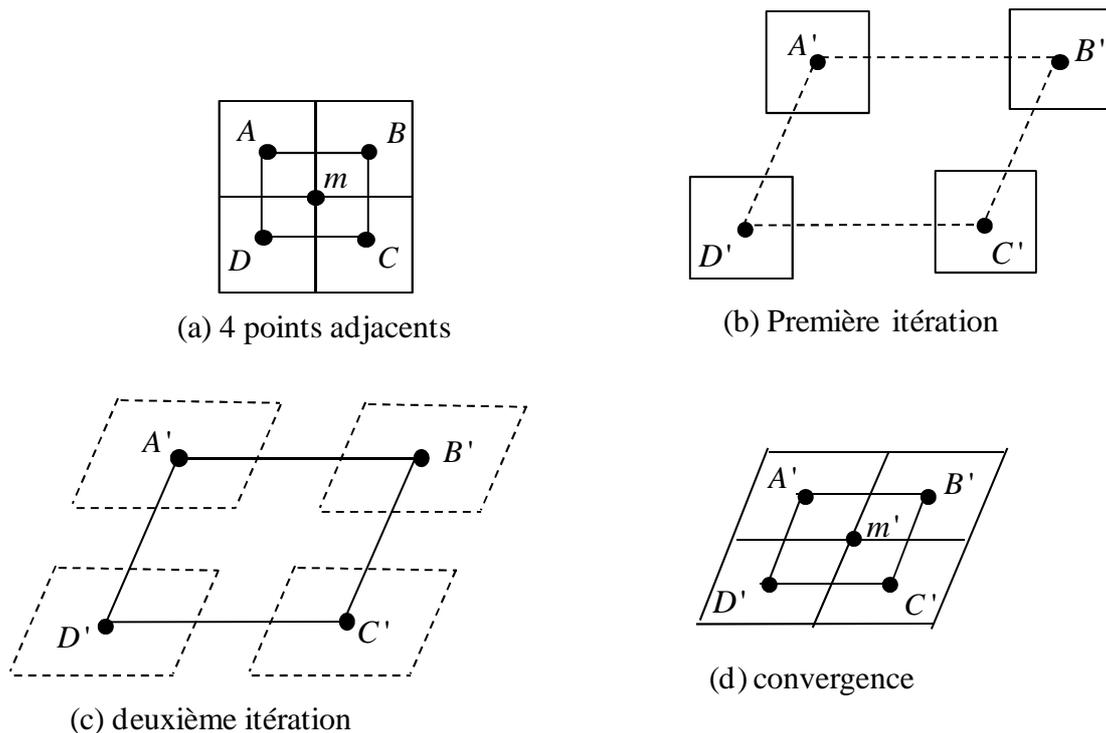


Figure 1.17 : Calculs du champ de déplacement sur un pattern

1.3.3 Sources d'erreurs de mesures en corrélation d'images numériques

Du fait des conditions expérimentales, l'acquisition des images par la caméra CCD n'est jamais parfaite. En effet, si on considère les deux fonctions discrètes $f(x_1, x_2)$ et $f^*(x_1^*, x_2^*)$,

la déformée de l'image est due à un champ de déplacement (U_1, U_2) , et ce, sans altération du niveau de gris aléatoire. Ainsi, les deux fonctions discrètes f et f^* , représentant le niveau de gris à chaque pixel (ou pattern), sont à nouveau reliées par l'expression suivante:

$$f^*(x_1^*, x_2^*) = f(x_1 + U_1(x_1, x_2), x_2 + U_2(x_1, x_2)) + \eta(x_1, x_2) \quad (1.160)$$

η est l'amplitude du bruit expérimental engendré par l'acquisition de l'image. Ce bruit provient de plusieurs sources, notamment la caméra CCD numérique, la distorsion de l'image due à un agrandissement de la lentille ou à l'angle de celle-ci, la forme et taille du pattern, le filtre d'interpolation de sub-pixel, le motif du pattern, ..., [LECOMPTE 2007, 2006; SCHREIER 2000, 2002 ; SUTTON 1988 ; YONEYAMA 2006 ; COOREMAN 2008, 2007]. Tous ces éléments affectent les déplacements mesurés. De plus, ces déplacements sont d'avantage perturbés en présence d'une discontinuité de type fissure et, plus précisément, au niveau des patterns tranchés par la fissure.

1.3.3.1 Limite de la corrélation d'images pour l'estimation des déplacements discontinus

Le champ de déplacement est homogène bilinéaire à l'intérieur du pattern car la base de fonctions, définie par l'équation (1.158), ne contient que des termes continus ; d'où l'efficacité de la méthode de corrélation d'images à obtenir un champ de déplacement continu global. Cependant, la présence d'une discontinuité de champ de déplacement dans le solide met naturellement en cause l'efficacité de la technique. Autrement dit, il devient difficile d'estimer, avec précision, le champ de déplacement des patterns coupés par la fissure.

Pour illustrer cette difficulté, nous présentons un exemple de calculs de champ de déplacement dans la zone fissurée d'un échantillon soumis à un chargement en mode d'ouverture. Une zone est sélectionnée autour de la pointe de fissure pour mener l'analyse de champs (figure 1.18).

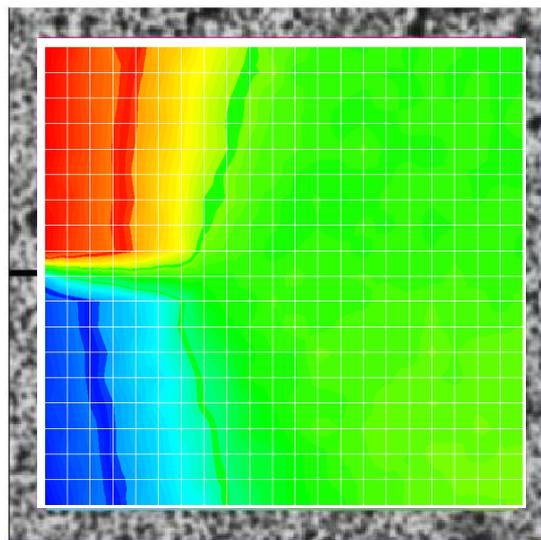


Figure 1.18 : Calcul des déplacements verticaux par corrélation d'images

Le front de fissure a pour coordonnées $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$. Ce front de fissure est approximatif puisque le déplacement est sub-pixel. La cartographie du champ de déplacement met en évidence des déplacements incohérents dans les patterns contenant cette discontinuité. Dans ces conditions, il est à la fois difficile de localiser la position précise de la pointe de fissure et d'identifier les deux lèvres de celle-ci.

1.3.3.2 Amélioration du calcul des déplacements par corrélation d'images numériques

Pour améliorer l'estimation des champs de déplacement discontinus à l'aide d'outils de corrélation d'images numériques, certains auteurs proposent d'enrichir la base de fonctions avec les fonctions asymptotiques définies en mécanique linéaire de la rupture (1.2) afin de pouvoir prendre en compte les termes discontinus [HILD 2006 ; JINLONG 2010].

D'autres techniques ont été récemment développées dont les plus utilisées sont la méthode de corrélation d'images numériques étendues (X-DIC) et celle de la minimisation d'erreurs au sens des moindres carrés.

La première méthode utilise un schéma de discrétisation étendu basé sur la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) décrit par l'équation (1.154) [BLACK 1999 ; MOËS 1999]. Puisque la mesure du champ de déplacement est obtenue par la technique de corrélation d'images et compte tenue de la similitude entre celle-ci et la méthode des éléments finis, ce type de discrétisation (X-FEM) a ensuite été introduit dans un algorithme de corrélation d'images numériques pour, à la fois, prendre en compte la présence d'une fissure et localiser la position du front de la fissure durant la propagation de fissure en statique ou en dynamique [RETHORE 2006, 2007, 2008, 2009, 2010; HILD 2006 ; ROUX 2006, 2009].

La deuxième technique utilise la procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires pour minimiser l'erreur résiduelle entre la solution analytique asymptotique basée sur le développement d'une série mathématique pondérée de coefficients (séries de Williams) et le champ de déplacements expérimental [YONEYAMA 2006, 2007 ; McNEILL 1987 ; ANBANTO-BUENO 2002 ; ROUX 2006 ; HAMAM 2007]. La vraie position de la pointe de fissure est obtenue lorsque l'erreur globale résiduelle ou l'écart moyen est minimisé entre le champ analytique asymptotique et les données expérimentales.

Il est à noter que ces différentes méthodes, employant les champs asymptotiques pour apporter une amélioration aux déplacements bruts fournis par la corrélation d'images, nécessitent obligatoirement de pouvoir connaître, *a priori*, la géométrie de la fissure puisque ces champs asymptotiques dépendent des coordonnées polaires et sont liés à la position de la pointe de fissure.

Par contre, à défaut de connaître la géométrie de la fissure, un algorithme de localisation de la fissure a été développé et implémenté dans un code de calculs de corrélation d'images numériques pour localiser des discontinuités géométriques ou matérielles même lorsque leurs positions sont inconnues. Une formulation théorique de cet algorithme est présentée ci-dessous.

1.3.3.3 Algorithme de localisation de la fissure

Soient deux points M et N , choisis arbitrairement dans un pattern d'une image de référence (figure 1.19), et soit U un champ de déplacements appliqué de telle sorte que les points correspondants, M^* et N^* dans l'image déformée, soient séparés par une discontinuité géométrique ou matérielle. Une mesure de la variation de distance, représentative d'une éventuelle discontinuité entre les deux points M et N notée $M \square N$, est définie par :

$$M \square N = \left\| \overline{M^*N^*} - \overline{MN} \right\| \tag{1.161}$$

Puisque, $\forall(M, M^*), \overline{O^*M^*} = \overline{OM} + U(M)$, l'expression de la discontinuité, entre les deux points M et N , est donnée par :

$$M \square N = \left\| U(N) - U(M) \right\| \tag{1.162}$$

$U(P)$ est toujours donné par la minimisation de l'équation du coefficient de corrélation croisé (1.159).

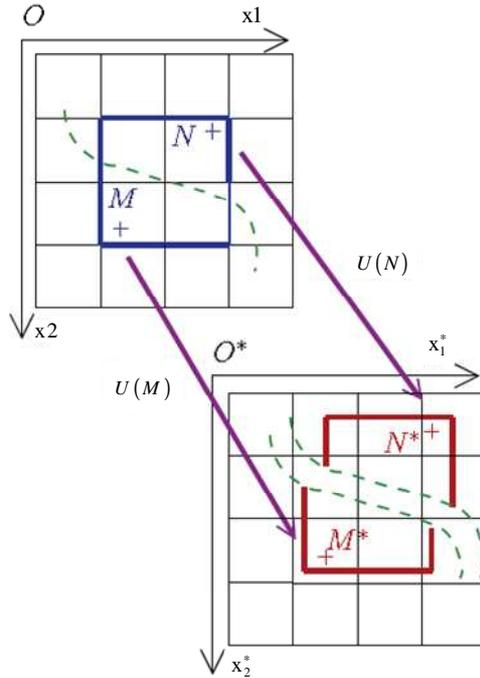


Figure 1.19 : Discontinuité entre deux points M et N

A partir de la définition de la discontinuité entre deux points (1.162), un critère de discontinuité du pattern $ABCD$ est donné par l'équation (1.163). Ainsi, la présence d'une discontinuité dans le pattern sera détectée par seuillage de la mesure :

$$\begin{aligned} K(P) &= \max(A \square C; B \square D) \\ &= \max(\|U(C) - U(A)\|; \|U(D) - U(B)\|) \end{aligned} \tag{1.163}$$

Ce critère (1.163) permet de capturer une discontinuité quelconque dans le pattern comme illustré par la figure 1.20.

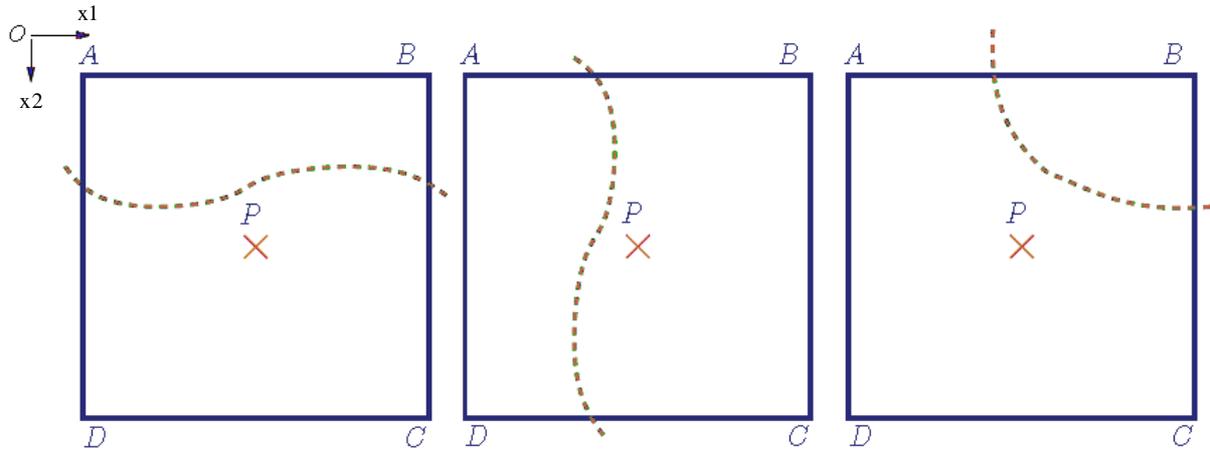


Figure 1.20 : Différentes positions d'une discontinuité dans un pattern quelconque

1.3.3.4 Application de l'algorithme de détection de la fissure

- Cas artificiel d'une géométrie de fissure inconnue

L'algorithme de détection de fissure a été appliqué au cas d'une image de référence ayant subi une déformation suite à l'ouverture de la fissure en mode I [GREGOIRE 2008]. Les deux images, initiale et déformée, sont converties en fonctions discrètes des niveaux de gris. Le critère de détection de discontinuité sur un pattern (1.163) est calculé sur toute l'image. La figure 1.21 montre l'évolution de ce critère de détection de discontinuité.

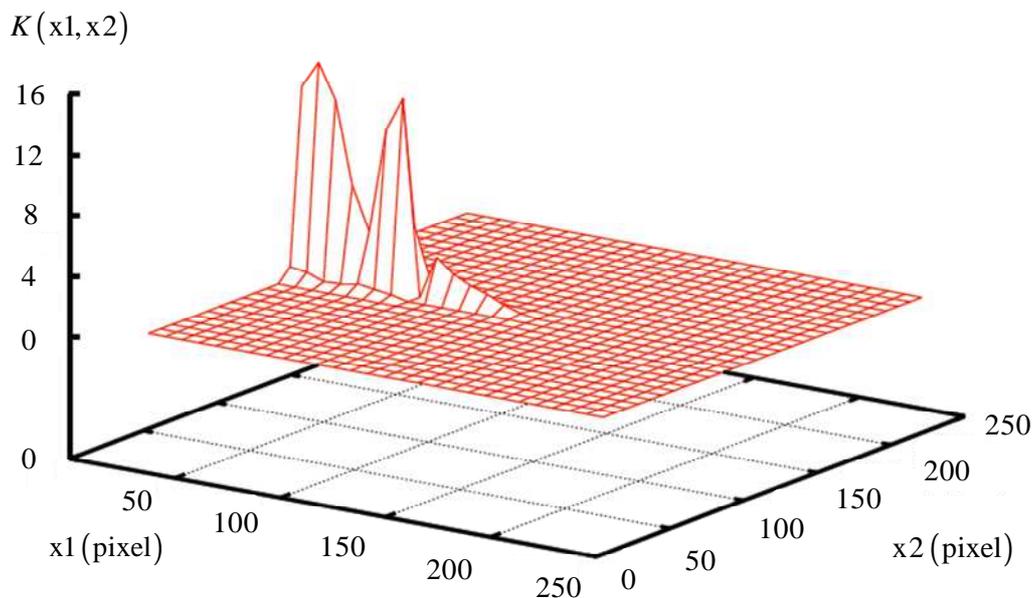


Figure 1.21 : Evolution du critère de discontinuité sur l'image de référence

Etant donné le seuillage du critère de détection de discontinuité sur un pattern, le seuil est proportionnel à la valeur moyenne arithmétique du critère sur l'image (1.164) :

$$\begin{cases} K(P) \geq \beta \bar{K} \Rightarrow K_T(P) = 1 & (\text{Pattern fissuré}) \\ K(P) < \beta \bar{K} \Rightarrow K_T(P) = 0 & (\text{Pattern sain}) \end{cases} \quad (1.164)$$

\bar{K} est la moyenne arithmétique du critère de discontinuité K sur l'ensemble de l'image. β est un coefficient modifiable par l'utilisateur dont la valeur est prise égale à 2 par défaut. K_T est la valeur seuil du critère.

Il est à noter que la valeur seuil est volontairement choisie petite afin d'éviter la perte d'informations en pointe de fissure où la valeur du critère de discontinuité est faible. En outre, des îlots de patterns sains, mais considérés comme fissurés par l'algorithme de seuillage, peuvent alors se former du fait des bruits inhérents à la mesure. Ces îlots sont éliminés par des techniques classiques de traitement d'images [PRATT 1991]. Un masque peut également être défini par l'utilisateur afin de réduire la zone de seuillage.

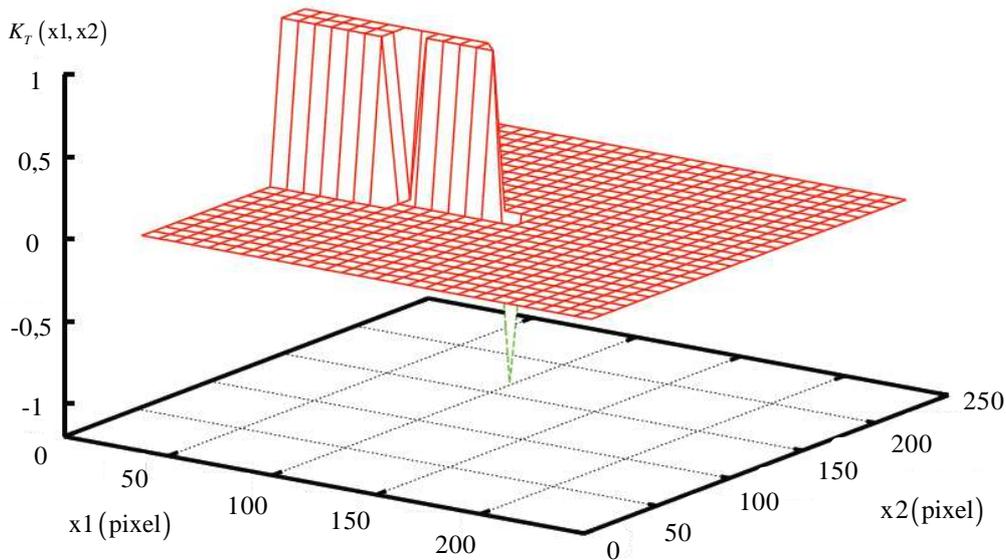


Figure 1.22 : Evolution du critère de discontinuité après seuillage

La pointe de fissure est simplement déterminée comme étant le pattern fissuré entouré par le moins de patterns fissurés. On obtient une représentation de la fonction K_T définie par, figure 1.22:

- $K_T = 0$ pour les patterns sains
- $K_T = 1$ pour les patterns fissurés
- $K_T = -1$ pour le pattern contenant la pointe de la fissure.

Enfin la fissure est représentée sur l'image déformée en joignant les positions des centres des patterns fissurés éventuellement, pondérées par la valeur du critère aux patterns.

- Cas artificiel d'une géométrie de fissure connue

Dans le cas où la géométrie de la fissure est connue, on peut distinguer les patterns fissurés des patterns sains (non fissurés). Concernant les patterns sains, l'approximation bilinéaire classique du champ de déplacement est conservée (1.158), tandis que pour les patterns fissurés, une nouvelle base de fonctions de description est choisie conformément à l'équation (1.165) :

$$U_j(x_1, x_2) = \sum_j \ell_j(x_1, x_2) \cdot U_j^i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot U_1^1 + x_2 \cdot U_1^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot U_1^3 + U_1^4 & \rightarrow \text{(Pattern non fissuré)} \\ U_2(x_1, x_2) = U_2^1 + \mathfrak{S}(x_1, x_2) \cdot U_2^2 & \rightarrow \text{(Pattern fissuré)} \end{cases} \quad (1.165)$$

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, x_2) \text{ est au-dessus de la fissure} \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) \text{ est en dessous de la fissure} \end{cases}$$

U_j^i sont les vecteurs déplacements inconnus. (x_1, x_2) est un point du pattern. $U_j(x_1, x_2)$ est donné par la minimisation de l'équation (1.159). ℓ_j sont les fonctions de la base choisie.

D'après l'équation (1.165), on peut remarquer que l'enrichissement des fonctions d'approximation du champ de déplacement est similaire à celui de la méthode des éléments finis étendue [RETHORE 2005 ; THOMAS 2006 ; GREGOIRE 2008]. La fonction \mathfrak{S} , définie précédemment, correspond à la partie positive de la fonction $\#$ utilisée pour enrichir les éléments entièrement tranchés par la fissure dans la méthode des éléments finis étendue. Le champ de déplacement est ainsi approximé sur les patterns fissurés par un mouvement de corps solide discontinu.

D'autres techniques expérimentales ont été développées pouvant localiser précisément le front de fissure. La détermination des propriétés de fissuration demande en effet une bonne localisation car l'ensemble des paramètres sont déterminés dans un repère dont l'origine est cette pointe de fissure. Carin [CARIN 2000] a utilisé des clichés issus d'appareils photographiques classiques pour localiser la position du front de fissure dans des PMMA (Polyméthacrylate de méthyle) sous sollicitation en propagation dynamique de fissure.

Des jauges de fissuration peuvent être employées afin de suivre l'évolution de la fissure durant un essai mécanique, figure 1.23, [OWEN 1998 ; MAIGRE 1990, MAIGRE 1993 ; RITTEL 1996 ; PRABEL 2007]. Cette méthode donne cependant des résultats variables en dynamique rapide du fait de la faible précision obtenue lorsque la jauge casse après le passage de la fissure. La présence de ces jauges peut également renforcer localement et donc gêner la fissuration.

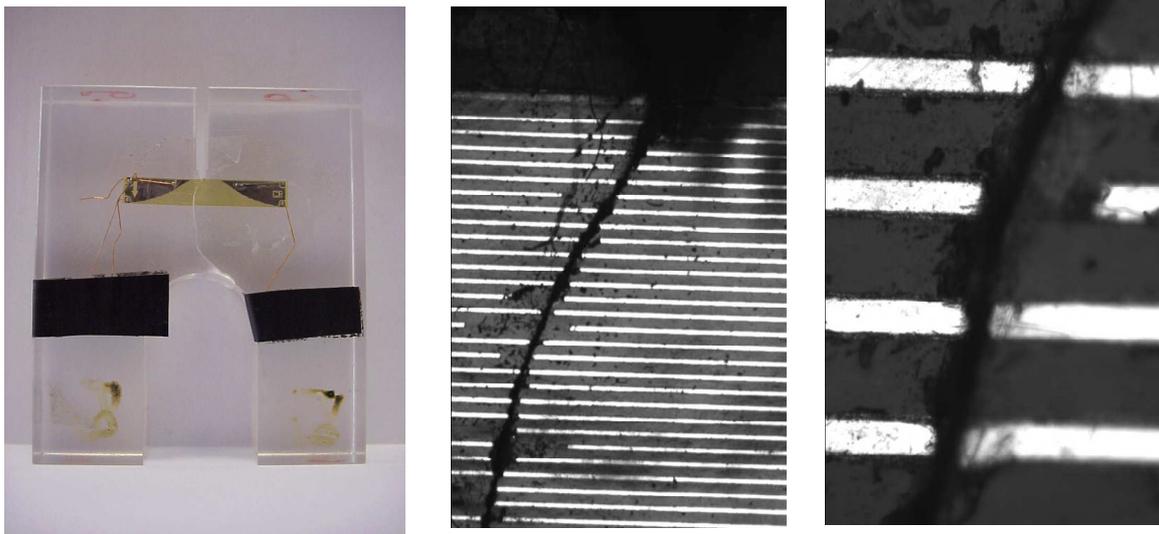


Figure 1.23 : Détection de la position du front de fissure par jauges de déformation

Un algorithme disponible dans la boîte à outils de MatLab [MATHWORKS 2001] appelé « *Sobel edge finding filter* » a été appliqué avec succès aux champs expérimentaux pour établir avec précision le front de la fissure dans les alliages d'aluminium (AL 7010 T7651) en rupture statique en mode mixte [LOPEZ-CRESPO 2008]. Cet algorithme [SONKA 1993] identifie les bords comme lieux des pixels où le gradient de l'intensité tend vers un maximum. La fissure et son front peuvent facilement être localisés comme illustré par la cartographie des déplacements horizontaux et verticaux, figure 1.24.

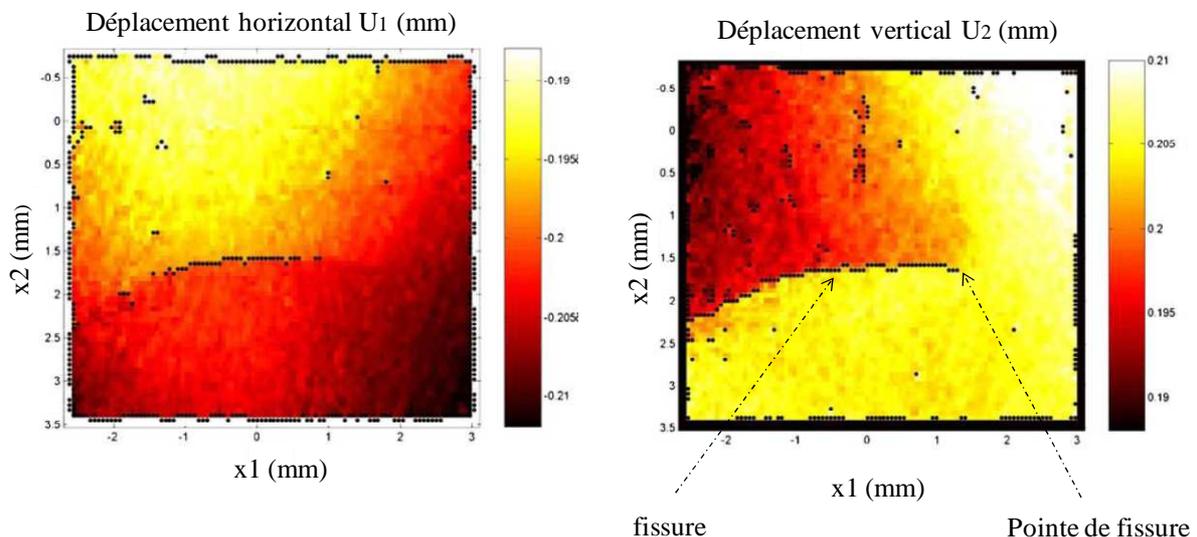


Figure 1.24 : Localisation des coordonnées du front de fissure par l'outil *Sobel edge-finding*

1.3.4 Calcul du facteur d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes $K_{\alpha}^{(\sigma)}$ donnent l'amplitude d'une harmonique particulière (ordre 1) dans le développement en $r^{n/2}$ du champ de déplacement en présence d'une fissure. En ce sens, les $K_{\alpha}^{(\sigma)}$ sont des grandeurs particulièrement difficiles à mesurer.

Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent l'ensemble du champ de déplacements et il est naturel de vouloir tirer partie de la totalité de l'information fournie par une mesure de champ cinématique. Ainsi, des techniques, minimisant l'écart entre le champ mesuré et un champ théorique, ont pu être développées [YONEYAMA 2006, 2007 ; KENJI 2006; YATES 2010; JINLONG 2010 ; McNEILL 1987 ; ROUX et HILD, 2006 ; ATLURI 1993 ; HAMAM 2007 ; LOPEZ-CRESPO 2008 ; WILLIAMS 1957 ; RAMESH 1997] afin de calculer les facteurs d'intensité des contraintes à partir du champ cinématique. Pour ce faire, une relation directe existe entre ces facteurs d'intensité des contraintes et les premiers coefficients de pondération de la série analytiques asymptotiques basé sur le potentiel de Kolossov-Muskhelishvili's [MUSKHELISHVILI'S 1933 ; WILLIAMS 1957]. Pour chaque mode de rupture (modes $\alpha = I, II$), cette relation s'écrit :

$$A_I^I = \frac{a_I^I}{2 \cdot G} \quad \text{avec} \quad a_I^I = \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (1.166)$$

$$A_{II}^I = \frac{a_{II}^I}{2 \cdot G} \quad \text{avec} \quad a_{II}^I = \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (1.167)$$

G est le module de cisaillement défini, en contraintes planes, par :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (1.168)$$

E et ν représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau isotrope.

A partir des équations (1.166) et (1.167), les facteurs d'intensité des contraintes $K_\alpha^{(\sigma)}$ sont calculés après interpolation du champ analytique de déplacements sur les données de mesures [YONEYAMA 2006, 2007 ; KENJI 2006; YATES 2010; JINLONG 2010 ; McNEILL 1987 ; ANBANTO-BUENO 2002 ; ROUX 2006 ; HAMAM 2007].

Plus récemment, Réthoré et al. [RETHORE 2005] ont utilisé une technique d'intégrale d'interaction pour mesurer les facteurs d'intensité des contraintes (méthode équivalente à l'intégrale M). Une formulation de cette intégrale d'interaction est donnée par :

$$I^{\text{int}} = \frac{2}{E} \cdot \left(K_I^{(\sigma)} \cdot {}^\nu K_I^{(\sigma)} + K_{II}^{(\sigma)} \cdot {}^\nu K_{II}^{(\sigma)} \right) \quad (1.169)$$

${}^\nu K_I^{(\sigma)}$ et ${}^\nu K_{II}^{(\sigma)}$ sont les facteurs d'intensité des contraintes des champs asymptotiques auxiliaires en pointe de fissure pour les modes I et II. En choisissant des valeurs judicieuses pour ${}^\nu K_I^{(\sigma)}$ et ${}^\nu K_{II}^{(\sigma)}$ (${}^\nu K_I^{(\sigma)} = 1$ et ${}^\nu K_{II}^{(\sigma)} = 0$, respectivement ${}^\nu K_I^{(\sigma)} = 0$ et ${}^\nu K_{II}^{(\sigma)} = 1$), les facteurs d'intensité des contraintes réels $K_I^{(\sigma)}$ et $K_{II}^{(\sigma)}$ peuvent être calculés moyennant l'intégrale d'interaction I^{int} dont la formulation est semblable à l'intégrale invariante $G\theta$ (1.110) [SUO et COMBESURE, 1992; DESTUYNDER, 1983].

On remarque qu'à partir des équations (1.166), (1.167), (1.168) et (1.169), le calcul des facteurs d'intensité des contraintes nécessite de connaître les propriétés d'élasticité du matériau. Elles sont le plus souvent empruntées à la littérature pour l'estimation des facteurs d'intensité des contraintes [RETHORE 2005 ; YONEYAMA 2006, 2007 ; KENJI 2006; YTES 2010; JINLONG 2010 ; McNEILL 1987 ; ROUX et HILD, 2006 ; HAMAM 2007 ; YAOFENG SUN 2008 ; FEDELE 2009]. Ces approches intègrent alors deux incertitudes. La première, expérimentale, est directement liée à l'imprécision de la mesure intégrant bruits expérimentaux, position approximative de la pointe de fissure, désalignement de l'éprouvette, etc. La seconde imprécision réside dans la non connaissance des propriétés réelles de la loi de comportement.

Conclusion

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, nous avons présenté, dans une première partie, différentes représentations de l'état mécanique au voisinage de la pointe de fissure. Jusqu'à présent, les facteurs d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie étaient employés afin de définir l'état mécanique singulier. Plus récemment, l'état cinématique a été introduit à travers les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure. Il est à noter que dans la communauté scientifique, ces paramètres, caractérisant la fissuration, sont présentés comme des propriétés redondantes entrant en concurrence. En effet, si nous rappelons les méthodes statiques, cinématiques ou énergétiques employées dans les différentes approches numériques, elles permettent toutes de caractériser soit les facteurs d'intensité de contrainte, soit les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure ou encore le taux de restitution d'énergie, les lois de comportement locales permettant de recalculer les différents paramètres de fissuration.

Dans une seconde partie, il a été rappelé les différentes méthodes numériques développées pour le calcul des propriétés mécaniques en pointe de fissure. En complément des remarques faites précédemment, nous noterons que les différents outils développés se sont focalisés sur le contournement de la singularité en pointe de fissure. Les différentes approches présentées font cependant appel aux propriétés d'élasticité du milieu, qu'il soit isotrope ou anisotrope. Si, pour des matériaux modèles, ces techniques sont tout à fait pertinentes, elles le sont moins lorsque nous les employons sur des matériaux réels plus hétérogènes pour lesquels les propriétés d'élasticité ne sont pas identifiées avec exactitude.

Enfin, nous avons présenté, dans la troisième partie, les méthodes récentes d'investigation sans contact employant l'analyse d'images concernant la définition de l'état mécanique au voisinage d'une fissure. En accord avec les avancées actuelles de la recherche dans ce domaine, nous nous sommes concentrés sur la technique de corrélation d'images. Au même titre que pour les méthodes numériques présentées précédemment, la communauté scientifique a placé beaucoup d'efforts dans la détermination cinématique du front de fissure en élaborant des stratégies d'optimisation des champs singuliers. Cependant, si ces méthodes sont pertinentes pour une caractérisation cinématique, le fait de vouloir les employer à tout prix pour la caractérisation de l'état de contrainte (via les facteurs d'intensité de contrainte), ou pour la définition énergétique du front de fissure (via le taux de restitution d'énergie) nécessite

également une identification des propriétés d'élasticité du matériau considéré; ce qui limite la pertinence de la méthode.

Que ce soient les approches numériques ou expérimentales par analyse d'images, les démarches sont principalement fondées sur la connaissance des propriétés d'élasticité des matériaux étudiés. Pour répondre à ce verrou scientifique, nous proposons d'étudier, aux meilleures de leurs possibilités, la technique par corrélation d'images en se limitant à une définition cinématique des champs mécaniques au voisinage de la pointe de fissure, et ce, à travers la définition des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure. En parallèle, la méthode des éléments finis sera employée, de façon complémentaire, afin de calculer l'état mécanique en contrainte à travers les facteurs d'intensité de contrainte. Les méthodes énergétiques, via les invariants intégraux, seront employées afin d'éliminer aux mieux les imprécisions numériques liées à la singularité des champs singuliers. Sous certaines conditions, et en postulant que l'état de contrainte ne dépend que des conditions aux limites imposées en force, nous montrerons que les facteurs d'intensité de contraintes peuvent être déterminés indépendamment des propriétés mécaniques du milieu.

Enfin, le couplage entre corrélation d'images et méthode des éléments finis permet d'atteindre d'autres propriétés complémentaires en mécanique de la rupture. Dans un premier temps, le couplage entre facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et facteurs d'intensité de contrainte permet de déterminer le taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture, de cisaillement et en mode mixte. Dans un second temps, le croisement de l'état cinématique et la répartition des contraintes en pointe de fissure permet de caractériser les propriétés d'élasticité locales à travers les complaisances élastiques réduites pour des milieux isotropes et orthotropes. Le message principal de ce travail est que nous ne considérerons plus les approches numérique et expérimentale comme concurrentes mais complémentaires.

Chapitre 2

Algorithme de caractérisation en mécanique de la rupture : approche par corrélation d'images et éléments finis

Ce deuxième chapitre présente les approches expérimentales, analytiques et numériques mises en place pour analyser les paramètres de fissuration. Sont décrits les types de géométrie d'éprouvettes de fissuration employés dans le travail expérimentale, les techniques développées pour, à la fois, localiser la pointe de fissure et déterminer les propriétés élastiques ainsi que les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les facteurs d'intensité de contrainte caractérisant les champs singuliers en pointe de fissure. Une nouvelle expression du taux de restitution d'énergie est proposée à travers le processus de couplage entre les méthodes expérimentale et numérique. Ce couplage permet, d'une part, le calcul du taux de restitution d'énergie, indépendamment des propriétés d'élasticité et, d'autre part, la caractérisation des complaisances élastiques réduites.

Sommaire

Introduction	65
2.1 Approche expérimentale	65
2.1.1 Géométrie des éprouvettes et matériaux	65
2.1.2 Dispositif de chargement.....	74
2.1.3 Méthode de mesure par corrélation numérique d'images.....	78
2.1.4 Optimisation des champs de déplacements expérimentaux	81
2.1.5 Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure.....	93
2.2 Distribution des contraintes en pointe de fissure	94
2.2.1 Modélisation par éléments finis à force imposée	94
2.2.2 Intégrales $G\theta/M\theta$	96
2.3 Couplage CIN/MEF	100
2.4 Taux de restitution d'énergie	101
2.5 Algorithme de caractérisation.....	104
Conclusion.....	105

Introduction

Ce deuxième chapitre traite des moyens mis en œuvre pour l'étude expérimentale, analytique et numérique de la fissuration. L'accent est mis sur les techniques expérimentales pour identifier les propriétés mécaniques intrinsèques afin de donner une estimation optimum des paramètres de fissuration.

Dans un premier temps, sont présentés les différentes géométries d'éprouvettes, employées pour l'analyse des propriétés de rupture en mode d'ouverture et en mode mixte de chargement, ainsi que les matériaux étudiés.

L'analyse expérimentale de la rupture fait l'objet d'une seconde partie. Elle est basée sur l'emploi de la corrélation d'images numériques pour déterminer les champs de déplacements et de déformations en tout point de la surfaces des échantillons contenant une fissure. Cette méthode expérimentale, largement explicitée au chapitre précédent, est ici associée au développement analytique d'une procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires en vue de palier aux erreurs et bruits expérimentaux liés aux conditions d'essais ainsi qu'à la perturbation de la corrélation d'images induite par la présence d'une fissure. La corrélation entre les approches expérimentale et analytique a pour conséquence de localiser avec précision la pointe de fissure et de quantifier les mouvements de corps rigide durant l'expérimentation. La caractérisation des cinétiques d'ouverture des fissures est alors menée à travers l'estimation des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure.

Par ailleurs, l'approche expérimentale est complétée par l'utilisation d'une formulation par éléments finis dont le but est de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte indépendamment des données expérimentales. Comme indiqué dans le chapitre précédent, l'outil numérique est un complément de la caractérisation expérimentale afin de limiter les hypothèses habituellement adoptées dans cet exercice comme, en particulier, la connaissance des propriétés d'élasticité du milieu.

Dans une dernière partie, un rapprochement des analyses expérimentales et par éléments finis permet de mettre en valeur cette complémentarité en déduisant les taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture et en mode mixte. Enfin, la méthode permet d'optimiser les paramètres caractérisant le comportement élastique du matériau au voisinage de la pointe de fissure.

2.1 Approche expérimentale

2.1.1 Géométrie des éprouvettes et matériaux

Dans le cadre de ce travail, nous souhaitons utiliser une éprouvette de fissuration nous permettant d'effectuer des chargements en modes simples (mode d'ouverture **ou** de cisaillement) et en mode mixte (mode d'ouverture **et** de cisaillement). L'étude se focalisant sur la détermination des champs mécaniques au voisinage de la pointe de fissure (hors contexte de propagation), le critère de choix se porte sur la simplicité de réalisation de l'éprouvette, sa polyvalence vis-à-vis du mode de chargement, du matériau employé et le fait

d'avoir une surface englobant la pointe de fissure permettant de définir un domaine d'intégration et une zone d'étude représentatifs.

Dans cet esprit, nous présentons quelques géométries d'éprouvettes existantes dans la littérature.

2.1.1.1 Géométrie des éprouvettes existantes

Plusieurs géométries d'éprouvettes ont été étudiées en mécanique de la rupture pour appréhender les phénomènes de fissuration dans les matériaux. En effet, la caractérisation de la résistance à l'amorçage et à la propagation des fissures est réalisée à l'aide d'éprouvettes pré-fissurées. Durant ces essais, les propriétés de rupture étudiées sont généralement le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes.

- Eprouvette CT (Compact Tension)

L'éprouvette CT, Figure 2.1, est souvent utilisée pour l'étude de la propagation stable ou en fatigue en vue de la détermination de la ténacité [KOBAYASHI 1980, BEGUELIN 1998, NISHIMURA 2005] lorsque l'essai est piloté en déplacement. Un des avantages de cette géométrie d'éprouvette est l'obtention de la formule analytique du facteur d'intensité des contraintes en mode d'ouverture donnée par Tada [BUI 1978, RETHORE 2005]. Si le comportement de ces éprouvettes en cours d'essai est parfaitement élastique, la détermination de la ténacité se fait à partir de la mesure de la force à rupture; valeur facilement identifiable du fait d'une instabilité de la propagation de fissure lorsque l'échantillon est sollicité en force.

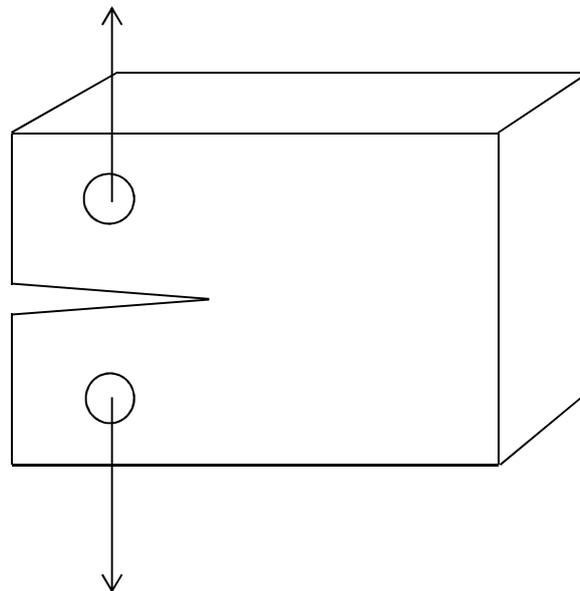


Figure 2.1 : Eprouvette CT

- Eprouvette DCB (Double Cantilever Beam)

L'éprouvettes DCB, Figure 2.2, est utilisée pour la détermination de la ténacité et du taux de restitution d'énergie critique en mode d'ouverture [CHO 1979]. Sa conception permet

d'obtenir un facteur d'intensité des contraintes qui décroît lorsque la fissure se propage (zone sans défaut) [KANNINEN 1974, FINEBERG 1991, UENISHI 2002]. Cela justifie les risques d'instabilité dans le cas de mesure sur des matériaux isotropes. Par contre, ces risques d'instabilité disparaissent dans le cas du bois car la propagation est guidée par le fil longitudinal. Ces éprouvettes sont donc intéressantes car elles présentent une plage assez importante de propagation, Figure 2.2. Enfin, la simplicité de cette géométrie permet de faire des calculs analytiques en employant la méthode de la variation de la complaisance en considérant deux poutres consoles dont la longueur libre est assimilée aux lèvres de la fissure.

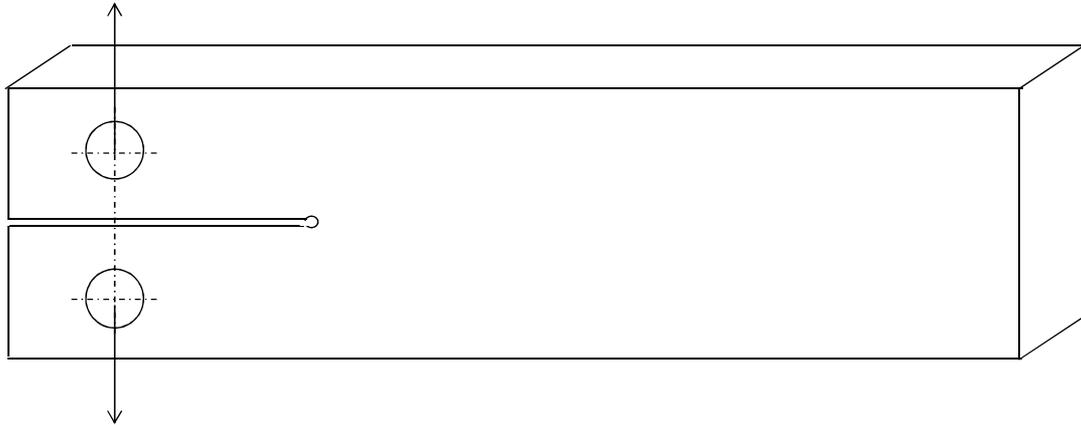


Figure 2.2 : Epreuve DCB

- Epreuve SENB (Single Edge Notched Bending)

L'éprouvette SENB, Figure 2.3, est employée pour l'étude de l'amorçage de fissuration [AKOURRI 2000 ; AVRIL 2004]. Cette éprouvette est également utilisée pour déterminer le taux de restitution d'énergie critique dans des échantillons de bois massif, (essai Gustafson) [GUSTAFSON 1989].

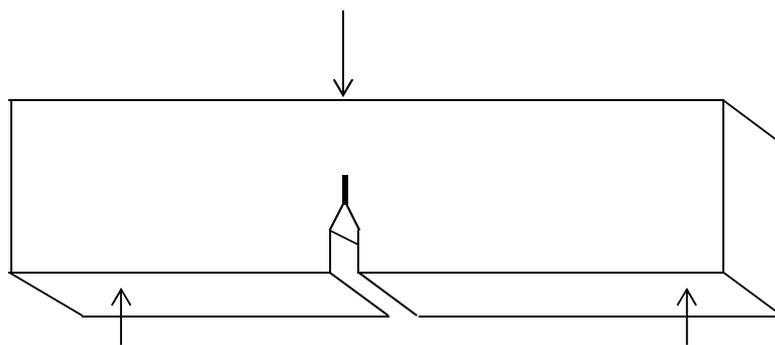


Figure 2.3 : Epreuve SENB

Elle assure des conditions aux limites aisées à imposer. Le ligament non fissuré de ces éprouvettes est sollicité en flexion. En fonction d'un effet d'échelle caractéristique à cette géométrie, cet état de flexion permet d'assurer un bon confinement de la zone plastique. Cependant, la zone de propagation reste faible avec des effets de bord lorsque la pointe de fissure s'approche du point de chargement.

- Eprouvette à entaille centrale

L'éprouvette à entaille centrale engendre une symétrie matérielle difficile à garder lors de la fissuration car un déséquilibre de chargement peut induire un mode mixte de propagation, Figure 2.4.

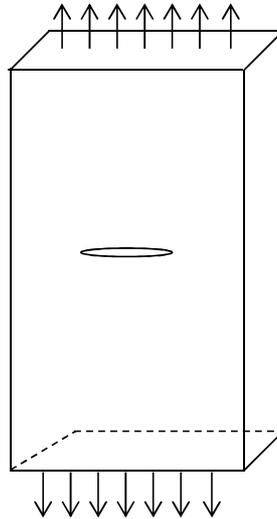


Figure 2.4 : Eprouvette à entaille centrale

- Eprouvette DEC (Double Edge Crack)

Cette éprouvette a été conçue afin d'examiner l'influence de la discontinuité et les phénomènes de concentration des contraintes en font de fissure, Figure 2.5, avec une interaction des zones singulières lorsque les deux fissures se rapprochent.

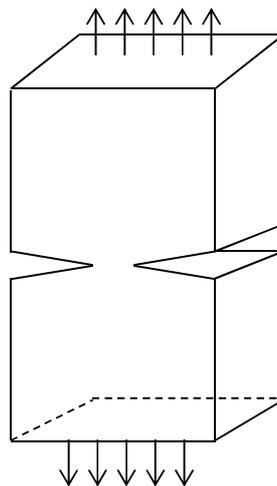


Figure 2.5 : Géométrie d'éprouvette DEC

- Eprouvette Cantilever à inertie variable

L'éprouvette Cantilever à inertie variable présente une plage de propagation stable lors d'essais pilotés en force et possède une géométrie compatible avec le type d'essai envisagé.

Les éprouvettes sont massives ; d'où le risque important de défauts internes liés à la structure du matériau (bois). La variation linéaire de section engendre une stabilité initiale qui rend la phase de chargement délicate, Figure 2.6.

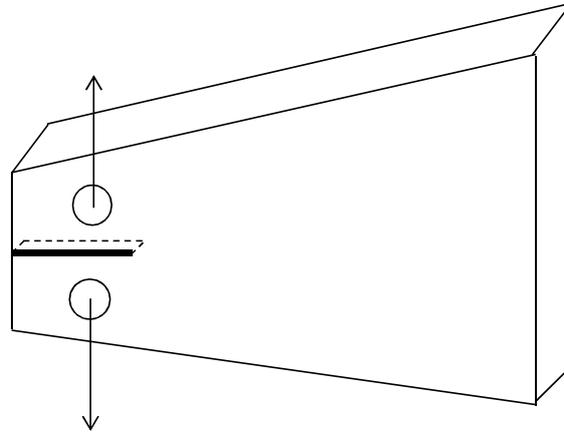


Figure 2.6 : Eprouvette Cantilever à inertie variable

- Eprouvette DCB à inertie variable

Cette éprouvette résulte d'un compromis entre l'éprouvette DCB et l'éprouvette Cantilever dans le but d'assurer une stabilité du taux de restitution d'énergie lors de la propagation de fissure [BUBOIS 1996], Figure 2.7.

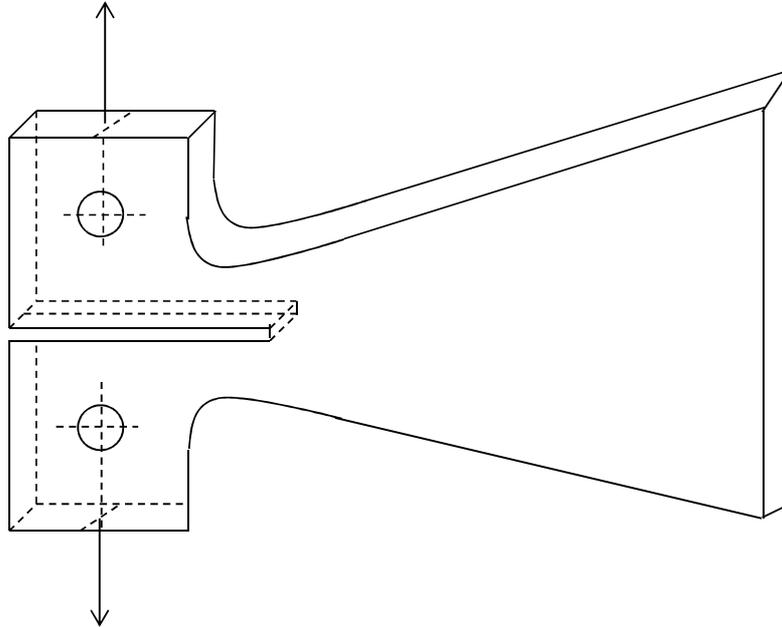


Figure 2.7 : Géométrie d'éprouvette DCB à inertie variable modifiée

Cette inertie variable doublée d'un congé de raccordement, proche de la pointe de fissure initiale, provoque une légère instabilité initiale permettant un taux de charge de 100%. La stabilité de la fissuration permet alors d'utiliser cette géométrie pour des fissurations en fluage ou en fatigue avec une sollicitation en effort imposé.

- Eprouvette mTDCB (modified Tapered Double Cantilever Beam)

Ce type d'éprouvettes est une évolution de l'éprouvette TDCB classique [FRACTURE 1969] qui a été adapté à la rupture du bois [MOREL 1998 ; COUREAU 2006]. Les éprouvettes mTDCB ont la particularité de permettre une propagation de fissure stable en mode d'ouverture (à déplacement imposé). La Figure 2.8 présente un schéma de l'éprouvette mTDCB.

