

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ÉCOLE DOCTORALE Science - Technologie - Santé
FACULTÉ des SCIENCES et TECHNIQUES
Département Maths-Info, Laboratoire XLIM

Thèse N° 12 – 2009

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Mathématiques et ses applications

présentée et soutenue publiquement par

HASSAN SAOUD

le 8 juin 2009

ÉTUDE DES PROBLÈMES UNILATÉRAUX :

ANALYSE DE RÉCESSION, STABILITÉ DE LYAPUNOV ET APPLICATIONS EN
ÉLECTRONIQUE ET EN MÉCANIQUE

Thèse codirigée par SAMIR ADLY et MICHEL THÉRA

JURY

Président et Rapporteur :

BERNARD BROGLIATO Directeur de Recherche, INRIA Rhône-Alpes, Saint-Ismier

Rapporteur :

JOYDEEP DUTTA Professeur, Indian Institute of Technology, Kanpur-INDIA

Examineurs :

KHALID ADDI	Maître de Conférences-HDR, Université de la Réunion
SAMIR ADLY	Professeur, Université de Limoges, Directeur de thèse
PAUL ARMAND	Maître de Conférences-HDR, Université de Limoges
ABDALLAH EL HAMIDI	Maître de Conférences-HDR, Université de la Rochelle
MICHEL THÉRA	Professeur, Université de Limoges, co-directeur de thèse

*À ma mère, à ma sœur Layla et sa famille,
Je dédie cette thèse.*

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu *Samir Adly* sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Je le remercie d'avoir dirigé mes recherches ainsi que de son soutien durant ces années de thèse.

J'exprime également toute ma reconnaissance à *Michel Théra* pour sa confiance et ses précieux conseils. Je le remercie d'avoir été toujours disponible pour répondre à mes questions.

Je suis très honoré que *Bernard Brogliato* ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de thèse. Je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je suis reconnaissant envers *Joydeep Dutta* d'avoir accepté de rapporter ce mémoire. Je le remercie de l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie *Abdallah El Hamidi* d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Je remercie *Paul Armand*, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je regrette le petit accident qui l'a empêché de participer à mon jury.

J'exprime mes sincères remerciements à *Khalid Addi* pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et qui n'a pas pu être présent physiquement parmi nous le jour de la soutenance. Par contre, il était bien présent dans ce travail dont une grande partie a été faite en collaboration avec lui.

Mes remerciements vont aussi à *Daniel Goeleven*, avec qui nous avons eu une collaboration fructueuse.

Comme les discussions font avancer la recherche, j'ai pu profiter de la présence de *Marius Durea* et de *Abderrahim Hantoute*. Je les remercie pour leur précieux remarques et conseils. Je leur en suis reconnaissant.

Je remercie toutes les personnes cotoyées au sein du Département de Mathématiques et Informatique à l'Université de Limoges pour leur accueil. Plus particulièrement *Nicolas Le Roux* qui a lu et corrigé volontairement ce mémoire. J'exprime mes remerciements à mes collègues du bureau avec lesquelles j'ai partagé d'agréables moments. Merci à : *Aurore Bernard*, *Christophe Chabot* pour son aide surtout quand j'avais des problèmes en informatique, *Julien Angéli*, arrivé la même année que moi, pour son aide et toutes les discussions qu'on a eu que se soit en mathématiques, en politique ou en culture générale, *Nicolas Le Roux* et *Marius Durea* avec qui nous partageons une passion footballistique commune. Je souhaite à tous une très bonne continuation dans leurs futurs projets.

Je n'oublie pas les autres collègues du bureau du premier étage, *Daouda Niang Diatta*, *Sadrine Jean*, *Romain Validire*, *Adrien Poteaux* et plus récemment *Delphine Poingt* et *Primitivo Acosta-Humanes*. Je remercie également ceux du bureau du deuxième étage, *Pierre-Louis Cayrel*, *Ainhoa Aparicio Monforte*, *Benjamin Pousse* et plus particulièrement *Elsa Bousquet* pour ses encouragements, sa gentillesse et son amitié.

Je tiens à remercier l'ensemble des secrétaires du D.M.I., *Yolande Vieceli*, *Patricia Vareille*, *Martine Guerletin* et tout particulièrement *Sylvie Laval* pour sa gentillesse, sa disponibilité, sa bonne humeur et son efficacité à résoudre mes problèmes.

Durant ces quatre ans, j'ai eu la chance de pouvoir enseigner en tant que moniteur (les 3 premières années) et en tant qu'ATER (la dernière année). Je remercie d'abord mes professeurs *Samir Adly* et *Michel Théra* qui m'ont aidé à obtenir le poste de moniteur puis le poste d'ATER, je leur en suis reconnaissant.

