

UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE n° 521 – Sciences et Ingénierie pour l'Information

FACULTE des Sciences et Techniques  
XLIM - Département OSA

Thèse N° 5-2010

**Thèse**  
pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Limoges**

Discipline : Electroniques des Hautes fréquences, Optoélectronique

Présentée et soutenue par  
**Karima EL FELLOUS**

Le 26 janvier 2010

**Contribution à l'élaboration d'une méthode d'analyse reposant  
sur une approche « équivalent circuit » pour l'étude de la  
pénétration d'ondes électromagnétiques dans une cavité**

Thèse dirigée par Alain REINEIX

**JURY :**

**Président :**

**Mr Patrick VAUDON**

**Professeur**

*Université de Limoges, XLIM, Dépt. « OSA », Limoges*

**Rapporteurs :**

**Mr Jean PAILLOL**

**Professeur**

*Université de Pau, LGE, UFR Sciences, Dépt. Physique, Pau*

**Mr Bernard DEMOULIN**

**Professeur Emérite**

*Université des Sciences et Technologies de Lille, TELICE,  
Villeneuve d'Ascq*

**Examineurs :**

**Mr Patrick HOFFMANN**

**Ingénieur**

*Centre d'Etudes de Gramat, Gramat*

**Mr Olivier MAURICE**

**Ingénieur**

*GERAC, Trappes*

**Mr Alain REINEIX**

**Directeur de Recherche C.N.R.S.**

*Université de Limoges, XLIM, Dépt. « O.S.A. », Limoges*

Ce travail de thèse a été effectué à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université de Limoges au sein du laboratoire XLIM dans le département Ondes et Systèmes Associés (OSA), projet « *CEM* ».

En premier, je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur Alain REINEIX, Directeur de Recherche CNRS et responsable du projet CEM du département OSA pour m'avoir tendu la main dans des moments très difficiles pour moi, de m'avoir soutenu et encouragé tout au long de ma thèse, je lui dois beaucoup et je m'estime très chanceuse de connaître une personne aussi merveilleuse et exceptionnelle.

Je remercie chaleureusement Monsieur Christophe GUIFFAUT, Chargé de Recherche CNRS pour son aide, pour sa gentillesse et son amabilité.

Je remercie Monsieur Bernard DEMOULIN, Professeur Emérite à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, TELICE, Villeneuve d'Ascq, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur Jean PAILLOL Professeur à l'*Université de Pau, LGE, UFR Sciences, Dépt. Physique, Pau*, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie Monsieur Patrick HOFFMANN, Ingénieur au Centre d'Etude de Gramat (DGA) pour ses encouragements, pour son soutien, et de m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ma thèse.

Je remercie Monsieur Patrick VAUDON Professeur à l'*Université de Limoges, XLIM, Dépt. « OSA », Limoges*, de m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ma thèse, et de tout ce qu'il m'a apporté pendant mon année de DEA.

Je remercie Monsieur Olivier MAURICE ingénieur à GERAC pour sa collaboration, pour ses conseils, et de m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ma thèse

J'associe aussi mes remerciements à la DGA, en particulier à Patrick HOFFMANN, Bernard PECQUEUX, et Jean-Christophe JOLI pour leur collaboration et leur soutien dans le cadre du projet VULCAIM.

Je remercie chaleureusement Nadine AYMARD, secrétaire du département OSA pour sa gentillesse, et son soutien.

Je remercie également Madame Sophie SALMON la directrice de La Borie pour sa gentillesse et son indulgence, ainsi que le personnel d'accueil qui a toujours été très agréable.

Je remercie HANANE TOGHZAOUÏ pour ses encouragements et sa présence.

Je remercie la FRANCE ce merveilleux pays à qui je dois beaucoup, et que j'aime profondément. Je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu, qui ont cru en moi, et qui m'ont tendu la main, je vous garde pour toujours dans mon cœur.

Je remercie ma famille pour tout... sa présence est une lumière qui éclaire mon chemin, et c'est à elle que je dédie ce travail.

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I : LA CEM DES EQUIPEMENTS EMBARQUES.....	7
1.1 INTRODUCTION.....	7
1.2 LE PROBLEME EN QUESTION .....	7
1.3 LES RISQUES CEM PRESENTeS PAR UN EQUIPEMENT.....	11
1.3.1 Equipement embarqué.....	12
1.3.2 Blindage .....	12
1.3.3 Cartes des circuits électroniques .....	19
1.3.4 Les ouvertures .....	20
1.3.5 Chicanes, joints et ressorts de contact.....	26
1.3.6 Suppresseurs.....	26
1.4 MODELISATION NUMERIQUE.....	30
1.4.1 Méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) .....	31
1.4.2 Méthode des éléments finis .....	31
1.4.3 Méthode des moments (MoM).....	32
1.4.4 Equations intégrales .....	33
1.4.5 Introduction : .....	36
1.4.6 L'algèbre des espaces vectoriels .....	37
1.4.7 Calcul tensoriel.....	44
1.5 OBJECTIFS : .....	48
1.6 CONCLUSION .....	50
CHAPITRE II : ETUDE DE L'EFFICACITE DE BLINDAGE D'UNE CAVITE VIDE PRESENTANT UNE OU PLUSIEURS OUVERTURES.....	51
1.7 Introduction .....	51
1.8 Résolution du problème avec la méthode des équations intégrales .....	52
1.8.1 Formulation du problème .....	52
1.8.2 Séparation de l'intérieur de l'extérieur.....	53
1.8.3 Interprétation mathématique .....	54
1.8.4 Expressions du champ dans les différentes zones de calcul.....	55
1.8.5 Etablissement des équations intégrales .....	68
1.8.6 Interprétation mathématique : .....	69
1.8.7 Résolution des équations intégrales .....	69
1.8.8 Etude monomodale de l'efficacité de blindage d'un boîtier présentant une ouverture unique.....	79
1.9 Le modèle électrique de Robinson .....	83
1.9.1 Etude du blindage d'une cavité avec ouverture .....	84
1.9.2 Cas où plusieurs ouvertures sont disposées sur la même face .....	88
1.9.3 Ouvertures sur faces différentes.....	89
1.9.4 Modèle de Robinson étendu au cas multimodale.....	92
1.10 Conclusion.....	94
CHAPITRE III : ETUDE DE L'EFFICACITE DE BLINDAGE DU SYSTEME COMPLET {CAVITE AVEC OUVERTURE + OBSTACLES MINCES} A PARTIR D'une MODELISATION ELECTRIQUE.....	95
1.11 Introduction .....	95
1.12 Méthode modale pour la modélisation des obstacles minces :.....	95
1.12.1 Du développement modal à la modélisation circuits .....	95
1.12.2 Modélisation des structures guidantes.....	96

1.12.3	Modélisation des obstacles minces .....	98
1.12.4	Application de la méthode modale à la modélisation des obstacles minces ..	101
1.12.5	Adaptation du modèle à la variation de la bande fréquentielle d'étude .....	110
1.12.6	Conclusion.....	115
1.13	Etude de l'efficacité de blindage du système complet {cavité avec ouverture+obstacles minces} .....	116
1.13.1	Introduction .....	116
1.13.2	Description de la structure.....	116
1.13.3	Assemblage du modèle électrique équivalent au système complet {cavité avec ouverture + obstacles minces} .....	117
1.13.4	La mise en équations du modèle électrique équivalent au système complet .	123
1.13.5	Exemple d'application avec le cas bimodale .....	126
1.13.6	Courbe de dispersion du coefficient de l'efficacité de blindage .....	127
1.13.7	Superposition des courbes de dispersion du coefficient de blindage de la cavité avec ouverture avant et après l'insertion des obstacles minces .....	128
1.13.8	Insertion d'une fenêtre capacitive asymétrique.....	129
1.14	Conclusion.....	129
<b>CHAPITRE VI : Approche topologique appliquée à l'étude CEM des systèmes complexes</b>		<b>131</b>
1.15	Introduction .....	131
1.16	Rappels sur les notions de base de la théorie des graphes .....	131
1.16.1	Introduction .....	131
1.16.2	Définition d'un graphe .....	132
1.16.3	Un graphe orienté .....	132
1.16.4	Représentation matricielle des graphes .....	133
1.16.5	Terminologie : .....	135
1.16.6	Cycle.....	137
1.16.7	Cocycle et cocircuit.....	138
1.16.8	Sous-graphe et graphe partiel.....	138
1.16.9	Arbre et arbre recouvrant .....	139
1.16.10	Notions élémentaires sur les graphes valués .....	139
1.16.11	Conclusion.....	143
1.17	Description de l'approche topologique dans un cadre générale.....	143
1.17.1	Introduction .....	143
1.17.2	La démarche à suivre.....	144
1.17.3	Définitions des entités topologiques .....	145
1.17.4	Connexions entre éléments topologiques.....	146
1.17.5	Des entités topologiques vers les entités physiques .....	146
1.17.6	Relations tensorielles.....	146
1.17.7	L'analyse diakoptique .....	146
1.17.8	Graphe algébrique .....	147
1.17.9	Génération des équations .....	147
1.17.10	Conclusion.....	148
1.18	Application de l'approche topologique dans l'étude des circuits électrique.....	148
1.18.1	Introduction .....	148
1.18.2	Du graphe topologique au circuit électrique .....	148
1.18.3	Interprétation mathématique des grandeurs électriques .....	148
1.18.4	Graphe algébrique associé au réseau électrique .....	157
1.18.5	Graphe algébrique du système « cavité avec ouverture+fenêtre inductive ». 158	
1.18.6	Conclusion.....	162
1.19	Conclusion.....	162

CONCLUSION GENERALE .....	164
Bibliographie : .....	170
Annexes .....	172



## ***INTRODUCTION GENERALE***

Les systèmes embarqués sont de plus en plus présents dans notre environnement pour des applications industrielles mais aussi grand public, (énergie, automobiles, téléphone portable, transport ferroviaire, aéronautique...). Avec le développement continu de l'électronique embarquée nous assistons à une complexité croissante des équipements. Pour tenir les performances fonctionnelles nécessaires au niveau système, un équipement doit intégrer de plus en plus de fonctions, donc de composants et de cartes électroniques qui doivent cohabiter tous ensemble. Les fréquences d'horloge des systèmes embarqués deviennent de plus en plus élevées.

Interconnectés et communicants, ces systèmes créent une pollution électromagnétique dans leur environnement engendrant une multiplication d'interactions entre toutes les électroniques. Le besoin de prédiction de l'environnement électromagnétique dans lequel les équipements fonctionnent se fait alors de plus en plus ressentir. Pour cela il est nécessaire d'engager une étude CEM permettant le fonctionnement correcte de chacun de ces systèmes sans qu'il soit source ou victime d'agressions électromagnétiques environnantes.

Pour garantir la compatibilité électromagnétique entre les systèmes, certains équipements doivent respecter les niveaux de perturbations émises définis dans le DO 160. Ce dernier est le document RTCA pour la norme décrivant les (conditions environnementales et procédures d'essai pour l'équipement aéroporté).

Dans l'objectif d'aboutir à une meilleure immunité des équipements électroniques et numériques et de bénéficier pleinement de la cohabitation et de la coopération des systèmes de télécommunications et des capteurs embarqués, l'étude CEM doit être menée suivant trois directions :

- « l'immunité », c'est-à-dire l'aptitude d'un système embarqué à résister aux perturbations électromagnétiques extérieures. Dans cette optique certaines dispositions doivent être considérées
  - ✓ le filtrage à l'entrée des boîtiers électroniques
  - ✓ le design des circuits imprimés,
  - ✓ le blindage

- ✓ la disposition des câbles de connexion

Tout doit être contrôlé et validé par une étude CEM. Ce domaine concerne aussi l'intercompatibilité des équipements embarqués, tous devant pouvoir fonctionner simultanément sans interférence.

- « le mutisme » caractérise la capacité d'un système à fonctionner sans perturber l'électronique environnante. Pour cela il faut contrôler les émissions électromagnétiques volontaires (émissions radio, satellite..) ou pas (perturbations électromagnétiques) que peut générer l'ensemble du système embarqué.

Avec la complexité croissante des problèmes CEM des systèmes embarqués, les outils et les méthodes de traitement se trouvent rapidement limités et insuffisants. La démarche scientifique s'appuie sur la complémentarité offerte par les approches théoriques, numériques et expérimentales. Les recherches s'articulent autour de trois activités complémentaires :

- ✓ Le développement de nouveaux moyens d'essais et de méthodes de mesures
- ✓ l'analyse des interférences et la caractérisation de l'environnement électromagnétique
- ✓ la caractérisation du comportement des composants électroniques et la sécurité de fonctionnement

Le sujet traité dans cette thèse entre dans le cadre du projet VULCAIM (VULnérabilité des CARtes de circuits IMprimé) du laboratoire XLIM en partenariat avec la DGA et le centre d'étude de Gramat (CEG) pour le compte de la MRIS (la Mission pour la Recherche et l'Innovation Scientifique). L'objectif global du projet consiste à étudier la propagation des ondes MFP pénétrant à l'intérieur d'un avion (ou missile) et l'effet sur le système électronique embarqué. Une chaîne de couplages CEM doit donc être définie et traitée partie par partie. Compte tenu de l'ampleur du sujet, trois thèses ont été engagées, chacune traitant une partie de la problématique.

Notre étude se situe en premier lieu de la chaîne des couplages CEM, nous nous intéressons à étudier le blindage des systèmes embarqués à partir de modèles électriques. En d'autres

## *Introduction Générale*

termes, le but est d'évaluer les niveaux des champs couplés à l'intérieur d'un équipement à travers des ouvertures dont la fonction est dédiée aux connexions E/S, ou à l'aération...

Dans une première approximation, les cartes électroniques intégrées à l'intérieur de ce type de système sont représentées par des plans de masse, dont la détermination des courants couplés en surface, permet de faire le lien entre notre sujet de thèse et le sujet de thèse traité par H.Tarhini [1] qui vient en deuxième lieu de la chaîne CEM, ce dernier traitait le couplage entre pistes sur une carte électronique. Le sujet de B.B.Mhamed [6] situe à la fin de la chaîne CEM des couplages, il s'intéresse au couplage du champ électromagnétique sur composants de la carte électronique.

Dans ce sujet de thèse nous développons également une approche topologique proposée par O.Maurice [2] et initiée par G.Kron [3] permettant de construire des modèles topologiques associés à des modèles algébriques. La superposition des deux modèles permet d'établir un graphe algébrique traduisant les relations tensorielles et métriques reliant les différentes entités du modèle topologique. Cette approche permet de traiter des problèmes complexes multi physiques, et donc parfaitement adaptable dans une étude CEM complexe.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique générale. Tout d'abord nous situons le problème d'un point de vue CEM. Dans ce cadre nous présentons les risques CEM que présente un équipement embarqué et les solutions CEM qui y sont adaptées. Ensuite un rappel des méthodes numériques classiques est introduit en deuxième partie de ce chapitre, les méthodes sont confrontées entre elles en degrés d'adaptabilité à notre problème. En troisième partie de ce chapitre nous proposons un rappel sur les notions de base de l'algèbre linéaire et sur le calcul tensoriel, tous les deux indispensables à la compréhension des chapitres suivants. Enfin un exposé d'objectif vient conclure ce premier chapitre.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude de l'efficacité de blindage d'une cavité parallélépipède vide présentant une ou plusieurs ouvertures. Deux méthodes sont proposées ; tout d'abord nous nous sommes intéressés à la méthode des IEM. En premier lieu nous exprimons le champ électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité, ensuite nous appliquons les relations de continuité au niveau des ouvertures, cela permet de générer un système d'équations que nous résolvons ensuite avec la méthode MoM/Galerkin. La résolution permet de déterminer les niveaux des champs couplés au niveau des ouvertures et d'en déduire la valeur du champ en tout point à l'intérieur du boîtier. Enfin nous élaborons la

courbe de dispersion du coefficient de blindage au centre du boîtier. Le même système est ensuite étudié à partir d'une méthode rapide de modélisation électrique basée sur la théorie des lignes de transmission. Elle a été introduite par Robinson et al. dans le cas monomodal et pour une ouverture présentant une ouverture unique. Nous développons le formalisme de cette méthode pour traiter des cas de figure plus complexes (cas où plusieurs ouvertures sont disposées sur la même face ou sur deux faces perpendiculaires, cas multimodal). Tous Les résultats obtenus sont validés avec le code commercial FEKO (équations intégrales) et avec le solveur TEMSI-FD (les différences finis dans le domaine temporel).

Dans le troisième chapitre nous étudions l'efficacité de blindage d'une cavité parallélépipède présentant une ouverture rectangulaire et contenant des plans de masses disposés sous forme d'obstacles minces dans la section transverse de la structure. Dans ce chapitre l'objectif est d'établir un modèle électrique équivalent à l'ensemble de cette structure en bande multimodale. La modélisation électrique de la cavité avec ouverture a déjà été établie au deuxième chapitre à partir du modèle de Robinson [4]. Les obstacles minces seront modélisés à partir du formalisme analytique d'une méthode pertinente introduite par Baudrand et al. [5] Partant du développement modal des structures, la méthode modale permet d'élaborer automatiquement les modèles électriques équivalents. Bien que cette méthode de modélisation présente des dispositions intéressantes en termes d'adaptabilité de point de vue fréquentiel et géométrique. Son application a été restreinte jusqu'à présent aux études monomodales. Nous avons exploité cette possibilité pour développer le formalisme de cette méthode dans le cas multimodale ce qui nous a permis d'établir des modèles électriques large bande.

En exploitant le modèle de Robinson pour la modélisation de la cavité avec ouverture et le formalisme de la méthode modale pour la modélisation des obstacles minces, nous proposons un modèle électrique équivalent à l'ensemble de la structure en bande multimodale. En appliquant les lois de Kirchhoff à ce modèle, nous établissons un système d'équations, dont les inconnues sont les courants couplés au niveau des obstacles. Le système est ensuite résolu en appliquant la méthode des MoM/Galerkin. Les courants surfaciques au niveau des obstacles sont donc calculés, ce qui permet de tracer la courbe de dispersion de l'efficacité de blindage au point centre du boîtier. Les résultats obtenus sont validés avec le code commercial FEKO qui utilise la méthode des équations intégrales, et avec le solveur TEMSI.FD .

Le quatrième chapitre est entièrement dédié à l'approche topologique que nous proposons dans ce sujet de thèse et qui nous a été inspirée par les travaux remarquables de O.Maurice sur ce sujet. Tout d'abord nous proposons un rappel des principes de base de la théorie des graphes, en effet la représentation graphique offre un modèle topologique très intéressant dans l'étude CEM des systèmes complexes. Ce modèle permet une vision globale et claire des différentes interactions entre éléments. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous présentons le formalisme algébrique qui accompagne la structure topologique (graphes) dans un contexte multi physique générale. Nous finirons cette partie en construisant un graphe algébrique traduisant les relations tensorielles et métriques entre les entités topologiques. Dans la troisième partie de ce chapitre nous appliquons cette approche topologique dans la modélisation des réseaux électriques. Les relations tensorielles et donc métriques sont exprimées de façons explicites et sont illustrées dans la suite par un graphe algébrique détaillé. Enfin nous appliquons cette approche topologique à la modélisation du système que nous avons étudié précédemment (la cavité avec ouverture contenant des obstacles minces), cela permet d'établir le graphe algébrique associé.



## CHAPITRE I : LA CEM DES EQUIPEMENTS EMBARQUES

### *1.1 INTRODUCTION*

Le but de ce chapitre est de présenter le contexte général de l'étude de la susceptibilité électromagnétique d'un équipement embarqué. Dans un premier temps nous allons souligner la nécessité de l'étude des perturbations électromagnétiques entre systèmes électroniques voisinant en général, ensuite nous allons situer notre sujet dans le cadre d'une étude CEM des systèmes électroniques complexes embarqués au bord d'un avion. Ensuite nous exposerons les risques CEM que présente un système électronique embarqué, ainsi que quelques solutions CEM adaptées à ces risques. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, notre sujet traite le blindage d'un boîtier métallique présentant des ouvertures, et contenant des obstacles minces. Les différentes études que nous avons menées dans ce cadre sont basées sur des méthodes de modélisation électrique originales. D'où le besoin d'utilisation des méthodes numériques classiques pour la validation des résultats. Nous consacrerons donc une partie dans ce chapitre à la présentation succincte du principe de base de quelques méthodes numériques telles que la méthode des différences finies dans le domaine temporel FDTD, la méthode des éléments finis FEM, la méthode des équations intégrales IEM et la méthode des moments MoM. La méthode modale que nous introduirons au chapitre III, ainsi que l'approche topologique que nous introduirons au chapitre IV, reposent toutes les deux sur un langage mathématique qui doit absolument être maîtrisé. Par conséquent il n'est pas déraisonnable d'y consacrer une partie dans ce chapitre. Celle ci sera essentiellement un rappel des notions de base de l'algèbre linéaire et de l'analyse tensorielle. Enfin nous exposerons les objectifs à atteindre dans notre étude de point de vue CEM et méthodologie.

### *1.2 LE PROBLEME EN QUESTION*

La plupart des équipements électriques et électroniques génèrent des champs électromagnétiques perceptibles dans leur environnement [18]. L'ensemble de ces champs crée une véritable pollution électromagnétique susceptible de perturber le fonctionnement d'autres équipements environnants. Ainsi, il est interdit d'utiliser un téléphone portable dans un avion parce qu'il émet un champ électromagnétique auquel les systèmes radioélectriques d'aide au pilotage (décollage, navigation, atterrissage) risquent d'être sensibles. Figure. 1

## Do portable electronics endanger flight? The evidence mounts

According to a new study, the risk that RF emissions from carry-on electronic devices will affect avionics, although not high, is still high enough to warrant tougher government regulations

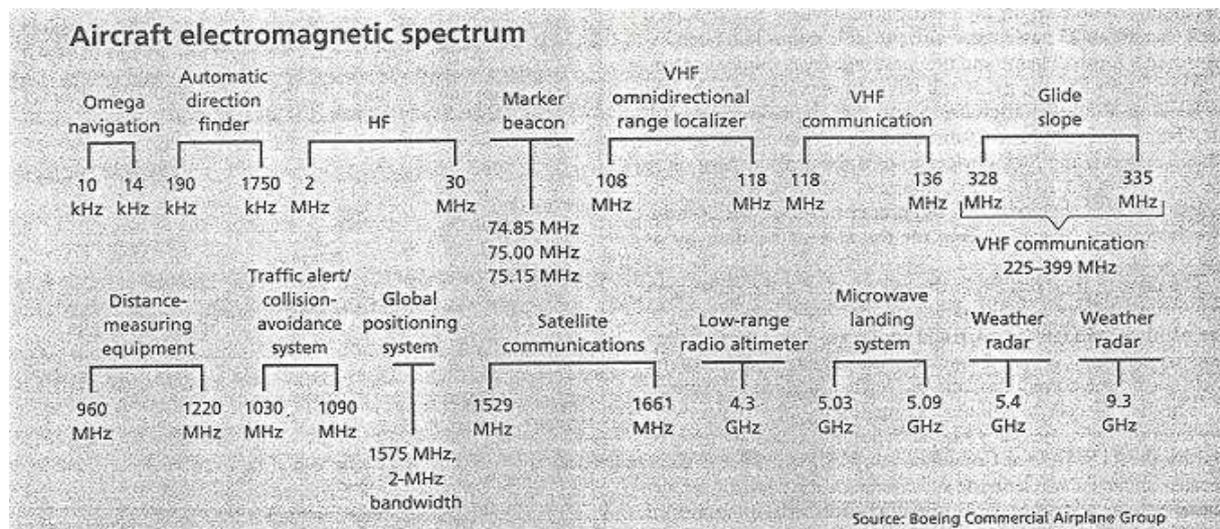
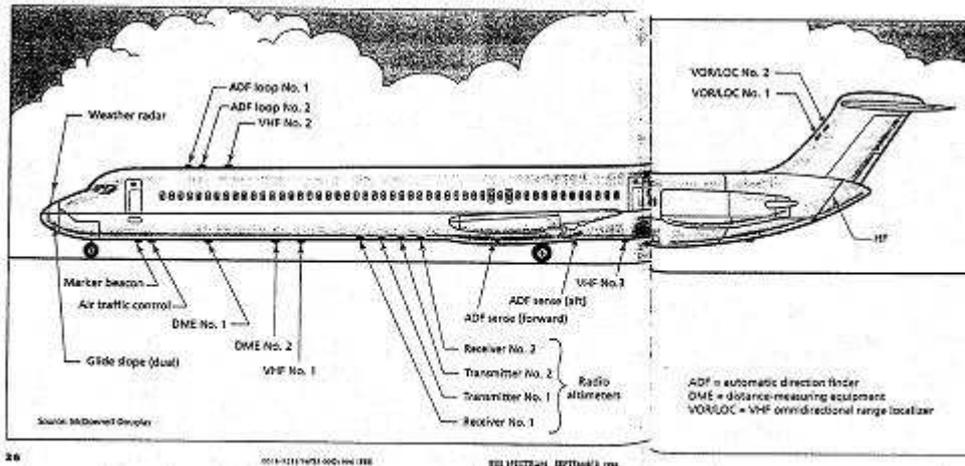


Fig.1 : Le spectre électromagnétique dans un avion Boeing

Source: Boeing Commercial Airplane Group

Pour résoudre un problème de perturbations électromagnétiques, à tous les coups et en maîtrisant les marges de sécurité, il importe de comprendre les phénomènes et d'en connaître les ordres de grandeur. Dans cette optique, la CEM [19] est devenue de nos jours une étude nécessaire à prendre en compte dans la fabrication de tout appareil électrique ou électronique.

L'étude CEM d'un avion est complexe, elle exige la prise en compte de toutes les influences néfastes et distorsions réciproques possibles des fonctions des différents systèmes, et des interférences de l'avion avec des champs électromagnétiques externes (téléphones portables, radio, radar, stations TV, orages). Les mesures CEM prennent en compte les différents composants électroniques (amplificateurs), sous-systèmes (radars embarqués) et bien entendu le système avion dans son ensemble. Les essais CEM enregistrent la puissance des champs émis d'un système et s'agencent autour de trois grands thèmes.

- Le premier thème est la validation du fait que les émissions radar ou de parasites ne brouillent pas le système global dans les différents modes.
- Le deuxième thème concerne la mesure de la résistance du système global contre les émissions de sources externes.
- Enfin de compte le troisième thème est l'observation des influences réciproques des sous-systèmes dans toutes les configurations et états de commutation possibles.

Le but premier est de résoudre les problèmes sur les trois niveaux avec le moins de conflits possibles.

L'augmentation du nombre d'équipements électriques et de câbles dans l'ensemble de l'avion pose de façon encore plus accrue le problème du contrôle des performances CEM de chaque système électrique. L'étude de blindage des équipements embarqués découle d'une nécessité naturelle. En effet l'étude de l'interaction des ondes avec ce type de structure n'est pas simplement un problème théorique. La plupart des équipements embarqués se présentent comme l'exemple montré sur la figure ci-dessous.

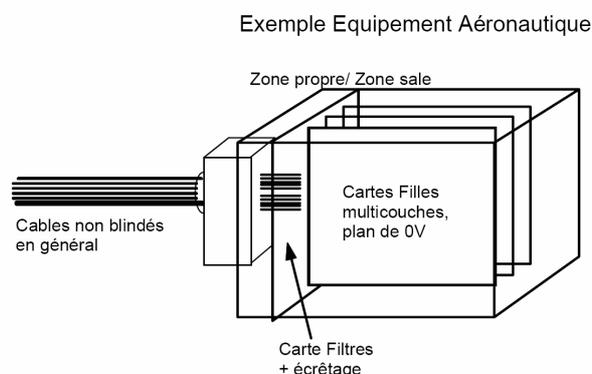


Fig. 2 : Exemple d'équipement aéronautique

Un équipement doit avoir au moins une connexion avec l'extérieur (voir la figure. 2). D'où la nécessité de créer des ouvertures permettant cet échange. Ces dernières rendent la structure vulnérable aux ondes électromagnétiques.

L'étude de la CEM d'un équipement pose un double problème. On parle de problème en réception si l'origine des perturbations provient de l'extérieur de l'équipement. Elle peut être d'origine naturelle (la foudre) ou artificielle (radar, brouilleur...). On parle d'étude en émission si la source de perturbations se trouve à l'intérieur de l'enceinte même. Dans ce cas il pourrait s'agir du rayonnement d'une capacité ou d'une bobine située sur une carte électronique à l'intérieur du boîtier. Dans le cadre de l'étude menée dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude en réception.

Notre problème se situe dans une étude multiéchelles. Il s'agit d'une chaîne de couplages électromagnétiques. A l'origine un avion est cible d'agressions électromagnétiques externes (naturelles ou artificielles), le champ couplé à l'intérieur de l'appareil va venir agresser les systèmes embarqués à bord. Par la suite le champ va se coupler sur les cartes électroniques intégrées au sein de l'équipement, et détériorer le fonctionnement des composants sur la carte. L'ensemble de cette étude entre dans le cadre du contrat « *Vulcaim* » entre notre laboratoire « *Xlim/OSA/CEM* » et le centre d'études « *Gramat* » de la « *DGA* » pour le « *MRIS* ». La partie que nous traitons dans cette thèse concerne l'étude du couplage des ondes électromagnétiques perturbatrices à l'intérieur d'un équipement embarqué à travers les ouvertures qu'il présente. L'étude du couplage sur cartes électroniques a été traité dans la thèse de H. Tarhini [1], un autre doctorant B.B. Mhamed [6] traite la partie concernant les couplage du champ électromagnétique sur les composants de la carte. Le schéma de la figure. 3 illustre cette chaîne de couplages multi échelles.

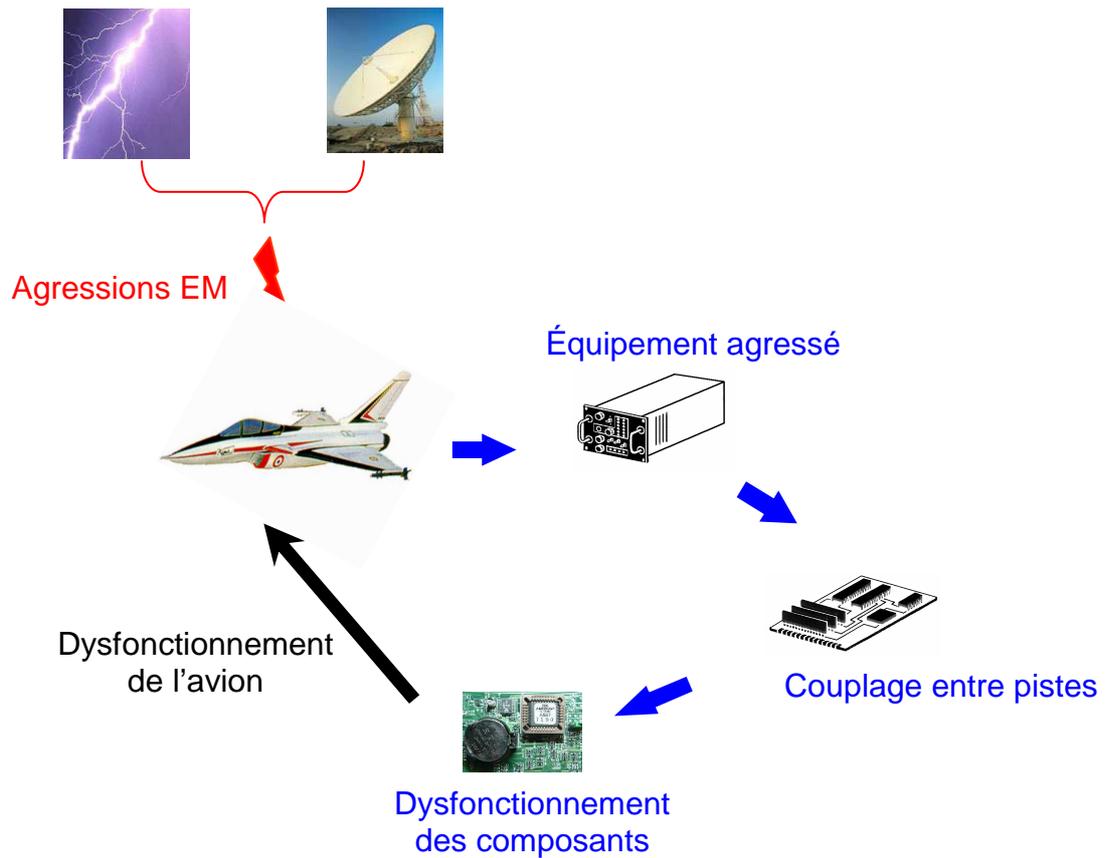


Fig. 3 : Chaîne de couplages multi échelle

### 1.3 LES RISQUES CEM PRESENTES PAR UN EQUIPEMENT

Les systèmes électroniques sont généralement intégrés dans des enceintes métalliques. Les mécanismes de couplage possibles sur ces équipements sont multiples. La structure peut être victime de couplage par conduction par le biais des câbles de connexion qui relient l'équipement au milieu extérieur. Le couplage par diffusion est possible si le blindage est vulnérable aux ondes électromagnétiques en termes de conductivité électrique et d'épaisseur. Les ouvertures situées sur les différentes faces de l'équipement et étant destinées à l'aération ou au passage des câbles permettent un couplage par rayonnement. Dans la suite nous allons exposer plus en détails les risques CEM présentés par un équipement à différents niveaux, et quelques solutions CEM adaptées.

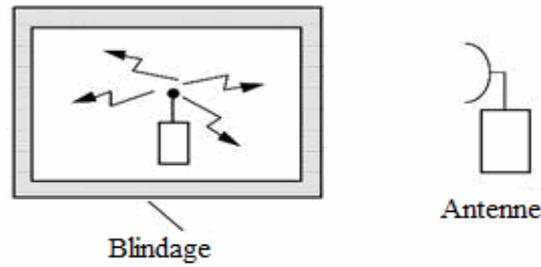
### 1.3.1 Équipement embarqué

Les équipements électroniques, optiques et autres matériels sophistiqués embarqués sur des structures électroniques militaires, sont le plus souvent intégrés dans des ensembles mécaniques usinés, chaudronnés ou mécano soudés. Ces ensembles servent de support et protection contre les agressions extérieures (chocs, corrosion, étanchéité), mais agissent également comme protection contre les rayonnements électromagnétiques (blindage CEM). Tous les matériels et équipements sont le plus souvent fabriqués avec des matériaux métalliques qui subissent différents traitements de surface, pour la résistance à la corrosion, la continuité électrique, l'adhérence peinture, la résistance à l'usure, l'aspect, etc. L'électrolyse au tampon est utilisée dans ces applications en tant que traitement de surface sélectif intégré dès la conception de l'équipement, pour la retouche des traitements de surface existants, pour la réparation du composant lors des phases de conditionnement. Autres que les exigences CEM sur un équipement. Ce dernier doit entre autre être

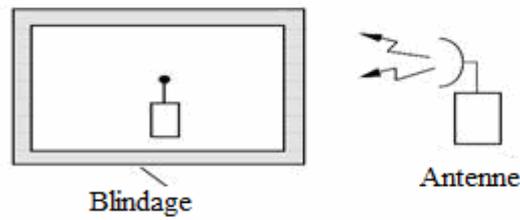
- léger
- de faible encombrement
- de faible consommation
- robuste
- simple...

### 1.3.2 Blindage

Le blindage est un écran électromagnétique ou une enveloppe conductrice qui a pour but d'isoler électro-magnétiquement le milieu blindé des agressions extérieures, mais également d'empêcher les rayonnements générés au milieu blindé d'aller se propager vers le milieu extérieur. Un blindage présente donc une protection en émission et en réception comme le montre la figure. 4



a. Rôle de blindage en émission



b. Rôle de blindage en réception

Fig. 4 : Rôles du blindage, (en émission, en réception)

### 1.3.2.1 Blindage parfait

Théoriquement un blindage parfait est possible en choisissant un matériau de conductivité infinie et ne présentant aucun moyen d'échange avec le milieu extérieur. Le milieu blindé serait donc complètement dépourvu de champ comme le montre bien la figure ci-dessous ;

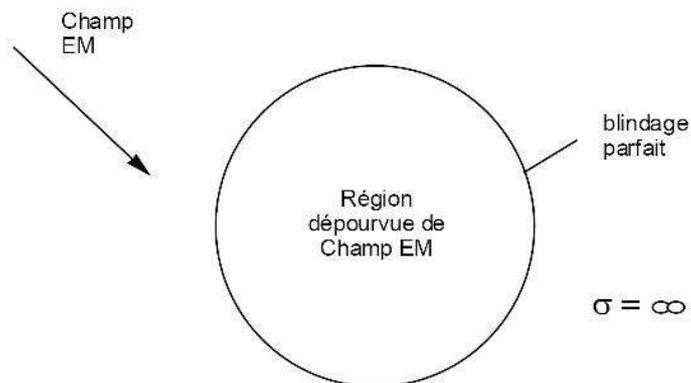


Fig. 5 : Blindage parfait

Cependant il n'existe pas de matériaux à conductivité infinie qui permettent de créer un blindage parfait. Il y aura toujours une pénétration de champ électromagnétique à travers les parois par diffusion limitée par l'épaisseur de peau. De toute manière, aucun blindage ne peut être une enceinte complètement fermée, car il serait absurde d'imaginer l'existence d'un équipement complètement isolé, sans communication avec l'extérieur. Cette communication est nécessaire pour :

- L'alimentation
- Le transfert des informations entre cet équipement et d'autres systèmes;
- La ventilation

Le blindage réel est illustré par la figure ci-dessous ;

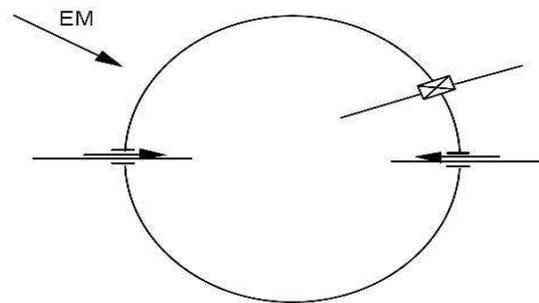


Fig. 6 : Blindage réel

### 1.3.2.2 Pénétration d'un champ EM à travers un blindage

Un champ électromagnétique peut pénétrer à l'intérieur d'un blindage de trois manières :

- Par diffusion;
- Par des ouvertures;
- Par conduction.

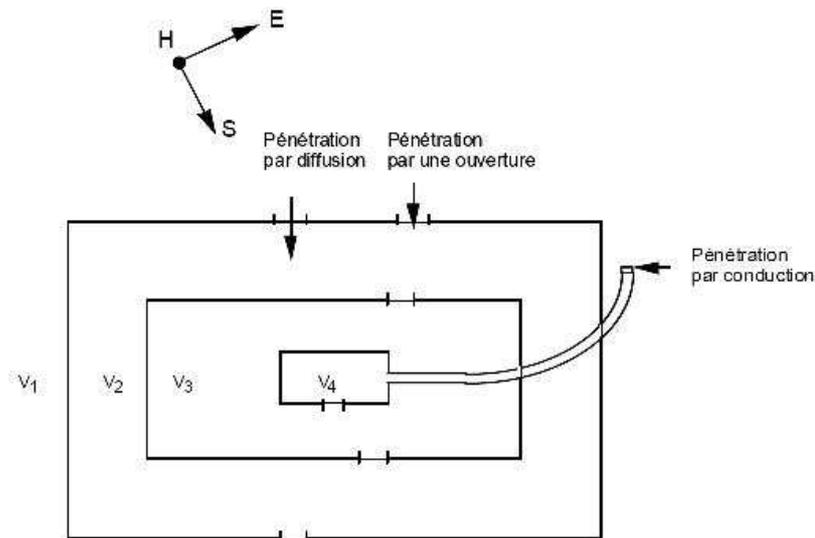


Fig. 6 : Modes de couplage à travers un blindage

La figure.6 permet d'illustrer les mécanismes de couplage du champ électromagnétique à travers un blindage. Trois structures blindées ont été emboîtées les unes dans les autres. Ainsi l'espace noté  $V_1$  représente l'espace externe non blindé et étant siège d'un champ électromagnétique perturbateur. Les espaces  $V_2$ ,  $V_3$  et  $V_4$  représentent des espaces blindés à des degrés différents. La pénétration du champ électromagnétique externe peut se faire par diffusion à travers les parois, ou à travers les ouvertures, ou bien par le biais d'un conducteur tel qu'un câble de connexion.

### 1.3.2.3 Exemple de dégradation de l'efficacité d'un blindage :

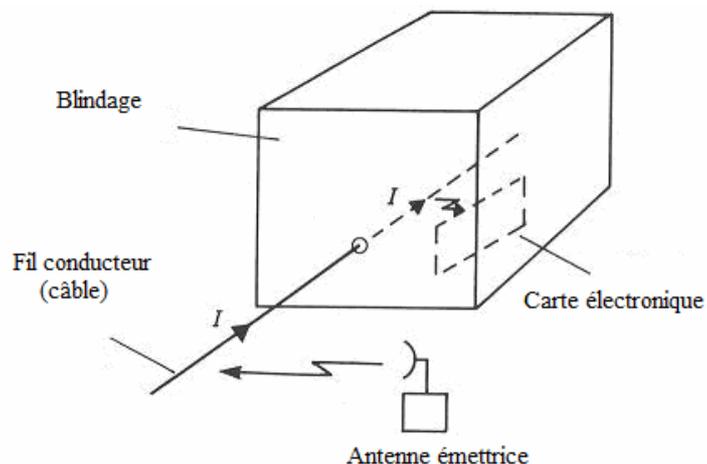


Fig. 7 : Exemple de dégradation du blindage

La figure 7 illustre le couplage par conduction. Le câble reliant l'équipement au milieu extérieur est victime de perturbations. Un courant induit sur le câble sera conduit jusqu'à l'intérieur de l'enceinte et viendra se coupler sur les électroniques intégrés dans l'équipement. Pour remédier à ce type de problème il est possible de filtrer le signal entrant par le câble à l'entrée de l'enceinte ou utiliser un câble blindé relié à l'enceinte avec une bonne reprise de blindage.

#### 1.3.2.4 Coefficient de l'efficacité de blindage

La grandeur caractéristique qui permet d'évaluer les niveaux de champ couplés à travers un blindage est « L'efficacité du blindage ». Elle est définie comme étant égale à l'atténuation de l'intensité du champ électrique ou magnétique que le blindage respectif est capable de réaliser. Cette atténuation est définie dans le domaine fréquentiel, en dB.

$$SE_E = 20 \log_{10} \left| \frac{E}{E_{ref}} \right| \quad \text{Eq.1.a} \quad SE_H = 20 \log_{10} \left| \frac{H}{H_{ref}} \right| \quad \text{Eq.1.b}$$

Avec E et H les intensités du champ électrique et magnétique sans blindage

Et  $E_{ref}$ ,  $H_{ref}$  sont les intensités du champ avec blindage.

#### 1.3.2.5 Matériaux de blindage

Les matériaux typiques utilisés pour le blindage sont le cuivre, l'aluminium et l'acier. Chaque matériau a une courbe d'efficacité spécifique en fonction de la fréquence et de l'épaisseur de la tôle, en champ électrique, magnétique ou électromagnétique, voir la figure. 8

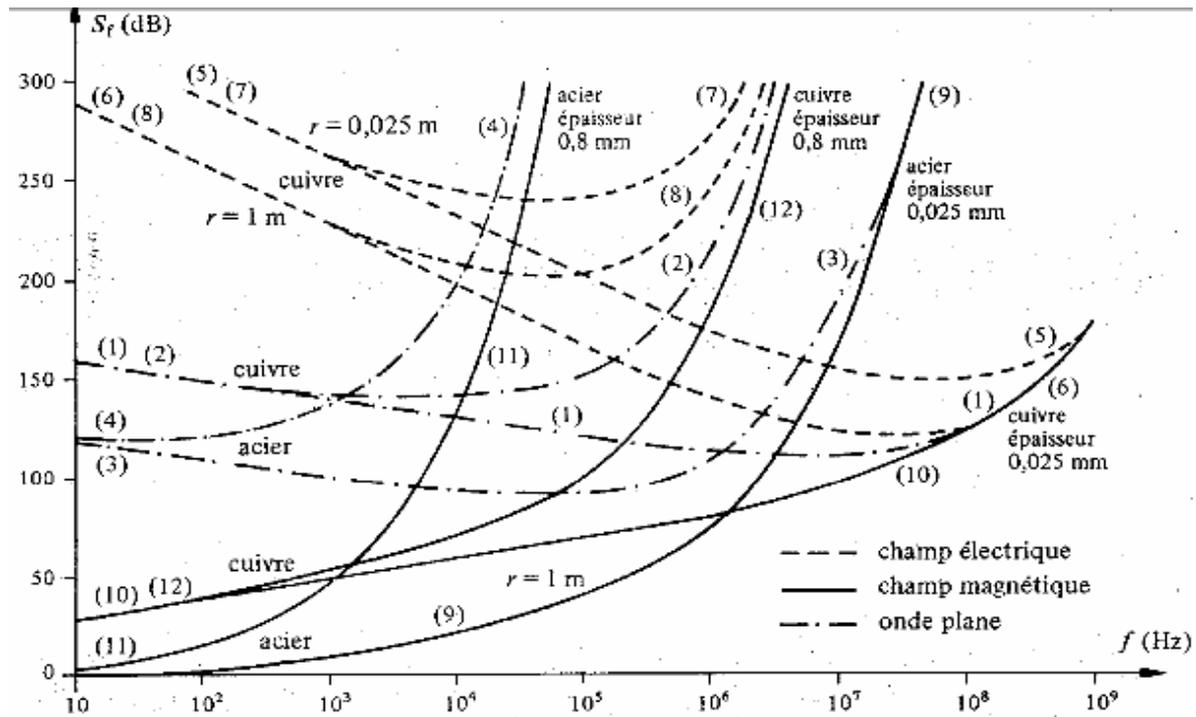


Fig. 8 : Courbe de dispersion de l'épaisseur de peau pour différents matériaux

On observe qu'en basse fréquence et en champ magnétique aucun des matériaux usuels utilisés pour le blindage n'assure une bonne efficacité. En effet le courant surfacique crée par une onde excitatrice sur la surface d'un conducteur sera confiné jusqu'à une profondeur égale à l'épaisseur de peau  $\delta$ . Cette dernière dépend de la fréquence de l'onde excitatrice et des caractéristiques électromagnétiques du milieu. Dans le cas d'un métal parfait ( $\sigma=\infty$ ,  $\delta=0$ ). En général vers les hautes fréquences l'épaisseur de peau diminue, le blindage est plus important en hautes fréquences. Théoriquement un boîtier conçu en conducteur parfait ne peut pas être victime de perturbations par irradiation directe.

### 1.3.2.6 Continuité du blindage

Pour assurer un blindage correct il est très important de respecter la continuité du blindage entre une ou plusieurs enceintes blindées et les transmissions entre ces enceintes.