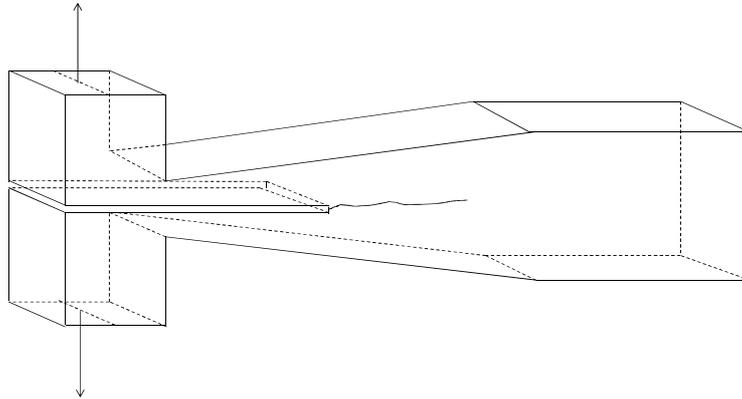


Figure 2.8 : Géométrie d'éprouvette mTDCB

L'éprouvette mTDCB présente une zone à inertie variable suivie d'une zone à inertie constante permettant de se prémunir contre toute influence de l'extrémité libre sur le processus de fissuration.

- Eprouvette SENT (Single Edge Notched Tension)

L'éprouvette SENT a été conçue pour la mesure de la ténacité [TAKAHASHI 1987, KOKALY 2001, 2003, MURPHY 2006]. Ne présentant pas une plage de propagation stable exploitable, cette géométrie d'éprouvette assure une augmentation du facteur d'intensité des contraintes pendant la propagation instable de la fissure. Elle permet une parfaite symétrie de chargement en mode d'ouverture, Figure 2.9.

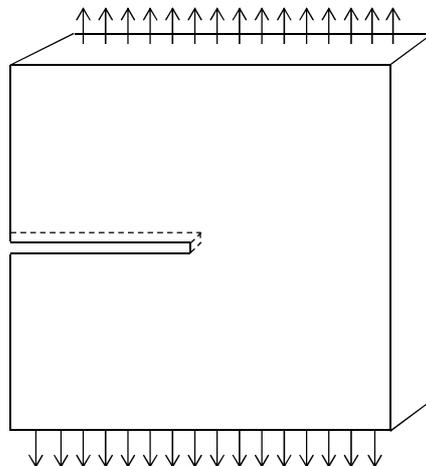


Figure 2.9 : Géométrie d'éprouvette SENT

- Eprouvette WS (Wedge Splitting)

Cette éprouvette a été conçue pour étudier les propriétés de rupture durant la propagation stable de la fissure dans les matériaux comme le béton [TSCHEGG 1986] et étendues au cas du bois [KOLLMANN 1951 ; TSCHEGG 1986, 1990, 1991; STANZL-TSCHEGG 1993 ; ZIKMUNDA 1992]. La forme des éprouvettes peut être cubique ou cylindrique [TSCHEGG 1986, 1991], Figure 2.10. Le système de montage (Splitting test) est assez simple à mettre en œuvre et induit une parfaite symétrie en mode d'ouverture.

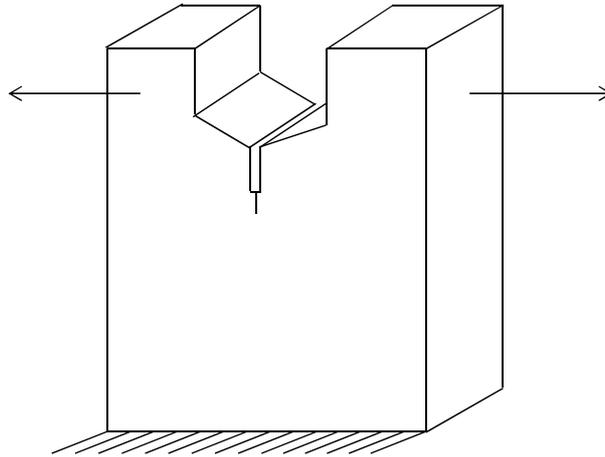


Figure 2.10 : Géométrie d'éprouvette WS

Afin d'obtenir une configuration polymodale dans les milieux fissurés, d'autres géométries d'éprouvette ont été conçues, à savoir :

- Eprouvette CTS (Compact Tension Shear)

L'éprouvette CTS a été la première à être utilisée pour l'analyse des phénomènes de fissuration dans une configuration de mode mixte (mode I+II) [RICHARD 1981], Figure 2.11.

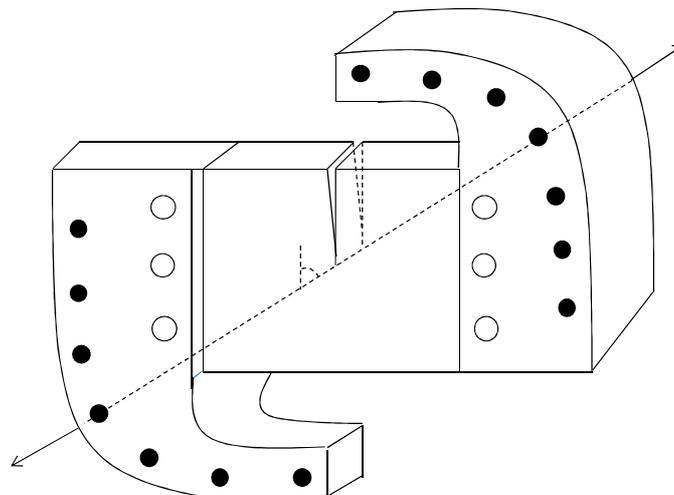


Figure 2.11 : Eprouvette CTS

Cette géométrie a été proposée pour déterminer l'évolution du front de fissure en mode mixte dans les milieux hétérogènes fissurés [LUO 2003, MA 2006, ZHA 2006, CAUMES 1987, VALENTIN 1989]. L'éprouvette est solidaire de deux bras en acier munis de perçage formant différents points de chargement diamétralement opposés. Le taux de mixité est obtenu par l'angle formé entre les divers points de chargement et la direction de la fissure.

- Eprouvette 2MGC (Mixed Mode Crack Growth)

La géométrie 2MGC provient d'une combinaison entre une DCB à inertie variable, une mTDCB et une CTS. La figure 2.12 montre sa géométrie avec le support de chargement (bras en acier ou en PVC) sur lequel sont indiqués les différents points de chargement pour l'évaluation du taux de mixité. Ainsi, cette géométrie permet d'étudier la propagation de fissure en fluage et fatigue, et ce, en effort imposé en y introduisant des configurations de mode mixte, [MOUTOU 2008a, 2008b, 2008c].

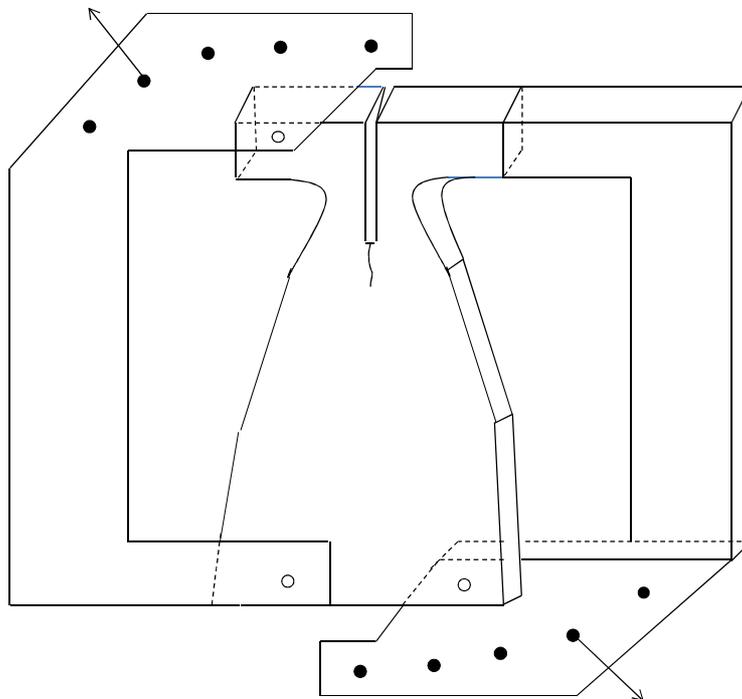


Figure 2.12 : Eprouvette 2MGC

2.1.1.2 Géométrie retenue

La géométrie d'éprouvette, que nous retenons pour ce travail, est celle issue de la combinaison des éprouvettes SENT et WEDGE SPLITTING utilisées pour l'essai en mode d'ouverture. Une représentation schématique de cette géométrie est montrée en figure 2.13 [MEITE 2010, 2011, POP 2011].

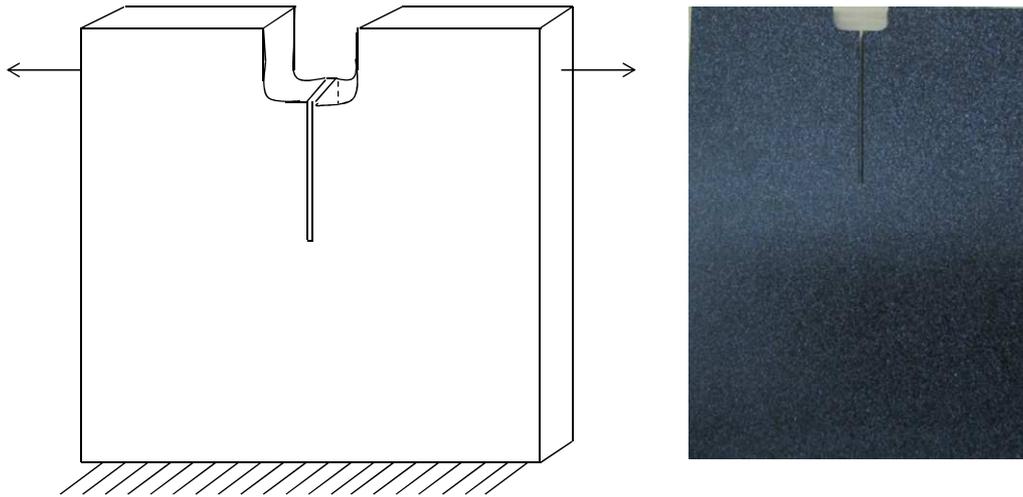


Figure 2.13 : Epreuve Wedge Splitting pour le mode d'ouverture

Concernant les configurations de mode mixte, l'échantillon est modifié afin de le solidariser avec un montage Arcan, Figure 2.14, [MEITE 2010, 2011, 2012].

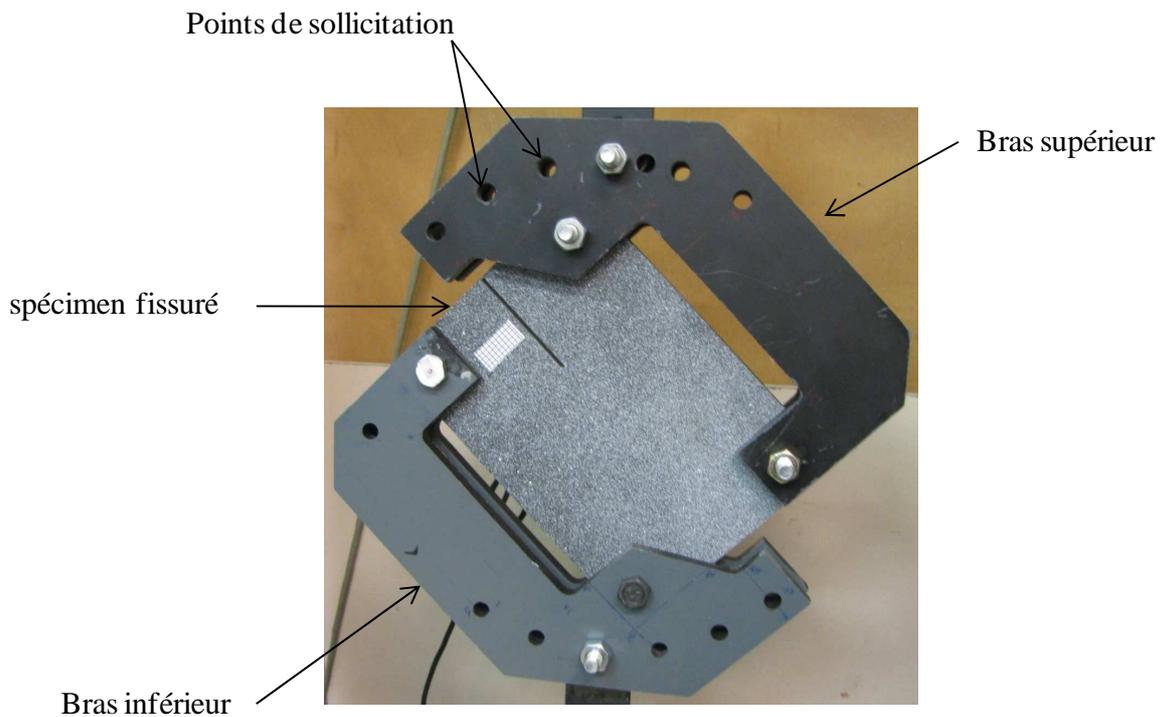


Figure 2.14 : Epreuve SEN et système Arcan en mode mixte

2.1.1.3 Matériaux

L'étude des problèmes de fissuration menée dans ce travail de thèse est académique. En d'autres termes, les matériaux étudiés n'ont pas été déterminés dans le cadre d'un partenariat avec le secteur industriel. Cependant, ces matériaux ont été choisis comme représentants de phénomènes généraux observés dans toute une classe de matériaux.

Afin d'adapter le choix des matériaux aux formulations présentées dans le chapitre précédent où sont développés les fondements de la mécanique élastique linéaire de la rupture, la campagne expérimentale repose sur des éprouvettes en PVC (Polychlorure de Vinyle) et Douglas (bois résineux); ces choix regroupant à la fois les familles de matériaux isotropes et orthotropes. Ces deux types de comportement mécanique ont été choisis comme exemples d'application de la technique de couplage expérimentale et numérique qui sera développée tout au long de ce deuxième chapitre ; l'objectif étant de montrer la capacité de cette méthode hybride à étudier et à appréhender le comportement à la fissuration pour des matériaux isotropes et orthotropes sollicités par des chargements complexes. Pour le cas du Douglas, l'essai de fissuration est fait dans le plan RL avec une fissure orientée dans la direction des fibres (L).

2.1.2 Dispositif de chargement

2.1.2.1 Dispositif d'essai

Le dispositif expérimental regroupe une presse électromécanique équipée d'un système de mesure composé d'un capteur LVDT (d'une course de 10mm) et d'une cellule de force (d'une capacité de 50kN), permettant de visualiser et de mesurer le comportement mécanique global des éprouvettes au cours de l'essai. Toutes les expérimentations sont pilotées en déplacement avec une vitesse de chargement de 0,01mm/s.

2.1.2.2 Configuration en mode d'ouverture

Le système de chargement en mode d'ouverture est composé de deux rouleaux et d'une pyramide en acier, Figure 2.15. Le déplacement vertical de la pyramide, solidaire de la traverse machine, impose un déplacement horizontal des deux rouleaux induisant ainsi une cinétique d'ouverture aux deux lèvres.

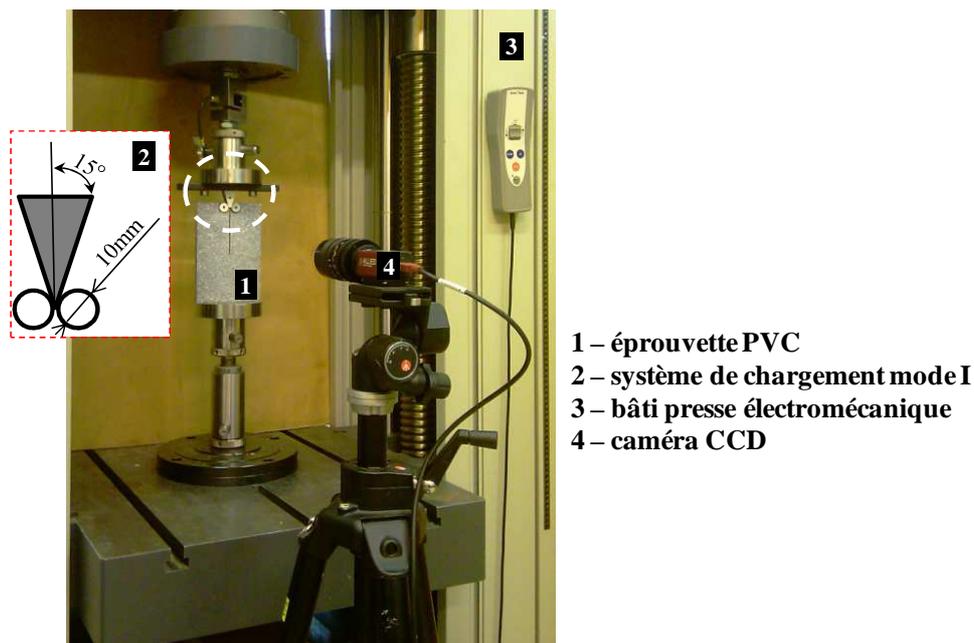


Figure 2.15 : Eprouvette en Douglas pour une sollicitation en mode d'ouverture

Le système proposé permet ainsi d'obtenir une ouverture contrôlée de la fissure avec un déplacement symétrique des deux lèvres. De plus, les caractéristiques géométriques du montage, l'angle de la pyramide ($=15^\circ$) et le diamètre des rouleaux ($=10\text{mm}$) permettent de réduire la composante verticale du chargement tout en limitant la compression de l'éprouvette. Afin de vérifier la symétrie d'ouverture de la fissure et de valider le montage, nous avons tracé, en Figure 2.16, l'évolution du déplacement des deux rouleaux pour une éprouvette en Douglas. Cette analyse, réalisée par la technique de suivi de marqueurs en analysant le déplacement de deux marqueurs positionnés sur les rouleaux, met bien en évidence la présence d'un mode d'ouverture.

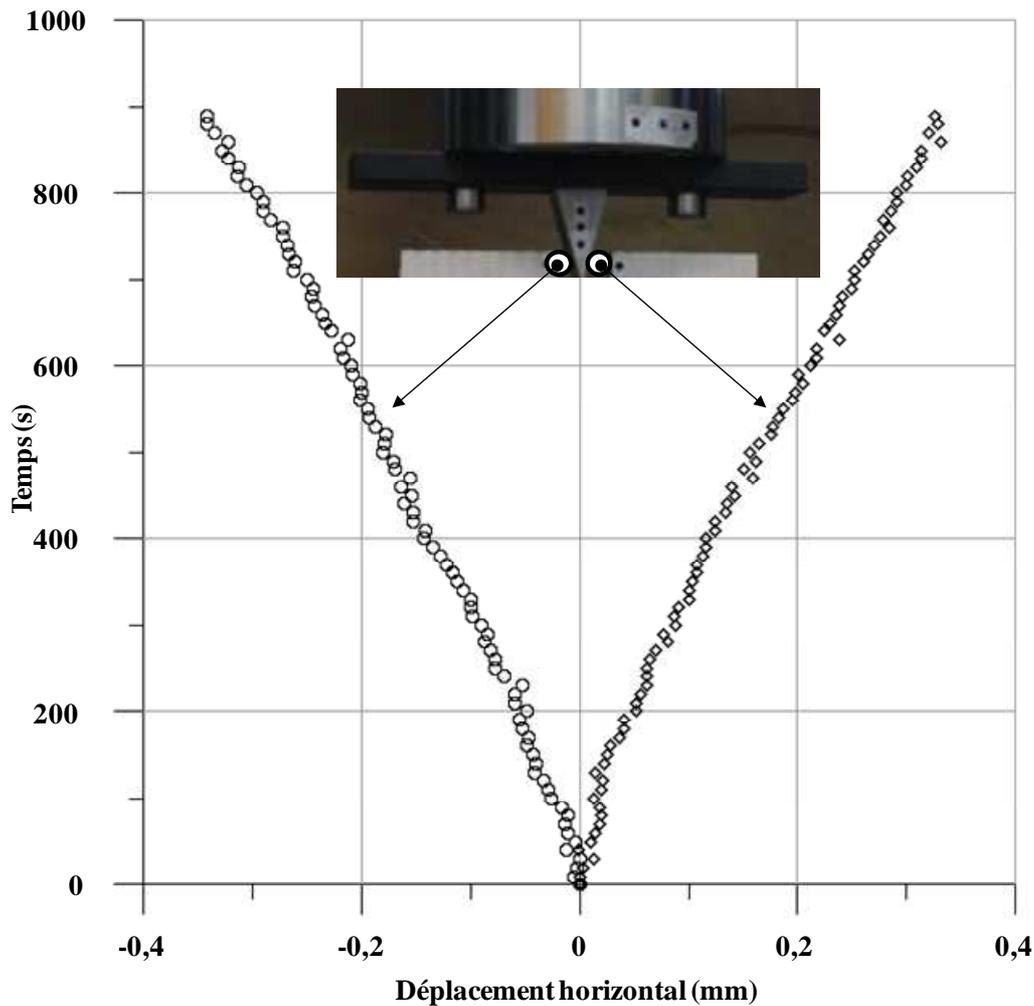


Figure 2.16 : Mode d'ouverture et symétrie des déplacements

2.1.2.3 Configuration en mode mixte

Le dispositif expérimental, mis en place pour les essais en mode mixte, comporte un montage Arcan permettant de générer différentes configurations de mode mixte, Figure 2.17.

Ainsi, chaque configuration est imposée en orientant la direction du chargement suivant différents angles définis par rapport à l'axe de la fissure. Le montage Arcan permet de varier les angles de chargements de 0° (cas de mode I) jusqu'à 90° (cas de mode II). Les angles

intermédiaires (15° , 30° , 45° , ...) permettant d'avoir différents taux de mixité couplant mode I et mode II.

Une particularité du montage en mode mixte est l'orientation de la camera CCD par rapport à la direction de la fissure. Le mode mixte étant une combinaison des modes I et II, la mesure des déplacements doit se faire dans un plan aligné avec la direction de la fissure. Dans ce cas, comme montré en Figure 2.18, la caméra CCD est orientée parallèlement à la fissure à l'aide d'un trépied rotulé. Dans cette configuration, les déplacements verticaux et horizontaux correspondent directement aux parts respectives de modes I et II.

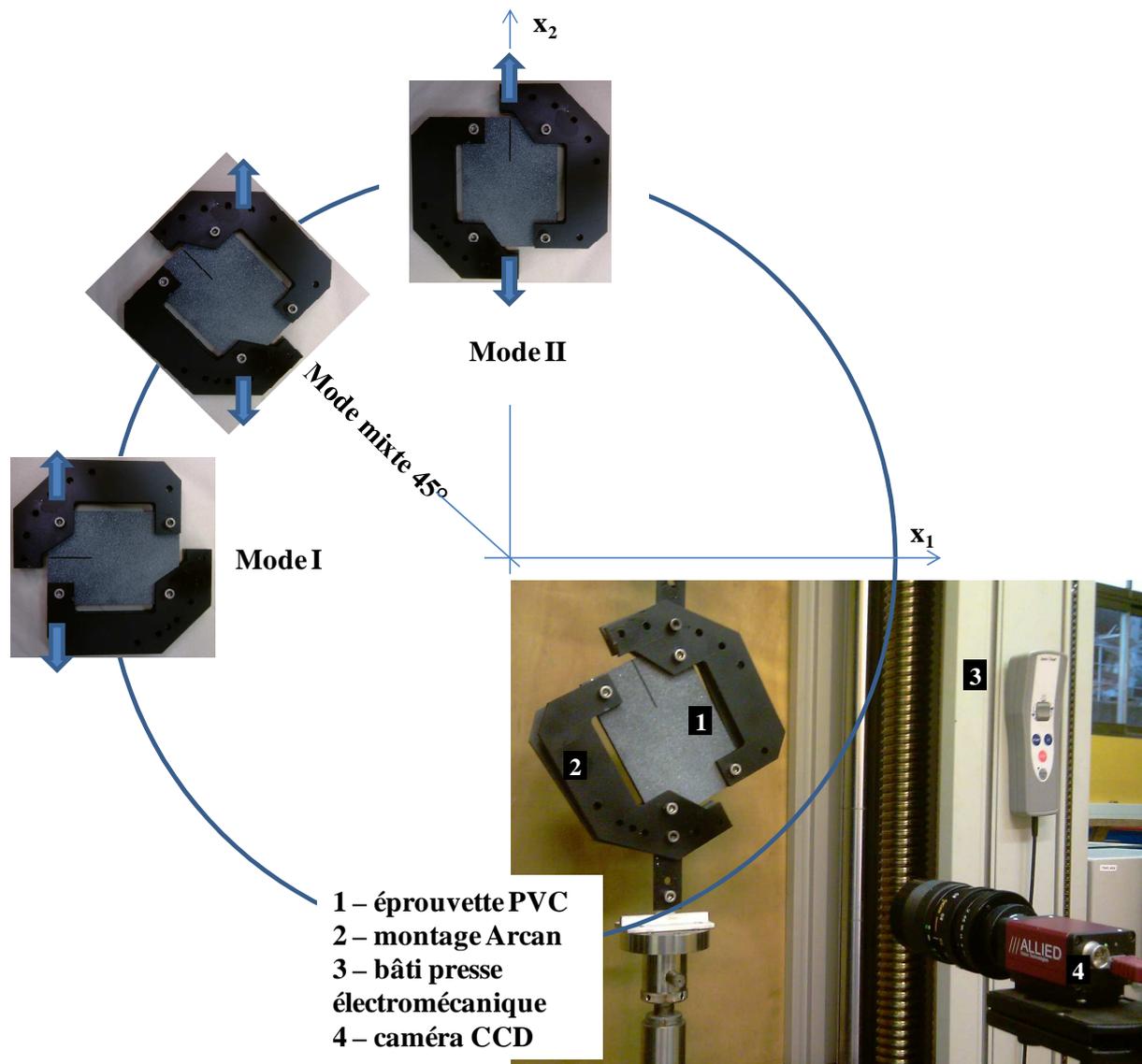


Figure 2.17 : Dispositif expérimental et système de chargement en mode mixte

La correspondance entre l'image enregistrée et la valeur du chargement se fait grâce à la technique du suivi des marqueurs, comme pour le cas précédent.

2.1.2.4 Préparation des échantillons

Les déplacements calculés par corrélation d'images numériques sont le résultat de la recherche du degré de ressemblance entre les deux motifs aléatoires. Le premier motif correspond à l'image de la surface de l'éprouvette avant déformation. Le deuxième correspond à l'état déformé de cette même surface. Etant donné la texture en surface des deux matériaux étudiés, nous avons procédé à l'application d'un mouchetis noir et blanc sur la surface des éprouvettes afin d'obtenir un motif aléatoire, voir Figures 2.19 et 2.20.

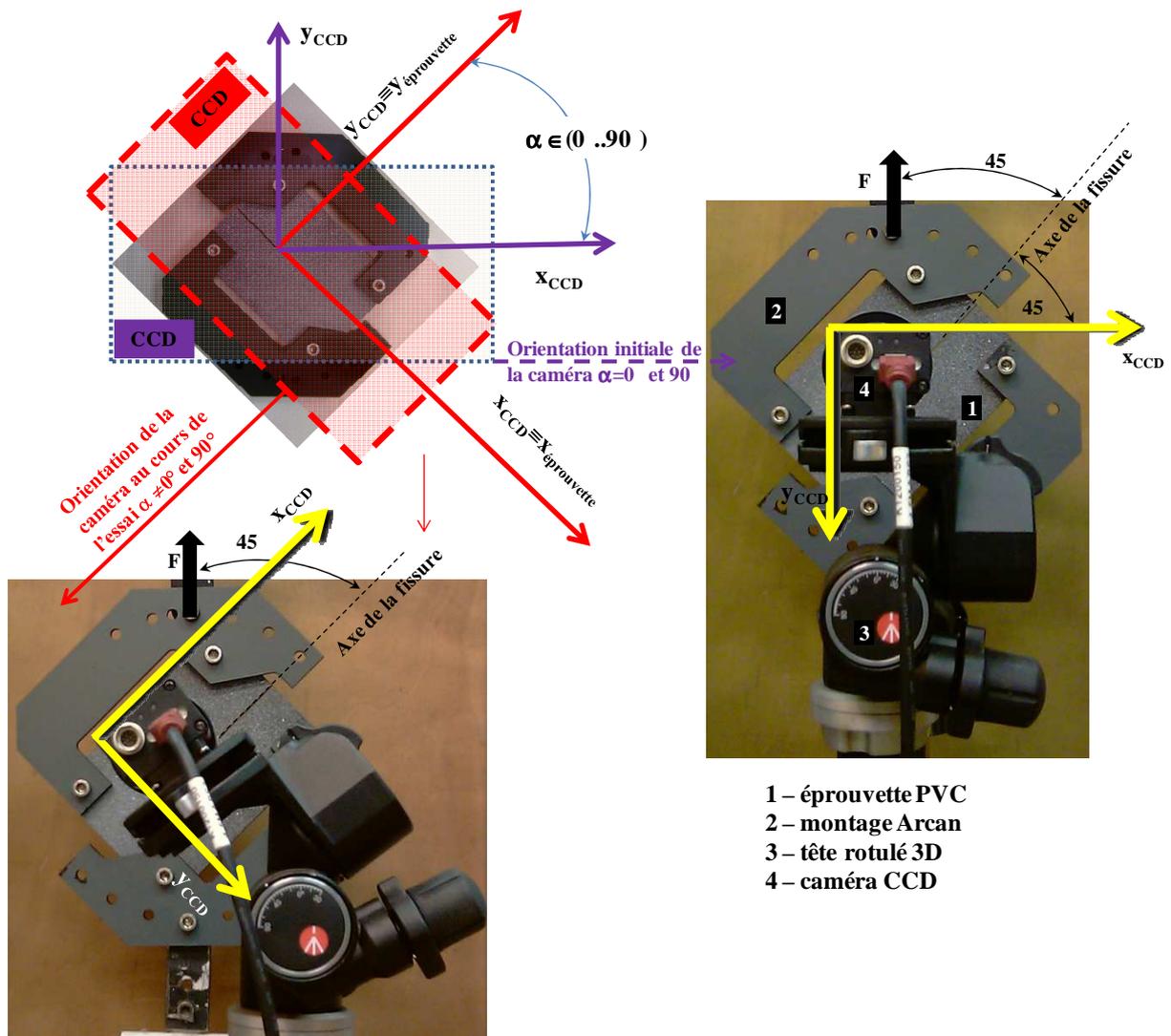


Figure 2.18 : Orientation de la caméra CCD en mode mixte (exemple pour 45°)

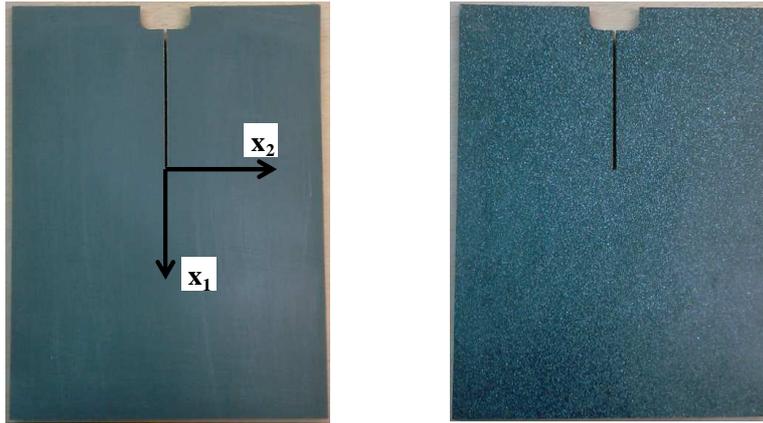


Figure 2.19 : Préparation de l'éprouvette en PVC (exemple du mode I)

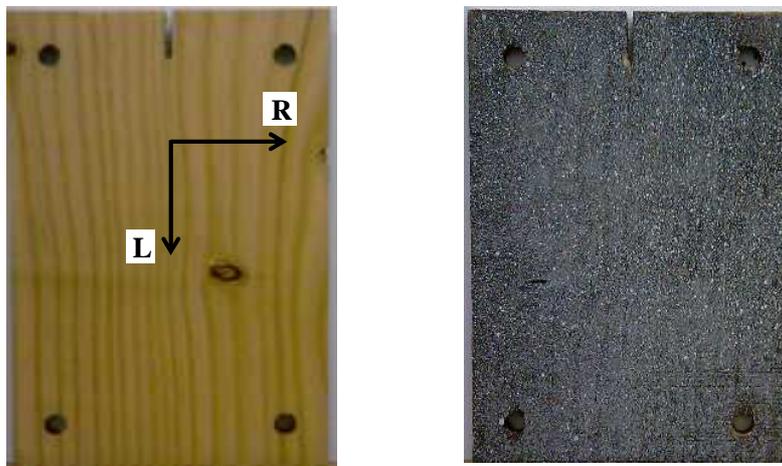


Figure 2.20 : Préparation de l'éprouvette en Douglas (exemple du mode mixte)

La préparation des éprouvettes comporte deux étapes : l'usinage de la géométrie avec une entaille et la préparation de la surface de mesure par l'application d'un mouchetis noir et blanc. Afin de maîtriser le taux d'humidité, l'éprouvette en Douglas est conditionnée dans une enceinte climatique régulée en température et humidité relative. Afin de respecter, d'une part, la fissuration dans le plan RL et, d'autre part, un bon alignement de la fissure avec le sens des fibres, les échantillons en Douglas sont taillés dans des planches dont les cernes de croissance sont le plus parallèles possibles. Nous rappelons ici que les essais sont sans propagation de fissure et sans endommagement ; ce qui nous permet d'utiliser la même éprouvette pour plusieurs tests. Cet aspect est primordial au regard de l'hétérogénéité entre deux éprouvettes de Douglas.

2.1.3 Méthode de mesures par Corrélation d'Images Numériques (CIN)

Le formalisme, proposé dans le premier chapitre, requière la connaissance des facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure. Dans notre étude, nous proposons d'évaluer ces facteurs par approche cinématique, et ce, à partir des champs de déplacements mesurés par CIN.

Durant l'essai, les modifications morphologiques de la surface mouchetée de l'éprouvette sont filmées par une caméra CCD ; ce qui permet, en fonction de la vitesse d'acquisition, d'avoir

une série de séquences (ou images) correspondant aux différents états de chargement. A partir de ces enregistrements, un champ de déplacements est calculé pour chaque image. Pour évaluer le champ de déplacements, une zone d'étude est définie au voisinage de la pointe de fissure, Figure 2.21.

Nous rappelons ici que l'évaluation du taux de restitution d'énergie dérive des approches énergétiques basées sur les champs mécaniques lointains et que, dans ce cas, la taille de la zone d'étude doit être représentative du domaine d'intégration. Cette zone est ensuite subdivisée en fenêtres de corrélation. Dans la littérature, plusieurs études paramétrées ont permis de définir la taille optimale des fenêtres de corrélation [RETHORE 2008]. Pour notre étude, des essais préliminaires nous ont conduits à choisir une taille de fenêtres de 16×16 pixels² et 32×32 pixels².

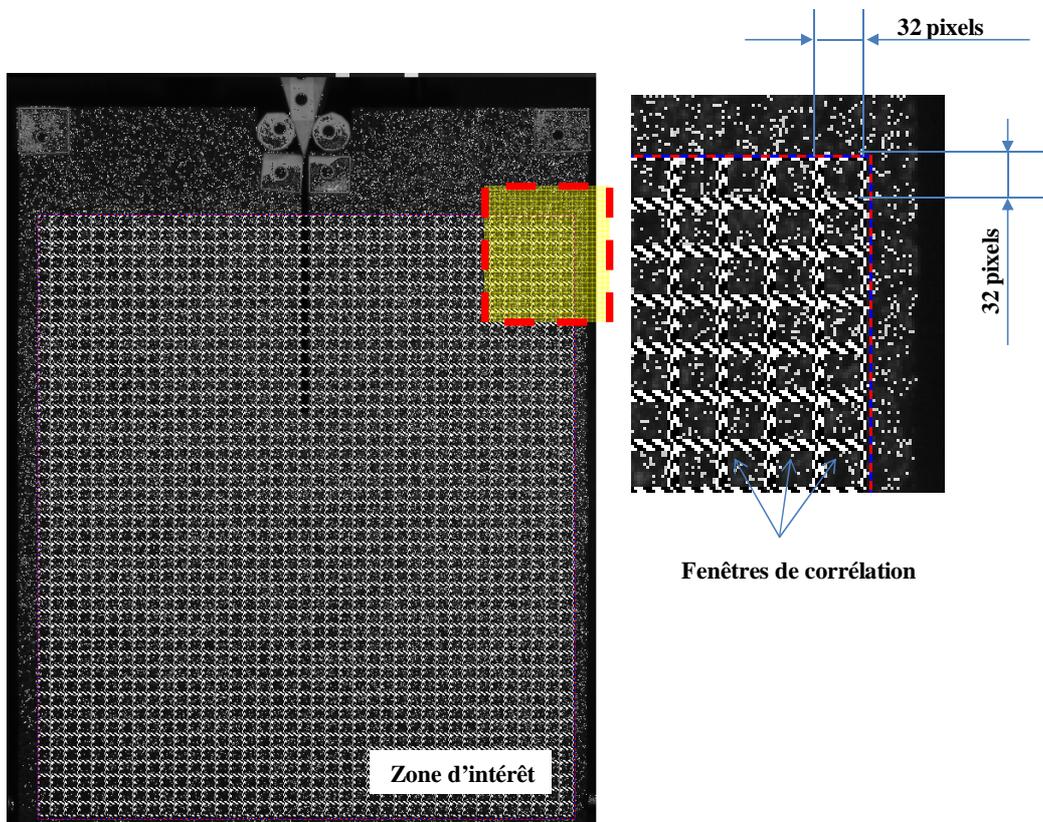


Figure 2.21 : Définition de la zone d'étude en corrélation d'images numériques

Afin d'évaluer les champs de déformations et de contraintes, les résultats obtenus par la CIN peuvent être exportés dans un code de calcul. Dans notre approche, les calculs numériques sont réalisés à partir du code aux éléments finis Castem développé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) [CASTEM 1993, 1996]. L'implémentation des données expérimentales dans Castem se fait à partir d'un maillage discrétisé par des éléments finis à 4-nœuds iso paramétriques [RETHORE 2005 ; BESNARD 2006 ; FEDELE 2009]. Comme nous l'avons illustré sur la Figure 2.22, les centres des fenêtres de corrélation sont assimilés aux nœuds des éléments. Les coordonnées géométriques des nœuds correspondent donc aux coordonnées cartésiennes des centres des fenêtres de corrélation de l'image initiale qui représente la référence.

La procédure d'implémentation consiste à attribuer ces déplacements aux nœuds du maillage sous la forme d'un champ par points. A partir de cette démarche, nous avons illustré, en Figure 2.23, la déformée expérimentale de la zone d'intérêt, et ce, pour une éprouvette en PVC sollicitée en mode I.

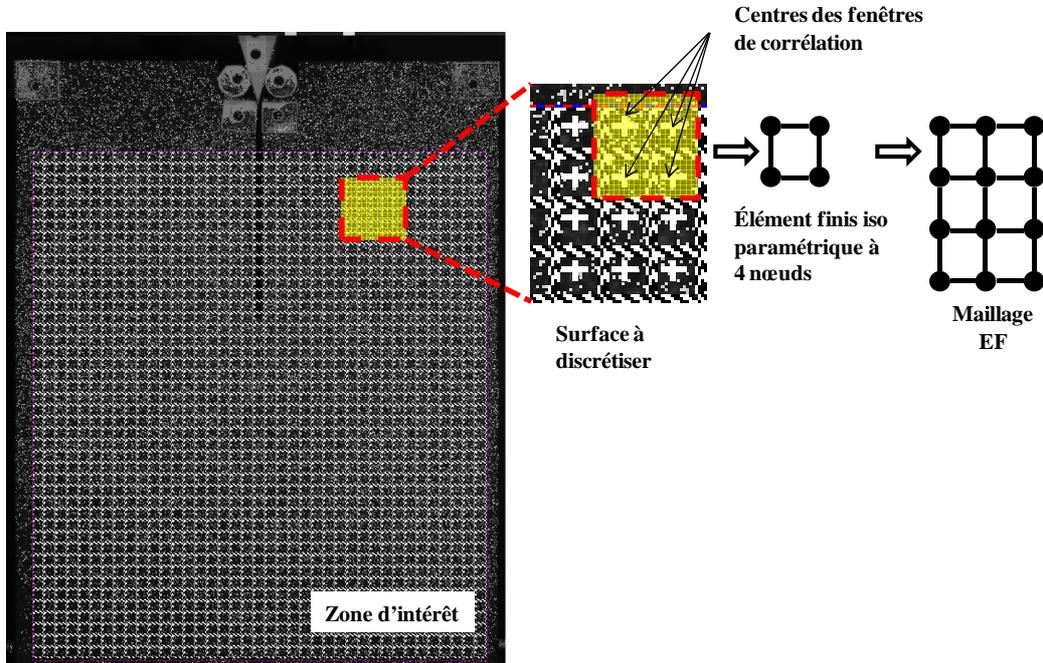


Figure 2.22 : Génération d'un maillage EF à partir des données expérimentales

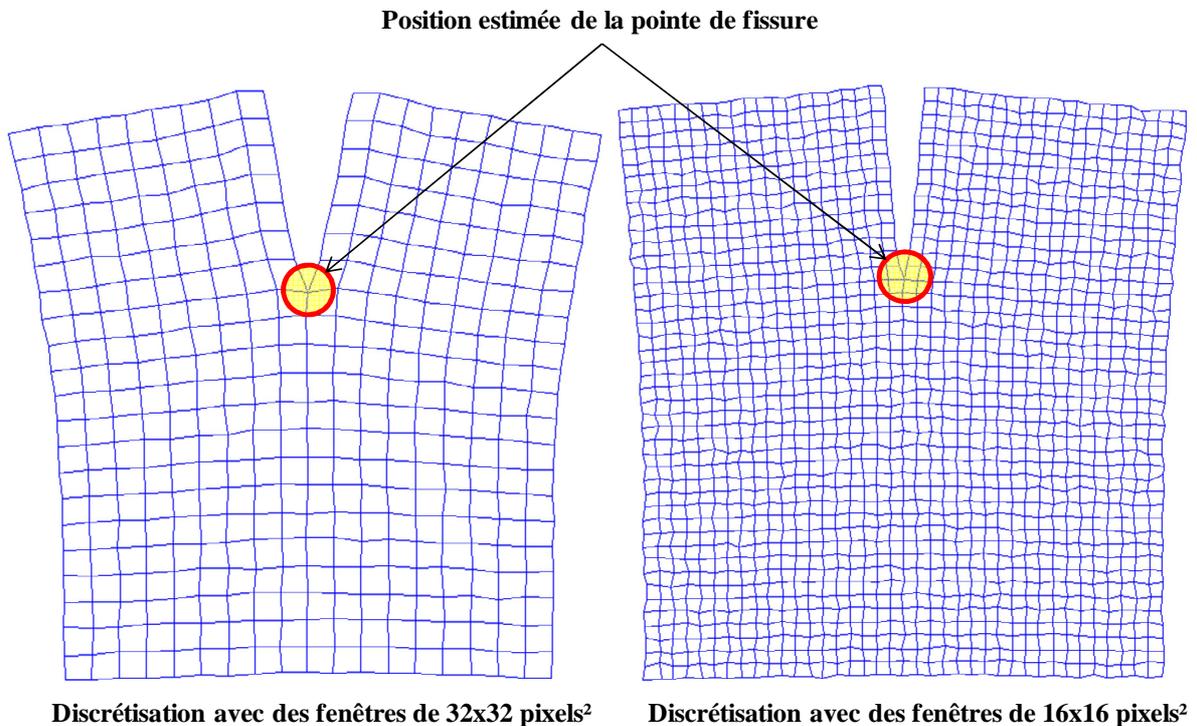


Figure 2.23 : Déformée éléments finis de la zone d'intérêt (mode I)

En évaluant la déformée illustrée en Figure 2.23, plusieurs questions, associées aux conditions d'essais et à la géométrie de l'éprouvette, peuvent être formulées :

- Le bruit expérimental en déplacements, a-t-il une influence directe sur l'indépendance des invariants intégraux ?
- La position et l'orientation de la pointe de la fissure sont-elles mesurées avec précision ?
- L'éprouvette subit-elle un mouvement du corps rigide au cours du chargement ?

Certains de ces aspects ont été identifiés et traités d'une manière complète ou partielle dans des travaux antérieurs au notre. Pourtant, à ces problématiques, s'ajoutent les hypothèses faites sur la connaissance des propriétés d'élasticité du matériau.

C'est pourquoi il est admis que la corrélation d'images numériques ne donne pas des résultats exploitables directement pour un post traitement par éléments finis [KENJI 2006 ; YATES 2010 ; JINLONG 2010 ; YONEYAMA 2006 ; GREGOIRE 2008] ; d'où le besoin d'envisager une stratégie favorisant l'accès à l'ouverture de la fissure et à la localisation précise des coordonnées de la pointe de fissure. Ainsi, pour pallier à cette difficulté, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature (Cf. chapitre 1). Celle adoptée dans ce travail, contrairement à la littérature, repose sur l'optimisation des champs de déplacement expérimentaux en traitant, comme inconnues, la position de la pointe de fissure, les défauts d'alignement de la fissure avec le cadrage caméra et les mouvements de corps solide durant l'essai. Ce qui démarque notre travail est, à ce niveau de l'étude, l'abstraction des propriétés d'élasticité des matériaux étudiés.

2.1.4 Optimisation des champs de déplacements expérimentaux

La procédure d'optimisation consiste à substituer les champs de déplacement bruts par des champs analytiques asymptotiques via un algorithme de minimisation d'erreurs. Les champs analytiques recherchés doivent être équivalents aux champs expérimentaux mesurés dans toute la zone d'étude. Les solutions analytiques des champs asymptotiques isotropes (1.1) et (1.2) puis orthotrope (1.11) et (1.16) [IRWIN 1957 ; SIH 1965 ; WESTERGAARD 1939] s'avèrent insuffisantes pour représenter le comportement mécanique sur l'ensemble de la zone d'étude. Afin de trouver le champ analytique semblable au champ global mesuré, la solution asymptotique de Kolosov-Muskhelishvili's [MUSKHELISHVILI'S 1953] ou de Williams [WILLIAMS 1957] est utilisée. Cette solution asymptotique est définie par une série mathématique pondérée pouvant décrire correctement le champ de déplacements mesuré au voisinage immédiat et loin du front de fissure. Ainsi, il revient à développer la série de Williams en déterminant l'ensemble des coefficients de pondération de la série, y compris les paramètres régissant les mouvements de corps rigide de telle sorte à minimiser l'écart entre les champs analytiques et expérimentaux. Dans la suite de notre travail, nous nous limiterons à des représentations en plan.

2.1.4.1 Analyse asymptotique de Williams

En considérant un milieu élastique fissuré soumis à un chargement en mode mixte (modes I+II), les champs de déplacements élastiques, dans le voisinage de la pointe de fissure, sont exprimés sous la forme d'une série infinie de Williams [MUSKHELISHVILI'S 1953 ; WILLIAMS 1957 ; OWEN 1983, KARIHALOO 2001, 2003 ; JU 2006 ; XIAO 2006 ; YONEYAMA, 2006, 2007 ; HAMAM 2007 ; KAMESH 1997 ; ROUX 2009 ; MOGADPALLI 2008 ; LOPEZ-CRESPO 2008 ; YATES 2010 ; GAO 2009 ; SHIN 2011]. En l'absence de pression sur les lèvres, le champ des déplacements est donné ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^k = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_I^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot f_i(\kappa, \theta_k) + A_{II}^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot g_i(\kappa, \theta_k) \right) + T_1 - R \cdot x_2^k \\ u_2^k = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_I^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot l_i(\kappa, \theta_k) + A_{II}^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot z_i(\kappa, \theta_k) \right) + T_2 + R \cdot x_1^k \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$f_i(\kappa, \theta)$, $g_i(\kappa, \theta)$, $l_i(\kappa, \theta)$ et $z_i(\kappa, \theta)$ sont des fonctions polaires liées aux champs de déplacements exprimées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\kappa, \theta) = \kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta + \left\{ \frac{i}{2} + (-1)^i \right\} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \\ g_i(\kappa, \theta) = -\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta - \left\{ \frac{i}{2} - (-1)^i \right\} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \\ l_i(\kappa, \theta) = \kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta - \left\{ \frac{i}{2} + (-1)^i \right\} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \\ z_i(\kappa, \theta) = +\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta - \left\{ \frac{i}{2} - (-1)^i \right\} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

κ est appelé constante de Kolosov. r et θ sont les coordonnées polaires dans le repère centré en pointe de fissure, Figure 2.24. k identifie le $k^{\text{ième}}$ pattern dont le déplacement correspond aux composantes u_1^k et u_2^k . T_1 , T_2 et R sont les paramètres relatifs aux mouvements de corps rigide, notamment les translations horizontale et verticale suivant les directions respectives x_1 et x_2 , et la rotation dans le plan ($x_1 O x_2$), figure 2.24.

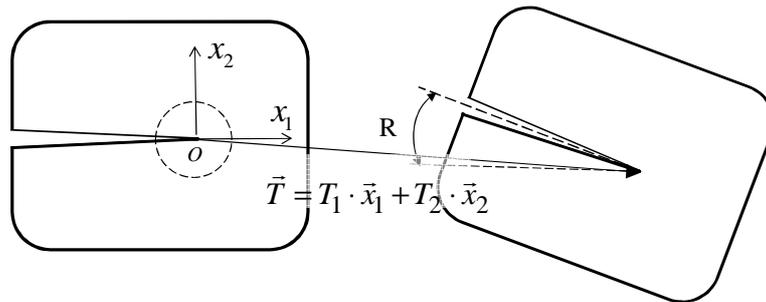


Figure 2.24 : Déplacement de corps rigide et pointe de fissure inconnue

Les coordonnées cartésiennes (x_1^k, x_2^k) , propres au $k^{\text{ième}}$ pattern, sont introduites dans le calcul des coordonnées polaires corrigées de la position de la pointe de fissure de coordonnées (x_1^0, x_2^0) :

$$r_k = \sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + (x_2^k - x_2^0)^2} \quad (2.3)$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{x_2^k - x_2^0}{x_1^k - x_1^0} \right) - \omega_0 \quad (2.4)$$

Enfin, l'angle ω_0 représente soit un défaut d'alignement de la fissure par rapport à l'orientation de la zone d'étude soit un défaut de cadrage de la caméra CCD, Figure 2.25.

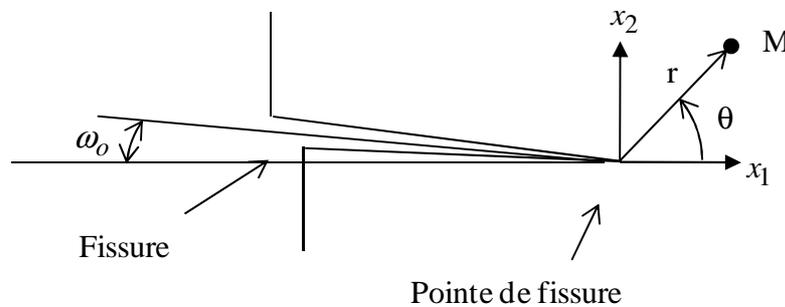


Figure 2.25 : Système de coordonnées autour de la pointe de fissure

2.1.4.2 Interpolation des champs analytiques

Il s'agit d'optimiser les paramètres de la série de William pour que le champ asymptotique analytique se rapproche au mieux du champ de déplacement expérimental relevé par corrélation dans la zone d'étude. Il s'agit donc d'identifier les coefficients $A_I^1, \dots, A_I^i, A_{II}^1, \dots, A_{II}^i, T_1, T_2$ et R permettant de minimiser l'écart entre le champ expérimental et le champ asymptotique, et ce, à travers un algorithme de minimisation d'erreur au sens des moindres carrés. Nous présentons deux méthodes de résolution du système d'équation (2.1).