Durant ces quatre années d'enseignement, je remercie tous les enseignants avec qui j'ai pu travailler. *Stéphane Vinatier* qui était mon tuteur pédagogique et m'a accompagné dans mes premiers pas dans l'enseignement. Je remercie également *Pascale Sénéchaud*, *Anne Bellido*, *Jean Guillaume*, *Driss Boularas*, *Marie-Claude Malardeau*, *Chazad Movaheddi*, *Nicolas Le Roux*, *Julien Angéli*, *Christophe Chabot*, *Thomas Lickteig*, *Hakim Smati*, *Sandrine Jean*, *Moulay Barkatou*, *Thérèse Nore*, *Alain Salinier*.

Une pensée aux personnes que j'ai croisées au D.M.I. hors du cadre du travail : *Olivier Prot*, *Abdeslam Kadrani*, *Jacques-Arthur Weil*, *Thomas Cluzeau*, *Christian Malivert*, *Olivier Ruatta*, *Abdelkader Necer*, *François Laubie*, *Vincent Jalby*. Sans oublier *Henri Massias* pour sa disponibilité pour répondre à tout nos besoins.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues moniteurs de l'Université de Limoges avec qui nous avons réalisé un atelier projet sur la Vienne dans le cadre du diffusion scientifique.

Dès mon arrivée à Limoges, *Stéphane Vinatier* m'a proposé de rejoindre une équipe de Volley-Ball qui joue un championnat UFOLEP et qui est formée en grande partie de Matheux. Je remercie tous les membres de l'équipe AVA. *Christian Malivert, Stéphane Vinatier, Thomas Cluzeau, Filers Benoît, Lionel Berthelemot, Olivier Mathieu, Michel Al Khoury, Ibrahim El Jazairi* et *Paul-André Mestre*. J'espère que l'année prochaine vous réussirez à battre Saint-Junien et gagner le titre. Je serai toujours présent moralement parmi vous.

Mes remerciements vont à tous mes amis avec qui j'ai partagé ces cinq années de mon séjour en France. Je commence par les amis de Pau, *Romain, Sara* pour leurs encouragements et *Loris*, j'étais très heureux de sa participation à ma soutenance et toutes les vacances qu'on a passé ensemble. Je remercie également les amis de Limoges, *Carlos, Clara, José, Miguel, Mauricio*. Ensuite, j'exprime mes remerciements à *Marco* pour sa pasta, mon voisin *Hugo* pour sa bonne humeur et sa maté, *Seddik* pour sa musique, *Nachuté* pour sa bonne humeur, *Manolo, Pascual, Alex, Pablo, Pedro, Maria Del Mar, Lana, Claudia, Cristina 1 et 2, Julien*.

Je remercie mes amis les libanais, *Waleed Taoum, Hicham Tarhini, Hassan Khalil, Moustafa Haffar, Wael Hamd, Michel Al Khoury, Georges El Nashef, Khaled Stéphane*. Merci à *Alaa Saleh* de m'avoir apporté les connaissances en électronique qui me manquaient.

Je remercie mon ami *Téo*, pour sa gentillesse. Je le remercie pour les morceaux de musique qu'il a joués pour ma soutenance. Je remercie également *Marie-Jeanne Nal* pour son accueil chaleureux et sa gentillesse.

Mes pensées les plus chères vont à la personne qui m'a accompagnée ces dernières années et avec qui je partage des moments agréables, à *Carole*. Je lui dis, c'est à toi maintenant de finir ta thèse. Nos souvenirs sont gravés dans ma mémoire.

Enfin, mes remerciements vont à ma sœur *Layla* et sa famille, son mari *Gilbert* et ses filles *Berte, Angy* et la toute petite *Clarice* pour le soutien moral malgré la distance entre la France et les Émirats Arabes Unis.

Ces dernières lignes sont dédiées à ma mère. J'ai eu la chance d'avoir une mère sage qui m'a donné le goût de la connaissance et m'a soutenu dans tous les moments difficiles que j'ai passés dans la vie. Je la remercie pour sa confiance et sa patience.

Hassan Saoud

Table des matières

Remerciements	i
Notations et symboles	ix
Introduction	1
1 Notions générales	9
1.1 Introduction	9
1.2 Outils mathématiques	11
1.2.1 Ensembles convexes	11
1.2.2 Fonctions convexes	12
1.2.3 Différentiabilité et sous-différentiabilité	13
1.2.4 Éléments de l'analyse multivoque	16
1.2.5 Analyse de récession et la conjuguée de Fenchel	18
1.2.6 Problème d'inéquation variationnelle et problème d'opti- misation convexe	21
1.3 Stabilité au sens de Lyapunov	23
1.3.1 Méthode directe de Lyapunov	26
1.3.2 Principe d'invariance de La Salle	28
1.4 Conclusion	32
2 Inéquations variationnelles semi-coercives et analyse de récession	37
2.1 Introduction et problématique	37
2.2 Résultats d'existence	40
2.2.1 Inéquations variationnelles pseudo-monotone	40
2.3 Inéquations variationnelles semi-coercives	45
2.3.1 Inéquations variationnelles linéaires semi-coercives	48