L'intérieur du volume délimité par les parois des cages et les gaines des transmissions doit représenter topologiquement une zone uniforme où la réduction du champ électromagnétique par rapport à l'extérieur est la même partout. Par contre, si la connexion entre la gaine du

câble blindé et les cages n'est assurée que par un fil, la condition de continuité n'est plus respectée. Voir la figure 8

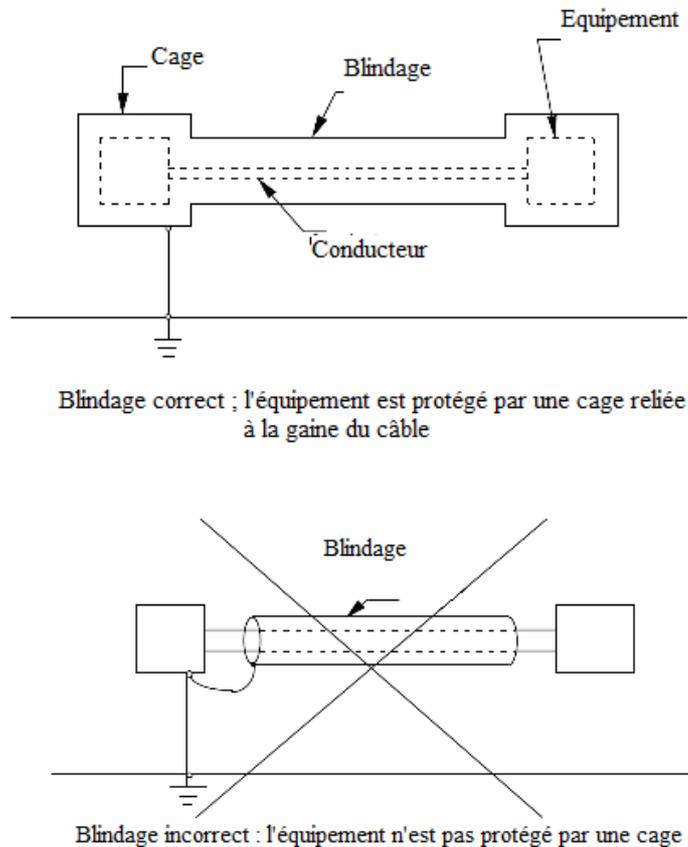


Fig. 9 : Continuité du blindage Les Câbles

Les câbles d'alimentation et d'interconnexion ont le potentiel de capter et d'émettre l'énergie électromagnétique, même si à la base les câbles ne sont pas destinés à transporter de l'énergie RF. Ainsi une onde se couplant sur un câble ou un fils conducteur bien loin de l'équipement, sera transmise par conduction à l'intérieur de l'équipement, ce qui risquerait d'endommager le fonctionnement de l'électronique intégrée. Les signaux perturbateurs peuvent également passer directement entre différentes parties du système par conduction directe.

Le lay-out du câble a une influence majeure sur la nature et la grandeur du couplage. Pour réduire les perturbations par rayonnement les systèmes et les câbles d'interconnexion sont couverts d'un habillage isolant ou « un blindage » qui doit être appliqué sur toute la longueur du câble pour qu'il soit efficace. Cependant le blindage des câbles coaxiaux n'est jamais parfait. Les câbles souples couverts d'habillage tissé avec de petits trous détériorent l'efficacité de blindage, le blindage du câble lui même peut se comporter comme une antenne, en rayonnant ou en recevant une quantité considérable d'énergie, qui sera ensuite couplée au

système via des connecteurs inappropriés. Des émissions électromagnétiques peuvent être également engendrées par une composante électronique dans une enceinte non métallique. Caractérisée par  $Z_t$  = impédance de transfert.

### 1.3.3 Cartes des circuits électroniques

Généralement à l'intérieur d'un équipement des cartes électroniques de circuits imprimés sont intégrées. Les problèmes CEM des cartes sont dus aux tensions et aux courants parasites se propageant dans les conducteurs en mode conduit, et qui peuvent générer à leur tour des émissions perturbatrices en mode rayonné (champ électrique, magnétique, électromagnétique). Sur ces cartes un couplage entre de différents fils, câbles et aussi lignes imprimées est appelé « cross talk ». D'un autre côté une énergie électromagnétique externe provoquée par des sources naturelles ou artificielles peut induire un courant parasite dans les conducteurs des circuits, ce qui peut provoquer une perturbation dans le fonctionnement des composants (susceptibilité ou immunité). C'est pourquoi l'étude de la CEM des cartes électroniques peut être classée en trois catégories globales

- Emissions conduites et rayonnées
- La susceptibilité des cartes face à des interférences électromagnétiques
- Couplage entre les pistes, connectiques et discontinuités, ce qui constitue l'intégrité du signal en courant et en tension entre les interconnexions

Dans ces trois catégories listées ci-dessus, nous pouvons distinguer les observables physiques les plus traités dans l'étude de la CEM des cartes ;

- La fréquence
- l'amplitude
- Le temps

Il existe des recommandations pour la conception du layout des cartes électroniques. Pour cela on sépare les problèmes d'émission de ceux de la susceptibilité et on mène les études en satisfaisant les prescriptions minimales des deux. Les émissions sont subdivisées en deux domaines : les émissions conduites et rayonnées.

Cette technique présente quelques avantages :

- Adapter une ligne de transmission externe
- Eviter la réflexion due à l masse
- Réduire les interférences électromagnétiques
- Réduire le bruit

Le couplage sur les cartes électroniques a été traité en détail dans la thèse de H. Tarhini [1].

#### 1.3.4 Les ouvertures

Avec un blindage adéquat, l'atténuation des champs externes peut être rendue aussi forte que nécessaire à l'intérieur d'une enceinte. Cependant, un équipement doit communiquer avec le milieu extérieur d'une façon ou d'une autre, des ouvertures ou des orifices sont donc inévitables pour l'aération, l'alimentation, pour le passage de fibres optiques qui peuvent remplacer les liaisons galvaniques pour la transmission d'informations entre l'extérieur et l'intérieur, ou pour d'autres types de connexions. Par conséquent l'étude du couplage par ouvertures est d'une importance capitale en CEM.

Les ouvertures permettent le passage d'un flux de champs électromagnétiques dans les deux sens. Elles représentent par conséquent une source de perturbations en réception et en émission. Le champ électromagnétique externe couplé à l'intérieur d'une enceinte blindée, obéit aux lois physiques qui font que :

- Les lignes du champ électrique doivent être perpendiculaires sur un matériau à conductivité infinie (conductivité très élevée dans le cas de la paroi métallique de l'enceinte blindée); le champ électrique tangent est quant à lui nul sur la surface d'un conducteur

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{Eq. 3}$$

- Les lignes du champ magnétique doivent être parallèles (ou tangentes) à la surface d'un matériau à conductivité infinie (conductivité très élevée dans le cas de la paroi métallique de l'enceinte blindée). Par contre la composante normale du champ magnétique est nulle à la surface du conducteur.

$$\vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{J}_s \quad \text{Eq. 4}$$

En obéissant à ces lois, les lignes du champ électrique qui pénètrent par une ouverture dans la paroi d'un blindage, vont s'incurver pour finir d'une façon orthogonale sur la face interne de la paroi ou sur les surfaces métalliques des conducteurs (blindés ou non) qui passent éventuellement à proximité de l'ouverture.

La figure 10 montre les champs électrique et magnétique couplés à travers une ouverture située sur un mur fin. D'après la figure 10.a le rayonnement du champ électrique à travers l'ouverture est équivalent à celui d'un dipôle électrique. La figure 10.b montre que le rayonnement du champ magnétique à travers l'ouverture est équivalent à celui d'un dipôle magnétique. Une des modélisations possibles que l'on peut attribuer à une ouverture est d'être représentée par deux dipôles perpendiculaires, l'un électrique et l'autre magnétique. La théorie de Bethe [7] traite ce type de modélisation pour des petites ouvertures.

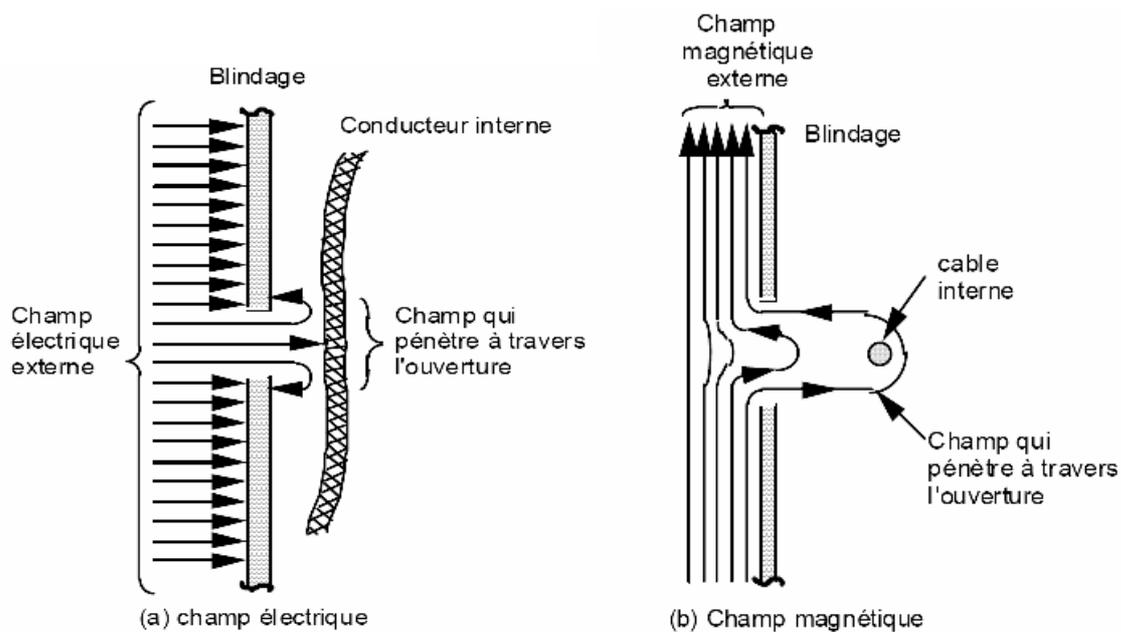


Fig. 10 : Lignes de champ électromagnétique pénétrant à travers une ouverture à l'intérieur d'un milieu blindé

Plus l'ouverture est grande, plus le couplage du champ électromagnétique dans le milieu blindé est important. Une bonne règle à suivre dans la pratique est de limiter les dimensions des ouvertures à  $\lambda/50 - \lambda/20$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde minimale des perturbations. Pour des longueurs d'onde supérieures à deux fois le diamètre de l'ouverture, l'efficacité de blindage est déterminée essentiellement par les pertes dues à la réflexion et elle peut être calculée

approximativement à l'aide de la formule suivante, qui est valable pour une incidence normale, (voir l'annexe I) :

$$SE_{dB} = 20 \log_{10}(\lambda / 2d) \quad d > t \quad \text{Eq. 5}$$

$d$  étant le diamètre de l'ouverture et  $t$  son épaisseur.

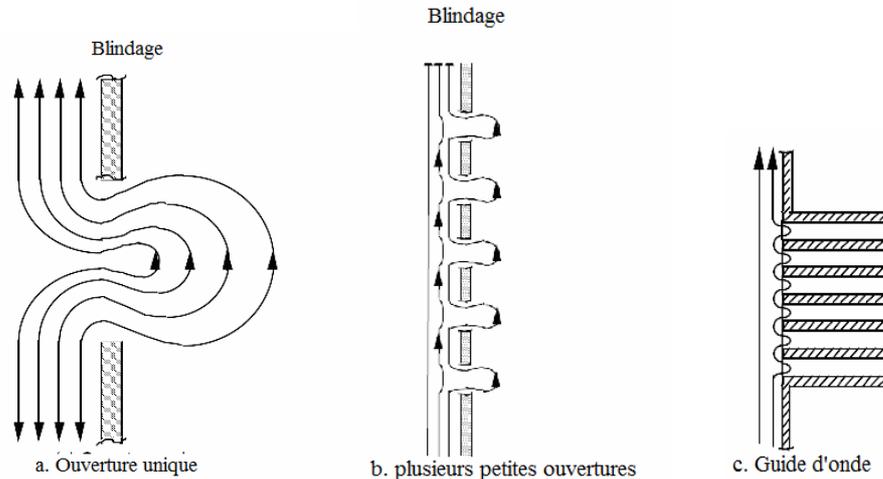


Fig. 11 : Pénétration du champ magnétique à travers des ouvertures de différentes dimensions;

(a) - pénétration à travers une grande ouverture;

(b) - pénétration à travers plusieurs petites ouvertures;

(c) - installation de guides d'ondes à l'endroit des ouvertures.

Ainsi pour limiter la pénétration des lignes de champ, sans diminuer la surface totale de l'ouverture, ce qui est important par exemple pour évacuer une certaine quantité d'air par ventilation, une solution consiste à découper une grande ouverture en plusieurs ouvertures plus petites mais dont la surface totale est égale à celle de la grande ouverture, voir la figure 11. Cette technique a donné naissance aux ouvertures en "nids d'abeille", caractéristiques pour les besoins de ventilation des cages blindée.

#### 1.3.4.1 Ouvertures dans une barrière mince

Soit un plan métallique comprenant des ouvertures multiples disposées de façon régulière comme le montre la figure 12. Les ouvertures sont de forme identique, elles peuvent être circulaires ou carrées. La diminution de l'efficacité de blindage résultant de la présence des

ouvertures est fonction de la distance  $s$  entre deux ouvertures adjacentes, de la longueur d'onde de la perturbation électromagnétique, et du nombre total des ouvertures. Pour le cas d'une onde d'incidence normale et pour des distances  $s < \lambda/2$ , l'efficacité de blindage peut être évaluée par la formule suivante (voir l'annexe I) :

$$SE_{dB} = 20\text{Log}_{10}(\lambda / 2d) - 10\text{log}_{10} n \quad \text{Eq. 6}$$

Où  $n$  est le nombre total d'ouvertures.

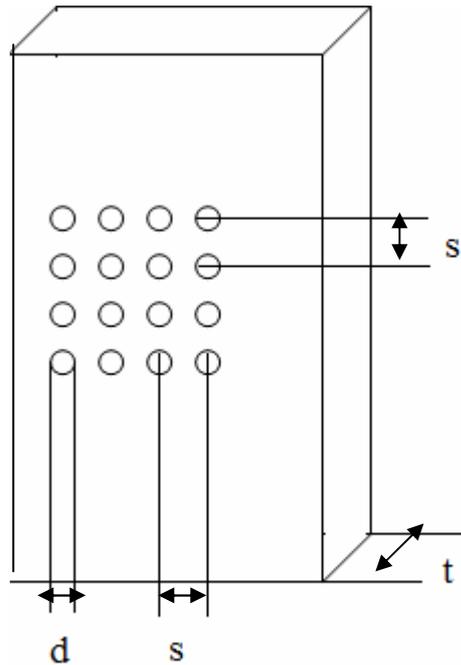


Fig. 12 : Ouvertures multiples dans un blindage

#### 1.3.4.2 Ouvertures dans une barrière épaisse ( $d \gg t$ )

L'efficacité de blindage peut être améliorée en augmentant l'épaisseur du mur métallique contenant les ouvertures. En effet une ouverture percée à travers une barrière épaisse se comporte comme un guide d'onde.

Par conséquent, pour éviter tout transfert d'énergie à travers ce type d'ouvertures les dimensions des ouvertures doivent impérativement être inférieures à la moitié de la plus petite longueur d'onde du signal perturbateur. En d'autres termes il faut éviter que toute énergie perturbatrice soit transportée par un mode guidé. Les ondes électromagnétiques de fréquence inférieure à la fréquence de coupure transmises à travers un guide d'onde sont atténuées approximativement exponentiellement avec la distance le long du guide. Il s'agit en effet des modes évanescents. La constante d'atténuation est donnée par

$$\alpha = (2\pi / \lambda_c) \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \cong \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \text{Eq. 7}$$

Avec  $\lambda_c$  la longueur d'onde de coupure et  $f_c$  est la fréquence de coupure, avec  $f_c \ll f$ .

La fréquence de coupure est fonction de la géométrie de la section du guide d'onde. Un guide d'onde de section carré de côté  $d$  possède des fréquences de coupures associées à la propagation de modes  $TE_{mn}$  (transverse électrique) et  $TM_{mn}$  (transverse magnétique) données par

$$f_{c,mn} = \frac{c}{2d} \sqrt{m^2 + n^2} \quad \text{Eq. 8}$$

Or pour un guide d'ondes de section carrée, le nombre de variation du champ dans les deux directions transverses du guide est le même  $m=n$ . D'où :

$$f_{c,mn} = \frac{c}{2d} \sqrt{m^2 + m^2} = \frac{c}{2d} \sqrt{2m^2} = \frac{c}{2d} \sqrt{2} m = \frac{c}{\sqrt{2}d} m \quad \text{Eq.9}$$

Le premier mode est le  $TE_{11}$ , il a une fréquence de coupure donnée par

$$f_{c,11} = \frac{c}{2d} \sqrt{2} = \frac{1.5 \times 10^8}{d} \sqrt{2} \quad \text{Eq. 10}$$

Correspondant à une longueur

$$\lambda_{c,10} = \sqrt{2}d \quad \text{Eq. 11}$$

Substituant cette valeur dans l'équation 7, la constante d'atténuation devient

$$\alpha \cong \frac{\sqrt{2}\pi}{d} \quad \text{Eq.12}$$

En utilisant l'équation 12 dans l'expression des pertes dues à l'absorption établie dans l'annexe I, on trouve :

$$A_{dB} = \sqrt{2}.27.3t / d \quad \text{Eq. 13}$$

Les pertes dues aux réflexions sont données par l'équation 6. Par conséquent, L'efficacité de blindage totale est donnée par

$$SE_{dB} = 20 \text{Log}_{10}(\lambda / \sqrt{2}d) + \sqrt{2}.27.3t / d \quad \text{Eq. 14}$$

### 1.3.4.3 Ouvertures en nid d'abeilles

L'électronique intégrée dans les cages blindées doit être ventilée pour éviter toute surchauffe. Pour cette raison on utilise souvent la technique des ouvertures en "nids d'abeille" (voir figure 13). Cette structure utilise les principes des guides d'onde appliqués à chaque cellule du nid de la structure. Ces guides d'ondes ont des sections hexagonales. L'efficacité de blindage totale pour un nombre de cellules  $n$  est donnée par :

$$SE_{dB} = 20\text{Log}_{10}\left(\frac{f_c}{f}\right) - 20\text{Log}_{10}n + 27.3t/d \quad \text{Eq. 15}$$

$n$  étant le nombre total des cellules et  $f > f_c/10$

Si l'on fait l'hypothèse de considérer les cellules hexagonales comme des guides d'onde circulaires, une efficacité d'environ 100 dB peut être obtenue jusqu'aux fréquences correspondant à

$$d \leq \frac{\lambda}{3.4}, \quad t \geq 3d \quad \text{Eq.16}$$

Avec  $d$  le diamètre du guide d'onde circulaire,  $t$  la longueur du guide, et  $\lambda$  la longueur d'onde (minimum) de l'onde perturbatrice.

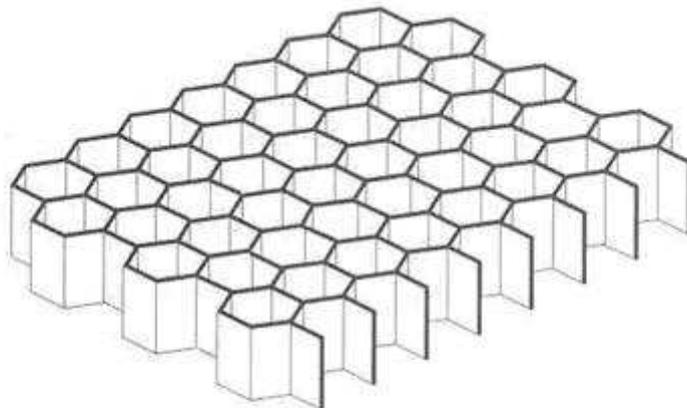


Fig. 13 : Ouvertures en nid d'abeilles

### 1.3.5 Chicanes, joints et ressorts de contact

En haute fréquence l'efficacité d'un blindage n'est pratiquement fonction que de ses fuites. Seuls des écrans d'épaisseur très minces, mauvais conducteur ou non homogènes échappent à cette remarque. Pour réduire les pertes électromagnétiques d'une fente, deux moyens sont possibles : par le contact électrique (appui, vis, joint ou ressort conducteur) et/ou par l'effet de chicane.

L'effet de chicane est simplement obtenu par la superposition (le chevauchement) sans contact électrique mais à très faible distance des deux bords de la fente. L'effet réducteur dépend de la largeur de superposition et surtout de l'épaisseur de la pellicule isolante. L'effet réducteur d'une chicane est indépendant de la fréquence tant que la longueur d'onde est grande par rapport à ses dimensions. L'intérêt de l'effet chicane est qu'aucun contact électrique n'est nécessaire, donc les problèmes de pression, de vibrations ou de corrosion sont moins aigus et le vieillissement moins critique. Réduire une fuite de blindage sans effet de chicane impose d'assurer une bonne continuité électrique pour permettre aux courants de circuler librement en surface de blindage. Pour cela, on utilise des vis, des joints conducteurs et les ressorts de contact.

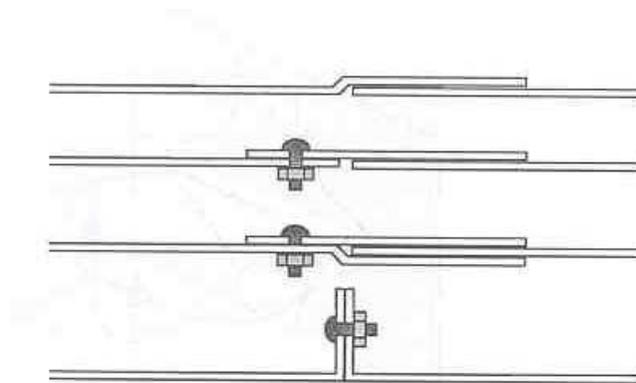


Fig. 14 : Divers types de chicanes

### 1.3.6 Suppresseurs

Pour éviter la pénétration des perturbations par conduction, une possibilité consisterait à installer des supresseurs à l'entrée des conducteurs. Le rôle des supresseurs consiste à empêcher ou à réduire la pénétration du champ électromagnétique externe ou des

perturbations conduites à l'intérieur d'un espace blindé en les écoulant à la terre. Les suppressions peuvent être :

- Des filtres;
- Des Parasurtensions;
- Des transformations d'isolation.

La mise à la terre de plusieurs blindages successifs ne doit pas se faire en traversant chaque fois le blindage, en effet la solution correcte, est de relier chaque blindage à la paroi interne du suivant. La figure 15 illustre la mise à terre de plusieurs blindages successifs.

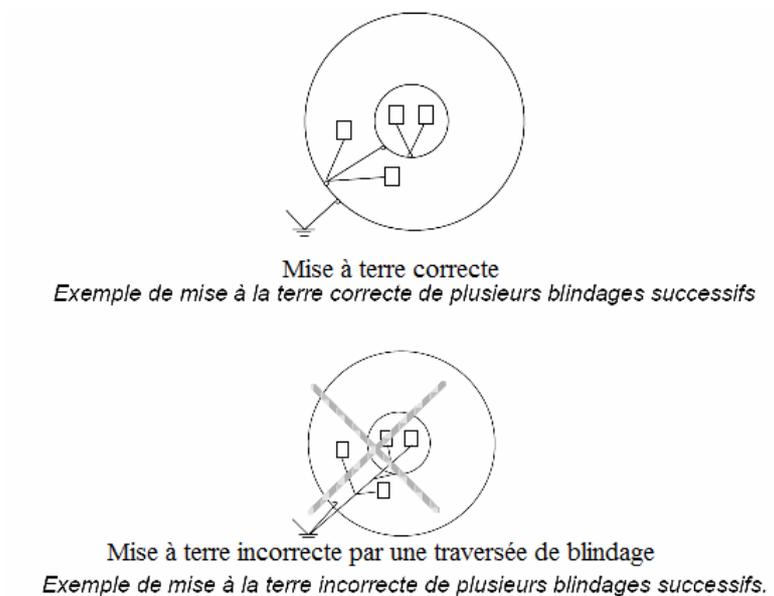


Fig. 15 : Mise à terre de blindages successifs

La figure. 16 montre le principe de fonctionnement général d'un filtre utilisé pour empêcher la pénétration de transitoires à l'intérieur du blindage. Un premier élément, de nature inductive diminue les fronts d'onde. Les capacités intégrées aux parois, vont écouler sur les parois du blindage et à la terre, les courants transitoires.

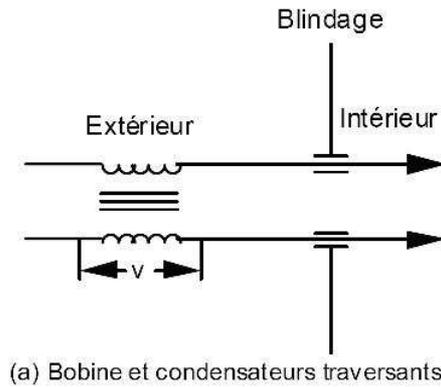


Fig. 16 : Filtre constitué d'une bobine et de capacités traversantes

La figure. 17 présente le détail de montage d'un filtre de réseau basse tension pour traverser la paroi d'une enceinte blindée. Les flèches en traits pleins indiquent le chemin de l'écoulement à la terre des perturbations de mode commun, et les flèches en pointillé celui des perturbations de mode différentiel.

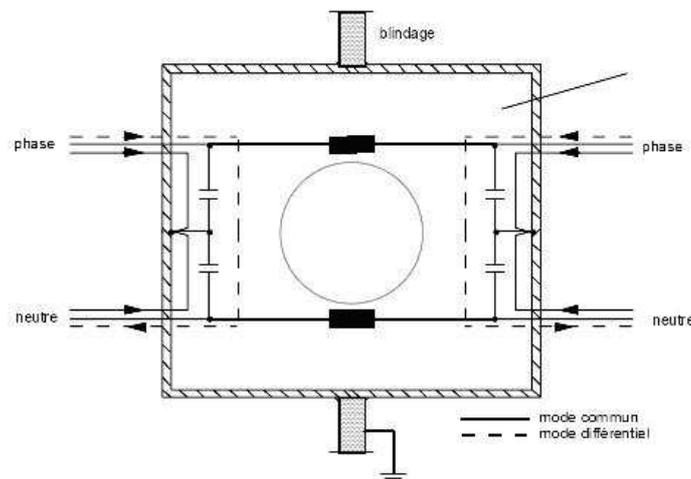


Fig. 17 : Montage d'un filtre de réseau basse tension dans la paroi d'une cage blindée Parasurtensions

Les parasurtensions sont des composants à caractéristique courant/ tension non linéaire qui passent en mode de conduction lorsqu'un certain seuil de tension est dépassé.

Des exemples de tels composants et de leur utilisation pour traverser la paroi d'un blindage sont :

- Les tubes à gaz
- Les varistors
- Les diodes Zener

Souvent, les éléments de protection sont combinés avec une inductance pour réduire le front de l'onde de surtension.

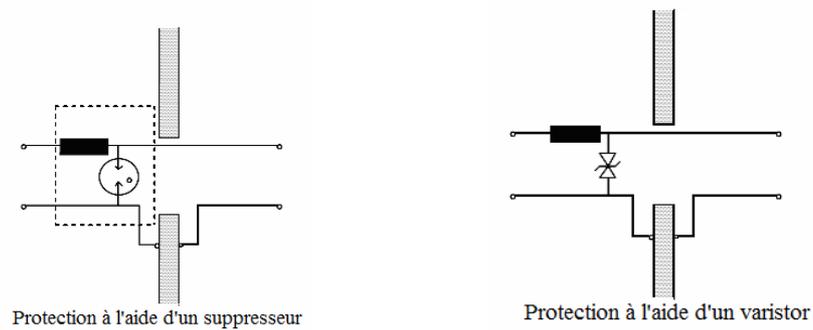


Fig. 18 : Exemples de systèmes de protection

### 1.3.6.1 Transformateurs d'isolation

Les transformateurs d'isolation ont un rapport de transformation 1:1 et leur but consiste à isoler galvaniquement deux circuits l'un de l'autre. Intégré dans la paroi d'une cage blindée, le transformateur d'isolation, empêche la pénétration de courants perturbateurs ou de surtensions du réseau dans des circuits à protéger à l'intérieur de la cage. Les courants à haute fréquence qui par les capacités parasites passent du primaire dans le noyau intégré à la paroi, sont écoulés à la terre, à condition que la mise à la terre de la cage soit à faible impédance.

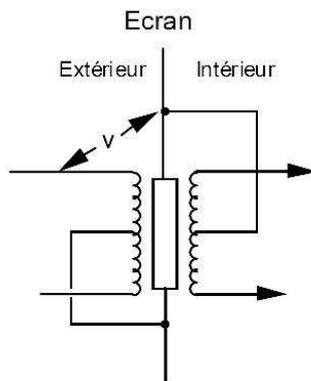


Fig. 19 : transformateur d'isolation

#### **1.4 MODELISATION NUMERIQUE**

La résolution des équations de Maxwell avec un ensemble de conditions aux limites de façon analytique n'est seulement possible dans certains cas simples. Avec les performances des nouveaux ordinateurs, de nouvelles méthodes ont été développées pour traiter des problèmes plus complexes. Chacune de ces méthodes numériques a ses points forts mais également ses faiblesses ; l'application d'une méthode sans avoir une vision critique de l'interprétation des résultats peut conduire à l'échec et à des résultats erronés. Pour un problème donné il est très important de choisir la méthode la plus appropriée. Le « général problem solver » n'est pas encore connu, et ne le sera fort possible jamais. Dans la suite une présentation de quelques méthodes les plus connues : Finite Difference Time Domain (FDTD), Finite element Method (FEM), aussi the Method of Moments (MoM) appliquée à la solution des équations intégrales du champ électrique) est donnée. Nous présenterons succinctement le principe de base de chaque méthode. Les méthodes numériques ont tendance à être lentes et demandent d'importantes ressources. Avant de passer aux méthodes numériques, nous exposons les données caractéristiques du modèle que nous adoptons pour traiter notre problème. Ces données sont importantes dans le choix de la méthode numérique adéquate pour le problème considéré. Plusieurs détails sont à prendre en considération :

Une cavité est placée en espace libre, elle est illuminée par une onde plane.

- L'onde interagit avec la cavité dont la taille représente seulement quelques fractions de la longueur d'onde en basses fréquences, et plusieurs longueurs d'onde en hautes fréquences. En même temps les dimension caractéristiques de l'ouverture sont très petites comparées aux dimensions de la cavité et par conséquent de l'onde.
- Les seules pertes relatives à la cavité sont les pertes rayonnées à travers la petite ouverture, par conséquent le facteur de qualité Q est important.
- Les murs de la cavité sont d'épaisseur nulle

Il est important de garder en tête toutes ces considérations avant de choisir une méthode. Dans la suite quelques approches parmi les plus utilisées seront confrontées au problème présent. D'abord la FDTD, ensuite la FEM. Nous exposerons leurs intérêts et leurs faiblesses dans la résolution de notre problème.

#### 1.4.1 Méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD)

Cette méthode permet de résoudre numériquement les équations de Maxwell appliquées à l'étude de structures volumiques. La résolution numérique nécessite alors une discrétisation spatiotemporelle de l'espace d'étude et celui-ci est donc discrétisé en cellules élémentaires, généralement parallélépipédiques. Les champs électriques et magnétiques y sont évalués à des instants différents. Cette méthode permet d'obtenir directement en fonction du temps l'évolution du champ électromagnétique. Puis une transformée de Fourier est ensuite appliquée à la réponse temporelle pour obtenir la réponse fréquentielle du système. En fonction du nombre de cellules utilisées pour discrétiser la structure, les ressources informatiques nécessaires (espace mémoire, temps de calcul) peuvent être importants.

Cependant l'avantage de cette approche réside dans le fait qu'il n'y a pas de matrice à inverser et ainsi le temps de calculs croît de façon linéaire en fonction du nombre d'inconnues (ce qui n'est pas le cas pour la méthode des éléments finis).

Toutes les méthodes numériques ont leurs faiblesses relatives à un problème donné. Dans le cas de notre sujet d'étude la différence d'échelle entre l'ouverture et le boîtier poserait un problème. Avec la version classique de la FDTD que l'on trouve chez les logiciels commerciaux de simulation électromagnétique il ne sera pas possible de mailler l'ouverture plus finement que le reste de la structure. Aussi l'ouverture est située sur un plan d'épaisseur nulle. En basses fréquences peu d'énergie est couplée dans la cavité, l'ouverture se comporte comme un guide d'onde qui ne transmet qu'à partir de la fréquence de coupure du mode fondamental. Dans la modélisation FDTD il faut considérer une petite épaisseur pour le plan contenant l'ouverture et un maillage fin dans la direction normale au mur. Nous éliminons alors le choix de la FDTD comme méthode de résolution de notre problème.

#### 1.4.2 Méthode des éléments finis

Cette méthode s'applique aux structures de formes quelconques. Elle est basée sur la description géométrique de la structure sous forme d'un maillage utilisant des tétraèdres (3D) ou des triangles (2D) qui ne sont pas forcément uniformes. Le modèle est composé d'un nombre fini de milieux homogènes par morceaux, linéaires, isotropes ou anisotropes et avec

ou sans pertes. Ces milieux sont caractérisés par leur permittivité  $\epsilon_r$ , leur perméabilité  $\mu_r$  ou éventuellement leur conductivité  $\sigma$ . Ces grandeurs peuvent être réelles, complexes et/ou tensorielles.

Les conditions aux limites peuvent être de différentes natures, telles que des conditions de court-circuit électrique (CCE), des conditions de court-circuit magnétique (CCM), des impédances de surface, ou encore des conditions absorbantes permettant l'étude des systèmes ouverts, comme les conditions aux limites absorbantes (CLA) ou encore les couches parfaitement adaptées (PML). Le champ électromagnétique est calculé sur les nœuds de chaque élément de base constituant le maillage (tétraèdre ou triangle), il peut ensuite être déduit dans toute la structure. Il existe deux types de formulations, la formulation E consiste en l'écriture des équations qui décrivent le problème en fonction du seul champ électrique et une fois ce premier calculé, le champ magnétique peut être déduit par dérivation. D'une manière analogue, en exprimant les équations en fonction du champ magnétique, on obtient la formulation H. Une fois que le système d'équations algébrique qui décrit le problème est obtenu, il peut être résolu de deux façons différentes : en "oscillations libres" ou résolution en "oscillations forcées". La résolution en "oscillations libres" permet de calculer, en absence d'excitations, les résonances propres de la structure étudiée, ainsi que la distribution spatiale des champs E et H. Avec la résolution en "oscillations forcées", les accès du dispositif doivent être considérés, elle permet de déterminer les paramètres [S] généralisés dans les différents accès pour une fréquence de fonctionnement donnée.

L'avantage de la méthode des éléments finis est lié au fait que la forme tétraédrique et la variation des dimensions des cellules élémentaires caractérisant le volume discrétisé, confère au maillage une très grande souplesse.

Cette méthode permet l'étude de structures géométriques complexes et elle est donc parfaitement adaptée pour traiter notre problème. Par contre, elle nécessite de gros moyens informatiques pour l'étude de structure complexes.

### 1.4.3 Méthode des moments (MoM)

La méthode des moments (MoM= Method of Moments) est utilisée dans les problèmes liés au rayonnement des antennes. Elle est considérée comme une méthode 2D. La méthode des moments est basée sur la résolution numérique des équations de Maxwell sur un modèle électromagnétique de la structure étudiée. L'analyse s'appuie sur le calcul de la distribution

de courant évaluée sur chaque section par annulation des champs électriques tangentiels. Elle permet d'obtenir les paramètres [S] du dispositif par la méthode de Galerkin qui consiste à résoudre les équations intégrales dérivées des équations de Maxwell. Les logiciels commerciaux basés sur cette méthode, tel que "Momentum" ou "FEKO", sont donc particulièrement bien adaptés à l'étude des circuits planaires. Ils effectuent l'analyse de structures multicouches composées de diélectriques isotropes avec ou sans pertes et de conducteurs qui peuvent être soit considérés comme parfaits ou avec des pertes. Notons que les dispositifs étudiés peuvent également être blindés.

En général, la méthode des moments est une méthode utilisée pour résoudre les équations linéaires fonctionnelles. Dans notre problème la méthode des MoM est appliquée pour la résolution de l'équation intégrale associée au champ électrique

Les avantages de cette méthode sont :

- Echantillonnage du domaine des sources (fictives ou réelles) seulement.
- Ouverture d'espace naturelle, pas de frontière absorbante ou condition de troncature de volume.
- Sources généralement calculées directement

Les inconvénients de la méthode des MoM se résument en :

- Difficulté dans l'application de la fonction de Green et dans les milieux hétérogènes
- Problème de singularité de la fonction de Green
- Traitement analytique assez lourd
- La matrice n'est pas creuse

#### 1.4.4 Equations intégrales

Une des méthodes les plus familières est basée sur la représentation des équations de Maxwell sous forme intégrale. Pour des conducteurs électriques parfaits, la EFIE (the Electric Field Integral Equation method), associant uniquement le champ électrique est utilisée. Dans la suite une toute petite courte introduction à cette méthode sera exposée.

- Sur la figure (20) un obstacle conducteur parfait de surface orienté suivant le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est placé en espace libre en présence de sources rayonnantes ( $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{M}$ ). Les champs rayonnés

par ces sources induisent un courant surfacique au niveau du conducteur. La géométrie considérée est un demi espace limité par l'obstacle.

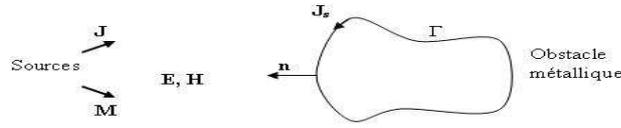


Fig. 20 : Interaction champ/ obstacle

Dans un milieu linéaire le champ total dans l'espace est la somme du champ incident et du champ diffracté.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{ref} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{ref} \quad \text{Eq. 17}$$

Le champ rayonné est crée par les courants induits sur l'obstacle

$$\mathbf{E}_{ref} = \frac{j}{\omega\epsilon} (\nabla^2 + k^2) \int_{\Gamma} \hat{G}_A(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dr' \quad \text{Eq. 18}$$

Une équation similaire à l'équation (Eq. 18) peut être établie au courant magnétique surfacique en considérant la fonction de green adéquate.

L'obstacle peut être en réalité, une structure telle qu'une cavité qui impose ses conditions aux limites. L'équation 18 indique que si les courants sont connus, en calculant l'intégrale contenant les fonctions de Green et les courants sur toute la surface de l'obstacle nous pourrions en déduire la valeur du champ en tout point de l'espace.

En général la valeur du courant sur l'obstacle est inconnue, cependant le champ réfléchi ne peut être déterminé. Les conditions aux limites imposées au champ électrique au voisinage d'un conducteur parfait sont données par l'équation

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{Eq. 19}$$

Cette équation constitue la condition additionnelle qui va nous permettre de calculer le champ réfléchi. L'équation 18 et 19 peuvent alors être combinées, cela donne

$$\vec{n} \times \vec{E}_{inc} = -\vec{n} \times \vec{E}_{ref} = -\vec{n} \times \frac{j}{\omega\epsilon} (\nabla^2 + k^2) \int_{\Gamma} \hat{G}_A(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dr' \quad \text{Eq. 20}$$

Les courants dans cette équation sont toujours inconnus. Cependant ils sont reliés au champ incident pas une équation intégrale. Une fois les courants établis, les champs peuvent être calculés en tout point du domaine. La méthode la plus utilisée dans la résolution de l'équation 20 est la méthode des Moments (MoM). Nous proposons d'exposer le formalisme de la méthode des moments.

L'équation 20 est une équation fonctionnelle non homogène qui pourrait être écrite sous la forme générale

$$L(f) = g \quad \text{Eq. 21}$$

Avec  $L$  un opérateur linéaire,  $g$  est une fonction connue et  $f$  est la fonction à déterminer. Ici  $f$  est égale aux courants  $J$ .

A partir de l'équation 21 il faut identifier l'opérateur  $L$ , son domaine (les fonctions  $f$  sur lesquelles il opère), déterminer son rang (les fonctions  $g$  pour une fonction  $f$  donnée).

Soit  $f$  étendue à une série de fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dans le domaine de  $L$  telle que

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad \text{Eq. 22}$$

Où les  $\alpha_n$  sont des constantes. Les  $f_n$  sont appelées fonctions de base. Pour obtenir une solution exacte, la somme de l'équation 22 est une somme infinie et pour une solution approchée on utilise une base incomplète.

Ainsi, en introduisant l'équation 22 dans l'expression 21 on obtient :

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad \text{Eq. 23}$$

Maintenant définissons un ensemble de fonctions de pondération ou fonctions test  $w_1, w_2, \dots$  du rang de  $L$  et introduisons le produit scalaire dans l'équation 23, on obtient :

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad \text{Eq. 24}$$

Avec le produit hérmitien Pour chaque  $m=1, 2, 3, \dots$  le système d'équations résultantes peut être écrit sous forme matricielle

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \quad \text{Eq. 25}$$

Avec  $L$  la matrice

$$[l_{mn}] = \begin{pmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 26}$$

Et les vecteurs  $\alpha$  et  $g$

$$[\alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [g_m] = \begin{pmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{Eq.27}$$

Pour que la matrice  $L$  soit inversible et pour des raisons de pratique les sommes sur l'indice «  $m$  » et «  $n$  » doivent être tronquées à un certain indice  $N$ , Si la matrice  $[l]$  est non singulière, son inverse  $[l]^{-1}$  existe. Le calcul des  $[\alpha_n]$  est donné par :

$$[\alpha_n] = [l_{nm}]^{-1} [g_m] \quad \text{Eq. 28}$$

Et nous avons :

$$f = [f_n][\alpha_n] = [f_n][l_{nm}^{-1}][g_m] \quad \text{Eq. 29}$$

Où  $[f_n] = (f_1 \quad f_2 \quad \cdot \quad \cdot)$

Cette solution peut être exacte ou approchée en fonction du choix de  $f_n$  et de  $w_n$ . Le choix de  $w_n = f_n$  s'appelle **la méthode de Galerkin**.

Nous présenterons dans le chapitre II le détail du formalisme de la méthode des équations intégrales/MoM/Galerkin appliquée à notre problème. Le code commercial FEKO basé sur la MoM sera aussi utilisé dans notre étude. Rappels mathématiques des notions de base de l'algèbre linéaire :

Un rappel mathématique de l'algèbre linéaire et du calcul tensoriel est indispensables pour la compréhension des méthodes de modélisation et de l'approche topologique qui vont suivre.

#### 1.4.5 Introduction :

L'algèbre linéaire [15] fournit un langage et une collection de résultats très utiles dans des domaines très variés (biologie, chimie, économie, physique, statistiques ...). Mais pour savoir

l'utiliser, il faut apprendre à identifier les problèmes linéaires ou ceux qui peuvent être modélisés par une approche linéaire (c'est une situation usuelle dans la plupart des sciences : on remplace ainsi un phénomène complexe par un problème plus facile à résoudre). En électromagnétisme, à partir des données géométriques et électromagnétiques d'une structure quelconque (corde, guide d'onde cavité...), il est possible d'établir les conditions aux limites imposées au champ électromagnétique à l'intérieur de cette structure. Nous en déduisons les formulations mathématiques des modes propres à la structure étudiée. En effet le champ électromagnétique au sein de la structure se développe comme combinaison linéaire des modes propres de cette structure. Nous pouvons associer à la structure étudiée un espace vectoriel engendré par les vecteurs de développement modaux de la structure, et dont les éléments sont les grandeurs électromagnétique (champ, courant ou potentiel). La même analogie pourrait être faite en électricité concernant le circuit électrique. Il pourrait être associé à un espace vectoriel engendré par ses branches ou ses mailles, et dont les éléments sont les grandeurs électriques ; courant, tension, impédance...

#### 1.4.6 L'algèbre des espaces vectoriels

##### 1.4.6.1 Définition

Considérons un corps commutatif  $K$  qui sera dans la pratique  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ou un sous-corps (par exemple  $\mathbb{Q}$ ). Les éléments de  $K$  (ici des nombres réels ou complexes) seront appelés scalaires. Ainsi  $K$  est le corps des scalaires.

Un espace vectoriel sur  $K$  est un ensemble  $E$  dont les éléments sont appelés vecteurs, satisfaisant aux axiomes suivants :

On définit deux lois de composition sur  $E$ ,

1. Une loi de composition interne (c'est-à-dire, une application), appelée addition et notée  $\oplus$ , vérifiant, pour tous  $u, v$  et  $w$  dans  $E$  :

- $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) \quad \forall u, v, w \in E$  Eq. 30. a

- $u \oplus v = v \oplus u \quad \forall u, v \in E$  Eq. 30. b

- Il existe un élément de  $E$  appelé élément neutre et noté  $0_E$  tel que pour tout  $u$  dans  $E$ ,  
 $u \oplus 0_E = u$  Eq. 30. c
  - Pour tout  $u$  dans  $E$ , il existe un élément de  $E$  appelé opposé de  $u$  et noté  $-u$ , tel que.  
 $u \oplus (-u) = 0_E$  Eq. 30. d
2. Une loi de composition externe (c'est-à-dire, une application), appelée multiplication par un scalaire et notée  $\otimes$ , vérifiant, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $E$  et tous  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $K$  :
- $\lambda \otimes (\mu \otimes v) = (\lambda \otimes \mu) \otimes v \quad \forall \lambda, \mu \in K \text{ et } \forall v \in E$  Eq. 30. e
  - $(\lambda + \mu) \otimes v = \lambda \otimes v + \mu \otimes v \quad \forall \lambda, \mu \in K \text{ et } \forall v \in E$  Eq. 30. f
  - $1 \otimes v = v \quad \forall v \in E$  avec 1 l'élément neutre de la multiplication dans  $K$ . Eq. 30. g

#### 1.4.6.2 Combinaisons linéaires

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs de l'espace vectoriel  $E$ , une combinaison linéaire de ces vecteurs est une expression

$$x = \sum_{i=0}^N \lambda_i x_i \quad \text{Eq. 31}$$

Où les coefficients  $\lambda_i$  sont des scalaires du corps  $K$ . Le résultat  $x$  est évidemment un vecteur  $x$  de  $E$ .

#### 1.4.6.3 Familles génératrices et bases

- Soit  $G$  une famille de vecteurs de  $E$ , si tout vecteur de  $E$  s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $G$ , alors la famille  $G$  est dite génératrice de l'espace  $E$ .
- La dimension d'une famille génératrice est supérieure ou égale à la dimension de l'espace vectoriel  $E$ .
- Une famille génératrice est dite libre si une combinaison linéaire des éléments de cette famille est nulle si et seulement si tous les coefficients  $\lambda$  sont nuls.
- Une base de l'espace vectoriel  $E$  est une famille génératrice et libre.
- Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs, ce nombre est égal à la dimension de l'espace vectoriel  $E$ .

#### 1.4.6.4 Application linéaire

Une forme linéaire sur un  $k$ -espace vectoriel  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans le corps  $k$  (elle s'applique à un vecteur et donne un scalaire). On note  $E$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

#### 1.4.6.5 La métrique

- La notion de distance devait aussi être précisée en généralisant ce concept intuitif à des espaces abstraits : il s'agit des espaces métriques. En mathématiques, un **espace métrique** est un ensemble au sein duquel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. C'est un cas particulier d'espace topologique.

- L'exemple correspondant le plus à notre expérience intuitive de l'espace est l'espace euclidien à trois dimensions. La métrique euclidienne de cet espace définit la distance entre deux points comme la longueur du segment les reliant.

- Un ensemble (non vide)  $E$  est dit métrique s'il existe une application  $d$  de  $E \times E$  dans le corps  $K$  vérifiant les propriétés suivantes

1.4.6.6  $\forall x, y, \text{ et } z \text{ de } E \text{ nous avons :}$

•  $d(x, y) \geq 0$  Eq. 32. a

•  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  Eq. 32. b

•  $d(x, y) = d(y, x)$  Eq. 32. c

•  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  Eq. 32. d

#### 1.4.6.7 La variance

##### 1.4.6.7.1 Composantes contravariantes d'un vecteur

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur de l'espace  $E$ , nous définissons une base  $(\mathbf{e}_i)$  sur cet espace. Les composantes contravariantes  $u^i$  du vecteur  $\mathbf{u}$  sont définies par

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i. \quad \text{Eq. 33}$$

Les  $u^i$  représentent les projections de  $u$  parallèles aux axes support des vecteurs  $e_i$  : cela résulte de la règle du parallélogramme pour l'addition vectorielle. Décomposons le vecteur  $u$  en  $n$  vecteurs  $u^i$  parallèles aux vecteurs  $e_i$  ; par définition, on a  $\mathbf{u} = u^i e_i$  (sans sommation),  $u^i$  représentant le nombre de fois que le vecteur  $e_i$  est contenu dans le vecteur  $\mathbf{u}$  <sup>(i)</sup>. Il n'est pas nécessaire d'avoir un espace métrique pour cela.