La première considère le système d'équation (2.1) comme étant linéaire en supposant connus la position de la pointe de fissure, l'orientation globale de la fissure (r_k et θ_k) et la constante de Kolosov κ . Dans ce premier cas, il s'agit de conditions expérimentales idéales dans lesquelles l'usinage de l'échantillon ainsi que sa mise en place sont parfaitement réalisés. La résolution du système fait appel à la méthode des moindres carrés linéaires.

La seconde, dans un cas plus réaliste où la pointe de fissure n'est pas idéalement réalisée ou si la caméra n'est pas parfaitement alignée, considère, comme inconnues supplémentaires, r_k, θ_k et κ . Dans ce second cas, le système (2.1) devient non linéaire. La méthode de

résolution fait également appel à une minimisation des écarts au sens des moindres carrés mais elle est complétée par un algorithme de Newton-Raphson adapté aux systèmes non linéaires.

2.1.4.3 Méthode des moindres carrés linéaires

Dans la zone d'étude, considérons les composantes des déplacements de l'ensemble des M points. Le vecteur champ de déplacements s'écrit :

$$\mathbf{u}^T = \left[u_1^1 \quad \dots \quad u_1^M \quad u_2^1 \quad \dots \quad u_2^M \right] \quad (2.5)$$

u_1^k et u_2^k représentent les coordonnées du vecteur déplacement du $k^{i\text{ème}}$ point, et ce, dans les directions respectives x_1 et x_2 . Les fonctions polaires (2.2) étant connues, le système d'équation matriciel (2.1) est linéaire. Le système étant surdéterminé, la résolution se fait par la méthode des moindres carrés pour déterminer les paramètres A_α^i , T_1 , T_2 et R ($\alpha=I$ ou II). La forme matricielle du système d'équation linéaire (2.1) est la suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \quad (2.6)$$

Pour un nombre de coefficients N de la série de William, \mathbf{a} désigne la matrice des fonctions polaires (2.2) liées à la position de chaque point :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} r_1^{1/2} \cdot f_1(\kappa, \theta_1) & r_1^{1/2} \cdot g_1(\kappa, \theta_1) & \dots & r_1^{N/2} \cdot f_N(\kappa, \theta_1) & r_1^{N/2} \cdot g_N(\kappa, \theta_1) & 1 & 0 & -x_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ r_M^{1/2} \cdot f_1(\kappa, \theta_M) & r_M^{1/2} \cdot g_1(\kappa, \theta_M) & \dots & r_M^{N/2} \cdot f_N(\kappa, \theta_M) & r_M^{N/2} \cdot g_N(\kappa, \theta_M) & 1 & 0 & -x_2^M \\ r_1^{1/2} \cdot l_1(\kappa, \theta_1) & r_1^{1/2} \cdot z_1(\kappa, \theta_1) & \dots & r_1^{N/2} \cdot l_N(\kappa, \theta_1) & r_1^{N/2} \cdot z_N(\kappa, \theta_1) & 0 & 1 & x_1^1 \\ \vdots & \vdots \\ r_M^{1/2} \cdot l_1(\kappa, \theta_M) & r_M^{1/2} \cdot z_1(\kappa, \theta_M) & \dots & r_M^{N/2} \cdot l_N(\kappa, \theta_M) & r_M^{N/2} \cdot z_N(\kappa, \theta_M) & 0 & 1 & x_1^M \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

\mathbf{X} est le vecteur des coefficients inconnus A_α^i , T_1 , T_2 et R . La matrice \mathbf{X} est définie par :

$$\mathbf{X}^T = \left[A_I^1 \quad A_{II}^1 \quad \dots \quad A_I^N \quad A_{II}^N \quad T_1 \quad T_2 \quad R \right] \quad (2.8)$$

La solution du système d'équation matriciel, au sens des moindres carrés, s'écrit :

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} \right)^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{u} \quad (2.9)$$

Afin de prendre en compte une incertitude de positionnement de la pointe de fissure et le défaut d'alignement de la fissure (erreurs se reportant sur les coordonnées polaires de chaque point M), la méthode proposée est insuffisante. Sa généralisation à un système non linéaire est alors nécessaire. A chaque position supposée de la pointe de fissure, la méthode des moindres carrés propose une solution unique au système. Nous supposons donc que la position exacte

de la pointe de fissure correspond à une minimisation de l'écart entre la solution asymptotique et la mesure expérimentale. C'est dans ce contexte que la solution optimisée fait appel à un algorithme d'optimisation de Newton-Raphson.

2.1.4.4 Méthode des moindres carrés non linéaire

Si nous considérons à présent, comme inconnues, la position du front de fissure (x_1^0, x_2^0) , la constante de Kolosov κ et l'angle d'orientation global de la fissure ω_0 , les fonctions polaires (2.2) deviennent alors des inconnues ; d'où la non linéarité du système d'équation matriciel (2.1). La procédure itérative de Newton-Raphson, dont les concepts sont décrits ci-dessous, permet de résoudre, de façon optimisée, le système matriciel au sens des moindres carrés non linéaires [SANFORD 1980, 1988, 1989]. Ainsi, le vecteur inconnu (2.8) est complété ainsi :

$$\mathbf{X}^T = \left[A_I^1 \quad A_{II}^1 \quad \dots \quad A_I^N \quad A_{II}^N \quad T_1 \quad T_2 \quad R \quad x_1^o \quad x_2^o \quad \omega_o \quad \kappa \right] \quad (2.10)$$

Soit h la fonction résidu correspondant à la différence entre les champs de déplacement asymptotiques (2.1) et expérimentaux. Ses composantes, pour un nombre fini d'équations M ($k = 1, 2, \dots, M$), s'écrivent :

$$\begin{cases} h_1^k = \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot f_i(\kappa, \theta_k) + A_{II}^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot g_i(\kappa, \theta_k) \right) + T_1 - R \cdot x_2^k - u_1^k \\ h_2^k = \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot l_i(\kappa, \theta_k) + A_{II}^i \cdot r_k^{(i/2)} \cdot z_i(\kappa, \theta_k) \right) + T_2 + R \cdot x_1^k - u_2^k \end{cases} \quad (2.11)$$

Les valeurs, par défaut, A_I^i, A_{II}^i ($i \in \{1, \dots, N\}$), $T_1, T_2, R, x_1^o, x_2^o, \omega_o$ et κ demandent à être corrigées via un algorithme itératif visant à réduire le résidu (2.11). Basée sur le développement de Taylor de l'équation (2.11), la correction s'écrit sous la forme d'une évolution de h telle que :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(h_1^k \right)_{n+1} &= \left(h_1^k \right)_n + \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial h_1^k}{\partial A_I^i} \right)_n \cdot \Delta A_I^i + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial A_{II}^i} \right)_n \cdot \Delta A_{II}^i \right) + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial T_1} \right)_n \cdot \Delta T_1 + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial R} \right)_n \cdot \Delta R \\ &\quad + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial x_1^o} \right)_n \cdot \Delta x_1^o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial x_2^o} \right)_n \cdot \Delta x_2^o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial \omega_o} \right)_n \cdot \Delta \omega_o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial \kappa} \right)_n \cdot \Delta \kappa \\ \left(h_2^k \right)_{n+1} &= \left(h_2^k \right)_n + \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial h_2^k}{\partial A_I^i} \right)_n \cdot \Delta A_I^i + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial A_{II}^i} \right)_n \cdot \Delta A_{II}^i \right) + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial T_2} \right)_n \cdot \Delta T_2 + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial R} \right)_n \cdot \Delta R \\ &\quad + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial x_1^o} \right)_n \cdot \Delta x_1^o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial x_2^o} \right)_n \cdot \Delta x_2^o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial \omega_o} \right)_n \cdot \Delta \omega_o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial \kappa} \right)_n \cdot \Delta \kappa \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

ΔA_I^i , ΔA_{II}^i ($i \in \{1, \dots, N\}$), ΔT_1 , ΔT_2 , ΔR , Δx_1^o , Δx_2^o , $\Delta \omega_o$ et $\Delta \kappa$ sont les termes correctifs pour les coefficients précédemment estimés par la méthode des moindres carrés linéaires. Ces derniers sont déterminés en supposant une convergence de l'algorithme itératif. Si, à l'itération $n+1$, nous supposons une convergence, cela correspond à annuler le résidu tel que :

$$\left(h_1^k \right)_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(h_2^k \right)_{n+1} = 0 \quad (2.13)$$

Les expressions (2.12) peuvent alors se réécrire :

$$\left\{ \begin{aligned} -\left(h_1^k \right)_n &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial h_1^k}{\partial A_I^i} \right)_n \cdot \Delta A_I^i + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial A_{II}^i} \right)_n \cdot \Delta A_{II}^i \right) + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial T_1} \right)_n \cdot \Delta T_1 + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial R} \right)_n \cdot \Delta R \\ &\quad + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial x_1^o} \right)_n \cdot \Delta x_1^o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial x_2^o} \right)_n \cdot \Delta x_2^o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial \omega_o} \right)_n \cdot \Delta \omega_o + \left(\frac{\partial h_1^k}{\partial \kappa} \right)_n \cdot \Delta \kappa \\ -\left(h_2^k \right)_n &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial h_2^k}{\partial A_I^i} \right)_n \cdot \Delta A_I^i + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial A_{II}^i} \right)_n \cdot \Delta A_{II}^i \right) + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial T_2} \right)_n \cdot \Delta T_2 + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial R} \right)_n \cdot \Delta R \\ &\quad + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial x_1^o} \right)_n \cdot \Delta x_1^o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial x_2^o} \right)_n \cdot \Delta x_2^o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial \omega_o} \right)_n \cdot \Delta \omega_o + \left(\frac{\partial h_2^k}{\partial \kappa} \right)_n \cdot \Delta \kappa \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

Et sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{h}_n = \mathbf{b}_n \cdot \Delta_n \quad (2.15)$$

\mathbf{h}_n , Δ_n et \mathbf{b}_n sont définis par :

$$\left[\mathbf{h}_n \right]^T = \left[-h_1^1 \quad \dots \quad -h_1^M \quad -h_2^1 \quad \dots \quad -h_2^M \right]_n \quad (2.16)$$

$$[\Delta_n]^T = \left[\Delta A_I^1 \quad \dots \quad \Delta A_I^N \quad \Delta A_{II}^1 \quad \dots \quad \Delta A_{II}^N \quad \Delta T_1 \quad \Delta T_2 \quad \Delta R \quad \Delta x_1^o \quad \Delta x_2^o \quad \Delta \omega_o \quad \Delta \kappa \right]_n \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^1}{\partial A_I^1} & \dots & \frac{\partial h_1^1}{\partial A_I^N} & \frac{\partial h_1^1}{\partial A_{II}^1} & \dots & \frac{\partial h_1^1}{\partial A_{II}^N} & \frac{\partial h_1^1}{\partial T_1} & 0 & \frac{\partial h_1^1}{\partial R} & \frac{\partial h_1^1}{\partial x_1^o} & \frac{\partial h_1^1}{\partial x_2^o} & \frac{\partial h_1^1}{\partial \omega_o} & \frac{\partial h_1^1}{\partial \kappa} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1^M}{\partial A_I^1} & \dots & \frac{\partial h_1^M}{\partial A_I^N} & \frac{\partial h_1^M}{\partial A_{II}^1} & \dots & \frac{\partial h_1^M}{\partial A_{II}^N} & \frac{\partial h_1^M}{\partial T_1} & 0 & \frac{\partial h_1^M}{\partial R} & \frac{\partial h_1^M}{\partial x_1^o} & \frac{\partial h_1^M}{\partial x_2^o} & \frac{\partial h_1^M}{\partial \omega_o} & \frac{\partial h_1^M}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial h_2^1}{\partial A_I^1} & \dots & \frac{\partial h_2^1}{\partial A_I^N} & \frac{\partial h_2^1}{\partial A_{II}^1} & \dots & \frac{\partial h_2^1}{\partial A_{II}^N} & 0 & \frac{\partial h_2^M}{\partial T_2} & \frac{\partial h_2^M}{\partial R} & \frac{\partial h_2^M}{\partial x_1^o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial x_2^o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial \omega_o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial \kappa} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_2^M}{\partial A_I^1} & \dots & \frac{\partial h_2^M}{\partial A_I^N} & \frac{\partial h_2^M}{\partial A_{II}^1} & \dots & \frac{\partial h_2^M}{\partial A_{II}^N} & 0 & \frac{\partial h_2^M}{\partial T_2} & \frac{\partial h_2^M}{\partial R} & \frac{\partial h_2^M}{\partial x_1^o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial x_2^o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial \omega_o} & \frac{\partial h_2^M}{\partial \kappa} \end{bmatrix}_n \quad (2.18)$$

La solution de l'équation (2.15) est donnée, au sens des moindres carrés, par :

$$\Delta_n = \left([\mathbf{b}_n]^T \cdot \mathbf{b}_n \right)^{-1} \cdot [\mathbf{b}_n]^T \cdot \mathbf{h}_n \quad (2.19)$$

Les éléments de la matrice \mathbf{b}_n sont donnés ci-dessous :

$$\frac{\partial h_1^k}{\partial A_I^i} = \sum_{i=1}^N \left(r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial h_1^k}{\partial A_{II}^i} = \sum_{i=1}^N \left(-r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial h_1^k}{\partial T_1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h_1^k}{\partial R} = -x_2^k \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial h_1^k}{\partial \kappa} = \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) - \sum_{i=1}^N \left(A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1^k}{\partial \omega_o} &= \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(-\frac{i}{2} + 2\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \right) \right) \\ &- \sum_{i=1}^N \left(A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(-\frac{i}{2} + 2\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \right) \right) \\ &+ R \cdot x_1^k \end{aligned}$$

(2.24)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1^k}{\partial x_1^0} = & \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot i \cdot (-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0) \cdot \left(\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right)}{r_k^2} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2 - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{i \cdot (-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0) \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right)}{r_k^2} \right) \\
 & - \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2} - 2\right) \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \\
 & \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot \sin(\theta) \cdot (-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0)}{r_k} - \frac{R \cdot x_1^k \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)}
 \end{aligned}$$

(2.25)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1^k}{\partial x_2^0} = & \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot i \cdot (-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0) \cdot \left(\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right)}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \\
 & - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{i \cdot (-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0) \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \right) \\
 & - \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right)}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot \sin(\theta) \cdot (-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0)}{r_k} + \frac{R \cdot x_1^k \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0) \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)}
 \end{aligned}$$

(2.26)

$$\frac{\partial h_2^k}{\partial A_I^i} = \sum_{i=1}^N \left(r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) - \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial h_2^k}{\partial A_{II}^i} = \sum_{i=1}^N \left(-r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial h_2^k}{\partial T_2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h_2^k}{\partial R} = x_1^k \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial h_2^k}{\partial \kappa} = \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) + \sum_{i=1}^N \left(A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \right) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2^k}{\partial \omega_0} &= \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i + \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(-\frac{i}{2} + 2\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \right) \right) \\ &- \sum_{i=1}^N \left(A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(-\frac{i}{2} + 2\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \right) \right) \\ &+ R \cdot x_2^k \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_2^k}{\partial x_1^0} = & \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N \left(A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{i(-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0) \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) - \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \\
 & - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{i(-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0) \cdot \left(-\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \\
 & - \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i \cdot (x_2^k - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)} \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot \cos(\theta) \cdot (-2 \cdot x_1^k + 2 \cdot x_1^0)}{r_k} - \frac{R \cdot x_2^k \cdot (x_2 - x_2^0)}{(x_1^k - x_1^0)^2 \cdot \left(1 + \frac{(x_2^k - x_2^0)^2}{(x_1^k - x_1^0)^2}\right)}
 \end{aligned}$$

(2.32)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_2^k}{\partial x_2^0} = & \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot i \left(-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0\right) \cdot \left(\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) + \frac{i}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) - \left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N A_I^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right)}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} + (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} \\
 & - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(\frac{i \left(-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0\right) \cdot \left(-\kappa \cdot \cos\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) - \frac{i}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) + \left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \cos\left(\frac{i}{2}\right) \cdot \theta \right)}{r_k^2} \right) \\
 & - \sum_{i=1}^N A_{II}^i \cdot r_k^{\left(\frac{i}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot \sin\left(\left(\frac{i}{2}-2\right) \cdot \theta\right) \cdot \left(\frac{i}{2}-2\right)}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{i}{2} - (-1)^i\right) \cdot \sin\left(\frac{i}{2} \cdot \theta\right) \cdot i}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)} \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot \cos(\theta) \cdot \left(-2 \cdot x_2^k + 2 \cdot x_2^0\right)}{r_k} + \frac{R \cdot x_2^k}{\left(x_1^k - x_1^0\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(x_2^k - x_2^0\right)^2}{\left(x_1^k - x_1^0\right)^2}\right)}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

La solution Δ_n fournit les termes correctifs à apporter au vecteur inconnu \mathbf{X} tel que, à l'incrément $n+1$, nous obtenons :

$$(\mathbf{X})_{n+1} = (\mathbf{X})_n + \Delta_n \tag{2.34}$$

L'algorithme itératif, composé des expressions (2.19) et (2.34), est répété tant que le résidu n'atteint pas une valeur minimale ou dès lors que les corrections Δ deviennent négligeables. Les différentes étapes de cette procédure de Newton-Raphson sont les suivantes :

- (a) Choisir une valeur initiale pour $(\mathbf{X})_0$. Si ce choix est théoriquement arbitraire, il peut être le résultat d'un premier calcul linéaire en estimant visuellement les inconnues de positionnement du front de fissure (x_1^0, x_2^0) et l'angle d'orientation global de la fissure ω_0 . Cela évite toute divergence de la méthode puisque les inconnues $(\mathbf{X})_0$ sont proches de la solution exacte recherchée.
- (b) Calculer les éléments des matrices \mathbf{h} et \mathbf{b} pour chaque point de mesures.
- (c) Calculer le vecteur des termes de correction Δ_n à partir de l'équation (2.19).
- (d) Mettre à jour le vecteur d'inconnues $(\mathbf{X})_{n+1}$
- (e) Répéter les étapes (b), (c), et (d) jusqu'à ce que les termes correctifs Δ_n deviennent négligeables, signe de la convergence de la solution.

La meilleure représentation du champ asymptotique à interpoler s'obtient par minimisation du résidu \mathbf{h}_n à partir de la moyenne des écarts ξ donnée par les formules suivantes [RAMESH 1997 ; SANFORD 1980, 1988, 1989] :

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^M |h_1^i|}{M} + \frac{\sum_{i=1}^M |h_2^i|}{M} \quad (2.35)$$

2.1.5 Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure

La notion de facteur d'intensité d'ouverture de la fissure, introduite dans le chapitre précédent (Cf. les sections 1.1.2.2, 1.1.2.3 et 1.1.3.2), est reprise ici pour donner une représentation cinématique de l'ouverture de la fissure. L'égalité, entre les équations (1.8) et (2.1), permet de mettre en exergue la relation directe entre les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure $K_\alpha^{(\varepsilon)}$ et les coefficients de pondération A_I^1 et A_{II}^1 obtenus après interpolation, à savoir [MEITE 2011a, 2011b, 2012 ; POP 2011]:

$$\begin{cases} K_I^{(\varepsilon)} = 2 \cdot A_I^1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot (\kappa + 1) & \rightarrow \text{en mode I} \\ K_{II}^{(\varepsilon)} = -2 \cdot A_{II}^1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot (\kappa + 1) & \rightarrow \text{en mode II} \end{cases} \quad (2.36)$$

Cette étape expérimentale représente la caractérisation cinématique de la fissuration à travers la détermination des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure. Cette approche doit, à présent, être complétée par le calcul des facteurs d'intensité de contrainte faisant appel à la méthode des éléments finis.

2.2 Distribution des contraintes en pointe de fissure

2.2.1 Modélisation par éléments finis à force imposée

Les facteurs d'intensité des contraintes ont pour rôle une représentation synthétique de la distribution du tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Dans ce contexte, l'approche par éléments finis repose sur l'hypothèse suivante :

A force imposée, la distribution des contraintes, au voisinage de la fissure, est indépendante des propriétés mécaniques du matériau étudié.

Cette hypothèse est naturellement vérifiée pour des matériaux homogènes isotropes d'après l'équation (1.1). Elle a aussi été vérifiée dans le cas des matériaux orthotropes, tel le bois et notamment le Hêtre [PLUVINAGE 1992]. Si la distribution des contraintes singulières est indépendante des propriétés mécaniques du matériau, les facteurs d'intensité de contrainte sont nécessairement indépendants de la loi de comportement mécanique locale. Ces facteurs d'intensité des contraintes dépendent de l'amplitude de l'effort imposé F , de la géométrie de l'éprouvette Ω et de la longueur de fissure a . Nous pouvons ainsi noter que :

$$K_{\alpha}^{(\sigma)} = K_{\alpha}^{(\sigma)}(F, \Omega, a) \quad (2.37)$$

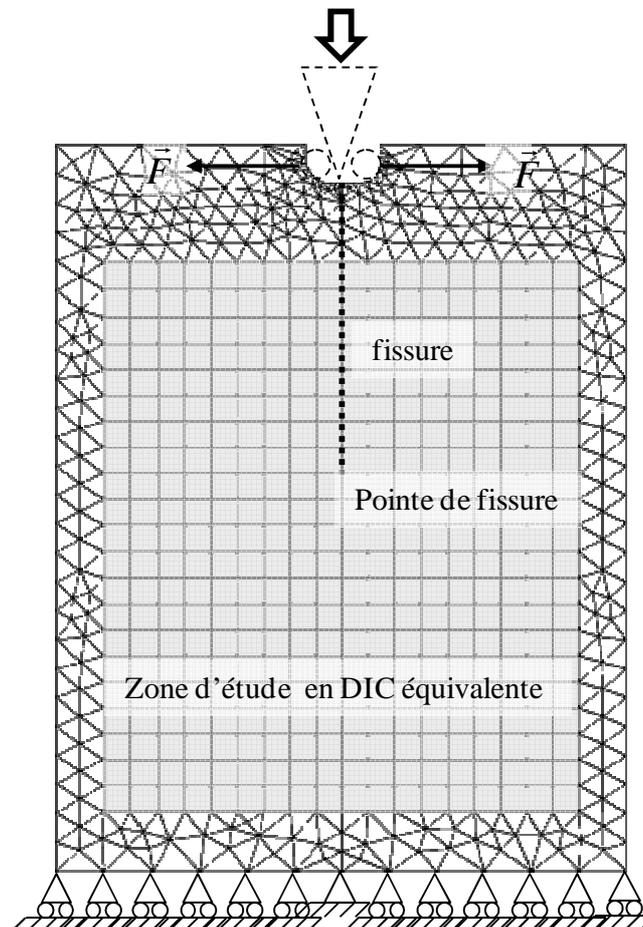


Figure 2.26 : Modélisation numérique de l'essai de fissuration en mode d'ouverture

L'équation (2.37) nous invite à imposer un chargement en force. Les essais de fissuration sont entièrement modélisés en adoptant la même discrétisation des éléments de la zone d'étude sélectionnée en corrélation d'images avec les mêmes éléments quadrangles iso paramétriques à 4 nœuds, et ce, en vue d'obtenir les champs de déplacements numériques comparables aux données expérimentales optimisées dans cette zone d'intérêt.

Dans le cas d'une configuration en mode d'ouverture, la Figure 2.26 présente un exemple de maillage éléments finis complété des conditions de chargement et des conditions aux limites. Afin de respecter les conditions aux limites expérimentales (Figure 2.15), la base de l'éprouvette reste fixe. Les efforts \vec{F} horizontaux sont appliqués afin de reproduire la transmission de force induite par la pyramide métallique.

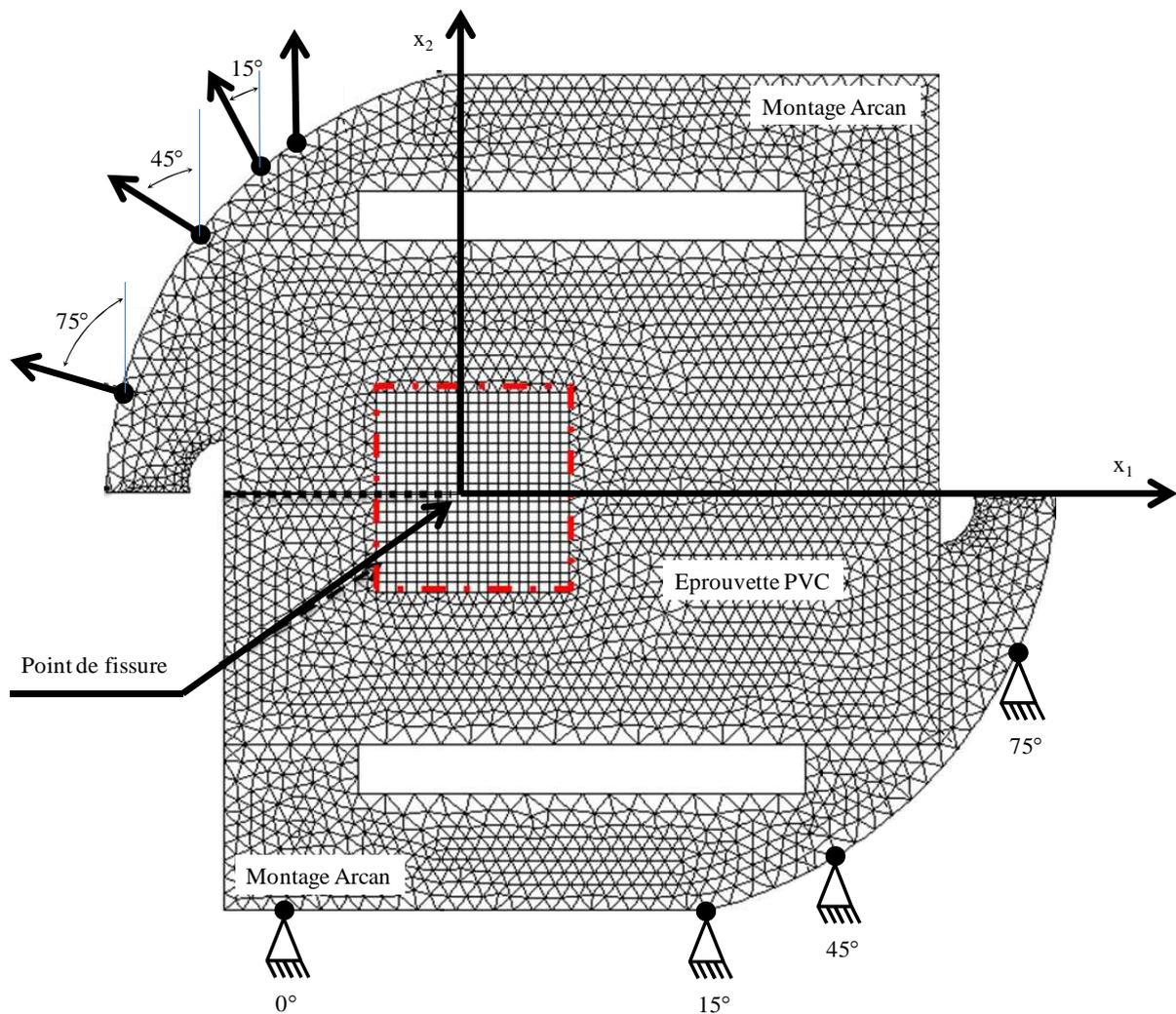


Figure 2.27 : Modélisation numérique de l'essai de fissuration en mode mixte

Dans le cas du mode mixte, la modélisation éléments finis doit intégrer le système de chargement représenté par le montage Arcan. La liaison, bien que vissée dans la réalité, est modélisée par un collage parfait des bras sur l'éprouvette. Nous considérons que cette simplification aura peu d'effet sur la distribution des contraintes dans la zone d'étude.

Egalement, les frontières externes des bras se limitent aux arcs de cercles passant par les points de fixation et de sollicitation, Figure 2.27.

2.2.2 Intégrales $G\theta/M\theta$

Une fois la géométrie discrétisée, les conditions aux limites et la force imposées, l'étape suivante est le calcul de facteurs d'intensité de contraintes via le formalisme des invariants intégraux $G\theta$ (mode d'ouverture) et $M\theta$ (mode mixte). Sachant que le calcul des invariants intégraux est basé sur l'emploi des champs mécaniques, il est nécessaire d'associer au maillage un modèle de matériau. Pour un modèle isotrope la loi matérielle sera définie par le module d'élasticité (E) et par le coefficient de Poisson (ν). Dans le cas d'un modèle orthotrope, plusieurs constantes élastiques ($E_R, E_L, G_{RL}, \nu_{RL}$), reliées entre elles par les rapports d'orthotropie ($\lambda_L, \lambda_G, \nu_{RL}$), sont nécessaires pour définir les propriétés d'élasticité du matériau. Dans notre application, en supposant que les propriétés matérielles sont inconnues, nous avons opté pour des propriétés d'élasticité arbitraires symbolisées par la typographie '~'. Ainsi, l'expression (1.110), pour une loi de comportement matérielle arbitraire, se décline de la façon suivante :

$$\tilde{G}\theta = \tilde{J} = \int_S \left(-\tilde{W} \cdot \theta_{k,k} + \sigma_{ij} \cdot \tilde{u}_{i,k} \cdot \theta_{k,j} \right) \cdot dS \quad (2.38)$$

Pour une configuration de mode mixte, l'expression (1.145) est déclinée ainsi :

$$\tilde{M}\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_S \left(\sigma_{ij}^u \cdot \tilde{v}_{i,k} - \sigma_{ij}^v \cdot \tilde{u}_i \right) \cdot \theta_{k,j} \cdot dS \quad (2.39)$$

Les calculs étant effectués en considérant des lois de comportement arbitraires, il est important de mettre en évidence la non dépendance des propriétés de fissuration vis-à-vis de la loi constitutive choisie. L'algorithme d'évaluation des facteurs d'intensité des contraintes est illustré Figure 2.28.

A noter que le champ θ (THETA) est généré par une procédure CH_THETA [BROCHARD 1976] adaptée à des problèmes de fissuration rectiligne sous l'effet de translation ou rotation géométrique. Dans un cas plan, le champ θ correspond à un accroissement d'aire de fissure unitaire $\delta A = 1$. Si cet accroissement d'aire est différent de l'unité, la procédure effectue une normalisation du champ θ de telle sorte que $\delta A = 1$. Finalement, la procédure CH_THETA construit un champ θ s'appuyant sur $n+1$ couches d'éléments (diamètre de couronne) autour de la pointe de fissure.

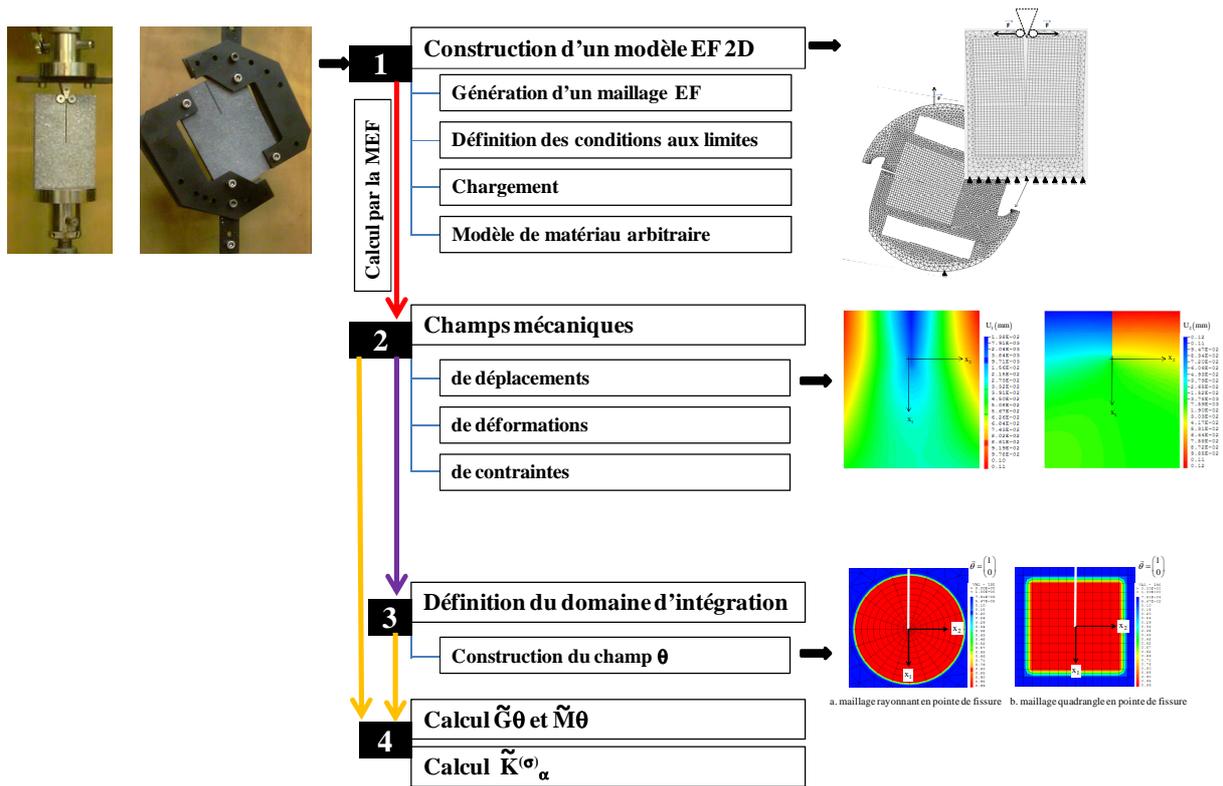


Figure 2.28 : Algorithme d'évaluation pour $G\theta$ et $M\theta$

2.2.2.1 Configuration en mode d'ouverture

Pour une configuration en mode d'ouverture, la Figure 2.29-a met en évidence la relation de proportionnalité qui existe entre $\tilde{G}\theta$ et la complaisance élastique réduite \tilde{C}_I (relation 1.21) d'un matériau orthotrope (avec $E_L=11,39.E_R$, $\nu_{RL}=0,39$ et $G_{LR}=0,744.E_R$).

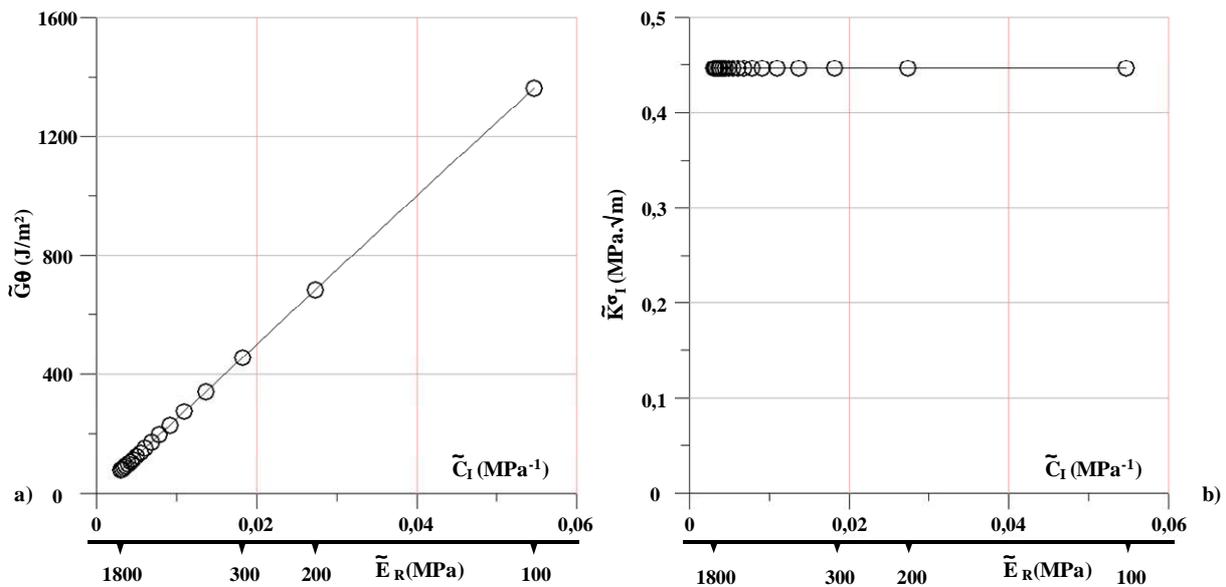


Figure 2.29 : $\tilde{G}\theta$ et $\tilde{K}_{\alpha}^{(\sigma)}$ fonction de \tilde{C}_I

Cette observation est faite pour les deux comportements étudiés, à savoir, isotrope et orthotrope.

A partir de ces valeurs arbitraires du taux de restitution d'énergie $\tilde{G}\theta$ et des relations (1.99) et (1.151), le facteur d'intensité des contraintes en mode d'ouverture s'écrivent :

$$\tilde{K}_I^{(\sigma)} = \sqrt{\frac{8 \cdot \tilde{G}\theta}{\tilde{C}_I}} \quad (2.40)$$

Si nous traçons maintenant l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes en fonction de la complaisance élastique réduite pour différents couples $(\tilde{G}\theta, \tilde{C}_I)$, nous pouvons remarquer en Figure 2.29-b la non dépendance de ces facteurs par rapport à \tilde{C}_I . Cela signifie que, pour un chargement en force imposée, la distribution des contraintes dans le voisinage du front de fissure est bien indépendante des propriétés d'élasticité du matériau.

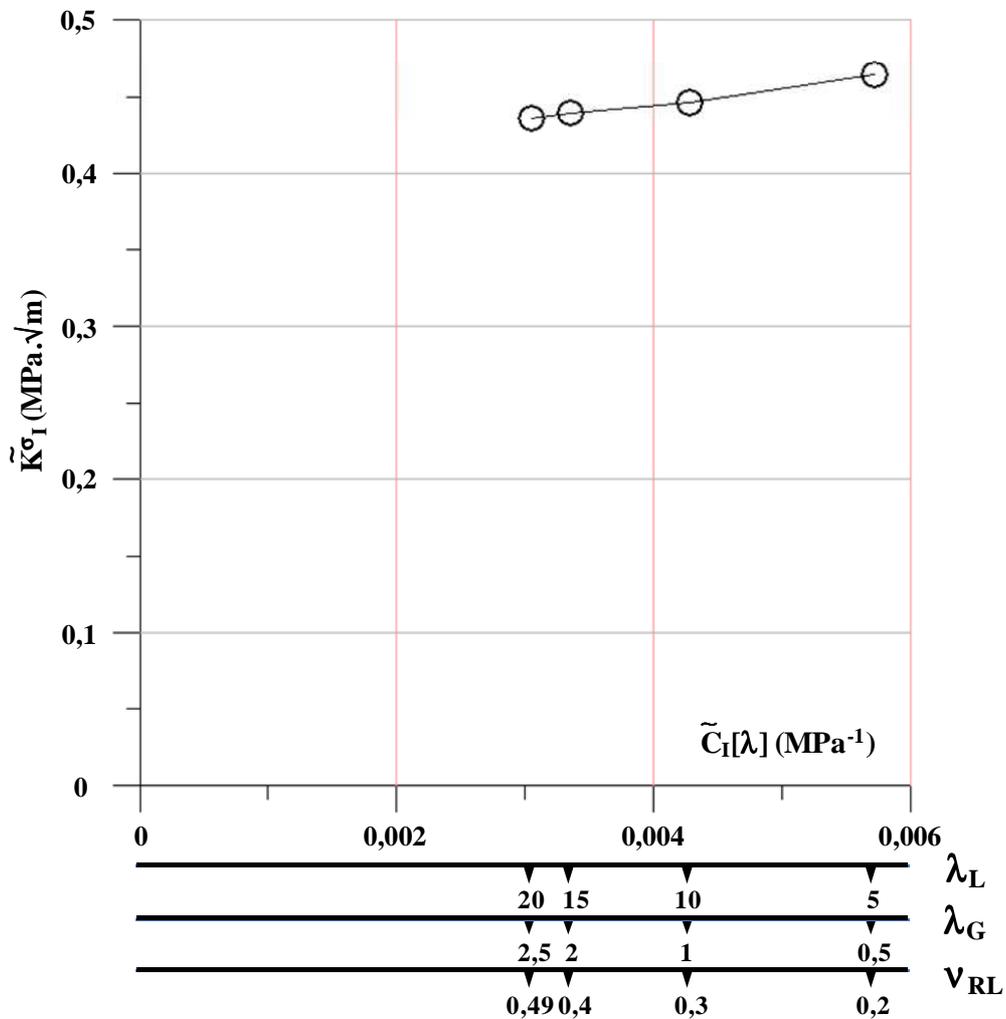


Figure 2.30 : $\tilde{K}_I^{(\sigma)}$ en fonction de la complaisance réduite et des rapports d'orthotropie

Cette évolution, observée pour un comportement isotrope, présente une particularité dans le cas des matériaux orthotropes. L'invariance des facteurs d'intensité des contraintes, par rapport aux propriétés mécaniques intrinsèques observée dans le cas du milieu orthotrope fissuré, n'est valable que pour un taux d'orthotropie λ donné. Cette invariance n'est plus conservée lorsque ce taux d'orthotropie change. En effet, des études de caractérisation mécanique sur du bois, notamment le Hêtre dans les plans d'orthotropie TL et LT, ont montré que la nature du prélèvement des échantillons et le degré d'orthotropie du bois changent, de façon notable, la distribution des contraintes [PLUVINAGE 1992]. Par conséquent, nous montrons, à travers la Figure 2.30 (dans le cas d'un prélèvement RL pour le Douglas), que la répartition des contraintes, dans le voisinage du front de fissure, varie en fonction du taux d'orthotropie.

2.2.2.2 Configuration en mode mixte

Dans le cas d'une configuration en mode mixte, le calcul par éléments finis utilise l'intégrale invariante $\tilde{M}\theta$, relation (2.39). Les propriétés élastiques matérielles étant toujours *arbitraires*, les champs des déplacements réels \tilde{u}_i et auxiliaires \tilde{v}_i sont également arbitraires. Par conséquent, nous présentons sur la Figure 2.31 l'évolution de l'intégrale $\tilde{M}\theta$ pour chaque mode de rupture en fonction des complaisances élastiques réduites arbitraires \tilde{C}_I et \tilde{C}_{II} . Les deux graphiques illustrent la proportionnalité entre l'intégrale $M\theta$ et la complaisance élastique réduite, et ce, quelle que soit la nature du matériau étudiée isotrope ou orthotrope (avec $E \equiv E_R = 100, 200, \dots, 1800 \text{ MPa}$, $E_L = 11,39 \cdot E_R$, $\nu_{RL} = 0,39$ et $G_{LR} = 0,744 \cdot E_R$).

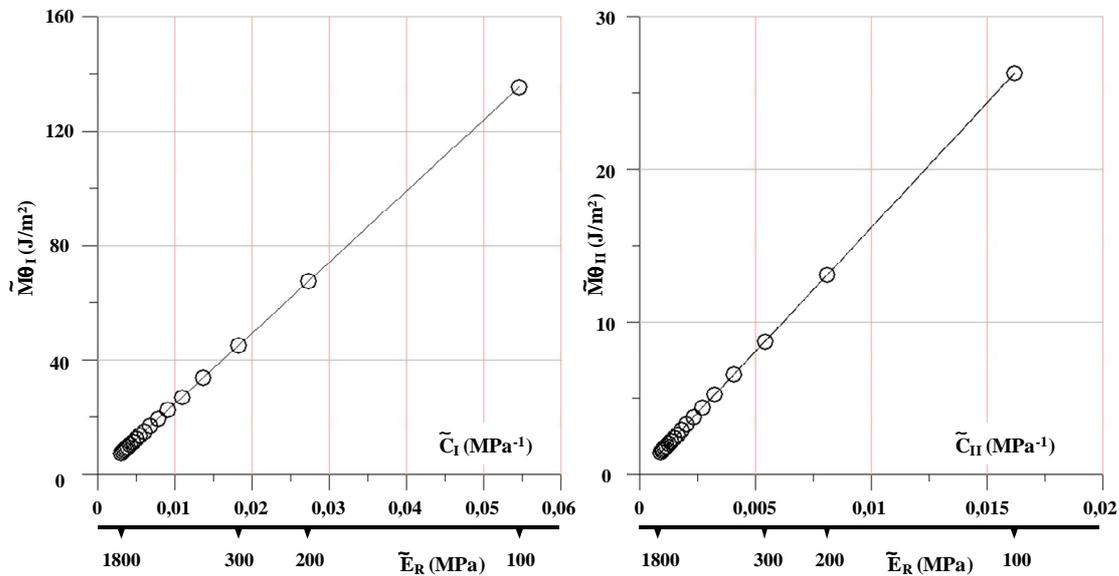


Figure 2.31 : Evolution de $\tilde{M}\theta_I$ et $\tilde{M}\theta_{II}$ en fonction de la complaisance réduite \tilde{C}_I et \tilde{C}_{II}

Pour une configuration de mode mixte, la séparation de modes de rupture s'exprime à travers les facteurs d'intensité des contraintes dont les expressions, relatives aux propriétés arbitraires du matériau, sont données par :

$${}^u \tilde{K}_I^{(\sigma)} = \frac{8 \cdot \tilde{M} \theta_I \cdot ({}^v K_I^{(\sigma)} = 1, {}^v K_{II}^{(\sigma)} = 0)}{\tilde{C}_I} \quad \text{et} \quad {}^u \tilde{K}_{II}^{(\sigma)} = \frac{8 \cdot \tilde{M} \theta_{II} \cdot ({}^v K_I^{(\sigma)} = 0, {}^v K_{II}^{(\sigma)} = 1)}{\tilde{C}_{II}} \quad (2.41)$$

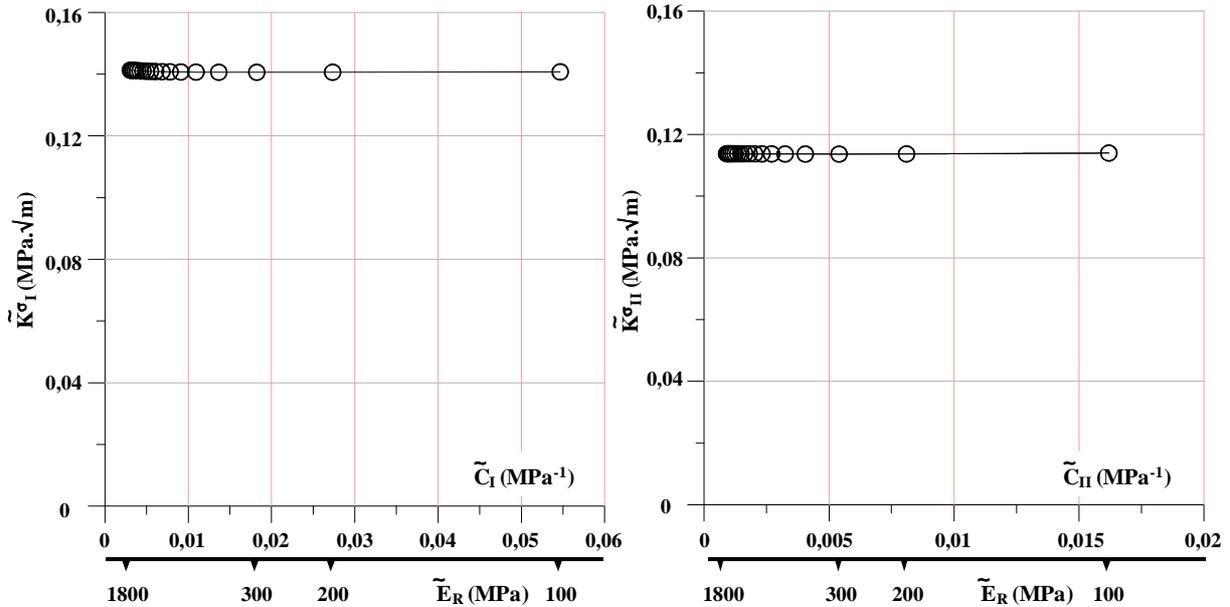


Figure 2.32 : ${}^u \tilde{K}_I^{(\sigma)}$ et ${}^u \tilde{K}_{II}^{(\sigma)}$ en fonction des complaisances réduites \tilde{C}_I et \tilde{C}_{II}

L'évolution des facteurs d'intensité de contraintes, Figure 2.32, met également en évidence une indépendance vis-à-vis des propriétés d'élasticité. Comme précédemment, une exception persiste pour un matériau orthotrope pour lequel cette indépendance est conditionnée par le choix des rapports d'orthotropie.

2.3 Couplage CIN/MEF

Il est maintenant possible d'évaluer le taux de restitution d'énergie et d'identifier les propriétés élastiques du milieu fissuré à partir d'un couplage expérimental/numérique. Les mesures expérimentales permettent d'évaluer $K_\alpha^{(\varepsilon)}$ par une approche cinématique de l'ouverture de la fissure. Une analyse en contrainte par MEF permet d'estimer $K_\alpha^{(\sigma)}$, Figure 2.33. L'évaluation des deux facteurs est faite en faisant abstraction des propriétés élastiques du matériau étudié. Cet aspect de la méthode est très important car si aujourd'hui, nous faisons abstraction des propriétés d'élasticités, nous pourrions faire, dans l'avenir, abstraction de la loi de comportement comme, par exemple, des matériaux vieillissants ou, plus généralement, des matériaux dont le comportement dépend du temps.

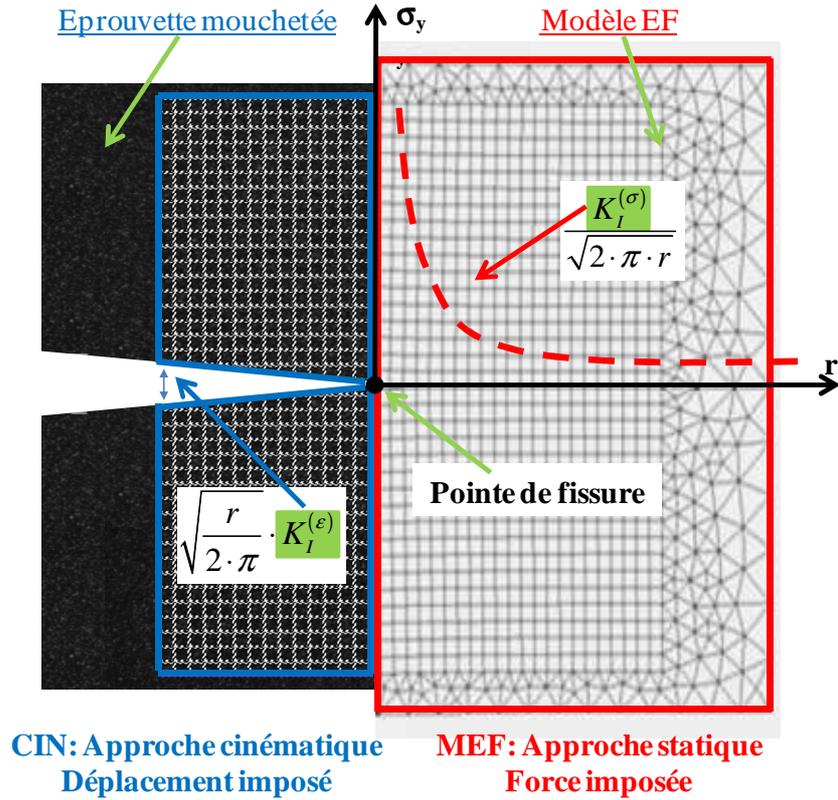


Figure 2.33 : Schéma du couplage CIN-MEF

En combinant les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les facteurs d'intensité des contraintes, tout en considérant la loi de comportement locale définie par Dubois [DUBOIS 1997] selon l'équation (1.9), le couplage expérimental-numérique s'opère via la complaisance élastique réduite du matériau étudié; à savoir :

$$K_{\alpha}^{(\varepsilon)} = C_{\alpha} \cdot K_{\alpha}^{(\sigma)} \quad (2.42)$$

Pour une configuration de chargement en mode mixte, les complaisances élastiques réduites s'obtiennent selon les expressions suivantes :

$$C_I = \frac{K_I^{(\varepsilon)}}{K_I^{(\sigma)}} \text{ et } C_{II} = \frac{K_{II}^{(\varepsilon)}}{K_{II}^{(\sigma)}} \quad (2.43)$$

2.4 Taux de restitution d'énergie

Le taux de restitution d'énergie a été calculé initialement à partir de la méthode des invariants intégraux en intégrant directement, dans son formalisme (équation 1.110), les champs cinématiques expérimentaux obtenus à partir des mesures de champs par la technique de corrélation d'images numériques [MEITE 2009a, 2009b]. Cette technique usuellement employée dans la littérature n'est pas totalement satisfaisante car, comme pour l'approche numérique, le calcul de l'énergie, à partir de données cinématiques, nécessite de fixer les propriétés d'élasticité. Dans le cas des matériaux orthotropes, les inconnues matérielles étant

nombreuses, une erreur d'estimation des propriétés d'élasticité et, plus particulièrement, une mauvaise évaluation du taux d'orthotropie peut entraîner une perte de l'invariance du domaine d'intégration caractérisant les intégrales de contour ou de surface de type $G\theta$ ou $M\theta$.