2.4	Applications	58
2.5	Conclusion	69
3	Stabilité des inéquations variationnelles et hémivariationnelles d'évolution	73
3.1	Introduction et problématique	73
3.2	Cas d'un sur-potentiel convexe	76
3.2.1	Inéquation variationnelle d'évolution (\mathcal{IVE})	76
3.2.2	Résultats de stabilité	79
3.2.3	Stabilité en temps fini	81
3.3	Applications	87
3.4	Cas d'un sur-potentiel non-convexe	89
3.4.1	Inéquation hémivariationnelle d'évolution (\mathcal{IHE})	89
3.4.2	Résultats de stabilité	91
3.4.3	Stabilité en temps fini	99
3.5	Conclusion	101
4	Applications aux systèmes de type Euler-Lagrange non-réguliers conservatifs	103
4.1	Introduction et problématique	103
4.2	Propriétés du problème (\mathcal{EL})	105
4.2.1	La matrice d'inertie $M(q)$	106
4.2.2	La matrice des forces centrifuges et de Coriolis $C(q, \dot{q})$	107
4.2.3	Le vecteur $\nabla \mathcal{D}(q)$	107
4.2.4	Réduction de (\mathcal{EL}) en premier ordre	108
4.3	Résultat de stabilité	110
4.3.1	Théorème de stabilité	111
4.3.2	Théorème de stabilité asymptotique	113
4.4	Applications	116
4.5	Conclusion	119
	Conclusion et perspectives	121
	Bibliographie	123
	Index	131

Table des figures

1.1	Fonction support	19
1.2	Interprétation géométrique du problème $\mathcal{I}\mathcal{V}(F, C)$	21
1.3	Stabilité, stabilité asymptotique et instabilité	24
1.4	Pendule simple	25
1.5	Circuit RLC	31
2.1	Coupe circuit 1 : Diode comme un élément shunt (court-circuit) . . .	58
2.2	Caractéristique Ampère-Volt d'une diode idéale	58
2.3	Caractéristique d'une diode pratique	61
2.4	Coupe circuit 1 : avec $V_1 = 0.1, V_2 = -90, E = 1$	62
2.5	Coupe circuit avec double diode	63
2.6	Coupe circuit double diode : diodes idéales, $E_1 = 0.1, E_2 = 0.6$. . .	65
2.7	Coupe circuit double diode : diode pratique	67
2.8	Masse-ressort	68
3.1	Circuit RLD	88
4.1	Bras de robot	117
4.2	Chariot portant un bras de Robot	118

Notations et symboles

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>
\triangleq :	Egal à, par définition
\emptyset :	Ensemble vide
\mathbb{R} :	Corps des réels
\mathbb{R}^+ :	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n :	\mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Produit scalaire sur \mathbb{R}^n
$\ \cdot \ $:	Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n
\mathbb{B}_ρ :	Boule unité ouverte de rayon ρ dans \mathbb{R}^n
$\mathbb{B}_\rho(u)$:	Boule de centre u ouverte de rayon ρ dans \mathbb{R}^n
$\overline{\mathbb{B}}_\rho$:	Boule unité fermée de rayon ρ dans \mathbb{R}^n
$\overline{\mathbb{B}}_\rho(u)$:	Boule de centre u fermée de rayon ρ dans \mathbb{R}^n
$\text{co}(C)$:	Enveloppe convexe de l'ensemble C
$\overline{\text{co}}(C)$:	Enveloppe convexe fermé de l'ensemble C
C° :	Polaire d'un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n
$N_C(u)$:	Cône normal d'un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n au point u
$T_C(u)$:	Cône tangent à C au point u
\mathbb{R}^\bullet :	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\text{epi } \varphi$:	Epigraphe d'une fonction φ
δ_C :	Fonction indicatrice d'un convexe C de \mathbb{R}^n
$\Gamma_0(\mathbb{R}^n) \triangleq$	$\{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\bullet \text{ propre, convexe et s.c.i.}\}$
$\varphi'(u; d)$:	Dérivée directionnelle au point u dans la direction d
$\partial\varphi$:	Sous-différentiel de l'analyse convexe
$\partial_c\varphi$:	Sous-différentiel de Clarke
φ° :	Dérivée directionnelle généralisée
$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$:	Multi-application