#### 1.4.6.7.2 Composantes covariantes d'un vecteur

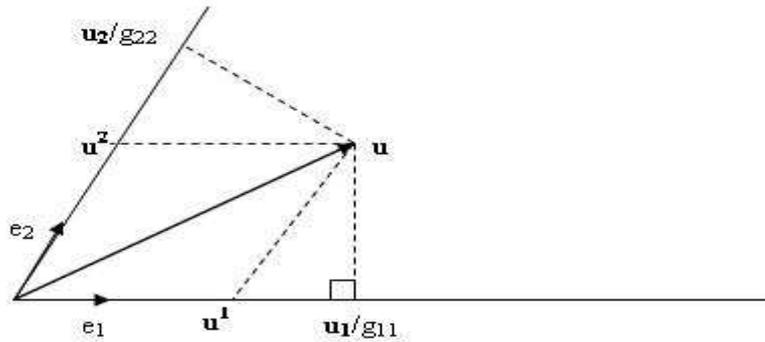


Fig. 22 : composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur

Nous définissons également les composantes covariantes du vecteur  $u$ . Ces quantités notées  $u_i$  sont liées aux projections orthogonales du vecteur  $u$  sur les mêmes axes ( $e_i$ ) ; cela résulte du produit scalaire. Les composantes covariantes nécessitent la définition d'une métrique, puisque la notion d'orthogonalité est une notion métrique. Nous pouvons exprimer les composantes covariantes par l'écriture

$$u_i = |u| \bullet |e_i| \cos(u, e_i) \quad \text{Eq. 34}$$

Nous remarquons qu'ils sont définis à partir d'un produit scalaire qui est une forme bilinéaire.

Or 
$$\mathbf{u} = u^i e_i \quad \text{Eq. 33}$$

D'où 
$$u_i = |u^i e_i| \bullet |e_i| \cos(u, e_i) \quad \text{Eq. 34. a}$$

Nous en déduisons les relations entre les composantes covariantes et les composantes contravariantes du vecteur  $u$

$$u_i = g_{ii} u^i \quad \text{Eq. 34. b}$$

Avec  $g_{ii} = |e_i| \bullet |e_i| \cos(u, e_i)$  la composante (i, i) de la métrique  $G$ .

La quantité lue sur l'axe support du vecteur  $e_i$  par projection orthogonale n'est donc pas directement  $u_i$ , sauf si le vecteur  $e_i$  est unitaire ( $g_{ii}=1$ ).

Par analogie on appelle parfois  $u_i$  et  $u^i$  les projections parallèles et orthogonales du vecteur  $u$ . en utilisant le développement de  $u$  sur la base  $(e_i)$ , on obtient l'expression des composantes covariantes en fonction des composantes contravariantes

$$u_i = g_{ij}u^j \quad \text{Eq. 34. c}$$

#### 1.4.6.8 Variance et changement de base

La dénomination « covariante » pour la composante  $u_i$  laisse présager une propriété particulière lors d'un changement de base. En effet une composante covariante obéit à une loi de changement de base analogue à celle des  $(e_i)$  (multiplication par la matrice de passage). Dans le changement de base  $u'_i = A_i^j u_j$ , le caractère 1 fois covariant de la composante  $u_i$  est bien montré. On peut aussi le voir de façon alternative en remarquant que  $u_i$  s'obtient comme produit contracté d'un tenseur  $g_{ij}$  2 fois covariant, par un tenseur  $u^j$ , 1 fois contravariant.

$$u_i = g_{ij}u^j \quad \text{Eq. 34. c}$$

Cette relation peut se mettre sous forme matricielle, si on convient de ranger les composantes  $u_i$  et  $u^i$  respectivement dans les matrices colonnes  $u$  et  $U$ , cette formule se réécrit

$$u = gU \quad \text{Eq. 34. d}$$

Comme la métrique est symétrique en général, on peut tout aussi bien écrire

$$\tilde{u} = \tilde{U}g \quad \text{Eq. 34. e}$$

Les composantes « contravariantes » obéissent à une loi de changement de base **inverse** de celle des vecteurs de base (multiplication par la matrice de passage inversée).

Une quantité 1 fois covariante ou 1 fois contravariante peut être représentée par une matrice colonne ou matrice ligne suivant le calcul dans lequel elle apparaît.

*Remarques :*

- Une suite covariante par changement de base est repérée par un indice inférieur.
- Une suite contravariante par changement de base est repérée par un indice supérieur.
- Les vecteurs base  $(e_i)$  d'un espace vectoriel  $E$  forment une suite covariante,  $(e_i)$
- les vecteurs de la base duale  $(e^{i*})$  constituent une base contravariante  $(e^{i*})$

- Les vecteurs de l'espace vectoriel  $E$  sont des vecteurs dont les composantes constituent une suite contravariante  $u = u^i e_i$
- Les vecteurs de l'espace dual  $E^*$  sont des vecteurs dont les composantes constituent une suite covariante  $u^{(*)} = u_i e^{i*}$

Tableau récapitulatif

Base (1) $V = V^I \vec{E}_I$ Base (2) $v = v^i \vec{e}_i$	
Base (1) $\implies$ Base (2) $\vec{E}_I = a^i_I \vec{e}_i$ (Matrice A) $V^I = b^I_i v^i$ (Matrice B = A <sup>-1</sup> )	Base (2) $\implies$ Base (1) $\vec{e}_i = b^I_i \vec{E}_I$ (Matrice B = A <sup>-1</sup> ) $v^i = a^i_I V^I$ (Matrice A)

Fig. 23 : Tableau récapitulatif de changement de base

#### 1.4.6.9 Changement de base

Le changement de coordonnées correspond à un changement de base et à l'application identité qui ne change rien aux vecteurs. Il change seulement les coordonnées des vecteurs en changeant la base.

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une base  $(b_i)$  et soit  $(B_i)$  une « nouvelle base » de  $E$ . Ces deux bases de  $E$  sont indexées par  $\{1, \dots, n\}$  où  $n = \text{Dim}(E)$ . Soit  $x$  un vecteur de  $E$ , On exprime le vecteur  $x$  dans les deux bases de  $E$

La définition d'une base sur un espace vectoriel n'est pas unique. Cependant les vecteurs ont une décomposition unique sur chaque autre base.

$$x = \sum_{i=0}^N x^i b_i \quad x = \sum_{i=0}^N X^i B_i \quad \text{Eq. 35}$$

Il est important de savoir que lorsque l'on souhaite procéder à un changement de base de la base  $(b_i)$  à la base  $(B_i)$  :

- L'application linéaire qui intervient dans un changement de base est l'identité, car on ne change rien aux vecteurs. On change seulement les coordonnées des vecteurs dans une base
- La matrice de passage contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $(B_i)$  exprimées dans l'ancienne base  $(b_i)$ . A partir de ces deux données on retrouve la définition de la matrice de passage  $[A_i]$  dites « de  $(b_i)$  à  $(B_i)$  »

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_N \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 36}$$

#### 1.4.6.10 Espace vectoriel dual

L'espace dual d'un espace vectoriel est l'ensemble de toutes les formes linéaires définies sur cet espace (c'est à dire l'ensemble de toutes les applications linéaires définies de cet espace dans son corps de base). La dualité est un instrument technique intervenant souvent en mathématiques.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors le dual de E possède la même dimension que E. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de E. Considérons les n formes linéaires  $(e_i^*)$  avec  $i=1, \dots, n$  définies par

$$e^{i*}(e_j) = \delta_{ij} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n \quad \text{Eq. 37}$$

Où  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker. Alors la famille  $(e^{1*}, \dots, e^{n*})$  est une base de l'espace dual  $E^*$  appelée **base duale** de la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

#### 1.4.7 Calcul tensoriel

##### 1.4.7.1 Introduction

Le calcul tensoriel ([16],[17]) est un outil mathématique systématiquement utilisé dans de nombreux domaines de la physique, notamment pour l'étude des propriétés mécaniques et électromagnétiques des matériaux, de la mécanique classique ou relativiste. Au-delà de son intérêt mathématique, la nécessité d'utiliser le calcul tensoriel en physique est une conséquence directe du postulat fondamental suivant : « *une grandeur physique possède une existence intrinsèque, indépendante de tout système de référence* ». Le calcul tensoriel est donc le formalisme qui permet d'exprimer les lois de la physique sous une forme indépendante du système de référence choisi. L'écriture tensorielle d'une relation physique constitue le moyen le plus élégant de montrer qu'elle est invariante par changement de référentiel. Puisque cette invariance lui assure sa validité, c'est, sur le plan théorique, l'outil le plus puissant et le plus convainquant permettant de garantir la validité d'une loi physique. La notion mathématique d'un tenseur est réalisée d'une manière plus rigoureuse par l'algèbre linéaire. Dans le langage de l'algèbre linéaire, un système de coordonnées est une base et la loi de transformation est fournie par une matrice de changement de base. En outre, la définition d'un tenseur peut être donnée sans faire référence aux systèmes de coordonnées (aux bases), en utilisant la notion d'application multilinéaire et d'espace vectoriel dual.

En Mathématique, un tenseur est généralement une fonction des coordonnées de l'espace, défini dans un espace à  $n$  dimensions par  $n^k$  composantes, où  $k$  est l'ordre du tenseur. Dans l'espace euclidien à trois dimensions, un tenseur d'ordre zéro est un scalaire, un tenseur d'ordre un est un vecteur, et un tenseur d'ordre 2 est une matrice. Dans la suite nous exposons les éléments de base nécessaires à la compréhension de l'analyse tensorielle.

##### 1.4.7.2 Convention d'Einstein

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , soit  $\{e_0, e_1, \dots, e_i, \dots\}$  une base quelconque de cet espace, et soit  $\mathbf{V}$  un vecteur de  $E$ . On convient de numéroter avec un indice en haut les composantes du vecteur, et avec un indice en bas les vecteurs de base.

Le vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrit donc:

$$V = \sum_{i=0}^N V^i e_i \quad \text{Eq. 38. a}$$

La convention d'Einstein consiste à omettre d'écrire le symbole sommation. On écrira donc:

$$V = V^i e_i \quad \text{Eq. 38. b}$$

On convient qu'il s'agit d'une sommation par le fait que le même indice se répète deux fois, une fois en haut et une fois en bas.

Par exemple, pour  $n=3$ , on a :

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3 \quad \text{Eq. 38. c}$$

#### 1.4.7.3 Produit tensoriel de deux espaces

Donnons nous deux espaces vectoriels,  $E_1$  de dimension  $n_1$ , et  $E_2$  de dimension  $n_2$ . Nous associons à ces deux espaces un autre espace vectoriel que nous notons  $E_{1,2}$  de dimension  $n_1 * n_2$ . Comme pour tout espace vectoriel nous définissons une loi interne « + » et une loi externe « \* » sur cet espace vectoriel. Cette association se fait par la définition d'une loi  $\otimes$ , appelée multiplication tensorielle, elle relie un vecteur  $u$  de  $E_1$  et un vecteur  $v$  de  $E_2$  à un vecteur  $u \otimes v$  de  $E_{1,2}$ . La suite constituée des produits tensoriels entre les vecteurs base de l'espace  $E_1$  et les vecteurs base de l'espace  $E_2$  définit les vecteurs base de l'espace  $E_{1,2}$ , sa représentation matricielle est un tenseur. Il est d'ordre deux (construit à partir de deux espaces vectoriels).

Nous allons imposer à cette loi d'association qui est la multiplication tensorielle, des propriétés particulières :

- Distributivité par rapport aux additions vectorielles :

$$\begin{aligned} u \otimes (v_1 + v_2) &= u \otimes v_1 + u \otimes v_2 \\ (u_1 + u_2) \otimes v &= u_1 \otimes v + u_2 \otimes v \end{aligned} \quad \text{Eq. 39. a}$$

- Associativité de la multiplication par un scalaire :

$$(\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v) \quad \text{Eq. 39. b}$$

- Définition des vecteurs base de l'espace vectoriel  $E_{1,2}$  :

Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  est une base de  $E_1$  et  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  est une base de  $E_2$ , alors les  $n_1 n_2$  vecteurs  $e_i \otimes f_j$  forment une base d'un espace  $E_{1,2}$ . Un élément quelconque  $t$  de cet espace est appelé un tenseur et peut s'écrire sous la forme

$$t = t^{ij} e_i \otimes f_j \quad \text{Eq. 39. c}$$

L'espace  $E_{1,2}$  est appelé produit tensoriel de  $E_1$  et  $E_2$ , il est noté  $E_1 \otimes E_2$ . L'élément  $u \otimes v$  de cet espace est appelé le produit tensoriel des deux vecteurs  $u$  et  $v$ . la base  $\{a_{ij} = e_i \otimes f_j\}$  de  $E_1 \otimes E_2$  s'appelle la base associée aux bases  $\{e_i\}$  et  $\{f_j\}$ . Une généralisation pourrait être faite pour la construction d'un tenseur d'ordre  $n$  à partir de  $n$  espaces vectoriels.

#### 1.4.7.4 Variance et tenseur

On qualifie un tenseur (élément de l'espace produit tensoriel) par le type de variance de ses composantes, cette propriété est définie à partir des espaces vectoriels qui construisent le tenseur. Ainsi un tenseur construit à partir de  $n$  espaces vectoriels classiques (dont les éléments sont les vecteurs) et de  $m$  espaces duaux (dont les éléments sont les formes multilinéaires) possède des composantes  $n$  fois contravariantes et  $m$  fois covariantes à la fois.

#### 1.4.7.5 Le changement de base

Un tenseur sera donc présenté par une suite à  $(m+n)$  indices. Le nombre  $(m+n)$  des indices correspond à l'ordre ou le rang du tenseur, et leur disposition à son type (espaces vectoriels à partir des quels il a été construit). A chaque indice est associée une variance explicitant la loi de changement de base standard.

Soit un espace vectoriel  $E$  muni de deux bases  $(e_i)$ , et  $(E_i)$ , et soit  $E^*$  l'espace duale de  $E$ , il est également muni de deux bases  $(e^{k*})$  et  $(E^{k*})$ .

$t$  est un tenseur de dimension 2 construit à partir du produit tensoriel entre les deux bases  $(e_i)$  et  $(e^{k*})$ .  $t_i^k = \vec{e}_i \otimes e^{*k}$

Nous effectuons un changement de base  $\{\vec{E}_I = a_i^I \vec{e}_i \text{ et } \vec{E}^{*K} = b_K^k e^{*k}\}$

Le produit tensoriel entre les nouvelles bases exprimé en fonction du produit tensoriel entre les anciennes bases

$$\vec{E}_I \otimes \vec{E}^{*K} = a_i^I b_K^k \vec{e}_i \otimes e^{*k} \quad \text{Eq. 40}$$

Nous obtenons l'expression permettant d'effectuer un changement de base du tenseur  $t$

$$T_K^I = b_i^I a_k^k t_k^{ij} \quad \text{Eq. 41}$$

#### 1.4.7.6 Tenseur métrique

Le tenseur  $g$  de composantes  $g_{ij}$ , attaché à un espace vectoriel  $E_n$  dans la base  $(e_i)$ , est appelé tenseur métrique de cet espace vectoriel.

Son importance est capitale en géométrie, ou les connaissances des neuf produits scalaires  $g_{ij}$  détermine les longueurs des vecteurs de base et les angles qu'ils font deux à deux.

Et par conséquent introduit la notion de distance dans un espace vectoriel. En plus, en ce qui concerne les calculs, la suite  $(g_{ij})$  sera d'une utilité permanente. Nous l'avons déjà utilisée implicitement en introduisant les composantes covariantes des vecteurs.

Les quantités  $g_{ij}$  sont fondamentales ; elles déterminent la métrique de l'espace vectoriel. Ces valeurs dépendent de 2 indices et il est très utile de représenter cette métrique sous forme d'une matrice  $g$  dont les éléments sont précisément  $g_{ij}$ . Si le produit scalaire est propriété propre à l'espace vectoriel, indépendamment de tout choix de base, les quantités  $g_{ij}$  dépendent elles manifestement de la base.

Considérons la suite  $(g_{ij})$  des neuf produits scalaires des vecteurs de la base  $(\vec{e}_i)$  :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j \quad \text{Eq. 42}$$

Dans une autre base les éléments s'écrivent

$$G_{IJ} = \vec{E}_I \bullet \vec{E}_J \quad \text{Eq. 43}$$

avec  $\vec{E}_I = a_i^I \vec{e}_i$

On a donc  $G_{IJ} = \vec{E}_I \bullet \vec{E}_J = (a_i^I \vec{e}_i) \bullet (a_j^J \vec{e}_j) = a_i^I a_j^J \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = a_i^I a_j^J g_{ij} \quad \text{Eq. 45}$

Nous voyons que par changement de base, les deux indices se transforment de manière covariante, donc la suite  $(g_{ij})$  est tensorielle : elle constitue la suite des composantes d'un tenseur  $g_{ij}$  ( $e^{*i} \otimes e^{*j}$ ), ce tenseur est appelé le tenseur fondamental.

1.4.7.7 Propriétés du tenseur métrique :

Le tenseur métrique est un tenseur de rang 2 (c'est-à-dire une forme bilinéaire) défini sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie:

$$\begin{aligned} g &: E \times E \rightarrow R \\ (u, v) &\rightarrow g(u, v) \end{aligned}$$

$g$  est symétrique :  $\forall u, v \in E \quad g(u, v) = g(v, u)$  Eq. 46. a

non dégénérée :  $[\forall v \in E, g(u, v) = 0] \Rightarrow u = 0$  Eq. 46. b

et définie positive:  $\forall x \in E \quad g(x, x) \geq 0$  Eq. 46. c

On note le produit scalaire de 2 vecteurs  $u^i e_i$  et  $v^j e_j$  de la manière suivante:

$$g(u, v) = g(u^i e_i, v^j e_j) = u^i v^j g(e_i, e_j) = u^i v^j g_{ij} \quad \text{Eq. 47}$$

La notation  $g_{ij}$  est conventionnellement utilisée pour les composantes du tenseur métrique.

Ces notions sont utilisées par la suite, notamment dans le formalisme de la méthode modale qui sera introduite au 3<sup>ème</sup> chapitre, et dans l'approche topologique que nous présentons au dernier chapitre.

1.5 OBJECTIFS :

L'objectif de cette thèse est d'étudier la susceptibilité électromagnétique d'un équipement embarqué. Pour arriver à cette fin nous introduisons une approche topologique qui permet d'établir un modèle électrique équivalent à notre problème et présente ainsi une étude rapide du problème comparée aux méthodes numériques classiques. Pour la validation des résultats nous disposons de moyens numériques, tels que le code commercial FEKO, le solver TEMSI-FD de Xlim, et la méthode IEM/MoM. Nous listons dans la suite les objectifs principaux que nous nous fixons dans notre étude

Objectif 1 : Se fixer un modèle du problème en question

- Cavité métallique ( $\sigma=\infty$ ) de forme parallélépipède, de dimensions (0.3, 0.12, 0.3)m suivant les axes x, y, z. Les murs présentent une épaisseur nulle. La cavité présente une ouverture rectangulaire de dimensions (0.1, 0.005)m suivant les axes x, y
- Pour prendre en compte la présence des cartes électroniques à l'intérieur de l'enceinte nous considérons des obstacles métalliques d'épaisseur nulle insérés dans le plan transverse de la boîte
- L'excitation est située à l'extérieur de l'enceinte. Il s'agit d'une onde plane de polarisation normale. Le champ électrique est suivant la direction y, le vecteur de propagation est perpendiculaire au plan contenant l'ouverture.

Objectif 2 : Etude de l'efficacité de blindage de la cavité vide

- Application du formalisme de la IEM/MoM/Galerkin au problème
- Etablissement du modèle électrique équivalent d'une cavité présentant avec ouverture, le modèle est basé sur la théorie des lignes de transmission.
- Validation avec le solveur TEMSI-FD

Objectif 3 : Etude de l'efficacité de blindage du système complet {cavité+plans de masse}

- Introduction de la méthode modale pour l'élaboration des modèles électriques des discontinuités transverses insérées dans le boîtier
- Injection de ces modèles électriques dans le modèle d'une cavité avec ouverture
- Etude de l'efficacité de blindage à partir du modèle électrique complet
- Validation avec le code commercial FEKO
- Validation avec le solveur TEMSI

Objectif 4 : Introduction au formalisme de KRON

- Etablissement d'une structure topologique permettant la modélisation des différentes interactions électromagnétique dans l'étude CEM des systèmes complexes.
- Superposition d'une structure algébrique permettant d définir les différentes relations métriques entre éléments de la structure topologique.
- Application de cet approche topologique au problème étudié.

*1.6 CONCLUSION*

Au cours de ce chapitre nous avons tenté de présenter le problème. Cela a permis de reconsidérer les risques CEM que présente notre système. La compréhension du problème nous a également permis de choisir entre les méthodes numériques celles qui sont adaptées à notre problème. Nous avons ensuite présenté quelques notions de base de l'algèbre linéaire indispensables à la compréhension du langage mathématique employé dans cette thèse. Le formalisme mathématique du problème permet d'élaborer des modèles électriques. Cet aspect présente trois avantages majeurs. D'abord en appliquant les lois de Kirchhoff au modèle électrique équivalent, nous définissons un système d'équations facile à résoudre, et qui occupe peu d'espace mémoire et prend moins de temps de calculs comparé aux méthodes numériques classiques. Deuxième point, la méthode est adaptable facilement de point de vue fréquentiel, et prend facilement en compte toute modification de la structure étudiée (ajout ou suppression de structures...). Et enfin la méthode est basée sur un formalisme mathématique rigoureux qui présente une grande facilité dans la modélisation

## CHAPITRE II : ETUDE DE L'EFFICACITE DE BLINDAGE D'UNE CAVITE VIDE PRESENTANT UNE OU PLUSIEURS OUVERTURES

### 1.7 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'efficacité de blindage d'une enceinte métallique vide présentant des ouvertures placées à priori sur deux faces opposées de la structure. Le système est illuminé par une onde plane de polarisation verticale. Dans un premier temps nous sommes intéressés à une méthode basée sur la IEM/MoM [8], [20], [22]. D'abord on exprime le champ électromagnétique à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité. Ensuite en appliquant les relations de continuité de champ au niveau des ouvertures nous établissons un système d'équations intégrales. Les inconnus du système sont les champs couplés au niveau des ouvertures. En résolvant ce système avec la méthode des MoM/Galerkin. Nous déterminons les niveaux de champ couplé au niveau des ouvertures, et nous pouvons alors calculer le champ en tout point à l'intérieur du boîtier. Cette méthode pourtant purement analytique permet de projeter un raisonnement algébrique au problème. Cet aspect sera également abordé dans ce chapitre.

Dans un deuxième temps nous proposons une méthode rapide qui permet la modélisation électrique de la structure. Cette méthode est basée sur la théorie des lignes de transmission [4], [21], [23]. Grâce à son aspect circuit cette méthode présente un grand intérêt dans la suite pour l'application de notre approche topologique de Kron [3].

Les résultats obtenus ont été validés avec le solveur TEMSI\_FD (FDTD) et avec le code commercial FEKO (MoM).

## 1.8 RESOLUTION DU PROBLEME AVEC LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES

### 1.8.1 Formulation du problème

Nous considérons un boîtier métallique parallélépipédique présentant des ouvertures rectangulaires identiques sur les faces situées au plan  $z=0$ , et au plan  $z=c$  comme le montre la figure.

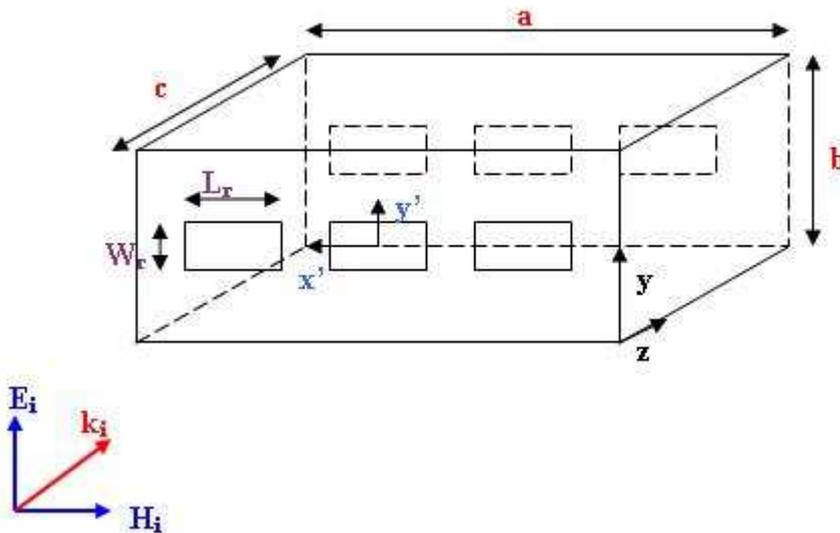


Fig. 24 : Géométrie du système étudié

Sur un équipement l'existence des ouvertures est indispensable, elles sont destinées aux connections E/S, à l'aération, etc. Dans le chapitre I nous avons parlé des problèmes CEM que peuvent occasionner les ouvertures, et nous avons expliqué l'intérêt de l'étude du couplage par ouvertures. En effet un équipement intègre des cartes électroniques susceptibles de perturber ou d'être perturbées par l'environnement électronique situé à l'extérieur du boîtier. Certains éléments circuit tel que les bobines sur les cartes ou les câbles qui passent à travers les ouvertures sont des sources rayonnantes. Le champ électromagnétique rayonné par ces sources viendra se coupler sur les ouvertures et sera par la suite rayonné vers d'autres composants électroniques à proximité. Aussi le champ électromagnétique rayonné par des sources se situant à l'extérieur du boîtier viendra se coupler sur les ouvertures et sera rayonné à l'intérieur du boîtier. Comme nous l'avons indiqué au chapitre I, les ouvertures représentent une source d'interférence en émission et en réception.

Dans notre problème, nous étudions uniquement les ouvertures comme sources d'interférences en réception. Vu les dimensions géométriques des ouvertures (fentes), L'agression électromagnétique extérieure sera efficace en considérons une onde plane de polarisation verticale comme indiqué sur la figure 24.

### 1.8.2 Séparation de l'intérieur de l'extérieur

Dans la suite de notre étude nous faisons l'hypothèse que les faces contenant les ouvertures sont infinies. Ainsi nous ne considérons pas de couplage entre les ouvertures situées au plan  $z=0$  et celles situées au plan  $z=c$ . et le champ exciteur ne se couple pas directement sur les ouvertures situées sur la face du plan  $z=c$ , mais uniquement sur celles situées au plan  $z=0$ . En revanche nous tenons compte du couplage entre ouvertures situées sur la même face.

Cela définit trois zones de calcul, dans lesquelles le champ électromagnétique peut être exprimé de manière unique, ces zones de calcul sont illustrées sur la figure 25.

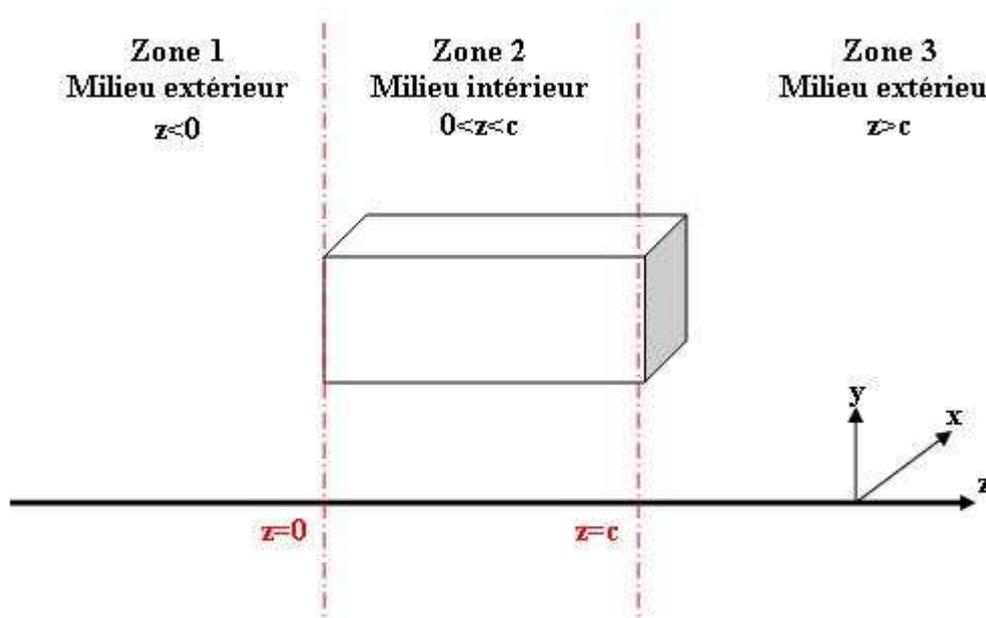


Fig. 25 : Séparation de l'extérieur de l'intérieur

Ensuite nous traitons le problème en deux étapes consécutives. Tout d'abord nous exprimons le champ électromagnétique dans chacune des trois zones. Ensuite en appliquant les relations de continuité du champ électromagnétique au plan  $z=0$  et au plan  $z=c$  nous établissons le

système d'équations intégrales. Pour résoudre le système nous appliquons la méthode des MoM/Galerkin. Ainsi nous serons capables de calculer la valeur du champ couplé au niveau des ouvertures et d'en déduire la valeur du champ en tout point à l'intérieur de l'enceinte.

### 1.8.3 Interprétation mathématique

Un raisonnement algébrique pourrait être projeté sur notre méthode analytique. Chacune des trois zones de calcul  $Z_i$  peut être associée à un espace vectoriel  $E_i$  engendré par les vecteurs base des modes propres de la zone  $Z_i$ . Les éléments de cet espace vectoriel sont les grandeurs électromagnétiques (champ électrique, magnétique, potentiel magnétique, courant surfacique...) de la zone  $Z_i$ .

La relation de continuité traduit le fait que l'intersection entre les espaces vectoriels associés aux deux zones adjacentes n'est pas nulle. Elle est égale à l'espace vectoriel associé à l'interface  $i$  séparant les deux zones adjacentes, cet espace est engendré par les vecteurs base des ouvertures situées sur l'interface  $i$ . L'application de Galerkin revient à faire le produit scalaire des bases de développement modales des zones  $Z_i$  avec les vecteurs base des ouvertures. En algèbre cela est équivalent à un changement de base. Le problème est ainsi ramené au plan des interfaces et résolu dans la base de développement des ouvertures.

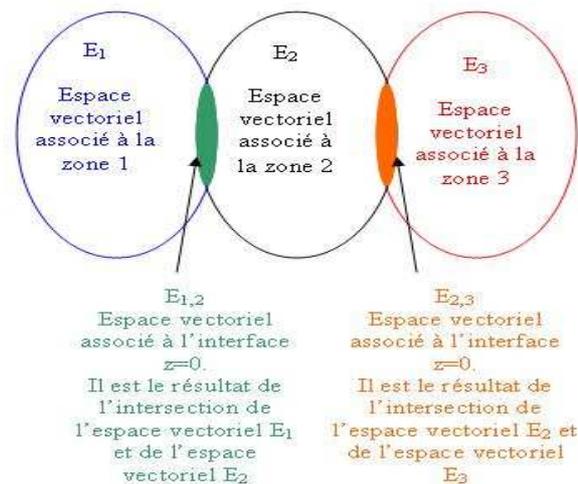


Fig. 26 : Interprétation mathématique

Dans la suite nous allons procéder à exprimer les fonctions de base du développement modal relatives à chaque zone  $Z_i$  ou à chaque espace vectoriel  $E_i$ .

#### 1.8.4 Expressions du champ dans les différentes zones de calcul

##### 1.8.4.1 Champ au niveau des ouvertures

Le champ électromagnétique exciteur est rayonné dans l'espace, il vient en interaction avec le boîtier métallique. Les murs du boîtier sont métalliques et sont considérés comme parfaitement conducteurs. Le champ exciteur ne pourra se coupler qu'au niveau des ouvertures.

Les ouvertures sont de tailles identiques, la longueur d'une ouverture « r » est égale à L, sa largeur est égale à W qui est inférieure à la moitié de la longueur d'onde du signal exciteur dans la bande fréquentielle de notre étude. Par conséquent la variation de la composante longitudinale du champ électrique suivant l'axe (OY) est nulle. La génératrice des modes TM est donc nulle. Seuls les modes de type TE peuvent être excités au niveau de l'ouverture. La figure 26 illustre cela.

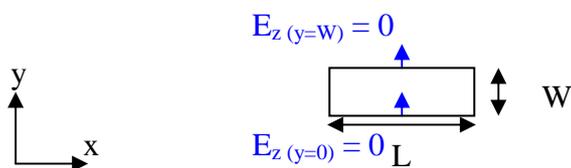


Fig. 26 : les conditions aux limites imposées par la géométrie de l'ouverture à la composante longitudinale du champ électrique

Compte tenu des conditions aux limites imposées par l'ouverture nous exprimons le champ électrique couplé au niveau de l'ouverture « r » située au plan  $z=0$ , comme combinaison linéaire des modes TE

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ow} = & \sum_p \sum_q U_{pq} \sin\left(\frac{p\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + x + x_r\right)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{W}\left(\frac{W}{2} + y - y_r\right)\right) \vec{u}_y \\ & + \sum_p \sum_q V_{pq} \cos\left(\frac{p\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + x + x_r\right)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{W}\left(\frac{W}{2} + y - y_r\right)\right) \vec{u}_x \end{aligned} \quad \text{Eq. 48}$$

Les  $U_{pq}$  et  $V_{pq}$  sont les poids des modes des ouvertures situées au plan  $z=0$ . Ce développement modal est exprimé dans le repère relatif à l'ouverture « r » :  $(x', y')$ .

Le couple de coordonnées  $(x_r, y_r)$  représente les coordonnées du point centre de l'ouverture r dans le repère relatif associé à cette ouverture comme montré sur la figure ci dessous

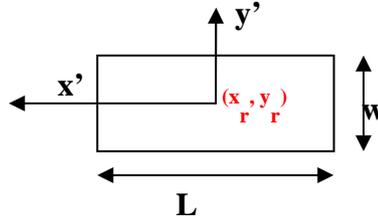


Fig. 27 : Repère de l'ouverture

On pose

$$\begin{aligned}\phi_{rpqy} &= \cos\left(\frac{p\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + x + x_r\right)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{W}\left(\frac{W}{2} + y - y_r\right)\right) \\ \psi_{rpqx} &= \sin\left(\frac{p\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + x + x_r\right)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{W}\left(\frac{W}{2} + y - y_r\right)\right)\end{aligned}\quad \text{Eq. 49}$$

L'expression du champ électrique couplé sur toutes les ouvertures du plan  $z=0$  est donnée par l'expression ci-dessous

$$\vec{E}_{ouv} = \sum_{r=1} \sum_p \sum_q U_{rpq} (\psi_{rpqy} \vec{y}) + \sum_p \sum_q V_{rpq} (\phi_{rpqx} \vec{x}) = \sum_{r=1}^R \vec{E}_{r1}\quad \text{Eq. 50}$$

Par analogie nous déduisons l'expression du champ électrique couplé au niveau des ouvertures situées au plan  $z=c$

$$\vec{E}_{ouv} = \sum_{r=1} \sum_p \sum_q A_{rpq} (\psi_{rpqy} \vec{y}) + \sum_p \sum_q B_{rpq} (\phi_{rpqx} \vec{x}) = \sum_{r=1}^R \vec{E}_{r2}\quad \text{Eq. 51}$$

Les  $A_{rpq}$  et  $B_{rpq}$  sont les poids des modes des ouvertures situées au plan  $z=0$ . Ce développement modal est exprimé dans le repère relatif à l'ouverture « r » :  $(x', y')$ .

#### 1.8.4.1.1 Expression du courant magnétique surfacique au niveau des ouvertures

D'après le théorème d'équivalence, les ouvertures pourraient être remplacées par des courants magnétiques surfaciques que l'on exprime à partir du champ électrique couplé au niveau des ouvertures. (dans ce cas les ouvertures sont remplacées par des court-circuits).

D'après l'équation 52 liant le courants magnétique surfacique au champ électrique

$$\vec{M}_{ouv} = -\vec{n} \wedge \vec{E} \quad \text{Eq. 52}$$

Nous déduisons l'expression du courant magnétique équivalent aux ouvertures situées au plan  $z=0$ ,

$$\vec{M}_{ouv} = \sum_{r=1}^R \sum_p \sum_q V_{rpq} (-\phi_{rpqy} \vec{y}) + \sum_p \sum_q U_{rpq} (\psi_{rpqx} \vec{x}) = \sum_{r=1}^R \vec{M}_{r1} \quad \text{Eq. 53}$$

Les ouvertures situées au plan  $z=c$  sont remplacées par le courant magnétique équivalent exprimé par la formule ci-dessous

$$\vec{M}_{ouv} = \sum_{r=1}^R \sum_p \sum_q A_{rpq} (\phi_{rpqy} \vec{y}) + \sum_p \sum_q B_{rpq} (-\psi_{rpqx} \vec{x}) = \sum_{r=1}^R \vec{M}_{r2} \quad \text{Eq. 54}$$

#### 1.8.4.1.2 Interprétation mathématique

D'un point de vue mathématique, les expressions des champs électriques ou des courants magnétiques surfaciques permettent d'associer l'interface à un espace vectoriel engendré par les modes TE des ouvertures. Les éléments de cet espace vectoriel sont le champ électromagnétique (courant magnétique,..). La dimension de cet espace vectoriel est égale au nombre de modes évanescents, elle est donc fixée par la bande fréquentielle d'étude. Compte tenu de la structure, nous remarquons qu'il s'agit de modes quantifiés d'où la somme discrète sur les indices p et q.

#### 1.8.4.2 Champ au milieu extérieur

Le champ électromagnétique dans le milieu extérieur est la somme du rayonnement de l'onde excitatrice et du champ couplé sur les ouvertures. Dans la suite nous allons déterminer les expressions explicites du champ incident et du champ réfléchi par les ouvertures vers l'extérieur.

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref} \quad \text{Eq. 55}$$

## Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

### 1.8.4.2.1 Excitation

Dans un repère de coordonnées sphériques l'expression générale du champ électrique rayonné par une onde plane est donnée par la formule

$$\vec{E}_i = (E_\theta \vec{u}_\theta + E_\psi \vec{u}_\psi) e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \text{Eq. 56. a}$$

$$\vec{E}_i = (|E_i| \sin(\alpha) \vec{u}_\theta + |E_i| \cos(\alpha) \vec{u}_\psi) e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \text{Eq. 56. b}$$

La variation temporelle est donnée par le facteur  $e^{j\omega t}$  que nous ne représentons pas dans cette écriture.

Les expressions du vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  et du vecteur de déplacement  $\vec{r}$  dans un repère cartésien sont illustrées ci-dessous

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_0 \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) \\ k_0 \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) \\ k_0 \cos(\theta_i) \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = (x \quad y \quad z) \quad \text{Eq. 57}$$

Le produit scalaire entre le vecteur d'onde et le vecteur de déplacement est donné par la formule

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = -k_0 \sin(\theta_i) ((x \cos(\phi_i) + y \sin(\phi_i)) - zk \cos(\theta_i)) \quad \text{Eq. 58}$$

Pour une incidence verticale,  $\alpha = 0$ ,  $\theta_i = 0$ , et  $\phi_i = 0$ . Par conséquent pour le champ magnétique  $\vec{H}_i = |\vec{H}_i| u_x$ , et pour le champ électrique  $\vec{E}_i = |\vec{E}_i| u_y$

### 1.8.4.2.2 Champ réfléchi par les ouvertures du plan $z=0$ vers le milieu extérieur $z < 0$

Le champ couplé au niveau d'une ouverture donnée va être rayonné par cette dernière vers l'espace voisin. Pour calculer le rayonnement d'une ouverture donnée en espace libre nous appliquons le théorème d'Huygens.

Sur la figure 28, nous disposons d'un plan de masse d'épaisseur nulle, percé d'une ouverture rectangulaire. Le champ électrique couplé sur cette dernière est  $E_{\text{ouv}}$

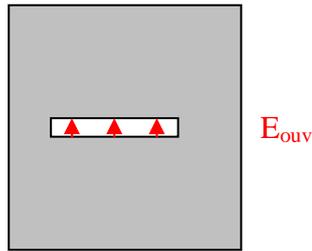


Fig. 28 : Champ électrique couplé au niveau de la fente

La surface d'Huygens appropriée à ce cas de figure est un plan conducteur parfait qui viendra court-circuiter l'ouverture.

Nous définissons  $M_r$  le courant surfacique magnétique sur l'ouverture court-circuitée « r » à partir de la formule suivante

$$\vec{M}_r = -\vec{n} \wedge \vec{E}_{ouv} \quad \text{Eq. 59}$$

D'après la théorie des images ; en présence du plan conducteur parfait, le rayonnement de l'ouverture est égal au double de rayonnement du courant  $M_r$ .

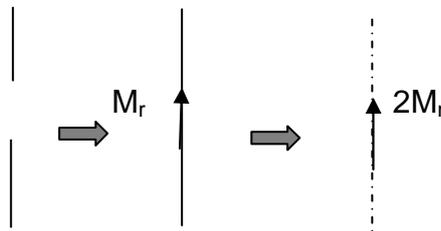


Fig. 29 : Application de la surface d'Huygens et du théorème d'équivalence

D'où l'expression du vecteur potentiel magnétique rayonné par le courant magnétique surfacique

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \iint_{ouv} (2\vec{M}_r) \frac{e^{-jk_0R}}{R} ds \quad \text{Eq. 60}$$

Le calcul du champ électrique rayonné à partir du vecteur potentiel magnétique s'exprime par la relation suivante

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{F} \quad \text{Eq. 61}$$

Après calculs [7] nous obtenons l'expression des trois composantes de champ électrique rayonné par les ouvertures du plan  $z=0$  vers le milieu extérieur

$$E_x^I = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{-V_{rpq}}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqy} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 61. a}$$

$$E_y^I = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{-U_{rpq}}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqy} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 61. b}$$

$$E_z^I = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{-1}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \frac{(V_{rpq} \phi_{rpqy} k_x + U_{rpq} \phi_{rpqx} k_y)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 61. c}$$

Le calcul du champ magnétique à partir du vecteur potentiel magnétique est donné par l'équation suivante

$$H = \frac{-j\omega}{k_0^2} [k_0^2 + \nabla(\nabla \cdot)] F \quad \text{Eq. 62}$$

Après calculs [7] nous obtenons l'expression des trois composantes de champ magnétique rayonné par les ouvertures du plan  $z=0$  vers le milieu extérieur

$$H_x^I = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 U_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqx} \frac{(k_0^2 - k_x^2)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y + \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0 U_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqx} \frac{(-k_0 k_x)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 62. a}$$

$$H_y^I = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0 V_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqx} \frac{(k_0^2 - k_x^2)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y + \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 U_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqx} \frac{(-k_0 k_x)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 62. b}$$

$$H_z^I = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} (U_{rpq} \psi_{rpqx} k_x - V_{rpq} \phi_{rpqx} k_y) e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 62. c}$$

$\psi_{rpqx}^*$  et  $\phi_{rpqy}^*$  Sont les transformées de Fourier des fonctions base de l'ouverture  $\psi_{rpqx}$  et  $\phi_{rpqy}$

Nous les exprimons en annexes.

## Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

### 1.8.4.2.3 Champ rayonné par les ouvertures du plan $z=c$ vers le milieu extérieur $z>c$

Le champ électromagnétique dans cette zone est le résultat du rayonnement du courant magnétique à travers les ouvertures situées au plan  $z=c$ .

Les composantes du champ électrique rayonné par les ouvertures du plan  $z=c$  vers l'extérieur sont données par les équations suivantes

$$E_x^{III} = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{A_{rpq}}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqy} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 63. a}$$

$$E_y^{III} = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{B_{rpq}}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqy} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 63. b}$$

$$E_z^{III} = \sum_{r=1} \sum_{p,q} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \frac{(A_{rpq} \phi_{rpqy} k_x + B_{rpq} \phi_{rpqx} k_y)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 63. c}$$

Les composantes du champ magnétique rayonné par les ouvertures du plan  $z=c$  vers l'extérieur sont données par les équations suivantes

$$H_x^{III} = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqx} \frac{(k_0^2 - k_x^2)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \\ + \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqx} \frac{(-k_0 k_x)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 64. a}$$

$$H_y^{III} = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \phi_{rpqx} \frac{(k_0^2 - k_x^2)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \\ + \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} \psi_{rpqx} \frac{(-k_0 k_x)}{k_z} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 64. b}$$

$$H_z^{III} = \sum_{r=1} \sum_{pq} \frac{-\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} e^{-jk_z|z-z'|} (B_{rpq} \psi_{rpqx} k_x - A_{rpq} \phi_{rpqx} k_y) e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 65.}$$

### 1.8.4.2.4 Interprétation mathématique

D'après l'expression du champ magnétique au milieu extérieur nous remarquons qu'il s'exprime comme une double intégrale calculée dans toutes les directions de l'espace ( $k_x, k_y$ ). Mathématiquement la base de développement modale que l'on peut associer à l'espace libre est une base continue vue qu'il existe une infinité de directions que peut prendre le  $e^{-jkr}$  d'où

la nécessité d'une intégrale double. Cela définit un espace vectoriel de dimension infinie. Pratiquement cette intégrale est remplacée par une somme discrète pour effectuer les calculs. On se ramène alors à un espace vectoriel de dimension finie.

#### 1.8.4.3 Champ rayonné par les ouvertures à l'intérieur de la cavité

Le champ électromagnétique à l'intérieur du boîtier est la superposition des champs rayonnés à travers toutes les ouvertures dans ce milieu. Considérons une ouverture « r » à laquelle nous associons le courant magnétique surfacique  $M_r$ . Le vecteur potentiel électrique rayonné par le courant magnétique  $M_r$  obéit à l'équation d'onde non homogène suivante.

$$\nabla^2 \vec{F}(x, y, z) + k_0^2 \vec{F} = -\epsilon_0 \vec{M}_r(x', y', z') \quad \text{Eq. 65}$$

Le champ électromagnétique rayonné par l'ensemble des ouvertures à l'intérieur de la cavité est lié au vecteur potentiel électrique au moyen des relations,

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{F}$$

$$\vec{H} = \frac{-j\omega}{k_0^2} (k_0^2 \vec{F} + \nabla \nabla \cdot \vec{F})$$

Nous pouvons exprimer le vecteur potentiel magnétique rayonné à l'intérieur de l'enceinte en introduisant la fonction de Green Dyadique de la structure étudiée. Cette fonction traduit les conditions aux limites imposées par le boîtier au vecteur potentiel électrique. Et fait le lien entre le point source et le point d'observation. Nous donnons l'expression des fonctions de Green dyadiques d'une cavité, associées au champ électrique, magnétique, au potentiel électrique et magnétique en annexes.

La relation 66 permet d'exprimer le vecteur potentiel magnétique à partir de la fonction de green dyadique

$$\vec{F}(x, y, z) = \iiint_{\text{source}} \tilde{G}_m(x', y', z') \cdot \vec{M}_r(x', y', z') dx' dy' dz' \quad \text{Eq. 66}$$

En remplaçant le vecteur potentiel électrique par son expression (Eq.66) dans (Eq.65) on obtient l'équation

$$\nabla^2 G_m + k_0^2 G_m = -\varepsilon_0 \bar{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Eq. 67

$\bar{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  étant l'unité de Dyade

La fonction de Green Dyadique associée au vecteur potentiel magnétique obéit à l'équation d'onde (Eq.67). Dans notre problème la fonction de Green présente deux composantes ( $G_{mxx}$ , et  $G_{myy}$ ) associées aux deux composantes du courant magnétique ( $M_{rx}$ ,  $M_{ry}$ ).

Chacune des deux composantes de la fonction de Green Dyadique obéit à l'équation d'onde. Nous obtenons alors un système de deux équations à résoudre dans les deux plans contenant les ouvertures ( $z=0$  et  $z=c$ )

$$\nabla^2 G_{mxx} + k_0^2 G_{mxx} = -\varepsilon_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad \text{Eq. 68. a}$$

$$\nabla^2 G_{myy} + k_0^2 G_{myy} = -\varepsilon_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad \text{Eq. 68. b}$$

En résolvant les équations 68 on peut établir les expressions explicites des fonctions de Green associées à notre problème. Et il nous sera possible de déduire les expressions des vecteurs potentiels magnétiques et également celles des champs électromagnétiques rayonnés à l'intérieur de la cavité. Dans la suite, ces expressions nous seront de toute utilité dans la formulation des relations de continuité du champ magnétique aux plans  $z=0$  et  $z=c$ .