Ces différentes observations nous ont finalement conduits à réaliser un couplage entre l'expérimentation (corrélation d'images numériques) et la modélisation numérique (méthode des éléments finis). De ce point de vue, il semble extrêmement judicieux de développer une autre formulation de l'expression du taux de restitution d'énergie capable de s'adapter, *à priori*, au processus de couplage entre les approches expérimentale et numérique. Le point d'orgue de ce croisement étant la loi de comportement. La convergence des deux approches est atteinte lorsque les propriétés d'élasticités sont 'optimisées'. Ainsi, la problématique de la méconnaissance des propriétés d'élasticité est alors contournée.

A partir de la définition du taux de restitution d'énergie exprimé par l'équation (1.32), en imposant un déplacement constant sur une éprouvette fissurée, la variation du potentiel des efforts extérieurs devient nulle. Ainsi, l'équation (1.32) se traduit, dans ce cas, par l'égalité suivante :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial a} \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) montre que le taux de restitution d'énergie n'est autre que la variation d'énergie de déformation stockée pour deux longueurs de fissure a et $a + \Delta a$ ayant subi la même histoire de chargement, [LIEBOWITZ 1971 ; BUI 1978]. Dans le cas d'une avancée de fissure Δa , G peut s'exprimer par ;

$$G = -\frac{\Delta W}{\Delta a} \quad (2.45)$$

ΔW représente alors la perte d'énergie consommée dans le processus de fissuration. La différence énergétique entre les structures comportant une fissure de longueur a et $a + \Delta a$ provient simplement de la création d'une surface de fissure supplémentaire. Ainsi, cette énergie, intrinsèque au matériau, peut être évaluée en déterminant le travail ΔW nécessaire pour refermer la fissure sur une longueur équivalente Δa .

Dans le cas d'un mode I de fissuration, lorsque la fissure a une longueur $a + \Delta a$, le déplacement des points situés sur les lèvres, entre a et Δa , est donné par les équations (1.8) et (1.18) relatives aux cas isotrope et orthotrope respectifs, pour une distance $r = \Delta a - x$, Figure 2.34. Lorsque la fissure se referme de Δa , les forces de cohésion, à une distance x en avant, sont données par :

$$df = \sigma_{22} \cdot dx \quad (2.46)$$

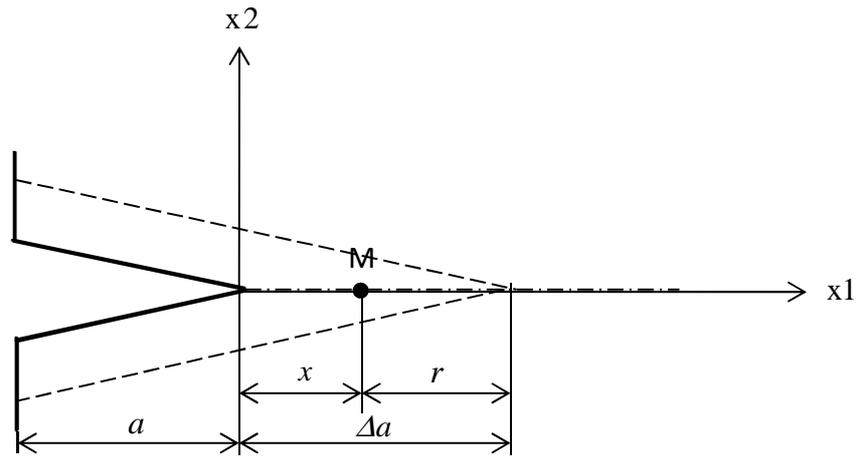


Figure 2.34 : Fermeture virtuelle de fissure

σ_{22} est calculée grâce aux expressions (1.1) et (1.11), en prenant $\theta=0$; ceci pour une fissure de longueur a . Au cours de la fermeture de la fissure, les déplacements en tout point M passeront de $u_2(\pi, \Delta a - x) \Rightarrow 0$, tandis que les forces par unité d'épaisseur vont de $0 \Rightarrow \sigma_{22}(0, x) \cdot dx$, et ce, comme indiqué en Figure 2.35.

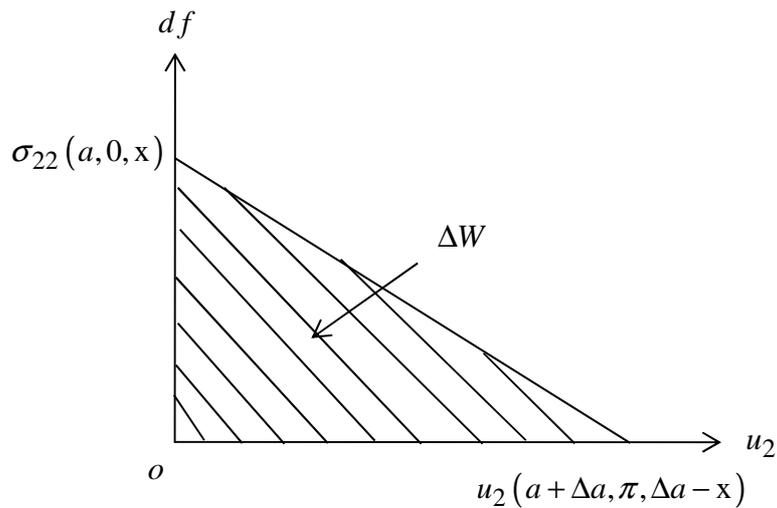


Figure 2.35 : Energie nécessaire pour la fermeture de la fissure

La variation énergétique, engendrée par une fermeture dx de fissure, s'exprime de la façon suivante :

$$dW = u_2(\pi, \Delta a - x) \cdot \sigma_{22}(0, x) \cdot dx \quad (2.47)$$

Par intégration de l'équation (2.47) sur une distance Δa , l'écart énergétique provoqué par la fermeture instantanée de la fissure se traduit par :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \Delta W &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\Delta a} \sigma_{22} \cdot u_2 \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^{a+\Delta a} \left[\frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (x-a)^{-1/2} \cdot \frac{K_I^{(\varepsilon)}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (a+\Delta a-x)^{1/2} \right] \cdot dx \\
 &= \frac{K_I^{(\sigma)} \cdot K_I^{(\varepsilon)}}{4 \cdot \pi} \cdot \int_a^{a+\Delta a} \left[(x-a)^{-1/2} \cdot (a+\Delta a-x)^{1/2} \right] \cdot dx \\
 &= -\frac{K_I^{(\sigma)} \cdot K_I^{(\varepsilon)}}{8} \cdot \Delta a
 \end{aligned} \right. \quad (2.48)$$

Finalement, les équations (2.45) et (2.48) nous permettent d'écrire la relation fondamentale définissant une nouvelle expression du taux de restitution d'énergie en mode I suivante, [DUBOIS 1996a, 1996b] :

$$G = \frac{K_I^{(\sigma)} \cdot K_I^{(\varepsilon)}}{8} \quad (2.49)$$

Le même raisonnement peut être effectué en mode II et étendu au cas du mode mixte. Ainsi, par principe de superposition, l'équation (2.49) se généralise, pour une fissuration en mode mixte, par la relation suivante:

$$G = \frac{K_I^{(\sigma)} \cdot K_I^{(\varepsilon)}}{8} + \frac{K_{II}^{(\sigma)} \cdot K_{II}^{(\varepsilon)}}{8} \quad (2.50)$$

Les équations (2.49) et (2.50) définissent le taux de restitution d'énergie à partir des facteurs d'intensité des contraintes $K_{\alpha}^{(\sigma)}$ et les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure $K_{\alpha}^{(\varepsilon)}$. Il est donc important de noter que les formulations (2.36) et (2.50) ne sont pas tributaires des propriétés d'élasticité du matériau.

2.5 Algorithme de caractérisation

En se basant sur les développements analytiques et numériques présentés dans ce chapitre, la Figure 2.36 résume la démarche scientifique qui va être adoptée pour réaliser notre campagne de mesures présentée dans le troisième chapitre.

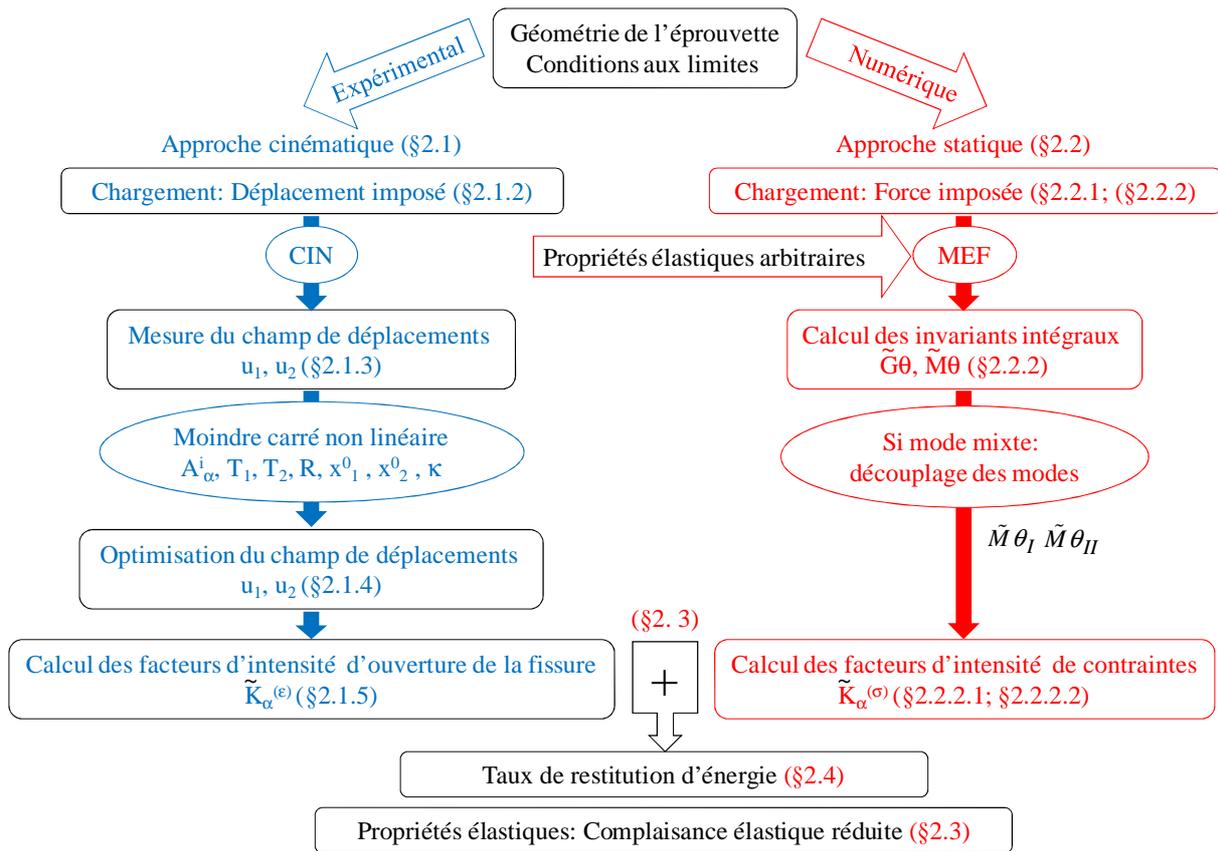


Figure 2.36: Algorithme de caractérisation

Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous proposons une nouvelle approche basée sur le couplage entre la méthode de corrélation d'images numériques et la méthode des éléments finis dans la caractérisation de l'état mécanique et énergétique d'un milieu fissuré isotrope et orthotrope.

Dans une première partie, nous présentons le traitement employé afin de caractériser l'état cinématique en pointe de fissure. Le bruit expérimental ne permettant pas d'exploiter directement les champs de déplacement mesurés, nous proposons une optimisation de ces champs en interpolant une forme analytique asymptotique de Williams. Sous la forme d'une série, cette solution asymptotique nécessite une interpolation de ces termes en employant une technique de minimisation d'erreur non linéaire, au sens des moindres carrés, relayée par un algorithme de Newton-Raphson. L'ensemble de l'approche permet d'en déduire une formulation entre facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les premiers termes de cette série.

Une deuxième partie complète l'approche cinématique par un calcul de l'état de contrainte via une modélisation par éléments finis. Ce travail de modélisation suppose que l'état de contrainte dépend de la géométrie de l'échantillon, de la longueur de la fissure et de l'amplitude de l'effort appliqué. Nous avons supposé que le résultat en contrainte est indépendant des propriétés d'élasticité du milieu. Cette hypothèse, qui peut paraître forte en premier abord, est facilement vérifiée dans le cas des matériaux isotropes et peut être

généralisée pour des matériaux orthotropes. La seule restriction, dans ce dernier cas, étant de fixer les rapports d'orthotropie. Le champ de contrainte singulier étant déterminé via les facteurs d'intensité de contrainte, leur calcul, par éléments finis, a fait appel aux méthodes $G\theta$ et $M\theta$ pour lesquelles les propriétés d'élasticité ont été choisies de façon arbitraire.

Une troisième partie présente le rapprochement entre la caractérisation de l'état cinématique et le calcul de l'état de contrainte en pointe de fissure. Dans un premier temps, il est développé l'expression permettant de calculer le taux de restitution d'énergie en fonction des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les facteurs d'intensité des contraintes, et ce, en faisant abstraction des propriétés d'élasticité du milieu. Finalement, le couplage de la méthode de corrélation d'images avec la modélisation par éléments finis permet de caractériser complètement l'état mécanique et énergétique de la fissure. Enfin, la complémentarité des facteurs d'intensité de contrainte et d'ouverture de fissure permet de définir les propriétés d'élasticité locales à travers les complaisances élastiques réduites.

Afin de mettre en application l'ensemble de l'algorithme, le troisième chapitre regroupe plusieurs exemples d'application sur le PVC (matériau isotrope) et le Douglas (matériau orthotrope). Des configurations de mode d'ouverture et de mode mixte sont expérimentées.

Chapitre 3

Applications du couplage expérimental-numérique aux milieux isotrope et orthotrope fissurés

Le troisième chapitre présente plusieurs applications en vue d'une validation des différents algorithmes développés précédemment. Sont menés des essais de fissuration en mode d'ouverture et en mode mixte sur des éprouvettes de PVC et de Douglas. Durant les essais, les déplacements de la zone d'étude sont calculés par la méthode de corrélation d'images numériques. En raison du bruit expérimental inhérent aux mesures, la procédure itérative de Newton-Raphson permet d'optimiser les champs de déplacement bruts. L'ouverture de la fissure est caractérisée en calculant les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure à partir de ces champs cinématiques. En parallèle, une modélisation par éléments finis étudie l'état mécanique en termes de contraintes en déterminant les facteurs d'intensité des contraintes. L'énergie de fissuration et les propriétés mécaniques des matériaux sont enfin caractérisées par l'association des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les facteurs d'intensité de contrainte. Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés et discutés.

Sommaire

Introduction	109
3.1 Configuration mode I isotrope.....	109
3.1.1 Paramètres d'essai	109
3.1.2 Résultats d'essais.....	110
3.1.3 Facteur d'intensité d'ouverture de fissure	111
3.1.4 Facteur d'intensité des contraintes	116
3.1.5 Couplage CIN/MEF	116
3.2 Configuration mode mixte isotrope.....	119
3.2.1 Paramètres d'essai	119
3.2.2 Analyse d'images.....	120
3.2.3 Couplage MEF/CIN	130
3.3 Configuration mode I orthotrope	132
3.3.1 Paramètre d'essai.....	132
3.3.2 Analyse d'images.....	132
3.3.3 Couplage MEF/CIN	136
3.4 Configuration mode mixte orthotrope	138
3.4.1 Paramètres d'essai	139
3.4.2 Analyse d'images.....	139
3.4.3 Couplage MEF/CIN	147
3.5 Conclusions	150

Introduction

Ce troisième chapitre propose plusieurs applications du protocole expérimental et numérique développé dans le chapitre 2. La définition de l'état cinématique repose sur la méthode de corrélation d'images, et ce, via le logiciel Corrèla et complétée par une optimisation des champs de déplacement. L'état de contrainte est, quant à lui, défini à travers une approche par éléments finis ; calculs réalisés par le code Castem. Le couplage entre les deux approches permet d'en déduire le taux de restitution d'énergie, la définition précise de l'état cinématique et de contrainte tout en déduisant les propriétés élastiques des matériaux testés. Dans ce contexte, le PVC représentera les matériaux isotropes tandis que le Douglas aura pour but d'intégrer l'orthotropie matérielle. Les applications seront basées sur des configurations de mode d'ouverture et de mode mixte (hypothèse des contraintes planes). Une première partie est donc consacrée aux expériences en mode d'ouverture, une seconde traitant du mode mixte.

3.1 Configuration mode I isotrope

3.1.1 Paramètres d'essai

Le protocole expérimental, décrit dans le deuxième chapitre, est employé dans le cadre d'essais de fissuration en mode d'ouverture sur une éprouvette en PVC. La forme et les dimensions géométriques de cette éprouvette sont précisées en Figure 3.1.

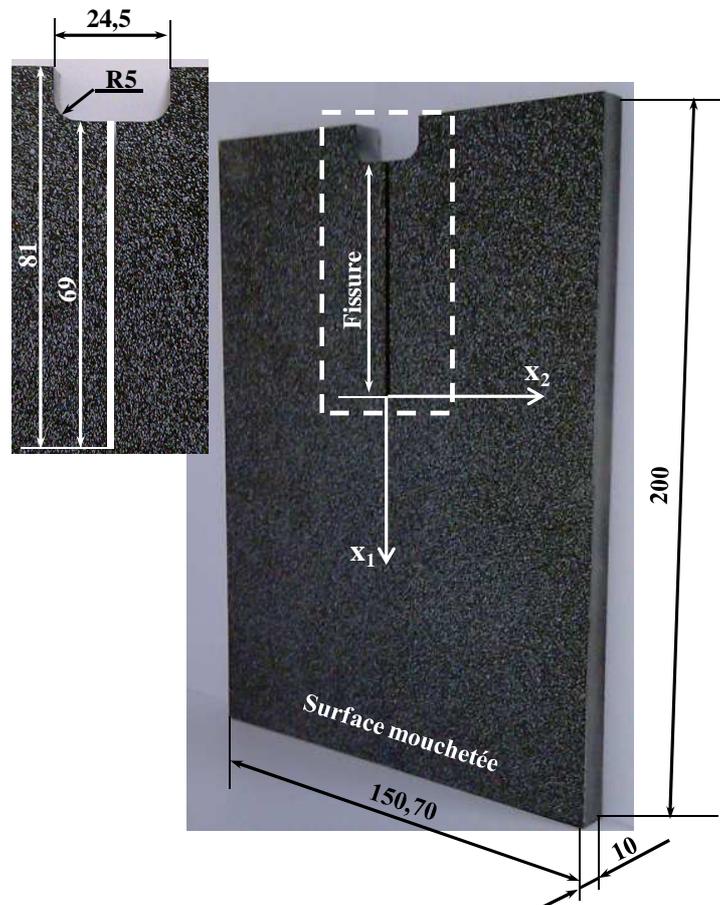


Figure 3.1 : Géométrie de l'éprouvette (dimensions en mm)

L'ensemble (éprouvette + système de chargement) est placé dans une presse électromécanique Zwick imposant une vitesse de déplacement constante à la traverse supérieure de 0,01 mm/s permettant une ouverture contrôlée de la fissure en mode I.

3.1.2 Résultats d'essais

La courbe caractéristique force-déplacement, représentée en Figure 3.2, met en évidence un comportement élastique linéaire du PVC. Elle a été enregistrée, à la fois, par le capteur LVDT de la presse électromécanique ZWICK et par la technique de suivi des marqueurs donnant une parfaite synchronisation entre les données de la machine et les images enregistrées. Cette synchronisation permet d'associer la force mesurée, correspondant au déplacement imposé, au champ de déplacements mesuré par CIN. L'analyse cinématique traite des déplacements mesurés correspondant à une force de 390N, Figure 3.2.

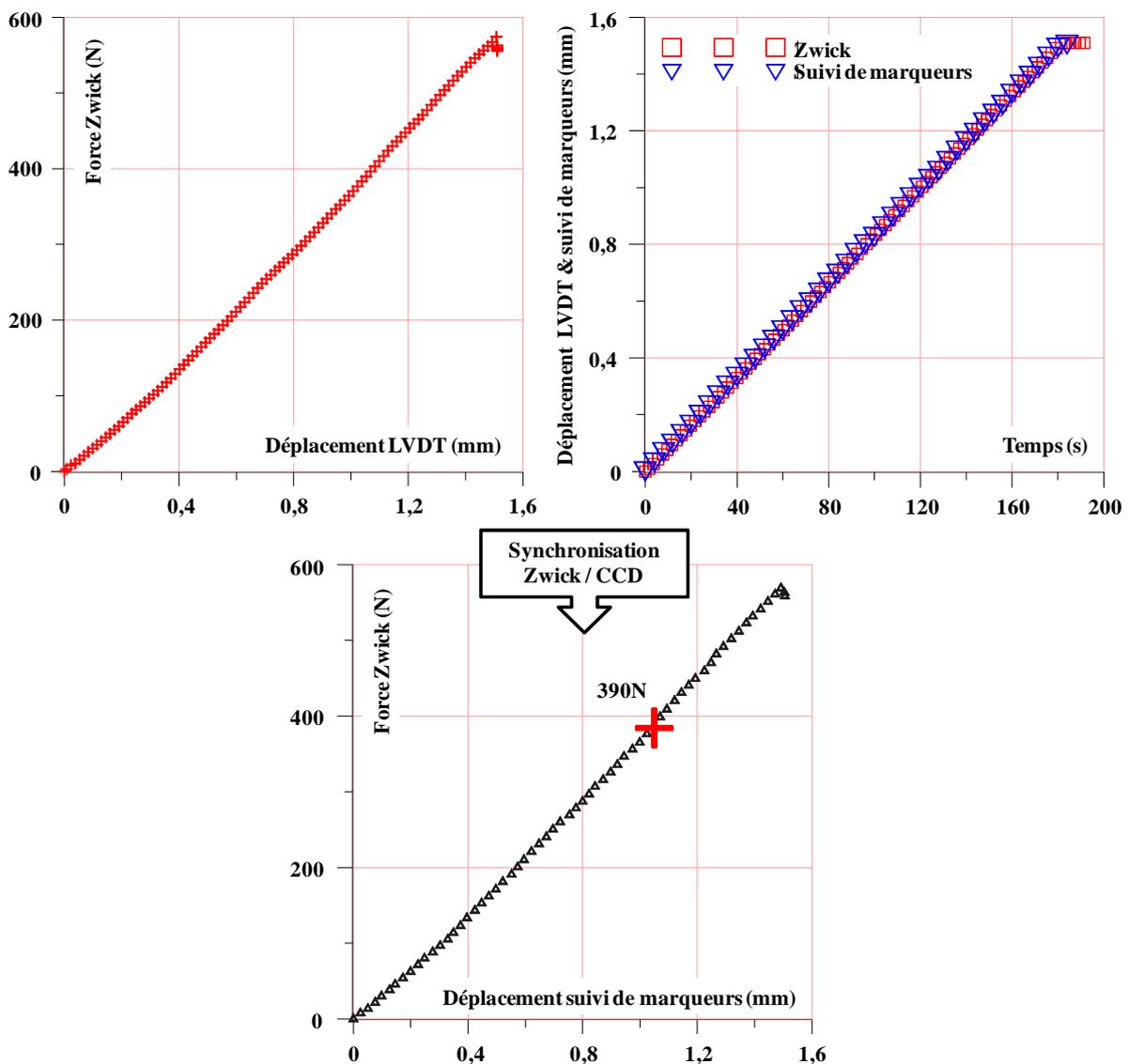


Figure 3.2 : Synchronisation capteurs de force et LVDT avec caméra CCD

3.1.3 Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

3.1.3.1 Zone d'étude : calcul du champ de déplacements

L'évaluation du facteur d'intensité d'ouverture de fissure est effectuée par une approche cinématique à partir des champs de déplacements mesurés par CIN. Le calcul des déplacements est réalisé sur une zone d'étude définie au voisinage de la pointe de fissure, Figure 3.3. Pour cette première application, la zone d'intérêt a été subdivisée en 418 fenêtres de corrélation. Après calcul, le champ de déplacements est formé des déplacements du centre géométrique des fenêtres de corrélation dont les coordonnées sont notées (x_1, x_2) . Les cartographies, relatives aux composantes du champ de déplacement, sont illustrées en Figure 3.4. Cette représentation permet de mettre en évidence le bruit expérimental.

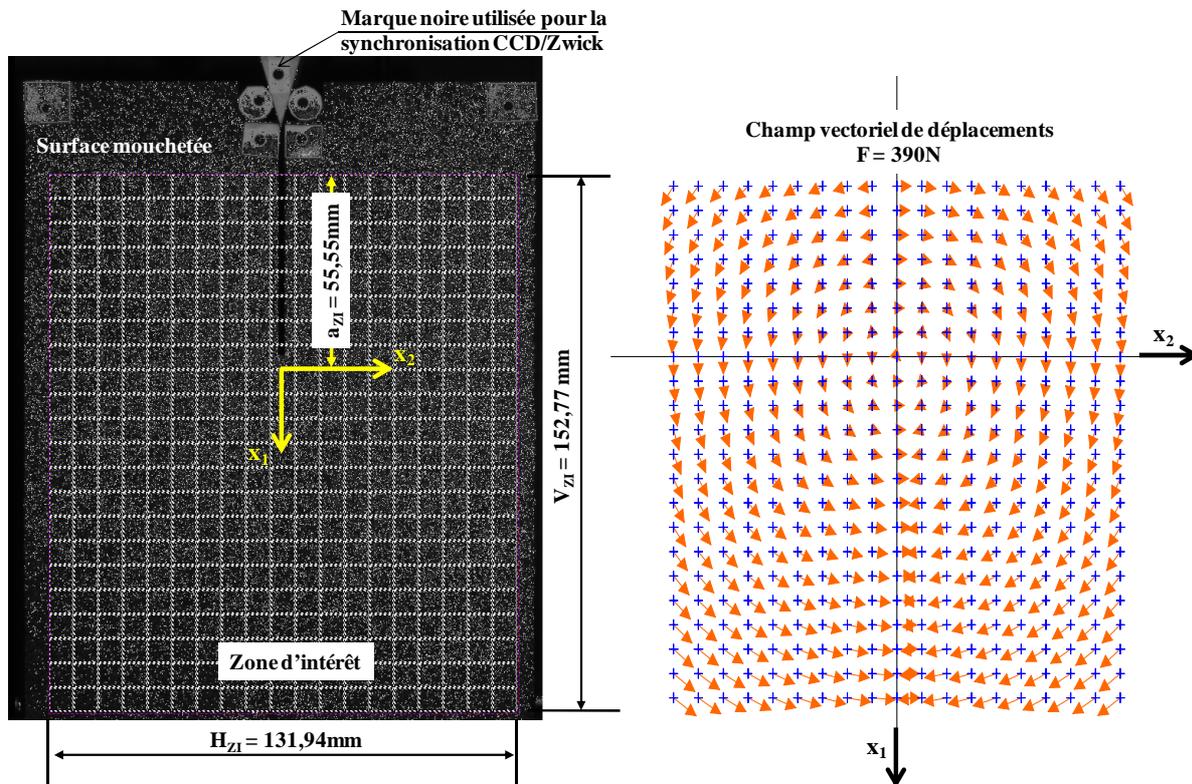


Figure 3.3 : Sélection de la zone d'étude en corrélation d'images numériques

L'ensemble des données sont ensuite exportées dans le code aux éléments finis Castem. Ainsi, un maillage support est généré (à partir de la position géographique des fenêtres de corrélation) sur lequel est projeté le champ des déplacements. Les opérateurs usuels de Castem peuvent alors être employés afin de calculer d'autres champs mécaniques. En particulier, la Figure 3.5 illustre la déformée (visualisation amplifiée des déplacements) de la zone d'étude.

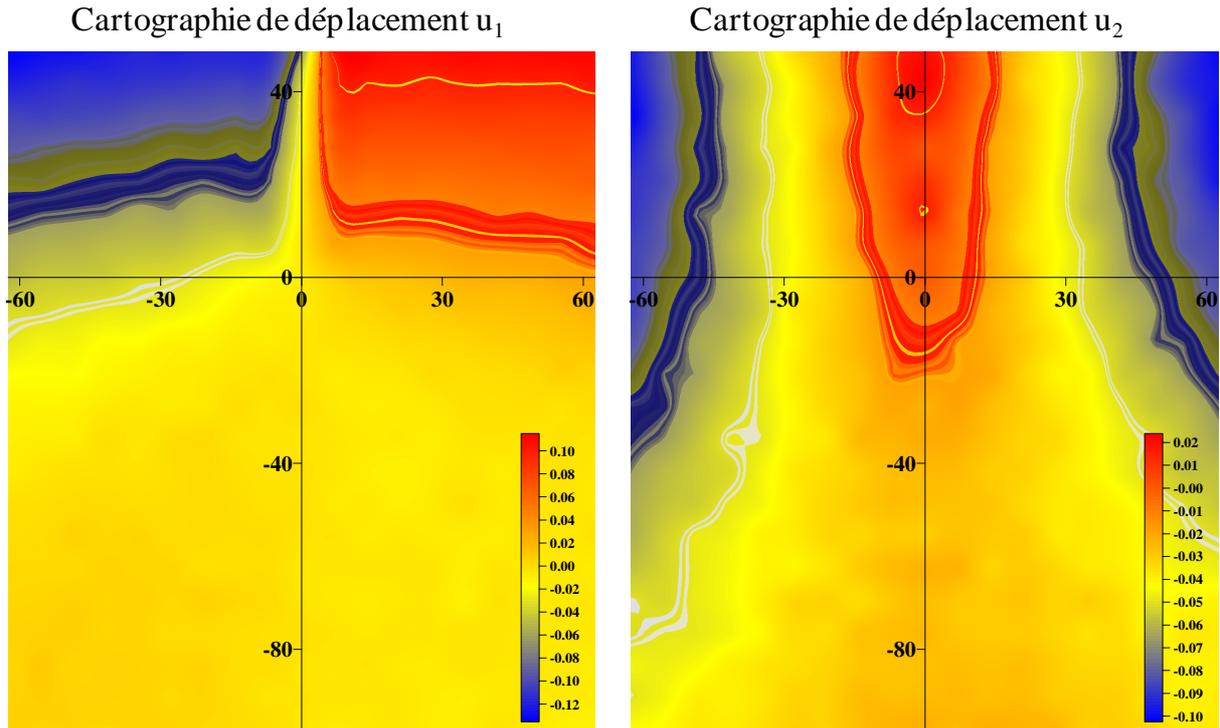


Figure 3.4 : Cartographies de déplacements (en mm)

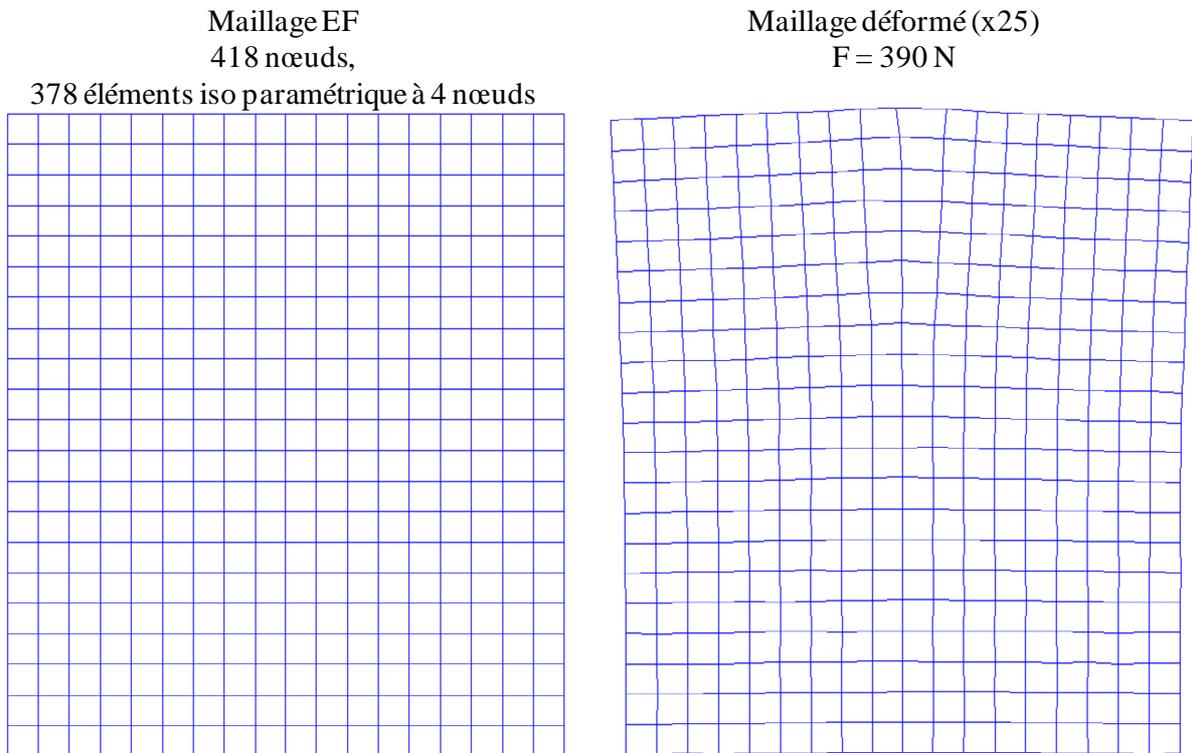


Figure 3.5 : Maillage EF et sa déformé à $F = 390$ N

En analysant les cartographies de déplacements et la déformée du maillage EF, nous pouvons faire les mêmes observations que celles détaillées dans le deuxième chapitre :

- la présence d'un bruit généralisé au niveau du champ de déplacement,
- une imprécision de positionnement de la pointe de fissure,
- des mouvements du corps rigide générés par les « imperfections » du montage.

Afin d'optimiser les champs mesurés par CIN, nous proposons, comme il a été décrit dans le deuxième chapitre, une procédure d'ajustement d'un champ analytique sur la base des mesures expérimentales.

3.1.3.2 Optimisation des champs

L'optimisation des champs expérimentaux est réalisée par une méthode itérative de Newton-Raphson. Pour cet essai en mode I, les inconnues intégrées dans la procédure d'optimisation sont la position et l'orientation de la pointe de fissure et les mouvements du corps rigide. A ces inconnues s'ajoutent les coefficients de pondération de la série de William, équation (2.1). Cette série étant composée des termes en modes I et II, la procédure d'optimisation permet de quantifier la part 'parasite' du mode II.

L'opération d'optimisation nécessite, dans un premier temps, de fixer une valeur initiale au vecteur d'inconnues. Nous optons pour définir, de façon visuelle, la position de la pointe de fissure et l'orientation de la fissure dans le plan de la caméra. Après avoir choisi le nombre N de termes de la série de Williams, l'ensemble des inconnues restantes est calculé en employant la méthode de minimisation, au sens des moindres carrés, pour un problème linéaire, équation 2.9. Ces valeurs sont ensuite implémentées dans une procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires. L'algorithme est alors répété tant que l'écart entre la solution analytique et la mesure expérimentale reste supérieur à une valeur choisie; le critère de convergence faisant appel à l'écart ξ défini par l'équation (2.35).

Reste, à présent, à fixer le nombre optimum de termes N de la série de Williams. Pour $N=1$, la série asymptotique décrit la cinétique d'ouverture de la fissure en zone singulière où le champ de contraintes présente une singularité en $1/\sqrt{r}$. Pour des valeurs supérieures, la série asymptotique permet de reconstituer des champs lointains et d'avoir une approche plus globale du champ des déplacements. Les évolutions de la moyenne de l'écart et des champs optimisés, en fonction de N , sont représentées en Figure 3.6.

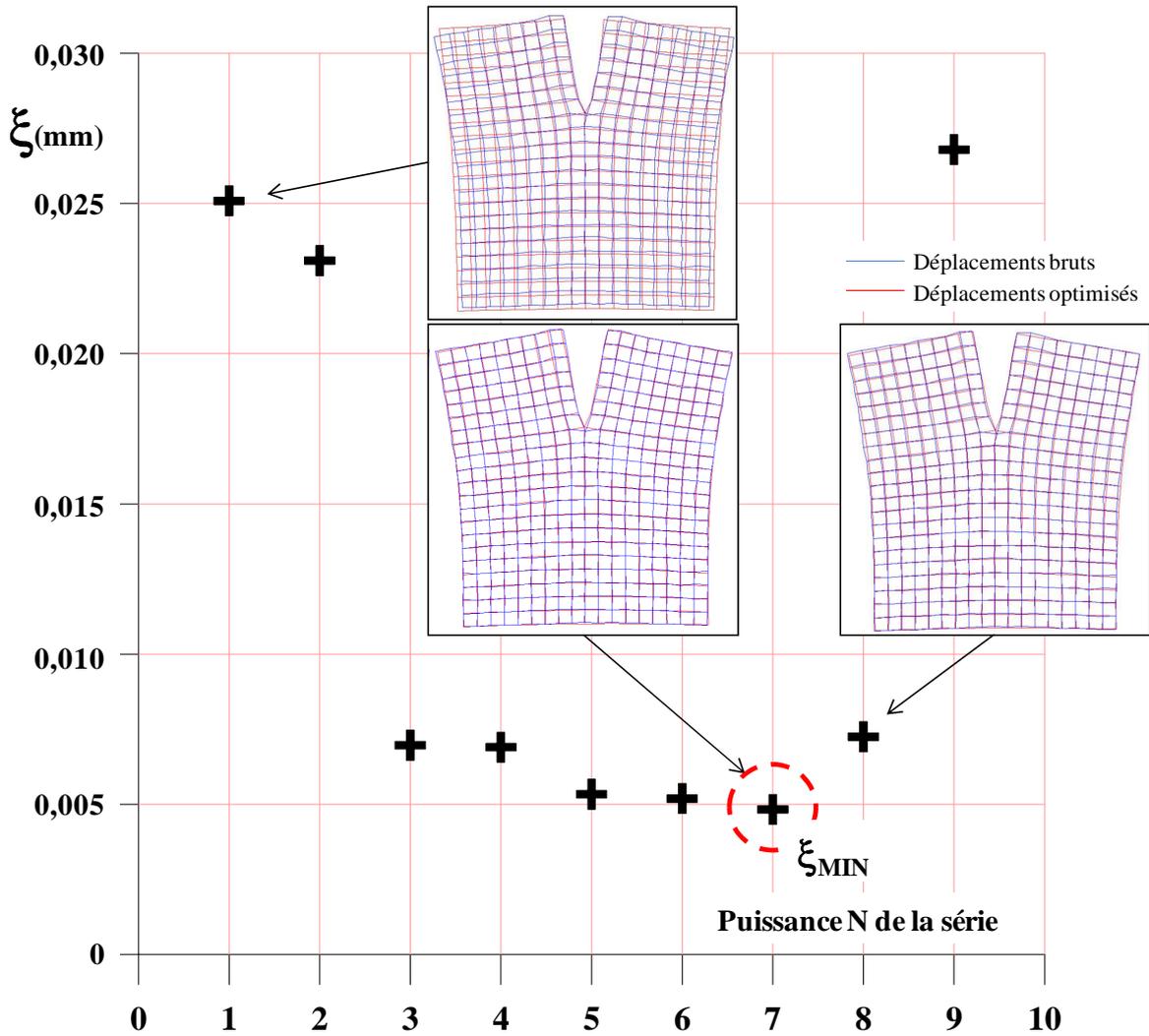


Figure 3.6 : Evolution de ξ en fonction de N

En analysant l'évolution de ξ et les déformées correspondantes, nous constatons que le maximum de ressemblance, entre les mesures expérimentales et le champ analytique ajusté, est atteint pour N=7. La divergence, observée pour des valeurs supérieures, peut se justifier par un mauvais conditionnement possible du système d'équations surdéterminé. Les valeurs finales des inconnues, intégrées dans le processus d'optimisation pour N=7, sont données dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(\frac{1-i}{2}\right)}$

Mode I

A_I^1	A_I^2	A_I^3	A_I^4	A_I^5	A_I^6	A_I^7
$3,9 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$-4,0 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$-2,5 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^{-10}$

Mode II

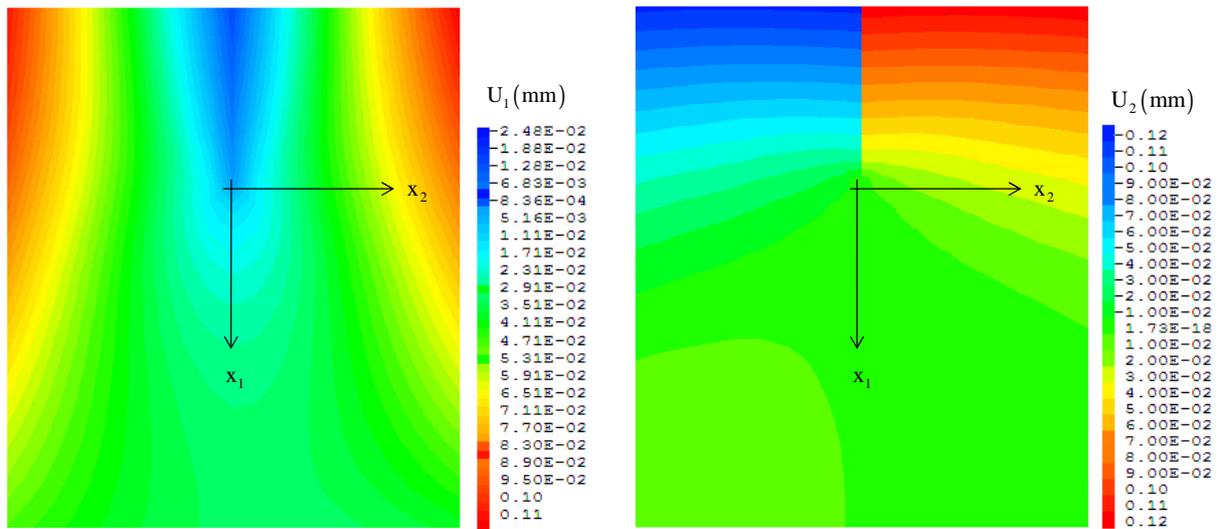
A_{II}^1	A_{II}^2	A_{II}^3	A_{II}^4	A_{II}^5	A_{II}^6	A_{II}^7
$-7,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,0 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$	$-3,0 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-10}$

Tableau 3.1b : Termes de mouvements de corps rigide

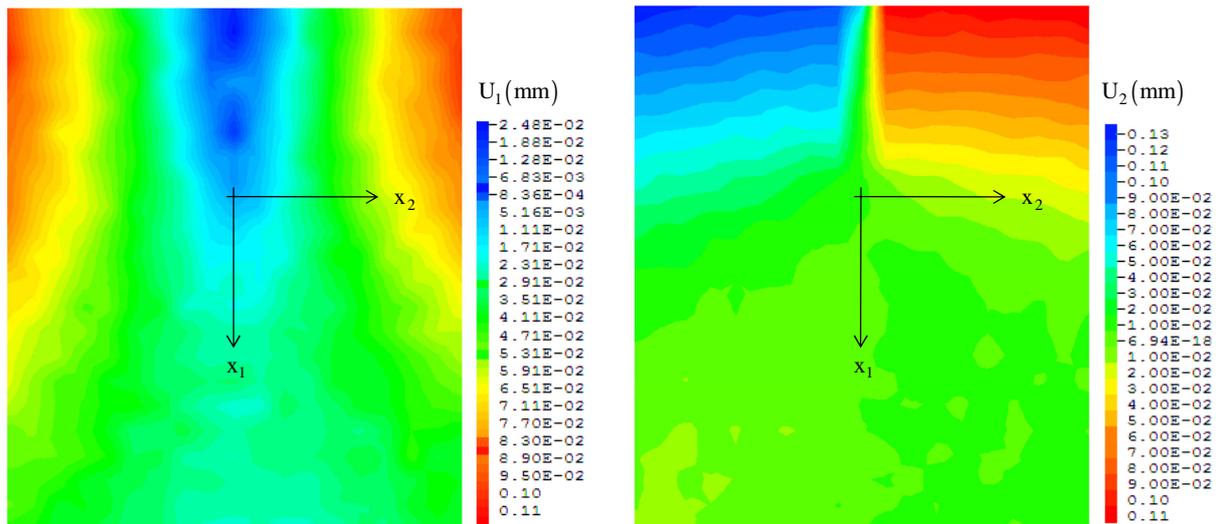
T_1 (mm)	T_2 (mm)	R (rad)
$-3,4 \cdot 10^{-3}$	$-6,8 \cdot 10^{-3}$	$44,0 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.1c : Position et orientation de la pointe de fissure

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$-3,3 \cdot 10^{-10}$	$-0,4 \cdot 10^{-10}$	$-96,0 \cdot 10^{-10}$	1,90



a. Déplacements optimisés



b. Déplacements bruts

Figure 3.7 : Cartographies des champs de déplacement : (a) optimisés et (b) bruts

Notons que les coefficients de pondération de la série de Williams, relatifs au mode II (coefficients A_{II}^i), ont des valeurs nettement plus faibles comparées à celles des coefficients A_I^i relatifs au mode I. Cette observation est cohérente vis-à-vis de la configuration de mode d'ouverture adoptée. Par conséquent, en intégrant les paramètres d'optimisation du Tableau 3.1 dans la série de Williams (relation 2.1), nous obtenons la solution asymptotique recherchée analogue aux champs de déplacements calculés par la corrélation d'images numériques. Ainsi, les cartographies des champs de déplacements, correspondant à la solution analytique, sont représentées en Figure 3.7a. Comparativement au champ expérimental, Figure 3.7b, le champ optimisé présente une parfaite symétrie d'ouverture de la fissure avec un filtrage du bruit expérimental. D'après l'équation (2.36), les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure sont déterminés à partir du premier coefficient de pondération de la série de Williams :

$$K_I^{(\varepsilon)} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{1/2} \quad \text{et} \quad K_{II}^{(\varepsilon)} = 3,36 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{1/2} \quad (3.1)$$

3.1.4 Facteurs d'intensité des contraintes

Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes emploie la méthode $G\theta$. Le calcul est effectué à partir d'un calcul par éléments finis. Comme présenté dans le chapitre 2, le modèle reproduit les conditions expérimentales en termes de géométrie d'éprouvette, conditions aux limites et chargement. En accord avec l'approche présentée, la résolution numérique s'effectue en imposant une force de 390N; force correspondant à l'image étudiée auparavant. Dans ces conditions, les propriétés d'élasticité sont donc choisies de façon arbitraire. Le résultat du calcul donne le facteur d'intensité de contrainte en mode I suivant :

$$K_I^{(\sigma)} = 0,58 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad (3.2)$$

Notons, cependant, que le calcul, via $G\theta$, suppose un mode d'ouverture pure induit par une symétrie de chargement et de géométrie. Nous imposons, de ce fait, $K_{II}^{(\sigma)}$ nul.

3.1.5 Couplage CIN/MEF

En mode d'ouverture, le regroupement du facteur d'intensité d'ouverture de fissure $K_I^{(\varepsilon)}$ (issu de la corrélation d'images) et du facteur d'intensité de contrainte $K_I^{(\sigma)}$ permet, via l'expression (2.50), de calculer le taux de restitution d'énergie; à savoir :

$$G = \frac{K_I^{\varepsilon} \cdot K_I^{\sigma}}{8} = \frac{1,79 \cdot 10^{-3} \cdot 0,58 \cdot 10^{-3}}{8} \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow G = 130 \text{ J} / \text{m}^2$$

Les expressions (2.43) permettent également de déduire la complaisance élastique réduite C_I telle que :

$$C_I = \frac{K_I^\varepsilon}{K_I^\sigma} = \frac{1,79 \cdot 10^{-3}}{0,58 \cdot 10^6} \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow C_I = 3,09 \cdot 10^{-9} Pa^{-1}$$

En considérant un état de contrainte plane, C_I permet de calculer le module d'Young correspondant :

$$E = \frac{8}{C_I} = \frac{8}{3,09 \cdot 10^{-9}} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow E = 2590MPa$$

Enfin, l'isotropie du matériau permet une évaluation du coefficient de Poisson via la constante de Kolosov κ , relation (1.4) :

$$\nu = \frac{3 - \kappa}{1 + \kappa} = \frac{3 - 1,901}{1 + 1,901} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \nu = 0,38$$

Le tableau 3.2 regroupe l'ensemble des données accessibles par notre protocole expérimental et numérique. Ainsi, pour une force de 390N, nous avons accès à l'état mécanique complet, que ce soit en terme de propriétés locales (déplacements et contraintes) que globales (taux de restitution d'énergie).

Tableau 3.2 : Etat mécanique et propriétés d'élasticité du PVC pour une force de 390N

$K_I^{(\sigma)}$	$K_I^{(\varepsilon)}$	G	E	ν
$0,58MPa \cdot m^{1/2}$	$1,79 \cdot 10^{-3} m^{1/2}$	$130J / m^2$	$2590MPa$	$0,38$

Afin de consolider les résultats de notre analyse, la Figure 3.8 présente la déformée obtenue par éléments finis lorsque nous injectons les propriétés d'élasticité déduite de notre étude ($E = 2590MPa$ et $\nu = 0,38$); la déformée, correspondant aux champs expérimentaux optimisés, y étant superposée. Notons une excellente similitude entre les données calculées par éléments finis et les mesures expérimentales.