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>
$\text{Gr}(F)$:	Graphe de F
$\text{R}(F)$:	Rang de F
C_∞ :	Cône de récession de C
φ_∞ :	Fonction de récession associée à φ
φ^* :	Conjuguée de Fenchel de φ
$\mathcal{B}(C)$:	Cône barrière associé à C
$\varphi_1 \square \varphi_2$:	Produit inf-convolution de φ_1 et φ_2
$\arg \min_{u \in C} \varphi(u)$:	ensemble des valeurs où la fonction φ atteint son minimum sur C
$\dot{u} =$	$\frac{du}{dt}$, dérivée temporelle de u
$\ddot{u} =$	$\frac{d^2u}{dt^2}$, dérivée temporelle de \dot{u}
$\mathcal{K} \triangleq$	$\{g : [0, a] \rightarrow [0, +\infty[\text{ strictement croissante avec } g(0) = 0\}$
$\mathcal{K}_\infty \triangleq$	$\{g \in \mathcal{K} \text{ avec } a = +\infty \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty\}$
$C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$:	Ensemble des fonctions de classe 1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}
$d_{\mathcal{M}}(s) \triangleq$	$\inf_{m \in \mathcal{M}} \ s - m\ $, distance d'un point à un ensemble
$\mathcal{O}(u_0)$:	Ensemble des orbites
\mathcal{L} :	Ensemble limite
$P_{\ker(A)}$:	Projection orthogonal de \mathbb{R}^n sur $\ker(A)$
\mathbb{B}_ρ^H :	Boule ouverte de rayon ρ dans H
$R(A, f, \varphi, C)$:	Ensemble des directions asymptotiques
\rightharpoonup :	convergence faible
\underline{r}_A :	Fonction de récession associée à A
$\text{Sol}(A, f, \varphi, C)$:	Ensemble des solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$
$\mathcal{R}(A, \varphi, C)$:	Ensemble résolvant associé au problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$
$\text{Sol}(M, q, \varphi, C)$:	Ensemble des solutions du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$
$\mathcal{R}(M, \varphi, C)$:	Ensemble résolvant associé au problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$
$A(C)$:	Image de l'ensemble C par l'opérateur A
E^\perp :	Ensemble orthogonal à l'ensemble E
$\text{fr}(C)$:	Frontière de l'ensemble C
$C(F, \varphi)$:	Ensemble des points stationnaires associé au problème $(\mathcal{IV}\mathcal{E})$
$\mathcal{S}(u_0, F, j)$:	Ensemble des solutions du problème $(\mathcal{IH}\mathcal{E})$
$C(F, j)$:	Ensemble des points stationnaires associé au problème $(\mathcal{IH}\mathcal{E})$
\dot{V}_{inf} :	Dérivée orbitale inférieure
\dot{V}_{sup} :	Dérivée orbitale supérieure
$S \triangleq$	$\bigcup_{u_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{S}(u_0, F, j)$
$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \triangleq$	Le lagrangien
$M(q)$:	Matrice d'inertie du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$

Symbole ***Description***

$C(q, \dot{q})$:	Matrice de Coriolis du problème (\mathcal{EL})
A^T :	Transposé d'une matrice A
$\mathcal{E}_c(q, \dot{q})$:	Énergie cinétique du problème (\mathcal{EL})
I_n :	Matrice identité de \mathbb{R}^n
$C(\vartheta, \Phi)$:	Ensemble des points stationnaires du problème (\mathcal{EL})

Introduction générale

Dans les pages qui suivent, nous présentons les travaux de thèse que nous avons effectués depuis septembre 2005. Ils ont été menés au Département de Mathématiques et Informatique du laboratoire XLIM de l'Université de Limoges sous la co-direction des Professeurs Samir Adly et Michel Théra.

Ce mémoire sera divisé en deux parties : la première traite les inéquations variationnelles non coercives et quelques applications. La seconde partie sera consacrée à l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des inéquations variationnelles et hémivariationnelles d'évolution ainsi qu'à l'étude du système d'Euler-Lagrange avec des forces de frottement de type Coulomb. Afin de donner les motivations de nos travaux, nous décrirons les deux parties principales qui les constituent.

La théorie des " *Inéquations Variationnelles* " a débuté avec les problèmes de minimisation de fonctionnelles. L'étude systématique de cette théorie remonte aux travaux de G. Fichera et son analyse du problème de Signorini en 1964. Cette théorie a connu de nombreux développements, d'abord avec les travaux de G. Stampacchia et P. Hartmann en 1966 et ensuite avec la contribution en 1967 de G. Stampacchia et J.L. Lions. Ces derniers ont utilisé les inéquations variationnelles pour l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, associées à des formes bilinéaires coercives, dans le but d'appliquer leurs résultats aux problèmes unilatéraux de la théorie de l'élasticité, de la plasticité et de la mécanique. Un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème d'inéquation variationnelle a été donné par Stampacchia dans [96].