#### 1.8.4.3.1 Champ électromagnétique rayonné par les ouvertures situées au plan $z=0$

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux ouvertures situées au plan  $z=0$ . Le courant surfacique magnétique a deux composantes ( $M_{rx}$ ,  $M_{ry}$ ). Nous allons établir les expressions du champ magnétique rayonné vers l'intérieur de la cavité par chacune de ces deux composantes.

##### 1.8.4.3.1.1 Champ magnétique rayonné par la composante $M_{rx}$ du courant magnétique situé au plan $z'=0$

Dans un premier temps nous procédons à la résolution de l'équation d'onde Eq. 68. a associée à la composante  $G_{xx}$  de la fonction de Green dyadique en considérant uniquement les sources situées au plan  $z'=0$ . Seule la composante x des sources magnétiques de courant est prise en

compte. L'expression de la fonction de Green Dyadique associée au vecteur potentiel électrique dû à la composante x du courant magnétique situé au plan  $z'=0$  est donnée par la formule ci-dessous.

$$G_{xx} = \sum_{m,n} \frac{\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{K_1 ab} \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \frac{\cos(k_l(z-c))}{\sin(k_l c)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \delta(z') \quad \text{Eq. 69}$$

Avec  $K_1$  la constante de propagation, donnée par la formule

$$k_l = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \text{pour } k_0^2 \geq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\text{et } k_l = -j \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} \quad \text{pour } k_0^2 \leq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\text{Et } \epsilon_{0m} = 1 \text{ si } m = 0 \text{ et } \epsilon_{0m} = 2 \text{ else}$$

À partir de l'expression de la fonction de Green Dyadique (Eq. 69) et de la formule la liant au vecteur potentiel ci dessous

$$\vec{F}_x^{Hx0(r)}(x, y, z) = \iiint_{\text{source}} \tilde{G}_{mxx}(x', y', z') \bullet \vec{M}_{rx0}(x', y', z') dx' dy' dz' \quad \text{Eq. 70}$$

Nous déduisons l'expression du potentiel vecteur magnétique dû à la composante x du courant magnétique placé à l'ouverture « r » du plan  $z'=0$

$$F_x^{Hx0} = \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \cos(k_l(z-c)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \iint_q ((\vec{M}_r(x', y', 0) \bullet \hat{x}) \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy' \quad \text{Eq. 71}$$

L'expression du potentiel vecteur électrique totale dû au rayonnement de l'ensemble des ouvertures situées au plan  $z'=0$  est donnée par la formule

$$F_x^{Hx0} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \cos(k_l(z-c)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \iint_q \psi_{rpq}(x', y') \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy' \quad \text{Eq. 72}$$

En injectant l'expression du vecteur potentiel électrique (Eq.72) dans la formule le liant au champ magnétique, nous établissons les expressions des composantes du champ magnétique totale rayonné par les composantes x des courants situés au plan  $z'=0$

$$H_x^{lx0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l(z-c)) I_{rpqmnx}$$

Eq. 73. a

$$H_y^{lx0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l(z-c)) I_{rpqmnx}$$

Eq. 73. b

$$H_z^{lx0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} (-k_l) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l(z-c)) I_{rpqmnx}$$

Eq. 74. c

Nous explicitons les expressions des fonctions  $I_{rpqmnx}$  en annexes

#### 1.8.4.3.1.2 Champ rayonné par la composante y du courant magnétique situé au plan $z'=0$

Dans ce cas la fonction de Green Dyadique solution de l'équation (Eq.68. b) s'exprime comme suivant

$$G_{yy} = \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{K_l ab} \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \frac{\cos(k_l(z-c))}{\sin(k_l c)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \delta(z')$$

Eq. 75

À partir de l'expression de la fonction de Green Dyadique (Eq. 75) et de la formule la liant au vecteur potentiel (Eq. 66), nous déduisons l'expression du potentiel vecteur électrique dû à la composante y de tous les courants magnétiques situés au plan  $z'=0$

$$F_y^{ly0} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \cos(k_l(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \iint_q \phi_{rpq}(x', y') \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy'$$

Eq. 76

À partir de l'expression du vecteur potentiel électrique (Eq. 76) et de la formule le liant au champ magnétique. Nous déduisons l'expression des composantes du champ magnétique rayonné par la composante y du courant magnétique rayonné par l'ensemble des ouvertures situées au plan  $z'=0$

$$H_x^{ly0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l(z-c)) I_{rpqmy}$$

Eq. 77. a

$$H_y^{ly0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} (k_0^2 - (b)^2) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l(z-c)) I_{rpqmy}$$

Eq. 77. b

$$H_z^{ly0} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} (-k_l) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l(z-c)) I_{rpqmy}$$

Eq. 77. c

Nous explicitons les expressions des fonctions  $I_{rpqmn}$  en annexes.

#### 1.8.4.3.2 Le champ électromagnétique rayonné par les ouvertures du plan $z=c$

A présent nous allons nous intéresser aux ouvertures situées au plan  $z=c$ . Le courant surfacique magnétique présente deux composantes. Nous allons établir les expressions du champ magnétique rayonné vers l'intérieur de la cavité relatif à chacune de ces deux composantes.

##### 1.8.4.3.2.1 Champ rayonné par la composante x du courant magnétique situé au plan $z'=c$

La fonction de Green associée au vecteur potentiel électrique dû à la composante x du courant magnétique situé au plan  $z'=c$  est solution de l'équation d'onde (Eq. 68. a), elle est donnée par l'expression suivante

$$G_{xx} = \sum_{m,n} \frac{\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{K_l ab} \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \frac{\cos(k_l(z-c))}{\sin(k_l c)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \delta(z'-c)$$

Eq. 78

Nous en déduisons l'expression du vecteur potentiel électrique rayonné à l'intérieur de l'enceinte par la composante x du courant magnétique rayonné par l'ensemble des ouvertures du plan  $z'=c$

$$F_x^{IIxc} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \cos(k_l z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \iint_q \psi_{rpq}(x', y') \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy'$$

Eq. 79

L'expression des composantes du champ magnétique rayonné à l'intérieur de l'enceinte par la composante x du courant magnétique rayonné par les ouvertures du plan  $z'=c$  est donnée par les équations suivantes

$$H_x^{IIxc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l z) I_{rpqmnx}$$

Eq. 80. a

$$H_y^{IIxc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l z) I_{rpqmnx}$$

Eq. 80. b

$$H_z^{IIxc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} (-k_l) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l z) I_{rpqmnx}$$

Eq. 80. c

1.8.4.3.2.2 Champ rayonné par la composante y du courant magnétique situé au plan  $z'=c$

Enfin nous exprimons la fonction de Green solution de l'équation (Eq. 68. b), seules les composantes y des courants magnétiques sont considérées, les sources sont placées au plan  $z'=c$ . l'expression de la fonction de Green Dyadique dans ce cas est donnée par la formule

$$G_{yy} = \sum_{m,n} \frac{\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{K_{lab}} \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \frac{\cos(k_l z)}{\sin(k_l c)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \delta(z'-c) \quad \text{Eq. 81}$$

Nous en déduisons l'expression du vecteur potentiel magnétique rayonné à l'intérieur de l'enceinte par l'ensemble des composantes y du courant magnétique placé au plan  $z'=c$

$$F_y^{Ilyc} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \cos(k_l z) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \iint_q \phi_{rpq}(x', y') \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy' \quad \text{Eq. 81. a}$$

L'expression des composantes du champ magnétique rayonné à l'intérieur de l'enceinte par la composante x du courant magnétique rayonné par l'ensemble des ouvertures du plan  $z'=c$  est donnée par l'expression

$$H_x^{Ilyc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left(-\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l z) I_{rpqmy} \quad \text{Eq. 82. a}$$

$$H_y^{Ilyc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l z) I_{rpqmy} \quad \text{Eq. 82. b}$$

$$H_z^{Ilyc} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} (-k_l) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l z) I_{rpqmy} \quad \text{Eq. 82. c}$$

1.8.4.3.2.3 Interprétation mathématique

D'après l'expression du champ magnétique à l'intérieur de la cavité, nous pouvons construire un espace vectoriel engendré par les modes propres de la cavité. Les éléments de cet espace vectoriel sont le champ électromagnétique (courant magnétique, vecteur potentiel électrique..). La dimension de cet espace vectoriel est égale au nombre de modes propageant dans la cavité, elle est donc fixée par la bande fréquentielle d'étude. La structure étudiée impose que les modes associés soient quantifiés d'où la somme discrète sur les indices m et n.

1.8.5 Etablissement des équations intégrales

A ce stade de calculs nous avons exprimé le champ magnétique dans les trois régions d'étude  $\{(z<0), (0<z<c), \text{ et } (z>c)\}$ . Il nous est possible à présent d'appliquer les relations de continuité de champ au niveau des deux interfaces séparant les trois différentes régions (au plan  $z=0$ , et au plan  $z=c$ ). Les composantes tangentielles du champ magnétique sont continues à la traversée de ces interfaces. Nous proposons un petit récapitulatif présentant le champ magnétique transverse dans chacune de ces trois zones.

- Dans la zone 1 qui correspond au milieu extérieur du côté  $z<0$ , le champ magnétique est la somme de l'onde excitatrice et du rayonnement du courant magnétique à travers les ouvertures situées au plan  $z=0$

$$H_x^I = (H_{xi} + H_x^I) \quad \text{Eq. 83. a}$$

$$H_y^I = (H_{yi} + H_y^I) \quad \text{Eq. 83. b}$$

- Dans la zone 2 qui correspond à l'intérieur de la cavité, le champ magnétique est la superposition des champs rayonnés à travers l'ensemble des ouvertures ( $z'=0$  et  $z'=c$ ).

$$H_x^{II} = (H_x^{IIx0} + H_x^{IIy0})_{z=0} + (H_x^{IIxc} + H_x^{IIyc})_{z=c} \quad \text{Eq. 84. a}$$

$$H_y^{II} = (H_y^{IIx0} + H_y^{IIy0})_{z=0} + (H_y^{IIxc} + H_y^{IIyc})_{z=c} \quad \text{Eq. 84. b}$$

- Dans la zone 3 qui correspond au milieu extérieur du côté  $z>c$ , le champ magnétique est dû au rayonnement du courant magnétique à travers les ouvertures situées au plan  $z=c$

$$H_x^{III} \text{ et } H_y^{III}$$

Les relations de continuité des composantes tangentielles du champ magnétique appliquées aux deux interfaces ( $z=0$  et  $z=c$ ) séparant les trois régions de calcul sont exprimées dans la suite.

Interface  $z=0$

Les relations de continuité des composantes tangentielles du champ magnétique au plan  $z=0$  se traduisent par les deux équations

$$H_x \Big|_{z=0} + H_x' \Big|_{z=0} = (H_x^{Ix0} + H_x^{Iy0}) + (H_x^{Ixc} + H_x^{Iyc}) \Big|_{z=0} \quad \text{Eq. 85. a}$$

$$H_y \Big|_{z=0} + H_y' \Big|_{z=0} = (H_y^{Ix0} + H_y^{Iy0}) + (H_y^{Ixc} + H_y^{Iyc}) \Big|_{z=0} \quad \text{Eq. 85. b}$$

### Interface $z=c$

Les relations de continuité des composantes tangentielles du champ magnétique exprimées au plan  $z=c$  se traduisent par les deux équations

$$(H_x^{Ix0} + H_x^{Iy0}) \Big|_{z=c} + (H_x^{Ixc} + H_x^{Iyc}) \Big|_{z=c} = H_x^{III} \Big|_{z=c} \quad \text{Eq. 86. a}$$

$$(H_y^{Ix0} + H_y^{Iy0}) \Big|_{z=c} + (H_y^{Ixc} + H_y^{Iyc}) \Big|_{z=c} = H_y^{III} \Big|_{z=c} \quad \text{Eq. 86. b}$$

L'ensemble des ces relations de continuité forme un système d'équations intégrales. Dans la suite nous effectuons la résolution de ce système.

#### 1.8.6 Interprétation mathématique :

Les relations de continuité démontrent que l'intersection entre les espaces vectoriels associés aux deux zones adjacentes n'est pas nulle. En fait cette intersection définit l'espace vectoriel associé à l'interface  $i$  séparant les deux zones. En appliquant Galerkin nous faisons le produit scalaire de ces équations avec les fonctions base des ouvertures, nous exprimons alors le problème au niveau des ouvertures.

#### 1.8.7 Résolution des équations intégrales

Pour résoudre les équations intégrales relatives au champ magnétique nous adoptons la méthode des moments que nous avons présentée dans la partie II du premier chapitre. Nous choisissons les fonctions tests égales aux fonctions base des modes des ouvertures  $(\Psi_{rpq}, \Phi_{rpq})$ , ce qui correspond à Galerkin.

### 1.8.7.1 Résolution des équations intégrales correspondant aux relations de continuité plan $z=0$

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux relations de continuité exprimées à l'interface située au plan ( $z=0$ ). Dans un premier temps nous allons exprimer explicitement l'équation intégrale associée à la composante x du champ magnétique (Eq. 85. a), ensuite nous effectuons sa résolution avec la méthode des MoM/Galerkin. La même procédure sera ensuite appliquée à l'équation de continuité (Eq. 85. b) relative à la composante y du champ magnétique.

#### 1.8.7.1.1 Equation intégrale relative à la composante x du champ magnétique ( $z=0$ )

Nous allons exprimer de façon explicite l'équation traduisant les relations de continuité de la composante x du champ magnétique au plan  $z=0$ , nous rappelons cette équation

$$H_{xi} \Big|_{z=0} + H_x^I \Big|_{z=0} = \left( H_x^{Ix0} + H_x^{Iy0} \right) + \left( H_x^{Ixc} + H_x^{Iyc} \right) \Big|_{z=0} \quad \text{Eq. 87}$$

Nous obtenons alors l'équation détaillée

$$\begin{aligned} H_{xi} + & \left[ \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 U_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} \psi_{rpqx} \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-V_{rpq} \omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \phi_{rpqy}(k_y) \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \right] \\ = & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) I_{rpqmnx} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) I_{rpqmy} \right] \end{aligned}$$

Eq. 88

A présent nous appliquons Galerkin à l'équation (Eq. 88), pour cela nous effectuons le produit scalaire de l'équation (Eq. 88) avec la fonction test  $\Psi_{r'p'q'}$ , nous obtenons alors l'équation (Eq. 89)

$$I_{r'p'q'xi} + \left[ \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 U_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} \psi_{r'p'q'x}^* \psi_{rpqx} \frac{k_0^2 - k_x^2}{7Q_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-V_{rpq} \omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{r'p'q'x}^* \phi_{rpqy} k_y \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \\
 & = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right]
 \end{aligned}$$

Eq. 89

Avec  $I_{r'p'q'xi} = \iint_{r'p'q'} H_{xi} \psi_{r'p'q'x} dx dy$

En arrangeant les termes de l'équation (Eq. 89), nous obtenons l'équation équivalente simplifiée

$$I_{r'p'q'xi} = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} (U_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x1x1} + V_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x1y1} + A_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x1y2} + B_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x1x2}) \quad \text{Eq. 90}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 Y_{rpqr'p'q'}^{x1x1} & = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \\
 & - \frac{\omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{r'p'q'x}^* \psi_{rpqx} \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_L} dk_x dk_y
 \end{aligned} \quad \text{Eq. 91. a}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{rpqr'p'q'}^{x1y1} & = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \frac{n\pi}{b} \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \\
 & + \frac{\omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{r'p'q'x}^* \phi_{rpqx} \frac{-k_x k_y}{k_L} dk_x dk_y
 \end{aligned} \quad \text{Eq. 91. b}$$

$$Y_{r'p'q',p'q'}^{x_1y_2} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx}$$

Eq. 91. c

$$Y_{r'p'q',p'q'}^{x_1y_2} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \frac{n\pi}{b} I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx}$$

Eq. 91. d

Avec  $I_{r'p'q'xi} = \iint_{r'p'q'} H_{xi} \psi_{r'p'q'x} dx dy$

1.8.7.1.2 Equation intégrale relative à la composante y du courant magnétique (z=0)

Nous procédons de la même façon avec la composante y du champ magnétique. Une fois l'équation (Eq. 92) est exprimée explicitement

$$H_{yi}|_{z=0} + H_y^I|_{z=0} = (H_y^{lx0} + H_y^{ly0}) + (H_y^{lxc} + H_y^{lyc})|_{z=0}$$

Eq. 92

Nous obtenons l'équation (Eq. 93)

$$\begin{aligned} H_{yi} + & \left[ \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \varepsilon_0 V_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} \phi_{rpqy} \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{U_{rpq} \omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{rpqyx} \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \right] \\ = & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} (k_0^2 - (b)^2) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l c) I_{rpqmny} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{rpqmnx} \right] \\ + & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{rpqmny} \right] \end{aligned}$$

Eq. 93

Ensuite nous appliquons Galerkin, pour cela nous effectuons le produit scalaire de l'équation (Eq. 93) avec la fonction test  $\Phi_{r'p'q'}$ . Nous obtenons alors l'équation (Eq. 94)

$$\begin{aligned}
I_{r'p'q'yi} &= \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \epsilon_0 V_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{k_x, k_y} \phi_{r'p'q'y}^* \phi_{rpqy} \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_L} dk_x dk_y \\
&+ \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{U_{rpq} \omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{r'p'q'x}^* \psi_{rpqy}(k_y) \frac{-k_x k_y}{k_L} dk_x dk_y \\
&+ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} I_{r'p'q'mny} \\
&+ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqny} I_{r'p'q'mny} \\
&+ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) I_{rpqny} I_{r'p'q'mny} \\
&+ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) I_{rpqnx} I_{r'p'q'mnx}
\end{aligned}$$

Eq. 94

$$\text{Avec } I_{r'p'q'yi} = \iint_{r'p'q'} H_{yi} \phi_{r'p'q'x} dx dy$$

En arrangeant les termes de l'équation (Eq. 94), nous obtenons l'équation équivalente simplifiée

$$I_{r'p'q'yi} = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} (U_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y1x1} + V_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y1y1} + A_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y1y2} + B_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y1x2}) \quad \text{Eq. 95}$$

Avec

$$\begin{aligned}
Y_{rpqr'p'q'}^{y1x1} &= \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} I_{r'p'q'mny} \\
&+ \frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{r'p'q'y}^* \psi_{rpqx} \frac{k_y k_x}{k_L} dk_x dk_y
\end{aligned} \quad \text{Eq. 96. a}$$

$$\begin{aligned}
Y_{rpqr'p'q'}^{y1y1} &= \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqny} I_{r'p'q'mny} \\
&- \frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{r'p'q'y}^* \phi_{rpqy} \frac{-k_0^2 - k_y^2}{k_L} dk_x dk_y
\end{aligned} \quad \text{Eq. 96. b}$$

$$Y_{rpqr'p'q'}^{y1x2} = \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \frac{n\pi}{b} I_{rpqny} I_{r'p'q'mny} \quad \text{Eq. 96. c}$$

$$Y_{r'p'q'yi}^{y1y2} = \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) I_{r'p'q'mny} I_{r'p'q'mny}$$

Eq. 96. d

$$\text{Et } I_{r'p'q'yi} = \iint_{r'p'q'} H_{yi} \phi_{r'p'q'x} dx dy$$

### 1.8.7.2 Résolution des équations intégrales correspondant aux relations de continuité à l'interface z=c

Nous procédons de la même façon que précédemment pour la résolution des relations de continuité à l'interface z=c.

#### 1.8.7.2.1 Equation intégrale relative à la composante x du courant magnétique (z=c)

La relation de continuité de la composante x du champ magnétique exprimée au plan z=c est donnée par l'équation

$$\left( H_x^{Ix0} + H_x^{Iy0} \right)_{z=c} + \left( H_x^{Ixc} + H_x^{Iyc} \right)_{z=c} = H_x^{III} \Big|_{z=c} \quad \text{Eq. 97}$$

En détaillant l'équation (Eq. 97) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} V_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l c) I_{r'p'q'mny} \right] \\ & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} -B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{r'p'q'mnx} \right] \\ & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} A_{rpq} \sum_{m,n} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{r'p'q'mny} \right] \\ & = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-\omega \varepsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \\ & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-\omega \varepsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \end{aligned} \quad \text{Eq. 98}$$

Ensuite nous appliquons Galerkin à l'équation détaillée (Eq. 98), pour cela nous effectuons le produit scalaire de l'équation (Eq. 98) avec la fonction test  $\Phi_{r'p'q'}$ , nous obtenons ;

$$\begin{aligned}
 0 = & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} U_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -V_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -B_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \\
 & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} A_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \\
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \varepsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \psi_{r'p'q'x}^* \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z} dk_x dk_y \\
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-\omega \varepsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \psi_{r'p'q'x}^* \frac{-k_x k_y}{k_L} dk_x dk_y
 \end{aligned}$$

Eq. 99

En arrangeant les termes de l'équation (Eq. 99), nous obtenons l'équation équivalente simplifiée

$$0 = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} (U_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x2x1} + V_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1} + A_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x2y2} + B_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x2x2}) \quad \text{Eq. 100}$$

Avec

$$Y_{rpqr'p'q'}^{x2x1} = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \quad \text{Eq. 101. a}$$

$$Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1} = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \quad \text{Eq. 101. b}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{rpqr'p'q'}^{x2x1} = & \left[ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mnx} \right] \\
 & + \frac{\omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \psi_{r'p'q'x}^* \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 101. c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1} = & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \\
 & + \frac{-\omega \varepsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \psi_{r'p'q'x}^* \frac{-k_x k_y}{k_L} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 101. d}
 \end{aligned}$$

Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

1.8.7.2.2 Equation intégrale relative à la composante y du courant magnétique (z=c)

Pour la composante y du champ magnétique, la relation de continuité au plan z=c s'exprime

$$\left( H_y^{Hx0} + H_y^{Hy0} \right) \Big|_{z=c} + \left( H_y^{Hxc} + H_y^{Hyc} \right) \Big|_{z=c} = H_y^{\text{III}} \Big|_{z=c} \quad \text{Eq. 102}$$

En détaillant l'écriture nous obtenons ;

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} U_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{rpqmx} \right] \\ & \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -V_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{rpqmy} \right] \\ & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -B_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} \right] \\ & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} A_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} \right] \\ & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-\omega \varepsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \frac{(k_0^2 - k_y^2)}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \\ & = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{-\omega \varepsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \frac{-k_x k_y}{k_L} e^{jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y \end{aligned}$$

Eq. 103. a

Ensuite nous appliquons Galerkin à l'équation détaillée (Eq. 103. a), pour cela nous effectuons le produit scalaire de l'équation (Eq. 103. a) avec la fonction test  $\Phi_{r'p'q'r}$ , nous obtenons ;

$$\begin{aligned} 0 & = \left[ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} U_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \left( -\frac{m\pi}{a} \right) I_{rpqmx} I_{r'p'q'mny} \right] \\ & + \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -V_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) I_{rpqmy} I_{r'p'q'mny} \right] \\ & + \left[ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} -B_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmx} I_{r'p'q'mny} \right] \\ & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \varepsilon_0 B_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \phi_{r'p'q'x}^* \frac{-k_x k_y}{k_z} dk_x dk_y \\ & + \left[ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{r=1}^R \sum_{p,q}^{\infty} A_{rpq} \sum_{m,n}^{\infty} \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_{0m} \varepsilon_0 n}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmy} I_{r'p'q'mny} \right] \\ & + \sum_{r=1}^R \sum_{pq} \frac{\omega \varepsilon_0 A_{rpq}}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \phi_{r'p'q'x}^* \frac{(k_0^2 - k_y^2)}{k_L} dk_x dk_y \end{aligned}$$

Eq. 103. b

En arrangeant les termes de l'équation (Eq. 103. b), nous obtenons l'équation équivalente simplifiée

$$0 = \sum_{r=1}^R \sum_{pq} (U_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y2x1} + V_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1} + A_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y2y2} + B_{rpq} Y_{rpqr'p'q'}^{y2x2}) \quad \text{Eq. 104}$$

Avec

$$Y_{rpqr'p'q'}^{y2x1} = \left[ \frac{j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{m\pi}{a} \left( -\frac{n\pi}{b} \right) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mny} \right] \quad \text{Eq. 105. a}$$

$$Y_{rpqr'p'q'}^{y2y1} = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \quad \text{Eq. 105. b}$$

$$Y_{rpqr'p'q'}^{y2x1} = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( -\frac{n\pi}{b} \right) \cos(k_l c) I_{rpqmnx} I_{r'p'q'mny} \right] \\ + \frac{-\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{rpqy} \phi_{r'p'q'x}^* \frac{(-k_x k_y)}{k_z} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 105. c}$$

$$Y_{rpqr'p'q'}^{x2y2} = \left[ \frac{-j\omega}{k_0^2} \sum_{m,n} \frac{-\epsilon_0 \epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \cos(k_l c) I_{rpqmny} I_{r'p'q'mny} \right] \\ + \frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{rpqy} \phi_{r'p'q'x}^* \frac{(k_0^2 - k_y^2)}{k_L} dk_x dk_y \quad \text{Eq. 105. d}$$

### 1.8.7.3 Système finale des solutions

Nous pouvons rassembler les solutions des équations intégrales du plan  $z=0$  (Eq. 90, Eq. 95) et celles du plan  $z=c$  (, Eq. 100 , Eq. 105), en une représentation matricielle.

$$\begin{bmatrix} Y_{rpqr'p'q'}^{x1x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{x1y1} & Y_{rpqr'p'q'}^{x1y2} & Y_{rpqr'p'q'}^{x1x2} \\ Y_{rpqr'p'q'}^{y1x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{y1y1} & Y_{rpqr'p'q'}^{y1y2} & Y_{rpqr'p'q'}^{y1x2} \\ Y_{rpqr'p'q'}^{x2x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1} & Y_{rpqr'p'q'}^{x2y2} & Y_{rpqr'p'q'}^{x2x2} \\ Y_{rpqr'p'q'}^{y2x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{y2y1} & Y_{rpqr'p'q'}^{y2y2} & Y_{rpqr'p'q'}^{y2x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{rpq} \\ V_{rpq} \\ A_{rpq} \\ B_{rpq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r'p'q'xi} \\ I_{r'p'q'yi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eq. 106

Avec

- $Y_{rpqr'p'q'}^{x1x1}$  admittance mutuelle entre les composantes x du courant au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{yx1y1}$  mutuelle de couplage entre les composantes x et y de courant au plan  $z=0$

## Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

- $Y_{rpqr'p'q'}^{x1y2}$  mutuelle de couplage entre les composantes x de courant situées au plan  $z=0$  et les composantes y de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{x1x2}$  mutuelle de couplage entre les composantes x de courant situées au plan  $z=0$  et les composantes x de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y1x1}$  admittance mutuelle entre les composantes x et y du courant au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y1y1}$  mutuelle de couplage entre les composantes y de courant au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y1y2}$  mutuelle de couplage entre les composantes y de courant situées au plan  $z=0$  et les composantes y de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y1x2}$  mutuelle de couplage entre les composantes y de courant situées au plan  $z=0$  et les composantes x de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{x2x1}$  mutuelle admittance entre les composantes x de courant situées au plan  $z=c$  et les composantes de courant situées au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{x2y1}$  mutuelle de couplage entre les composantes x de courant situées au plan  $z=c$  et les composantes y de courant situées au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{x2y2}$  mutuelle de couplage entre les composantes x et y de courant au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{x2x2}$  mutuelle de couplage entre les composantes x de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y2x1}$  Admittance mutuelle entre les composantes y de courant situées au plan  $z=c$  et les composantes x de courant situées au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y2y1}$  Mutuelle de couplage entre les composantes y de courant situées au plan  $z=c$  et les composantes y de courant situées au plan  $z=0$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y2y2}$  Mutuelle de couplage entre les composantes y de courant situées au plan  $z=c$
- $Y_{rpqr'p'q'}^{y2x2}$  Mutuelle de couplage entre les composantes y et x de courant au plan  $z=c$

Les inconnus du problème sont les poids des modes au niveau des ouvertures, ils sont rassemblés dans le vecteur

$$\begin{bmatrix} U_{rpq} \\ V_{rpq} \\ A_{rpq} \\ B_{rpq} \end{bmatrix}$$

La résolution du système équivalent à la représentation matricielle () permettra de déterminer les inconnus du problème. Ensuite il nous sera possible de calculer la valeur du champ électromagnétique en tout point à l'intérieur du boîtier, et cela en utilisant les expressions du champ dans la zone 2 ( $0 < z < c$ ).

### 1.8.8 Etude monomodale de l'efficacité de blindage d'un boîtier présentant une ouverture unique

#### 1.8.8.1 Formulation du problème

Le formalisme de cette méthode a l'inconvénient d'être très fastidieux et lourd à manipuler. Nous proposons un exemple d'application de la méthode en simplifiant le problème.

Nous considérons un boîtier avec ouverture unique comme montré sur la figure ci-dessous

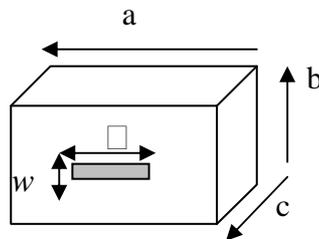


Fig. 30 : Structure simplifiée

La représentation matricielle (Eq. 106) se réduit alors au système équivalent ci-dessous

$$\begin{bmatrix} Y_{rpqr'p'q'}^{x1x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{x1y1} \\ Y_{rpqr'p'q'}^{y1x1} & Y_{rpqr'p'q'}^{y1y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{rpqr'p'q'} \\ V_{rpqr'p'q'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r'p'q'xi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eq. 107

Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

L'excitation est une onde plane de polarisation verticale, d'où

$$I_{r'p'q'xi} = \begin{pmatrix} H_{xi} W_r \left( \frac{1 - \cos(p' \pi)}{(p' \pi) / L_{r'}} \right) & \text{pour } (q' = 0) \\ 0 & \text{pour } (q' \neq 0) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 108}$$

Le couplage entre les deux composantes x et y du courant magnétique est nul. Cela implique que ;

$$Y_{rpq'r'p'q'}^{x1y1} = Y_{rpq'r'p'q'}^{y1x1} = 0 \quad \text{Eq. 109}$$

Par conséquent le système (Eq. 107) se réduit à l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} Y_{rpq'r'p'q'}^{x1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{rpq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r'p'q'xi} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 110}$$

A partir des dimensions géométriques de la cavité (0.3, 0.12, 0.3) m, et de l'ouverture (0.1, 0.005) m, nous pouvons établir un tableau présentant quelques fréquences de résonance des modes de la cavité et de l'ouverture.

Mode de la cavité	Fréquence de résonance
Mode fondamental TE <sub>101</sub>	707.106 MHz
Mode TE <sub>202</sub>	1.414 GHz

Tableau.1 : Fréquences de résonance de quelques modes de la cavité

Mode de l'ouverture	Fréquence de coupure
Mode fondamental TE <sub>10</sub>	1.5 GHz
Mode TE <sub>30</sub>	4.5 GHz

Tableau.2 : Fréquences de coupure de quelques modes de l'ouverture

Nous fixons la bande fréquentielle de calcul à la bande monomode pour la cavité.

D'après les données géométriques de la structure et les fréquences de coupure et de résonance des modes de la structure, nous déduisons que

## Chapitre II : SE d'une cavité vide avec ouvertures

- La largeur de l'ouverture (0.005 m)  $w < \frac{\lambda}{2}$  . Le champ ne présente donc aucune variation suivant l'axe y de l'ouverture ( $q=0$ ),
- Pour la longueur de l'ouverture (0.3m)  $l = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$  avec  $p = (2k + 1)$  et  $k = 0,1,2,\dots$  d'ou  $p = 1,3,5,\dots$
- Nous nous plaçons alors dans la bande fréquentielle [0 ; 1GHz].

Compte tenu de ces données nous fixons

- ( $p=1, q=0$ ) pour les modes de l'ouverture
- et ( $p'=1, q'=0$ ) pour les fonctions test.
- ( $m=1, n=0$ ) pour les modes de la cavité

### 1.8.8.2 Validation des résultats

Un code de calculs réalisé sur Fortran a permis de programmer la résolution de l'équation (), et d'en déduire la valeur du coefficient de l'efficacité de blindage au point centre du boîtier et cela sur toute la bande fréquentielle d'étude. La courbe a été ensuite validée avec le code commercial FEKO et avec le solveur TEMSI.

#### Validation des résultats avec le code FEKO

Le code commercial FEKO est un logiciel de simulation électromagnétique, basé sur la méthode des moments. Sur la fenêtre graphique CADFEKO nous avons créé la structure à étudier. Dans un premier temps nous avons effectué un maillage uniforme de la structure (0.02m). Mais compte tenu des dimensions géométriques de la fente et notamment de sa largeur (0.005) nous avons imposé un maillage fin localement autour des branches (edges) formant la fente (0.0025m).

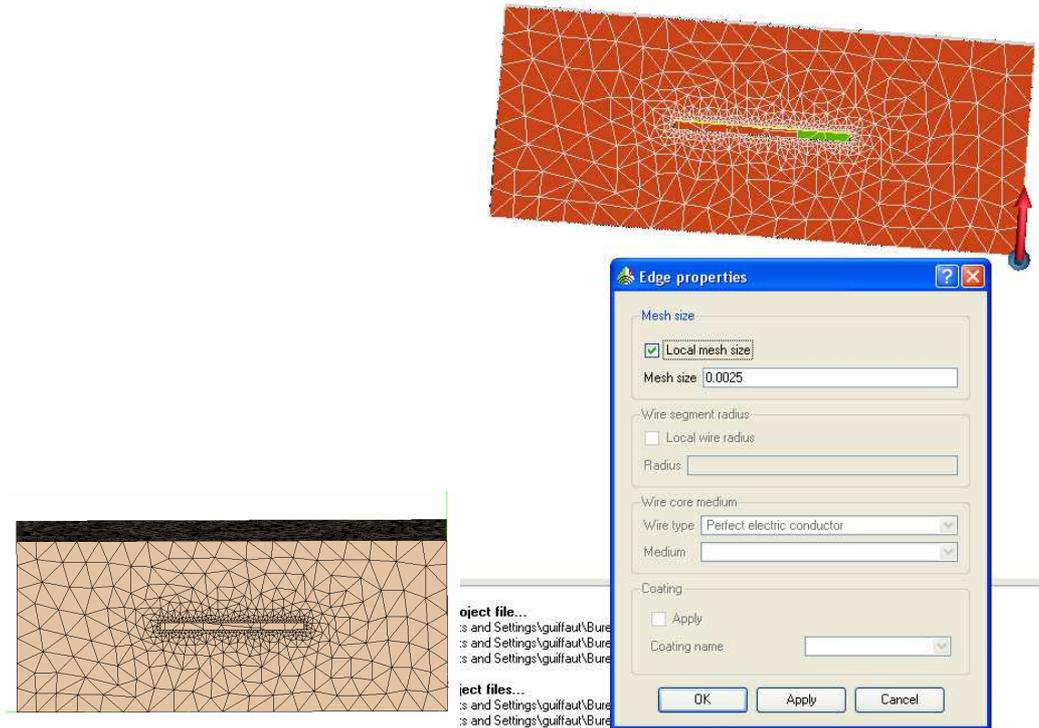


Fig. 31 : Structure maillée sur FEKO

### Validation des résultats avec le code TEMSI-FD

Le solveur TEMSI-FD a été introduit dans la partie II du premier chapitre. Nous avons utilisé ce solveur pour valider les résultats de l'efficacité de blindage d'une cavité avec fente dans le cas monomode.

### Comparaisons des résultats

Les résultats obtenus pour la méthode IEM sont représentés par la courbe de la figure ci-dessous. Elle représente la courbe de dispersion du coefficient d'efficacité de blindage associé au champ électrique au point centre du boîtier sur la bande [0 : 1GHz], une validation avec les codes FEKO et TEMSI est également présentée.

Nous constatons que la courbe de dispersion de l'efficacité de blindage (Fig. 32) présente un maximum de couplage du champ autour de la fréquence 704MHz, qui correspond à la fréquence de résonance du premier mode de la cavité  $TE_{101}$ . Cette fréquence présente un décalage de quelques MHz compte tenu de l'influence de la fente. Les courbes présentent un bon accord.

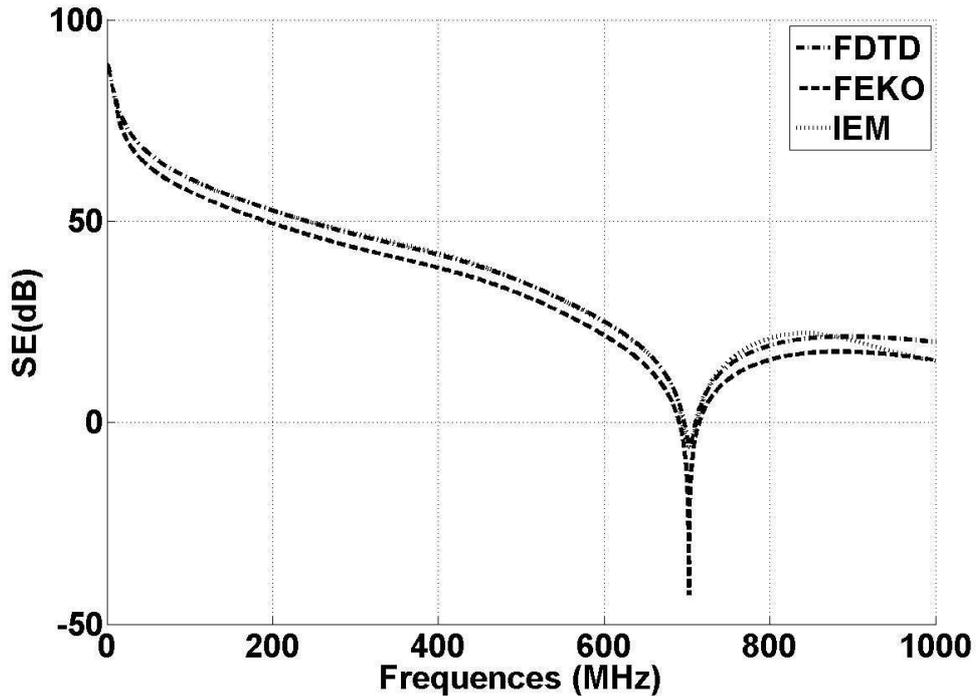


Fig.32 : Courbe de validation de la méthode IEM pour le calcul de la SE d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3)m avec ouverture (0.1, 0.005)m

Dans la suite, nous allons présenter la comparaison des résultats obtenus avec la méthode des équations intégrales avec les résultats obtenus avec le modèle électrique de Robinson.

### 1.9 LE MODELE ELECTRIQUE DE ROBINSON

Il s'agit d'une méthode de modélisation électrique basée sur la théorie des lignes de transmission, elle a été introduite par Robinson et al. [4] dans le cas de la modélisation monomodale d'une cavité présentant une fente, et étant illuminée par une onde plane de polarisation verticale. La modélisation électrique du système permet une résolution simple et rapide du problème. A partir des lois de Kirchhoff appliquées au circuit électrique équivalent nous établissons le système d'équations décrivant la structure. La modélisation circuit présente également un intérêt capital dans le formalisme de Kron que nous introduirons dans la suite.

1.9.1 Etude du blindage d'une cavité avec ouverture

Le système à étudier est celui déjà proposé en exemple d'application de l'IEM/Galerkin dans la partie précédente de ce chapitre. Il s'agit d'une cavité parallélépipédique percée d'une fente sur une face. Et illuminée par une onde plane de polarisation verticale.

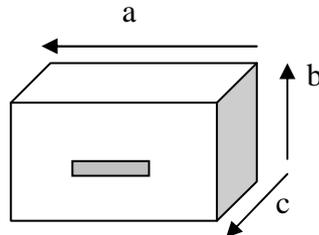


Fig.33 : Structure étudiée

Notre objectif est de calculer l'atténuation de blindage au point centre de cette enceinte.

1.9.1.1 Circuit électrique équivalent

Le système à étudier contient trois éléments dont il faut élaborer les modèles électriques équivalents ; l'excitation, la fente, et la cavité.

La bande fréquentielle d'étude est située dans la bande monomodale de la cavité [0 : 1GHz].

- L'excitation est une onde plane de polarisation verticale, elle sera représentée par un générateur de tension  $V_0$  et son impédance interne  $Z_0$ .

$$V_0 = 1V \quad \text{et} \quad Z_0 = 120\pi$$

- La fente est représentée par deux stubs de longueur  $l/2$  ( $l$  étant la longueur de la fente) connectés l'un à l'autre. L'impédance localisée de la fente est donnée par les formules de Gupta [9]

$$Z_{ouv} = \frac{1}{2} \frac{l}{a} jZ_{os} \tan\left(\frac{k_0 l}{2}\right) \quad \text{Eq. 111}$$

$$Z_{os} = 120\pi^2 \left[ \ln\left(2 \frac{1 + \sqrt{1 - (w_e/b)^2}}{1 - \sqrt{1 - (w_e/b)^2}}\right) \right]^{-1} \quad \text{Eq. 112}$$

$$w_e = w - \frac{5t}{4\pi} \left(1 + \ln\left(\frac{4\pi w}{t}\right)\right) \quad \text{Eq. 113}$$

Avec  $Z_{0s}$  l'impédance caractéristique du stub. Et  $w_e$  la largeur effective de la fente.

- Nous avons placé une résistance R de très grande valeur (équivalente à un circuit ouvert), pour pouvoir prélever la tension  $V_p$  au milieu de la cavité. Cette tension nous permettra par la suite de déterminer le coefficient de blindage du boîtier.

$$SE = -20 \log_{10} \left| \frac{V_p}{V_{ref}} \right| \quad \text{Eq. 114}$$

Avec  $V_{ref} = \frac{V_0}{2}$

- La cavité sera représentée par une ligne de transmission de longueur c (c est sa longueur géométrique suivant l'axe (OZ)), court-circuitée à une extrémité. Dans la bande fréquentielle que nous considérons [0 : 1GHz] seul le mode  $TE_{10}$  est susceptible de se propager au dessus de sa fréquence de coupure. l'impédance caractéristique de cette ligne est donc celle du mode fondamental.  $Z_g = Z_0 \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}$ . Et sa constante de propagation est donnée par la formule  $k_g = k_0 \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}$

A partir des modèles analytiques établis ci-dessus, nous construisons le modèle électrique équivalent au système complet

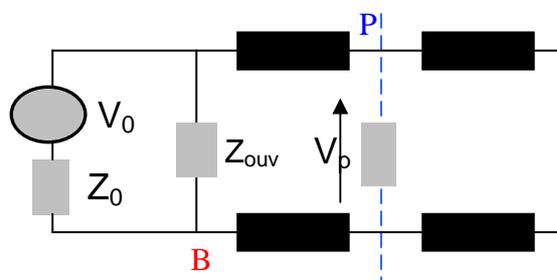


Fig.34 : Modèle équivalent de Robinson d'une cavité avec ouverture dans la bande monomodale

1.9.1.2 La mise en équation du modèle circuit

Le circuit électrique équivalent figure. 34 est un modèle distribué. Pour une mise en équation plus facile nous proposons d'établir le circuit électrique équivalent localisé. Il s'agit de ramener les impédances et les sources du modèle distribué au plan situé au milieu de la cavité à l'aide des formules de transformation de la théorie des lignes de transmission.

Dans un premier temps nous calculons le modèle de Thévenin équivalent entre les bornes A B.

Le générateur de Thévenin est donné par la formule

$$v_1 = v_0 Z_{ap} / (Z_0 + Z_{ap}) \quad \text{Eq. 116}$$

L'impédance de Thévenin équivalent est égale à  $Z_1 = Z_0 Z_{ap} / (Z_0 + Z_{ap})$  Eq. 117

Le circuit de Thévenin équivalent est illustré sur la figure ci-dessous

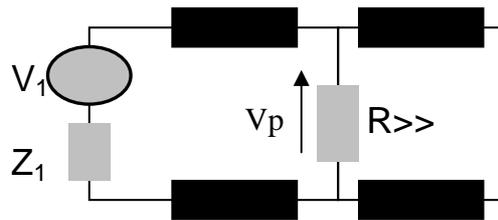


Fig.35 : Calcul du Thévenin équivalent au plan de l'ouverture

Ensuite nous ramenons le Thévenin équivalent ( $V_1, Z_1$ ) et le court circuit de l'extrémité droite, le tout au plan P à l'aide des formules de transformations des lignes.

Nous obtenons le circuit localisé de la figure. 36

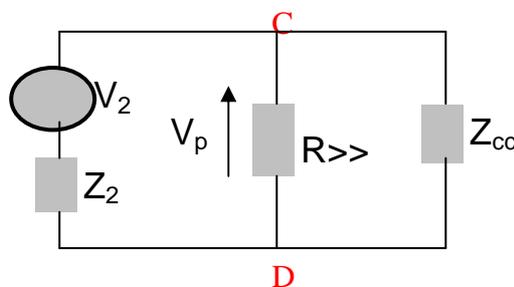


Fig.36 : Calcul du circuit localisé

La tension délivrée par le générateur  $V_1$  ramené au plan P s'exprime sous la forme

$$v_2 = \frac{v_1}{\cos(k_g p) + j(Z_1 / Z_g) \sin(k_g p)} \quad \text{Eq. 118}$$

L'impédance interne  $Z_1$  ramenée au plan P est donnée par la formule

$$Z_2 = \frac{Z_1 + jZ_g \tan(k_g p)}{1 + j(Z_1 / Z_g) \tan(k_g p)} \quad \text{Eq. 119}$$

L'impédance du court-circuit ramené au plan P s'exprime

$$Z_{cc} = jZ_g \tan k_g (d - p) \quad \text{Eq. 120}$$

En calculant le modèle de Thévenin équivalent entre les bornes C D, on obtient finalement le circuit simplifié de la figure ci dessous

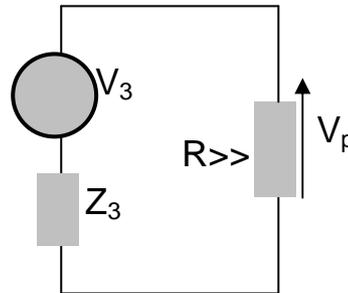


Fig.37 : Circuit final simplifié équivalent à une cavité avec ouverture dans la bande monomode

Avec  $v_3 = v_2 Z_{cc} / (Z_2 + Z_{cc})$  Eq. 121. a et  $Z_3 = Z_{cc} Z_2 / (Z_{cc} + Z_2)$  Eq. 121. b

La tension  $V_p$  s'exprime alors sous la forme

$$v_p = v_3 R / (Z_3 + R) \quad \text{Eq. 122}$$

### 1.9.1.3 Résultats de l'étude monomodale de blindage du boîtier

Les résultats obtenus avec le modèle de Robinson ont été validés avec la méthode des IEM, avec le solver TEMSI et avec les simulations sur FEKO comme le montre la figure. 38

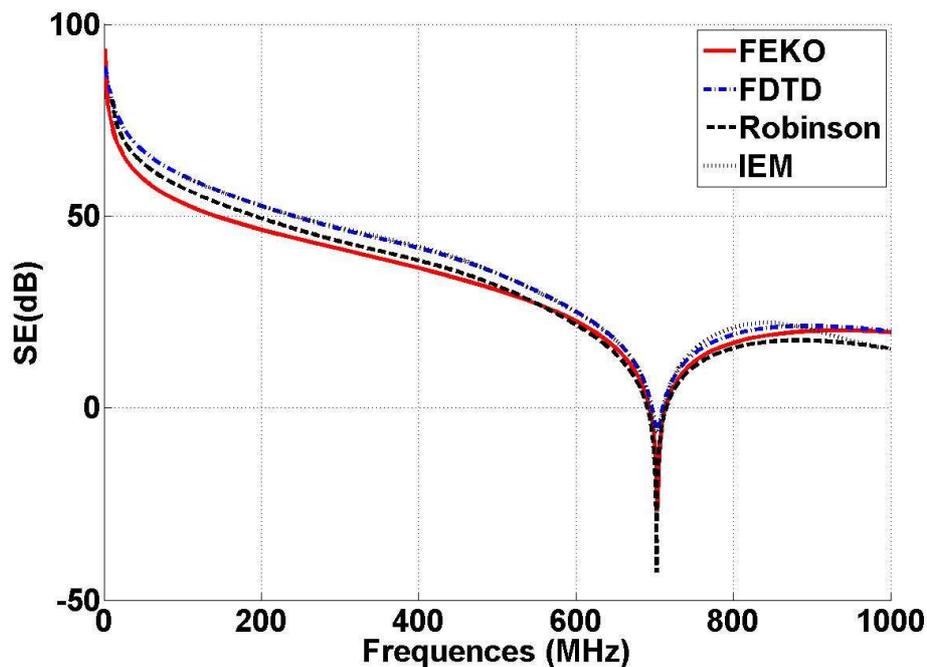


Fig.38 : Courbe de validation du modèle de Robinson pour le calcul de la SE d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3)m avec ouverture (0.1, 0.005)m

### 1.9.2 Cas où plusieurs ouvertures sont disposées sur la même face

La figure. 39 présente un boîtier métallique dont la face située au plan  $z=0$  est percée d'un réseau d'ouvertures rectangulaires identiques, uniformément disposées.