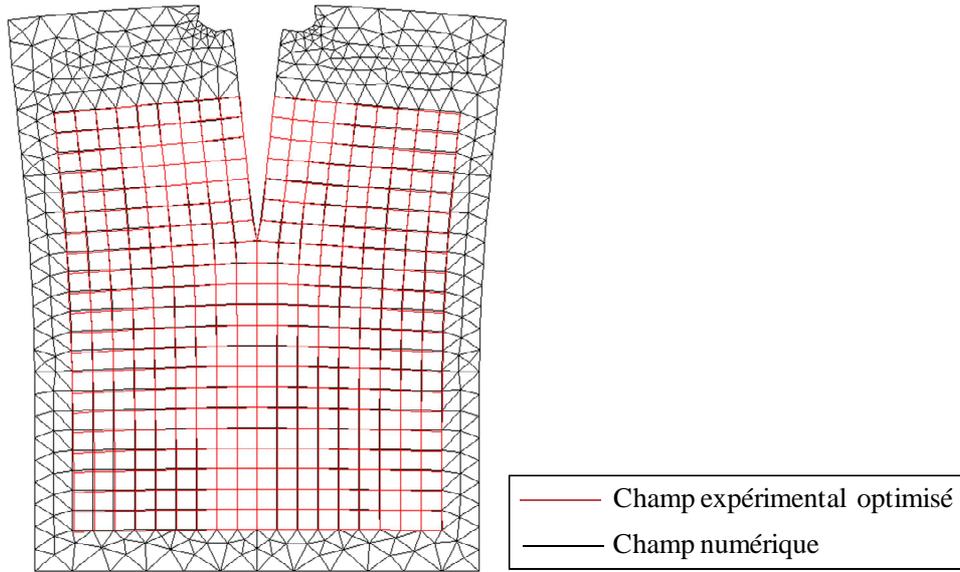


Figure 3.8 : Déformée expérimentale et par éléments finis

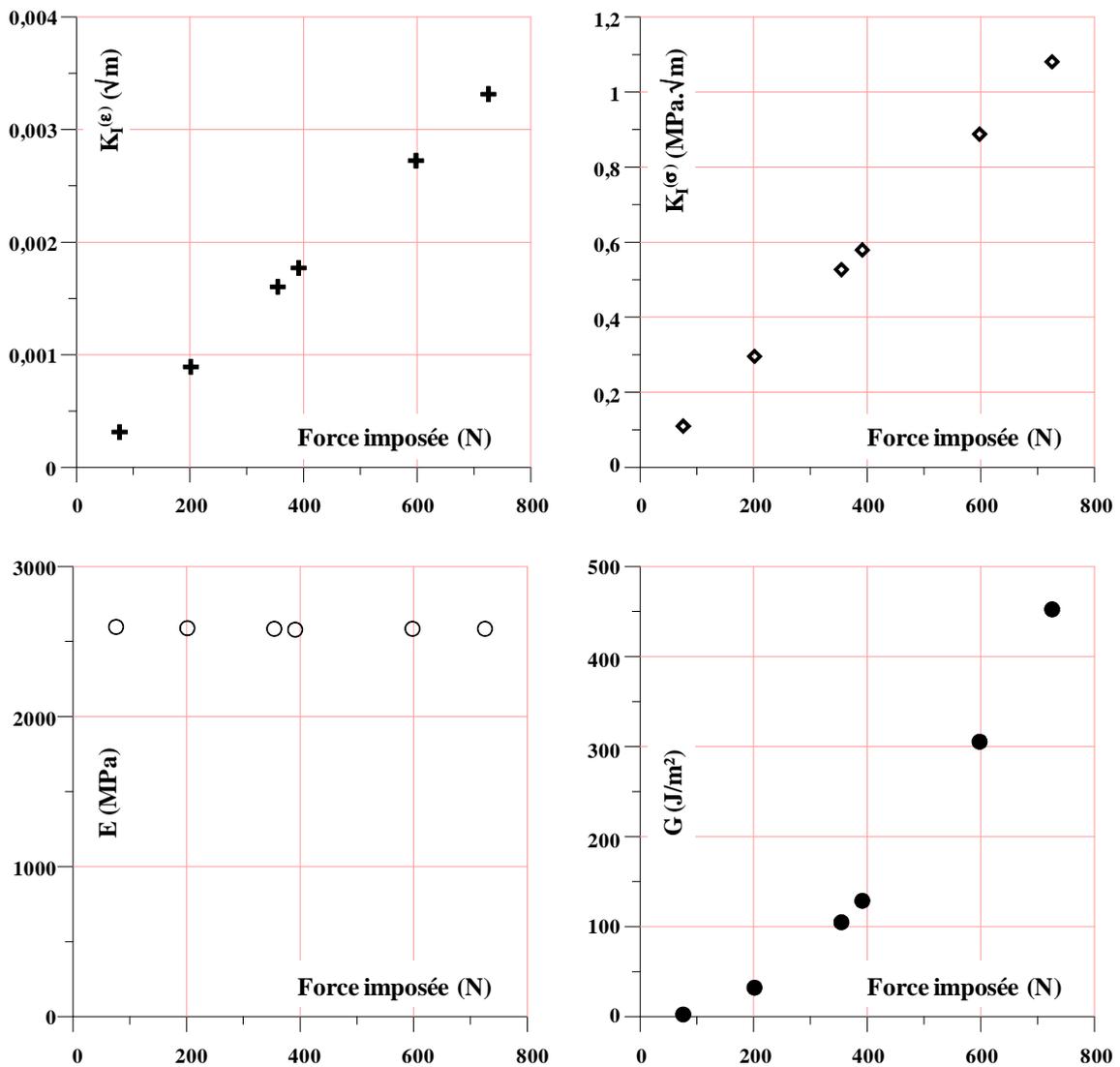


Figure 3.9 : Evolution des propriétés d'élasticités et de rupture en fonction du chargement

Si nous avons détaillé l'algorithme sur une image correspondant à un effort de 390N, la Figure 3.9 présente les résultats en termes de facteurs d'intensité d'ouverture de fissure, de facteur d'intensité de contrainte et de taux de restitution d'énergie. En fonction de l'effort, nous observons des évolutions linéaires du facteur d'intensité d'ouverture de fissure (proportionnalité force-déplacement relative à un comportement élastique linéaire) et du facteur d'intensité de contrainte (proportionnalité entre force et contrainte). Enfin, l'évolution parabolique du taux de restitution d'énergie est totalement cohérente, et ce, avec une totale indépendance du module d'élasticité.

3.2 Configuration mode mixte isotrope

3.2.1 Paramètres d'essai

Le dispositif expérimental, décrit dans la section 2.1.2.3, a été utilisé pour réaliser les essais de fissuration en mode mixte sur l'éprouvette PVC. Les dimensions géométriques de l'éprouvette sont données en Figure 3.10.

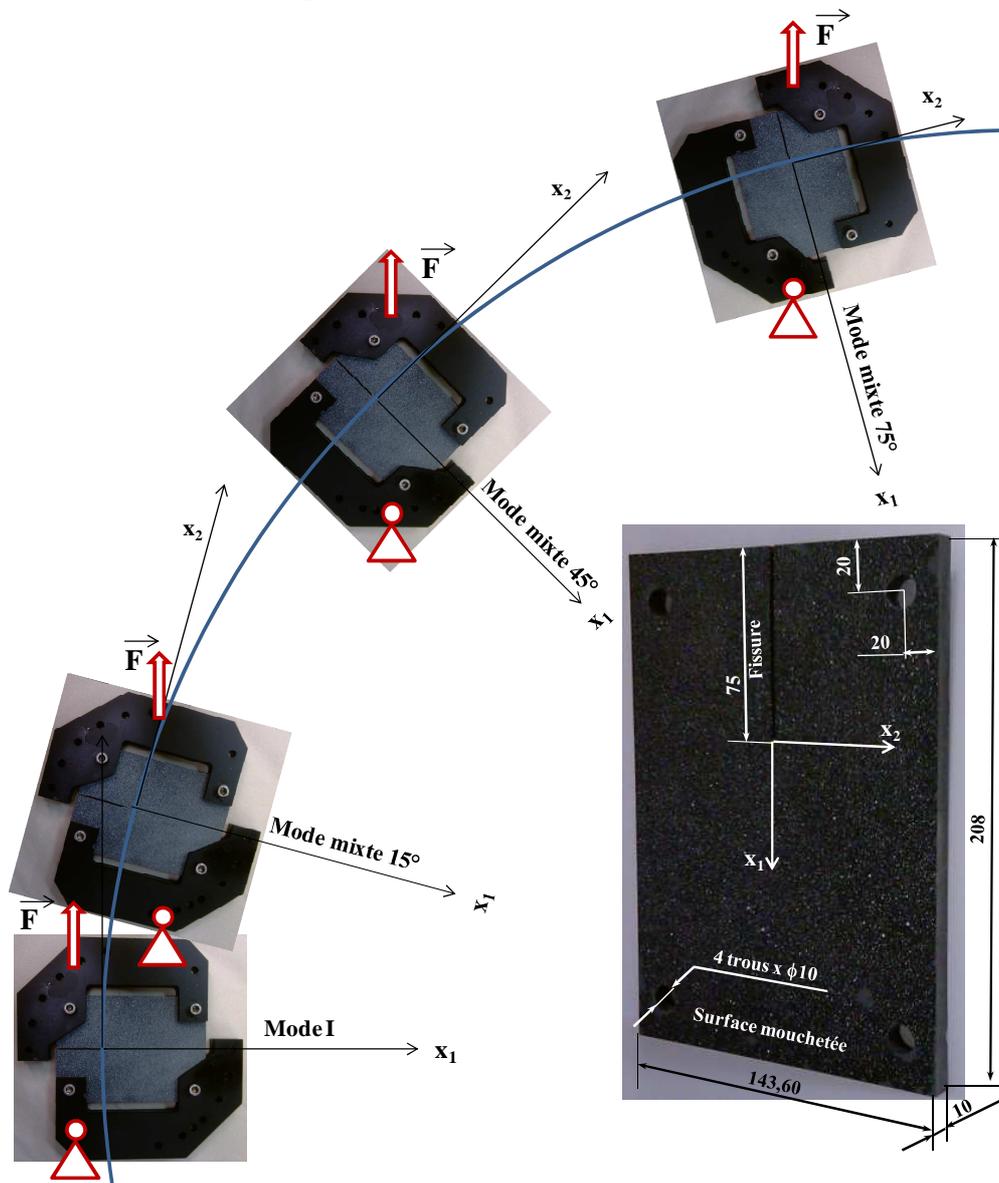


Figure 3.10 : Dimensions géométriques de l'éprouvette et configurations de chargement

L'essai est toujours piloté par une vitesse de déplacement de la traverse machine imposée à 0,1mm/min. Afin d'étudier la capacité de l'algorithme à découpler les modes de rupture, plusieurs taux de mixité sont proposés, et ce, en employant la même éprouvette (non propagation de la fissure durant l'essai et non endommagement supposé du front de fissure). Comme indiqué en Figure 3.10, ces taux de mixité sont imposés en 'jouant' sur l'orientation de la sollicitation (0° ; 15° ; 45° et 75°) par rapport à la fissure. La caméra CCD est cependant inclinée de telle sorte que ses axes de coordonnées coïncident avec ceux de la fissure afin de mesurer convenablement les champs de déplacement en modes d'ouverture et de cisaillement.

3.2.2 Analyse d'images

Les courbes caractéristiques force-déplacement (enregistrées par le capteur LVDT et la cellule de charge) sont représentées en Figure 3.11. Les efforts, correspondant aux images traitées y sont indiquées).

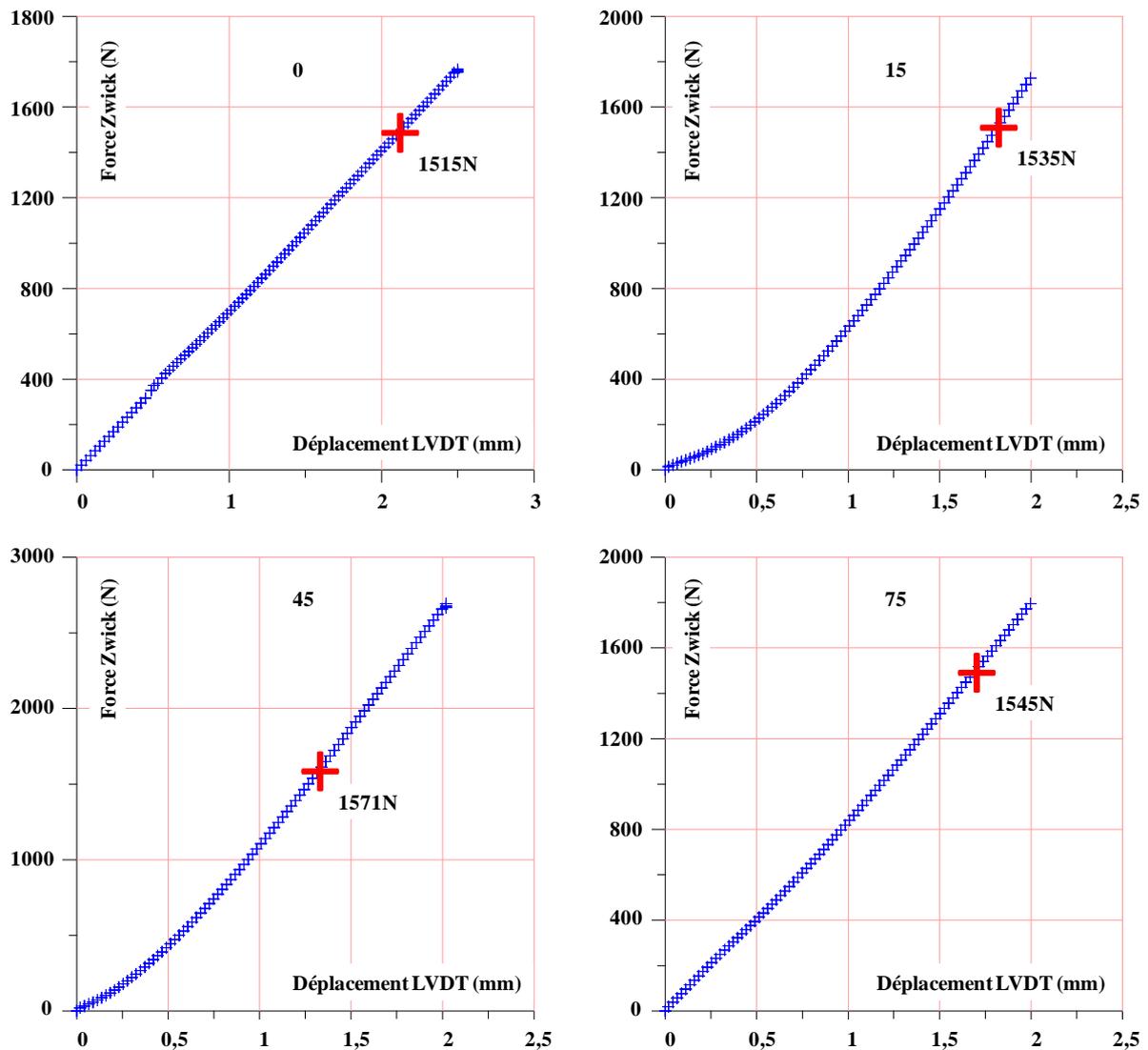


Figure 3.11 : Courbes caractéristiques force-déplacement

Le calcul des facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure s'effectue dans une zone d'étude sélectionnée au voisinage du front de fissure. Cette zone d'étude, représentée en Figure 3.12, a des dimensions ainsi qu'un grandissement propres à chaque essai, Tableau 3.3.

Tableau 3.3 : Dimensions de la zone d'intérêt vs taux de mixité

Taux de mixité	Grandissement (mm/pixel)	a_{ZI} (mm)	V_{ZI} (mm)	H_{ZI} (mm)
0°	0,10	26,0	65,3	62,0
15°	0,01	25,3	63,4	66,5
45°	0,15	24,0	86,4	91,2
75°	0,09	24,3	60,1	63,8

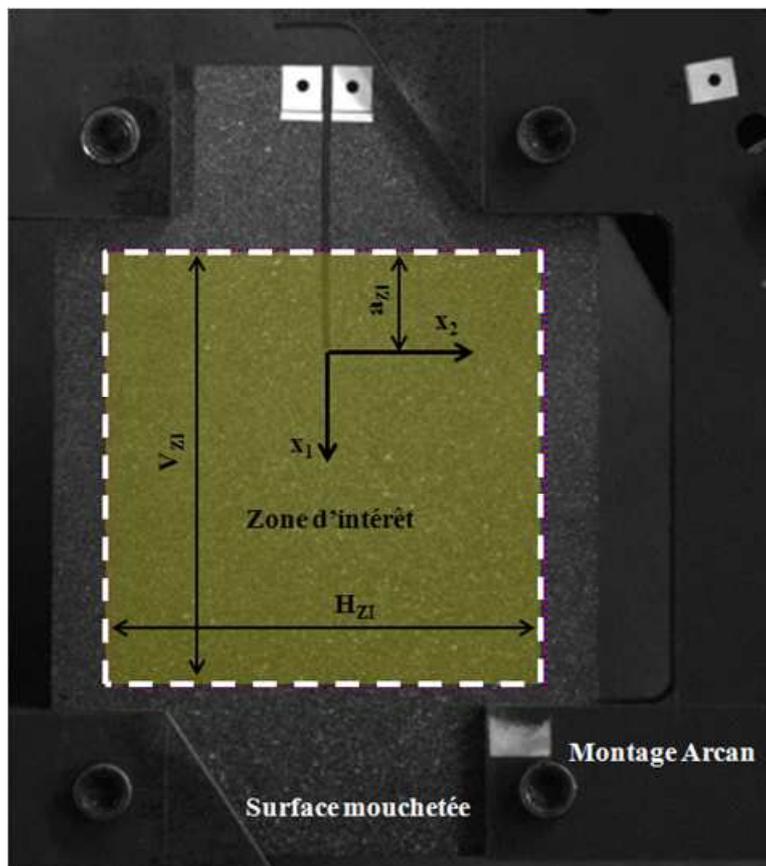


Figure 3.12 : Dimensions de la zone d'intérêt

3.2.2.1 Optimisation du champ des déplacements

De la même façon que pour le mode d'ouverture, l'optimisation par une série de Williams est proposée. Pour chaque taux de mixité, le nombre N de termes de la série est fixé par minimisation de l'écart entre champs expérimental et analytique, Figure 3.13. Les Tableaux 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 résument l'ensemble des paramètres d'optimisation ayant permis la construction de la solution analytique.

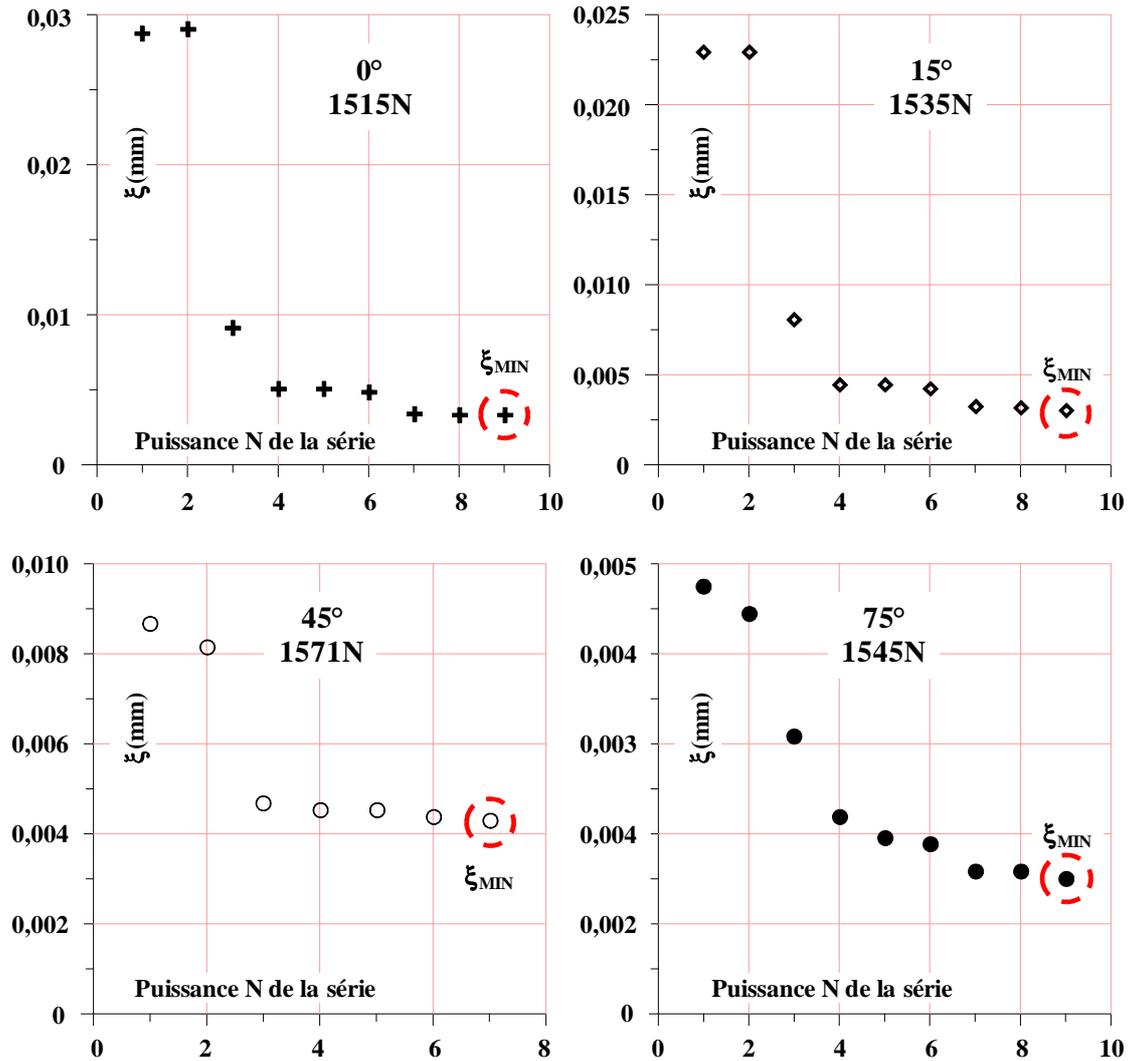


Figure 3.13 : Evolution de la moyenne des écarts en fonction de N

Tableau 3.4a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 0^\circ$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$1,09 \cdot 10^{-2}$	A_{II}^1	$-2,51 \cdot 10^{-5}$
A_I^2	$3,50 \cdot 10^{-4}$	A_{II}^2	$-7,25 \cdot 10^{-4}$
A_I^3	$-1,70 \cdot 10^{-4}$	A_{II}^3	$-1,82 \cdot 10^{-6}$
A_I^4	$6,14 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^4	$4,42 \cdot 10^{-7}$
A_I^5	$-1,76 \cdot 10^{-7}$	A_{II}^5	$-4,16 \cdot 10^{-8}$
A_I^6	$-7,72 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^6	$-8,24 \cdot 10^{-9}$
A_I^7	$1,53 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^7	$1,39 \cdot 10^{-9}$
A_I^8	$1,46 \cdot 10^{-11}$	A_{II}^8	$-2,09 \cdot 10^{-10}$
A_I^9	$-5,25 \cdot 10^{-11}$	A_{II}^9	$1,39 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.4b : Mouvements de corps solide, ($\beta = 0^\circ$)

T ₁ (mm)	T ₂ (mm)	R (rad)
-0,577	0,759	$-2,50 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.4c : Position et orientation de la pointe de fissure, ($\beta = 0^\circ$)

x ₁ ⁰ (mm)	x ₂ ⁰ (mm)	ω_0 (rad)	κ
$1,01 \cdot 10^{-10}$	$-2,00 \cdot 10^{-13}$	$-2,34 \cdot 10^{-11}$	1,90

Tableau 3.5a : Coefficients A_α^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 15^\circ$)

Mode I		Mode II	
A _I ¹	$4,45 \cdot 10^{-3}$	A _{II} ¹	$7,49 \cdot 10^{-4}$
A _I ²	$2,02 \cdot 10^{-4}$	A _{II} ²	$-7,22 \cdot 10^{-4}$
A _I ³	$-1,26 \cdot 10^{-4}$	A _{II} ³	$3,46 \cdot 10^{-6}$
A _I ⁴	$4,09 \cdot 10^{-6}$	A _{II} ⁴	$-3,18 \cdot 10^{-7}$
A _I ⁵	$9,56 \cdot 10^{-8}$	A _{II} ⁵	$3,61 \cdot 10^{-9}$
A _I ⁶	$-6,50 \cdot 10^{-8}$	A _{II} ⁶	$-3,84 \cdot 10^{-9}$
A _I ⁷	$7,60 \cdot 10^{-9}$	A _{II} ⁷	$1,41 \cdot 10^{-9}$
A _I ⁸	$5,04 \cdot 10^{-10}$	A _{II} ⁸	$-3,34 \cdot 10^{-10}$
A _I ⁹	$-7,82 \cdot 10^{-11}$	A _{II} ⁹	$3,27 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.5b : Termes de mouvements de corps solide, ($\beta = 15^\circ$)

T ₁ (mm)	T ₂ (mm)	R (rad)
$-9,72 \cdot 10^{-2}$	1,05	$-2,49 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.5c : Localisation exacte de la pointe de fissure, ($\beta = 15^\circ$)

x ₁ ⁰ (mm)	x ₂ ⁰ (mm)	ω_0 (rad)	κ
$1,00 \cdot 10^{-10}$	$1,70 \cdot 10^{-12}$	$-9,00 \cdot 10^{-12}$	1,90

Tableau 3.6a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 45^{\circ}$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$5,10 \cdot 10^{-3}$	A_{II}^1	$2,13 \cdot 10^{-3}$
A_I^2	$1,24 \cdot 10^{-4}$	A_{II}^2	$-4,72 \cdot 10^{-4}$
A_I^3	$-3,29 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^3	$8,79 \cdot 10^{-6}$
A_I^4	$1,15 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^4	$1,49 \cdot 10^{-6}$
A_I^5	$5,34 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^5	$-1,29 \cdot 10^{-7}$
A_I^6	$-1,24 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^6	$4,98 \cdot 10^{-9}$
A_I^7	$1,27 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^7	$4,84 \cdot 10^{-10}$

Tableau 3.6b : Termes de mouvements de corps solide, ($\beta = 45^{\circ}$)

T_1 (mm)	T_2 (mm)	R (rad)
$-2,83 \cdot 10^{-1}$	$4,07 \cdot 10^{-1}$	$-1,63 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.6c : Position et orientation de la pointe de fissure, ($\beta = 45^{\circ}$)

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$9,99 \cdot 10^{-11}$	$3,00 \cdot 10^{-13}$	$8,00 \cdot 10^{-13}$	1,90

Tableau 3.7a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..9$; $\alpha=I, II$) donnés en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, ($\beta = 75^{\circ}$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$-3,51 \cdot 10^{-4}$	A_{II}^1	$2,07 \cdot 10^{-3}$
A_I^2	$3,81 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^2	$5,98 \cdot 10^{-5}$
A_I^3	$-4,07 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^3	$3,15 \cdot 10^{-7}$
A_I^4	$2,42 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^4	$9,81 \cdot 10^{-7}$
A_I^5	$5,43 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^5	$6,93 \cdot 10^{-8}$
A_I^6	$-5,53 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^6	$-1,75 \cdot 10^{-8}$
A_I^7	$4,75 \cdot 10^{-9}$	A_{II}^7	$-5,64 \cdot 10^{-10}$
A_I^8	$5,05 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^8	$4,94 \cdot 10^{-10}$
A_I^9	$-8,25 \cdot 10^{-11}$	A_{II}^9	$-1,96 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.7b : Termes de mouvements de corps rigide, ($\beta = 75^{\circ}$)

T_1 (mm)	T_2 (mm)	R (rad)
$6,75 \cdot 10^{-1}$	$8,66 \cdot 10^{-2}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.7c : Localisation exacte de la pointe de fissure, ($\beta = 75^\circ$)

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$1,0 \cdot 10^{-10}$	$3,02 \cdot 10^{-14}$	$5,0 \cdot 10^{-13}$	1,90

Le degré de ressemblance, entre les champs de déplacements expérimentaux et optimisés, peut être visualisé en termes de déformées, Figure 3.14. Les cartographies 2D des déplacements, Figures 3.15 à 3.18, mettent surtout en évidence la capacité de l'optimisation à filtrer le bruit expérimental. Nous remarquons d'ailleurs que les différences sont nettement plus marquées en comparaison au mode I précédent. Cela peut provenir principalement de la correction en termes de déplacement de corps rigide. En effet, le montage arcan génère beaucoup plus de rotation et de déplacement du fait de l'auto alignement de l'éprouvette lors du chargement; ce qui n'était pas le cas pour le montage en mode d'ouverture.

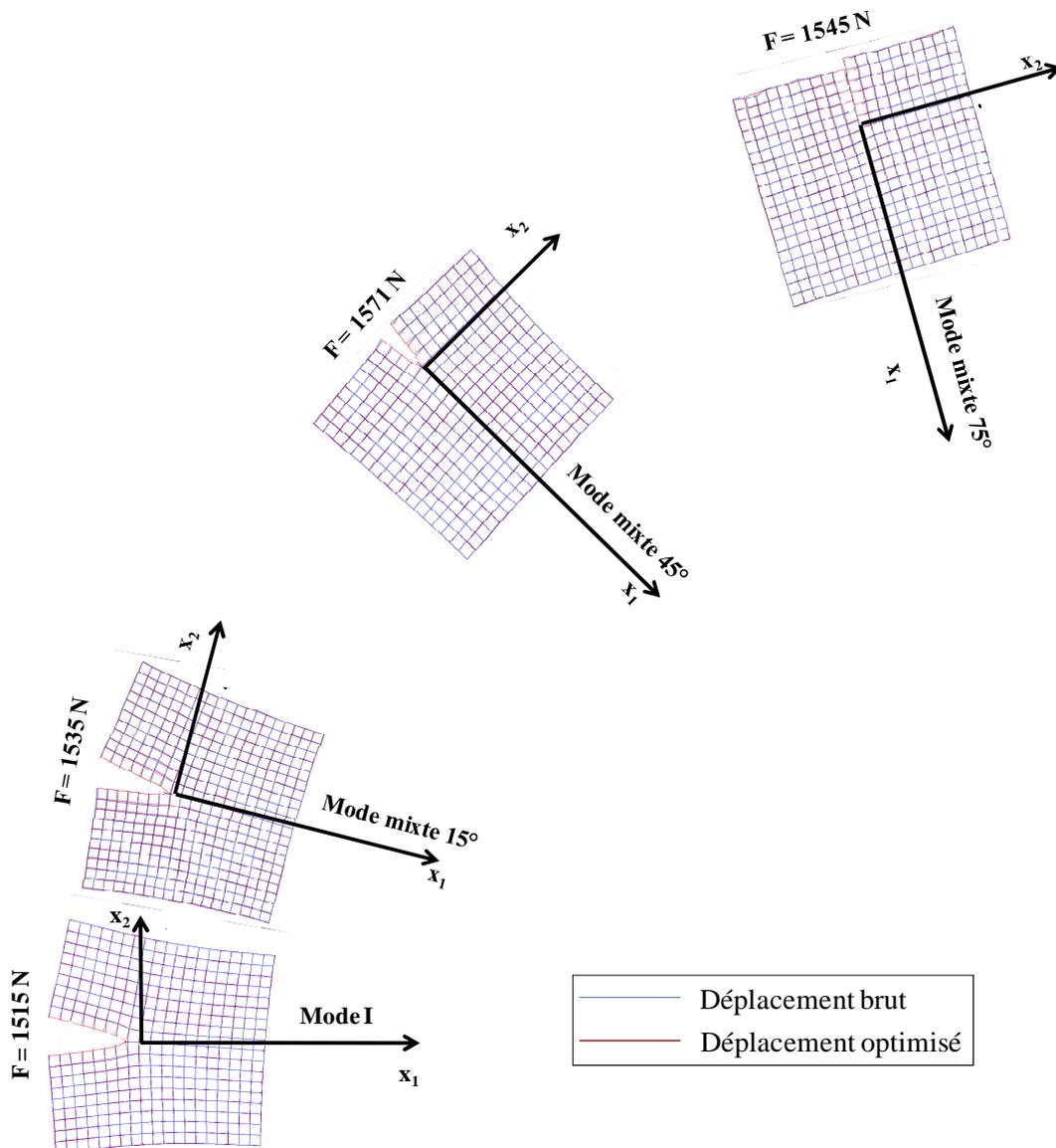
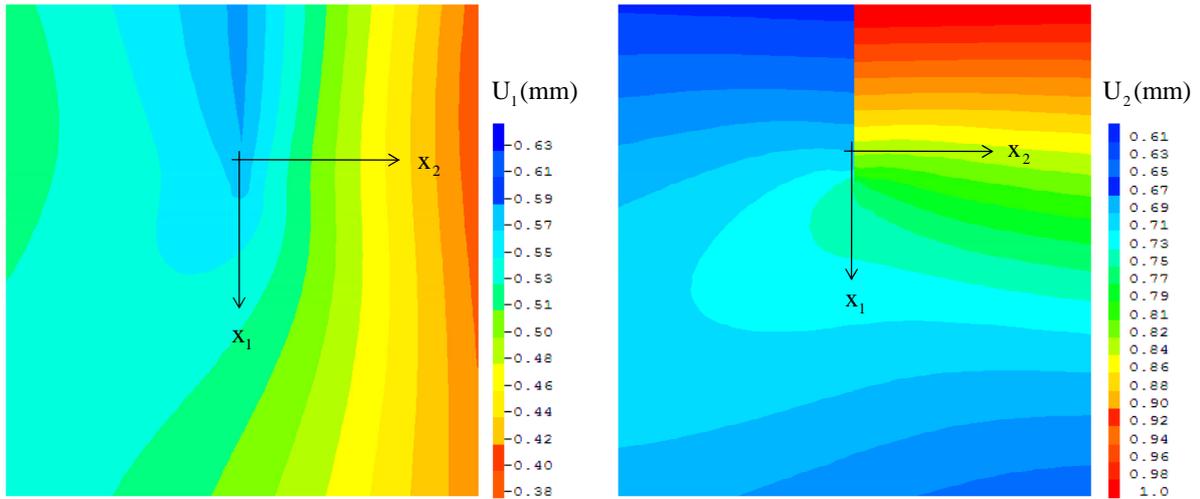
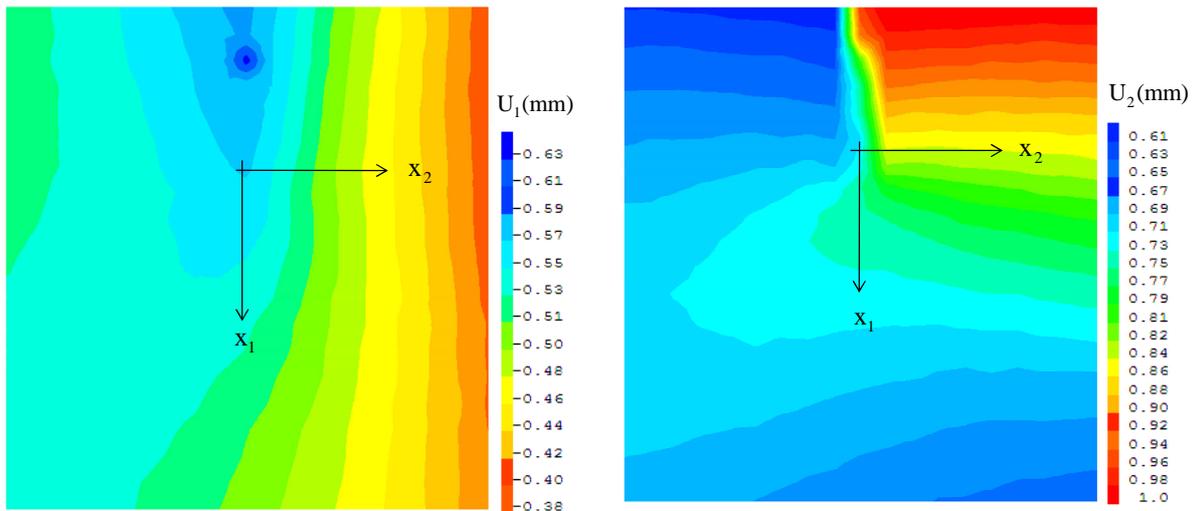


Figure 3.14 : Comparaison entre les champs de déplacement brut et optimisé

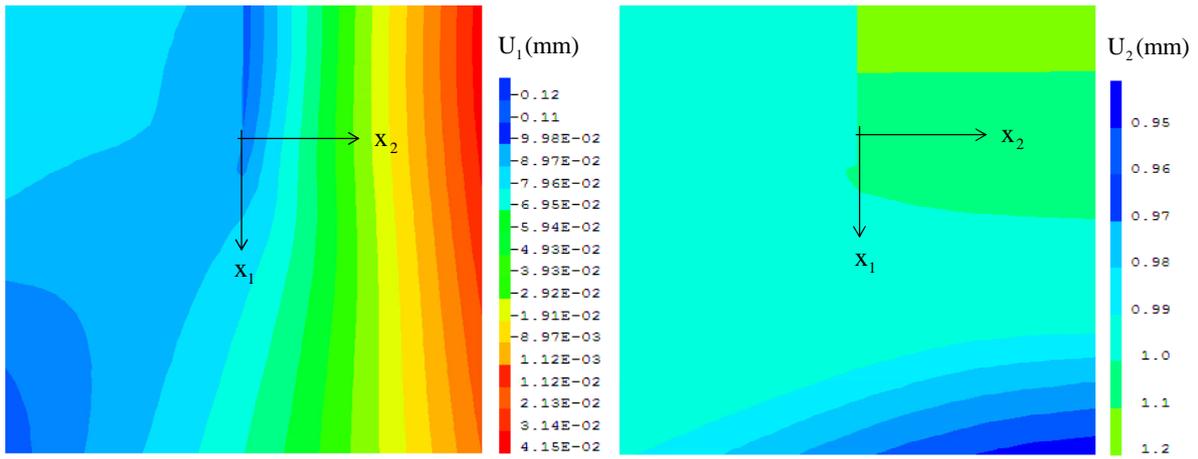


a1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 0^\circ$)

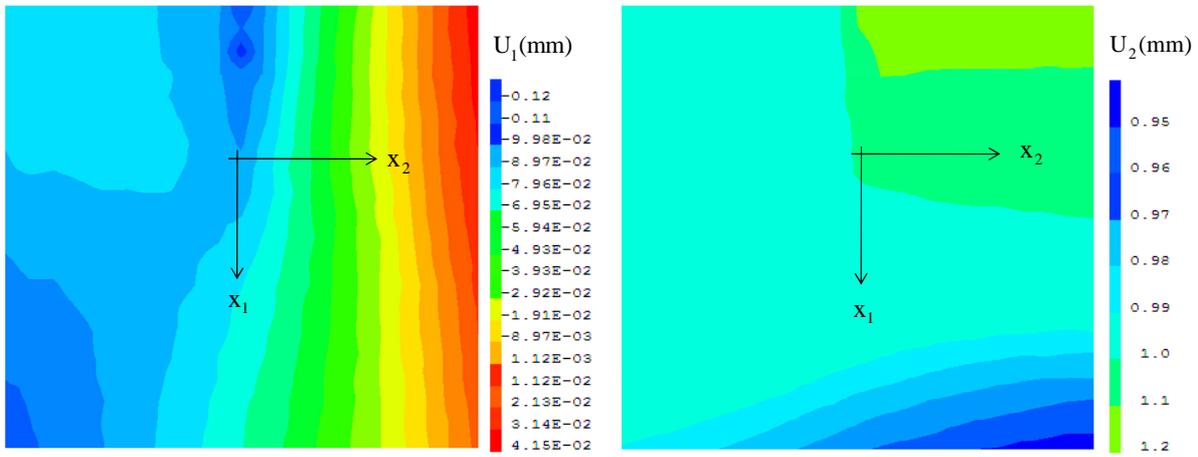


a2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 0^\circ$)

Figure 3.15: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux

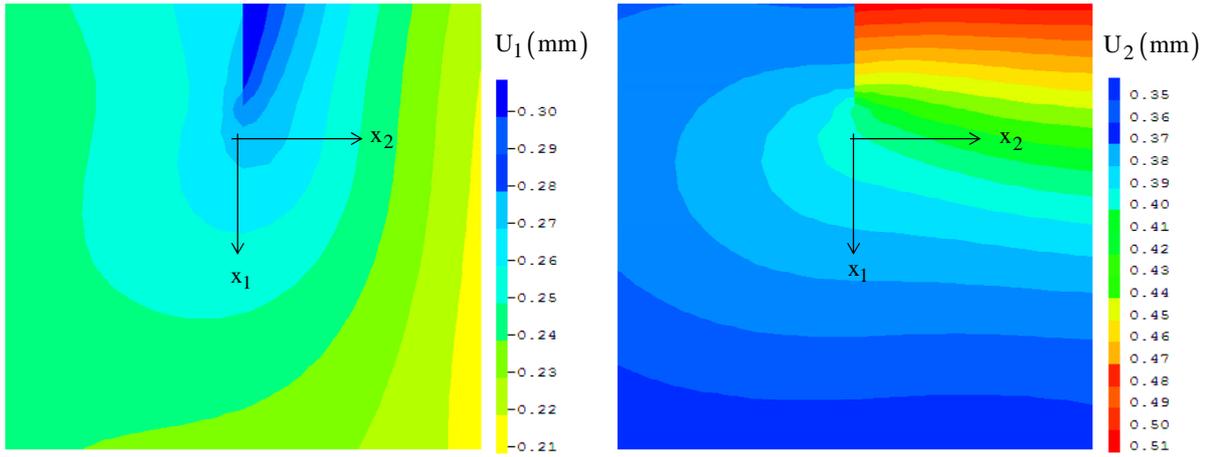


b1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 15^\circ$)

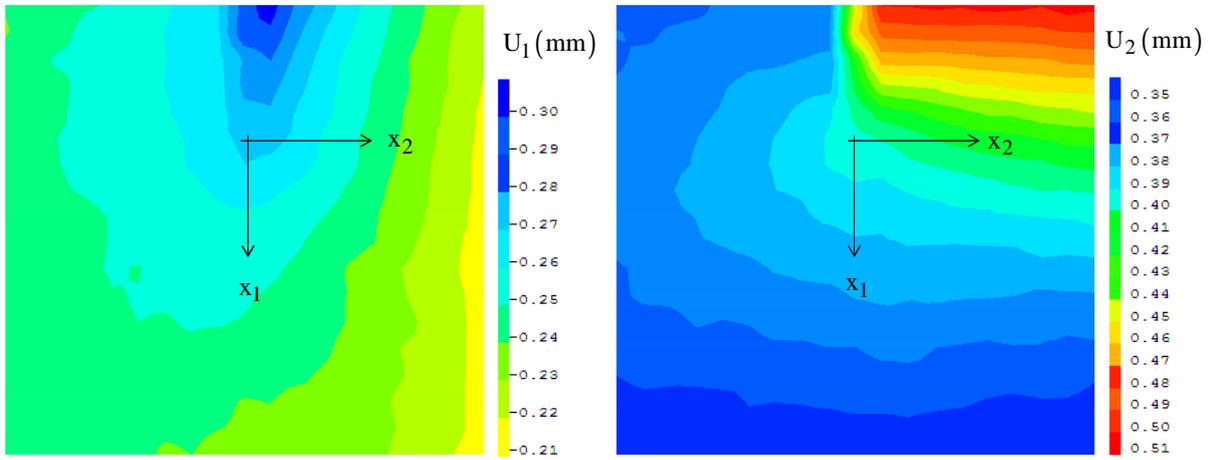


b2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 15^\circ$)

Figure 3.16: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux

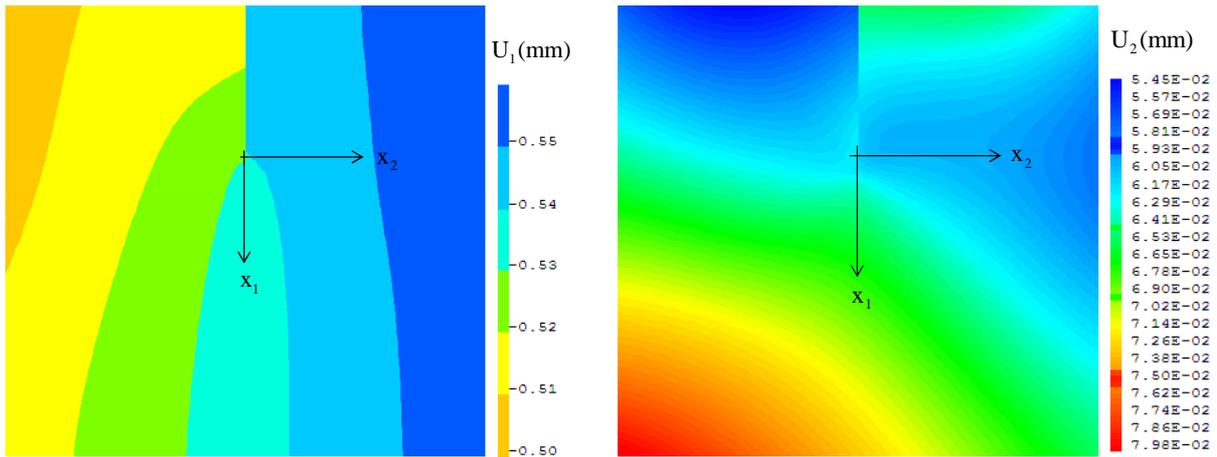


c1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 45^\circ$)

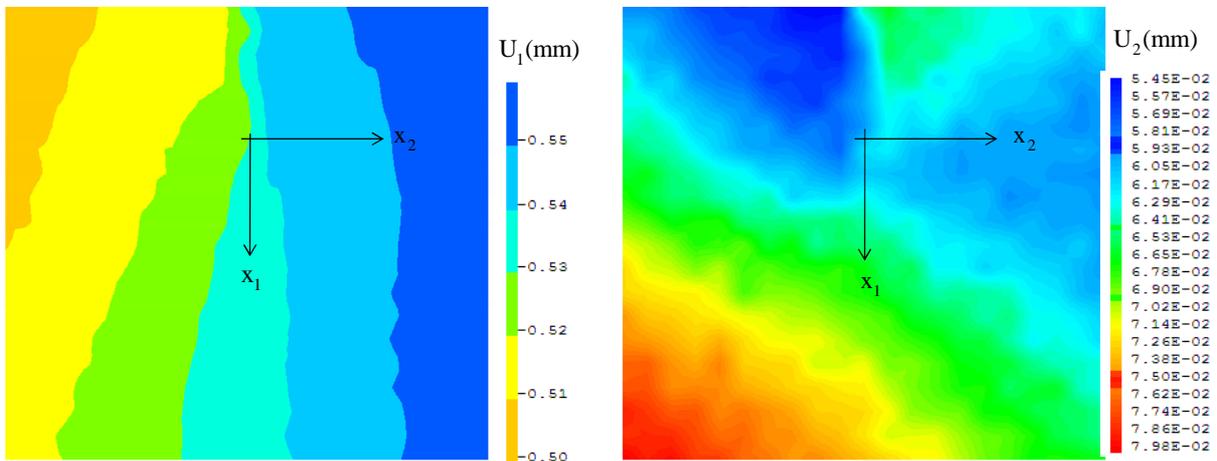


c2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 45^\circ$)

Figure 3.17: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux



d1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 75^\circ$)



d2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 75^\circ$)

Figure 3.18: Cartographies des déplacements optimisés et expérimentaux

3.2.2.2 Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

Les résultats d'optimisation, Tableaux 3.4 à 3.7, permettent de calculer les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure calculés en mode I et II, Tableau 3.8.

Tableau 3.8 : Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure pour différents taux de mixité

Taux de mixité	$K_I^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$	$K_{II}^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$
0°	$5,03 \cdot 10^{-3}$	0
15°	$2,04 \cdot 10^{-3}$	$3,44 \cdot 10^{-4}$
45°	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$9,80 \cdot 10^{-4}$
75°	0	$9,51 \cdot 10^{-4}$

3.2.3 Couplage MEF/CIN

3.2.3.1 Facteurs d'intensité des contraintes

La modélisation par éléments finis, intégrant la méthode $M\theta$, permet le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, Tableau 3.9. Comme pour le mode d'ouverture, le calcul se fait à force imposée dont la valeur, Figure 3.11, est donnée pour chaque configuration d'essai.

Tableau 3.9 : Facteurs d'intensité de contraintes pour chaque taux de mixité

Taux de mixité	Force (N)	$K_I^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$	$K_{II}^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$
0°	1515	1,63	0
15°	1535	0,66	0,11
45°	1571	0,76	0,32
75°	1545	0,18	0,31

3.2.3.2 Taux de restitution d'énergie et propriétés d'élasticité

Enfin, le rapprochement entre l'analyse cinématique par CIN et la caractérisation du champ de contrainte par EF permet de calculer la part de taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture et de cisaillement, équation (2.51), et d'en déduire la complaisance élastique réduite. A partir des résultats obtenus, nous avons déduit les propriétés d'élasticités et de fissuration de l'éprouvette sollicitée sous différents modes mixtes. Les valeurs de ces propriétés, associées aux modes I et II, sont données dans les Tableaux 3.10 et 3.11.

Tableau 3.10 : Etat mécanique et énergétique, part de mode I

Mode mixte	$K_I^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$	$K_I^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$	$G_I (J / m^2)$
0°	$5,03 \cdot 10^{-3}$	1,63	1025
15°	$2,04 \cdot 10^{-3}$	0,66	168
45°	$2,34 \cdot 10^{-3}$	0,76	222
75°	0	0,18	0

Tableau 3.11 : Etat mécanique et énergétique, part de mode II

Mode mixte	$K_{II}^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$	$K_{II}^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$	$G_{II} (J / m^2)$
0°	0	0	0
15°	$3,44 \cdot 10^{-4}$	0,11	5
45°	$9,80 \cdot 10^{-4}$	0,32	39
75°	$9,51 \cdot 10^{-4}$	0,31	37

La constante de Kolosov, déduite de l'algorithme d'optimisation, permet de fixer la valeur du coefficient de Poisson à 0,379. Enfin, Les expressions (2.43) permettent de calculer les complaisances élastiques réduites (C_I et C_{II}) et d'en déduire le module d'élasticité E , Tableau 3.12, et ce, pour chaque mode. Bien que le matériau soit isotrope, les résultats mettent en évidence de légères différences de module. Cependant, nous obtenons une valeur moyenne de 2592MPa avec un écart type de 20MPa; valeur moyenne correspondant à celle obtenue dans la première application en mode d'ouverture.

Tableau 3.12 : Propriétés d'élasticité

Mode mixte	$C_I (MPa^{-1})$	$C_{II} (MPa^{-1})$	$E (MPa)$
0°	$3,09 \cdot 10^{-3}$	-	2590/-
15°	$3,09 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	2509/2560
45°	$3,08 \cdot 10^{-3}$	$3,06 \cdot 10^{-3}$	2600/2610
75°	-	$3,07 \cdot 10^{-3}$	-/2610

Finalement, la Figure 3.19 met en évidence une bonne correspondance entre la déformée expérimentale et un calcul aux éléments finis réalisé avec un module d'élasticité moyen de 2592MPa.

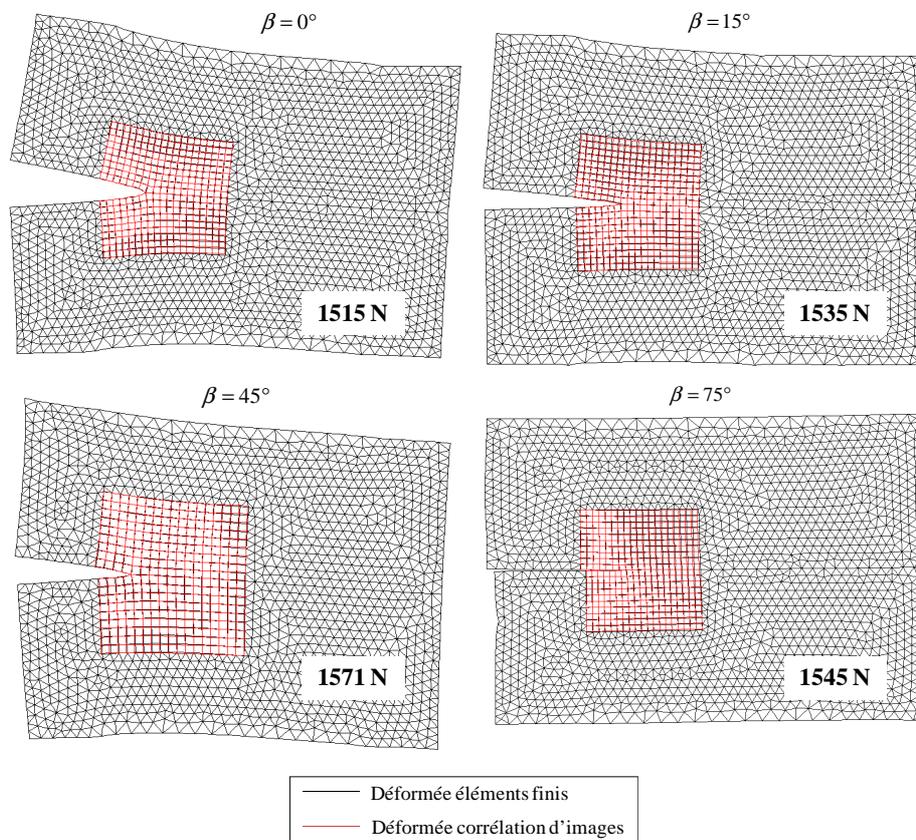


Figure 3.19 : Comparaison entre les champs optimisés et les champs numériques

3.3 Configuration mode I orthotrope

3.3.1 Paramètre d'essai

Le protocole expérimental est le même que celui décrit dans le cas du mode I isotrope. Les dimensions de l'éprouvette de Douglas sont précisées en Figure 3.20 avec une fissure dans le plan Radial-Longitudinal. L'échantillon, initialement conditionné dans un caisson climatique, présente, lors de l'essai, un taux d'humidité moyen de 11%.