Les domaines d'applications des inéquations variationnelles sont nombreux, citons des disciplines aussi différents que la physique, la chimie, l'économie, la finance etc... . Il n'est pas étonnant que cette théorie ait conduit à de nombreuses contributions depuis les années soixante et les travaux pionniers que nous venons de citer.

La description des phénomènes de contact unilatéral fait appel aux inéquations variationnelles lorsque les fonctionnelles sont convexes. Grâce à la théorie du sous-différentiel convexe, J. J. Moreau traite les forces de contact monotones comme des forces qui dérivent de *sur-potentiels convexes*. Récemment et avec le développement du sous-différentiel de Clarke [34], P. Panagiotopoulos a envisagé les contraintes non convexes comme des forces de *sur-potentiels non convexes*. et a introduit les " *Inéquations hémivariationnelles* " .

Depuis les années soixante, la théorie des inéquations variationnelles s'est beaucoup développée et a ouvert le chemin à de nombreuses applications et à d'autres classes de problèmes. Plus précisément, nous trouverons des inéquations variationnelles et hémivariationnelles gouvernées par des opérateurs monotones, maximaux monotones, coercives, non coercives, semi-coercives, pseudo-monotones etc.... Ces problèmes ont fait l'objet d'un nombre très important de contributions parmi lesquelles, j'ai étudié des travaux de H. Brézis, P. Panagiotopoulos, D. Goelven, H. Attouch, B. Brogliato, D. Motreanu, S. Adly, E. Ernst, M. Théra.

L'étude des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui remonte aux travaux de H. Poincaré (1854-1912) et au mémoire qu'il présenta en 1881 intitulé : " *Sur les courbes définies par une équation différentielle* " .

Influencé par les travaux de H. Poincaré, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) a étudié dans son mémoire " *Problème général de la stabilité du mouvement* " , la notion de la stabilité. Nous entendons par stabilité, la stabilité des points d'équilibre. Ses méthodes, sophistiquées pour l'époque, sont encore utilisées aujourd'hui. Rappelons qu'il a donné des définitions analytiques de la notion de stabilité et de stabilité asymptotique.

La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la solution peut être gardée arbitrairement près de l'équilibre, si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de ce dernier. La stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable mais que de plus la solution d'une condition initiale appartenant au voisinage de l'équilibre, tend vers l'équilibre lorsque le temps tend vers l'infini. Finalement, nous parlerons d'instabilité si tout simplement l'équilibre n'est pas stable.

Partant de ces définitions, A. M. Lyapunov a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires. La première méthode consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité. La dernière étape de cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne ainsi obtenue à partir la linéarisation. Nous distinguerons trois cas. Si toutes les valeurs propres admettent une partie

réelle strictement négative, nous déduisons la stabilité asymptotique. S'il existe une valeur propre telle que sa partie réelle est strictement positive, nous aurons l'instabilité. Enfin, si toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives ou nulles et s'il en existe une qui admette une partie réelle nulle, nous ne pouvons pas conclure. Cette méthode est connue aujourd'hui sous le nom de "*Première méthode de Lyapunov*" ou bien "*Méthode indirecte de Lyapunov*".

Cette méthode, malgré sa simplicité ne semble pas très efficace. En d'autres termes, la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que localement autour du point d'équilibre concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement global. De plus, les dynamiques d'un système non linéaire sont beaucoup plus riches que celles d'un système linéaire dans le sens où elles reflètent des comportements et des phénomènes purement linéaires. Pour cela, A. M. Lyapunov a proposé une deuxième méthode pour l'étude de la stabilité. Aujourd'hui, cette méthode est connue sous le nom de "*Méthode directe de Lyapunov*" ou par "*Seconde méthode de Lyapunov*". Dans ce travail, nous adapterons cette méthode pour l'étude de la stabilité d'une classe des systèmes dynamiques dits non-réguliers.

En regardant les définitions de la stabilité, nous constatons que pour étudier la stabilité nous aurons besoin de calculer les solutions, ce qui n'est pas facile dans la plupart des cas. D'où l'objet de la théorie de Lyapunov, qui permet de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses solutions. La philosophie de la seconde méthode de Lyapunov réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique :

" Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système devra atteindre finalement un point d'équilibre ".

Cette méthode est une généralisation de l'idée de l'énergie du système. Le but est de trouver une fonction qui décroît le long des trajectoires du système. Aujourd'hui, ces fonctions sont appelées "*Fonctions de Lyapunov*".

Le principal inconvénient de la méthode directe est de ne pas disposer de guide pour le choix de la fonction de Lyapunov. Dans la plupart des applications, les fonctions considérées sont l'énergie totale du système.