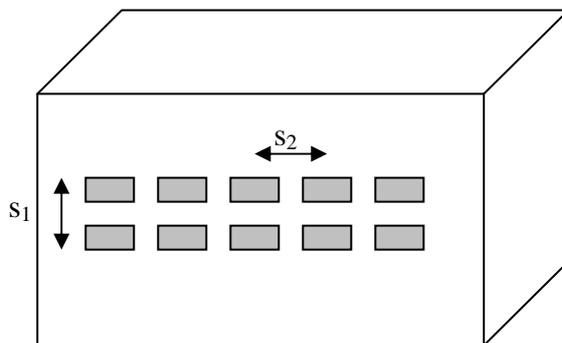


Fig.39 : Cavité avec ouvertures identiques placées régulièrement sur la même face

Le modèle de Robinson peut être étendu à ce cas de figure à condition de faire l'hypothèse que les ouvertures sont assez éloignées les unes des autres qu'aucun couplage n'existe entre deux ouvertures voisines. Dans ce cas, chaque ouverture est équivalente au modèle de Robinson d'une ouverture unique, son expression a été formulée précédemment (Eq. 111). Les impédances équivalentes aux ouvertures sont sommées en série. Pour  $n$  ouvertures

identiques l'expression de l'impédance équivalente à l'ensemble des ouvertures est donnée par l'expression

$$Z_{tot-ouv} = n \frac{1}{2} \frac{l}{a} jZ_{os} \tan\left(\frac{k_0 l}{2}\right) \quad \text{Eq. 123}$$

La figure. 40 illustre la courbe de dispersion du coefficient de blindage au point centre de cette structure. Elle a été calculée pour un nombre d'ouvertures  $n=2$ ,  $n=4$ , et  $n=6$ . Nous constatons que le niveau de blindage est une fonction croissante en fonction du nombre  $n$  d'ouvertures. Les ouvertures permettent une pénétration plus importante de champ électromagnétique à l'intérieur de l'enceinte. D'autre part la fréquence de résonance du mode fondamental de la cavité chute très légèrement pour un nombre  $n$  d'ouvertures plus important. Cela s'explique par le fait que chaque ouverture est équivalente à une inductance (Eq. 111), la mise en série des ouvertures fait augmenter l'inductance totale équivalente  $L_{eq\_tot}$  à toutes les ouvertures, par contre la mise en parallèle de  $L_{eq\_tot}$  avec le circuit RLC de la cavité fait chuter la fréquence de résonance du mode de la cavité.

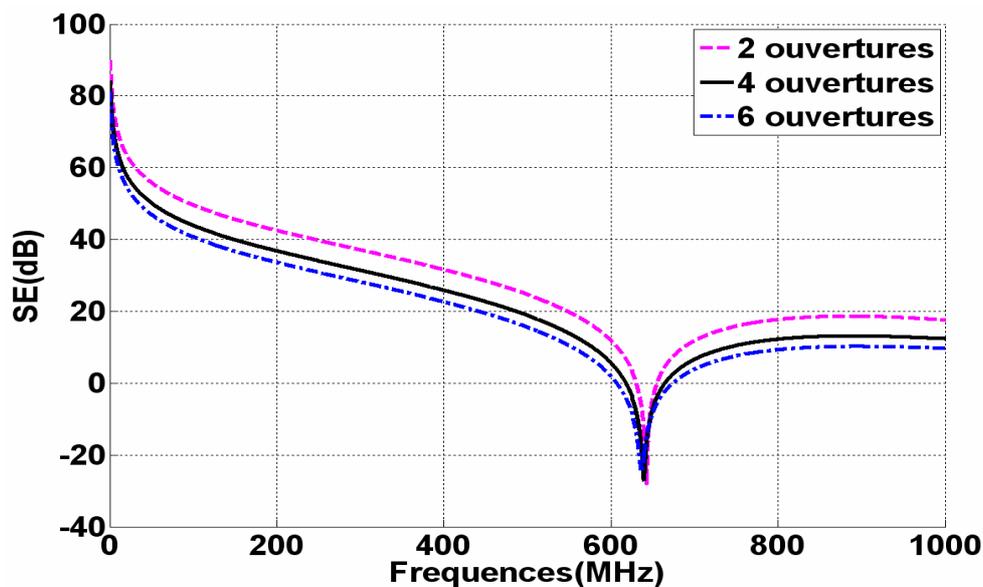


Fig.40 : Dégradation du coefficient de blindage de la cavité en fonction du nombre d'ouvertures considérées

### 1.9.3 Ouvertures sur faces différentes

La figure. 41 présente un boîtier métallique dont la face située au plan  $x=a$  et celle située au plan  $y=b$  sont toutes les deux chacune percée d'une ouverture rectangulaire.

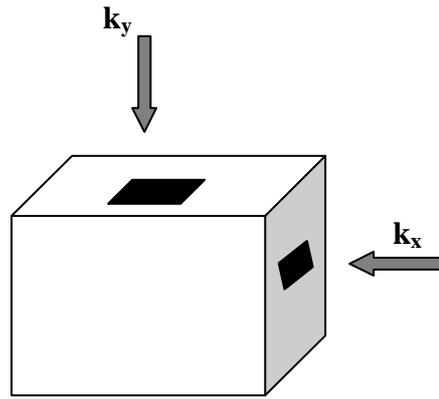


Fig.41 : Boitier disposant de deux ouvertures situées sur deux faces perpendiculaires

Pour que le modèle de Robinson puisse être applicable à ce type de problème il faut que l'incidence soit normale aux plans contenant les ouvertures. Sachant que les deux ouvertures sont disposées sur des plans perpendiculaires ( $x=a$  et  $y=b$ ), il faut considérer une première onde plane de vecteur d'onde suivant (OX) pour étudier la pénétration à travers l'ouverture situé au plan  $x=a$ . Et une deuxième onde plane dont le vecteur d'onde est suivant l'axe (OY) pour étudier la pénétration suivant l'ouverture située au plan  $y=b$ .

Les deux ondes peuvent être représentées en une seule onde plane de polarisation oblique. En effet les deux ondes seront substituées par projection de cette onde sur les axes (OX) et (OY).

En faisant l'hypothèse que les ouvertures sont assez espacées l'une de l'autre pour qu'aucun couplage ne soit possible entre elles, nous décomposons le problème en deux circuits indépendants l'un de l'autre comme le montre la figure. 42. Chacun des deux circuits permet d'étudier l'efficacité de blindage dans une direction ((OX) ou (OY)). Pour déduire l'efficacité de blindage totale on somme les deux coefficients d'efficacité de blindage calculés à partir des deux circuits découplés.

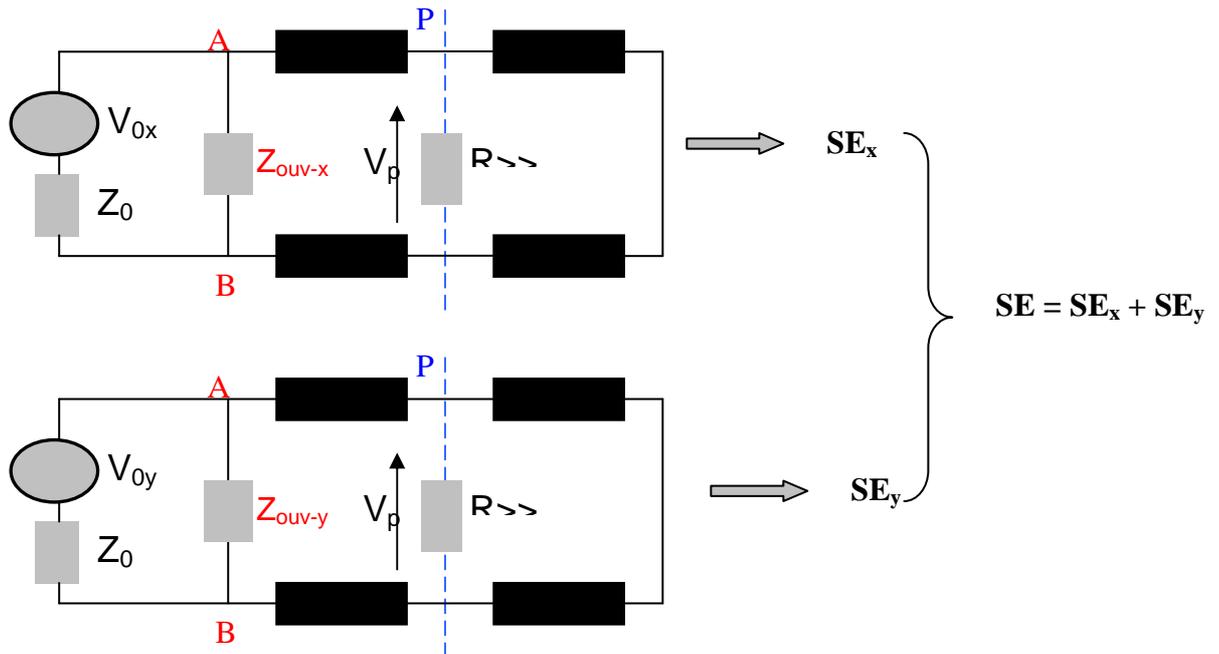


Fig.42 : Modèle équivalent de Robinson d'une cavité disposant d'ouvertures situées sur faces perpendiculaires

La figure. 43 présente le calcul de l'efficacité de blindage d'une cavité avec ouvertures perpendiculaires à partir du modèle de Robinson, le résultat est validé avec FEKO. Les courbes présentent un bon accord.

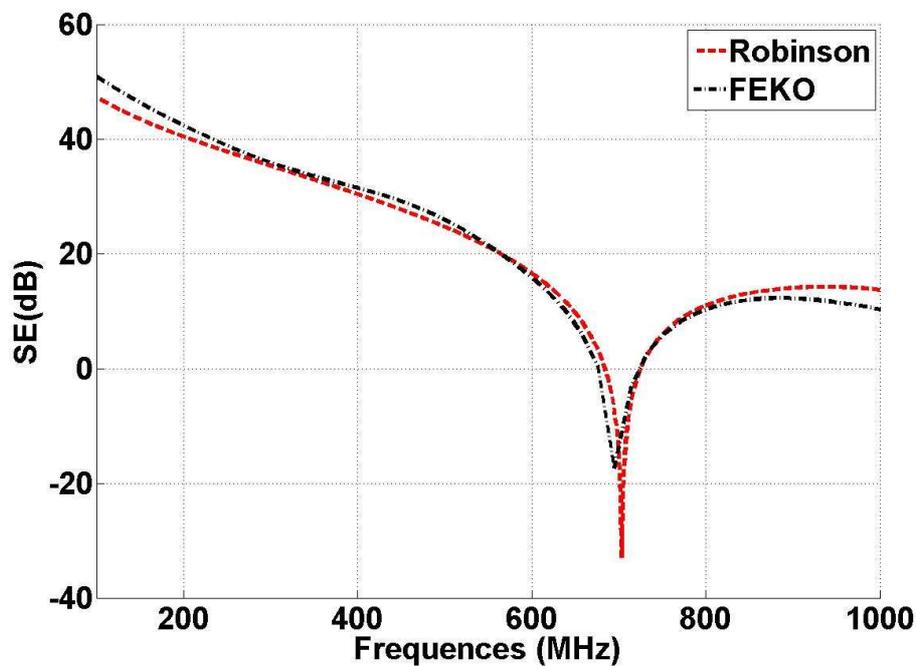


Fig.43 : Courbe de dispersion du coefficient de blindage SE dans le cas d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3) avec ouvertures (0.1, 0.005) placées sur faces perpendiculaires

Sur la figure. 44 nous comparons le résultat de la SE dans le cas d'une ouverture unique au cas où le boîtier comporte deux ouvertures sur faces perpendiculaires. Nous constatons une différence de 6dB en moyenne, ce qui correspond à un doublement d'énergie couplée dans le cas où le boîtier comporte 2 ouvertures sur faces perpendiculaires.

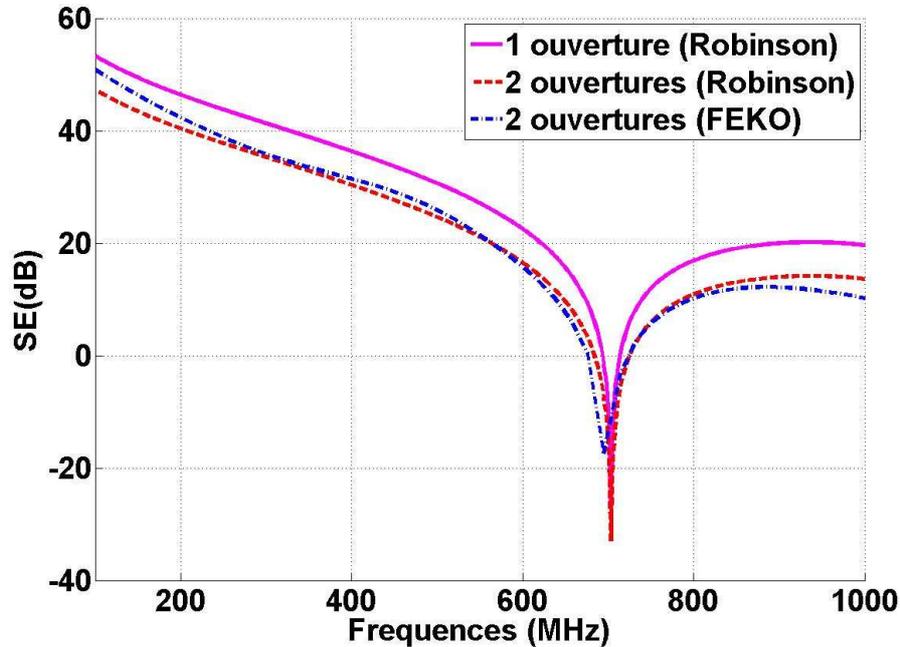


Fig.44 : Comparaison entre le coefficient de blindage SE dans le cas d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3) avec ouverture unique (0.1, 0.005) et le SE dans le cas d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3) avec ouvertures (0.1, 0.005) placées sur faces perpendiculaires

#### 1.9.4 Modèle de Robinson étendu au cas multimodale

Dans ce cas chaque mode de la cavité sera représenté par une ligne de transmission court-circuitée dont l'impédance caractéristique est égale à celle du mode propageant. Dans une bande bimodale le circuit électrique équivalent de Robinson d'une cavité avec ouverture est celui représenté sur la figure. 45

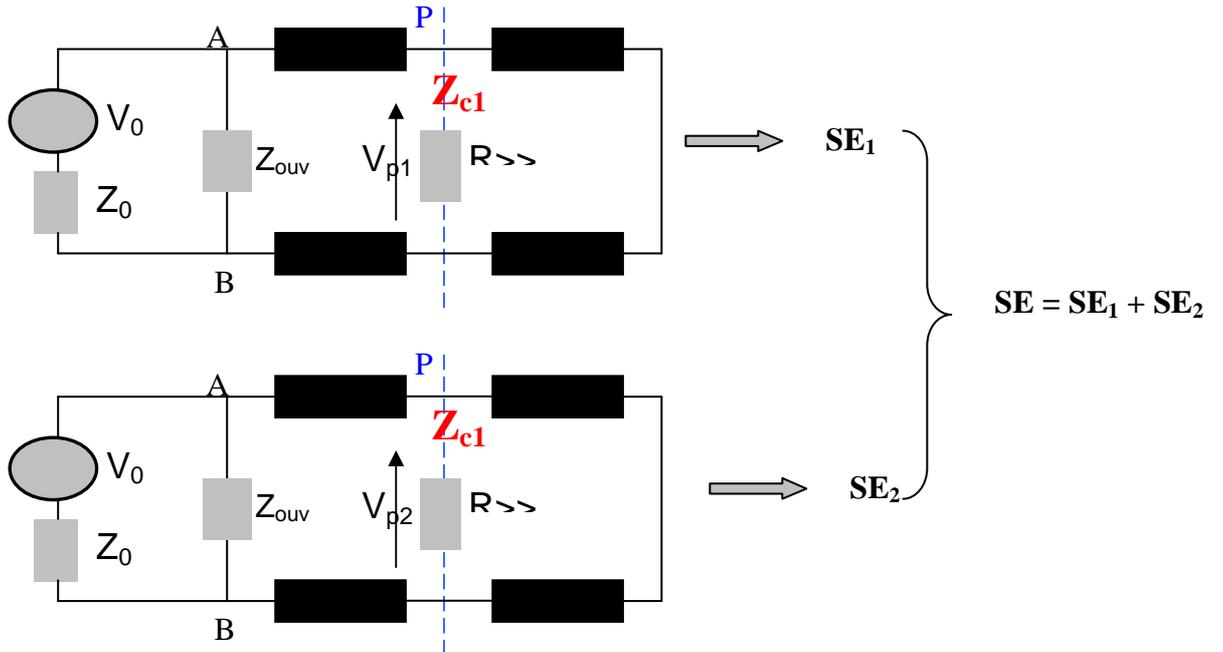


Fig. 45 : Modèle électrique de Robinson dans la bande bimodale d'une cavité avec fente

Nous avons réalisé un code de calcul sur le solveur TEMSI (FDTD), ainsi qu'un modèle sur FEKO pour valider le modèle de Robinson dans le cas bimodal. Compte tenu de la géométrie de la structure et des fréquences de résonance des modes (voir tableau) nous nous sommes placés dans la bande [0 : 1.8GHz]. Les résultats sont représentés dans la figure. 46, les courbes présentent un bon accord.

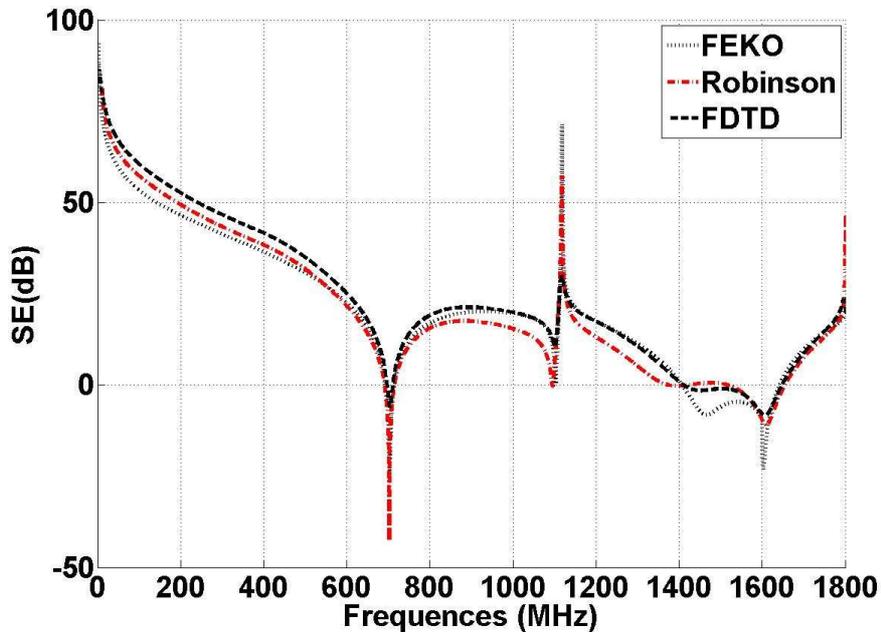


Fig. 46 : Courbe de validation du modèle de Robinson pour le calcul de la SE d'une cavité vide (0.3, 0.12, 0.3) avec ouverture (0.1, 0.005) dans le cas bimodal

### *1.10 CONCLUSION*

Dans ce chapitre nous avons présenté le formalisme détaillé de la méthode IEM appliqué à l'étude de la pénétration du champ à l'intérieur d'une cavité à travers une ou plusieurs ouvertures. Nous avons également associé à la méthode une interprétation dans le domaine de l'algèbre linéaire, ce qui permet une introduction à la méthode modale que nous présentons dans le chapitre III. Ensuite nous avons présenté une autre méthode qui permet la modélisation de la structure à partir de la théorie des lignes de transmission. Elle présente deux avantages majeurs ; l'aspect circuit pour la modélisation et un formalisme beaucoup plus léger que celui de la IEM. Les résultats de l'efficacité de blindage du système obtenus avec la méthode IEM et établis à partir du modèle électrique de Robinson ont été comparés aux courbes obtenus avec la méthode FEM et avec le code commercial FEKO, et ils présentent un bon accord.

CHAPITRE III : ETUDE DE L'EFFICACITE DE BLINDAGE DU SYSTEME COMPLET  
{CAVITE AVEC OUVERTURE + OBSTACLES MINCES} A PARTIR D'UNE  
MODELISATION ELECTRIQUE

*1.11 INTRODUCTION*

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à une méthode de modélisation électrique que nous appellerons méthode modale [5]. À partir d'un formalisme mathématique rigoureux basé sur le développement modal des champs, cette méthode permet l'élaboration de modèles électriques équivalents.

Jusqu'à présent cette méthode a été restreinte à l'étude monomode des structures. Nous avons développé le formalisme de cette méthode dans le cas multimodale pour traiter la modélisation des obstacles minces dans une large bande fréquentielle.

Les obstacles minces permettent de faire une première approximation des cartes circuits intégrées dans le boîtier. Pour étudier l'efficacité de blindage du système complet {cavité avec ouverture+obstacles minces} nous avons exploité le modèle de Robinson équivalent à une cavité avec ouverture, dans lequel nous avons injecté les modèles équivalents aux obstacles minces. L'assemblage des deux modèles permet d'élaborer le modèle électrique équivalent au système complet, et de calculer les courants couplés sur les plans de masse, ainsi que de déterminer le coefficient de l'efficacité de blindage du boîtier. Les résultats obtenus ont été validés avec le code commercial FEKO et avec le solveur TEMSI-FD, ils représentent un bon accord.

*1.12 METHODE MODALE POUR LA MODELISATION DES OBSTACLES MINCES :*

*1.12.1 Du développement modal à la modélisation circuits*

Toute modélisation électrique d'une chaîne de transmission composée d'éléments passifs, tels que les guides d'ondes, les cavités, et les éventuelles jonctions entre ces structures, demande la connaissance de « la bande fréquentielle d'étude », et de « la géométrie de la structure étudiée ». En effet, dans une structure quelconque ; la distribution spatiale de l'énergie est

fonction des conditions aux limites imposées par la géométrie de la structure et de la bande fréquentielle d'étude. La modification de ces deux dernières, engendre une variation des fréquences de coupure ou de résonance considérées. Certains modes deviennent propagatifs alors que d'autres deviennent évanescents. Cela modifie la distribution spatiale de l'énergie au sein de la structure. Et par conséquent un nouveau modèle doit être élaboré.

Pour pouvoir élaborer des modèles équivalents adaptables aussi bien de point de vue fréquentiel que géométrique. Il se fait nécessaire de baser nos modèles électriques sur « le développement modal » du champ dans la structure, car il constitue une donnée primordiale qui nous renseigne sur la fréquence de travail et sur la géométrie de la structure.

Pour cela nous associons à chaque structure un espace vectoriel engendré par les vecteurs base du développement modal de la structure, et dont les éléments sont les grandeurs électromagnétiques (**E**, **J**) propres à la structure.

L'ensemble des modes d'une structure forme une base algébrique orthogonale, qui pourrait être normalisée en imposant la condition

$$\langle f_m^{(i)} | f_n^{(i)} \rangle = \iint_D f_m^{(i)*} \cdot f_n^{(i)} ds = \iint_{D-\Sigma_i} f_m^{(i)*} \cdot f_n^{(i)} ds + \iint_{\Sigma_i} f_m^{(i)*} \cdot f_n^{(i)} ds = \iint_{\Sigma_i} f_m^{(i)*} \cdot f_n^{(i)} ds = \delta_{mn} \quad \text{Eq. 124}$$

Avec  $f_k^{(i)}$  le vecteur base associé au mode k de la structure (i)

Et  $ds$  la section droite de la structure, et  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker

Nous allons voir dans la suite comment il est possible d'exprimer les éléments circuits d'un modèle électrique à partir du développement modal de la structure associée.

### 1.12.2 Modélisation des structures guidantes

Dans une structure guidante (guide d'onde, cavité), en fonction de la bande fréquentielle de travail nous distinguons deux catégories de modes ; les modes guidés, et les modes évanescents. En effet le développement modal de la structure contient deux types de vecteurs ; des vecteurs associés aux modes guidés, ils forment un sous espace  $E^1$ . Et d'autres vecteurs associés aux modes évanescents, ils forment le sous espace  $E^2$ .

Le modèle électrique des modes guidés repose sur les vecteurs du sous espace  $E^1$ , et le modèle électrique des modes évanescents, lui s'exprime dans la bases des vecteurs du sous espace  $E^2$ .

L'union des ces deux espaces vectoriels complémentaires forme l'espace vectoriel  $E$  engendré par la base de développement modal lié à la structure.

#### 1.12.2.1 Modélisation des modes guidés

Les modes guidés apportent de l'énergie au reste de la structure, tout comme un générateur dans un circuit électrique. Les modes guidés seront donc représentés par un générateur dit « réel ». La tension et le courant délivrés par ce générateur sont les éléments de l'espace vectoriel  $E^1$  associé aux modes guidés, donc ils s'expriment dans la base modale des modes propageant.

$$E = \sum_{n=0}^k V_n f_n \quad \text{Eq. 125. a} \qquad J = \sum_{n=0}^k I_n f_n \quad \text{Eq. 125. b}$$

Avec  $f_n$  vecteur associé au mode guidé  $n$ .

On pourrait utiliser une source réelle en courant pour un montage en parallèle, ou en tension pour un montage série.

#### 1.12.2.2 Modélisation des modes évanescents

Les modes évanescents quant à eux représentent le stockage de l'énergie dans la structure. Ils ont un rôle similaire à celui d'une inductance ou d'une capacité dans un circuit électrique. Les modes évanescents seront donc modélisés par un opérateur admittance (ou impédance en fonction du choix du type de la source réelle). Cet opérateur est élément de l'espace complémentaire  $E^2$ , et il s'exprime dans la base modale des modes évanescents.

$$\hat{Y} = \sum_{n=k+1} |f_n\rangle Y_n \langle f_n| \quad \text{Eq. 126}$$

Avec  $f_n$  vecteur associé au mode évanescent  $n$ .

#### Exemple

Prenons l'exemple d'un guide d'ondes infini. Nous nous plaçons dans la bande monomode, seul le mode fondamental pourrait se propager (au dessus de sa fréquence de coupure).

La tension et le courant délivrés par le générateur réel sont développés suivant le vecteur base du mode fondamental. Dans le cas monomode l'espace vectoriel  $E^1$  est de dimension une.

$$J = I_0 f_0 \quad \text{Eq. 127. a} \quad \text{et} \quad E = V_0 f_0 \quad \text{Eq. 127. b}$$

L'opérateur admittance s'exprime dans la base modale des modes évanescents. La somme commence à 1 parce que le mode fondamental qui est guidé ne fait pas partie de l'espace complémentaire  $E^2$ .

$$\hat{Y} = \sum_{n=1} |f_n\rangle Y_n \langle f_n| \quad \text{Eq. 128}$$

### 1.12.3 Modélisation des obstacles minces

Dans cette partie on s'intéressera à la modélisation des interfaces séparant deux milieux différents. Il pourrait s'agir d'un obstacle fin inséré au sein d'une structure guidante, ou tout simplement d'une interface entre deux structures guidantes interconnectées.

Modéliser une interface quelconque revient à traduire les conditions aux limites imposées au champ électromagnétique à la traversée de cette interface par la matrice chaîne d'un quadripôle équivalent.

Nous distinguons deux types d'interfaces ; interface homogène ; sur laquelle les relations de passages sont homogènes. Et interface non homogène, où les relations de passages ne sont pas homogènes sur toute l'interface. Dans la suite nous allons voir comment traiter ces deux cas.

#### 1.12.3.1 Cas d'interfaces homogènes

Soient deux régions adjacentes séparées par une interface D. nous avons placé deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  de part et d'autre de D et infiniment proches de celle-ci.  $n_i$  est le vecteur unitaire normal à  $S_i$  et orienté vers la région i.

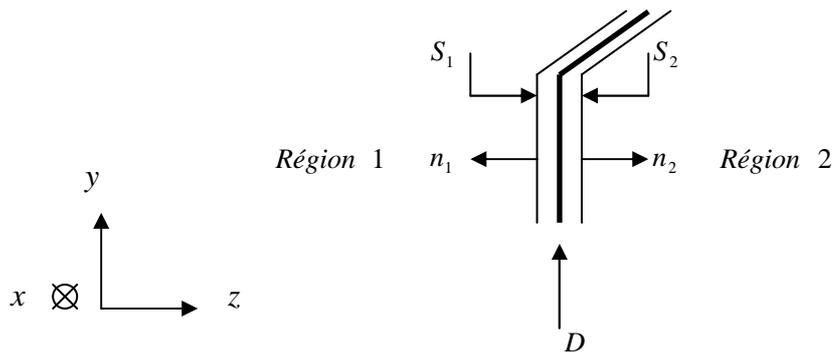


Fig.47 : Problème aux limites

Dans chaque région i on définit le champ électrique tangent à la surface  $S_i$  et la densité de courant circulant sur cette surface, ces deux grandeurs sont liées par la relation

$$J_i = n_i \times H_i \quad \text{sur } S_i \quad \text{Eq. 129}$$

Dans le cas d'une interface homogène, le champ électromagnétique dans la région 1 est lié au champ électromagnétique de la région 2 par des relations de passage uniques en tout point de l'interface. Et dans ce cas un quadripôle unique pourrait modéliser ce type d'interface.

Exemple :

Prenons comme exemple une interface métallique parfaitement conductrice séparant deux régions.

Les conditions aux limites imposées au champ électrique tangent à la traverser de cette surface sont données par les équations

$$E_1 = 0 = E_2 \quad \text{Eq. 130. a}$$

$$J_1 = -J_2 \quad \text{Eq. 130. b}$$

Le quadripôle équivalent à cette interface est défini par sa matrice chaîne  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1.12.3.2 Cas d'interfaces non homogènes/ sources virtuelles

Dans ce cas la surface D est constituée de domaines disjoints tels que, en tout point de chacun d'eux, les relations de passage sont identiques et que, d'un domaine à l'autre, elles diffèrent, Il y a donc autant de quadripôles qu'il y a de domaines.

Exemple :

Soit D la jonction entre deux guides d'onde de sections transverses différentes en largeur et en longueur. Cette jonction est constituée de deux domaines disjoints ; le domaine métallique et le domaine non métallique. A chacun de ces deux domaines on associe des relations de passage propres à lui.



Fig.48 : Jonction entre deux guides d'onde rectangulaires de sections transverses différentes, vue longitudinale et transversale

Nous notons  $D_m$  le domaine métallique de la section transverse de la jonction entre les deux guides, et  $D$  le domaine non métallique de cette dernière, il est complémentaire au domaine  $D_m$

Dans le domaine métallique  $D_m$  les relations de passage s'écrivent sous la forme

$$E_1 = 0 = E_2 \quad \text{Eq. 131. a}$$

$$J_1 = -J_2 \quad \text{Eq. 131. b}$$

Le quadripôle équivalent au domaine métallique  $D_m$  a comme matrice chaîne

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dans le domaine non métallique  $\bar{D}$  nous établissons les relations de passage comme suit

$$E_1 = E_2 \quad \text{Eq. 132. a}$$

$$J_1 = 0 = J_2 \quad \text{Eq. 132. b}$$

La matrice chaîne du quadripôle équivalent est donc donnée par

Introduction de la source virtuelle  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans l'exemple précédant, en fonction des coordonnées du point où on se place sur l'interface  $D$ . Cette dernière est équivalente à l'un ou à l'autre de ces deux quadripôles. Les deux domaines sont duaux de point de vue algébrique. Pour associer un modèle électrique unique à cette interface nous devons nous baser sur cette notion très intéressante qui est « la dualité ». Ainsi nous pourrons élaborer un seul quadripôle qui représente l'ensemble des relations de passage locales imposées au champ électromagnétique à travers la surface  $D$ . Pour cela nous introduisons « les sources virtuelles ».

La source virtuelle est un élément circuit fictif, c'est la traduction de la dualité mathématique en éléments circuits. Si  $J$  est une grandeur du domaine 1, et  $E_e$  une grandeur du domaine duale, et que les deux domaines forment une interface non homogène  $D$ . cette dernière

pourrait être représentée par une source virtuelle, le produit scalaire hermitien de ces deux grandeurs est tout naturellement nul

$$\langle J | E_e \rangle = \iint_D J^* \cdot E_e ds = \iint_{D_e} 0 \cdot E_e ds + \iint_{D_e} J^* \cdot 0 ds = 0$$

Eq. 133

Cela est la traduction algébrique du fait qu'une source virtuelle ne délivre pas de puissance dans le circuit, c'est pour cette raison qu'elles sont qualifiées de virtuelles.

La source virtuelle a une représentation équivalente dans chaque domaine. Nous distinguons deux types de source virtuelle, en courant ou en tension. Nous résumons cela dans le tableau suivant

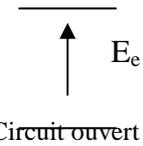
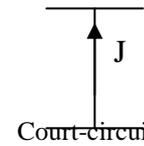
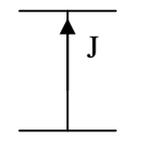
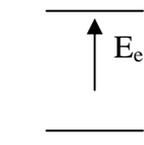
	Représentation symbolique dans $D_e$	Représentation symbolique dans $D_e$
Source virtuelle en champ	<p style="color: red;">Domaine non métallique</p>  <p>Circuit ouvert</p>	<p style="color: red;">Domaine métallique</p>  <p>Court-circuit</p>
Source virtuelle en courant	<p style="color: red;">Domaine métallique</p>  <p>Court-circuit</p>	<p style="color: red;">Domaine non métallique</p>  <p>Circuit ouvert</p>

Fig. 49 : les différentes représentations de la source virtuelle

#### 1.12.4 Application de la méthode modale à la modélisation des obstacles minces

##### 1.12.4.1 Etude d'une fenêtre inductive

Comme nous avons indiqué précédemment, le développement modal, et par conséquent la méthode modale est fonction de deux variables ; « la géométrie de la structure » étudiée et « la bande fréquentielle » de travail. Nous allons illustrer cela en étudiant une fenêtre inductive à partir du formalisme de la méthode modale.

1.12.4.1.1 De la géométrie de la structure à son développement modal

Dans la section transversale d'un guide d'onde rectangulaire de longueur infinie, nous insérons deux plans de masse d'épaisseur nulle, comme illustré sur la figure ci dessous

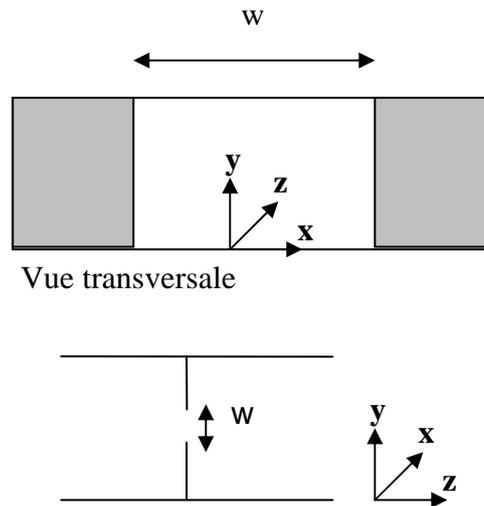


Fig.50 : Fenêtre inductive, vue transversale, vue longitudinale

La connaissance de la géométrie de la structure nous permet automatiquement de définir les fonctions base du développement modale de la structure.

Comme le montre la figure. 50, la structure étudiée est invariante par translation suivant la direction (OY), par conséquent le problème aux limites que nous devons formuler et résoudre par la suite, est indépendant de la variable y, tout comme le sont les modes excités lors de la diffraction des modes guidés sur la fenêtre.

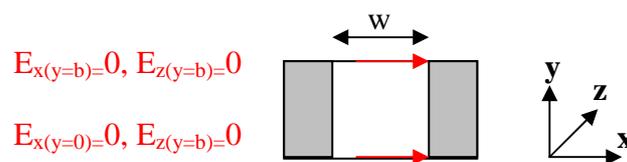


Fig.51 : Conditions aux limites imposées aux composantes du champ électrique au niveau de la discontinuité

Les plans  $y=0$ , et  $y=b$  sont des plans conducteurs parfaits d'où la condition

$$E_x|_{y=0} = 0 \text{ et } E_z|_{y=b} = 0 \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 134}$$

Or la variation suivant la direction (OY) est nulle, par conséquent les composantes x et z du champ électrique sont nulles. Nous allons construire notre base de développement modal par rapport à la composante y du champ électrique.

L'expression analytique des fonctions base modales  $f_n$ .

$$f_n = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{ny}(x) \end{bmatrix} \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 134}$$

Une première approximation de la fonction  $f_n$  pourrait être donnée par la formule

$$f_{ny} \propto \sin \left[ (n+1) \frac{\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 135}$$

Or les plans  $x=0$ , et  $x=a$  sont des conducteur parfaits, le champ  $E_y$  est tangent à ces plans, par conséquent nous avons la condition

$$f_{ny}|_{x=0} = 0 \text{ et } f_{ny}|_{x=a} = 0 \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 136}$$

D'où l'expression de la fonction base

$$f_{ny} \propto \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{a} x \right] \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 137}$$

La condition de normalisation impose que

$$\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{mn} \quad \text{Eq. 138}$$

D'où l'expression normalisée des fonctions base

$$f_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{a} x \right] \end{bmatrix} \text{ avec } n = 0,1,2,3... \quad \text{Eq. 139}$$

#### 1.12.4.1.2 De la fréquence de travail à la modélisation électrique

Tout d'abord nous fixons la bande fréquentielle de notre étude. Nous nous plaçons en dessous de la fréquence de coupure du  $(k+1)^{\text{ième}}$  mode du guide d'onde. Nous distinguons alors deux types de modes, les modes guidés, et les modes évanescents.

Modélisation des modes guidés

Les modes guidés seront représentés par un générateur réel de courant, dont les caractéristiques électriques sont développées dans la base des modes guidés. Le courant et la tension délivrés par ce générateur s'expriment sous la forme

$$J = \sum_{n=0}^k I_n f_n \quad \text{Eq. 140. a} \quad \text{et} \quad E = \sum_{n=0}^k V_n f_n \quad \text{Eq. 140. b}$$

Nous faisons l'hypothèse que k modes sont guidés.

Modélisation des modes évanescents

Les modes évanescents sont représentés par un opérateur admittance, dont la somme commence à k+1, il est donné par la formule

$$\hat{Y} = \sum_{n=k+1} |f_n\rangle Y_n \langle f_n| \quad \text{Eq. 141}$$

Dans la suite nous allons expliciter l'expression de cet opérateur

Nous avons établi précédemment que la composante longitudinale du champ électrique est nulle, nous déduisons alors que la génératrice des modes TM est nulle ( $E_z = 0$ ). Seuls les modes de type  $TE_{n0}$  sont excités lors de la diffraction des modes guidés sur l'obstacle.

L'admittance équivalente d'un mode TE s'exprime sous la forme

$$Y_n = \frac{\gamma_n}{j\omega\mu_0} \quad \text{Eq. 142}$$

Pour un mode TE évanescent la constante de propagation  $\gamma_n$  est un réel pur, donc cette admittance est purement réactive et présente une susceptance négative. Ce mode emmagasine de l'énergie électromagnétique de nature principalement inductive dans le cas présent. L'excitation des modes évanescents dus à la diffraction des modes guidés sur la fenêtre se traduit donc physiquement par l'accumulation d'une énergie arbitrairement inductive au voisinage de cette fenêtre.

Modélisation de la fenêtre inductive

Le plan contenant la discontinuité présente des conditions aux limites non homogènes. La fenêtre sera donc représentée par une source virtuelle en tension. Nous notons  $D^M$  le domaine métallique, et  $D^I$  le domaine non métallique de la discontinuité.

La distribution spatiale du champ électrique dans le domaine  $D^I$  est représentée suivant un vecteur d'essai unique  $g_e(x)$ , hypothèse qu'un seul mode est présent dans l'ouverture.

$$E_e(x) = v_e g_e(x) \quad \text{Eq. 143}$$

1.12.4.1.3 La mise en équations du modèle circuit

D'après les formulations analytiques des modèles électriques établis préalablement ; nous pouvons établir le circuit équivalent à notre système {guide d'onde + obstacle mince}

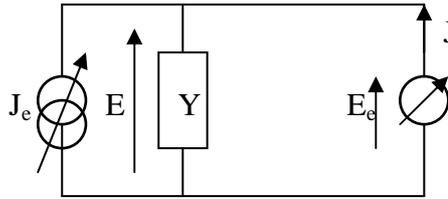


Fig.52 : Circuit équivalent au {guide d'onde + obstacle mince}

Etude de la symétrie paire :

Le circuit de la figure. 52 permet d'étudier la symétrie paire de la structure (un mur magnétique est placé au plan contenant la discontinuité). En y appliquant les lois de Kirchhoff, nous établissons le système d'équations

$$\begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ E_e \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 144}$$

$$\begin{cases} E = E_e \\ J = -J_0 + \hat{Y}E_e \end{cases} \quad \text{Eq. 145}$$

En développant l'écriture dans le domaine  $D^I$  de l'interface (dans ce cas  $J=0$ ), nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} V_0 f_0 + V_1 f_1 + \dots + V_i f_i + \dots + V_k f_k = v_e g_e(x) \\ 0 = -J_0 f_0 - J_1 f_1 - \dots - J_i f_i + -J_k f_k + \langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle v_e \end{cases} \quad \text{Eq. 146. a}$$

$$\text{Eq. 146. b}$$

Pour résoudre ce système d'équations nous appliquons la méthode Galerkin. En faisant le produit scalaire de l'équation 1 respectivement par  $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_k$ . Nous obtenons respectivement les équations

$$\begin{aligned} V_0 &= \langle f_0 | g_e \rangle v_e \\ V_1 &= \langle f_1 | g_e \rangle v_e \\ &\vdots \\ V_i &= \langle f_i | g_e \rangle v_e \\ &\vdots \\ V_k &= \langle f_k | g_e \rangle v_e \end{aligned}$$

Eq. 147

Nous en déduisons le système

$$v_e = \frac{V_0}{\langle f_0 | g_e \rangle} = \frac{V_1}{\langle f_1 | g_e \rangle} = \dots = \frac{V_i}{\langle f_i | g_e \rangle} = \dots = \frac{V_k}{\langle f_k | g_e \rangle}$$

Eq. 148

En faisant le produit scalaire de l'équation 145. b avec la fonction source de la source virtuelle  $G_e(x)$ , nous obtenons l'équation

$$0 = -\langle g_e | f_0 \rangle I_0 - \langle g_e | f_1 \rangle I_1 - \dots - \langle g_e | f_i \rangle I_i - \dots - \langle g_e | f_k \rangle I_k + \langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle v_e \quad \text{Eq. 149}$$

Nous en déduisons l'expression de  $v_e$

$$v_e = \frac{\langle g_e | f_0 \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} I_0 + \frac{\langle g_e | f_1 \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} I_1 + \dots + \frac{\langle g_e | f_i \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} I_i + \dots + \frac{\langle g_e | f_k \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} I_k \quad \text{Eq. 150}$$

En remplaçant  $v_e$  dans l'équation ci-dessus par son expression dans chaque équation du système (Eq. 148), nous obtenons l'écriture matricielle suivante.

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\langle f_0 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \\ \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \\ \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_i | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_i | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_i | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \\ \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_k | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix}$$

Eq. 151

Cette matrice de dimension k\*k (avec k le nombre des modes guidés) résume toute la modélisation électrique. Les éléments diagonaux représentent les inductances équivalentes à l'obstacle vues par chaque mode. Ces dernières sont couplées entre elles par des mutuelles de couplages représentées par les termes extra diagonaux de la matrice. Une représentation simplifiée des termes dans la matrice ci-dessous

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{paire}^{TE_{10}} & M_{paire}^{01} & \cdot & M_{paire}^{0i} & \cdot & M_{paire}^{0k} \\ M_{paire}^{10} & Z_{paire}^{TE_{30}} & \cdot & M_{paire}^{1i} & \cdot & M_{paire}^{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{paire}^{i0} & M_{paire}^{i1} & \cdot & Z_{paire}^{TE_{i0}} & \cdot & M_{paire}^{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{paire}^{k0} & M_{paire}^{k1} & \cdot & M_{paire}^{ki} & \cdot & Z_{paire}^{TE_{k0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix}$$

Eq. 152

Avec

$$Z_{paire}^{TE_{i0}} = \frac{\langle f_i | g_e \rangle^2}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle f_n | g_e \rangle^2 Y_n}$$

Eq. 153

L'impédance équivalente à la fenêtre vue par le mode TE<sub>n0</sub> dans le cas d'une symétrie paire

La mutuelle de couplage entre deux impédances  $Z^{TE_{j0}}$  et  $Z^{TE_{k0}}$  dans le cas d'une symétrie paire est donnée par la formule

$$M^{jk} = \frac{1}{2} \frac{\langle f_j | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle f_n | g_e \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 154}$$

Etude de la symétrie impaire :

L'étude de la symétrie impaire (un mur électrique est placé au plan de la discontinuité) revient à court-circuiter la source virtuelle,

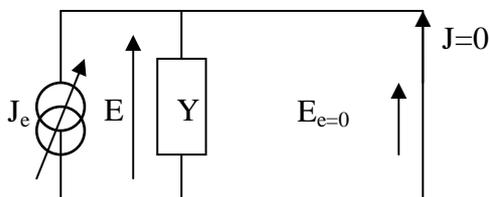


Fig.53 : Circuit équivalent au {guide d'onde + obstacle mince} dans le cas d'une symétrie impaire

Dans ce cas nous avons  $E = 0$

D'où l'impédance équivalente à la fenêtre dans le cas de symétrie impaire est donc nulle.

$$Z_{impaire_n} = \frac{V_n}{I_n} = \frac{\langle f_n | E \rangle}{I_n} = 0 \quad \text{Eq. 155}$$

La matrice impédance de la fenêtre s'écrit

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{Z_{impaire} + Z_{paire}}{2} & \frac{Z_{impaire} - Z_{paire}}{2} \\ \frac{Z_{impaire} - Z_{paire}}{2} & \frac{Z_{impaire} + Z_{paire}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{TE} & Z^{TE} \\ Z^{TE} & Z^{TE} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 156}$$

Nous déduisons que l'impédance équivalente à la fenêtre inductive vue par chaque mode  $TE_{n0}$  est de la forme

$$Z^{TE_{i0}} = \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle^2}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle f_n | g_e \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 157}$$

Sachant que

$$Y_n = \frac{\gamma_n}{j\omega\mu_0} \quad \text{Eq. 158}$$

Il en suit que

$$Z^{TE_{0n}} = j\omega L^{TE_{0n}}(\omega) \quad \text{Eq. 159}$$

La mutuelle de couplage entre deux impédances  $Z^{TE_{j0}}$  et  $Z^{TE_{k0}}$  est donnée par la formule

$$M^{jk} = \frac{1}{2} \frac{\langle f_j | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle f_n | g_e \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 160}$$

Il s'agit d'une mutuelle de couplage magnétique  $M^{jk} = j\omega M^{jk}(\omega)$

#### 1.12.4.1.4 Le circuit électrique équivalent de la fenêtre inductive

Nous établissons le système final d'équations à partir de l'étude paire et impaire de la structure.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{TE_{10}} & M^{12} & \cdot & M^{1i} & \cdot & M^{1k} \\ M^{21} & Z^{TE_{20}} & \cdot & M^{2i} & \cdot & M^{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{i1} & M^{i2} & \cdot & Z^{TE_{i0}} & \cdot & M^{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{k1} & M^{k2} & \cdot & M^{ki} & \cdot & Z^{TE_{k0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 161}$$

Nous représentons le système matriciel Eq. 161 par le circuit équivalent suivant, tous les couplages sont pris en compte, l'ingénieur a la charge de simplifier le modèle en faisant des approximations pour négliger certains couplages.