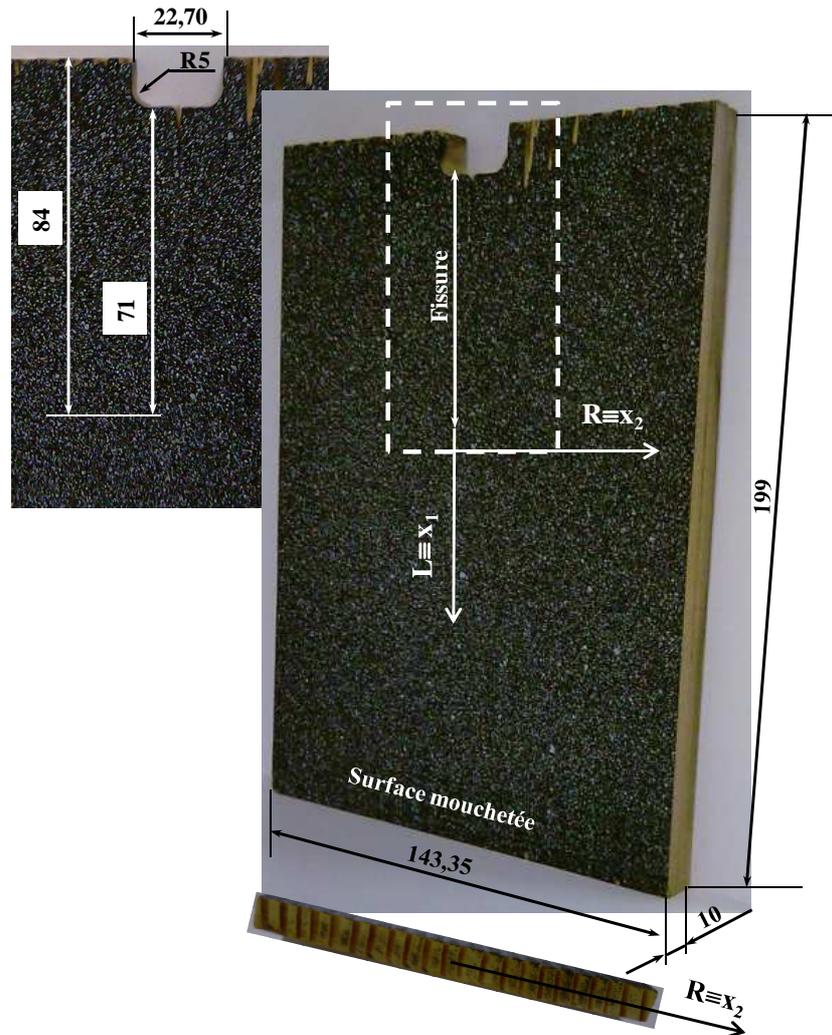


Figure 3.20: Dimensions géométriques de l'éprouvette (en mm)

3.3.2 Analyse d'images

L'essai de fissuration reste dans le domaine élastique sans propagation de fissure. Les effets de non linéarité et d'endommagement sont négligés en front de fissure. La courbe force-déplacement est présentée en Figure 3.21. L'effort de 245N correspond aux déplacements analysés en corrélation d'images numériques.

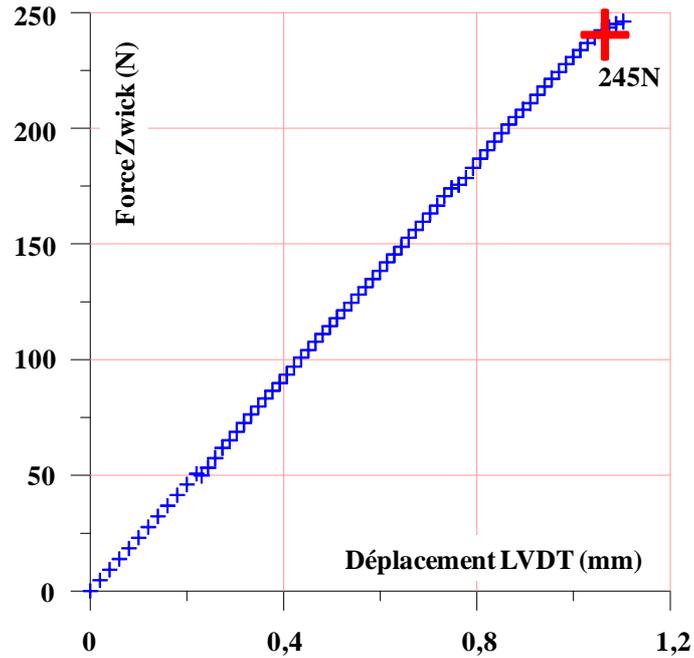


Figure 3.21: Courbe force-déplacement

3.3.2.1 Optimisation des champs expérimentaux

Le principe d'optimisation, appliqué précédemment, est de nouveau mis en œuvre. Les dimensions de la zone d'étude, définies en Figure 3.3, sont précisées dans le Tableau 3.13.

Tableau 3.13. Dimensions géométrique de la zone d'étude

Grandissement (mm/pixel)	a_{ZI} (mm)	V_{ZI} (mm)	H_{ZI} (mm)
0,230	73,6	170,0	125,0

Les champs asymptotiques orthotropes, décrits par les équations (1.11) et (1.16), s'avérant insuffisants pour représenter correctement les champs mécaniques de la zone d'étude, nous avons choisi de représenter le champ optimisé à partir de la série asymptotique de Williams (l'équation 2.1), décrite initialement pour un matériau isotrope. Même si cette association entre un champ expérimental orthotrope et un champ analytique isotrope peut surprendre, les résultats d'analyse, présentés par la suite, justifient ce choix. Le champ théorique restant toujours cinématiquement admissible, l'ajustement de ces paramètres intègreront le caractère orthotrope du milieu; l'objectif final restant de remplacer un champ expérimental bruité par un champ analytique propre. La figure 3.22 met en évidence les écarts obtenus en fonction du nombre de paramètres N de la série de Williams. Par contre, la constante de Kolosov κ devient un paramètre d'optimisation. Nous constatons que la moyenne de l'écart, entre la solution asymptotique et le champ global orthotrope mesuré, est minimisée lorsque $N = 7$. Les paramètres d'optimisation, déterminés par la procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires, sont regroupés dans les Tableaux 3.14a, b et c.

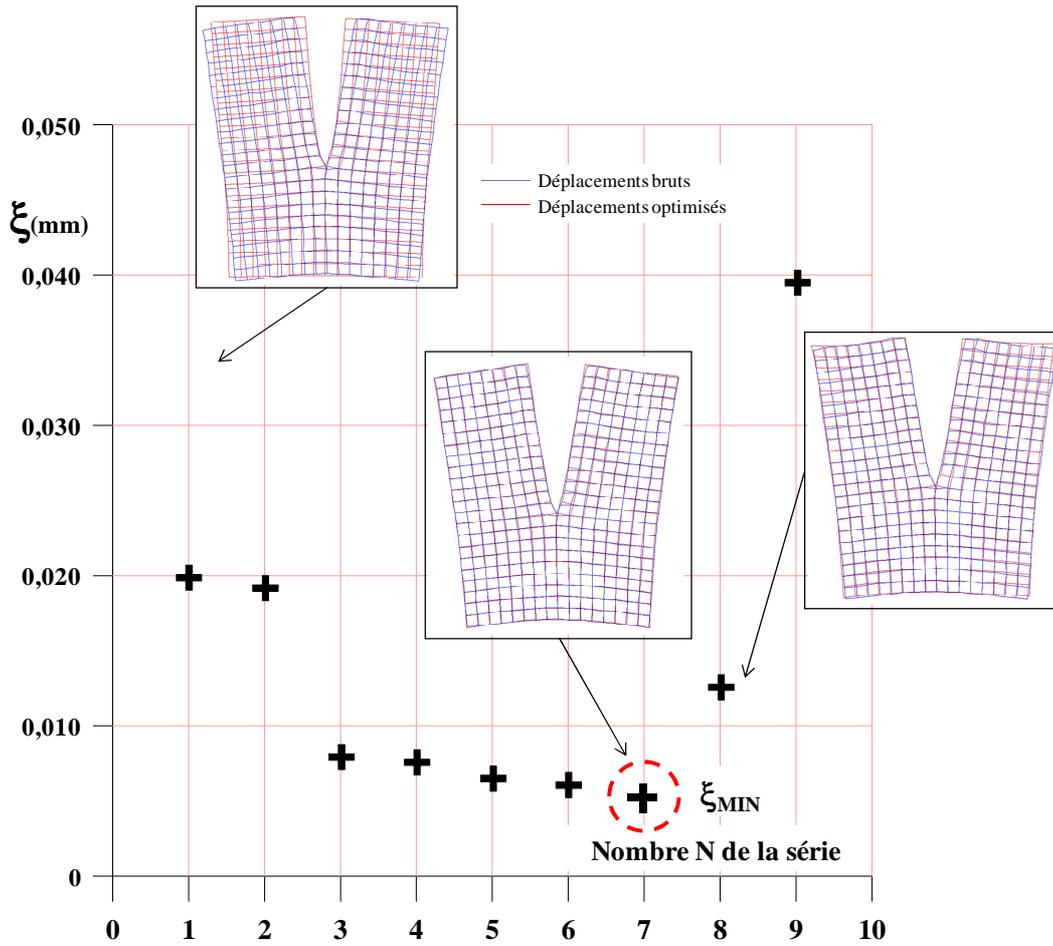


Figure 3.22 : Evolution de la moyenne de l'écart et de champs optimisés en fonction de N

Tableau 3.14a : Coefficients A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) donné en $mm^{\left(\frac{1-i}{2}\right)}$

Mode I

A_I^1	A_I^2	A_I^3	A_I^4	A_I^5	A_I^6	A_I^7
$4,56 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	$-2,17 \cdot 10^{-5}$	$2,84 \cdot 10^{-8}$	$-5,44 \cdot 10^{-8}$	$1,06 \cdot 10^{-9}$	$-4,46 \cdot 10^{-10}$

Mode II

A_{II}^1	A_{II}^2	A_{II}^3	A_{II}^4	A_{II}^5	A_{II}^6	A_{II}^7
$-1,95 \cdot 10^{-4}$	$3,82 \cdot 10^{-5}$	$-3,01 \cdot 10^{-6}$	$4,25 \cdot 10^{-7}$	$-1,11 \cdot 10^{-8}$	$7,47 \cdot 10^{-11}$	$9,91 \cdot 10^{-11}$

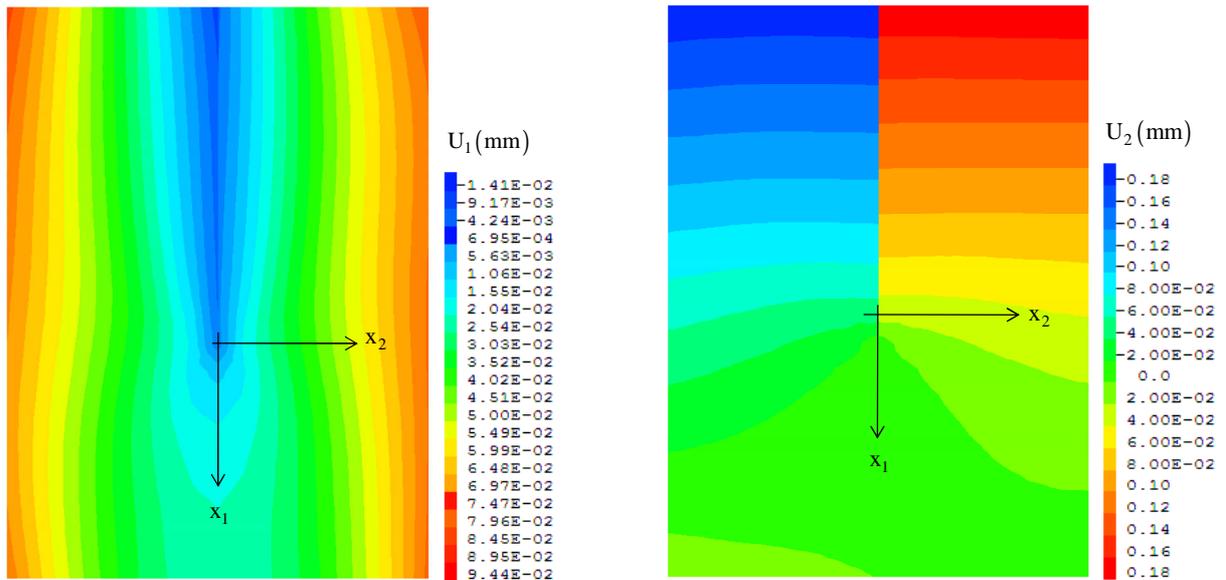
Tableau 3.14b : Termes de mouvements de corps rigide

T_1 (mm)	T_2 (mm)	R (rad)
$9,60 \cdot 10^{-3}$	$9,58 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-5}$

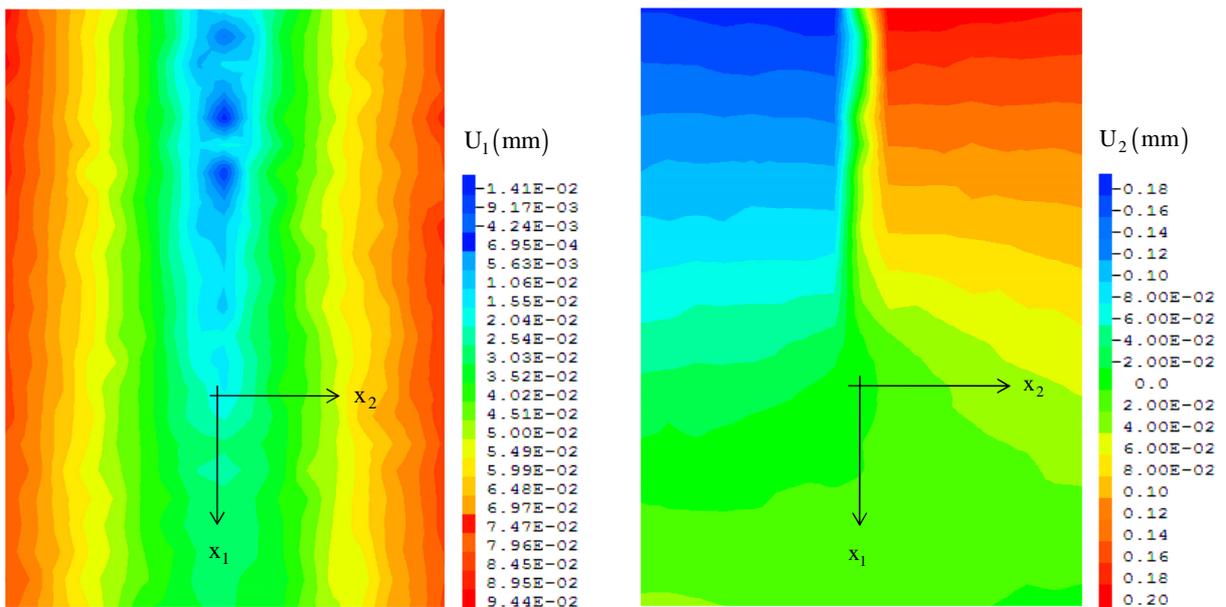
Tableau 3.14c : Position et orientation de la pointe de fissure

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$-1,23 \cdot 10^{-8}$	1,878

Les cartographies des déplacements expérimentaux bruts et analytiques sont comparées en Figure 3.23. Comme pour le cas isotrope en mode I, le champ optimisé présente une parfaite symétrie d'ouverture de la fissure. Le débruitage du signal peu également être apprécié.



a. Déplacements optimisés



b. Déplacements bruts

Figure 3.23 : Les cartographies des champs de déplacements optimisés et bruts

3.3.2.2 Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

En rappel de l'équation (2.36), les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure sont déterminés à partir des coefficients A_I^1 , A_{II}^1 du Tableau 3.13a et de la constante κ . Ils sont donnés ci-dessous :

$$K_I^{(\varepsilon)} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{1/2} \quad \text{et} \quad K_{II}^{(\varepsilon)} = 8,89 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{1/2} \quad (3.7)$$

3.3.3 Couplage MEF/CIN

3.3.3.1 Facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes sont ensuite calculés par la méthode $G\theta$ à partir d'un modèle éléments finis intégrant les conditions aux limites de l'essai expérimental, un chargement en force imposée et une loi matérielle arbitraire. La valeur du chargement appliqué correspond à la valeur identifiée sur la courbe caractéristique force-déplacement ($F=245\text{N}$, Figure 3.21). Dans le chapitre précédent, nous avons montré également que la méthode intégrale est fortement dépendante de la loi de comportement du matériau tandis que le facteur d'intensité des contraintes n'en dépend pas lorsque le taux d'orthotropie est fixé. Ainsi, pour une valeur arbitraire du module d'élasticité E_R , les autres composantes du tenseur de rigidité sont calculées en accord avec les rapports d'orthotropie préconisés par Guitard [GUITARD 1987], à savoir :

$$E_L = 11,39 \cdot E_R, \quad G_{LR} = 0,744 \cdot E_R \quad \text{et} \quad \nu_{LR} = 0,39 \quad (3.8)$$

Les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes obtenues sont données ci-dessous :

$$K_I^{(\sigma)} = 0,446 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad \text{et} \quad K_{II}^{(\sigma)} = 0,0 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad (3.9)$$

3.3.3.2 Taux de restitution d'énergie et propriétés d'élasticité

La combinaison de deux approches cinématique et statique permet d'obtenir, dans un premier temps, la valeur du taux de restitution d'énergie :

$$G = \frac{K_I^{(\varepsilon)} \cdot K_I^{(\sigma)}}{8} = 116 \text{ J / m}^2 \quad (3.10)$$

Enfin, la complaisance élastique réduite C_I peut être déduite à travers les facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure $K_I^{(\varepsilon)}$ et de la singularité des contraintes $K_I^{(\sigma)}$ (relation 2.43):

$$C_I = \frac{K_I^{(\varepsilon)}}{K_I^{(\sigma)}} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-1} \quad (3.11)$$

En connaissant la valeur de la complaisance élastique réduite orthotrope, à l'aide des équations (1.21), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15), nous pouvons identifier les propriétés

élastiques orthotropes du Douglas, tout en gardant les mêmes rapports d'orthotropie que celles utilisés par la modélisation. Les valeurs calculées sont données dans le Tableau 3.14. En tenant compte d'un taux d'humidité plus élevé, nous remarquons que les propriétés déduites sont en accord avec celles proposées par Guitard.

Tableau 3.14 : Propriétés d'élasticité du Douglas.

	E_R	E_L	G_{LR}	ν_{LR}
Résultats (MC=11%)	1170MPa	13500MPa	872MPa	0,39
Données Guitard (MC=9,5%)	1370MPa	15600MPa	1020MPa	0,39

En remplaçant, dans le modèle éléments finis, la loi matérielle arbitraire par la loi matérielle réelle identifiée précédemment, nous obtenons une déformée du maillage en bonne cohérence avec la déformée de la zone d'étude (champ expérimental optimisé), Figure 3.24.

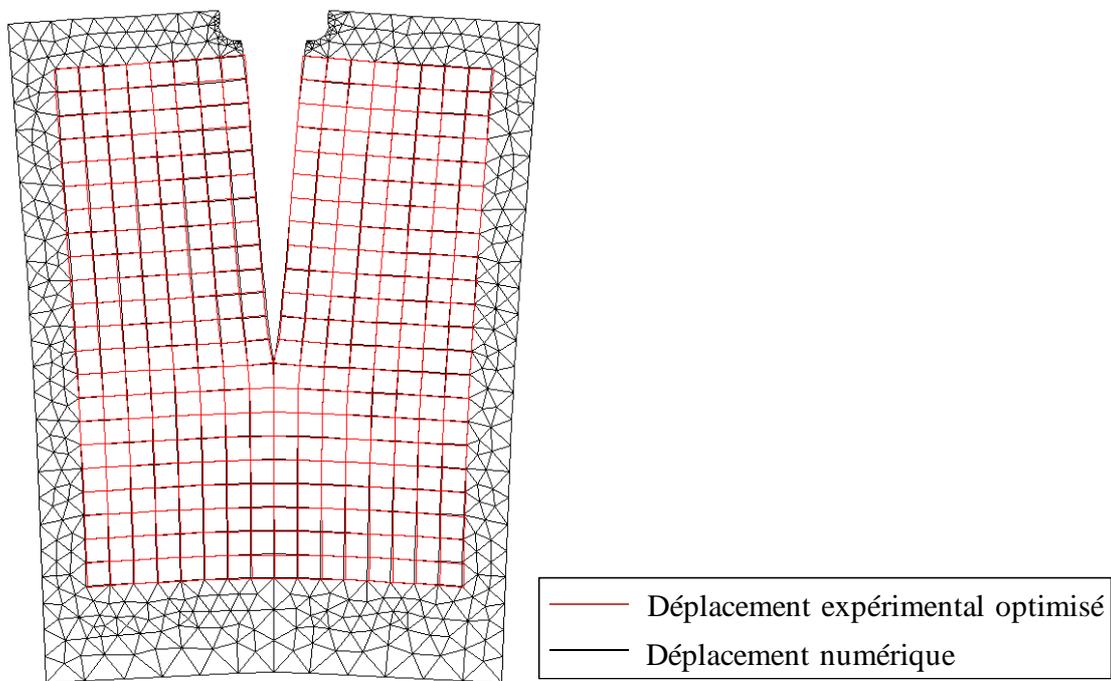


Figure 3.24 : Comparaison entre les champs optimisés et les champs numériques

L'algorithme a enfin été employé, sur le même échantillon, pour d'autres niveaux de chargement. Les Figures 3.25 présentent les évolutions des propriétés de fissuration. Reste à tester cet algorithme dans des configurations de mode mixte pour un matériau orthotrope.

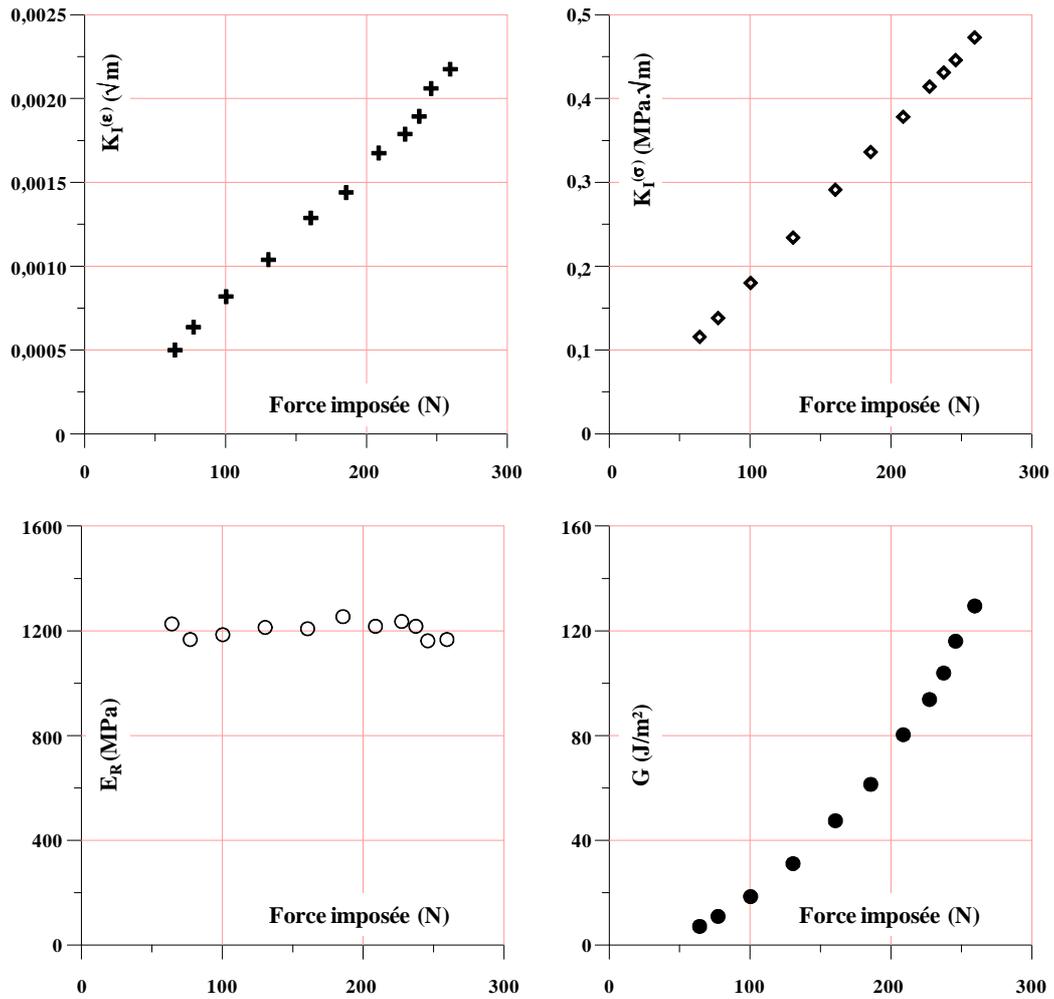


Figure 3.25 : Evolution du taux de restitution d'énergie en fonction du niveau de chargement

3.4 Configuration mode mixte orthotrope

3.4.1 Paramètres d'essai

Toujours en Douglas, les dimensions géométriques des éprouvettes sont données par la Figure 3.26, et ce, pour chaque taux de mixité. L'essai de fissuration demeure dans le domaine élastique et sans endommagement. Les éprouvettes sont toujours conditionnées, avant essai, dans une enceinte climatique à une température de 20°C et 65% d'humidité relative (teneur en eau de 10% mesurée après essai). Le même dispositif expérimental, présenté Figure 3.10, est employé. Les essais sont réalisés suivant trois angles de sollicitation : 15°, 45° et 75°.

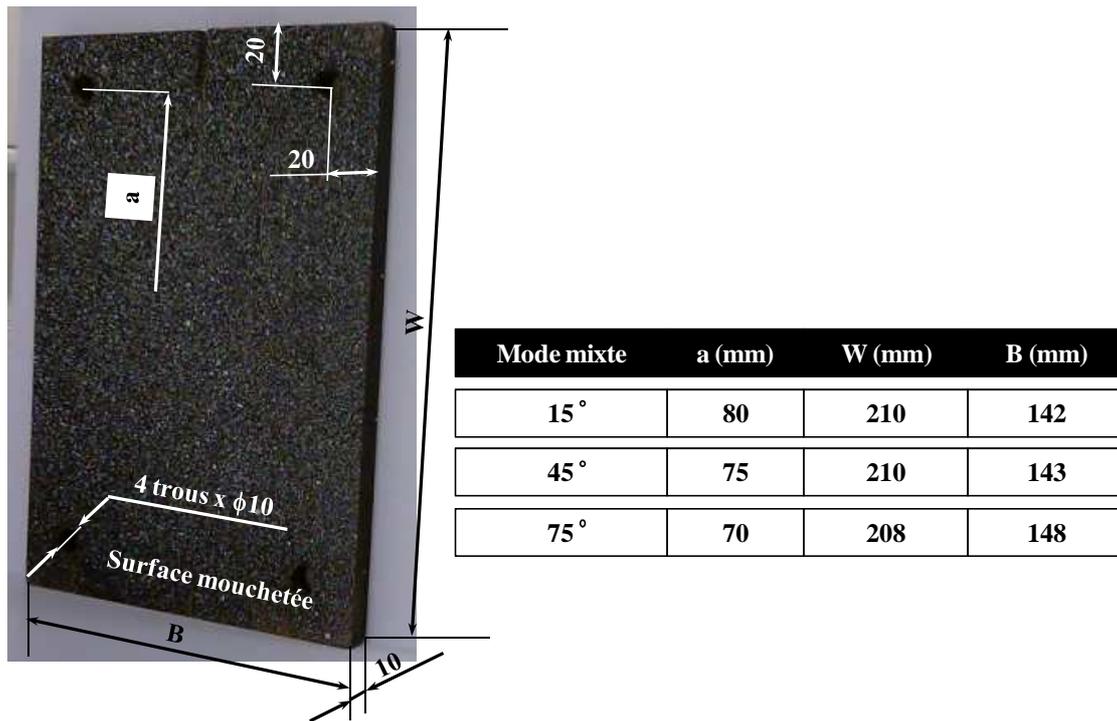


Figure 3.26: Dimensions des éprouvettes

3.4.2 Analyse d'images

Les résultats des essais de fissurations, relatifs à chaque taux de mixité et en termes des courbes force-déplacement, sont montrés en Figure 3.27. Ces évolutions précisent la limite du domaine d'étude dépourvue d'endommagement et de propagation de fissure. L'analyse des déplacements reste donc dans le domaine élastique. Comme pour les cas précédents, nous indiquons, sur chaque courbe, les efforts correspondant aux images étudiées.

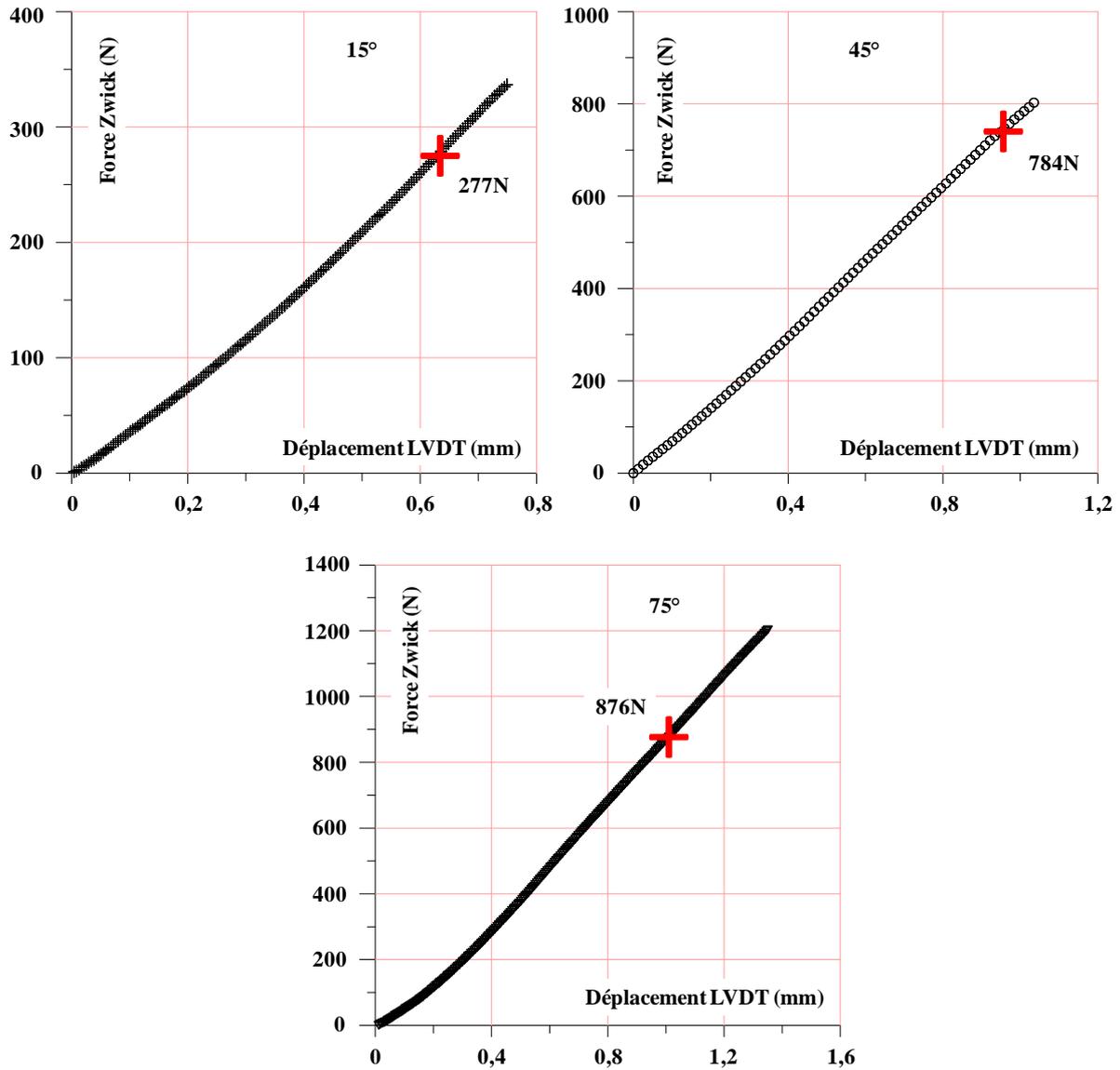


Figure 3.27 : Courbes force-déplacement

3.4.2.1 Optimisation des champs expérimentaux

La sélection de la zone d'étude est similaire à celle de la Figure 3.12. Les dimensions de cette zone, pour chaque angle de sollicitation, sont résumées dans le Tableau 3.15.

Tableau 3.15 : Dimensions de la zone d'intérêt

Mode mixte	Grandissement (mm/pixel)	a_{ZI} (mm)	V_{ZI} (mm)	H_{ZI} (mm)
15°	0,227	58,1	123,0	116,0
45°	0,232	52,0	126,0	111,0
75°	0,222	42,6	121,0	107,0

La Figure 3.28 présente la minimisation de la moyenne des écarts entre les champs de déplacement mesurés en corrélation d'images dans la zone d'étude et la solution asymptotique de la série de Williams. Cette moyenne d'écart est minimale pour $N = 7$, et ce, pour chaque taux de mixité.

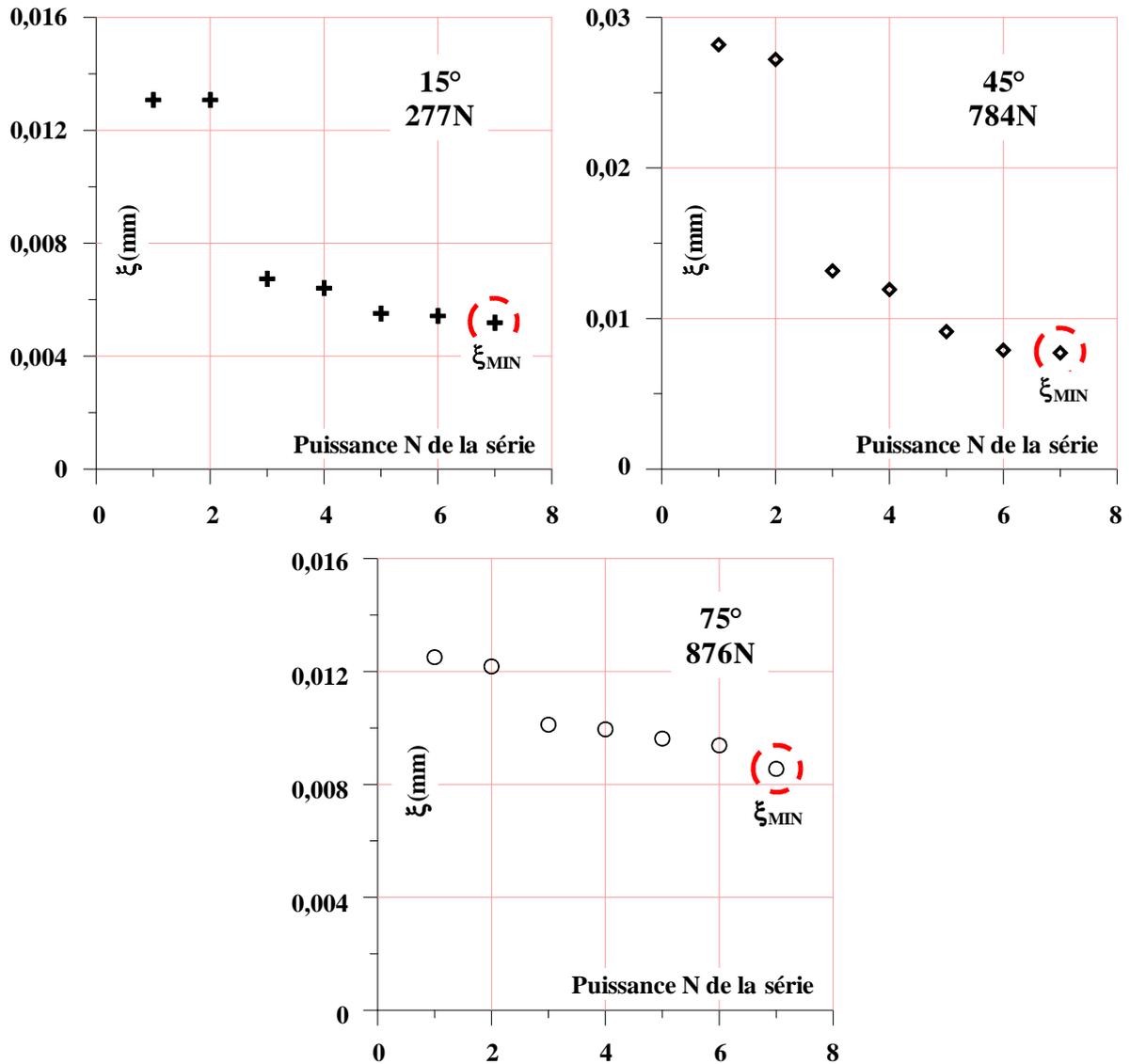


Figure 3.28 : Evolution de la moyenne des écarts en fonction du nombre de la série Williams

Les Tableaux 3.16, 3.17 et 3.18 regroupent les différents paramètres d'optimisations du champ expérimental pour chaque taux de mixité.

Tableau 3.16a : Coefficients d'optimisation A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 15^{\circ}$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$1,30 \cdot 10^{-3}$	A_{II}^1	$3,12 \cdot 10^{-4}$
A_I^2	$2,89 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^2	$-4,39 \cdot 10^{-4}$
A_I^3	$-1,48 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^3	$4,04 \cdot 10^{-6}$
A_I^4	$-4,16 \cdot 10^{-7}$	A_{II}^4	$-7,50 \cdot 10^{-7}$
A_I^5	$3,42 \cdot 10^{-9}$	A_{II}^5	$4,36 \cdot 10^{-8}$
A_I^6	$6,09 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^6	$-2,77 \cdot 10^{-10}$
A_I^7	$-4,39 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^7	$-4,21 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.16b : Mouvements de corps solide ($\beta = 15^{\circ}$)

T_1 (mm)	T_2 (mm)	R (rad)
$-7,13 \cdot 10^{-2}$	0,29	$-1,52 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.16c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 15^{\circ}$)

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$9,95 \cdot 10^{-11}$	$6,93 \cdot 10^{-14}$	$4,3 \cdot 10^{-12}$	1,90

Tableau 3.17a : Coefficients d'optimisation A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 45^{\circ}$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$2,95 \cdot 10^{-3}$	A_{II}^1	$1,62 \cdot 10^{-3}$
A_I^2	$-2,67 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^2	$4,04 \cdot 10^{-4}$
A_I^3	$-4,67 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^3	$1,49 \cdot 10^{-5}$
A_I^4	$1,26 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^4	$-7,54 \cdot 10^{-7}$
A_I^5	$-5,22 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^5	$-4,47 \cdot 10^{-8}$
A_I^6	$-1,01 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^6	$2,10 \cdot 10^{-8}$
A_I^7	$4,81 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^7	$-5,53 \cdot 10^{-10}$

Tableau 3.17b : Mouvements de corps solide ($\beta = 45^\circ$)

T ₁ (mm)	T ₂ (mm)	R (rad)
-0,275	0,337	$1,40 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.17c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 45^\circ$)

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$1,0 \cdot 10^{-10}$	$-3,0 \cdot 10^{-12}$	$1,16 \cdot 10^{-11}$	1,90

Tableau 3.18a : Coefficients d'optimisation A_{α}^i ($i=1..7$; $\alpha=I, II$) en $mm^{\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ ($\beta = 75^\circ$)

Mode I		Mode II	
A_I^1	$1,51 \cdot 10^{-3}$	A_{II}^1	$1,44 \cdot 10^{-3}$
A_I^2	$-3,64 \cdot 10^{-5}$	A_{II}^2	$1,59 \cdot 10^{-3}$
A_I^3	$-9,15 \cdot 10^{-6}$	A_{II}^3	$1,35 \cdot 10^{-5}$
A_I^4	$4,22 \cdot 10^{-7}$	A_{II}^4	$-1,19 \cdot 10^{-6}$
A_I^5	$-3,73 \cdot 10^{-8}$	A_{II}^5	$-4,83 \cdot 10^{-8}$
A_I^6	$-4,96 \cdot 10^{-9}$	A_{II}^6	$2,20 \cdot 10^{-8}$
A_I^7	$3,52 \cdot 10^{-10}$	A_{II}^7	$-7,41 \cdot 10^{-10}$

Tableau 3.18b : Mouvements de corps solide ($\beta = 75^\circ$)

T ₁ (mm)	T ₂ (mm)	R (rad)
-1,03	0,30	$5,54 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.18c : Position et orientation de la pointe de fissure ($\beta = 75^\circ$)

x_1^0 (mm)	x_2^0 (mm)	ω_0 (rad)	κ
$3,94 \cdot 10^{-5}$	$-7,10 \cdot 10^{-6}$	$-4,13 \cdot 10^{-2}$	1,90

Afin de mettre en évidence la ressemblance entre les champs expérimentaux et la solution analytique ajustée sur ces champs, la Figure 3.29 présente la superposition des déformées de la zone d'étude correspondant, respectivement, aux champs expérimentaux bruts et optimisés, et ce, pour les trois taux de mixité. Nous pouvons observer une bonne correspondance. En

complément, les cartographies de déplacement, présentées en Figures 3.30, 3.31 et 3.32, illustrent le débruitage effectué par la procédure d'optimisation.

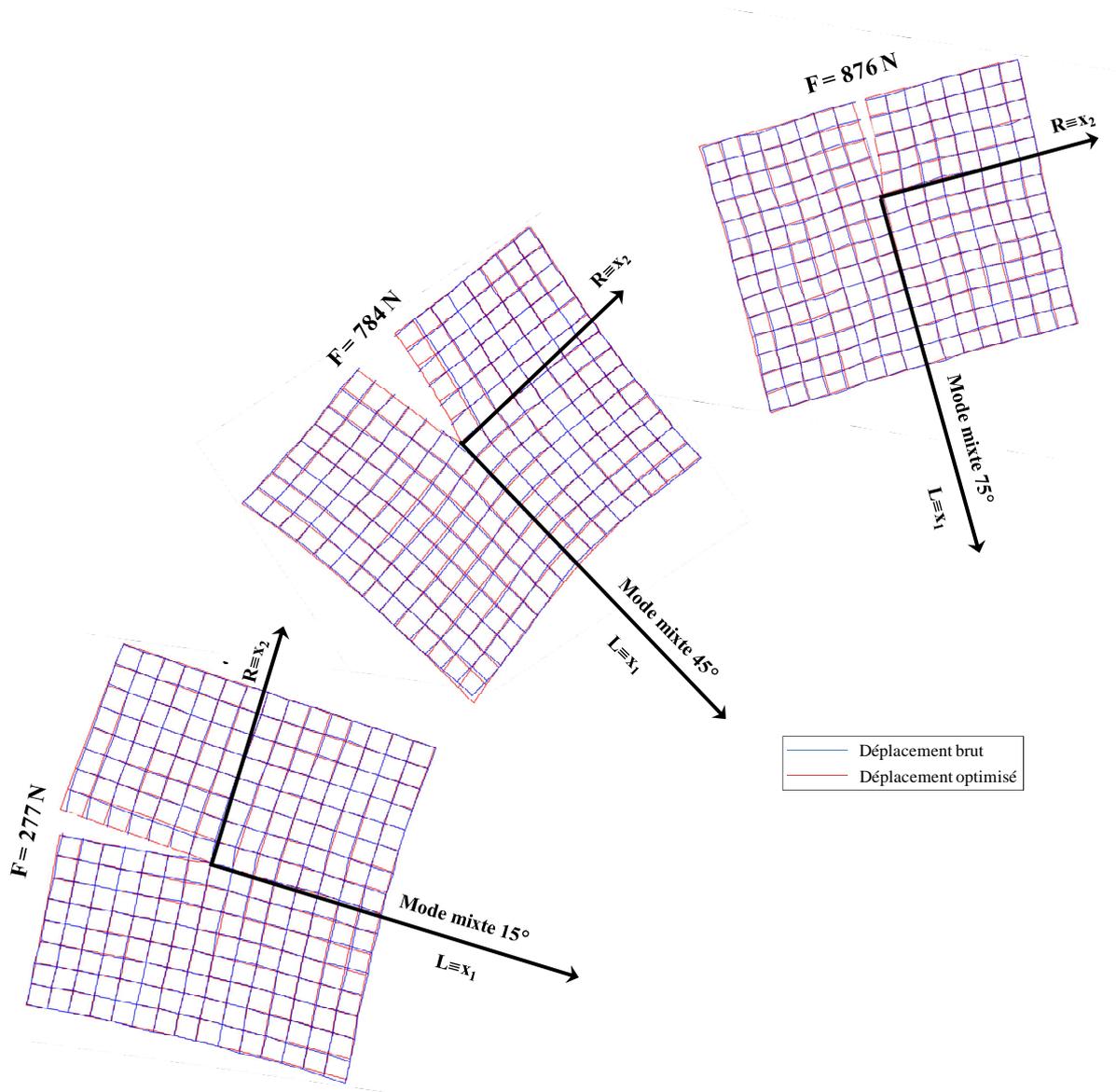
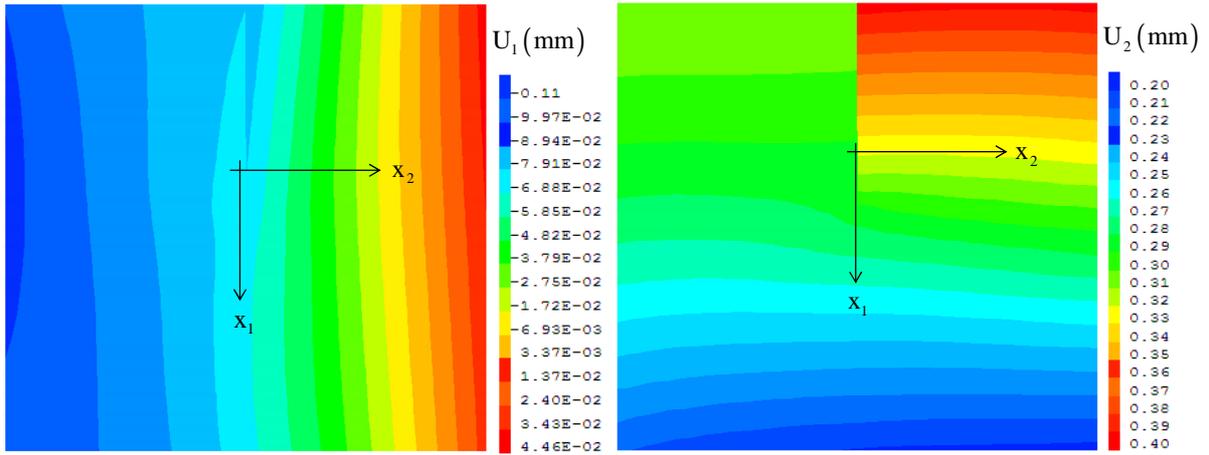
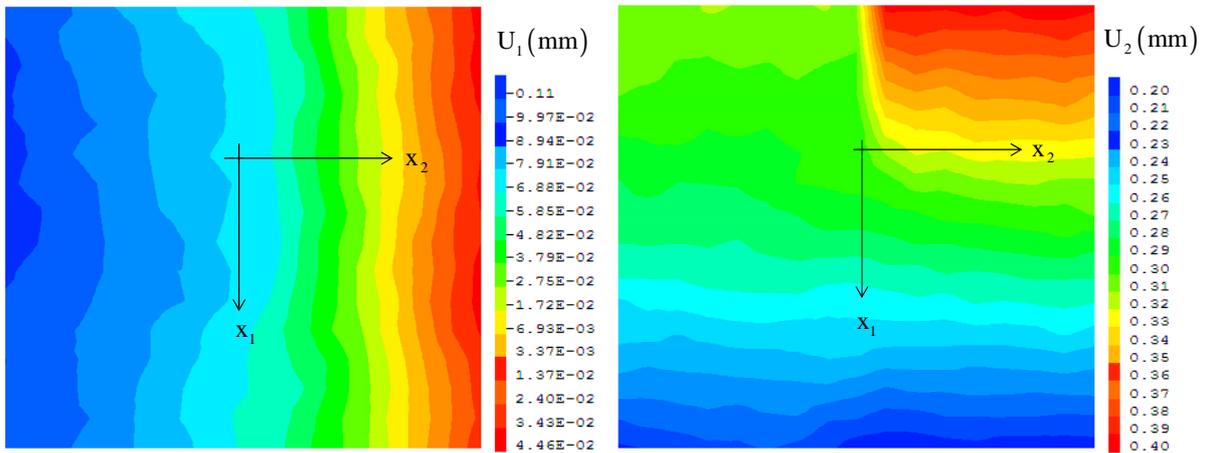


Figure 3.29 : Comparaison entre les champs de déplacement brut et optimisé

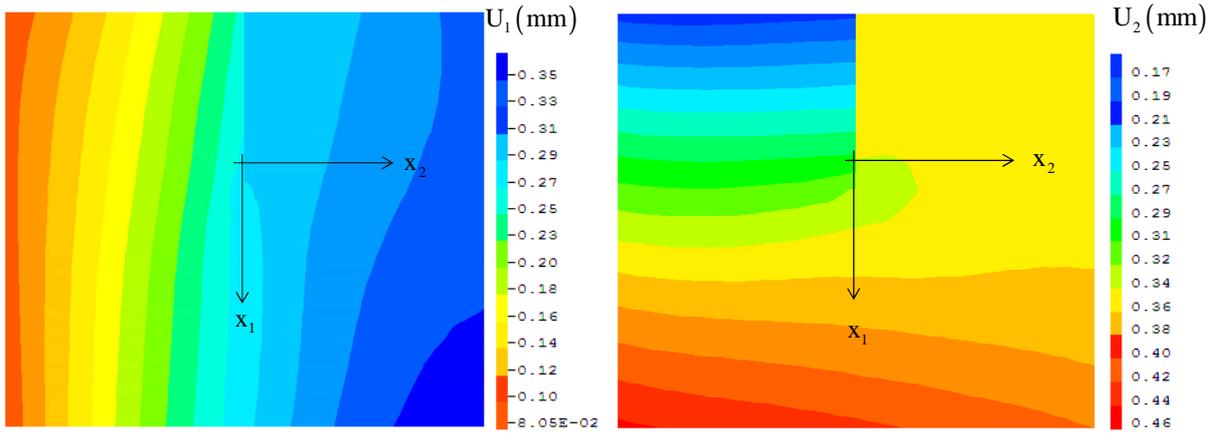


a1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 15^\circ$)

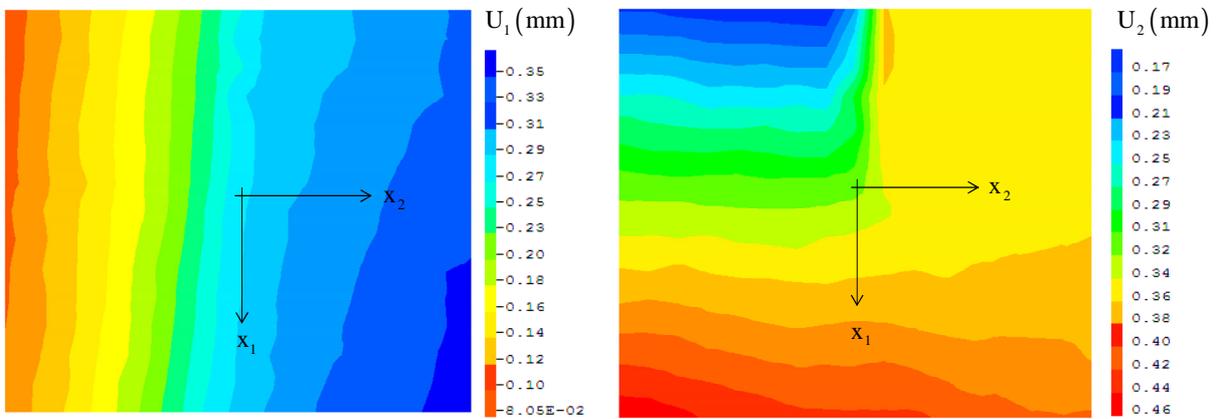


a2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 15^\circ$)

Figure 3.30 : Cartographies des champs de déplacement

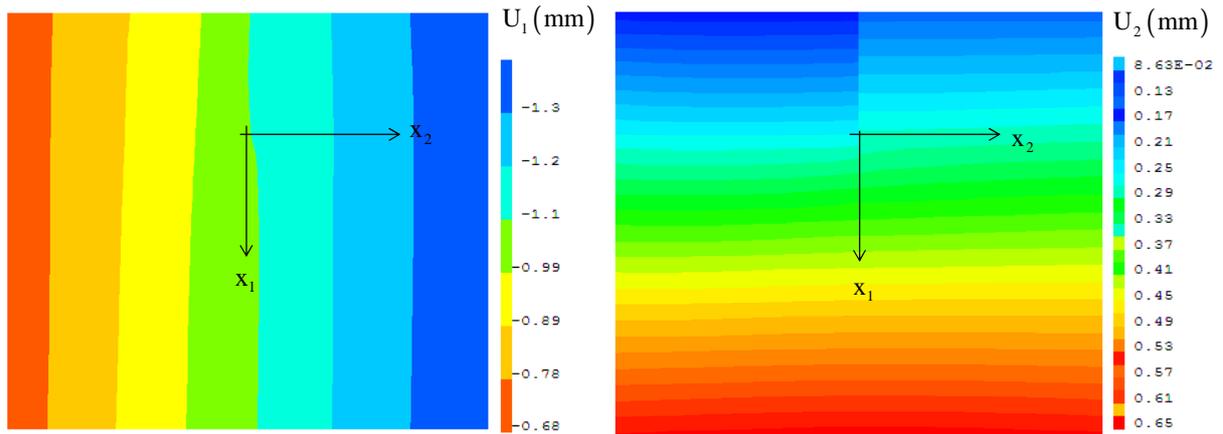


b1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 45^\circ$)

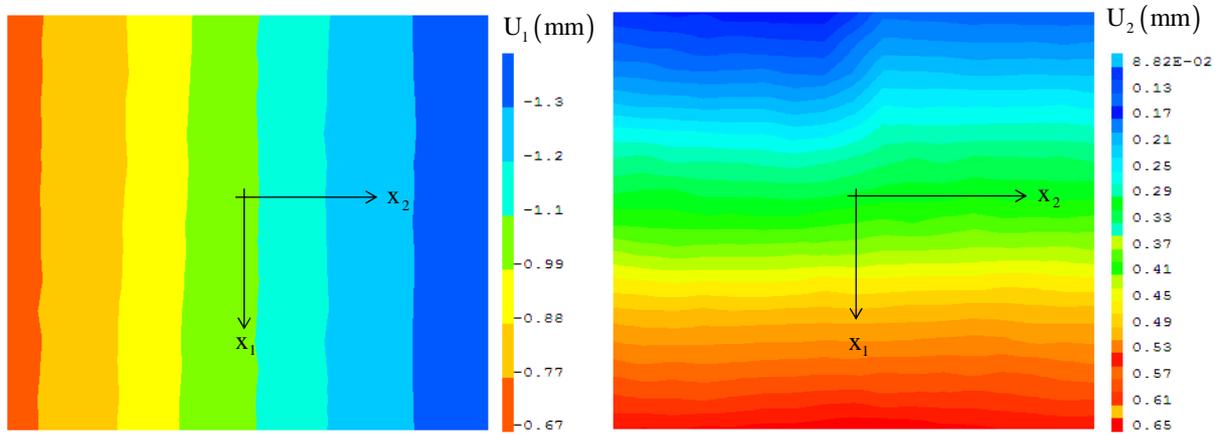


b2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 45^\circ$)

Figure 3.31 : Cartographies des champs de déplacement



c1. Champ de déplacement optimisé pour ($\beta = 75^\circ$)



c2. Champ de déplacement brut pour ($\beta = 75^\circ$)

Figure 3.32 : Cartographies des champs de déplacement

3.4.2.2 Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

A partir des champs optimisés, les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure sont calculés, Tableau 3.19.