Les travaux de Lyapunov n'ont été connus qu'à partir des années soixante. Comme cette théorie donne une condition suffisante, en 1963, J. Kurzweil a établi une condition nécessaire pour montrer la stabilité. Un autre inconvénient de cette méthode, c'est qu'en donnant une telle fonction de Lyapunov, on doit examiner sa dérivée temporelle tout au long de la trajectoire pour montrer sa décroissance. Donc, il arrive souvent que la dérivée temporelle soit semi-définie négative, ce qui nous offre la stabilité et non pas la stabilité asymptotique. En 1961, J.P. La Salle a étudié ce problème et a formulé ainsi un principe connu aujourd'hui comme le

"Principe d'invariance de La Salle". Depuis, les techniques de la méthode de Lyapunov sont beaucoup utilisées et ont énormément progressé. Nous trouverons des études de la stabilité des systèmes en utilisant des fonctions de Lyapunov qui ne sont pas nécessairement lisses. Pour cela, nous citons les travaux de F. Clarke et ses collaborateurs qui ont utilisé des outils de l'analyse non-lisse afin d'étudier la décroissance de la fonction de Lyapunov proposée.

Finalement, nous notons qu'il existe de nombreux problèmes sur les systèmes dynamiques et leur stabilité. Cependant, d'importants processus physiques sont décrits par des modèles non linéaires. Par exemple, les caractéristiques courant / tension de nombreux systèmes électroniques sont non-linéaires. Il est indispensable d'étudier la stabilité de ces systèmes, surtout que la plupart d'entre eux sont munis d'un contrôle. Il existe des systèmes provenant de la mécanique, de la biologie ou de la finance pour lesquels les fonctions décrivant les évolutions des paramètres sont discontinues. Il est donc nécessaire de généraliser la théorie de Lyapunov pour les systèmes dynamiques non-réguliers.

Organisation du mémoire

Ce travail est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente la plupart des outils mathématiques qui seront utilisés tout au long de ce travail. Il sera divisé en deux parties principales. La première sera consacrée au rappel de quelques notions de l'analyse convexe, non-convexe, de l'analyse multivoque ainsi qu'un rappel simplifié de la théorie des inéquations variationnelles. Toutes ces notions seront utilisées tout au long de ce travail. La seconde partie sera dédiée à l'étude de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov ainsi qu'au principe d'invariance de La Salle. Cette théorie sera rappelée pour les équations différentielles ordinaires. Il nous a semblé intéressant de présenter cette théorie à l'aide de deux exemples importants : pendule simple et circuit électrique RLC.

Le Chapitre 2 étudie les inéquations variationnelles linéaires semi-coercives. Ce problème est lié à la convexité de la fonctionnelle d'énergie associée et à la nature de l'opérateur qui gouverne l'inéquation variationnelle.

Étant donné un élément $q \in \mathbb{R}^n$, M une matrice symétrique semi-définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$, et une fonction $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, on considère le problème suivant :

$$\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Mu + q, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C; \end{array} \right.$$

où C est convexe fermé de \mathbb{R}^n . Par définition du sous-différentiel, le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ équivaut à l'inclusion suivante :

$$\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ Mu + q \in \partial\varphi(u); \end{array} \right.$$

L'existence de solution du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est liée à la caractérisation de l'intérieur de l'ensemble résolvant donné par :

$$\mathcal{R}(M, \varphi, C) \triangleq \{-q \in \mathbb{R}^n \mid \text{Sol}(M, q, \varphi, C) \neq \emptyset\},$$

où $\text{Sol}(M, q, \varphi, C)$ désigne l'ensemble des solutions du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$.

Ces résultats seront étudiés à l'aide des techniques et méthodes de l'analyse de récession. Dans un deuxième temps, nous perturberons les données du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ afin d'examiner sa stabilité en faisant tendre la perturbation vers 0. Avant de donner ces résultats, nous ferons un rappel sur les inéquations variationnelles pseudo-monotones, monotones, ainsi que sur l'optimisation convexe. Ces résultats théoriques trouveront leurs applications en électronique et en mécanique. Pour mener à bien ce chapitre, nous nous sommes principalement appuyés sur les travaux de H. Brézis, S. Adly, M. Théra, E. Ernst et D. Goeleven.

L'objet du Chapitre 3 est la stabilité au sens de Lyapunov des inéquations variationnelles et hémivariationnelles d'évolutions. Ce chapitre sera divisé en deux parties principales.

Après le développement considérable de la théorie de stabilité de Lyapunov sur les équations différentielles ordinaires, apparaît le travail remarquable de Filippov sur l'étude des équations différentielles avec second membre discontinu. Depuis, cette théorie a beaucoup évolué grâce à l'analyse multivoque et a généré la théorie des "*Inclusions Différentielles*" largement étudiée par J.P. Aubin et A. Cellina (voir [13]).