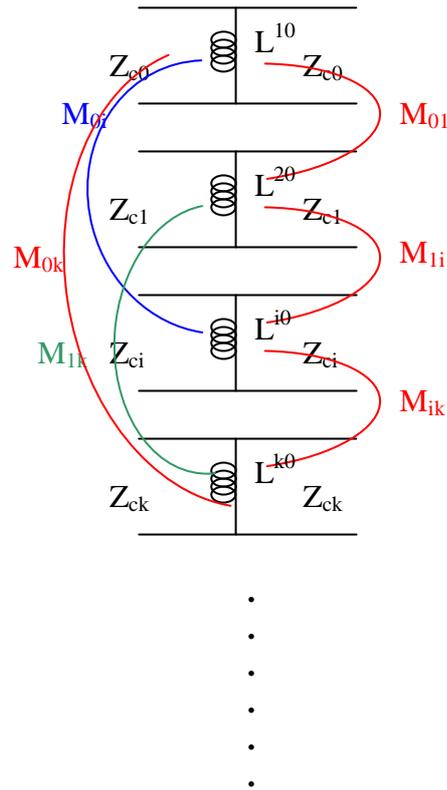


Fig.54 : Circuit électrique équivalent de la discontinuité dans le cas multimodal

A partir de ce formalisme général, nous pouvons étudier cette structure dans n'importe quelle bande fréquentielle, et en élaborer le modèle équivalent de façon automatique. Dans la suite nous allons illustrer cela en étudiant cette même discontinuité dans le cas monomodal, ensuite dans le cas bimodal.

### 1.12.5 Adaptation du modèle à la variation de la bande fréquentielle d'étude

#### 1.12.5.1 Etude du cas monomodal

Dans ce cas nous nous plaçons en dessous de la fréquence de coupure du mode  $TE_{30}$ . Seul le mode fondamental  $TE_{10}$  est susceptible de se propager au dessus de sa fréquence de coupure. Le courant et la tension délivrés par le générateur réel s'expriment uniquement suivant le vecteur base du mode fondamental

$$J = I_0 f_0 \quad E = V_0 f_0$$

Tous les autres modes sont en dessous de leurs fréquences de coupure, et sont par conséquent tous évanescents. La somme de l'opérateur admittance commence à 1, seul le mode fondamental n'est pas considéré

$$\hat{Y} = \sum_{n=1,2,3..} |f_n\rangle Y_n \langle f_n| \quad \text{Eq. 162}$$

Le système de la figure devient

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \langle f_0 | g_e \rangle \\ -\langle f_0 | g_e \rangle & \langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ V_e \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 163}$$

A partir de ce système nous pouvons écrire

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{\langle g_e | f_0 \rangle^2}{\sum_{n=1} \langle g_e | f_n \rangle^2 Y_n} I_0 \quad \text{Eq. 164}$$

L'impédance vue par le mode fondamental au niveau de la discontinuité est donnée par l'expression suivante

$$Z^{TE_{10}} = \frac{1}{2} \frac{\langle g_e | f_0 \rangle^2}{\sum_{n=1} \langle g_e | f_n \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 165}$$

### Application numérique

Pour calculer les produits scalaires intervenant dans l'expression (Eq. 165), nous faisons une première approximation sur la distribution du champ sur D

$$g_e(x) = \begin{cases} g_{ex}(x) = 0 & \text{partout sur } D \\ g_{ey}(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{w}x) & \text{dans } D_I \\ 0 & \text{sur } D_M \end{cases} \end{cases} \quad \text{Eq. 166}$$

D'où l'expression des produits scalaires intervenant dans (Eq. 165)

$$\langle g_e | f_n \rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} g_e \cdot f_n dx = 2\sqrt{\frac{2}{a}} \cos(2n+1) \frac{\pi w}{2a} \frac{\frac{\pi}{w}}{\left(\frac{\pi}{w}\right)^2 - \left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\right]^2} \quad \text{Eq. 167}$$

Nous en déduisons l'expression de l'inductance vue par le mode fondamental au niveau de la discontinuité

$$L^{TE}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\sum_{n=1,2,3} \sqrt{\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\right]^2 - k_0^2} \left\{ \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi w}{2a} \left[1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2\right]}{\cos \frac{\pi w}{2a} \left[1 - \left[(2n+1)\frac{w}{a}\right]^2\right]} \right\}^2} \quad \text{Eq. 168}$$

Avec  $Z^{TE_{10}} = j\omega L^{TE_{10}}(\omega)$

Le circuit équivalent à la fenêtre inductive pour le mode fondamental est illustré sur la figure ci dessous

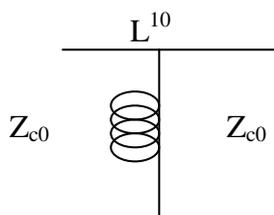


Fig.55 : Impédance équivalente à la fenêtre inductive vue par le mode fondamental  $TE_{10}$

$Z_{c0}$  est l'impédance caractéristique du mode fondamental du guide

Sur la figure. 56, nous traçons la courbe de dispersion de l'inductance  $L^{TE}$ , pour  $a=0.02m$ , et  $w=0.001m$ .

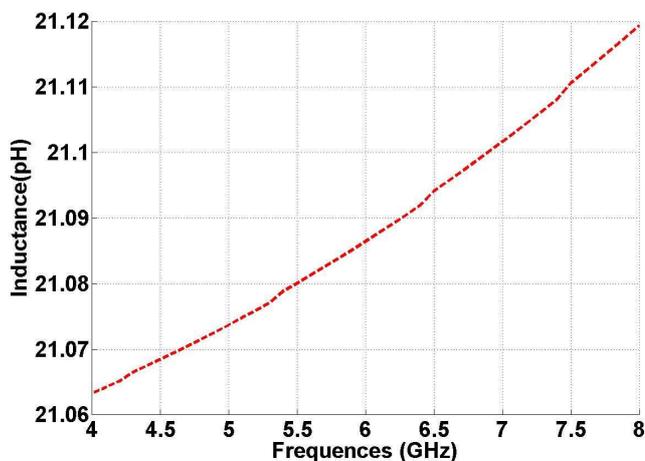


Fig. 56 : Validation de l'impédance équivalente à la fenêtre inductive vue par le mode fondamental

1.12.5.2 Etude du cas bimodal

En se plaçant en dessous de la fréquence de résonance du mode TE<sub>50</sub>, seuls TE<sub>10</sub> et TE<sub>30</sub> sont propagatifs au-dessus de leurs fréquences de coupure respectives.

Dans ce cas les caractéristiques électrique du générateur réel modélisant les modes guidés sont les suivantes

$$J = I_0 f_0 + I_1 f_1 \quad \text{Eq. 169} \quad \text{et} \quad E = V_0 f_0 + V_1 f_1 \quad \text{Eq. 170}$$

La somme de l'opérateur admittance commence à 2, les deux premiers modes sont propagatifs et ne sont donc pas considérés

$$\hat{Y} = \sum_{n=2} |f_n\rangle Y_n \langle f_n| \quad \text{Eq. 171}$$

Sans rentrer dans les détails nous établissons directement le système dans le cas bimodal.

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\langle f_0 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \\ \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_0 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 172}$$

Nous écrivons le système (Eq. 172) sous la forme simplifiée

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{TE_{10}} & M^{01} \\ M^{10} & Z^{TE_{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 173}$$

Dans le cas bimodal, le schéma électrique équivalent à la discontinuité est le suivant

Dans ce cas

$$Z^{TE_{10}} = \frac{1}{2} \frac{\langle g_e | f_0 \rangle^2}{\sum_{n=2} \langle g_e | f_n \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 174}$$

$$L^{TE_{10}}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\sum_{n=2,3} \sqrt{\left[ \left( (2n+1) \frac{\pi}{a} \right)^2 - k_0^2 \right]} \left\{ \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{w}{a} \quad 1 - \left( \frac{w}{a} \right)^2}{\cos \frac{\pi}{2} \frac{w}{a} \quad 1 - \left[ (2n+1) \frac{w}{a} \right]^2} \right\}^2} \quad \text{Eq. 175}$$

Et 
$$Z^{TE_{30}} = \frac{1}{2} \frac{\langle g_e | f_1 \rangle^2}{\sum_{n=2} \langle g_e | f_n \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 176}$$

$$L^{TE_{30}}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\sum_{n=2,3} \sqrt{\left[ (2n+1) \frac{\pi}{a} \right]^2 - k_0^2} \left\{ \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi w}{2a} \frac{1 - \left( 3 \frac{w}{a} \right)^2}{\cos\left( 3 \frac{\pi w}{2a} \right) \frac{1 - \left[ (2n+1) \frac{w}{a} \right]^2}} \right\}^2} \quad \text{Eq. 177}$$

La mutuelle de couplage est 
$$M^{01} = \frac{1}{2} \frac{\langle f_0 | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\sum_{n=2} \langle f_n | g_e \rangle^2 Y_n} \quad \text{Eq. 178}$$

$$M^{01}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\sum_{n=1,2,3} \sqrt{\left[ (2n+1) \frac{\pi}{a} \right]^2 - k_0^2} \left\{ \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi w}{2a}}{1 - \left[ (2n+1) \frac{w}{a} \right]^2} \right\}^2 \frac{\left[ 1 - \left( \frac{w}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( 3 \frac{w}{a} \right)^2 \right]}{\cos\left( \frac{\pi w}{2a} \right) \cos\left( 3 \frac{\pi w}{2a} \right)}} \quad \text{Eq. 179}$$

Dans ce cas le modèle électrique équivalent est le suivant

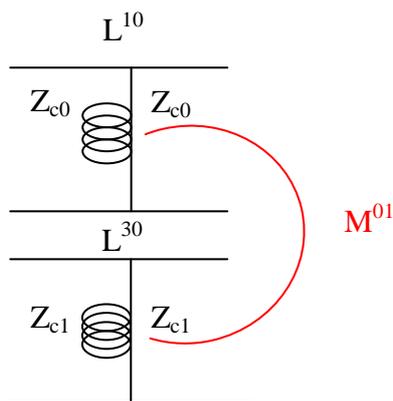


Fig.57 : circuit équivalent de la fenêtre inductive dans le cas bimodal

Impédance équivalente d'une fenêtre capacitive asymétrique dans le cas monomodal



Fig.58 : Fenêtre capacitive asymétrique

$$C^{TE}(\omega) = 4\epsilon_0 \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{k_0 a} \right)^2 \right] \sum_{n=1,2,3} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( n \frac{\pi}{b} \right)^2 - k_0^2}} \left[ \frac{\sin n \frac{\pi}{b} d}{n \frac{\pi}{b} d} \right]^2 \quad \text{Eq. 180}$$

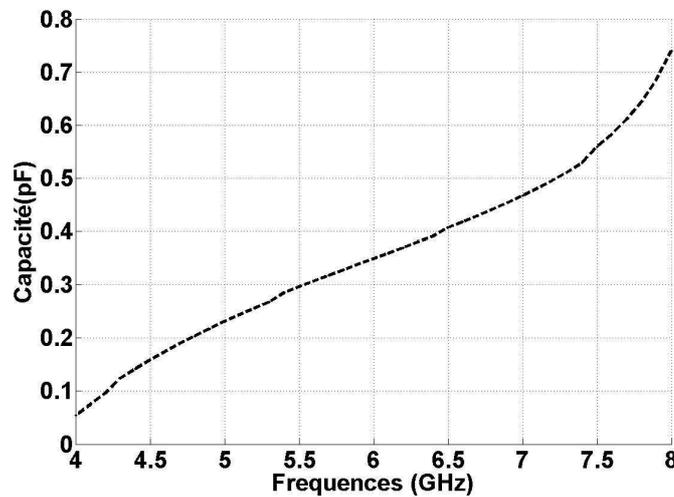


Fig.59 : Courbe de dispersion de l'impédance équivalente à la fenêtre capacitive dans le cas monomodal

### 1.12.6 Conclusion

Dans cette partie nous avons présenté le formalisme mathématique de la méthode modale. Nous avons constaté que les modèles élaborés présentent une adaptabilité intéressante de point de vue fréquentiel et géométrique. Ainsi qu'un intérêt particulier dans la modélisation des obstacles minces.

### 1.13 ETUDE DE L'EFFICACITE DE BLINDAGE DU SYSTEME COMPLET {CAVITE AVEC OUVERTURE+OBSTACLES MINCES}

#### 1.13.1 Introduction

Dans le chapitre II nous avons proposé un modèle électrique équivalent à une cavité parallélépipède présentant une ouverture rectangulaire. Le modèle a été validé et sera donc adopté dans l'étude de l'efficacité de blindage du système complet {cavité avec ouverture+obstacles minces}. Les modèles électriques équivalents aux obstacles minces seront donnés par le formalisme mathématique de la méthode modale que nous avons présentée en première partie dans ce chapitre. L'étude de l'ensemble du système nécessite la mise en équations du circuit électrique équivalent, sa résolution permettra le calcul des courants couplés sur les obstacles et du coefficient de l'efficacité de blindage du système complet.

#### 1.13.2 Description de la structure

La structure est composée d'une cavité de dimensions  $(0.3m, 0.12m, 0.3m)$  suivant les axes  $((ox), (oy), (oz))$  respectivement, cette dernière est percée d'une fente dont la largeur  $w=0.005m$  et la longueur  $l=0.1m$ . Deux plans de masse distants de  $w=0.04 m$  ont été disposés à l'intérieur de l'enceinte au niveau du plan transverse  $z=c$  comme montré sur la figure. 60, l'excitation est une onde plane de polarisation verticale.

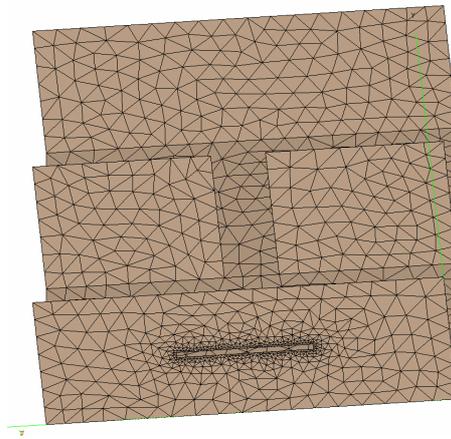
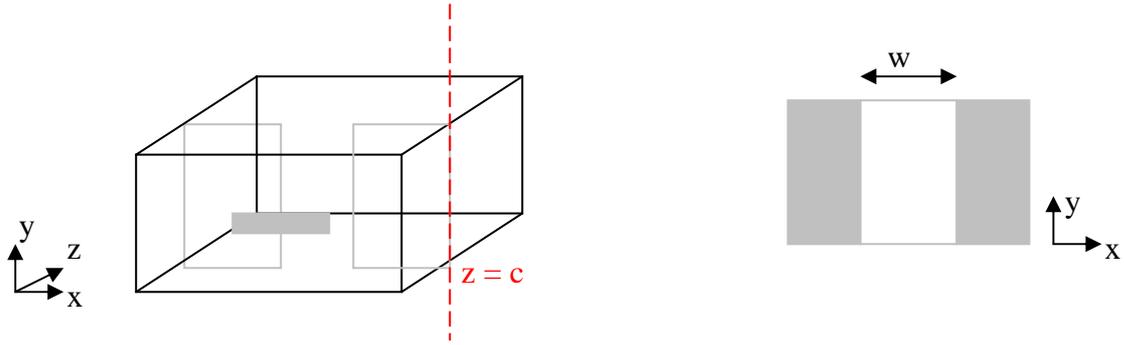


Fig.60 : Insertion de la fenêtre inductive à l'intérieur d'une cavité vide avec ouverture

### 1.13.3 Assemblage du modèle électrique équivalent au système complet {cavité avec ouverture + obstacles minces}

#### 1.13.3.1 Méthodologie

La modélisation électrique du système complet peut se faire en deux temps. En effet nous décomposons la structure en deux sous systèmes comme montré sur la figure. 61

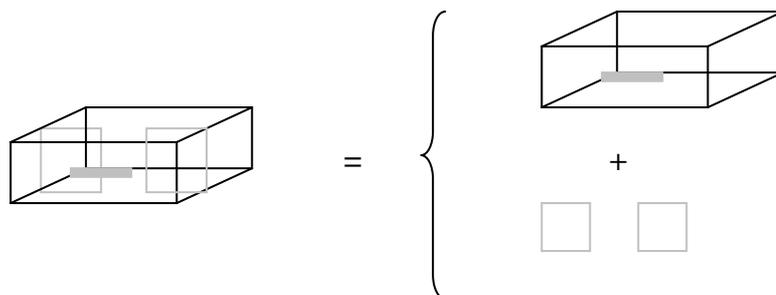


Fig.61 : Décomposition du problème

Le premier sous système est constitué de {la cavité + la fente}. Dans le chapitre II nous avons établi le modèle électrique équivalent d'une cavité présentant une fente. Chaque mode de la cavité est représenté par une ligne de transmission court-circuitée à son extrémité, et dont les grandeurs caractéristiques (impédance caractéristique, vecteur de propagation) sont égales à ceux du mode représenté. La fente quant à elle, est modélisée par deux stubs reliés l'un à l'autre, cette représentation peut être simplifiée en calculant son impédance équivalente localisée  $Z_{ouv}$ . Les formulations détaillées de chaque élément du circuit ont été présentées au chapitre II. Nous rappelons le circuit équivalent

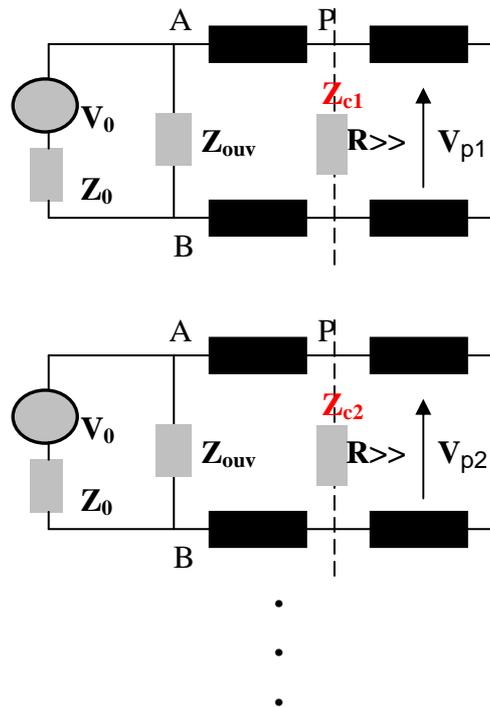


Fig.62 : Circuit équivalent de Robinson d'une cavité avec ouverture dans la bande multimodale

Le deuxième sous système est composé des {deux plans métalliques constituant une fenêtre inductive}. Nous avons traité le cas où cette discontinuité est insérée dans un guide d'onde infini en exemple d'application de la méthode modale dans la partie I de ce chapitre. Nous rappelons son modèle électrique équivalent.

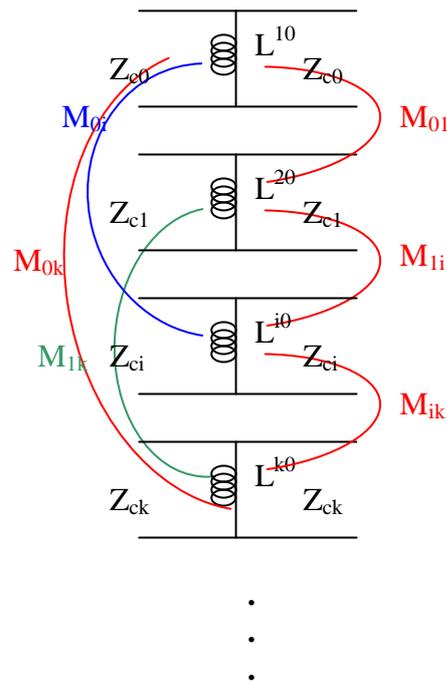


Fig.63 : Circuit équivalent de la fenêtre inductive dans la bande multimodale

En assemblant les modèles équivalents des deux sous systèmes (figure. 62 et figure. 63), nous obtenons le circuit électrique équivalent du système complet. Les résistances de très grandes valeurs ( $R \gg \gg$ ) qui ont été placées au milieu de la cavité vide pour prélever la tension ont été remplacées par les inductances  $L^{i0}$  vues par chaque mode  $TE_{i0}$  au niveau de la discontinuité, sans oublier les mutuelles de couplage entre les modes. Le modèle équivalent au système complet est donc illustré sur la figure ci dessous

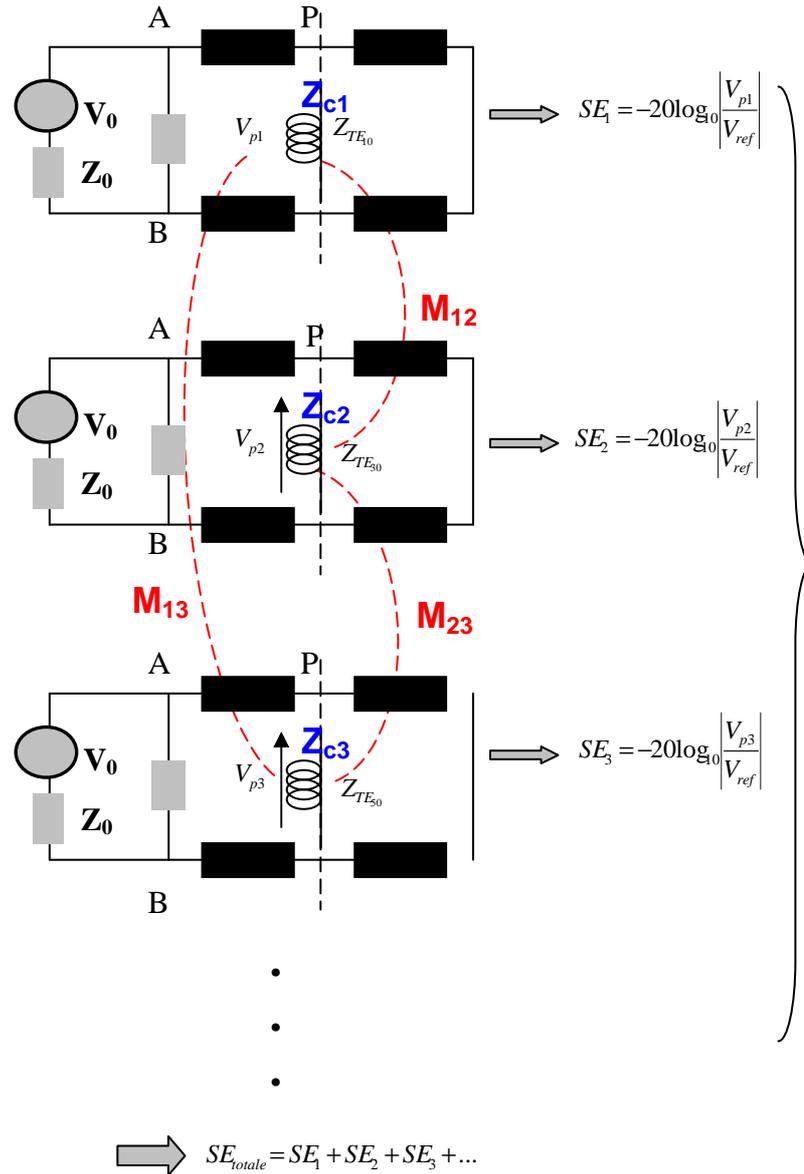


Fig.64 : Modèle équivalent du système complet { cavité avec ouverture+ fenêtre inductive} dans la bande multimodale

### 1.13.3.2 Simplification du circuit équivalent

Le circuit équivalent de la figure ci-dessus doit être simplifié pour faciliter les calculs. La démarche a été présentée en détail dans le chapitre II. Nous rappelons brièvement les étapes de calculs

Entre les bornes A et B de chaque circuit  $i$  de la figure. 64, nous calculons un Thévenin équivalent dont les éléments sont donnés par les deux formules

$$V_{0th} = V_0 Z_{ouv} / (Z_0 + Z_{ouv}) \text{ et } Z_{0th} = Z_0 Z_{ouv} / (Z_0 + Z_{ouv}) \quad \text{Eq. 181}$$

Nous obtenons ainsi le circuit équivalent de la figure. 65

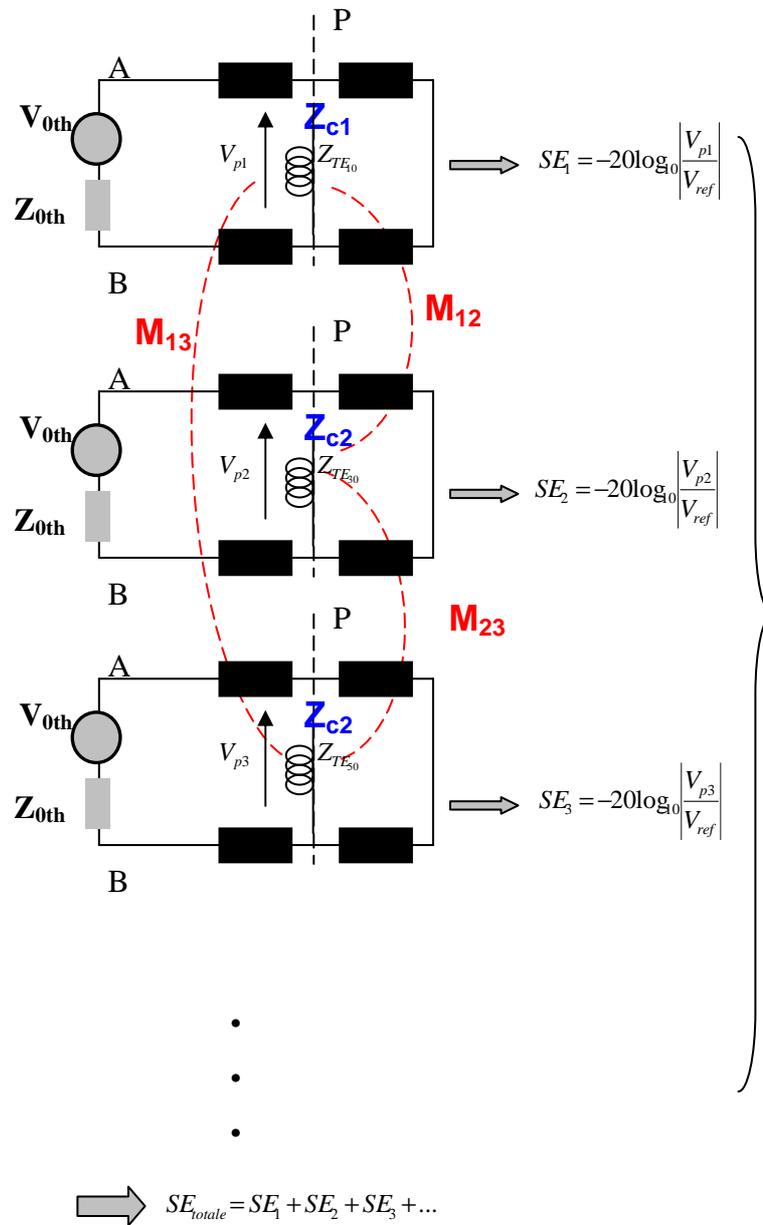


Fig.65 : Calcul du Thévenin équivalent au plan de l'ouverture

Ensuite pour se ramener à un circuit localisé, à l'aide des formules de transformation des lignes de transmission nous ramenons tous les éléments du circuit au plan P. Nous obtenons le circuit de la figure. 66

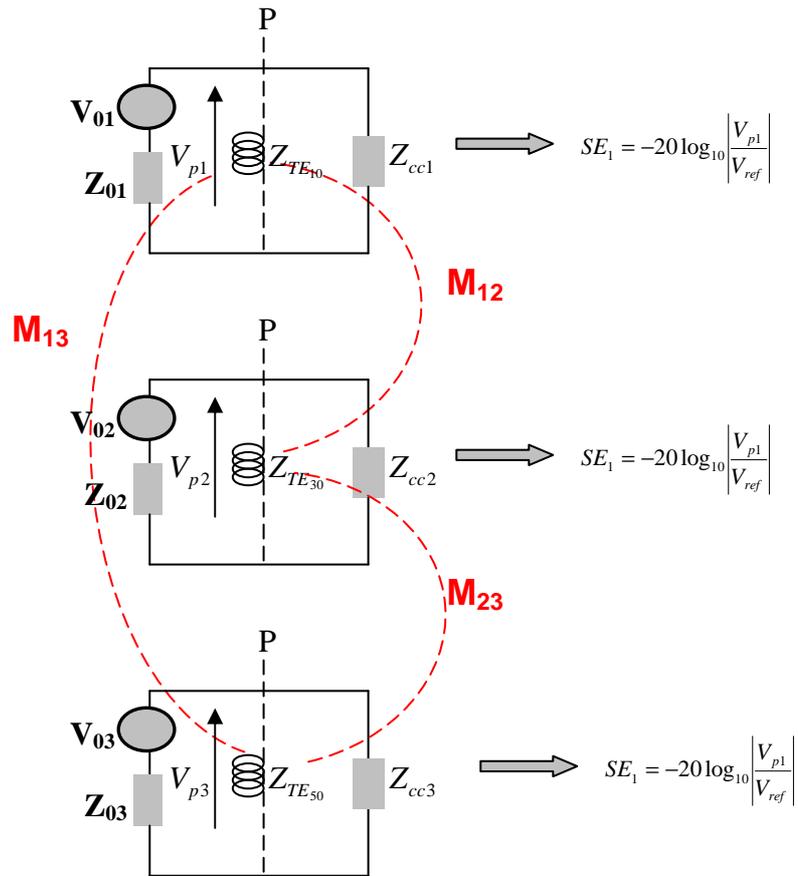


Fig.66 : Circuit équivalent localisé

Avec 
$$V_{0i} = \frac{V_{0th}}{\cos(k_{gi}p) + j(Z_{0th} / Z_{gi}) \sin(k_{gi}p)}$$
 Eq. 182. a

Et 
$$Z_{0i} = \frac{Z_{0th} + jZ_{gi} \tan(k_{gi}p)}{1 + j(Z_{0th} / Z_{gi}) \tan(k_{gi}p)}$$
 Eq. 182. b

- Enfin nous appliquons un Thévenin équivalent au circuit de la figure. 66 pour permettre le calcul des tensions  $V_{pi}$  aux bornes des inductances

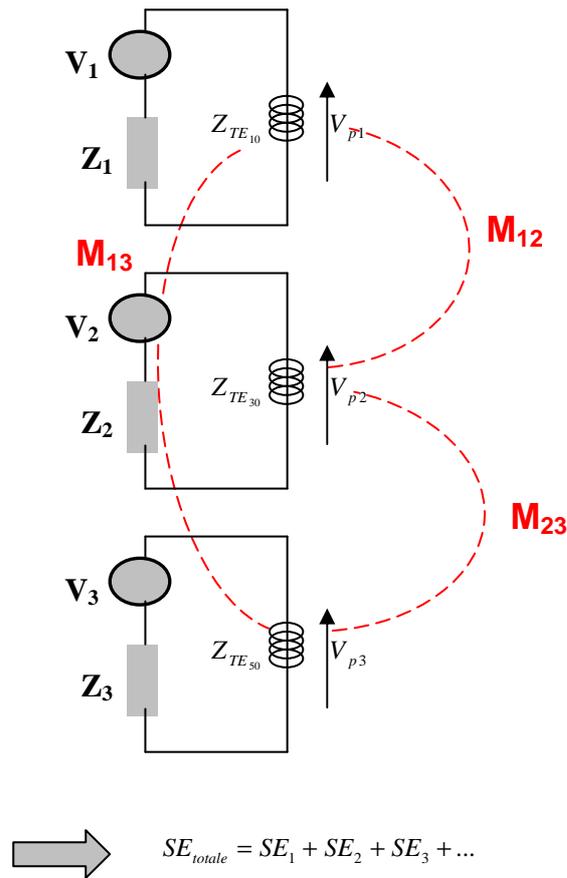


Fig.67 : Circuit équivalent simplifié au système complet { cavité avec ouverture + fenêtre inductive } dans la bande multimodale

Avec  $V_i = V_{0i} Z_{cci} / (Z_{0i} + Z_{cci})$  et  $Z_i = Z_{cci} Z_{0i} / (Z_{cci} + Z_{0i})$  Eq. 183

La tension  $V_{pi}$  s'exprime alors sous la forme

$$V_{pi} = V_i Z_{TE_{0i}} / (Z_i + Z_{TE_{0i}}) \quad \text{Eq. 184}$$

Nous pouvons alors calculer l'efficacité de blindage relative à chaque mode

$$SE_i = -20 \text{Log}_{10} \left( \frac{V_{pi}}{V_{ref}} \right) \quad \text{Eq. 185}$$

#### 1.13.4 La mise en équations du modèle électrique équivalent au système complet

En appliquant les lois de Kirchhoff sur le circuit de la figure. 67, nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} & \cdot & M^{1i} & \cdot & M^{1k} \\ M^{21} & Z_2 + Z^{TE_{30}} & \cdot & M^{2i} & \cdot & M^{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{i1} & M^{i2} & \cdot & Z_i + Z^{TE_{i0}} & \cdot & M^{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{k1} & M^{k2} & \cdot & M^{ki} & \cdot & Z_k + Z^{TE_{k0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 186}$$

L'expression du vecteur contenant les tensions délivrées par les sources est donnée à partir du modèle équivalent de Robinson

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cc1}/(Z_{01} + Z_{cc1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{cc2}/(Z_{02} + Z_{cc2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{cci}/(Z_{0i} + Z_{cci}) & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{cck}/(Z_{0k} + Z_{cck}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{01} \\ 0 \\ \cdot \\ V_{0i} \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 187}$$

Avec 
$$V_{0i} = \frac{Z_{cc1}}{(Z_{01} + Z_{cc1})[\cos(k_{g1}p) + j(Z_{0th}/Z_{01})\sin(k_{g1}p)]} V_{0th} \quad \text{Eq. 188}$$

Et 
$$V_{0th} = \frac{Z_{cc1}Z_{ouv}}{(Z_{01} + Z_{cc1})(Z_0 + Z_{ouv})[\cos(k_{g1}p) + j(Z_{0th}/Z_{01})\sin(k_{g1}p)]} V_0 \quad \text{Eq. 189}$$

- La matrice contenant les impédances est déterminée à partir des deux modèles

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} & \cdot & M^{1i} & \cdot & M^{1k} \\ M^{21} & Z_2 + Z^{TE_{30}} & \cdot & M^{2i} & \cdot & M^{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{i1} & M^{i2} & \cdot & Z_i + Z^{TE_{i0}} & \cdot & M^{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{k1} & M^{k2} & \cdot & M^{ki} & \cdot & Z_k + Z^{TE_{k0}} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 190}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Z_{cc1}Z_{01}}{(Z_{cc1} + Z_{01})} + \frac{1}{2} \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_2 | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \\ \frac{1}{2} \frac{\langle f_2 | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{Z_{cc2}Z_{02}}{(Z_{cc2} + Z_{02})} + \frac{1}{2} \frac{\langle f_2 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_2 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_2 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \\ \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_2 | g_e \rangle \langle f_i | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{Z_{cci}Z_{0i}}{(Z_{cci} + Z_{0i})} + \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_i | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \\ \frac{1}{2} \frac{\langle f_k | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_2 | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{1}{2} \frac{\langle f_i | g_e \rangle \langle f_k | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{Z_{cck}Z_{0k}}{(Z_{cck} + Z_{0k})} + \frac{1}{2} \frac{\langle f_k | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \end{bmatrix}$$

Eq. 191

Les inconnus du problème sont les courants circulant sur chaque inductance, ils sont rassemblés dans le vecteur suivant

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix}$$

La résolution du système (Eq. 191) permet de déterminer ce vecteur, ensuite il est possible d'en déduire la tension aux borne de chaque inductance

$$\begin{bmatrix} V_{p1} \\ V_{p2} \\ \cdot \\ V_{pi} \\ \cdot \\ V_{pk} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\langle f_2 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\langle f_i | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\langle f_k | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ I_k \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 192}$$

Enfin l'efficacité de blindage du système complet peut être calculée

$$SE_{totale} = SE_1 + SE_2 + SE_3 + \dots \quad \text{Eq. 193}$$

### 1.13.5 Exemple d'application avec le cas bimodale

Dans ce cas le circuit équivalent de la figure. 67 devient

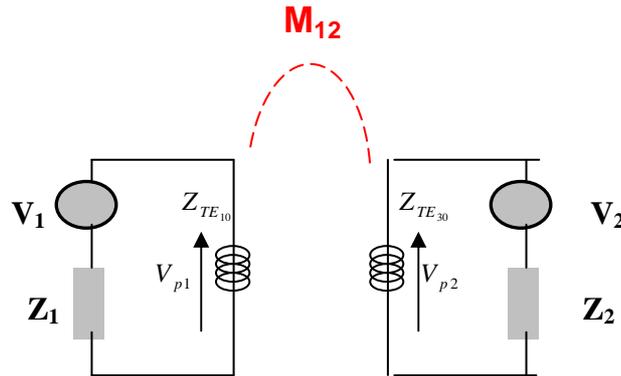


Fig.68 : Circuit équivalent du système complet {cavité avec ouverture+fenêtre inductive} dans le cas bimodal

En y appliquant les relations de Kirchhoff nous obtenons un système de deux équations

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} \\ M^{21} & Z_2 + Z^{TE_{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 194}$$

Après développement de la matrice admittance

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{Z_{cc1}Z_{01}}{(Z_{cc1} + Z_{01})} + \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{\langle f_1 | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \\ \frac{\langle f_2 | g_e \rangle \langle f_1 | g_e \rangle}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} & \frac{Z_{cc1}Z_{01}}{(Z_{cc1} + Z_{01})} + \frac{\langle f_2 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y}g_e \rangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 195}$$

En résolvant le système ci dessus nous pouvons calculer les inconnus du problème  $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

Les tensions aux bornes des inductances sont données par les relations

$$\begin{bmatrix} V_{p1} \\ V_{p1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\langle f_1 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} & 0 \\ 0 & \frac{\langle f_2 | g_e \rangle^2}{\langle g_e | \hat{Y} g_e \rangle} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 196}$$

- Enfin nous calculons l'efficacité de blindage du système complet

$$SE_{totale} = SE_1 + SE_2 \quad \text{Eq. 197}$$

#### 1.13.6 Courbe de dispersion du coefficient de l'efficacité de blindage

Un code de calculs pour la résolution du système (Eq. 196) a été programmé en langage Fortran. La résolution a été effectuée sur la bande bimodale, en se plaçant en dessous de la fréquence de résonance du troisième mode de la cavité le TE<sub>50</sub>.

La figure. 69 donne la courbe de dispersion du coefficient de blindage du système complet *{cavité avec ouverture+obstacles minces}* calculée à partir des méthodes de modélisations électriques, elle est comparée aux résultats obtenus avec le code commercial FEKO, ainsi qu'avec les résultats obtenus avec le code TEMSI-FD. Les courbes représentent un bon accord.

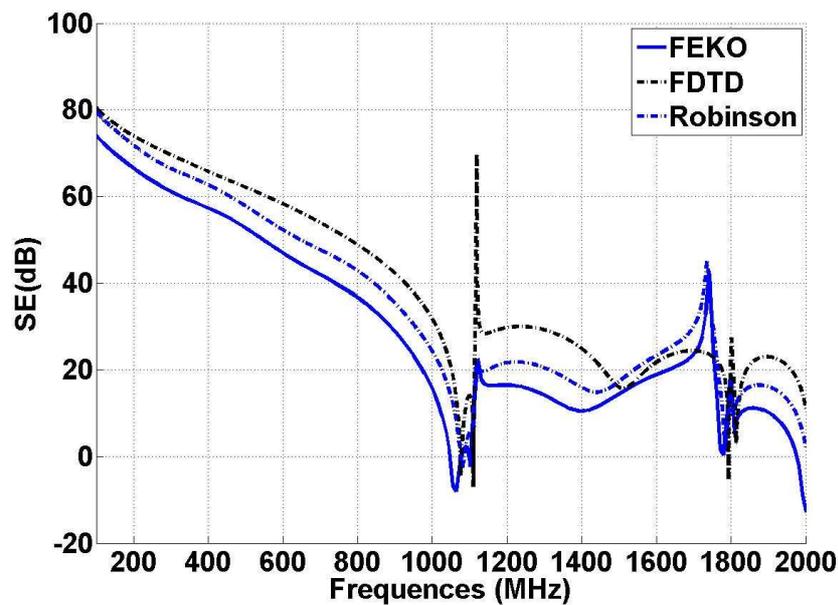


Fig. 69 : Validation de la courbe de dispersion du coefficient de blindage du système complet *{cavité avec ouverture+fenêtre inductive}* dans le cas bimodal

1.13.7 Superposition des courbes de dispersion du coefficient de blindage de la cavité avec ouverture avant et après l'insertion des obstacles minces

Sur la figure. 70 nous superposant la courbe de dispersion du coefficient de blindage du système complet {cavité avec ouverture+obstacles minces}, et la courbe de dispersion du coefficient de blindage du système {cavité vide avec ouverture} pour interpréter les décalages fréquentiels entre les deux courbes.

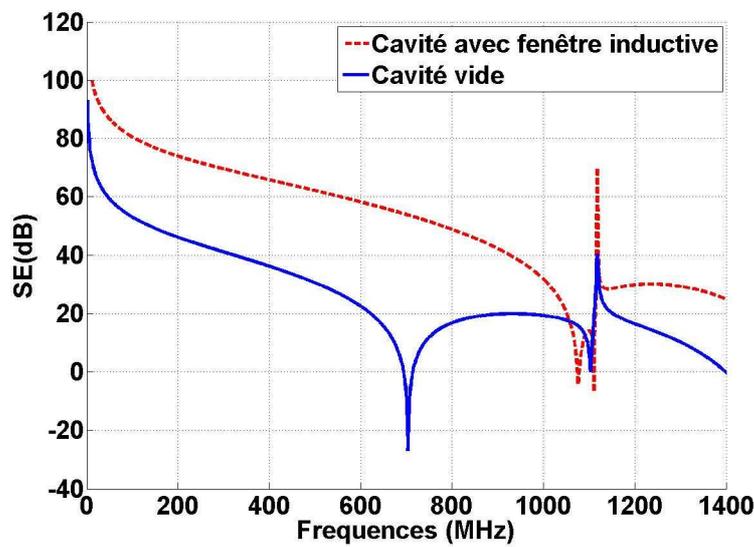


Fig.70 : Décalage des fréquences de résonance des modes de la cavité après l'insertion de la fenêtre inductive à l'intérieur de la cavité

En effet l'ajout des obstacles à l'intérieur de la cavité modifie les fréquences de résonance des modes de cette dernière. La cavité est équivalente à un circuit RLC en parallèle, l'insertion de la fenêtre inductive revient à mettre en parallèle les inductances équivalentes à la fenêtre  $L_{TE_{i0}}$  avec le circuit équivalent de chaque mode de la cavité. La mise en parallèle des inductances fait chuter l'inductance totale, et par ce fait augmenter les fréquences de résonance des modes de la cavité en présence des obstacles.

$$\frac{L_{TE_{i0}} \cdot L_{cavité}}{L_{TE_{i0}} + L_{cavité}} = \frac{L_{TE_{i0}}}{L_{TE_{i0}} + L_{cavité}} L_{cavité} \leq L_{cavité} \text{ car } \frac{L_{TE_{i0}}}{L_{TE_{i0}} + L_{cavité}} \leq 1$$

Eq. 198

### 1.13.8 Insertion d'une fenêtre capacitive asymétrique

Dans ce cas les fréquences de résonance des modes de la cavité chutent en présence de la fenêtre capacitive. Cela s'explique par la mise en parallèle d'une capacité avec le circuit équivalent de chaque mode de la cavité (RLC parallèle).

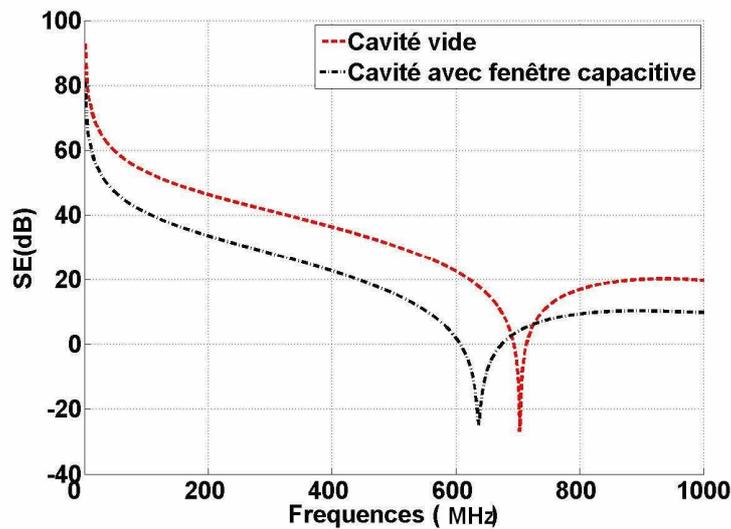


Fig 71. : Décalage des fréquences de résonance des modes de la cavité après l'insertion de la fenêtre capacitive à l'intérieur de la cavité

## 1.14 CONCLUSION

La méthode modale représente un outil puissant dans la modélisation électrique des structures et des obstacles. Les modèles équivalents sont établis à partir d'un formalisme mathématique rigoureux en prenant en compte tous les couplages possibles entre structures et entre les propres modes d'une même structure. Les modèles présentent une très grande adaptabilité à toute variation de la bande fréquentielle d'étude, ou des dimensions géométriques des structures. Aussi les modèles présentent une grande souplesse à toute suppression ou ajout d'éléments dans le système étudié, et peuvent être insérés dans des circuits équivalents établis à partir d'autres méthodes de modélisation. Cependant la méthode reste applicable uniquement aux structures présentant une géométrie permettant la formulation modale.



## CHAPITRE VI : APPROCHE TOPOLOGIQUE APPLIQUEE A L'ETUDE CEM DES SYSTEMES COMPLEXES

### *1.15 INTRODUCTION*

Ce quatrième chapitre vient compléter les travaux entamés par Olivier Maurice [2] sur une méthode associant la théorie des graphes et la topologie algébrique, et permettant d'étudier des systèmes multi physiques complexes. Cette approche présente un intérêt particulier dans l'étude CEM des systèmes complexes. En effet à partir des modèles électriques établis au préalable, cette méthode permet d'avoir une vision globale sur les couplages entre éléments de différentes échelles. Grâce au caractère tensoriel des grandeurs cette approche permet une résolution adaptée à l'échelle dans laquelle on veut exprimer le résultat. Au début de ce chapitre nous proposons un bref rappel sur la théorie des graphes, notamment sur les notions fondamentales des graphes valués. Ensuite nous introduisons dans un cadre général l'approche topologique que nous proposons dans cette thèse. Enfin nous appliquons cette méthode de modélisation dans l'étude des circuits électriques. Nous expliciterons le formalisme mathématique associé à la méthode dans ce cas. Et nous terminons par l'application de la méthode au système étudié dans cette thèse « cavité avec ouverture+fenêtre inductive».

### *1.16 RAPPELS SUR LES NOTIONS DE BASE DE LA THEORIE DES GRAPHERS*

Dans cette partie consacrée à la théorie des graphes notre objectif est de présenter quelques notions de base, qui nous seront de toute utilité dans la suite de ce chapitre pour la construction d'un objet mathématique autour du graphe topologique.

#### *1.16.1 Introduction*

La théorie des graphes est une branche commune entre les mathématiques et l'informatique. Elle traite des problématiques dans des domaines très variés justifiant une recherche très importante en algorithmique. Circuits électriques, réseaux de transport (ferrés, routiers, aériens), réseaux d'ordinateurs, ordonnancement d'un ensemble de tâches sont les principaux domaines d'application où la structure de graphe intervient.