Tableau 3.19 : Facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure pour différents taux de mixité

Taux de mixité	$K_I^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$	$K_{II}^{(\varepsilon)} (m^{1/2})$
15°	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$
45°	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$7,43 \cdot 10^{-4}$
75°	$6,91 \cdot 10^{-4}$	$6,58 \cdot 10^{-4}$

3.4.3 Couplage MEF/CIN

3.4.3.1 Facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité de contrainte sont déterminés en employant la méthode $M\theta$. Comme précédemment, les propriétés d'élasticités sont arbitraires. Elles sont pilotées par le module d'élasticité radial E_R , les autres composantes étant déterminées en accord avec les rapports d'orthotropie précisés dans les relations (3.8). Pour chaque mode, les facteurs d'intensité de contrainte $K_\alpha^{(\sigma)}$ sont donnés dans le Tableau 3.20.

Tableaux 3.20 : Facteurs d'intensité de contraintes pour différents taux de mixité

Taux de mixité	Force (N)	$K_I^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$	$K_{II}^{(\sigma)} (MPa \cdot m^{1/2})$
15°	277	0,14	0,11
45°	784	0,32	0,59
75°	876	0,16	0,52

3.4.3.2 Taux de restitution d'énergie et propriétés d'élasticité

Le taux de restitution d'énergie est calculé à partir du couplage entre l'approche cinématique en corrélation d'images (donnant les facteurs d'intensité d'ouverture) et l'approches statique par éléments finis qui a permis de fournir les facteurs d'intensité des contraintes. En utilisant l'équation (2.51), le taux de restitution d'énergie est décomposé en sa part de mode I et de mode II. Le Tableau 3.21 présente ces valeurs.

Tableau 3.21 : Taux de restitution d'énergie pour chaque part de mode de rupture.

Mode mixte	$G_I (J / m^2)$	$G_{II} (J / m^2)$
15°	10,5	2,02
45°	54,0	55,2
75°	14,2	42,9

La loi de comportement locale permet de coupler les facteurs d'intensité d'ouverture aux facteurs d'intensité des contraintes via les complaisances élastiques réduites. Ainsi, les deux complaisances élastiques réduites C_I et C_{II} sont calculées via l'équation 2.43. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.22. Nous pouvons observer une relative invariance des valeurs en fonction du taux de mixité. Ceci permet de valider une certaine robustesse de notre algorithme car les complaisances élastiques réduites sont intrinsèques au matériau et ne dépendent pas des configurations de chargement.

Tableaux 3.22 : Complaisances élastiques réduites

Mode mixte	$C_I (MPa^{-1})$	$C_{II} (MPa^{-1})$
15°	$4,22 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
45°	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
75°	$4,22 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$

A partir des valeurs des complaisances élastiques réduites, le module d'élasticité radiale en est déduit. De plus, les rapports d'orthotropie permettent de calculer le module longitudinal, de cisaillement ainsi que le coefficient de Poisson ν_{LR} . Pour chaque taux de mixité, le tableau 3.23 regroupe ces valeurs. L'ensemble des résultats est cohérent avec les données de Guitard. Ayant mesuré un taux d'humidité de 10%, nos résultats expérimentaux demeurent très proches.

Tableau 3.23 : Propriétés d'élasticité des échantillons de Douglas (MC=10%).

Mode mixte	E_R	E_L	G_{LR}	ν_{LR}
15°	1300MPa	14800MPa	963MPa	0,39
45°	1300MPa	14800MPa	967MPa	0,39
75°	1300MPa	14800MPa	963MPa	0,39
Données Guitard (9,5% H)	1370MPa	15600MPa	1020MPa	0,39

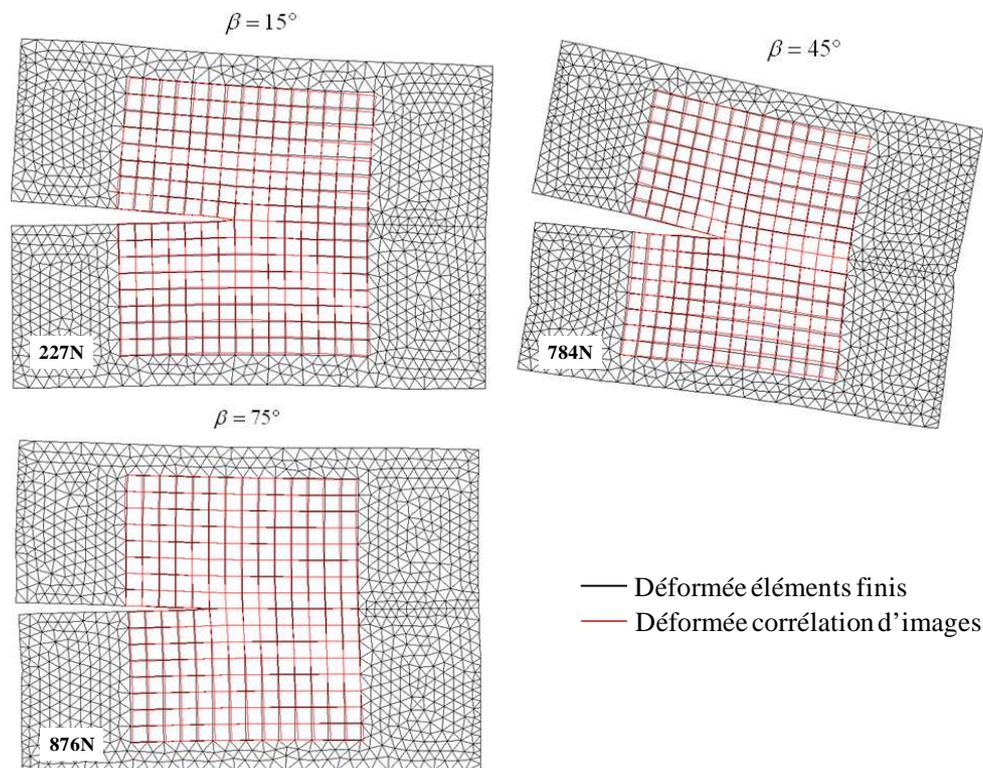


Figure 3.33 : Comparaison entre champs expérimentaux optimisés et calculs éléments finis

En introduisant les propriétés d'élasticité dans la modélisation par éléments finis, la Figure 3.33 présente une comparaison des déformées issues par le modèle numérique et l'expérimentation. Comme pour les cas précédents, nous pouvons remarquer une bonne correspondance entre les deux déformées.

Conclusions

La méthodologie, basée sur le couplage entre expérimentation par corrélation d'images et modélisation numérique, a été appliquée avec succès à l'analyse de la fissuration dans le cas des milieux élastiques isotrope et orthotrope fissurés pour des configurations de sollicitation en mode d'ouverture et mixte. Cette technique hybride a permis de définir les propriétés de fissuration, notamment le taux de restitution d'énergie à travers la combinaison des facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure et les facteurs d'intensité des contraintes.

Les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure ont été déterminés grâce à la corrélation entre champs de déplacements expérimentaux (par corrélation d'images numériques) et optimisés par une forme asymptotique de Williams.

Une modélisation par éléments finis des essais en mode d'ouverture et en mode mixte a permis de donner une bonne estimation des facteurs d'intensité des contraintes, et ce, à force imposée. La distribution des contraintes, dans le voisinage de la pointe de fissure, est alors définie en faisant abstraction des propriétés d'élasticité du matériau.

Le couplage entre facteurs d'intensité d'ouverture de fissure expérimentaux et facteurs d'intensité de contrainte numériques permet de calculer, d'une part, le taux de restitution d'énergie et, d'autre part, de faire une estimation assez précise des propriétés d'élasticité via le calcul des complaisances élastiques réduites.

Conclusions générales et perspectives

Dans ce travail, nous avons développé une nouvelle méthodologie basée sur le couplage entre corrélation d'images numériques et méthode des éléments finis pour étudier la problématique de fissuration dans les milieux élastiques isotrope et orthotrope en configuration de modes d'ouverture et mixte. En effet, étant donné qu'une étude expérimentale ou numérique seule ne permet pas d'appréhender correctement les phénomènes de fissuration, nous n'avons pas considéré ces approches comme concurrentes mais plutôt complémentaires en vue d'analyser les champs mécaniques et énergétiques dans le voisinage du front de fissure.

Une étude préliminaire, élaborée dans le chapitre 1, a permis de fixer le cadre de travail de cette thèse en présentant les techniques développées en mécanique de la rupture pour appréhender les phénomènes de rupture des matériaux. Il ressort de cette étude trois notions importantes qui ont été mises en évidence dans le processus de fissuration. Il s'agit notamment :

- **Des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure** pouvant donner une image cinématique des cinétiques d'ouverture de la fissure.
- **Les facteurs d'intensité des contraintes** pouvant caractériser l'amplitude en contrainte de la singularité en pointe de fissure.
- **Le taux de restitution d'énergie** caractérisant l'état énergétique en pointe de fissure et, plus précisément, la quantité d'énergie restituée durant le processus de fissuration.

En s'appuyant sur les définitions de ces paramètres, l'analyse expérimentale, basée sur la technique de la corrélation d'images numériques, a permis la détermination des facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure par l'entremise d'une approche cinématique. Le bruit expérimental, inhérent aux mesures, a été contourné par l'utilisation d'une solution asymptotique de Williams respectant un ajustement avec les données expérimentales. Cette corrélation a été effectuée à travers une procédure d'optimisation faisant appel à la méthode itérative non linéaire de Newton-Raphson permettant de localiser, de façon précise, le front de fissure dont dépendent fortement les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure. Ce travail, nous a permis de mettre en évidence une relation entre facteurs d'intensité d'ouverture de la fissure et les premiers coefficients de pondération de la série asymptotique de Williams. En outre, il a été montré que la solution analytique asymptotique de Williams, généralement employée pour analyser les champs mécaniques isotropes, peut représenter correctement les champs mécaniques orthotropes issus de l'expérimentation.

Parallèlement à l'approche expérimentale, la méthode des éléments finis a été employée, de façon complémentaire, afin de caractériser l'état mécanique singulier en contrainte à travers la détermination des facteurs d'intensité de contrainte. Si nous admettons que l'état de

contrainte ne dépend que des conditions aux limites imposées en force et de la géométrie des éprouvettes fissurées, nous en déduisons que les facteurs d'intensité de contraintes peuvent être déterminés indépendamment des propriétés d'élasticité du milieu. Ainsi, sans connaissance de la loi de comportement mécanique locale, les facteurs d'intensité des contraintes ont été obtenus par le biais des invariants intégraux.

Le chargement en force a été déterminé grâce à une technique de synchronisation entre données machine et images enregistrées. L'indépendance des facteurs d'intensité des contraintes vis-à-vis des propriétés mécaniques intrinsèques a été mise en évidence aussi bien pour les milieux fissurés isotrope (cas du PVC) qu'orthotrope (cas du Douglas). Pour le cas d'un milieu orthotrope, cette indépendance n'est valable que pour un rapport d'orthotropie donné.

Une dernière partie de l'étude a été consacrée à la caractérisation de l'énergie de fissuration en termes de taux de restitution d'énergie. Une originalité de ce travail est la mise en exergue de la complémentarité entre facteurs d'intensité d'ouverture de fissure et les facteurs d'intensité des contraintes afin de définir l'énergie de fissuration en modes d'ouverture, de cisaillement et mixte. La conséquence de cette complémentarité a abouti à la mise en place d'un algorithme de caractérisation des propriétés mécaniques intrinsèques des matériaux. Une application de cette technique hybride aux cas du PVC et du Douglas a montré l'efficacité de la méthode.

Dans ce travail de thèse, l'approche développée est appliquée à un comportement élastique isotrope et orthotrope. Le contournement des propriétés d'élasticité, dans le calcul des propriétés de fissuration, permet d'envisager, en perspective de ce travail, des applications pour d'autres types de comportement comme la viscoélasticité, la plasticité ou l'endommagement. Dans ce dernier cas, l'approche pourra être employée afin de caractériser la zone endommagée en pointe de fissure.

L'ensemble de l'étude présentée suppose une fissure stationnaire sans propagation. L'algorithme permettant de détecter au mieux la position de la pointe de fissure, il est largement envisagé d'introduire l'aspect temporel dans l'analyse d'images afin de caractériser l'évolution de la propagation de fissure en fonction du temps. Dans ce cas, le calcul du taux de restitution d'énergie critique permettra de quantifier les effets de process zone au voisinage de la pointe de fissure. Pour des configurations de mode mixte, l'outil développé permettra enfin d'affiner les critères de propagation de fissure.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABANTO-BUENO, J., LAMBROS J., 2002.
Investigation of crack growth in functionally graded materials using digital image correlation.
Eng. Fract. Mech. 69, 1695-1711.
- AKOURRI, O., LOUAH, M., KIFANI, A., GILGERT, G., PLUVINAGE, G., 2000.
The effect of notch radius on fracture toughness J_{Ic} .
Engineering Fracture Mechanics 65 (4), 491–505.
- ALBUQUERQUE E., SOLLERO P., ALIABADI M., 2004.
Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 59, p. 1187- 1205.
- ALMEIDA A.G., 1984.
Durée de vie en fissuration d'un matériau viscoélastique linéaire orthotrope: le bois.
Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- ANDERSON, T.L., 1995.
Fracture Mechanics. CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- ATLURI S. N., KOBAYASHI A. S., 1993.
Mechanical response of materials.
In handbook on experimental mechanics, Prentice-Hall, 1-37.
- ARAKAWA K., DRINNON R.H., KOSAI M., KOBAYASHI, A.S., 1991.
Dynamic Fracture Analysis by Moiré Interferometry,
Experimental Mechanics, 31 (4), 306-309.
- ATTIGUI M., PETIT C., 1997.
Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics: New path independent integrals.
International Journal of Fracture 84: 19–36.
- ATTIGUI M., 1997.
Modélisation du comportement dynamique des structures fissurées par la mécanique de la rupture.
Thèse de doctorat de l'Université de Limoges.
- AVRIL, S., VAUTRIN, A., SURREL, Y., 2004.
Grid method : Application to the characterization of cracks.
Experimental Mechanics 44 (1), 37–43.
- BABUSKA I., MELENK J., 1997.
The Partition of unity method.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 40, p. 727-758.

- BANKS-SILLS L., DOLEV O., 2004.
The conservative M -integral for thermal-elastic problems.
International Journal of Fracture 125: 149–170.
- BARSOUM R. S., 1974.
On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics.
International journal for Numerical Methods in Engineering, vol., 10, n° 1, 1974, p.25-37.
- BEGUELIN, P., FOND, C., KAUSCH, H., H. Jan., 1998.
The Influence of Inertial Effects on the Fracture of Rapidly Loaded Compact Tension Specimens Part A : Loading and Fracture Initiation.
International Journal of Fracture 89 (1), 85–102.
- BELYTSCHKO, T., BLACK, T., 1999.
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.
International Journal for Numerical Methods in Engineering 45 (5), 601–620.
- BELYTSCHKO T., LU Y., GU L., 1994.
Element-free Galerkin methods.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, p. 229-256.
- BESNARD G., HILD F., ROUX S., 2006.
“Finite-Element” Displacement Fields Analysis from Digital Images: Application to Portevin–Le Châtelier Bands.
Experimental Mechanics, 46: 789–803, DOI 10.1007/s11340-006-9824-8.
- BITTENCOURT T., WAWRZYNEK P., INGRAFFEA A. 1996.
Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2-D LEFM problems.
Engineering Fracture Mechanics vol. 55, p. 321-334.
- BLACK T., BELYTSCHKO T., 1999.
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 45, p. 601-620.
- BOYANCE, P., 1999.
Modélisation de la rupture différée d’un matériau orthotrope viscoélastique en environnement naturel: application à un composite à base de bois, le LVL.
Thèse, Université Bordeaux I.
- BOUCHARD P. O., BAY F., CHASTEL Y., 2003.
Numerical modeling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 192, p. 3887-3908.
- BOUCHARD P. O., BAY F., CHASTEL Y., TOVENA I., 2000.
Crack propagation modeling using an advanced remeshing technique.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 189, p. 723-742.

- BROCHARD J., SUO X.Z., 1994.
Le taux de restitution d'énergie G en mécanique de la rupture non –linéaire, formulation de la méthode $G\Theta$ et description de la programmation dans CASTEM 2000.
Rapport DMT/94-640 du C.E.A. Novembre 1994.
- BRUCK, H. A., McNEIL, S. R., SUTTON, M. A. PETERS, W. H., 1989.
Digital Image Correlation Using Newton-Raphson Method of Partial Differential Correction. *Experimental Mechanics*, 29(3), 261-267.
- BUDIANSKY, B., RICE, J. R., 1973.
Conservation laws and energy release rate.
J. Appl. Mech. 40, 201-203.
- BUI H. D., PROIX J. M., 1985.
Découplage des modes mixtes de rupture en thermo-élasticité par des intégrales indépendantes du contour.
Actes du Troisième Colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structure, Bastia 631–643.
- BUI, H. D., 1978.
Mécanique de la rupture fragile. Masson.
- CAMACHO G., ORTIZ M., 1996.
Computational modeling of impact damage in brittle materials.
International Journal of Solids and Structures vol. 33, p. 1267-1282.
- CARIN T., 2000.
Modélisation de la propagation dynamique de fissure.
Thèse, école Nationale des Ponts et Chaussées.
- CASTEM 2000, Notice d'utilisation, 1993 ; 1996.
- CAUMES P., 1987.
Rupture d'un matériau anisotrope en conditions polymodales (le bois).
Thèse de l'Université Bordeaux I, 128 p.
- CHAZAL C., DUBOIS F., 2001.
A New Incremental Formulation in the Time Domain for Crack Initiation in an Orthotropic Linearly Viscoelastic Solid.
Mechanics of Time-Dependent Materials 5: 229–253.
- CHANG J. H., CHIEN A. J., 2002.
Evaluation of M-integral for anisotropic elastic media with multiple defects.
International Journal of Fracture 114 : 267-289.
- CHEN J., ZHANG, X., ZHAN N., HU X., 2010.
Deformation measurement across crack using two-step extended digital image correlation method.
Opt Laser Eng, doi: 10.1016/j.optlaseng.2009.12.017.

- CHEN F. H. K., SHIELD R. T., 1977.
Conservation laws in elasticity of the J-integral type.
Journal of Applied Mechanics and Physics 28 1–22.
- CHIRINO F., GALLEGO R., SAEZ A., DOMINGUEZ J. A., 1994.
Comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems.
Engineering Analysis with Boundary Elements vol. 13, p. 11-19.
- CHOW C.L., WOO C.W., 1979.
Orthotropic and mixed-mode fracture in wood. In: Proceed.
1st International Conference of Wood Fracture, Vancouver : 39-52.
- COOREMAN S.,
Identification of the plastic material behavior through full-field displacement measurements and inverse methods.
PhD thesis, *Mechanica van Material en Constructies, Faculteit Ingenieurswetenschappen*.
- COOREMAN S., LECOMPTE D., SOL H., VANTOMME J., DEBRUYNE D., 2007.
Elastoplastic material parameter identification by inverse methods: Calculation of the sensitivity matrix.
International Journal of Solids and Structures, Vol. 44: 4329-4341.
- COUREAU, J. L., MOREL, S., GUSTAFSSON, P. J., LESPINE, C., 2006.
Influence of the fracture softening behavior of wood on load-COD curve and R-curve.
J. of Materials and Structures 40:97–106 DOI 10.1617/s11527-006-9122-z.
- DESTUYNDER, P., 1983.
Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique.
J. Méc. Théor. Appl. 2, 113–135.
- DESTUYNDER, P., DJAOUA M., 1981.
Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de RICE en théorie de la rupture fragile.
Mathe. Meth. In the Appl. Sc., Vol. 3, pp. 70-87.
- DESTUYNDER, P., 1982.
Sur la propagation de fissure dans les plaques minces en flexion.
Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 1, N°4, pp. 579-594.
- DOLBOW, J., MOËS, N., BELYTSCHKO, T., 2001.
An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (51), 6825–6846.
- DUARTE, C., HAMZEH, O., LISZKA, T., TWORZYDLO, W., 2001.
A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190, 2227–2262.

- DUBOIS F., MEITE M., POP O., ABSI J., 2012.
Hybrid approach of timber fracture using DIC technique and Finite Element Method, soumission dans la revue : *Engineering Fracture Mechanics*.
- DUBOIS F., POP O., MEITE M., PETIT C., ABSI J., MOUTOU PITTI R., 2009.
Numerical and experimental approach for crack growth in wood. Experimental and Computational Methods in Wood Micromechanics (COST Action FP080), Vienna, Austria, May 11-13, 2009.
- DUBOIS F., PETIT C., 2005.
Modeling of the crack growth initiation in viscoelastic media by the $G\Theta$ -integral. *Engineering Fracture Mechanics* 72: 2821–2836.
- DUBOIS F., CHAZAL C., PETIT C., 2002.
Viscoelastic crack growth process in wood timbers: an approach by the finite element method for mode I fracture. *Int. J. Fract.*; 113:367–88.
- DUBOIS F., CHAZAL C., PETIT C., 1999.
Modeling of crack growth initiation in a linear viscoelastic material. *J. Theor. Appl. Mech.*; 37:207–22.
- DUBOIS F., 1997.
Modélisation du comportement mécanique des milieux viscoélastiques fissurés: Application au matériau bois.
Thèse Université de Limoges.
- DUBOIS F., PETIT C. GHAZLAN G., 1996a.
Numerical approach in viscoelastic fracture mechanics.
Proc. ECF 11, Mechanisms and mechanics of damage and failure, Vol. 1, pp. 473- 478, Poitier.
- DUBOIS F., PETIT C., GHAZLAN G., NOUAILLES A., 1996b.
Propagation de fissures dans le bois sous charges permanentes: Expérimentation et modélisation.
4ème Coll. des Sci. et Ind. du bois, pp. 453-460.
- DUFLOT M., NGUYEN-DANG H., 2004.
A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 59, p. 1945-1961.
- ELGUEDJ T., 2006.
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement.
Thèse de doctorat, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,
- EISCHEN, J. W., HERRMANN, G., 1987.
Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics.
J. Appl. Mech. 54, 388- 392.

- ESHELBY J. D., 1987.
In Fracture Toughness, Iron and Steel Institute Publication.
Int Journ of Fracture 34.
- ESHELBY J. D., 1968.
Stress analysis: elasticity and fracture mechanics, ISI publ. 121, 13-48.
- FEDELE R., RAKA B., HILD F., ROUX S., 2009.
Identification of adhesive properties in GLARE assemblies using Digital Image Correlation.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 57, 1003-1016.
- FINEBERG, J., GROSS, S. P., MARDER, M., SWINNEY, H. L., 1991.
Instability in Dynamic Fracture.
Physical Review Letters 67 (4), 457–460.
- FLEMING M., CHU Y., MORAN B., BELYTSCHKO T., 1997.
Enriched element free Galerkin methods for singular fields.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 40, p. 1483-1504.
- FOTTENBURG, W. G., 1969.
Some Applications of Holographic Interferometry.
Experimental Mechanics, 8, 281-285.
- FRACTURE, 1969.
Edited by H. LIEBOWITZ (Academic Press) Vol.5, chap.1.
- FREUND, L. B., 1978.
Stress-intensity factor calculations based on a conservation integral.
Int. J. Solids Struct. 14, 241 250.
- GAO X., KANG X.W., WANG H.G., 2009.
Dynamic crack tip fields and dynamic crack propagation characteristic of anisotropic material.
Theoretical and Applied Mechanics 51 73-85.
- GRAVOUIL, A., MOËS, N., BELYTSCHKO, T., 2002.
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II : Level set update.
International Journal for Numerical Methods in Engineering 53, 2569–2586.
- GREGOIRE, D., MAIGRE, H., RETHORE, J., COMBESCURE, A., 2007.
Dynamic crack propagation under mixed-mode loading - Comparison between experiments and XFEM simulations.
International Journal of Solids and Structures 44 (20), 6517–6534.
- GRÉGOIRE D., 2008.
Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissure sous impact.
Thèse de doctorat, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

- GRIFFITH, A., 1924.
The theory of rupture.
Proc. 1st inter. Congress Appl. Mech. P55-63. Biezeno. Burgers Ed. Waltman (1925).
- GRIFFITH, A., 1921.
The phenomena of rupture and flow in solids.
Phil. Trans. Roy. Soc. London A221, 163 – 197.
- GUSTAFSSON J., LARSEN H. J., 1989.
Design of end notched beams, CIB paper W18A/22-10-1, Berlin.
- GUYON G., 1987.
Prévisions de la rupture différée du pin maritime en flexion.
Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- HAMAM R., HILD F., ROUX S., 2007.
Stress Intensity Factor Gauging by Digital Image Correlation: Application in Cyclic Fatigue.
Strain, 43, 181–192.
- HERMANN, A. G., HERMANN, G., 1981.
On energy release rates for a plane crack.
J. Appl. Mech. 48, 525 528.
- HILD F., ROUX S., 2006.
Measuring stress intensity factors with a camera: Integrated digital image correlation (I-DIC).
Comptes Rendus Mécanique, 334(1), 8-12.
- HOOKE R., De potentia restitua. Royal Society, 1663.
- IRWIN G.R., 1957.
Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate.
Journal of Applied Mechanics, 24, 361-364.
- IRWIN G.R., 1962.
Analytical aspects of crack stress field problems.
TAM Report no. 213, University of Illinois, Urbana, IL.
- JAHNE, B., 2002.
Digital image processing. Springer, Berlin, Germany, 5th edition.
- JOHN SHORT., 1987.
A Physical Interpretation of the M-Integral for a GRIFFITH Crack.
International Journal of Fracture 34:R23-R26.
- JU S.H., LIU S.H., LIU K.W., 2006.
Measurement of stress intensity factors by digital camera.
International Journal of Solids and Structures 43 1009-1022.

- JU, J. W., CHEN, T. M., 1994.
Effective elastic moduli of two-dimensional brittle solids with interacting microcracks.
Part I: Basic formulations.
J. Appl. Mech. 61, 349-357.
- JU, J. W., CHEN, T. M., 1994.
Effective elastic moduli of two-dimensional brittle solids with interacting microcracks.
Part II: Evolutionary damage models.
J. Appl. Mech. 5,1, 358-366.
- KALTHOFF J.E., 1987.
Shadow Optical Method of Caustics.
Handbook on Experimental Mechanics, Ch. 9, ed. A.S. Kobayashi, Prentice Hall,
Englewood Cliffs, NJ.
- KANNINEN, M., 1974.
A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen.
International Journal of Fracture 10 (3), 415–430.
- KARIHALOO B.L., ABDALLA H., XIAO Q.Z., 2003.
Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge-splitting specimen.
Engineering Fracture Mechanics. 70: 2407-20.
- KARIHALOO B.L., XIAO Q.Z., 2001.
Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen.
International Journal of Fracture. 112: 129-37.
- KARIHALOO B.L., XIAO Q.Z., 2001.
Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam.
International Journal of Fracture., 112: 111-28.
- KING, R. B., HERMANN, G., 1981.
Non-destructive evaluation of the J and M-integrals.
J. Appl. Mech. 48, 83-87.
- KNOWLES, J.K., STERNBERG, E., 1972.
On the class of conservation laws in linearized and finite elastostatics.
Arch. Rat. Mech. Anal. 44, 187-211.
- KOBAYASHI, A., SEO, K., JOU, J., URABE, Y., 1980.
A dynamic analysis of modified compact-tension specimens using homalite-100 and polycarbonate plates.
Experimental Mechanics 20 (3), 73–79.
- KOBAYASHI A., EMERY A., MALL S., 1976.
Dynamic finite element and photoelastic analyses of two fracture Homalite-100 plates.
Experimental Mechanics vol. 13, , p. 841-850.

- KOKALY, M., LEE, J., KOBAYASHI, A., 2003.
Moiré interferometry for dynamic fracture study.
Optics and Lasers in Engineering 40 (4), 231–247.
- KOKALY, M., LEE, J., KOBAYASHI, A., 2001.
Dynamic ductile fracture of 7075-T6—an experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures* 38 (10-13), 1935–1942.
- KOLLMANN, F., 1951 (Reprint 1982).
Technologie des Holzes.
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York.
- KRYSL P., BELYTSCHKO T., 1999.
Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 44, no 6, p. 767-800.
- LARRICQ P., 1992.
Une méthode d'estimation des caractéristiques de rupture différée d'un matériau viscoélastique orthotrope: application au bois.
Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- LECOMPTE, D., 2007.
Elastic and Elasto-Plastic Material Parameter Identification by Inverse Modeling of Static Tests Using Digital Image Correlation.
PhD thesis, Royal Military Academy & Vrije Universiteit Brussel, Brussels, Belgium.
- LECOMPTE, D., SMITS A., Sol H., VANTOMME J., VAN HEMELRIJCK D., 2007.
Mixed Numerical-Experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tests on cruciform specimens.
International Journal of Solids and Structures, Vol. 44: 1643-1656.
- LECOMPTE, D., VANTOMME, J., Sol, H. 2006.
Crack detection in a concrete beam using two different camera techniques.
Structural Health Monitoring an international journal, Vol. 5:59-68.
- LEITAO V., ALIABADI M., ROOKE D., 2000.
Boundary element methods for the analysis of crack growth in non – linear fracture.
International Journal of Materials and Product Technology, vol. 16, n° 1-2, p. 104-116.
- LEITAO V., ALIABADI M., ROOKE D., 1995.
Elastoplastic simulation of fatigue crack growth – Dual boundary element formulation.
International Journal of Fatigue, vol. 17, n° 5, p. 353-363.
- LEMAITRE J., CHABOCHE J., 1996.
Mécanique des matériaux solides.
Dunos, paris 2ième edition, 544p.
- LIEBOWITZ H., EFTIS J., 1971.
On non-linear effect in fracture mechanics,
Eng. Fract. Mech., pp. 267-281.

LOPEZ-CRESPO P., BURGUETE R.L., PATTERSON E.A., SHTERENLIKHT A., WITHERS P.J., YATES J.R., 2008.

Study of a Crack at a Fastener Hole by Digital Image Correlation,
Experimental Mechanics DOI 10.1007/s11340-008-9161-1.

LUO P-F., HUANG F.C., 2003.

An experimental study on the mixed-mode crack tip deformation fields in polymethyl methacrylate.

J. Strain Analysis, Vol. 38, No. 4.

MA S., ZHANG X. B., RECHO N., Li J., 2006.

The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen », *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, pp. 1780-1790.

MA L. F., CHEN Y. H., LIU C. S., XI'AN, CHINA, 2001.

On the relation between the M-integral and the change of the total potential energy in damaged brittle solids.

Acta Mechanica 150, 79-85.

MACHIDA K., SUZUKI Y., 2006,

Examination of the accuracy of the singular stress fields near a crack tip by Digital Image Correlation.

Key Engineering Materials. Vol. 321-323 pp. 32-37.

MAIGRE, H., RITTEL, D., 1993.

Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation : Application to the compact compression specimen.

International Journal of Solids and Structures 30 (23), 3233–3244.

MAIGRE H., 1990.

Contribution théorique à l'identification des grandeurs caractéristiques en mécanique de la rupture dynamique.

Thèse de doctorat, école Polytechnique.

MCCLUNG R., SEHITOGLU H., 1989a.

On the finite element analysis of fatigue crack closure – 1. Basic modeling issues. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 33, n° 2, p.237-252.

MCCLUNG R., SEHITOGLU H., 1989b.

On the finite element analysis of fatigue crack closure – 2. Numerical results.

Engineering Fracture Mechanics, vol. 33, n° 2, p.253-272.

McNEIL S., PETERS W., SUTTON M. (1987),

Estimation of stress intensity factors by digital image correlation.

Engineering Fracture Mechanics, 28(1), 101-112.

MEITE M., DUBOIS F., POP O., ABSIJ., 2012.

Mixed-mode fracture properties characterization for wood by digital images correlation and finite element method coupling;

soumission dans la revue : *Engineering Fracture Mechanics*.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2012.

A global-local approach characterization of mixed-mode by coupling full field optical method and finite element method;
soumission dans la revue : *International Journal of Fracture*.

MEITE M., DUBOIS F., POP O., ABSI J., 2012.

Mixed-mode fracture properties characterization for timber structure through digital images correlation and finite element method coupling process.
World Conference on Timber Engineering (WCTE), Auckland, New Zealand, July 16-19, 2012.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2012.

Experimental and FE Analysis of Invariant Integral in Wood Specimen Using the Full Field Optical Technique.
World Conference on Timber Engineering (WCTE), Auckland, New Zealand, July 16-19, 2012.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2011

Mixed-Mode Crack Tip Parameters Characterization from Image Correlation Technique.
20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre 2011.

MEITE M., 2011.

Analyse des champs mécaniques dans les milieux fissurés.
29èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil, Tlemcen, Algérie du 29 au 31 Mai 2011, participation au concours jeune chercheur pour le prix René Houpert.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2010.

Evaluation of Mixed-mode Integral Invariant for Polymer Material Through The Couple Experimental-Numerical Process.
14th International Conference on Experimental Mechanics (ICEM14), Poitiers, France, July 4 (Sunday) - 9 (Friday).

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2010.

Experimental and FE analysis of invariant integral in wood specimen using the full field optical technique.
June 20-24, Riva del Garda, Trentino, Italy.

MEITE M., MOUTOU PITTI R., POP O., DUBOIS F., 2010.

Experimental study of mixed-mode crack growth in wood specimen.
The 7th International Conference "Wood Science and Engineering in the Third Millennium" ICWSE 2010 "TRANSILVANIA" University, Brasov, Romania.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., 2010.

Mixed mode fracture characterization using digital image correlation in wood.
3rd International Conference on Recent Advances in Composite Materials (ICRACM2010), December 13-15, 2010, Limoges, France.

MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2010.

Caractérisation mécanique et énergétique des milieux fissurés orthotropes.
28èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil La Bourboule du 2 au 4 juin 2010.

- MEITE M., POP O., DUBOIS F., PETIT C., ABSI J., 2009a
 Caractérisation des milieux fissurés utilisant des techniques optiques de mesures :
 approche expérimentale et numérique.
 AUGC, 27eme Rencontre Universitaire de Génie Civil, Saint Malo, 3-5 Juin.
- MEITE M., POP O., DUBOIS F., ABSI J., 2009b
 Evaluation of the integral invariants by optical techniques: Experimental and numerical
 approaches.
 19ème Congrès Français de Mécanique Marseille, 24-28 août.
- MENOUILLARD, T., RETHORE, J., COMBESCURE, A., BUNG, H., 2006.
 Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM).
International Journal for Numerical Methods in Engineering 68 (9), 911–939.
- MOËS, N., BELYTSCHKO, T., 2002.
 Extended finite element method for cohesive crack growth.
Engineering Fracture Mechanics 69 (7), 813–833.
- MOËS N., DOLBOW J., BELYSCHKO T., 1999.
 A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for
 Numerical Methods in Engineering* vol. 46, no 1, p. 133-150.
- MOGADPALLI G.P., PARAMESWARAN V., 2008.
 Determination of stress intensity factor for cracks in orthotropic composite materials using
 digital image correlation.
Strain, 44, 446-452.
- MOUTOU PITTI R., 2008.
 Découplage des modes de rupture dans les matériaux viscoélastiques orthotropes :
 modélisation et expérimentation.
 Thèse de doctorat de l'Université de Limoges.
- MOUTOU PITTI R. DUBOIS F., PETIT C., SAUVAT N., POP O., 2008.
 A new M-Integral parameter for mixed-mode crack growth in orthotropic viscoelastic
 material.
Eng. Fract. Mech. Doi: 10.1016/j.engfractmech. 2008.04.021.
- MOUTOU PITTI R., DUBOIS F., PETIT C., 2008a.
 Généralisation des intégrales T et A à la viscoélasticité.
Comptes Rendus Mécanique, Vol. 336, No 6, pp. 545-551.
- MOUTOU PITTI R., DUBOIS F., PETIT C., SAUVAT N., POP O., 2008b.
 A new integral parameter for mixed-mode crack growth in viscoelastic orthotropic media»,
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 75, No 15, pp. 4450-4465.
- MOUTOU PITTI R., DUBOIS F., POP O., 2008c.
 Nouvelle approche expérimentale et numériques pour le découplage des modes de rupture
 dans le bois. Variations dimensionnelles des Géomatériaux.
 GEODIM'08, Saint-Nazaire, 2-4, Avril.

- MOUTOU PITTI R., DUBOIS F., PETIT C., SAUVAT N., 2007.
Mixed mode fracture separation in viscoelastic orthotropic media: numerical and analytical approach by the $M\theta\nu$ -integral.
Int J Fract 145:181–193.
- MOREL, S., 1998.
Effet d'échelle dans la rupture d'un matériau hétérogène (le bois).
Thèse de doctorat de l'université Bordeaux I.
- MORAN B., SHIH C. F., (1987).
Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance.
Eng. Fract. Mech., Vol. 27 N°6, pp. 615-642.
- MURPHY, N., ALI, M., IVANKOVIC, A., 2006.
Dynamic crack bifurcation in PMMA.
Engineering Fracture Mechanics 73 (16), 2569–2587.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1933),
Some basic problem of mathematical theory of elasticity.
English translation, Noordhoff.
- NGUYEN O., REPETTO E., ORTIZ N., RADOVOTZKY R., 2001.
A cohesive model for fatigue crack growth.
International Journal of Fracture, vol. 110, p. 351-369.
- NIGAM H., SHUKLA A., 1988.
Comparison of the Techniques of Caustics and Photoelasticity as Applied to Fracture.
Experimental Mechanics, 28 (2), 123-131.
- NIKISHKOV G. P., ATLURI S. N., 1987.
An Equivalent Domain Integral Method for Computing Crack-Tip Integral Parameters in Non-Elastic Thermo-Mechanical Fracture.
Eng. Fract. Mech. 26: 851-867.
- NISHIMURA, T., 2005.
Experimental and numerical evaluation of crack arresting capability due to a dimple.
Journal of Engineering Materials and Technology 127 (2), 244–250.
- NISHIOKA T., TOKUDOME H., KINOSHITA M., 2001.
Dynamic fracture-path prediction in impact fracture phenomena using moving finite element method based on Delaunay automatic mesh generation.
International Journal of Solids and Structures, vol. 38, p. 5273-5301.
- NOETHER E., 1918.
Invariant variations-problem.
Transport Theory and Statistical Physics 1(3) 183–207.

- OKADA, H., ATLURI, S. N., 1999.
Further studies on the characteristics of the T_{ϵ}^* integral: plane stress stable crack propagation in ductile materials.
Computational Mechanics 23, 339-352.
- OMORI Y., KOBAYASHY A. S., OKADA H., ATLURI S. N. , TAN P. W., 1998.
 T_{ϵ}^* integral as a crack growth criterion.
Mechanics of Materials 28 147-154.
- ORGAN D., 1996.
Numerical Solutions to Dynamic Fracture Problems Using the Element-Free Galerkin Methods.
Thèse Northwestern University.
- ORTIZ M., PANDOLFI A. 1999.
Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack propagation analysis.
International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 44, p. 1267-1282.
- OWEN, D. M., ZHUANG, S., ROSAKIS, A. J., RAVICHANDRAN, G., 1998.
Experimental determination of dynamic crack initiation and propagation fracture toughness in thin aluminium sheets.
International Journal of Fracture 90, 153–174.
- OWEN D.R.J., FAWKES A.J., 1983.
Engineering fracture mechanics : numerical methods and applications.
Swansea, UK: Pineridge Press.
- PAN B., ASUNDI A., XIE H., GAO J., 2009.
Digital image correlation using iterative least squares and pointwise least squares for displacement field and strain field measurements.
Optics and lasers in Engineering 47: 865-874.
- PLUVINAGE G., 1992.
La rupture du bois et de ses composites.
Cepadues –éditions. N° éditeur 313.
- POP O., MEITE M., DUBOIS F., ABSI J., 2011.
Identification algorithm for fracture parameters by combining DIC and FEM approaches.
International Journal of Fracture 170:101–114 ; DOI 10.1007/s10704-011-9605-y.
- POST, D., 1983.
Moiré Interferometry at VPI and SU.
Experimental Mechanics, 23(2), 203-210.
- PRABEL, B., 2007.
Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP.
Ph.D. Thesis, INSA-LYON.

- PRABEL, B., COMBESURE, A., GRAVOUIL, A., MARIE, S., 2007.
Level set X-FEM non-matching meshes : Application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media.
International journal for numerical methods in engineering 69 (8), 1553–1569.
- PRATT, W., 1991.
Digital image processing. Wiley.
- RABCZUK T., BELYTSCJKO T., 2004.
Cracking particles : a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 61, p. 2316-2343.
- RAO B., RAHMAN S., 2004.
An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, p. 197-223.
- RAMESH K., GUPTA S. KELKAR A. A., 1997,
Evaluation of stress fields parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited,
Engineering Fracture Mechanics, 56 (1), 25-45.
- RASTOGI, P.K, 2000.
Photomechanics, vol 77., Springer, Berlin Heidelberg New York, (ed).
- RAMULU M., KOBAYASHI A.S., KANG B.S.J., 1984.
Dynamic Crack Branching-A, Photoelastic Evaluation, Fracture Mechanic:
15th Symposium, ed. R.J. Sanford, ASTM STP 833, 130-148.
- RAMULU M., KOBAYASHI A.S., KANG B.S.J., 1983.
Dynamic Crack Curving—A, Photoelastic Evaluation.
Experimental Mechanics, 23 (1), 1-9.
- RHETORE J., ROUX S., HILD F., 2010.
Mixed-mode crack propagation using a Hybrid Analytical and eXtended Finite Element Method.
Comptes Rendus Mécanique; 338(3):121-126.
- RHETORE J., ROUX S, HILD F., 2010.
Hybrid analytical and extended finite element method (HAX-FEM): A new enrichment procedure for cracked solids.
Int. J. Numer. Meth. Engng; **81**:269–285.
- RHETORE J., ROUX S., HILD F., 2009.
An extended and integrated digital image correlation technique applied to analysis fractured samples.
European Journal of Computer Mechanic; 18:285-306.
- RHETORE J., HILD F., ROUX S., 2008.
“Extended digital image correlation with crack shape optimization”,
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 73 248-72.

- RHETORE J., BESNARD G., VIVIER G., HILD F., ROUX S., 2008.
Experimental investigation of localized phenomena using digital image correlation.
Philosophical Magazine, 88(28–29):3339–3355.
- RHETORE J., HILD F., ROUX S., 2007.
Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; **196**(49–52):5016–5030.
- RHETORE J., ROUX S., HILD F., 2006.
Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements,
Engineering Fracture Mechanics; 75:3763–3781.
- RETHORE J., 2005.
Méthode éléments finis étendus en espace et en temps :Application à la propagation dynamique des fissures.
Thèse de doctorat, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- RETHORE J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A., 2005a
An Energy Conserving Scheme for Dynamic Crack Growth with the eXtended Finite Element Method.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 63, no 5, p. 631-659.
- RETHORE J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A., 2005b.
A combined space time eXtended Finite Element Method.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, to appear.
- RETHORE J., GRAVOUIL A., MORESTIN F., COMBESCURE A., 2005c.
Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral.
International Journal of Fracture, vol. 132, no 1, p. 65-79.
- RETHORE J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A., 2004.
A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, p. 4493-4510.
- RICE J. R., 1968.
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.
Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME; 35:379-386.
- RICHARD H. A., 1981.
A new compact shear specimen.
International Journal of Fracture, Vol. 17, No 5, pp. R105-R107.
- RITTEL, D., MAIGRE, H., 1996.
An investigation of dynamic crack initiation in PMMA.
Mechanics of Materials 23 (3), 229–239.

- ROUX S., RETHORE J., HILD F., 2009.
Digital image correlation and fracture: an advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D crack.
J. Phys. D: Appl. Phys. 42, 214004 (21pp).
- ROUX S., HILD F. (2006).
Stress intensity factor measurement from digital image correlation: post-processing and integrated approaches.
International Journal of Fracture, 140 (1-4), 141-157.
- SANDER M., RICHARD H., 2006.
Experimental and numerical investigation on the influence of the loading direction on the fatigue crack growth.
International Journal of Fatigue, vol. 28, p. 583-591.
- SANDER M., RICHARD H., 2005.
Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode I and mixed mode overloads.
International Journal of Fatigue, vol. 27, p. 905-913.
- SANFORD R.J., 1991.
A Moiré Study of Dynamic Crack Propagation in Aluminum.
Proc. SEM Spring Meeting, 344-349.
- SANFORD R.J., 1989.
Determining fracture parameters with full-fields optical methods.
Experimental Mechanics, 29, 241-247.
- SANFORD R.J., 1980.
Application of the least-squares method to photoelastic analysis.
Experimental Mechanics, 20, 192-197.
- SANFORD R.J., DALLY J.W., 1979.
A general method for determining mixed mode stress intensity factor from isochromatic fringe patterns.
Engineering Fracture Mechanics, 11 (4), 621-633.
- SCHREIER SUTTON M. A., 2002.
Systematic errors in digital image correlation due to undermatched subset shape functions.
Experimental Mechanics, Vol. 42:303-310.
- SCHREIER H. B., BRAASCH J. R., SUTTON M. A., 2000.
Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation.
Optical Engineering, Vol. 39:2915-2921.
- SEELIG T., GROSS D., POTHMANN K., 1999.
Numerical simulation of a mixed-mode dynamic fracture experiment.
International Journal of Fracture, vol. 99, p. 325-338.

- SHIN D.C., HAWONG J.S., 2011.
Development of a hybrid method of reflection photoelasticity for crack problems in anisotropic plates.
Experimental mechanics, 51: 183-198.
- SIH, G. C., LIEBOWITZ, H., 1969.
Mathematical theories of brittle fracture. In *Fracture*, ed. H. Liebowitz.
Academic Press, New York, pp. 67-190.
- SIH, G., PARIS, P. IRWIN, G., 1965.
On cracks in rectilinearly anisotropic bodies.
International Journal of Fracture Mechanics.
- SOLANKI K., DANIEWICZ S., NEWMAN J. J., 2003.
Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement.
Engineering Fracture Mechanics, vol. 70, n° 12, p. 1475-1489.
- SONKA M., HLAVAC V., BOYLE R., 1993.
Image processing, analysis and machine vision.
Chapman and Hall, London.
- STANZL-TSCHEGG, S. E.; TSCHEGG, E. K.; TEISCHINGER, A., 1993.
Fracture energy of Spruce wood after different drying procedures.
Wood and Fiber Science, accepted.
- SUO, X. Z., COMBESCURE, A., 1992.
On the application of method and its comparison with De Lorenzi's approach.
Nuclear Engrg. Design **135**, 207-224.
- SUN Y., PANG J. H. L., 2008.
Experimental and numerical investigations of near-crack-tip deformation in a solder alloy.
Acta Materialia 56 537-548.
- SUTTON, M. A., TURNER, J. L., BRUCK, H. A. and CHAE, T. A., 1991.
Full-field Representation of Discretely Sampled Surface Deformation for Displacement and Strain Analysis.
Experimental Mechanics, 31(2), 168-177.
- SUTTON, M. A., McNEIL, S. R., JANG, J. and BABAI, M., 1988.
Effects of Subpixel Image Restoration on Digital Correlation Error.
Journal of Optical Engineering, 27(10), 870-877.
- SUTTON, M. A., CHENG, M. Q., PETERS, W. H., CHAO Y. J. McNEIL, S. R., 1986.
Application of an Optimized Digital Correlation Method to Planar Deformation Analysis.
Image and Vision Computing, 4(3), 143-151.