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons examiner la stabilité en temps fini des inéquations variationnelles d'évolution. Dans [48], les auteurs ont établi un résultat d'existence et d'unicité, grâce à un théorème de Kato, pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone. Ensuite, ils ont étudié la stabilité de Lyapunov d'une classe d'inéquation variationnelle de premier ordre. Les auteurs ont généralisé la théorie de Lyapunov à cette classe. Ensuite, S. Adly et D. Goeleven (voir [5]) ont traité le cas des systèmes de second ordre et ont donné une extension du principe d'invariance de La Salle. Le problème général s'écrit sous la forme de l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} \in -F(u) - \partial\varphi(u), \quad (1)$$

avec F un opérateur Lipschitzien et $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de ce problème est une conséquence d'un résultat de Kato et est basée sur la monotonie de l'opérateur F et du sous-différentiel. Pour établir ce résultat, il faut utiliser la régularisation de Moreau-Yoshida de la fonction φ (voir [94]) afin de transformer l'inclusion différentielle donnée ci-dessus en une équation différentielle ordinaire. En effet, si on considère la fonction φ_α donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(u) &\triangleq \left(\varphi \square \frac{1}{2\alpha} \|\cdot\| \right)(u) \\ &= \inf_v \left\{ \varphi(u-v) + \frac{1}{2\alpha} \|v\| \right\}.\end{aligned}$$

La fonction φ_α est convexe et elle tend vers φ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. De plus, φ_α est différentiable donc son sous-différentiel $\partial\varphi_\alpha$ est réduit au singleton $\{\nabla\varphi_\alpha\}$. Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), on considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du_\alpha}{dt} + F(u_\alpha) = -\nabla\varphi_\alpha(u_\alpha). \quad (2)$$

L'équation (2) admet une solution unique, notée u_α qui tend vers l'unique solution du problème, u de (1), lorsque $\alpha \rightarrow 0$.

Le problème (1) contient comme cas particulier les équations différentielles ordinaires lorsque la fonction φ est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Un autre cas important est donné lorsque la fonction φ est la fonction indicatrice d'un cône convexe fermé C de \mathbb{R}^n , alors nous obtenons alors le problème de *complémentarité* donné par : trouver $u \in C$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + F(u) &\in -C^\circ (\in -\partial\delta_C(u) = -N_C(u)), \\ \left\langle \frac{du}{dt} + F(u), u \right\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $C = \mathbb{R}_+^n$, le problème de complémentarité s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + F(u) &= -\lambda(t), \\ 0 &\leq \lambda(t) \perp u(t) \geq 0.\end{aligned}$$

Enfin, étant donné $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, on considère l'inclusion différentielle de second ordre suivante :

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) \in -\partial\varphi(\dot{q}(t)),$$

avec M, C et K désignant respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité. Le second membre modélise le frottement sec de type Coulomb. À l'aide d'un simple changement de variable, nous pouvons transformer cette inclusion différentielle en une autre de premier ordre. D'où l'importance et la motivation principale d'étudier ce problème.

Notre contribution principale sera consacrée à l'étude de la stabilité en temps fini pour ce type de système. Pour bien mener ce travail, nous nous basons sur les travaux de E. Moulay et W. Perruquetti (voir [77]).

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous allons étudier la stabilité des inéquations hémivariationnelles d'évolution de premier ordre. En effet, nous considérons à la place du sur-potentiel au sens de Moreau un sur-potentiel au sens de Panagiotopoulos. En d'autres termes, cette partie sera consacrée à l'étude du cas non-convexe et à l'étude de l'inclusion différentielle du type : étant donné une fonction $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne et un opérateur continu F , on cherche à trouver une solution qui vérifie :

$$\frac{du}{dt} + F(u) \in -\partial_c j(u),$$

où $\partial_c j(u)$ désigne le sous-différentiel de la fonction j au point u . De même, si la fonction j est de classe C^1 , l'inclusion différentielle s'écrit comme une équation différentielle ordinaire.

Dans cette nouvelle classe de problème, l'unicité de la solution (pour toute condition initiale donnée) ne peut être prouvée en général. Il arrive souvent que le système ait plus d'une solution. Dans cette partie, nous allons examiner l'existence de solutions ainsi que la stabilité, la stabilité asymptotique et la stabilité en temps fini des points d'équilibre. Ensuite, nous donnons une extension du principe d'invariance de La Salle. Finalement, nous appliquons ces résultats à des exemples en électronique et en mécanique.