D'autre part la théorie des graphes offre un intérêt pédagogique certain. En effet, les définitions sont simples et de véritables problèmes de recherche peuvent être posés sous forme de « jeux mathématiques » dont la formulation ludique peut recouvrir de grandes difficultés. Si comme en géométrie le support est visuel, les raisonnements y sont plus rigoureux, car il n'y a pas de risque de biais lié aux « cas de figure », et l'axiomatique de base est plus rigoureuse que celle de la géométrie au niveau élémentaire.

### 1.16.2 Définition d'un graphe

Un graphe  $G$  est constitué de 2 ensembles  $X$  et  $U$ . où  $X$  est l'ensemble des nœuds et  $U$  est l'ensemble des arcs. Nous notons  $n = |X|$  le nombre de nœuds de  $G$  et  $m = |U|$  le nombre d'arcs. Pour illustrer les définitions qui suivent, nous allons utiliser le graphe représenté par la figure 72, noté  $G = (X, U)$ ,

### 1.16.3 Un graphe orienté

Un graphe est *orienté*, cela signifie qu'une distinction est faite entre les deux extrémités (i.e. les nœuds) d'un arc. On appelle *noeud origine* le noeud d'où part l'arc et *noeud destination* le noeud où arrive l'arc. Ainsi pour un nœud  $x$ , on appelle *arcs sortants* tous les arcs ayant  $x$  pour nœud origine et *arcs entrants* tous les arcs ayant  $x$  comme nœud destination. La figure. 72 montre un exemple de graphe orienté

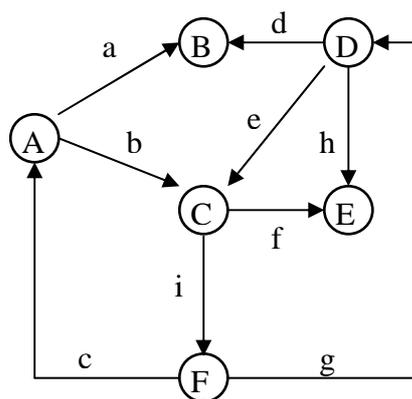


Fig.72 : Exemple de graphe orienté

Nous désignerons souvent un arc  $u$  de source  $x$  et de destination  $y$  par le couple  $(x, y)$ , bien que cette notation soit abusive dans la mesure où plusieurs arcs peuvent avoir même origine  $x$

et destination  $y$ . Dans un tel cas  $(x, y)$  est appelé un *arc multiple*. Un *multi graphe* est un graphe possédant au moins un arc multiple.

On désignera par *sens direct* l'utilisation d'un arc dans le sens origine-destination et par *sens indirect* son utilisation dans le sens destination-origine.

Le *degré sortant*, noté  $d_x^+$ , d'un nœud  $x$  est le nombre de ses arcs sortants et son *degré entrant*, noté  $d_x^-$ , est le nombre de ses arcs entrants. Le *degré* d'un nœud est la somme de ses degrés sortant et entrant. Un nœud dont le degré entrant est nul est appelé *nœud source* du graphe. De même, un nœud dont le degré sortant est nul est appelé *nœud puits* du graphe.

#### 1.16.4 Représentation matricielle des graphes

Très souvent, les performances d'un algorithme sont liées à la structure de graphe employée. En effet, chaque structure est très efficace pour un certain type d'opération, mais est souvent mauvaise pour d'autres. Ainsi, il est impossible d'avoir une structure qui soit la plus efficace pour toutes les opérations. Dans notre étude nous nous intéressons seulement aux structures sous forme de matrices, elles s'avèrent très intéressantes à manipuler d'un point de vue théorique.

##### 1.16.4.1 Matrice d'incidence sommets-arcs

Un graphe  $G$  peut être représenté par une matrice  $S$  de dimension  $n \times m$ , dite *matrice d'incidence nœud-arc*, pouvant contenir uniquement les valeurs 0, +1 et -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un nœud et chaque colonne à un arc. Ainsi, une composante indique la relation qu'il existe entre un nœud  $x$  et un arc  $u$ . Pour chaque composante  $S_{xu}$  de la matrice  $S$ , on a :

$$S_{xu} = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est la source de } u \\ -1 & \text{si } x \text{ est la destination de } u \\ 0, & \text{si } x \text{ et } u \text{ ne sont pas adjacents} \end{cases}$$

Exemple :

Pour exemple, voici la représentation par matrice d'incidence du graphe de la figure. 72

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>
<i>A</i>	+1	+1	-1	0	0	0	0	0	0
<i>B</i>	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
<i>C</i>	0	-1	0	0	-1	+1	0	0	+1
<i>D</i>	0	0	0	+1	+1	0	-1	+1	0
<i>E</i>	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
<i>F</i>	0	0	+1	0	0	0	+1	0	-1

Tableau.3 : Exemple de matrice incidence

La suppression d'une ligne, correspondant au nœud choisi comme référence permettrait de rendre les colonnes de cette nouvelle matrice, linéairement indépendantes.

**Avantages :** rapidité des recherches, compacité de la représentation, informations non redondantes pour les graphes non orientés; propriétés mathématiques très intéressantes (notamment le fait que la matrice soit *unimodulaire*).

**Inconvénients :** Seulement 2m des nm composantes sont non nulles. Elle occupe donc beaucoup de place en mémoire (stockage et examen de zéros inutiles). Son utilisation n'apporte que rarement (dans le cas où la matrice elle même a de l'intérêt) de bons résultats au niveau des algorithmes. En effet, rien que le parcours du graphe s'avère difficile.

1.16.4.2 Matrice d'adjacence sommet – sommet (Matrice booléenne)

Un graphe G peut être représenté par une matrice S de dimension  $n \times m$ , dite *matrice d'adjacence nœud-nœud*, pouvant contenir uniquement les valeurs 0 et 1, d'où l'appellation de booléenne. Chaque ligne et chaque colonne de la matrice est associée à un nœud. Ainsi, une composante indique la relation qu'il existe entre deux nœuds x et y. Pour chaque composante  $S_{xy}$  de la matrice S, on a:

$$S_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x; y) \in u \\ 0, & \text{si } (x; y) \notin u \end{cases}$$

Exemple

Pour exemple, voici la représentation par matrice d'adjacence du graphe de la figure 72

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1	0
E	0	0	0	0	0	0
F	1	0	0	1	0	0

Tableau.4 : Exemple de matrice d'adjacence

**Avantages** : rapidité des recherches, compacité de la représentation, simplicité des algorithmes de calcul. Dans cette matrice, seulement  $m$  des  $n^2$  composantes sont non nulles. Cette représentation sera donc efficace au niveau de l'espace mémoire utilisé lorsque le graphe est suffisamment dense (i.e. lorsqu'il y a suffisamment d'arcs). Son utilisation apporte plus souvent de bons résultats au niveau des algorithmes

**Inconvénients** : représentation ne convenant qu'aux graphes simples; redondance des informations pour les graphes non orientés; stockage inutile de cas inintéressants (les zéros de la matrice). Il faut noter une simplification importante dans la modélisation: on suppose qu'il n'y a pas d'arc multiple dans le graphe.

1.16.4.3 La matrice des mailles

Nous introduisons également la matrice des mailles bien qu'elle ne soit pas souvent utilisée dans la théorie des graphes. La matrice des mailles  $C$  définit les appartenances entre branches et mailles, elle est uni modulaire et d'ordre  $B \times M$ . Chaque ligne de  $C$  spécifie les mailles passant par une branche donnée : La valeur  $+1$  signifie que le sens de la maille coïncide avec le sens de la branche, la valeur  $-1$  marque l'opposition de sens, le nombre  $0$  exclut le passage de la maille par la branche considérée. Chaque colonne de  $C$  spécifie, pour une maille donnée, les branches par lesquelles passe cette maille, avec la même interprétation des sens. Si l'on forme la matrice  $t_C$  (transposée de la matrice  $C$ ) ; ce sont évidemment les lignes de cette dernière qui fournissent les mêmes informations.

1.16.5 Terminologie :

Il est utile de présenter la terminologie même réduite utilisée dans la théorie des graphes. Elle sera de toute utilité dans la compréhension des notions qui vont suivre. Voir le tableau 5

Terme	Signification
<b>Adjacence</b>	deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune; deux sommets sont adjacents s'il existe un arc, ou une arête, les reliant
<b>Arc</b>	couple (x,y) dans un graphe orienté
<b>Arête</b>	nom d'un arc, dans un graphe non orienté
<b>Boucle</b>	arc reliant un sommet à lui-même
<b>graphe simple</b>	désigne un graphe non orienté n'ayant pas de boucle ni plus d'une arête reliant deux sommets. Sur le dessin, les liens entre les sommets sont des segments, et on ne parle alors plus d'arcs mais d'arêtes ; tout graphe orienté peut donc être transformé en graphe simple, en remplaçant les arcs par des arêtes
<b>Ordre d'un graphe</b>	nombre de sommets du graphe
<b>Prédécesseur</b>	Dans l'arc (x;y), x est prédécesseur de y
<b>graphe orienté</b>	désigne un graphe où le couple (x,y) n'implique pas l'existence du couple (y,x) ; sur le dessin, les liens entre les sommets sont des flèches
<b>Chaîne</b>	Nom d'un chemin dans un graphe non orienté ; séquence d'arcs avec une extrémité commune dans un graphe orienté.
<b>Chemin</b>	suite d'arcs connexes reliant un sommet à un autre. Un chemin est une chaîne, la réciproque étant fautive
<b>Connexité</b>	Un graphe est connexe s'il existe toujours une chaîne, ou un chemin, entre deux sommets quelconques. Par exemple le plan d'une ville doit être connexe.  Si le graphe $G$ est connexe, alors $m \geq n - 1$
<b>Complet</b>	un graphe est complet si quels que soient deux sommets distincts, il existe un arc (ou une arête) les reliant dans un sens ou dans l'autre
<b>degré d'un sommet</b>	nombre d'arête issues d'un sommet dans un graphe non orienté ; nombre d'arcs arrivant ou partant d'un sommet dans un arc orienté ; on peut vérifier facilement que la somme des degrés de tous les sommets, est donc le double du nombre des arêtes (puisque chacune est comptée deux fois).
<b>Distance</b>	la distance entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes, ou des chemins, reliant ces deux sommets.
<b>Réseau</b>	Un graphe fortement connexe, sans boucle et ayant plus d'un sommet, est appelé un réseau.
<b>longueur d'un chemin (ou d'une chaîne)</b>	nombre d'arcs du chemin (ou d'arêtes de la chaîne)
<b>Rang</b>	le rang d'un sommet est la plus grande longueur des arcs se terminant à ce sommet
<b>sous graphe</b>	le graphe $G'$ est un sous graphe de $G$ si l'ensemble des sommets de $G'$ est inclus dans l'ensemble des sommets de $G$ , et si l'ensemble des arcs de $G'$ est égal au sous-ensemble des arcs de $G$ reliant entre eux tous les sommets de $G'$ ; on a donc retiré de $G$ certains sommets, et tous les arcs adjacents à ces sommets ;
<b>Stable</b>	soit un graphe $G (E ; R)$ , et $F$ un sous-ensemble de sommets. On dit que $F$ est un sous ensemble stable de $E$ s'il n'existe aucun arc du graphe reliant deux sommets de $F$ .

Tableau.5 : Tableau récapitulatif des terminologies de base

### 1.16.6 Cycle

Un cycle est un sous graphe constitué par l'ensemble des branches du réseau ou du graphe orienté, partant d'un nœud et y revenant (le cycle (a ; d ; g ; c) dans la figure. 72). Un cycle est parcouru du réseau fermé. La deuxième loi de Kirchhoff s'y applique ; U étant la tension entre bornes des branches et tenant compte des signes :

$$\sum U = 0 \text{ sur un cycle}$$

Eq. 199

Un cycle élémentaire est équivalent à maille dans un circuit électrique, Le nombre de mailles d'un réseau comprenant B branches et N nœuds. Le nombre de mailles (de mailles)  $M = B -$  (nombre de branches appartenant à l'arbre) Soit :

$$M = B - (N - 1) = B - N + 1$$

Eq. 200

Si l'on considère un cycle  $\gamma$  et qu'on lui choisit arbitrairement un sens de parcours, on notera  $\gamma^+$  l'ensemble des arcs qui sont dans ce sens de parcours et  $\gamma^-$  l'ensemble des arcs qui sont dans le sens opposé. Si tous les arcs sont dans le même sens, le cycle est appelé un *circuit*.

Comme les chaînes et les chemins, un *cycle élémentaire* (respectivement un *circuit élémentaire*) est un cycle (respectivement un circuit) qui ne passe qu'une seule fois par un même nœud. Pour des facilités d'écriture, un cycle élémentaire noté  $\gamma$  pourra être considéré comme un vecteur d'entiers, ses composantes seront notées  $\gamma_u$  pour tout arc u du graphe G, telles que:

$$\gamma_u = \begin{cases} 0, & \text{si } u \notin \gamma \\ +1, & \text{si } u \in \gamma^+ \\ -1, & \text{si } u \in \gamma^- \end{cases}$$

Dans la figure. 73, le cycle (a ; d ; g ; c) peut être représenté par le vecteur (+1 ; 0 ; +1 ; -1 ; 0 ; 0 ; -1 ; 0 ; 0), en supposant les arcs dans l'ordre a, b, c, d, e, f, g, h, i.

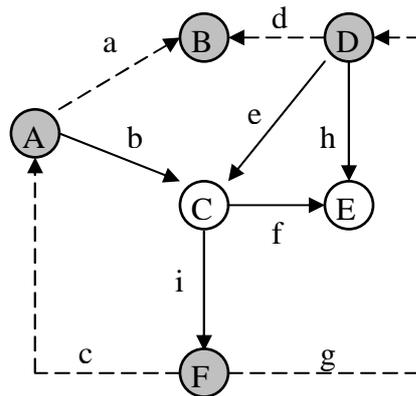


Fig. 73 : Exemple de cycle

### 1.16.7 Cocycle et cocircuit

Soit  $A$  un sous-ensemble des nœuds de  $G$ . On note  $w(A)$  le *cocycle* de  $A$ . Il s'agit de l'ensemble des arcs de  $G$  qui ont une extrémité dans  $A$  et l'autre dans  $X \setminus A$ , i.e. les nœuds qui ne sont pas dans  $A$ .

L'ensemble  $w(A)$  peut être séparé en deux sous-ensembles:  $w^+(A)$  qui contient les arcs du cocycle qui ont leur source dans  $A$ , et  $w^-(A)$  qui contient ceux qui ont leur destination dans  $A$ . Si tous les arcs sont dans le même sens, le cocycle est appelé un *cocircuit*.

De la même manière que le cycle, un cocycle noté  $w$  pourra être considéré comme un vecteur d'entiers, ses composantes seront notées  $w_u$  pour tout arc  $u$  du graphe  $G$ , telles que:

### 1.16.8 Sous-graphe et graphe partiel

Soit un graphe  $G(X; U)$ , le sous-ensemble de nœuds  $X' \subseteq X$ , et les sous-ensembles d'arcs  $U' \subseteq U$  et  $U'' = \{(x; y) \in U, x \in X' \text{ et } y \in X'\}$ . Voici la définition de graphes qui peuvent être formés à partir de ces ensembles.

Le graphe  $(X'; U'')$  est appelé *sous-graphe* de  $G$ . Autrement dit, un sous-graphe de  $G$ , c'est  $G$  privé de quelques nœuds et des arcs adjacents à ces nœuds.

Le graphe  $(X'; U')$  est appelé *graphe partiel* de  $G$ . Autrement dit, un graphe partiel de  $G$ , c'est  $G$  privé de quelques arcs.

1.16.9 Arbre et arbre recouvrant

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. De cette définition découlent les propriétés suivantes.

Tous les nœuds d'un arbre sont reliés par une chaîne (grâce à la connexité) et une seule (sinon deux chaînes formeraient un cycle).

Un arbre à  $n$  sommets contient exactement  $n-1$  arcs (car connexe signifie  $m \geq n-1$  et sans cycle signifie  $m \leq n-1$ ).

L'ajout d'un seul arc dans un arbre introduit un cycle (car  $m$  devient supérieur à  $n-1$ ).

La suppression d'un seul arc dans un arbre introduit deux composantes connexes (car  $m$  devient inférieur à  $n-1$ ).

On appelle *arbre recouvrant* d'un graphe  $G=(X ; U)$  un arbre  $G=(X ; U')$  tel que  $U' \subseteq U$ . Autrement dit, un arbre recouvrant de  $G$  est un graphe partiel connexe de  $G$  sans cycle. Le graphe de la figure. 74 est un arbre recouvrant du graphe de la figure. 72

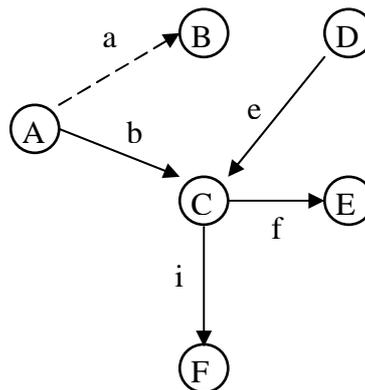


Fig.74 : Exemple d'arbre recouvrant

1.16.10 Notions élémentaires sur les graphes valués

1.16.10.1 Flot

Le flot est une notion très importante en théorie des graphes puisqu'elle permet de représenter des flux (l'information dans un réseau de télécommunication, les passagers dans un réseau de transport, les matières et les produits dans une chaîne de production...). De nombreux problèmes autour de ce concept ont été modélisés et étudiés, et par conséquent de nombreuses méthodes de résolution et d'importants résultats théoriques sont disponibles. La relation très particulière qui lie le flot et la tension est telle que la plupart des méthodes pour résoudre les

problèmes de flot (respectivement de tension) manipulent la tension (respectivement le flot). Il semble donc important de rappeler ici quelques définitions et propriétés élémentaires sur le flot.

#### 1.16.10.1.1 Définitions

On appelle *flot* sur un réseau  $N = (V, A)$  une fonction  $\varphi$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui associe à chaque arc de  $G$  une valeur (réelle ou entière). La particularité de cette fonction est que, pour chaque nœud  $x$  de  $G$ , on a la propriété suivante,

$$\sum_{u \in w^+(x)} \varphi_u - \sum_{u \in w^-(x)} \varphi_u = 0$$

Eq. 201

Autrement dit,  $\varphi$  est un flot si et seulement si, pour chaque nœud, la somme des flots sur les arcs entrants est égale à la somme des flots sur les arcs sortants. Par exemple, si  $G$  représente un circuit électrique, l'intensité du courant est un flot sur  $G$ . Ainsi, si on note  $S$  la matrice d'incidence de  $G$ , la formule (Eq. 201) peut s'écrire :

$$S\varphi = 0 \quad \text{Eq. 202}$$

Dans ce cas la relation (Eq. 202) représente la loi des nœuds.

#### 1.16.10.1.2 Propriétés élémentaires

Voici quelques propriétés élémentaires sur le flot très simplement vérifiables.

- Si  $\varphi$  est un flot et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda\varphi$  est un flot.
- Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des flots, alors  $\varphi_1 + \varphi_2$  est un flot.
- Le seul flot possible sur un arbre est le flot  $\varphi = 0$ .
- Le vecteur qui représente un cycle est un flot (il est très facile de vérifier la conservation des flots).

#### 1.16.10.1.3 Bases de cycles

On dit que  $p$  vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_p$  de  $\mathbb{R}^q$  sont *dépendants* s'il existe  $p$  coefficients non tous nuls  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  dans  $\mathbb{R}$  tels que :

$$\sum_{i=1..p} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{Eq. 203}$$

A l'inverse, si la relation (Eq. 203) n'est vérifiée que pour tous les  $\lambda_i$  nuls, alors les vecteurs  $v_1, v_2..v_p$  sont dits *indépendants*.

Une *base de vecteurs* est un ensemble de vecteurs indépendants tel que tout vecteur  $v$  de  $R^q$  est une *combinaison linéaire* des vecteurs de la base, i.e. pour tout vecteur  $v$  il existe des coefficients  $\lambda_1, \lambda_2.. \lambda_p$  tels que :

$$\sum_{i=1..p} \lambda_i v_i = v \quad \text{Eq. 204}$$

Les cycles pouvant être considérés comme des vecteurs, il est possible de construire une *base de cycles*. Nous rappelons ici une manière simple d'obtenir une telle base. Considérons un arbre recouvrant  $T = (X; U')$  du graphe  $G$ . Il ne contient pas de cycles, mais tout ajout dans l'arbre d'un arc  $u$  de  $U/U'$  (i.e. un arc qui n'est pas déjà dans  $T$ ) engendre un cycle  $\gamma''$ . Si on considère l'ensemble des cycles  $\gamma''$  engendré en ajoutant séparément chaque arc  $u$  de  $U/U'$  dans l'arbre  $T$ , on obtient un ensemble  $U/U'$ ,  $B_\gamma = \{\gamma^{u_1}; \gamma^{u_2}.. \gamma^{u_p}\}$  de cycles indépendants (car chaque cycle  $\gamma''$  possède un arc qu'aucun autre ne possède, c'est  $u$ ). Il faut s'assurer maintenant que tout cycle de  $G$  est une combinaison linéaire des cycles de  $B_\gamma$ .

Considérons un flot  $\varphi$ . Soit  $\varphi = \sum_{u \in U/U'} \varphi_u \gamma''$ .  $\varphi'$  est une combinaison linéaire de flots donc un flot. La différence  $\varphi - \varphi'$  est également un flot. Or, pour tout arc  $u$  de  $U/U'$ ,  $\varphi_u = \varphi'_u$  puisque l'arc  $u$  n'apparaît que dans le cycle  $\gamma''$ . Le flot  $\varphi - \varphi'$  étant nul pour tout arc n'appartenant pas à  $T$ , il représente donc un flot défini strictement sur  $T$ , or tout flot sur un arbre est nul donc  $\varphi = \varphi'$ .

En conclusion, tout flot est une combinaison linéaire de la base  $B_\gamma$ . Un cycle pouvant être considéré comme un flot, tout cycle est une combinaison linéaire de  $B_\gamma$ . On remarque également que la base  $B_\gamma$  contient  $m-n+1$  cycles (car  $T$  possède  $n-1$  arcs).

#### 1.16.10.2 Tension

L'utilisation de la tension pour modéliser des problèmes dans les graphes est beaucoup moins répandue que pour le flot, cependant il existe de nombreux problèmes que la tension peut représenter. Notamment dans le domaine de la planification, la tension peut être assimilée à

une durée. Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés élémentaires sur la tension utiles pour notre étude.

#### 1.16.10.2.1 Définitions

On désigne par *potentiel* une fonction  $\pi$  qui associe à chaque noeud de  $G$  une valeur (entière ou réelle). Associée à ce potentiel, on peut définir une fonction  $\theta$  appelée *tension* qui attribue à chaque arc  $u = (x; y)$  de  $G$  une valeur de la manière suivante.

$$\theta_u = \pi_y - \pi_x \quad \text{Eq. 205}$$

Une fonction est donc une tension s'il est possible de lui associer un potentiel. Ces notions de tension et de potentiel peuvent être comparées à celles d'un circuit électrique. Si on note  $S$  la matrice d'incidence de  $G$ , la définition de la tension peut se traduire:

$$\theta \text{ est une tension} \Leftrightarrow \exists \pi \in R, S^t \pi = \theta \quad \text{Eq. 206}$$

#### 1.16.10.2.2 Propriétés élémentaires

Voici quelques propriétés élémentaires sur la tension très simplement vérifiables.

- Si  $\theta$  est une tension et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda\theta$  est une tension.
- Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des tensions, alors  $\theta_1 + \theta_2$  est une tension.
- Toute fonction qui associe à chaque arc d'un arbre une valeur est une tension.
- Le vecteur qui représente un cocycle est une tension (il est très facile d'y associer un potentiel).

Tout vecteur tension  $\theta$  et tout vecteur flot  $\varphi$  sur un graphe  $G$  sont orthogonaux, i.e. le produit scalaire  $\theta^t \varphi = 0$  (d'après la définition (Eq. 206), il existe un potentiel  $\pi$  tel que  $\theta = S^t \pi$  où  $S$  est la matrice d'incidence de  $G$ , donc  $\theta^t \varphi = (S^t \pi)^t \varphi = \pi^t (S \varphi) = 0$ ). Il est alors possible d'en déduire une nouvelle définition de la tension.

$$\theta \text{ est une tension} \Leftrightarrow \forall \text{cycle } \gamma \text{ de } G, \gamma^t \theta = 0 \quad \text{Eq. 207}$$

Dans un circuit électrique cette relation traduit le fait que la somme de la puissance totale dissipée par un circuit fermé est nulle.

## Chapitre VI : Approche topologique

### 1.16.10.2.3 Base de cocycles

De manière analogue aux cycles, nous rappelons ici une manière simple d'obtenir une *base de cocycles*. Considérons un arbre recouvrant  $T=(X;U')$  du graphe  $G$ . En supprimant un arc  $u$  de l'arbre, on fait apparaître deux composantes connexes. Notons  $C_u$  la composante qui contient le noeud source de  $u$  et notons  $w^u = w(C_u)$  le cocycle de  $C_u$  dans le graphe  $G$ . Si on considère l'ensemble des cocycles  $w^u$  engendré en supprimant séparément chaque arc  $u$  de  $T$ , on obtient un ensemble  $B_w = \{w^{u_1}; w^{u_2} .. w^{u_p}\}$  de cocycles indépendants (car chaque cocycle  $w^u$  possède un arc qu'aucun autre ne possède, c'est  $u$ ). Il faut s'assurer maintenant que tout cocycle de  $G$  est une combinaison linéaire des cocycles de  $B_w$ .

Considérons une tension  $\theta$ . Soit  $\theta' = \sum_{u \in U'} \theta_u w^u$ .  $\theta'$  est une combinaison linéaire de tensions donc une tension. La différence  $\theta - \theta'$  est également une tension. Or, pour tout arc  $u$  de  $U'$ ,  $\theta'_u = \theta_u$  puisque l'arc  $u$  n'apparaît que dans le cocycle  $w^u$ . La tension  $\theta - \theta'$  étant nulle pour tout arc de  $T$ , tous les nœuds de l'arbre et donc du graphe ont le même potentiel. Donc  $\theta = \theta'$ .

En conclusion, toute tension est une combinaison linéaire de la base  $B_w$ . Un cocycle pouvant être considéré comme une tension, tout cocycle est une combinaison linéaire de  $B_w$ . On remarque également que la base  $B_w$  contient  $n-1$  cocycles (car  $T$  possède  $n-1$  arcs).

### 1.16.11 Conclusion

Ce bref rappel de la théorie des graphes était indispensable pour la compréhension de l'approche topologique que nous introduirons dans la suite.

## 1.17 DESCRIPTION DE L'APPROCHE TOPOLOGIQUE DANS UN CADRE GENERALE

### 1.17.1 Introduction

La théorie des graphes permet de fournir une structure topologique générale comme support à la modélisation de systèmes complexes. Cette approche topologique fait référence à la notion de voisinage, existant entre les nœuds et les branches, permettant ainsi de lier explicitement les différents éléments du graphe entre eux, mais aussi à leur environnement. Les lois mathématiques tensorielles vont permettre de décrire les connexions, de spécifier des lois d'équilibre et de compatibilité. Au contraire des modélisations classiques qui sont

généralement basées sur un seul phénomène physique, l'aspect générique de cette approche lui permet de traiter des systèmes physiques complexes composés de sous systèmes dont la conception et le fonctionnement font intervenir un certain nombre de paramètres multi physiques, et qu'aucun ne peut appréhender dans son ensemble. En effet les paramètres multi physiques sont liés au sein d'un même système d'équations, ce qui favorise l'analyse puis la résolution.

### 1.17.2 La démarche à suivre

En s'appuyant sur les travaux de Kron [3] et Roth [11], [26] sur les réseaux et machines électriques, Branin [12], [25], utilise une même structure topologique pour décrire les grandeurs physiques de systèmes multi physiques. En s'appuyant sur ces travaux, Björke [13] propose plus tard une approche appliquée aux systèmes de production.

Notre démarche s'inspire de ces travaux, elle consiste à proposer une approche déclarative. Le problème est modélisé à partir de deux données :

- donnée qualitative : une structure topologique illustrée généralement par un graphe
- donnée quantitatives : une structure algébrique associée au graphe

En effet le système est représenté par une structure topologique, à laquelle on superpose une structure algébrique [14]. Cette structure globale relie les différentes entités topologiques (nœuds, branches et mailles) du graphe. Ensuite, en fonction de la nature du problème, nous associons aux entités topologiques des données physiques, qui sont reliées entre elles par des relations matricielles de caractère tensoriel. Nous obtenons un graphe dit valué.

A partir de la génération de ces équations, on peut appliquer diverses méthodes de résolution en fonction de la conformation du système. L'originalité de notre approche réside précisément dans l'indépendance de la génération du système d'équations et des méthodes de résolution associées

### 1.17.3 Définitions des entités topologiques

#### 1.17.3.1 Nœuds

Dans un graphe, les sommets ou les nœuds sont des points singuliers correspondant à des discontinuités, ils sont les premières entités topologiques qu'il faut définir, ils permettent de situer le graphe dans l'espace et de lui attribuer une dimension. Nous retrouvons la notion de nœud dans des domaines très variés. Un nœud électrique est la simple connexion entre plusieurs conducteurs électriques. Un nœud de communication est le point de rencontre de routes, de lignes ferroviaires. En informatique, un nœud de communication est un dispositif permettant la communication entre les composants logiques et physiques d'un réseau. Nœud de commutation est un dispositif de ramification et de concentration de lignes de transmission, assurant une fonction d'aiguillage des données. Le nœud de transit. Dispositif intermédiaire de raccordement de lignes assurant la réception des données et leur retransmission ultérieure. Nous représentons l'ensemble des nœuds d'un graphe par une matrice unicolonne [N].

#### 1.17.3.2 Branches

Certaines paires de nœuds sont directement reliés par un lien. Ces liens sont antisymétriques dans le cas où le graphe est orienté (partant du nœud  $i$  et arrivant au nœud  $j$ ), dans ce cas ces liens sont appelés arcs. Dans le cas contraire les liens sont symétriques le graphe est dit non orienté, et les liens sont appelés arêtes. Nous utilisons la nomination branches pour arcs dans le cas où le graphe est associé à un circuit électrique. Nous représentons l'ensemble des branches d'un graphe par une matrice unicolonne [B].

#### 1.17.3.3 Mailles

Une maille est un ensemble de branches formant une circulation fermée. Dans la théorie des graphes une maille correspondrait à un chemin fermé donc à un cycle. Un circuit est dit élémentaire si c'est un chemin fermé simple (on ne traverse jamais deux fois le même arc) et élémentaire (on ne traverse jamais deux fois le même sommet). Un circuit élémentaire est constitué d'une maille unique construite à partir de deux branches définies à partir de deux nœuds. Nous représentons les mailles formant un circuit par une matrice unicolonne [M]

#### 1.17.4 Connexions entre éléments topologiques

Maintenant que nous avons attribué à chaque grandeur topologique du graphe une représentation matricielle, nous pouvons établir les relations de connexion entre ces entités topologiques à l'aide des matrices de connexion définies préalablement dans la première partie de ce chapitre. Ainsi la matrice unicolonne des branches est connectée à la matrice unicolonne des nœuds à travers la matrice d'incidence à partir de la relation :

$$[B] = [C] [N] \quad \text{Eq. 208}$$

La matrice unicolonne des branches et la matrice unicolonne des mailles sont reliées à travers la matrice mailles selon la relation

$$[B] = [A] [M] \quad \text{Eq. 209}$$

A partir de ces relations de connexion purement topologiques pour le moment, la topologie du graphe est parfaitement déterminée et sa construction devient possible.

#### 1.17.5 Des entités topologiques vers les entités physiques

Une fois ces relations établies, nous associons à ces entités topologiques les données physiques qui nous intéressent. On peut associer à  $[N]$ ,  $[B]$  et  $[M]$  n'importe quel multi vecteur, vérifiant les relations de connexion.

- Aux nœuds : {points géométriques, potentiels : potentiel électrique, couple, force...}
- Aux branches : {vecteurs, flux : courant électrique, vitesse, déplacement d'un point...}
- Aux mailles : {flux magnétique, vitesse de rotation, moments, ....}

#### 1.17.6 Relations tensorielles

Enfin les relations tensorielles et métriques sont exploitées pour définir les relations de dualité algébrique entre les paramètres physiques. Certains éléments seront qualifiés de primaux, d'autres de duaux.

#### 1.17.7 L'analyse diakoptique

Cette méthode permet de réaliser la décomposition d'un problème complexe multi échelles en composants élémentaires qui sont étudiés indépendamment les uns des autres avant d'être regroupés pour obtenir la solution du problème entier [10]. Les résultats des études des sous-domaines étant des matrices  $[S]$ , il suffit de chaîner l'ensemble de ces matrices pour obtenir la

réponse globale du système. L'analyse diakoptique peut être intégrée dans notre approche topologique dans le cas des systèmes complexes.

### 1.17.8 Graphe algébrique

En assemblant les relations matricielles de connexion entre éléments topologiques, et les relations tensorielles entre paramètres physiques duaux, nous obtenons un diagramme de réseau algébrique, nous permettant, d'établir un système d'équations à partir de spécifications sur les différents éléments du diagramme et en utilisant la méthode « diakoptique » dans le cas d'un système complexe. Ainsi ce diagramme nous permet d'obtenir n'importe quelle relation entre les éléments, suivant les spécifications et inconnues du système. La figure. 75 illustre la topologie du graphe algébrique.

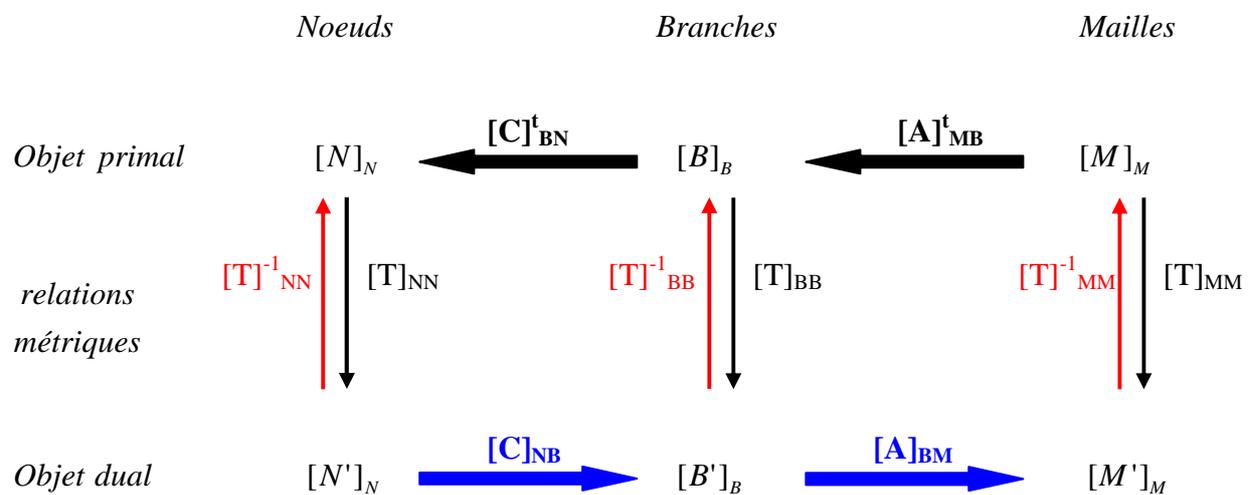


Fig.75 : Graphe algébrique/topologique générique

### 1.17.9 Génération des équations

Nous en rappelons brièvement les cinq étapes :

- Spécification du problème par l'utilisateur : à chaque spécification nous associerons une incidence (topologie) et/ou une spécification métrique (angle, distance, intensité...)
- Une analyse de la cohérence des spécifications est effectuée : L'hypothèse faite est que nous partons d'un problème défini et cohérent
- La génération automatique des équations peut alors être faite : on établit le graphe algébrique à partir du graphe topologique
- On procède ensuite à une simplification formelle des équations
- Enfin, on résout le problème par le biais d'un solveur

### 1.17.10 Conclusion

Cette approche crée des perspectives intéressantes pour les systèmes électriques ou électroniques complexes, et notamment lorsqu'une même représentation conduit à différentes modélisations d'un système (multi physiques, multi échelles, interactions...). Dans la suite de ce chapitre nous appliquons cette approche dans l'étude des circuits électriques.

## 1.18 APPLICATION DE L'APPROCHE TOPOLOGIQUE DANS L'ETUDE DES CIRCUITS ELECTRIQUE

### 1.18.1 Introduction

Dans cette partie, nous développons le formalisme de notre approche topologique autour du circuit électrique. Cela permettra d'exprimer de façon explicite les relations matricielles et tensorielles entre grandeurs électriques. Pour arriver enfin à établir le graphe algébrique associé au circuit électrique.

### 1.18.2 Du graphe topologique au circuit électrique

Un circuit électrique peut se voir comme un graphe orienté, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds (les branches). Tous les raisonnements topologiques s'y rapportent, et toutes les appartenances entre branches et nœuds y sont respectées. L'introduction des grandeurs électriques découle de la théorie des graphes valués. La loi de conservation des flots à chaque sommet du graphe traduit la loi des nœuds dans un circuit électrique. La deuxième loi de Kirchhoff est illustrée par la notion de cycle dans la théorie des graphes.

### 1.18.3 Interprétation mathématique des grandeurs électriques

Soit un circuit électrique linéaire noté  $C$ , disposant de  $N$  nœuds,  $B$  branches et  $M$  mailles. L'application des lois de Kirchhoff à un tel circuit permet d'établir un système d'équations de la forme

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & Z_{1B} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & Z_{2B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{B1} & Z_{B2} & \cdot & \cdot & Z_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I^B \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 210}$$

Ou également de la forme

$$\begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{11} & Y^{12} & \cdot & \cdot & Y^{1B} \\ Y^{21} & Y^{22} & \cdot & \cdot & Y^{2B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{B1} & Y^{B2} & \cdot & \cdot & Y^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_B \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 211}$$

Les deux systèmes ci-dessus contiennent des matrices que nous avons l'habitude de manipuler presque de façon automatique sans trop se soucier des données mathématique qu'elles contiennent. Dans la suite nous allons présenter chacune de ces matrices pour en savoir plus du point de vue mathématique.

### 1.18.3.1 La matrice uni colonne contenant les courants des branches

Un courant électrique dont la valeur numérique est connue demeure une donnée absurde sans grande importance, en effet il faut connaître la branche sur laquelle circule ce courant, une sorte de coordonnée qui permet de situer chaque grandeur électrique dans un circuit donné, la notion de coordonnée nous mène à la notion de base et d'espace vectoriel.

Le courant électrique dans un circuit est une grandeur algébrique qui dépend d'une orientation conventionnelle de la branche, à partir de cette définition nous pouvons qualifier le courant de pseudo vecteur dont les composantes sont covariantes. Cependant le courant est lié à la densité de courant qui est un vrai vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés, et qui possède des composantes contravariantes. Un courant électrique sera plutôt considéré comme une densité de courant.

Par conséquent, les courants des branches représentent les composantes contravariantes associées aux vecteurs branches. La notation indicielle du vecteur courant traduit ce caractère tensoriel.

$$\begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I^B \end{bmatrix}$$

Nous associons à chaque branche  $b$  un vecteur  $e_b$ , la décomposition du courant de branches sur la base des vecteurs de branches  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_k \dots\}$  est donnée par la formule selon la notation d'Einstein

$$i = i^k \vec{e}_k \quad \text{Eq. 212}$$

Nous définissons  $E$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs covariants des branches  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_k \dots\}$ .

### 1.18.3.2 La matrice uni colonne contenant les tensions des branches

La tension est un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, dont le sens est défini à partir d'une convention d'orientation d'espace et dépend donc de cette convention. Les tensions des branches sont de nature covariante. Nous y associons une base de développement  $\{e^{*1}, e^{*k} \dots\}$ . Ou chaque branche  $b$  est représenté par un vecteur contravariant  $e^{b*}$ .

La position des indices dans la représentation du vecteur tension est en cohérence avec le type de variance du vecteur.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_B \end{bmatrix}$$

La décomposition d'une tension de branche dans la famille  $\{e^{*1}, e^{*k} \dots\}$  s'exprime comme suivant

$$u = u_k e^{*k} \quad \text{Eq. 213}$$

La famille des forme linéaires  $\{e^{*1}, e^{*k} \dots\}$  engendre l'espace dual  $E^*$ .

Nous soulignons la dualité entre tension et courant dans un circuit électrique.

### 1.18.3.3 Passage de l'espace $E$ à l'espace dual $E^*$

Grâce aux relations tensorielles et métriques, au travers de matrices d'admittance ou d'impédance, et en s'appuyant sur la dualité algébrique des paramètres, nous pouvons exprimer les relations physiques qui interviennent entre ces éléments, i.e. l'objet primal qui est le courant et l'objet dual qui est la tension.

Ainsi le tenseur métrique des impédances permet de passer des intensités internes aux tensions internes de chaque branche à travers la relation suivante

$$Z_{ij}i^j = u_i \text{ avec } Z_{ij} = \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle \quad \text{Eq. 214}$$

À l'aide du tenseur métrique des admittances on peut passer des tensions internes aux intensités internes de chaque branche en utilisant la relation ci dessous

$$y^{ji}u_i = i^j \text{ avec } y^{ji} = Z_{ij}^{-1} \quad \text{Eq. 215}$$

Ces relations tensorielles de passage expriment la dualité Courant-Tension du système électrique. Les équations décrivant un circuit électrique sont exprimées soit dans l'espace E ou bien dans l'espace E\*.

Dans l'espace E nous manipulons des courants, dans ce cas les tensions sont ramenées à l'espace E à l'aide du tenseur métrique des admittances. Les équations électriques dans l'espace E sont de la forme de l'équation (Eq. 216). Nous en déduisons que la loi des nœuds est exprimée dans l'espace E.

$$I^1 + y^{ii}u_i + \dots + I^B = 0 \quad \text{Eq. 216}$$

Dans l'espace E\* on manipule des tensions, les courants sont ramenés à l'espace E\* à l'aide du tenseur métrique des impédances. Les équations électriques dans l'espace E\* sont de la forme de l'équation (Eq. 217). Nous déduisons que la loi des mailles est exprimée dans l'espace E\*. Nous déduisons que la loi des mailles est exprimée dans l'espace E\*.

$$u_i + z_{ii}i^i + \dots + u_B = 0 \quad \text{Eq. 217}$$

#### 1.18.3.4 La matrice impédances $B \times B$ / la matrice admittances $B \times B$

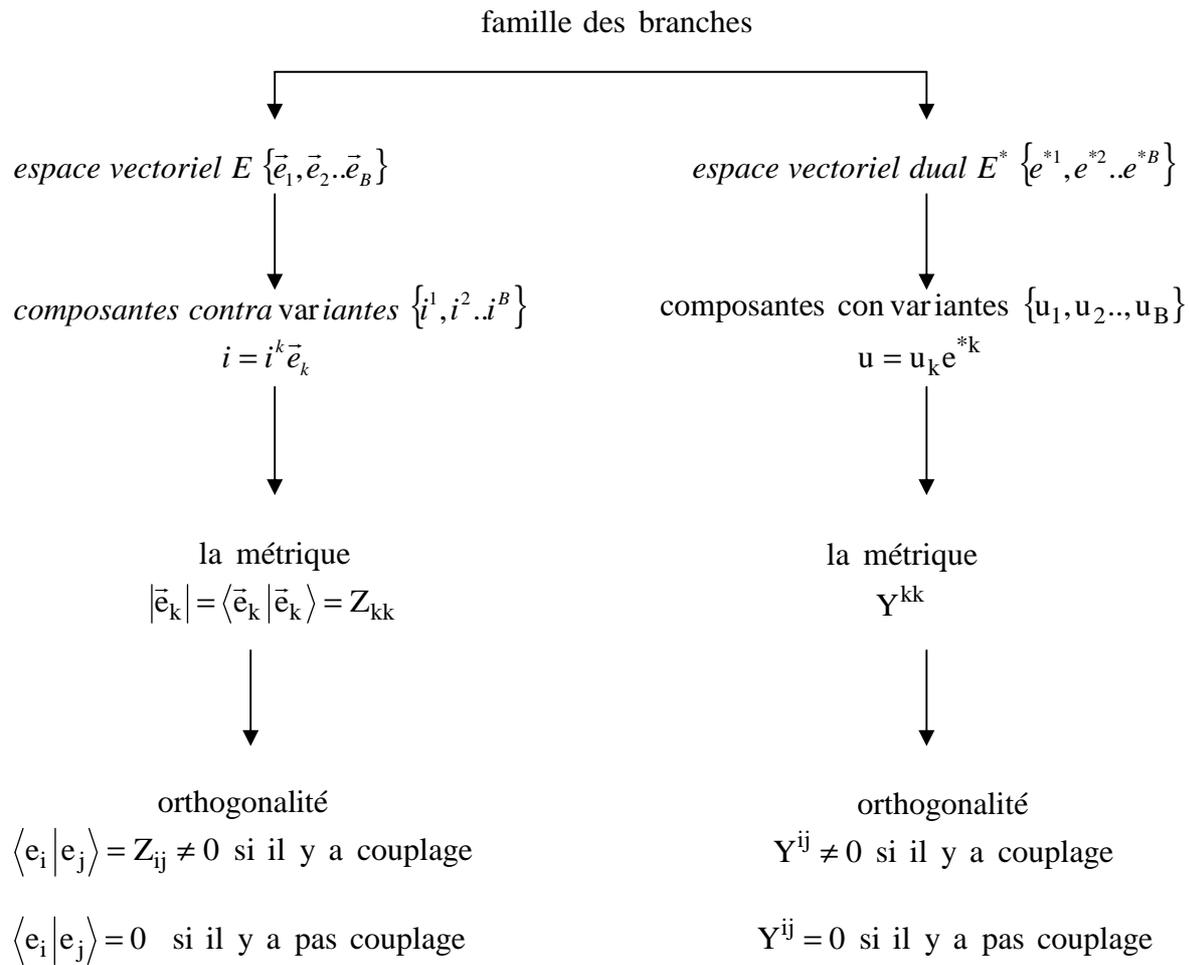
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & Z_{1B} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & Z_{2B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{B1} & Z_{B2} & \cdot & \cdot & Z_{BB} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 218. a}$$

$$\begin{bmatrix} Y^{11} & Y^{12} & \cdot & \cdot & Y^{1B} \\ Y^{21} & Y^{22} & \cdot & \cdot & Y^{2B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{B1} & Y^{B2} & \cdot & \cdot & Y^{BB} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 218. b}$$

La matrice (Eq. 218. a) est une représentation matricielle d'un tenseur d'ordre deux, deux fois covariant. En effet ce tenseur est d'une importance capitale puisqu'il s'agit du tenseur métrique de l'espace  $E$ . Les éléments diagonaux correspondent aux impédances des branches et les éléments extra diagonaux correspondent aux impédances de couplage entre deux branches différentes. Il permet aussi de relier les intensités internes aux tensions internes de chaque branche.

Par analogie nous déduisons que les éléments de la matrice (Eq. 218. b) sont une représentation matricielle d'un tenseur d'ordre deux, deux fois contravariant, les composantes  $y^{ji}$  de ce tenseur sont les inverses des impédances de branches. Ce tenseur est le tenseur métrique de l'espace qui permet de passer de l'espace  $E$  à l'espace  $E^*$ . Les éléments diagonaux correspondent aux admittances des branches et les éléments extra diagonaux correspondent aux admittances de couplage entre deux branches différentes. Il permet de passer des tensions internes aux intensités internes de chaque branche.