- SUTTON, M. A., CHENG, M. Q., PETERS, W. H., CHAO Y. J. McNEILL, S. R., 1986.
Application of an optimized digital image correlation method to planar deformation analysis.
Image Vision Computing 4(3), 143–150.
- SUTTON, M. A., WOLTERS, W. J., PETERS, W. H., RANSON, W. F. McNEIL, S. R., 1983.
Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method.
Image and Vision Computing, 1(3), 133-139.
- SWENSON D., INGRAFFEA A., 1988,
Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements : theory and applications.
Computational Mechanics, vol. 3, p. 381-397.
- TADA, H., PARIS, P. C., IRWING, G. R., 1973.
The Stress Analysis of Cracks Handbook.
Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania.
- TAKAHASHI, K., ARAKAWA, K., 1987.
Dependence of crack acceleration on the dynamic stress-intensity factor in polymers.
Experimental Mechanics 27 (2), 195–199.
- The MATHWORKS, 2001.
Image Processing Toolbox User's Guide, For Use With Matlab, Version 3.0.
- TOUCHAL-MGUIL S., 1997.
Une technique de corrélation d'images numériques : application à la détermination de courbes limites de formages et proposition d'un critère de striction.
Thèse INSA de Lyon.
- TRÂDEGARD A., NILSSON F., ÔSTLUND S., 1998.
FEM-remeshing technique applied to crack growth problems.
Computer Methods on Applied Mechanics and Engineering, vol. 160, p. 115-131.
- TSCHEGG, E. K., 1991.
New equipments for fracture tests in concrete.
Mat. Prif 33:338-342.
- TSCHEGG, E. K., 1990.
Patent AT-396997: Lasteinleitungsvorrichtung.
- TSCHEGG, E. K., 1986.
Patent AT-390328: Pr/ifeinrichtung zur Ermittlung von bruchmechanischen Kennwertensowie hiefiir geeigneter PriifkSrper.
- TUHKURI J., 1997.
Dual boundary element analysis of closed crack.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, p. 2995-3014.

- TVERGAARD V., 2004.
On fatigue crack growth in ductile materials by crack tip blunting.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 52, p. 2149-2166.
- UENISHI, K., ROSSMANITH, H. P., 2002.
Stability of dynamically propagating cracks in brittle materials.
Acta Mechanica 156 (3), 179–192.
- VALENTIN G., CAUMES P., 1989.
Crack propagation in mixed mode in wood: a new specimen.
Wood Science and Technology, Vol. 23, No 1, pp. 43-53.
- VALENTIN G., D'ALMEIDA A., 1984.
Durée de vie en fissuration du Pin Maritime.
Réunion arbolor, Metz.
- VENDROUX G., KNAUSS W.G., 1998.
Submicron deformation field measurements : part 2. Improved digital image correlation.
Experimental Mechanics, 38, 86-92.
- VICTOR E. SAOUMA, May 17, 2000-6831.
Lecture Notes in: FRACTURE MECHANICS CVEN.
Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering University of Colorado,
Boulder, CO 80309-0428.
- WANG, Y. Y., CHEN, D. J., CHIANG, F. P., 1993.
Material testing by computer aided speckle interferometry.
Experimental Techniques, 17(5), 30-32.
- WESTERGAARD H.M., 1939.
Bearing pressure and cracks.
Journal of Applied Mechanics; 61:49-53.
- WILLIAMS M., 1957.
On the stress distribution at the base of a stationary crack.
ASME Journal Applied Mechanics, 24:109-114.
- XIAO Q. Z., KARIHALOO B.L., 2007.
An overview of a hybrid cracked element and determination of its complete displacement field.
Engineering Fracture Mechanics 74 1107-1117.
- XU Y., SAIGAL S., 1998.
Element-free Galerkin study of steady quasi-static crack growth in plane strain tension in elastic – plastic materials.
Computation Mechanics, vol. 22, p. 255-265.
- XU X., NEEDLEMAN A., 1994.
Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 42, p. 1397-1434.

YANG Z., 2005.

An energy-based crack growth criterion for modeling elastic-plastic ductile failure.
Mechanics Research Communications, vol. 32, p.514-524.

YATES J.R., ZANGANEH M., TAI Y.H., 2010.

Quantifying crack tip displacement fields with DIC.
Engng Fract Mech, doi: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.025.

YAU, J. F., WANG, S. S., 1984.

An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity.
Engineering Fracture Mechanics, 20, 423–432.

YAU, J. F., WANG, S. S., CORTEN, H. T., 1980.

A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity.
Journal of Applied Mechanics, 47, 335–341.

YONEYAMA S., OGAWA T., KOBAYASHI Y., 2007.

Evaluating mixed-mode stress intensity factors from full-field displacement obtained by optical methods.
Engineering fracture mechanics, 74, 1399-1412.

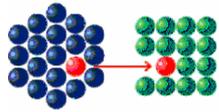
YONEYAMA S. KIKUTA H., 2006.

Lens distortion correction for digital image correlation by measuring rigid body displacement.
Optical engineering, Vol. 45(2):19.

ZHANG X. B., MA S., RECHO N., LI J., 2006.

Bifurcation and propagation of a mixed-mode crack in a ductile material.
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 73, pp.1925-1939.

Annexes



Valorisation des compétences «un nouveau chapitre de la thèse ®»

Mamadou MEITE

Ecole doctorale : n°522 SI-MMA

Science et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique et Aéronautique

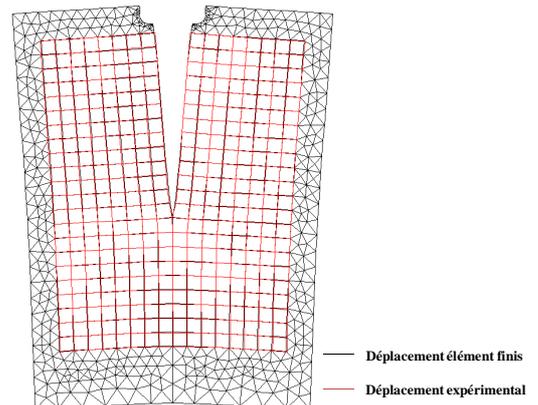
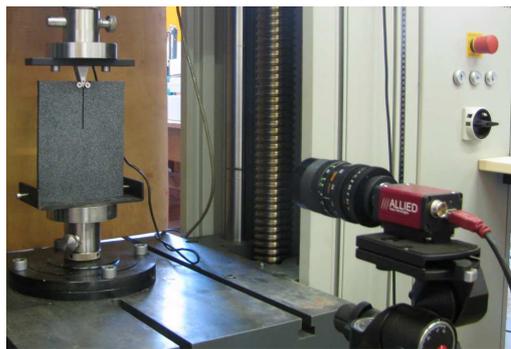
Formation doctorale :

Connaissance de l'entreprise / Initiation à la gestion ; Définir son projet professionnel pour déterminer sa stratégie de recherche d'emploi ; Savoir identifier ses compétences et ses aptitudes, les exprimer et les valoriser dans sa future recherche d'emploi ; Intelligence économique ; Prise de parole en publique ; Thèse électronique ; Conduite de réunion ; Optimiser son CV ; Rédiger une lettre de motivation ; Nouvelles technologies pour l'énergie ; nucléaire et matériaux.

Université de Limoges

Mentor : Martine DEROZIER-DEBIAS

Etude des problèmes de fissuration dans les matériaux de construction : couplage expérimentation et modélisation



Date probable de présentation orale du « NCT » : 4 Octobre 2011

Analyse des champs mécaniques dans les milieux fissurés isotrope et orthotrope : couplage expérimentation et modélisation

Nom du directeur de thèse : Frédéric DUBOIS

Date probable de soutenance de la thèse : 15 Juin 2012

SOMMAIRES

I- La thèse dans son contexte.....	3
1°) Choix de la thèse en général.....	3
2°) Le contexte de la thèse.....	5
II- Compétences développées lors du projet de thèse.....	7
1°) Compétences techniques.....	7
2°) Compétences scientifiques.....	8
3°) Compétences académiques.....	8
4°) Compétences associées.....	9
5°) Compétences transverses.....	11
III- Budget de la thèse.....	14
IV- Capacité à s'approprié un sujet de thèse.....	16
V- Impact de la thèse sur les pistes professionnelles.....	17
1°) Au niveau du laboratoire et de la communauté scientifique.....	17
2°) Au niveau économique et social.....	18
3°) Au niveau personnel.....	19
VI- Conclusion.....	20
Remerciements.....	21

I- La thèse dans son contexte

1°) Choix de la thèse en général

Titulaire d'un Baccalauréat Série D, avec mention au Lycée Scientifique de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire en 1999, l'opportunité d'une bourse de coopération, UNESCO, m'a été offerte pour débiter mes premières études universitaires à la faculté des sciences et techniques de Mohammédia à l'Université Hassan II, au Maroc.

J'ai obtenu le Diplôme d'Etude Universitaire Générale (DEUG) en Physique – Chimie, option Physique en 2002, et le Diplôme de Maîtrise Sciences et Techniques (MST) Génie Energétique en 2004.

Mon stage de fin d'étude pour l'obtention du Diplôme de Maitrise Sciences et Techniques s'est déroulé au sein d'une Centrale de Chaufferie, dénommée COSUMAR de Casablanca, Maroc, au cours duquel j'ai développé une méthode de calcul de rendement de chaudière, une méthode basée sur des formulations énergétiques. Mes résultats attendus étaient en bonne adéquation avec ceux obtenus par COSUMAR qui emploie généralement une méthode standard complexe, fastidieuse et coûteuse proposée par le constructeur de la chaudière.

A travers la qualité et la quantité du travail menées à l'issue du mémoire de stage, j'ai réalisé que valoriser la recherche en proposant des solutions novatrices et pertinentes est devenu l'une de mes priorités majeures. Ensuite, ayant l'intention d'effectuer une thèse de doctorat, afin d'acquérir des connaissances approfondies et mettre en application mes potentialités et compétences de chercheur au service du secteur industriel, j'ai effectué un Diplôme d'Etude Supérieure Approfondie (DESA dont l'équivalence est l'ancien DEA ou nouveau Master 2 de recherche) en Mécanique Appliquée à la Construction (MAC) à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (ENSEM) de l'Université Hassan II Aïn Choc, de Casablanca au Maroc en 2006.

Le stage pour l'obtention de ce Diplôme s'est déroulé dans plusieurs laboratoires au sein de l'École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique (ENSEM) de Casablanca à savoir :

- Le Laboratoire de Contrôle et de Caractérisation des Matériaux (LCCM),
- le Laboratoire des Matières Plastiques et Composites (LMPC),
- le Laboratoire des Calculs de Structures et des Matériaux (LCSM).

Par le biais du partenariat, d'autres laboratoires m'ont accueilli pour bénéficier de leurs compétences et savoir faire technologique afin de mener à bien mes travaux de recherches. Il s'agit :

- Du Laboratoire de Caractérisation Technologique du Centre National de Recherche Forestière de Rabat (CNRF), plus précisément au sein de la Division de Recherches et d'Exploitations Forestières (D.R.E.F.) de Rabat,
- le Laboratoire Public d'Etudes et d'Essai (LPEE) de Casablanca.

L'objectif de la recherche au sein de ces divers Laboratoires a été de mener une étude approfondie de caractérisation des pins (Bois) méditerranéens à travers le développement des techniques expérimentales et numériques. En d'autres termes, contribuer à l'évaluation des performances mécaniques des pins méditerranéens pour des applications industrielles, notamment en structures ou ossatures bois en service. Ce travail m'a permis de développer un modèle numérique en accord avec l'expérimentation, dans le code de calcul éléments finis de SAMCEF fourni par la société SAMTECH en Belgique.

La réussite de ce travail a fait l'objet de nombreuses publications dans les revues et actes des revues des colloques internationaux, notamment :

- Deux publications : dans Journal of Phys. Chem. News (PCN) et Revue des Energies Renouvelables CER'07.
- Six communications : dans les colloques internationaux sur les énergies renouvelables (CER'2007, ICRE'07) et le Premier colloque Euromaghrébin sur les bois méditerranéens CEBM'2008.

A noter que les communications dans les colloques internationaux sur les énergies renouvelables s'inscrivent dans le contexte d'une valorisation des bois méditerranéens, matériaux possédant de réelle capacité de résistance mécanique, puis compte tenu de leur abondance et de leur prix de revient, ils peuvent être ainsi sélectionnés comme matériaux pour la réalisation d'une pale d'éolienne, les structures et ossatures bois.

Ma passion et motivation pour la recherche et développement, mon sérieux et la qualité des résultats de mes travaux de recherches durant le Master 2, ainsi que le réseau relationnel établi avec les différentes unités de recherches rencontrées lors de mes congrès internationaux m'ont fait bénéficier d'une allocation de recherche de la région du Limousin pour effectuer une thèse au sein du Laboratoire GEMH (Groupe d'Etudes des Matériaux Hétérogène) de l'Université de Limoges, en France.

La thèse proposée au sein de ce Laboratoire s'intitule « **Caractérisation des paramètres de fissuration par un couplage corrélation d'images et éléments finis** ». Dans ce travail, il est question de développer une analyse numérique des champs mécaniques localisés au voisinage des milieux fissurés en se basant sur un protocole expérimental faisant appel à des techniques optiques de mesures des champs récemment mises en œuvre. L'avantage de ces méthodes de mesures est d'obtenir des champs globaux de déplacements et de déformations pouvant, par la suite, être exploités dans des modèles employant les éléments finis.

Le couplage original entre les données expérimentales sous forme d'images et la modélisation numérique doit aboutir à :

- La caractérisation de lois de comportement (élasticité, plasticité, thermo élasticité, etc.).
- La caractérisation d'un état d'endommagement et son évolution.
- La caractérisation des cinétiques d'amorçage et de propagation de fissures.

La plateforme numérique fera appel à un code de calcul aux éléments finis de développement CASTEM avec une ouverture et une création de diverses parcelles vers un code de calcul industriel.

Pour réaliser ce travail, le candidat dont je suis devait avoir :

- un profil de modélisateur avec des connaissances solides en calcul éléments finis,
- et être sensibilisé à l'expérimentation avec une utilisation de logiciels d'analyse d'images.

Les compétences, connaissances scientifiques et savoir faire technologique que j'ai acquis durant mes travaux de Master 2 dans les différents Laboratoires de recherches, seront pour moi un atout potentiel de développement des outils robustes, fiables et efficaces en vue d'apporter des solutions pertinentes à la problématique de la thèse.

2°) Le contexte de la thèse

La thèse financée par la région du Limousin, se déroule dans le Laboratoire GEMH de l'Université de Limoges au sein de l'équipe Génie Civil et Durabilité (GCD) située sur le site de l'Institut Universitaire et Technologique (IUT) d'Egletons. La thèse est dirigée par le Professeur Frédéric Dubois et encadrée par Octavian Pop (Maitre de conférences) de l'équipe GCD d'Egletons et le Professeur Joseph Absi de l'équipe ENSCI (Ecole Nationale Supérieure de Céramique Industriel) de Limoges.

Cette thèse s'inscrit dans le contexte d'une problématique liée au comportement des fissurations dans les matériaux du Génie Civil. La problématique a toujours été présente dans les milieux fissurés, mais très souvent mal appréhendée par les outils de conception actuelles à cause de la méconnaissance des performances mécaniques réelles des matériaux et leur hétérogénéité, des cinétiques d'ouverture des fissures et certaines propriétés de la fissuration.

Dans le cadre des activités du GEMH, nous retrouvons cette problématique à différents niveaux, à savoir :

- Le contact métal-bois dans les assemblages employant des boulons.
- La fissuration du bois sous l'effet d'intempéries.
- La fissuration des barrières thermiques par projection de métal, de céramique.
- Les fissurations de couches bitumineuses présentes dans les structures routières.

Ces matériaux sont souvent le siège de sollicitations mécaniques et environnementales (variations ou chocs thermiques et hydriques) lors de leur processus de mise en œuvre ou en service. En outre, les interfaces entre matériaux en service, sont également le siège de concentrations de contraintes induites par des comportements différentiels entre les différents matériaux pouvant générer un état d'endommagement et/ou de fissuration.

Face à cette situation, il y a un grand besoin de développer des outils robustes, rigoureux et fascinants, puis d'élaborer une méthodologie appropriée susceptibles d'appréhender le comportement à la rupture des matériaux. L'objectif étant de créer un modèle obtenu par le couplage entre les informations globales riches issues de l'approche expérimentale et les outils analytiques et numériques développés. Cela requiert une analyse approfondie de la problématique des milieux fissurés en vue de proposer des solutions pertinentes, novatrices et moins coûteuses.

De façon explicite, l'approche expérimentale est basée sur l'emploi des outils de corrélation d'images numériques développés ces dernières décennies capables de saisir le maximum d'informations en termes de champs cinématiques dans les structures fissurées en service. Ces champs cinématiques sont exploités dans un code de calculs relatif aux éléments finis. Ensuite, une modélisation numérique de l'essai expérimental dans une configuration de chargement en force est réalisée. L'originalité de ce travail est donc de combiner les approches expérimentale et numérique afin d'aboutir à :

- la caractérisation des lois de comportement,
- la caractérisation des performances mécaniques des structures,
- et la caractérisation des propriétés d'endommagement et de ruine des structures.

Les résultats escomptés de ce travail de thèse ont été publiés dans les congrès nationaux et internationaux, avec une publication dans une revue internationale de rang A :

- Une publication dans la revue, International Journal of fracture.
- Cinq communications dans les congrès internationaux (WCTE 10 Italie ; COST Action FP080 Autriche ; ICWSE 10 Roumanie ; ICEM14 10 France ; ICRACM 10 France).
- Quatre communications dans les congrès nationaux (CFM19 09 ; CFM20 11 ; AUGC27 09 ; AUGC28 10) et une participation au concours jeunes chercheurs « Prix René Houpert » dans le congrès AUGC29 11.

Une soumission de deux articles dans la revue internationale de rang A « Engineering Fracture Mechanics » est en cours d'expertise.

Une soumission d'un article dans la revue internationale de rang A « International Journal of fracture » est en cours d'expertise.

J'ai présenté ces travaux dans les séminaires de la pluridisciplinarité aussi bien à Limoges qu'à Egletons.

II- Compétences développées lors du projet de thèse

1°) Compétences techniques

Face à la difficulté de la thèse, j'ai développé tout un arsenal de techniques très diversifiées appartenant à des disciplines variées telles que :

- La mécanique linéaire et non linéaire de la rupture, de l'endommagement et de la plasticité.
- la méthode des éléments finis et son implémentation dans des codes de calculs pour la modélisation des structures en service (CASTEM, ANSYS, SAMCEF),
- des logiciels de simulation, de calculs Mathématiques et de résolution des équations matricielles complexes (SCILAB, MAPLE),
- la programmation numérique,
- des outils d'analyse en corrélation d'images numériques,
- la machine électromécanique pour les essais de rupture expérimentaux.
- des outils de traitement de données et de textes (SPSS Math Soft Mathcad, MICROSOFT OFFICE, WINDOWS et PC).

Toutes ces compétences techniques ont été accessibles grâce à la formation de base en Mathématiques, Physique et Informatique que j'ai acquise durant mon cursus universitaire et ma curiosité d'appréhension afin d'explorer le possible. Ce savoir est à l'origine de l'innovation qui ressort de ce projet de recherche et est transposable aux domaines :

- du Génie Civil,
- de la mécanique des matériaux,
- de la mécanique appliquée à la construction,
- et des grands travaux publics.

2°) Compétences scientifiques

Comme tout début d'une activité de recherche, l'étape cruciale pour aborder le sujet de thèse est celle de la recherche bibliographique. Elle permet de fournir et d'acquérir une quantité colossale d'informations relatives au domaine étudié. En outre, un système de veille scientifique s'avère indispensable pour être constamment renseigné des dernières avancées du domaine.

La recherche bibliographique vise à extraire les informations fiables et pertinentes à travers :

- ✓ la lecture des ouvrages scientifiques (thèses de doctorat, publications anciennes et rapports de recherche dans les livres scientifiques,...),
- ✓ la consultation des ouvrages de référence dans les différents laboratoires et unités de recherche,
- ✓ les bibliothèques universitaires,
- ✓ les publications des articles scientifiques dans des revues papiers ou format électronique sur Internet (Science Direct, Springer,...),
- ✓ et passionnément, la participation aux congrès et colloques donnant lieu aux échanges directs beaucoup plus captivants.

L'étape suivante a été de dégager rapidement les pistes à explorer en mettant en application mon arsenal de compétences techniques pour résoudre les difficultés rendant inaccessible l'exploration de nouvelles directives pour le projet de recherche.

Grâce aux nombreuses lectures bibliographiques, à la rédaction des articles publiés en vue de rendre compréhensible et vulgariser mon travail de recherche moyennant les communications orales, les congrès et conférences, j'ai acquis un savoir faire et une maîtrise du langage technique scientifique avec une certaine clarté, subtilité et fluidité de la langue française et anglaise.

3°) Compétences académiques

Il est question ici de développer certaines qualités, tout en suivant une méthodologie pour le bon déroulement de la thèse. D'abord, deux des qualités que j'ai toujours défendues dans mon travail est :

- la rigueur
- et le sérieux.

Ces deux qualités, si importantes à mes yeux ne laissent aucune place aux expérimentations et résultats approximatifs.

La rigueur et le sérieux dont je fais preuve au quotidien m'ont permis de perfectionner les résultats de mes travaux. En parallèle, j'ai mis en place un planning pour l'organisation du travail. Grâce à ce planning respecté rigoureusement et suivi méthodiquement, j'ai acquis du professionnalisme en développant une capacité et potentialité de coordonner plusieurs travaux (exploitation des différentes pistes de recherches) et de valoriser les résultats obtenus de ces travaux à travers les publications, les séminaires au sein de l'équipe et du laboratoire.

Ces travaux ont été présentés à plusieurs personnalités importantes du monde académique et industriel, notamment à la ministre française de l'Enseignement supérieur et de la recherche scientifique Madame Valérie Pécresse lors de sa visite dans nos locaux pour présenter le projet de construction d'un nouveau bâtiment recherche supplémentaire au sein de l'IUT d'Egletons.

4°) Compétences associées

Méthode, savoir faire et qualités personnelles

Tout d'abord, la communication, l'un des moyens essentiels dans la recherche. La publication d'un article exige à son auteur de répondre aux critiques et aux observations des experts du domaine. Cela nécessite de retravailler régulièrement la version de l'article. Ce processus répété plusieurs fois m'a apporté :

- une certaine habitude de la clarté,
- de la formulation précise et concise,
- de fortifier mon esprit de synthèse,
- et ma faculté à rendre compréhensif l'essentiel du contenu de mon travail au public.

La rédaction des articles et plus particulièrement celle des mémoires (master 2, thèse,...) m'ont donné l'occasion de bien maîtriser le langage écrit.

L'interaction permanente avec mes collègues d'équipe et encadrants, les séminaires et colloques m'ont aidé à faire d'énormes progrès dans la communication orale.

Aujourd'hui à cause de ces efforts dans la communication, j'ai acquis une excellente fluidité du langage.

De plus, grâce aux exposés et aux articles que j'ai rédigés et présentés en anglais et français devant les experts et au grand public, j'ai acquis :

- une pédagogie,
- et une maturité intellectuelle contribuant à fortifier mon autonomie.

Durant les trois années de préparation de ma thèse, j'ai fait preuve de sérieux et d'assiduité tout en respectant les dates et horaires des travaux en équipes, aussi bien individuel.

D'autres qualités importantes que j'ai pu développer et conserver durant mon projet de recherche ont été :

- l'écoute,
- et la diplomatie.

En effet, j'ai noté et étudié profondément les idées proposées à l'issue des réunions et présentations des travaux en équipes et du laboratoire. Etant donné que ces idées ne sont toujours pas assurées d'aboutir concrètement. Il m'a donc été nécessaire de ménager une ou des portes de sortie pour pouvoir au final présenter une étude complète et fiable du sujet. Il m'a fallu pour cela sans cesse composer pour arriver à un compromis acceptable. D'où l'importance d'allier, avec subtilité, diplomatie et ténacité.

En outre, j'ai réussi à créer une ambiance amicale au sein de mon équipe, du laboratoire avec tout le personnel administratif, les techniciens et ingénieurs de l'atelier de fabrication mécanique.

Tout cela permet de rendre compte :

- de ma capacité d'intégrité,
- et d'adaptabilité à un nouvel environnement.
- Le respect et la sympathie dont j'ai toujours fait preuve envers mon entourage m'offre la possibilité de gagner de la confiance et de l'aide aussi bien sur le plan professionnel que dans la vie courante.

Par exemple, les techniciens et ingénieurs ont toujours été disponibles à m'accorder leur soutien et aides dans la confection des éprouvettes d'essai de rupture, l'apprentissage des outils de fabrication mécanique.

Mes encadrants et autres enseignants chercheurs du laboratoire et extérieurs au laboratoire (notamment François HILD, Directeur de Recherche CNRS et professeur à l'ENS Cachan, Université Paris VI) ont apporté des éclaircissements et jugements à mes travaux.

Le personnel administratif a toujours facilité mes courses administratives et déplacements dans les formations doctorales, séminaires et congrès. A cet effet, j'ai appris à gérer un budget, notamment la constitution des devis et des bons de commande, le choix des meilleurs prix. Je me suis occupé de la préparation des missions au sein de l'équipe par l'achat des billets et réservations d'hôtel.

Ces années de travaux de recherches ont été pour moi, l'occasion:

- d'épanouissement,
- d'élargissement de mon réseau relationnel,
- de créativité et d'innovation,
- d'avoir un esprit ouvert au dialogue,
- partager les connaissances,
- établir des relations de partenariats,
- et enfin de création d'un cadre de convivialité et harmonieux.

Toutes ces qualités innées et développées, mise en évidence durant la préparation de thèse, m'ont permis :

- de maîtriser le stress,
- de vaincre l'anxiété et la timidité.

La croyance dans mes propres ressources et capacités, qui mènent au succès, est à l'origine de mon auto-perfectionnement conduisant à un changement radical et constructif.

5°) Compétences transverses

Gestion de projet

Avant de démarrer le projet de thèse, mes encadrants et moi avons établi des objectifs annuels. La première année avait été consacrée intensivement à la recherche bibliographique, et la mise au point des outils analytiques et numériques relatifs au domaine de recherche.

Ensuite, l'expérimentation faisant partie intégrante du projet, je devais en parallèle me familiariser :

- ✓ aux outils de fabrication mécanique,
- ✓ à la machine électromécanique destinée aux essais de rupture,
- ✓ aux outils et logiciels d'analyse d'images par corrélation (CORRELA, par exemple) développés ces dernières années.

Je devais aussitôt connaître :

- ✓ le langage de programmation des logiciels de simulation numérique dans le but de réaliser un couplage entre les données expérimentales et numériques.

Ce travail fut rapidement assimiler grâce à :

- mon courage,
- mon sérieux,
- ma persévérance,
- et l'envie d'élargir mes connaissances afin de trouver voies et moyens pour contribuer à la résolution de la problématique de ma thèse.

Très rapidement, dès la première année, les premiers résultats escomptés ont été présentés dans les séminaires et valoriser à travers les publications dans les actes de revues des congrès. Ayant la confiance et la motivation, plusieurs pistes de recherches ont été dégagées avec les grosses difficultés qui y sont associées durant la deuxième année. Il a fallu pour cela développer mes compétences techniques et scientifiques par l'apprentissage simultané d'autres outils plus sophistiqués et spécialisés dans les calculs Mathématiques complexes (par exemple SCILAB, MAPLE) en vue de mettre en place une méthode rigoureuse, robuste et fiable, susceptible de résoudre les problèmes de fissuration dans les matériaux et à l'échelle des structures.

Les résultats des travaux de la deuxième année ont généré une série de publications. D'où la valorisation des travaux de thèse, reconnus sur le plan national et international.

Enfin, la troisième année est consacrée à la rédaction du manuscrit du projet de recherche en vue de prévoir une soutenance de thèse.

Conduite de projet

Après avoir fixé les objectifs annuels, et pour suivre le bon déroulement du projet, mes responsables scientifiques et moi avons décidé de se réunir une fois par semaine après trois mois de recherche bibliographique (octobre 2008 à Décembre 2008).

La recherche bibliographie devait me permettre de faire un état des lieux de la thématique en question et où je devais réunir le maximum d'informations et acquérir des compétences et connaissances solides pour faire face à la problématique du projet.

Lors des réunions d'équipes, je présentais alors mes résultats et nous discussions des idées à développer, des orientations à privilégier et des solutions à apporter aux difficultés rencontrées pour la continuité du projet.

A noter qu'en dehors des journées de travail d'équipe avec mes responsables scientifiques, les résultats de mes travaux ont été suivis, presque tous les jours, de près par mon Co-encadrant, Octavian Pop (Maitre de conférences) et validés par mon encadrant Frédéric Dubois (Professeur) afin de s'assurer de la qualité des résultats et de la précision des méthodes employées.

Des discussions enrichissantes ont souvent été enclenchées lors des réunions d'équipes au cours desquelles j'ai fais preuve de :

- respect,
- d'écoute,
- de sympathie,

et j'ai pu m'exprimer en donnant mon avis et en proposant des solutions acceptables. Le fait que mon avis et mes idées proposées soient pris en compte, j'avais donc le sentiment d'avoir piloter mon projet.

J'ai la plupart du temps été sollicité pour présenter mes travaux originaux sous forme de diaporama dans les séminaires organisés au sein du laboratoire.

L'avancement de mes travaux était le plus souvent marqué par les participations aux congrès nationaux et internationaux, les soumissions acceptées dans les grandes revues internationales.

J'ai aussi noué des contacts avec des experts et spécialistes de mon domaine de recherche dans d'autres laboratoires (LMS de Poitiers, LMT de Cachan, LMGC de Montpellier,...) qui m'ont apportés leur expérience et des éclaircissements à la résolution des problématiques du projet.

J'ai eu le plaisir de travailler avec les techniciens et ingénieurs, avec mes responsables scientifiques, et tout le personnel du laboratoire.

J'ai beaucoup appris et cette formation de trois années de recherche a opéré en moi un changement radical et constructif. J'ai gardé de très bonnes relations avec tout ce monde que j'ai côtoyé durant ma formation.

D'une manière générale, j'ai fais preuve :

- de courage,
- de concentration,
- de sagesse,
- et énormément de persévérance pour mener à bien ce projet.

Ce fut pour moi une excellente école de transformations des échecs en expériences.

III- Budget de la thèse

Tableau1 : Estimation du coût consolidé de la thèse

Nature de la dépense	Détails	Coûts totaux (euros TTC)			
		Nombre d'unités	Coût unitaire moyen	Quote-part utilisation	total
1. Ressources humaines					
Doctorant		36	1287	1	46326
Sous-total Ressources Humaines		36	1287		46326
2. Matériel (amortissement)					
Matériel d'expérimentation (dont les ordinateurs et logiciels spécialisés)	Caméra CCD Corréla Peinture Bois	36	3500	0,28	980
Ordinateur de bureau		36	1000	0,66	660
Logiciels de bureau		36	1000	0,4	660
Sous-total Matériel					2300
3. Déplacements					
Mission en France			3000		3000
Mission à l'étranger			2000		2000
Congrès en France			2000		2000
Congrès à l'étranger			3500		3500
Sous-total Déplacements					10500
4. Formation					
formations	doctorales	36	1976+1000		2976
Autres frais (inscription à l'Université, Sécurité Sociale étudiante, etc.)		36	364	3	1092
Sous-total Formation					4068
TOTAL					63194

Comme le montre le tableau 1, ma thèse est en grande partie financée par la région du Limousin à hauteur **46326 euros** pendant les trois années. Le nombre de personnes au sein du laboratoire impliquées dans le projet regroupe au total 9 personnes.

Il apparaît difficile de chiffrer le coût exact des formations organisées par l'école Doctorale auxquelles j'ai participé. Mais une estimation globale des frais de déplacements et de participations aux formations s'élève à environ **2976 euros**.

Le tableau 2 : la recette de la thèse:

Tableau des recettes	
Désignation	Recette (euros)
Université de Limoges	30939,62
Direction Régionale des Finances Publiques du Limousin (Ministère)	16230,38
TOTAL	47170

La figure 1 montre la répartition du coût global de la thèse. On peut remarquer que l'allocation de la bourse et les déplacements en missions constituent les parts les plus importantes.

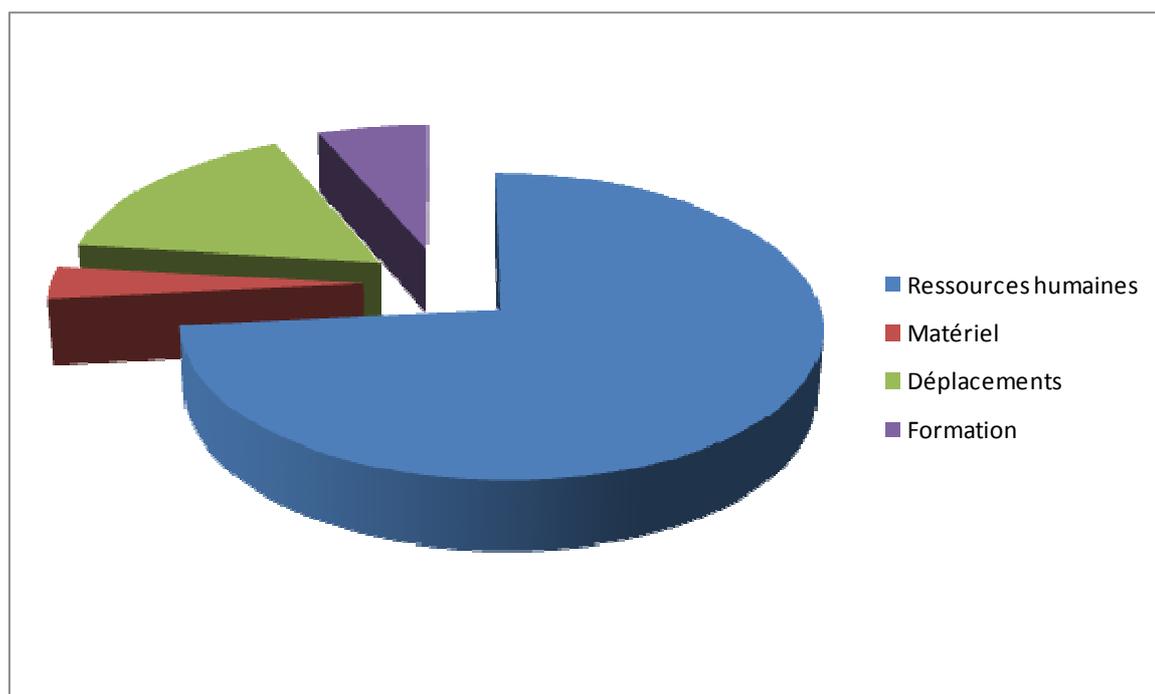


Figure1 : Répartition du coût consolidé de la thèse

IV- Capacité à s'approprié un sujet de thèse

L'intitulé de ma thématique de thèse est « **Caractérisation des paramètres de fissuration par un couplage corrélation d'images et éléments finis** ». Ce sujet de thèse sous entend la nécessité de développer une nouvelle stratégie pour analyser les champs mécaniques mis en exergue lors d'un processus de fissuration dans les matériaux du Génie Civil.

Cette nouvelle stratégie, à la différence de celle déjà existante dans la littérature, doit rassembler les outils robustes et fiables expérimentaux, analytiques et numériques pour générer un algorithme original, susceptible de quantifier à la fois l'état mécanique et énergétique des matériaux.

Les matériaux du Génie Civil subissent des efforts considérables lors de leur mise en service, et dont la conséquence provoque des phénomènes de fissurations et/ou de dégradations conduisant à la perte de vie humaine.

Pour éviter ce désastre, il y a un besoin énorme d'appréhender le comportement mécanique à la ruine des matériaux de construction mécanique. Les outils de conception actuels s'avèrent insuffisants pour capturer et traiter l'information globale riche extraite des matériaux victimes des sollicitations de cinétiques complexes.

Analyser les champs mécaniques et énergétiques oblige à connaître efficacement la loi de comportement et les champs de déplacements générés suite à une modification de l'état initial des matériaux contenant une discontinuité de type fissures.

Pour contribuer à la résolution de cette problématique, la démarche intellectuelle à mener le projet de la thèse est la suivante :

- a) Choix des matériaux et confection des différentes éprouvettes de fissuration.
- b) Estimation des champs de déplacements dans les éprouvettes fissurées par la technique expérimentale de la corrélation d'images numériques,
- c) Développement des outils analytiques pour effectuer l'optimisation des champs de déplacements bruts mesurés dans le voisinage de la fissure du fait des bruits expérimentaux inhérents à la mesure,
- d) Intégration des champs expérimentaux optimisés dans un code de calcul aux éléments finis de développement CASTEM, pour analyser les cinétiques d'ouverture de la fissure à travers l'approche cinématique estimant un paramètre important en mécanique de la rupture qu'est le facteur d'intensité d'ouverture de la fissure.
- e) Modélisation de l'essai expérimental par l'approche statique de la méthode des éléments finis dans une configuration de chargement simple et complexe pour évaluer l'amplitude de la singularité en termes de facteur d'intensité de contrainte.

- f) Réaliser le couplage entre les approches expérimentale et numérique pour caractériser les états mécanique et énergétique des matériaux de construction. La conséquence du processus de couplage a permis à la fois :
- D'établir un algorithme permettant d'identifier les performances mécaniques intrinsèques des matériaux, indépendamment de leur nature.
 - Et d'évaluer les propriétés de rupture des matériaux en vue de prédire leur intégrité structurale.

V- Impact de la thèse sur les pistes professionnelles

1°) Au niveau du laboratoire et de la communauté scientifique

Ma thèse qui sera soutenue bientôt dans un délai acceptable s'ajoutera à la liste des thèses dont le laboratoire a jusque là bénéficié. Et donc, une thèse supplémentaire pour le laboratoire et mon équipe de recherche.

En outre les travaux de cette thèse ont généré une série de publications faisant non seulement augmenter la liste des publications du laboratoire, mais aussi contribuer à avancer la science au sein de la communauté scientifique.

Pendant le déroulement de la thèse, plusieurs difficultés liées à la problématique du sujet m'ont permis de nouer des contacts afin de collaborer avec les spécialistes du domaine. Mon équipe de recherche a participé à cette collaboration pour acquérir d'autres compétences et savoir faire des autres laboratoires (LMS de Poitiers, LMT de Cachan, LMaCoS de l'INSA de Lyon,...) surtout en matière d'analyse d'images numériques par corrélation qui, aujourd'hui est un nouvel outil conduisant par conséquent à une nouvelle thématique dont s'intéresse mon laboratoire. De ce fait, cette nouvelle vision d'orientation du champ de recherche dans le domaine de l'endommagement et rupture des structures en service par l'emploi de ces outils nouveaux pourra permettre à mon laboratoire de perdurer ces collaborations afin d'élargir son rayon d'action.

Dans ce sens, ma thèse a permis un apport de compétences supplémentaires au sein de mon équipe de recherche.

Par ailleurs, plusieurs axes de recherche intéressants donnés en guise de perspectives développés dans ma thèse sont à explorer et feront l'objet de nouvelles thématiques de thèse avec publications associées dont le laboratoire pourra bénéficier dans les prochaines années à venir.

La robustesse, la fiabilité et la pertinence des outils développés, la qualité et précision des résultats obtenus de ma thèse donnent une avancée considérable à la science dans le domaine de la mécanique des matériaux et du Génie Civil.

Cette thèse met donc à la disposition de la communauté scientifique une nouvelle méthode pertinente pour caractériser simultanément les performances mécaniques intrinsèques et les propriétés de rupture des matériaux et structures du génie civil.

2°) Au niveau économique et social

En cette ère de la globalisation, de la mondialisation de l'économie, de l'intensification de la course aux marchés, de la concurrence féroce et agressive, la compétitivité apparaît comme étant la clé de la réussite voire même de la survie de l'entreprise.

De ce point de vue, proposer des solutions innovantes et pertinentes par la recherche incite à pérenniser et à dynamiser l'entreprise, une situation favorable à la création d'un environnement harmonieux au sein de la société.

L'essor économique dépend en grande partie du dynamisme industriel par la construction des grands édifices, des structures et ossatures du Génie Civil. Prédire la durabilité de ces structures et ossatures du Génie Civil exige une appréhension appropriée du comportement mécanique des matériaux de construction.

Afin d'éviter toute instabilité structurelle, phénomène causant d'énormes dégâts et la perte des vies humaines, il est extrêmement important voire indispensable d'évaluer avec exactitude les performances mécaniques et énergétiques des matériaux de construction et de comprendre leur comportement à la ruine.

Pour cela, il apparaît nécessaire de disposer des outils fiables et robustes.

En ce sens, mon travail de thèse contribue alors à présenter une technique innovante rapprochant de façon complémentaire l'expérimentation et la modélisation numérique pour caractériser les différents types de matériaux avec leur loi de comportement mécanique associée.

Moyennant les outils de caractérisation développés dans ce projet de recherches, l'on pourra ainsi facilement procéder au bon choix de la qualité des matériaux pour construire les diverses structures, ossatures et ouvrages d'art, puis assurer leur pérennité. Ces outils s'appliquent aisément aux matériaux du Génie Civil, indépendamment du type et de leur nature.

3°) Au niveau personnel

Trois pistes en termes de projet professionnel peuvent se dégager à travers ce travail de thèse, notamment :

Le profil chercheur

La qualité des recherches effectuées dans cette thèse a été reconnue au niveau national et international à travers une série de publications et de communications.

Plusieurs axes de recherches importants ont été mis en exergue et feront l'objet d'exploration afin d'en tirer le maximum de publications.

A présent, le profil de chercheur me correspond naturellement car valoriser la recherche en proposant des solutions novatrices et pertinentes demeure également l'une de mes priorités.

Apporter une pierre à l'édifice des recherches futures a toujours été ma vertu principale en matière de recherches.

Par ailleurs, un autre profil complémentaire à celui du chercheur qui mérite d'être cité est le profil d'enseignant.

Le profil d'enseignant

Le profil d'enseignant est mis en évidence par les différentes formations du CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur) et celles organisée par l'Ecole Doctorale, des séminaires thématiques de formation que j'ai suivis.

Les communications dans les congrès ont été un bel exercice de formation à l'enseignement puisqu'il s'agissait de vulgariser mon travail de recherches, l'objectif vise à faciliter la compréhension de mon travail au sein de la communauté scientifique.

L'expérience acquise en ma qualité de chercheur, est un atout crucial me permettant d'être apte à assurer sérieusement les enseignements dans un établissement universitaire et faire bénéficier cet établissement des publications issues des travaux de recherche.

Autres profils dans le secteur industriel

Mon domaine de recherche pour la thèse est la science des matériaux pour le Génie Civil. Ce vaste secteur porteur de la clef du développement économique et social fait l'objet d'intérêt de nombreuses firmes.

Ayant un profil numéricien et modélisateur, mes connaissances et compétences en la matière peuvent également contribuer à l'épanouissement et au dynamisme des entreprises de grands travaux publics, ainsi que celles de constructions mécaniques et des bureaux d'études.

Pour les industriels de la filière bois, je pourrais leur apporter des solutions pertinentes dans le traitement et l'utilisation de ces matériaux ligneux qui sont le plus souvent victimes de dégradations et fissurations dues, non seulement aux défauts internes liés à leur structure, mais aussi aux sollicitations de cinétiques complexes.

Ainsi, appréhender proprement le comportement mécanique à la ruine du matériau bois par la recherche est primordial. Puisque le bois, matière ligneuse et compacte, est le matériau sain et esthétique par excellence. Produit de la nature, il ne nécessite pour sa mise en œuvre que fort peu d'énergie et offre une richesse d'aspect inégalée.

Les pays nordiques en Europe, le Canada, les Etats Unis et le Japon ont pris une avancée considérable en matière de construction bois.

VI- Conclusion

En somme, le travail de thèse débouche sur plusieurs pistes professionnelles aussi bien dans le secteur universitaire et institutionnel de recherches, mais également dans le monde industriel.

D'autres orientations en termes de création d'entreprise est aussi envisageable car disposant des compétences acquises à travers ce travail de thèse.

La thèse a été pour moi un bel exercice d'apprentissage pour :

- l'esprit de créativité,
- l'adaptation à conduire des travaux de nature différente grâce aux compétences mise en œuvre.

Désormais, je peux m'épanouir dans n'importe quel secteur d'activité ne relevant pas uniquement de mon domaine d'action.

Ces trois années de recherches m'ont apporté :

- de la maturité intellectuelle,
- la rigueur,
- le courage,
- la persévérance,
- le professionnalisme nécessaire pour accomplir une tâche suffisamment complexe,
- et aussi la croyance dans mes propres ressources et capacités,
- surtout le sérieux et la patience qui ont conduit au succès.

Remerciements

*Je voulais tout d'abord remercier **Frédéric DUBOIS**, mon Directeur de thèse pour m'avoir encouragé et signé mon dossier d'inscription à la campagne « Valorisation des compétences – Un nouveau chapitre de la thèse ».*

*Mes remerciements vont également à Mme **Armelle VARDELLE**, Directrice de l'École Doctorale n° 522 Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécaniques et Aéronautiques « SIMMEA » et son équipe pour l'acceptation de la prise en charge d'une partie de la rétribution du mentor que l'ABG m'a attribué.*

*Je tiens aussi à remercier Martine **DEROZIER-DEBIAS**, mon mentor, pour sa disponibilité et l'attention toute particulière qu'elle a témoigné vis-à-vis de la correction de ce nouveau chapitre de thèse.*

*Je remercie sincèrement **Octavian POP**, **Joseph ABSI**, **Christophe PETIT**, ainsi que tous les membres du Laboratoire GEMH y compris les techniciens et ingénieurs, le personnel administratif et toute personne ayant contribué de loin ou de près à la réussite de ce projet de thèse.*

*Je remercie plus profondément ma mère **Mariam MEITE** et toute ma famille pour leur soutien moral indéfectible et leur nombreux encouragements qu'elles n'ont cessé de porter à ma connaissance.*

*Et enfin, mes remerciements toutes particulières vont aux membres de **l'Association Bernard Grégory (ABG)** de m'avoir donné l'occasion d'exprimer toutes les compétences et qualités acquises durant mes formations universitaires à travers ce bel exercice de « Valorisation des compétences-Un nouveau chapitre de la thèse ».*

RESUME

Le travail de thèse consiste à développer un modèle permettant d'analyser les problèmes de fissuration dans les matériaux en vue de prévoir leur intégrité et durabilité structurale. Dans ce modèle, deux techniques sont couplées pour exploiter l'observation expérimentale et la modélisation numérique par éléments finis afin de déterminer l'état mécanique et les propriétés de rupture en pointe de fissure.

Une première partie de ce travail est consacrée à l'analyse expérimentale utilisant la technique de corrélation d'images numériques pour calculer, dans le voisinage du front de la fissure, les champs cinématiques de déformations. Le bruit expérimental inhérent aux données expérimentales et l'incertitude de localisation du front de fissure nécessite de développer un traitement d'optimisation des champs de déplacement expérimentaux. Cette optimisation consiste à trouver une bonne corrélation entre les données expérimentales et la solution analytique asymptotique de Williams en utilisant une procédure itérative de Newton-Raphson basée sur les moindres carrés non linéaires. La conséquence de cette corrélation a permis de déterminer à la fois la position précise du front de la fissure et le champ cinématique de déplacement des lèvres de la fissure le plus proche de la réalité. L'analyse cinématique permet alors de caractériser la cinétique de fissuration via les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure.

Une seconde partie est dédiée au développement d'un algorithme numérique utilisé dans la caractérisation mécanique et énergétique sous le code de calculs par éléments finis Castem. Dans le cas d'une fissure stationnaire, le modèle numérique est sollicité par une force imposée, contrairement au travail expérimental où le chargement se fait en déplacement imposé.

Cette approche que nous avons qualifiée de statique montre que l'amplitude de la singularité, caractérisée par le facteur d'intensité des contraintes déterminé à partir du formalisme des invariants intégraux, est indépendante de la loi de comportement matérielle et est proportionnelle à l'amplitude en effort du chargement.

Enfin, une dernière étape permet de reconstruire la totalité des propriétés de fissuration, tant cinématique, statique qu'énergétique. Cette reconstruction passe par le rapprochement des propriétés cinématiques fournies par l'analyse d'images et les propriétés en contrainte calculées par l'approche éléments finis. Ainsi, l'ensemble du protocole fait abstraction de la loi de comportement. De plus, le couplage cinématique et statique permet de déduire le taux de restitution d'énergie. Ce couplage permet au final de caractériser les propriétés élastiques locales qui peuvent, à termes, être employées pour alimenter une loi de propagation de fissure ou pour remonter aux propriétés globales d'élasticité du matériau employé. L'ensemble du travail est accompagné d'applications expérimentales et numériques pour des matériaux isotropes (PVC) et orthotrope (Douglas), les échantillons étant sollicités en modes d'ouverture (I) et mixte (I+II).

Mots clés : PVC, Bois, Fissuration, Corrélation d'images numériques, Éléments finis

ABSTRACT

The thesis work consists in developing a model allowing analyzing crack problems in materials in order to predict their integrity and structural durability. In this model, two techniques are coupled to exploit the experimental observation and numerical modeling by finite elements in order to determine the mechanical state and the fracture properties into crack tip vicinity.

A first part is dedicated to the experimental analysis using Digital Images Correlation to calculate, in the crack tip vicinity, the kinematics fields of deformations. The experimental noise inherent to the experimental data and the uncertainty of the crack tip localization require developing a procedure for measurements fields' optimization. This optimization consists in finding a good correlation between the experimental data and the Williams' asymptotic analytical solution based on the development of mathematical series of weighting coefficients, by using Newton-Raphson iterative procedure based on nonlinear least squares. The consequence of this correlation allowed determining at the same time, the crack tip position and kinematics field of crack lips displacement nearest to reality. The kinematic analysis then allows characterizing the kinetics of cracking via the crack opening intensity factors.

One second part deals with the development, into the computer finite elements code Castem, of a specific numerical algorithm to the mechanical and energy characterization. In the case of a stationary crack, although the experimental tests are monitoring under machine displacement (correlated with the crack opening), the numerical model is defined by imposing a load given by synchronization between the testing machine and the images acquisition. This approach, that we described as statics (piloting in force or stress), shows that the amplitude of the singularity, characterized by the stress intensity factor which is determined from the integral invariants formalism, is not only independent of the material behavior law, but also proportional to the loading amplitude.

Lastly, a last stage allows rebuilding the totality of the cracking properties, as well as kinematic, static and energetic. This rebuilding passes by the bringing together of kinematics properties provided by images analysis and stress properties calculated by finite elements approach. Thus, the whole of the protocol disregards law of behavior. Moreover, the kinematic and static coupling allows deducing the energy release rate. This coupling allows finally characterizing the local elastic properties which can, at terms, being employed to feed a crack propagation law or to go back to the global elasticity properties of the employed material. The whole of work is accompanied by experimental and numerical applications for isotropic (PVC) and orthotropic (Douglas) materials, the samples being subjected to tension in opening (I) and mixed (I+II) modes loading.

Key Words: Identification, PVC, Wood, Fracture Mechanics, Digital images correlation and Finite elements