1.18.3.5 Schéma récapitulatif



*tenseurs métriques*

$$E \Rightarrow E^*$$

$$Z_{ij} i^j = u_i$$

$$E \Leftarrow E^*$$

$$i^j = y^{ji} u_i$$

*Fig. 76 : Schéma récapitulatif de la dualité entre grandeurs électriques covariantes et contravariantes*

1.18.3.6 Changement d'espace

Les grandeurs électriques que nous avons traitées jusqu'à présent ont été exprimées dans la famille des branches ( $E$  ou  $E^*$ ), Or le caractère tensoriel des grandeurs électriques, et l'utilisation des matrices de connexion (matrice incidence, matrice mailles) introduites dans la

partie de ce chapitre, permettent de décrire ces grandeurs électriques et les relations les reliant dans la famille des mailles et dans la famille des nœuds.

#### 1.18.3.6.1 Le passage branches/nœuds

Dans la théorie des graphes la matrice incidence permet de faire le lien entre la famille des nœuds et celle des branches.

La représentation du vecteur des courants de branches dans la famille des nœuds est un vecteur colonne de dimension  $N$ , contenant les intensités externes appliquées aux nœuds. Chaque composante  $i$  traduit la loi des nœuds au nœud  $i$ . Nous associons à la matrice d'incidence une application multilinéaire  $f$  de l'espace des branches  $E_B$  dans l'espace des nœuds  $E_N$  définie comme suivant

$$f : E_B \rightarrow E_N$$

$$\{i^1, i^2, \dots, i^N\}_{\text{int}} \rightarrow f(i^1, i^2, \dots, i^N)_{\text{int}} = [i_{\text{int}}]_B \cdot [C]_{BN} = [i_{\text{ext}}]_N \quad \text{Eq. 219}$$

Cette application traduit la loi des nœuds, Dans le cas ou aucune intensité externe n'est appliqués, nous avons

$$[i_{\text{int}}]_B \cdot [C]_{BN} = [0]_N \quad \text{et} \quad f(i^1, i^2, \dots, i^N)_{\text{int}} = 0_E \quad \text{Eq. 220}$$

Dans ce cas l'ensemble des courants  $\{i^1, i^2, \dots, i^N\}_{\text{int}}$  vérifiant cette condition forment le noyau de l'application  $f$ , et représentent par conséquent un sous espace vectoriel de l'espace  $E_B$

$$\text{Ker}(f) = \{i^1, i^2, \dots, i^N\}_{\text{int}} / f(i^1, i^2, \dots, i^N)_{\text{int}} = 0_{E_N} \quad \text{Eq. 221}$$

La transposée de la matrice incidence permet de définir l'application multilinéaire réciproque de  $f$ . elle permet d'exprimer les tensions des branches en fonction des potentiels électriques aux nœuds.

$$[v]_N \cdot {}^t[C]_{BN} = [u]_B \quad \text{Eq. 222}$$

La règle de transformation du tenseur métrique des impédances a été introduite dans la partie du chapitre I, appliquée à notre cas elle devient

$$[{}^tC]_{NB} \cdot [Z]_{BB} \cdot [C]_{BN} = [X]_{NN} \quad \text{Eq. 223}$$

1.18.3.6.2 Le passage branches/mailles

La matrice des mailles est la matrice de connexion entre la famille des branches et celle des mailles.

Ainsi nous exprimons les courants des mailles en fonction des courants des branches à l'aide de la matrice mailles comme suivant

$$[i]_B \cdot [M]_{BM} = [I]_M \quad \text{Eq. 224}$$

La représentation du vecteur des tensions des branches dans la famille des mailles permet de définir une matrice unicolonne nul de dimension M, dont chacune des composantes i traduit la loi des mailles appliquée à la maille i.

$$[u]_B \cdot [M]_{BM} = [0]_M \quad \text{Eq. 225}$$

Nous associons à la matrice des mailles une application multilinéaire g de l'espace des branches  $E_B$  dans l'espace des mailles  $E_M$  définie comme suivant

$$\begin{aligned} g: E &\rightarrow E \\ \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_m\} &\rightarrow g(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = [u]_B \cdot [M]_{BM} \end{aligned} \quad \text{Eq. 226}$$

L'ensemble des tensions  $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_m\}$  qui vérifient la condition

$$g(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = 0_{E_M} \quad \text{Eq. 227}$$

Qui traduit la loi des mailles, forment le noyau de l'application g, et représente un sous espace vectoriel de l'espace  $E_M$

$$\text{Ker}(g) = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_m\} / g(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = 0_E \quad \text{Eq. 228}$$

Le tenseur métrique d'impédance des branches est représenté dans la famille des mailles par un tenseur d'impédance des mailles dont chaque composante ii est égale à la somme des impédances des branches formant la maille i, les éléments extra diagonaux ij traduisent les impédances en commun entre mailles différentes.

$$[{}^tM]_{MB} \cdot [Z]_{BB} \cdot [M]_{BM} = [Z]_{MM} \quad \text{Eq. 229}$$

## Chapitre VI : Approche topologique

### 1.18.3.6.3 Le passage nœud/mailles

D'après les relations de passage  $[v]_N \cdot {}^t[C]_{BN} = [u]_B$  et  $[u]_B \cdot [M]_{BM} = [0]_M$  Eq. 230

Nous pouvons écrire  $[v]_N \cdot {}^t[C]_{BN} \cdot [M]_{BM} = [u]_B \cdot [M]_{BM} = [0]_M$  Eq. 231

Le produit matriciel  ${}^t[C]_{BN} \cdot [M]_{BM}$  définit la matrice  $[A]_{NM}$  que nous appelons la matrice connexion entre la famille des nœuds et la famille des mailles.

Nous déduisons la relation de passage directe entre l'espace des nœuds et l'espace des mailles

$$[v]_N \cdot [A]_{NM} = [0]_M \quad \text{Eq. 232}$$

Soit  $h$  une application multilinéaire définie comme suivant

$$\begin{aligned} h: E_N &\rightarrow E_M \\ \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\} &\rightarrow [v]_N \cdot [A]_{MN} \end{aligned} \quad \text{Eq. 233}$$

L'ensemble des potentiels électriques  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\}$  obéissant à la loi des nœuds, vérifient la condition

$$h(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) = 0_E \quad \text{Eq. 234}$$

Et forment le noyau de l'application  $h$  qui est un sous espace vectoriel de l'espace des nœuds  $E_N$ .

$$\text{Ker}(h) = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\} / h(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) = 0_E \quad \text{Eq. 235}$$

- D'après les relations de passage nous avons  $[i_{\text{int}}]_B \cdot [C]_{BN} = [i_{\text{ext}}]_N$  et  $[i]_B \cdot [M]_{BM} = [I]_M$

$$[I]_M \cdot {}^t[M]_{BM} \cdot [C]_{BN} = [i_{\text{int}}]_B \cdot [C]_{BN} = [i_{\text{ext}}]_N \quad \text{Eq. 236}$$

Nous notons que  ${}^t[M]_{BM} \cdot [C]_{BN} = {}^t[{}^t[C]_{BN} \cdot [M]_{BM}] = {}^t[A]_{MN}$  Eq. 237

D'où la relation directe de passage reliant les intensités externes appliquées aux nœuds aux intensités des mailles

$$[I]_M \cdot {}^t[A]_{MN} = [i_{\text{ext}}]_N \quad \text{Eq. 238}$$

- Pour les relations de passage du tenseur des impédances de l'espace des mailles vers l'espace des nœuds, nous exploitons les deux relations

$${}^t[M]_{MB} \cdot [Z]_{BB} \cdot [M]_{BM} = [Z]_{MM} \quad \text{Eq. 239. a} \quad \text{et} \quad [{}^tC]_{NB} \cdot [Z]_{BB} \cdot [C]_{BN} = [X]_{NN} \quad \text{Eq. 239. b}$$



1.18.5 Graphe algébrique du système « cavité avec ouverture+fenêtre inductive »

Nous prenons comme exemple d'application le système étudié préalablement « cavité+ouverture+fenêtre inductive ». Le circuit électrique équivalent au système dans le cas bimodal a été établi au chapitre II, il est représenté sur la figure ci dessous.

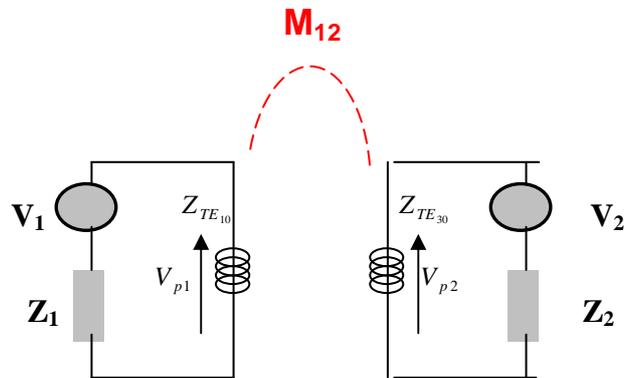


Fig.78 : Circuit d'application de l'approche topologique

En appliquant les relations de Kirchoff nous obtenons un système de 4 équations

Eq. 242

Avec

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z^{TE_{10}} & M^{12} & 0 \\ 0 & M^{12} & Z^{TE_{30}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}_{BB} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} V_{01} \\ 0 \\ V_{02} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

A partir du circuit de la figure nous allons élaborer un graphe topologique équivalent, dont nous précisons un sens conventionnel des branches, et des mailles. Nous disposons la mutuelle de couplage sur une corde externe comme procède Olivier Maurice dans ses modélisations [2].

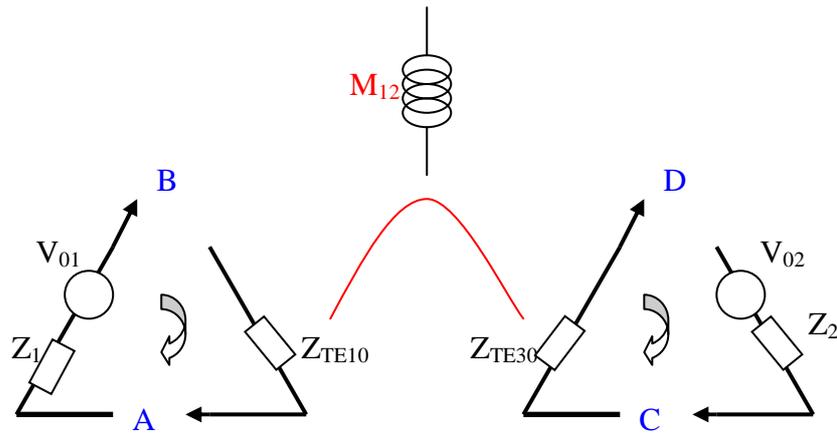


Fig.79 : Graphe topologique équivalent

A présent, il nous est possible de définir les matrices de connexion associées au graphe (Fig. 79).

$$[C]_{NB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 244}$$

$$[M]_{BM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 245}$$

En effectuant les calculs de produits matriciels exprimant les relations de connexion ou les relations métriques, nous obtenons le graphe algébrique associé à notre système « cavité avec ouverture+fenêtre inductive ».

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Noeuds} & & \text{Branches} & & \text{Mailles} \\
 \\
 \begin{bmatrix} i^1 - i^2 \\ -i^1 + i^2 \\ i^3 - i^4 \\ -i^3 + i^4 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_N = [i]_B \cdot [C]_{BN} \xleftarrow{[C]_{BN}} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \end{bmatrix}_B = [I]_M \cdot [M]_{MB} \xleftarrow{[M]_{MB}} \begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \end{bmatrix}_M
 \end{array}$$

**Loi des noeuds**

$$[z]_{BB} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z^{TE_{10}} & M^{12} & 0 \\ 0 & M^{12} & Z^{TE_{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}$$



$$[Z]_{MM} = [M]_{MB} \cdot [z]_{BB} \cdot [M]_{BM} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} \\ M^{21} & Z_2 + Z^{TE_{10}} \end{bmatrix}$$



$$[X]_{NN} = [C]_{NB} \cdot [z]_{BB} \cdot [C]_{BN} = [A]_{NM} \cdot [Z]_{MM} \cdot [A]_{MN} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & -Z_1 - Z^{TE_{10}} & -M^{12} & -M^{12} \\ -Z_1 - Z^{TE_{10}} & Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} & M^{12} \\ M^{12} & M^{12} & Z_2 + Z^{TE_{30}} & -Z_2 - Z^{TE_{30}} \\ -M^{12} & -M^{12} & -Z_2 - Z^{TE_{30}} & Z_2 + Z^{TE_{30}} \end{bmatrix}_{MM}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_{4N} \end{bmatrix} \xrightarrow{[C]_{NB}} [v]_N \cdot [C]_{NB} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 + v_2 \\ v_3 - v_4 \\ -v_3 + v_4 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_B \xrightarrow{[M]_{BM}} [u]_B \cdot [M]_{BM} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 + u_2 \\ u_3 - u_4 \\ -u_3 + u_4 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_M$$

**Loi des mailles**

Fig. 80 : Graphe algébrique associé au système complet {cavité avec ouverture + fenêtre inductive} dans le cas bimodal

A partir du graphe algébrique Fig. 80, les équations de Kirchhoff associées au circuit fig. 78 peuvent être exprimées dans l'échelle des branches comme suivant :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z^{TE_{10}} & M^{12} & 0 \\ 0 & M^{12} & Z^{TE_{30}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}_{BB} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} V_{01} \\ 0 \\ V_{02} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Ou bien dans l'échelle des mailles, en appliquant les lois de changement de base associées à chaque type de tenseur, nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} \\ M^{21} & Z_2 + Z^{TE_{10}} \end{bmatrix}_{MM} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}_M + \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix}_M$$

Ou encore dans l'échelles des nœuds comme suivant

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} Z_1 + Z^{TE_{10}} & -Z_1 - Z^{TE_{10}} & -M^{12} & -M^{12} \\ -Z_1 - Z^{TE_{10}} & Z_1 + Z^{TE_{10}} & M^{12} & M^{12} \\ M^{12} & M^{12} & Z_2 + Z^{TE_{30}} & -Z_2 - Z^{TE_{30}} \\ -M^{12} & -M^{12} & -Z_2 - Z^{TE_{30}} & Z_2 + Z^{TE_{30}} \end{bmatrix}_{NN} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_N + \begin{bmatrix} V_{01} \\ -V_{01} \\ V_{02} \\ -V_{02} \end{bmatrix}_N$$

Selon l'inconnue que l'on recherche, on exprime le système d'équation de Kirchhoff dans l'échelle adéquate.

En effet les échelles des branches, des mailles, et des nœuds constituent des familles génératrices du même espace vectoriel associé au graphe.

#### 1.18.6 Conclusion

Dans cette partie nous avons défini de façon rigoureuse une structure topologique et algébrique permettant la modélisation des réseaux électriques. Le formalisme tensoriel associé au circuit électrique a été justifié.

#### *1.19 CONCLUSION*

Dans ce chapitre nous avons présenté et illustré une structure topologique générale permettant la modélisation de systèmes complexes multi physiques. Cette modélisation est basée sur l'intégration de l'algèbre topologique. Une génération automatique des équations décrivant le comportement du système étudié devient alors possible. Ensuite nous avons développé cette approche autour du réseau électrique. Et nous avons posé les bases solides d'un formalisme mathématique cohérent.



## **CONCLUSION GENERALE**

Le projet VULCAIM du département OSA du laboratoire XLIM en collaboration avec le centre d'études de Gramat (CEG) pour le compte de la MRIS traite de la problématique des perturbations électromagnétiques et de leurs effets sur les systèmes électroniques embarqués du boîtier jusqu'aux composants. Les études menées dans le cadre de ce projet constituent un intérêt pour les applications militaires et civiles.

Dans le cadre du projet VULCAIM, ce sujet de thèse traite l'interaction des ondes électromagnétiques avec le boîtier métallique où sont disposées les cartes électroniques.

Le boîtier considéré est une cavité parallélépipède de dimension (30cm, 12cm, 30cm), dont les murs sont des conducteurs parfaits ( $\sigma=\infty$ ). La source de perturbation est une onde plane de polarisation verticale. Pour des besoins de connexions ou d'aération, des ouvertures sont percées sur certaines faces du boîtier occasionnant un échange électromagnétique entre le boîtier et le milieu extérieur. Dans un premier nous avons étudié la structure vide, ensuite des plans de masse ont été introduits à l'intérieur du boîtier pour prendre en compte l'existence des cartes électroniques intégrées.

Dans ce travail de thèse, nous avons privilégié les méthodes de modélisation électrique. En plus d'être rapide et opérationnelles, un modèle électrique constitue la brique de base pour l'approche topologique que nous proposons dans ce travail. En effet cette dernière exploite les modèles issus des formules analytiques, des calculs 3D, des mesures, etc.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés au modèle de Robinson. Il traite une structure composée d'une cavité parallélépipède percée d'une fente, le système est illuminé par une onde plane de polarisation verticale située dans le demi-espace contenant la face présentant une ouverture. La bande fréquentielle de validité du modèle se limite à la bande monomodale de la cavité.

Nous avons développé ce modèle pour traiter des cas de figures plus complexes.

- En termes de structures, nous avons traité
  - le cas où plusieurs ouvertures sont situées sur la même face du boîtier :

## Conclusion

En traçant les courbes de dispersion du coefficient de blindage au point central du boîtier pour une cavité contenant 1, 2, 4, et enfin 6 ouvertures, nous avons constaté, même on pouvait s'y attendre que le niveau de champ est proportionnel au nombre d'ouvertures. Et que la fréquence de résonance du mode fondamental de la cavité est inversement proportionnelle au nombre d'ouvertures. Cela permet d'assimiler l'impédance équivalente de chaque ouverture à une inductance.

- Ouvertures situés sur des faces perpendiculaires du boîtier :

Dans ce cas l'excitation est une onde plane de polarisation oblique, que nous décomposons en deux ondes planes, chacune de polarisation verticale et d'incidence normale par rapport à un des plans des ouvertures. Ainsi nous découplons le problème en deux problèmes indépendants. L'efficacité de blindage finale est la somme des coefficients de l'efficacité de blindage calculés pour chaque incidence.

- En terme de bande fréquentielle de validité

- Nous avons étendu la bande fréquentielle de validité du modèle au cas multimodal

- Chaque mode de la cavité est représenté par une ligne de transmission court-circuitée à son extrémité, l'impédance caractéristique de cette ligne est égale à celle du mode.

- Nous avons programmés des codes de calculs en langage fortran pour calculer le coefficient de l'efficacité de blindage de la structure, à partir des données analytiques du modèle de Robinson pour chaque cas de figure.

En conclusion sur le modèle de Robinson, celui-ci présente des avantages ainsi que des inconvénient

- Avantage :

- Formulation simple et rapide du modèle
- Modèle développable aux cas de figures plus complexes

- Inconvénients :

- Modèle de l'ouverture trop simpliste : il ne permet pas de prendre en compte le couplage de l'énergie sur chacun des modes de la cavité. Dans ce modèle l'ouverture se comporte comme si chaque mode recevait la même quantité d'énergie.

## Conclusion

- Passage du modèle distribué au modèle localisé

L'intégration des cartes électroniques dans le système étudié nous a poussé à chercher une méthode de modélisation adaptée à ce type de structure. Nous nous sommes intéressés à une méthode de modélisation basée sur le développement modal des structures.

Jusqu'à lors limitée à des applications monomodales, nous avons étendu le formalisme analytique de cette méthode aux cas multimodal, et à partir des équations établies nous avons pu construire des modèles valables dans le cas multimodal. Ainsi à partir du formalisme de la méthode modale nous avons pu réaliser

- La modélisation électrique générale d'une fenêtre inductive dans le cas multimodale
  - Application dans la bande monomodale
  - Application dans la bande bimodale
- La modélisation électrique d'une fenêtre capacitive asymétrique dans le cas monomodal

En conclusion sur la méthode modale nous en exposons les avantages ainsi que les inconvénients

### ➤ Avantages

- Formalisme mathématique rigoureux et presque automatique une fois la géométrie de la structure et la bande fréquentielle d'étude définies. L'utilisateur doit quand même garder un esprit d'analyse pour simplifier les formulations
- Modèle adaptable du point de vue fréquentiel
- Modèle adaptable du point de vue géométrique
- Un formalisme précis : la seule approximation faite est celle de la fonction test qui est égale à la distribution du champ au niveau de la discontinuité, c'est à l'ingénieur de supprimer certains couplages entre modes qu'il jugera négligeables

### ➤ Inconvénients :

- Formalisme lourd
- Traite uniquement les structures présentant une géométrie permettant un formalisme modal.

## *Conclusion*

Enfin nous avons injecté dans le modèle équivalent de Robinson d'une cavité vide avec ouverture le modèle équivalent d'une fenêtre inductive établi à partir de la méthode modale.

La fusion des deux nous a permis

- d'étudier le blindage du système complet
- de calculer les courants couplés au niveau des plans de masse, qui sont utiles pour le calcul de couplage entre pistes
- la formulation des calculs a été programmée en langage Fortran

La validation des modèles et des résultats obtenus a été faite à partir de

- La méthode IEM, qui a été adopté par la NASA pour l'étude du même système. Nous avons détaillé le formalisme lourd et fastidieux accompagnant la méthode dans le chapitre II.
- Le code commercial FEKO, à partir de la fenêtre graphique CADFEKO
- Le solver TEMSI, en réalisant des codes de calculs bases sur la FDTD
- A partir de codes de calcul programmés en langage Fortran

Dans la dernière partie de ce manuscrit nous avons consacré un chapitre entier à introduire les bases théoriques d'une structure topologique et algébrique permettant la modélisation des réseaux électriques. Dans cet objectif nous avons pu ;

- Définir un modèle topologique en se basant sur la théorie des graphes
- Définir les relations tensorielles métriques qui lient les différentes entités topologiques
- Construire un graphe algébrique dans le quel le modèle topologique est superposé au modèle algébrique
- Appliquer l'approche topologique aux réseaux électriques
  - Interpréter et justifier le sens algébrique de chaque grandeur électrique
  - Définir les relations tensorielles métriques qui lient les différentes entités électriques
  - Construire un graphe algébrique dans le cas d'un réseau électrique
  - Elaboration du graphe topologique associé au système {cavité avec ouverture+discontinuité} dans le cas bimodal

## *Conclusion*

Le travail effectué nous a permis d'envisager de nouvelles perspectives

- Etudier de structures plus complexes
- Effectuer une étude temporelle
- Exploiter d'autres méthodes de modélisation électrique
- Réaliser des mesures en chambre réverbérante
- Elaborer un modèle meilleur des cartes PCB en tenant compte des données diélectriques et géométriques exactes de ce type de cartes.
- Appliquer l'approche topologique à l'ensemble d'un système embarqué, du boîtier aux composants en passant par les cartes.

## *Conclusion*

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] H. Tarhini, «Etude paramétrique de la susceptibilité des cartes électroniques par les plans d'expériences numériques», thèse de doctorat, université de Limoges
- [2] O. Maurice, «Compatibilité électromagnétique des systèmes complexes», Hermès-Sciences, 2007.
- [3] Kron G., «A short course in tensor analysis for electrical engineers. », Wiley, New York; Chapman & Hall, London, 1942. 250 p. Republished as *Tensors for Circuits, With a new Introduction and List of Publications of Gabriel Kron.* Dover, New York, 1959.
- [4] M.P. Robinson.al «Analytical formulation of the shielding effectiveness of enclosures with apertures» *IEEE Trans on EMC*, Vol 40, Aug 1998, pp 240- 248
- [5] H. Aubert, H. Baudrand « L'électromagnétisme par les schémas équivalents » Cépaduès-éditions – collection Polytech
- [6] B. B. Mhamed.al «Diodes and ESD Protections Capacitive Effects : Time-Domain Measurements and Modeling»*EMC Compo 2009, IEEE 7th International Workshop on Electromagnetic Compatibility on Integrated Circuits*
- [7] Bethe, «Bethe's aperture theory for arrays» American Physical Society, College Park, MD, ETATS-UNIS (1990) (Revue)
- [8] M.D Deshpande, « Electromagnetic field penetration studies », NASA/CR-2000-210297, June 2000
- [9] K.C. Gupta.al «Microstrip lines and slotlines» , Chap 7
- [10] Kron G., *Diakoptics; the piecewise solution of large-scale systems*, MacDonald, London, 1963. 166 p.
- [11] Roth J.P., « An Application of Algebraic Topology to Numerical Analysis : On the Existence of a Solution to the Network Problem », *Proc. Nat. Acad. Sciences*, Vol. 41. p. 518-521, 1955.
- [12] Branin F.H. Jr., « The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus », in *Proceedings of the Symposium on Generalized Networks*, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1966.
- [13] Bjørke Ø., *Manufacturing Systems Theory – A Geometric Approach to Connection*, Tapir publisher, ISBN 82-519-1413-2, 1995.
- [14] Sofia L. Kalpazidou, “FROM NETWORK PROBLEM TO CYCLE PROCESSES” *2nd World Congress of nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, Vol. 30, No. 4, pp. 204-2049, 1997
- [15] J. Grifone, « Algèbre linéaire », Cépaduès éditions

## *Bibliographie*

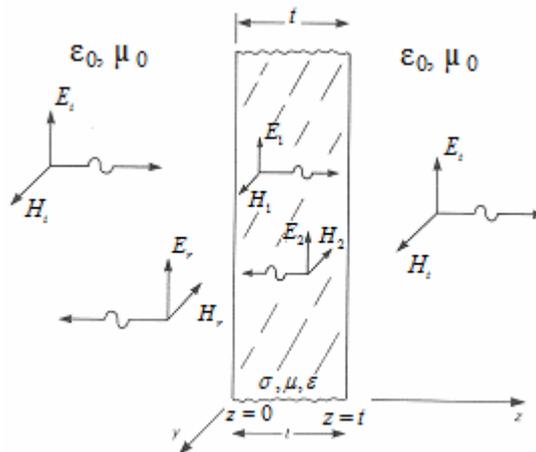
- [16] C. Semay, B. Silvestre-Brac, « Introduction au calcul tensoriel application à la physique », édition DUNOD
- [17] C. Jeanperrin, « Initiation progressive au calcul tensoriel », édition ELLIPSES
- [18] A. Charoy, « CEM-Parasites et perturbation des électroniques », tome, Blindage, filtres, câbles blindés, édition DUNOD
- [19] C. Tavernier, « Guide pratique de la CEM », édition DUNOD
- [20] C.F. Bunting, S.P. Yu, “Statistical shielding effectiveness-an examination of the field penetration in a rectangular box using Modal/MoM”,
- [21] M.P. Robinson.al, “Shielding effectiveness of a rectangular enclosure with arectangular aperture”Electronic letters,N0. 15<sup>th</sup> august 1996, Vol.32, pp 1559-1560
- [22] J. V. Hagen, “Wide band electromagnetic coupling to a cavity: an integral representation based model”, thèse de doctorat menée à l’institut Fur Hochstfrequenztechnik und Electronik de l’université de Karlsruhe TH) en Allemagne
- [23] Z.A. Khan. Al, “Shielding effectiveness of metallic enclosure at oblique and arbitrary polarizations”, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, No. 1 Februry 2005, pp 112-122
- [24] A.Azaro.al, ”Evaluation of the effect of an external incident electromagnetic wave on metallic enclosures with rectangular apertures”, Microwave and optical theclogy letters, Vol. 28, No 5, March 2001, pp 289-2
- [25] Branin F.H. Jr., « Computer Methods of Network Analysis », Proceedings of the IEEE 55, No. 11, 1787-1801, November, 1967.
- [26] Roth J.P., « The Validity of Kron's Method of Tearing », Proc. National Acad. Sciences, Vol. 41, p. 599-600, 1955.

ANNEXES

Annexe I

Efficacité de blindage d'une barrière métallique

Considérons une barrière métallique d'épaisseur  $t$ , de conductivité  $\sigma$ , de permittivité relative  $\epsilon_r$ , et de perméabilité relative  $\mu_r$ . la structure est en interaction avec une onde électromagnétique comme le montre la figure ci-dessous



L'efficacité de blindage de la barrière, pour le champ électrique et, pour le champ magnétique est définie comme

$E_i$  et  $H_i$  sont respectivement le champ électrique et magnétique incidents

Et  $E_t$  et  $H_t$  le champ électrique et magnétique transmis par la plaque métallique.

$$SE_E = 20 \log_{10} \left| \frac{E_i}{E_t} \right| \quad \text{Eq. 1. a}$$

$$SE_H = 20 \log_{10} \left| \frac{H_i}{H_t} \right| \quad \text{Eq. 1. b}$$

Si le champ incident est une onde plane uniforme et les deux milieux des deux côtés de la barrière ont les mêmes propriétés magnétiques et diélectriques ( $\epsilon_0, \mu_0$ ), alors nous avons

$$SE_E = SE_H = SE$$

Eq. 2

## Annexes

Pour des champs proches et/ou lorsque les deux milieux sont différents, les équations (Eq. 1. a) et (Eq. 1. b) ne sont pas équivalentes. Cependant, la définition de l'efficacité de blindage peut être décomposée comme suit :

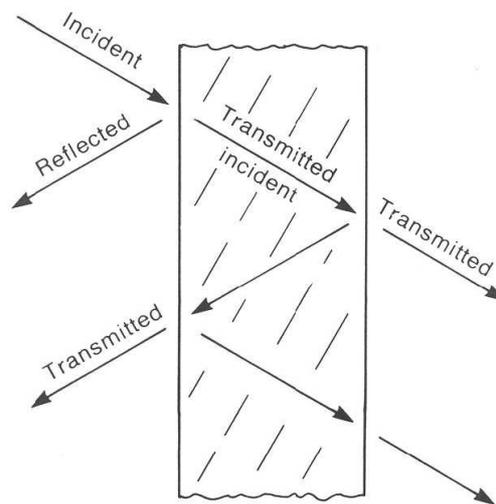
$$SE_{dB} = R_{dB} + A_{dB} + M_{dB}$$

Eq. 3

Où

- $R_{dB}$  représente les pertes dues à la réflexion sur la surface (gauche) de la barrière. La portion du champ électrique incident qui est réfléchi par la surface est déterminée par le coefficient de réflexion de la surface;
- $A_{dB}$  représente les pertes dues à l'absorption du champ à l'intérieur de la barrière conductrice. L'amplitude du champ est atténuée selon un facteur  $e^{-z/\delta}$ , où  $\delta$  est la profondeur de pénétration du matériau (l'épaisseur de peau);
- $M_{dB}$  représente la contribution des réflexions et transmissions multiples à l'intérieur de la barrière.

La figure ci-dessous permet d'illustrer ces différents termes

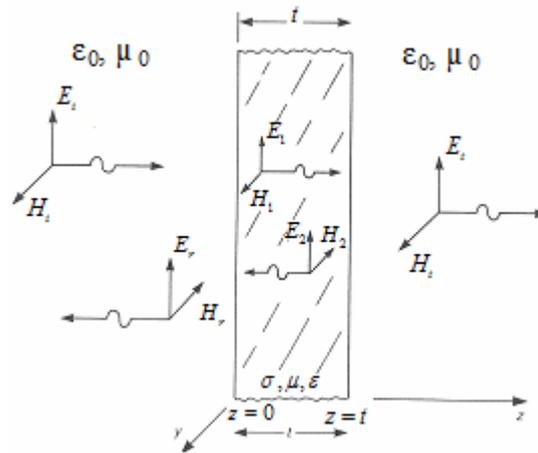


Remarques :

1. Les réflexions multiples sont à l'origine des composantes de champ qui vont s'additionner au champ initial transmis à travers la barrière. Par conséquent, le facteur de réflexions multiples  $M$  est négatif et en général réduit l'efficacité du blindage ( $R$  et  $A$  étant positifs).

2. Pour des épaisseurs beaucoup plus grandes que la profondeur de pénétration, les réflexions et transmissions multiples ont peu d'effet et peuvent en général être négligées.

Efficacité de blindage - Source de champ lointain



Les différentes composantes du champ sont données par leur forme générale :

Le champ électromagnétique incident est donné par les deux équations

$${}^I E_i = E_i e^{-j\beta_0 z} u_x \quad \text{Eq. 4. a}$$

$${}^I H_i = \frac{E_i}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z} u_y \quad \text{Eq. 4. b}$$

Le champ réfléchi est donné par

$${}^{II} E_r = E_r e^{-\gamma z} u_x \quad \text{Eq. 5. a}$$

$${}^{II} H_r = \frac{E_r}{\eta_0} e^{-\gamma z} u_y \quad \text{Eq. 5. b}$$

Le champ à l'intérieur de la plaque est donné par les équations

$${}^I E_r = E_r e^{j\beta_0 z} u_x \quad \text{Eq. 6. a}$$

$${}^I H_r = -\frac{E_r}{\eta_0} e^{j\beta_0 z} u_y \quad \text{Eq. 6. b}$$

$${}^{II} E_2 = E_2 e^{\gamma z} u_x \quad \text{Eq. 7. a}$$

$${}^{II} H_2 = -\frac{E_2}{\eta_0} e^{\gamma z} u_y \quad \text{Eq. 7. b}$$

Le champ transmis par la plaque est égal à

$${}^{\text{III}} E_t = E_t e^{-j\beta_0 z} u_x \quad \text{Eq. 8. a}$$

$${}^{\text{III}} H_t = \frac{E_t}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z} u_y \quad \text{Eq. 8. b}$$

$$\text{Avec } \beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\text{Et } \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta = \frac{1}{\delta} + j\beta$$

L'objectif est de calculer le coefficient d'efficacité de blindage de la plaque, ce dernier dépend du champ incident et du champ transmis. L'amplitude du champ incident  $E_i$  est supposée connue. Les inconnues du problème sont les amplitudes des champs  $E_r$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , et  $E_t$ , nous avons besoin de quatre équations :

- Continuité des composantes tangentielles du champ électrique aux deux interfaces ( $z=0$ , et  $z=t$ ) :

$${}^i E_i|_{z=0} + {}^i E_r|_{z=0} = {}^i E_1|_{z=0} + {}^i E_2|_{z=0} \quad \text{Eq. 9. a}$$

$${}^r E_1|_{z=t} + {}^r E_2|_{z=t} = {}^r E_t|_{z=t} \quad \text{Eq. 9. b}$$

- Continuité des composantes tangentielles du champ magnétique aux deux interfaces ( $z=0$ , et  $z=t$ ) :

$${}^i H_i|_{z=0} + {}^i H_r|_{z=0} = {}^i H_1|_{z=0} + {}^i H_2|_{z=0} \quad \text{Eq. 10. a}$$

$${}^r H_1|_{z=t} + {}^r H_2|_{z=t} = {}^r H_t|_{z=t} \quad \text{Eq. 10. b}$$

En remplaçant les expressions des champs intervenant dans les équations de continuité ci-dessus par les expressions des champs établis précédemment dans les équations (Eq. 10. a)-(Eq. 10. b), on obtient les 4 équations

$$E_i + E_r = E_1 + E_2 \quad \text{Eq. 11. a}$$

$$E_1 e^{-\gamma} + E_2 e^{\gamma} = E_t e^{-j\beta_0 t} \quad \text{Eq. 12. a}$$

$$\frac{E_i}{\eta_0} + \frac{E_r}{\eta_0} = \frac{E_1}{\eta} + \frac{E_2}{\eta} \quad \text{Eq. 11. b}$$

$$\frac{E_1}{\eta} e^{-\gamma} + \frac{E_2}{\eta} e^{\gamma} = \frac{E_t}{\eta_0} e^{-j\beta_0 t} \quad \text{Eq. 11. b}$$

La résolution de ces équations permet d'exprimer le rapport entre les champs incident et réfléchi:

$$\frac{E_i}{E_t} = \frac{(\eta_0 + \eta)^2}{4\eta_0\eta} \left[ 1 - \left( \frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0 + \eta} \right)^2 e^{-2t/\delta} e^{-j2\beta t} \right] e^{t/\delta} e^{j\beta t} e^{-j\beta_0 t} \quad \text{Eq. 12}$$

Simplification de l'équation (Eq. 12):

On suppose que

1) la barrière est construite d'un "bon conducteur", par conséquent l'impédance intrinsèque du conducteur est beaucoup plus petite que celle de l'air

$$\eta \ll \eta_0 \quad \text{Eq. 13}$$

Par conséquent,

$$\frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0 + \eta} \cong 1 \quad \text{Eq. 14}$$

2) la profondeur de pénétration  $\delta$  est beaucoup plus petite que l'épaisseur de la barrière  $t$ .  
Donc

$$e^{-\gamma t} = e^{-j\beta t} e^{-\alpha t} = e^{-j\beta t} e^{-\frac{t}{\delta}} \ll 1, \text{ pour } t \gg \delta \quad \text{Eq. 15}$$

En remplaçant ces deux équations dans le résultat exact (Eq. 12) et en prenant le module nous avons:

$$\left| \frac{E_i}{E_t} \right| = \left| \frac{(\eta_0 + \eta)^2}{4\eta\eta_0} \right| e^{t/\delta} \cong \left| \frac{\eta_0}{4\eta} \right| e^{t/\delta} \quad \text{Eq. 16}$$

En prenant le logarithme pour exprimer l'efficacité de blindage en dB, on obtient

$$SE_{dB} \cong 20 \log \left| \frac{\eta_0}{4\eta} \right| + 20 \log e^{t/\delta} + M_{dB} \quad \text{Eq. 17}$$

Et

$$M_{dB} = 20 \log \left| 1 - \left( \frac{\eta_0 - \eta}{4\eta_0 + \eta} \right)^2 e^{-2t/\delta} e^{-2j\beta t} \right|$$

Eq. 18

$$M_{dB} \cong 20 \log \left| 1 - e^{-2t/\delta} e^{-2j\beta t} \right|$$

Eq. 19

Les pertes dues aux réflexions multiples sont données par le deuxième terme de (Eq. 17) :

M peut être négligé pour des blindages “bon conducteur”  $\beta \sim \alpha = 1/\delta$  et dont l’épaisseur est beaucoup plus grande que la profondeur de pénétration (haute fréquence).

Néanmoins, pour des épaisseurs telles que  $t \ll \delta$ , le facteur M (en dB) devient négatif et réduit l’efficacité de blindage de la barrière. Par exemple, pour  $t/\delta = 0.1$ , l’équation (Eq. 19) donne  $M_{dB} = -11.8$  dB.

Nous avons les expressions suivantes pour l’approximation “bon conducteur”:

• Pertes dues à la réflexion

$$R_{dB} \cong 20 \log \left| \frac{\eta_0}{4\eta} \right|$$

Eq. 20

$$\eta \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{1 + j\omega\epsilon/\sigma}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

Eq. 21

En introduisant () dans (), on obtient

$$R_{dB} \cong 20 \log \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_r\epsilon_0}} \right) = 168 + 10 \log \left( \frac{\sigma_r}{\mu_r f} \right)$$

Eq. 22

Dans (Eq. 22),  $\sigma_r$  est défini comme

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\sigma_{Cu}}$$

Eq. 23

Où  $\sigma_{Cu}$  est la conductivité du cuivre égale à  $5.8 \times 10^7$  S/m.

- Pertes dues à l'absorption

$$R_{dB} \cong 20 \log(e^{t/\delta}) = 20 \frac{t}{\delta} \log(e) = 8.6859 \frac{t}{\delta} = 131.4 t \sqrt{f \mu_r \sigma_r}$$

Eq. 24

Il est à noter que

- R dépend du rapport  $\sigma_r/\mu_r$  ; il représente le mécanisme de blindage prédominant en basse fréquence.

- A dépend du produit  $\sigma_r\mu_r$  ; il représente le mécanisme de blindage prédominant à plus haute fréquence.

Le tableau suivant donne ces deux facteurs pour différents matériaux.

Matériau	$\sigma_r$	$\mu_r$	$\sigma_r\mu_r$	$\sigma_r / \mu_r$
Silver	1.05	1	1.05	1.05
Copper	1	1	1	1
Gold	0.7	1	0.7	0.7
Aluminium	0.61	1	0.61	0.61
Brass	0.26	1	0.26	0.26
Bronze	0.18	1	0.18	0.18
Tin	0.15	1	0.15	0.15
Lead	0.08	1	0.08	0.08
Nickel	0.2	100	20	$2 \times 10^{-3}$
Stainless steel (430)	0.02	500	10	$4 \times 10^{-5}$
Steel	0.1	1000	100	$1 \times 10^{-4}$
Mumetal (at 1 kHz)	0.03	20'000	600	$1.5 \times 10^{-6}$
Superpermalloy (at 1 kHz)	0.03	100'000	3000	$3 \times 10^{-7}$

Annexe II

Annexe II.A

Dans cet annexe nous établissons une approximation à l'intégral

$$\iint \psi_{rpqx}(x', y') \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy'$$

En remplaçant la fonction  $\psi_{rpqx}(x', y')$  par sa valeur, l'expression  $I_{rpqmx}$  peut s'écrire comme suivant

$$\int_{\frac{w_r}{2}}^{\frac{w_r}{2}} \int_{\frac{L_r}{2}}^{\frac{L_r}{2}} \sin\left(\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x'\right)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{w_r}\left(\frac{w_r}{2} + y'\right)\right) \sin\left(\frac{m\pi(x'+x_r)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y'+y_r)}{b}\right) dx' dy'$$

Dans l'équation ci-dessus le couple de coordonnées  $(x_r, y_r)$  sont celles du point centre de l'ouverture r.

En développant l'expression de l'intégral, la fonction  $I_{rpqmx}$  s'écrit comme suivant

$$-\frac{p\pi L_r}{(p\pi)^2 - \left(\frac{m\pi L_r}{a}\right)^2} \left\{ \cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} + x_r\right)\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} - x_r\right)\right) \right\}$$

$$-\frac{n\pi/b}{\left(\frac{q\pi}{w_r}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \left\{ \cos(q\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{w_r}{2} + y_r\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{w_r}{2} - y_r\right)\right) \right\}$$

Annexe II.B

Dans cet annexe nous établissons une approximation à l'intégral

$$\iint \phi_{rpqy}(x', y') \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dx' dy'$$

En remplaçant la fonction  $\phi_{rpqy}(x', y')$  par sa valeur, l'expression  $I_{rpqmy}$  peut s'écrire comme suivant

Dans l'équation ci-dessus le couple de coordonnées  $(x_r, y_r)$  sont les coordonnées du point centre de l'ouverture r.  $\int_{-\frac{w_r}{2}}^{\frac{w_r}{2}} \int_{-\frac{L_r}{2}}^{\frac{L_r}{2}}$

En développant l'expression de l'intégral, la fonction  $I_{rpqmx}$  s'écrit comme suivant

$$-\frac{q\pi L_r}{(q\pi)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \left\{ \cos(p\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{a} \left(\frac{w_r}{2} + y_r\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b} \left(\frac{w_r}{2} - y_r\right)\right) \right\}$$

$$-\frac{m\pi/a}{\left(\frac{p\pi}{L_r}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \left\{ \cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \left(\frac{L_r}{2} + x_r\right)\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{b} \left(\frac{L_r}{2} - x_r\right)\right) \right\}$$

### Annexe III

Dans cet annexe, nous exprimons les composantes du champ électrique à l'intérieur de la cavité dû au courant magnétique surfacique. En utilisant le potentiel vecteur électrique donné dans (), et l'expression (),

#### Annexe III.A

Les composantes du champ électrique à l'intérieur de la cavité dû à la composante x du courant magnétique situé au plan z=0 sont données par

$$E_x^{Ix0} = 0$$

$$E_y^{Ix0} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l(c-z)) I_{rpqmx}$$

$$E_z^{Ix0} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} U_{rpq} \sum_{m,n} \frac{\epsilon_{0m} \epsilon_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l(c-z)) I_{rpqmx}$$

#### Annexe III.B

## Annexes

Les composantes du champ électrique à l'intérieur de la cavité dû à la composante x du courant magnétique situé au plan  $z=c$  sont données par

$$E_x^{IIxc} = 0$$

$$E_y^{IIxc} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{\mathcal{E}_{0m} \mathcal{E}_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \left( k_0^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_l z) I_{rpqmnx}$$

$$E_z^{IIx0} = \sum_{r=1}^R \sum_{p,q} B_{rpq} \sum_{m,n} \frac{\mathcal{E}_{0m} \mathcal{E}_{0n}}{k_l ab \sin(k_l c)} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_l z) I_{rpqmnx}$$

### Annexe IV

Nous allons donner les expressions des fonctions de Green Dyadiques d'une cavité rectangulaire présentées sous forme matricielle.

La fonction de Green dyadique associée aux champs ou aux potentiels vecteurs est dyadique et singulière dans la région de la source.

Dans la suite une lettre « G » majuscule désigne une fonction de Green due aux sources électriques de courant, une lettre « g » minuscule dénote quant à elle une fonction de Green liée aux sources magnétiques de courant. L'indice « e » désigne le champ électrique, tandis que l'indice « h » désigne le champ magnétique.

Annexe IV.A

$$\bar{G}_A = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2} \begin{pmatrix} (cc)_x (ss)_y (ss)_z & 0 & 0 \\ 0 & (ss)_x (cc)_y (ss)_z & 0 \\ 0 & 0 & (ss)_x (ss)_y (cc)_z \end{pmatrix}$$

Vecteur potentiel magnétique

$$\bar{g}_F = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2} \begin{pmatrix} (ss)_x (cc)_y (cc)_z & 0 & 0 \\ 0 & (cc)_x (ss)_y (cc)_z & 0 \\ 0 & 0 & (cc)_x (cc)_y (ss)_z \end{pmatrix}$$

Vecteur potentiel électrique

Avec : A, B, C les dimensions de la cavité suivant x, y, et z

$(cc)_i = \cos(k_i i) \cos(k_i i')$ , et  $(ss)_i = \sin(k_i i) \sin(k_i i')$

Pour  $i=x, y, z$  les coordonnées du point d'observation

Et  $i' = x', y', z'$  les coordonnées du point source.

$$k_x = \frac{m\pi}{A}, k_y = \frac{n\pi}{B}, k_z = \frac{l\pi}{C}, K_{mnl}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Et finalement  $\varepsilon_i=1$  si  $i=0$  et  $\varepsilon_i=2$  sinon.

## Annexe IV.B

$$\bar{g}_e = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_z(cc)_x(ss)_y(sc)_z & -k_y(cc)_x(sc)_y(ss)_z \\ -k_z(ss)_x(cc)_y(sc)_z & 0 & -k_x(cs)_x(cc)_y(ss)_z \\ -k_y(ss)_x(ss)_y(cc)_z & -k_x(cs)_x(ss)_y(cc)_z & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le champ électrique

$$\bar{g}_h = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2}$$

$$\begin{pmatrix} (k^2 - k_x^2)(sc)_x(cs)_y(cc)_z & -k_x k_y (sc)_x(cs)_y(cc)_z & -k_x k_z (sc)_x(cc)_y(cs)_z \\ -k_x k_y (cs)_x(sc)_y(cc)_z & (k^2 - k_y^2)(cc)_x(ss)_y(cc)_z & -k_y k_z (cc)_x(sc)_y(cs)_z \\ -k_x k_z (sc)_x(cc)_y(sc)_z & -k_y k_z (cc)_x(cs)_y(sc)_z & (k^2 - k_z^2)(cc)_x(cc)_y(ss)_z \end{pmatrix}$$

Pour le champ magnétique

Les fonctions de Green Dyadiques pour le champ électromagnétique dû aux sources  
magnétique

Annexe IV.C

$$\bar{G}_e = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2}$$

$$\begin{pmatrix} (k^2 - k_x^2)(cc)_x(ss)_y(ss)_z & -k_x k_y (cs)_x(sc)_y(cc)_z & -k_x k_z (cs)_x(ss)_y(sc)_z \\ -k_x k_y (sc)_x(cs)_y(ss)_z & (k^2 - k_y^2)(ss)_x(cc)_y(ss)_z & -k_y k_z (ss)_x(cs)_y(sc)_z \\ -k_x k_z (sc)_x(ss)_y(cs)_z & -k_y k_z (ss)_x(sc)_y(cs)_z & (k^2 - k_z^2)(ss)_x(ss)_y(cc)_z \end{pmatrix}$$

Pour le champ électrique

$$\bar{G}_h = \frac{1}{ABC} \sum_{m,n,l=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_l}{K_{mnl}^2 - k^2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_z (ss)_x(cc)_y(cs)_z & k_y (ss)_x(cs)_y(cc)_z \\ k_z (cc)_x(ss)_y(cs)_z & 0 & -k_x (cs)_x(ss)_y(ss)_z \\ -k_y (cc)_x(cs)_y(ss)_z & -k_x (cs)_x(cc)_y(ss)_z & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le champ magnétique

Les fonctions de Green Dyadiques pour le champ électromagnétique dû aux sources électriques de courant