Au Chapitre 4, nous étudierons la stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers de type Euler-Lagrange conservatifs. Le but sera de trouver des conditions simples pour établir la stabilité et la stabilité asymptotique de l'inclusion différentielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla \vartheta(q) \in -\partial \Phi(\dot{q}).$$

La matrice $M(q)$ désigne la matrice d'inertie, la matrice $C(q, \dot{q})$ désigne la matrice des forces centrifuges et de Coriolis et la fonction ϑ représente l'énergie potentielle du système. Nous allons reprendre le travail de S. Adly et D. Goeleven [5] et essayer de l'étendre au cas général.

Les propriétés naturelles des matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et de l'énergie \mathcal{D} , joueront un rôle important dans cette étude. Nous rappelons quelques unes des ces propriétés. Ensuite, nous appliquerons les résultats trouvés à certains exemples en mécanique.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES

1.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties :

Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions et outils de l'analyse convexe, non-convexe et de récession. Ils seront fréquemment utilisés tout au long de ce travail. De plus, nous donnerons quelques propriétés de l'analyse multivoque. Nous présenterons quelques éléments de la théorie des opérateurs maximaux monotones ainsi qu'une approche simplifiée des inéquations variationnelles. Cette théorie a apparue dans les années 60 avec Fichera dans son étude du problème du Signorini. J.L. Lions et G. Stampacchia [69] ont étudiés le cas d'un opérateur linéaire coercif. Ce résultat a été généralisé par P. Hartman et G. Stampacchia [53] et indépendamment par F. Browder [31] au cas des opérateurs non linéaires de type monotone. Au début, cette théorie a trouvé ses applications en mécanique unilatérale (voir [39]). Récemment, elle est utilisée dans l'étude d'autres domaines comme par exemple l'économie, la finance, l'optimisation et la théorie des jeux.

Dans la deuxième partie, nous présenterons la notion de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques, pour des équations différentielles ordinaires. Les résultats ainsi donnés seront appliqués ultérieurement à l'étude des inéquations variationnelles et hémivariationnelles d'évolutions ainsi qu'à l'étude des systèmes Lagrangiens. Cette théorie joue un rôle important dans différents domaines tels que la mécanique, l'électronique ou l'automatique.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) fut un des premiers fondateurs de la théorie de la stabilité. Lors de sa thèse soutenue en 1892 ([71]), A.M. Lyapu-

nov a donné une condition suffisante pour montrer la stabilité des équilibres en utilisant certaines fonctions dites aujourd'hui " fonctions de Lyapunov ". Son travail a été basé sur les travaux de H. Poincaré et J. Lagrange, sur la stabilité des équations différentielles ordinaires de second ordre. L'objectif de la méthode de Lyapunov est d'étudier le comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires.

En 1957, V.I. Zubov ([103]) a donné une extension de la notion de stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques en général munis de la topologie métrique. Les travaux de Zubov sont considérés comme une généralisation de la stabilité de Lyapunov.

Le début des années 60 est considéré comme la naissance de l'évolution de la théorie de la stabilité de Lyapunov. Durant lesquelles J. Kurzweil ([64]) a démontré la réciproque de la méthode de Lyapunov pour des systèmes continus. En parallèle, l'étude de la stabilité a intéressé d'autres à l'exemple de J.P. La Salle [65] qui a donné un principe d'invariance connu par " *principe d'invariance de La Salle* " pour établir la stabilité asymptotique des équilibres. Ce principe a été étudié également, en 1963, par N.N. Krasovskii [62]. Dans certaines références, le théorème d'invariance est dit théorème d'invariance de La Salle-Krasovskii. Également, nous citons les travaux de T. Yoshisawa sur l'étude de la stabilité des équilibres des équations différentielles ordinaires ainsi que ses études sur la relation entre la seconde méthode de stabilité de Lyapunov et le fait que les solutions soient bornées (voir [100]).

Partie I

1.2 Outils mathématiques

Dans cette section, nous nous limiterons à quelques définitions et propriétés de l'analyse convexe qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [55], [89] et [76].

Dans la suite, l'espace \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$. Nous noterons par \mathbb{B}_ρ (resp. $\mathbb{B}_\rho(u)$, $\overline{\mathbb{B}}_\rho$ et $\overline{\mathbb{B}}_\rho(u)$) la boule unité ouverte (resp. de centre $u \in \mathbb{R}^n$, fermée et fermée de centre $u \in \mathbb{R}^n$) et de rayon $\rho > 0$ dans \mathbb{R}^n . Enfin, nous désignons par \mathbb{R}^\bullet l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.1. Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit ensemble convexe si pour tous $u, v \in C$,

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Nous appelons *enveloppe convexe* (resp. *enveloppe convexe fermé*) de C , et on note $\text{co}(C)$ (resp. $\overline{\text{co}}(C)$), le plus petit ensemble convexe (resp. ensemble convexe fermé) contenant C .

Remarque 1.1. En général, $\text{co}(C)$ n'est pas un ensemble fermé. De plus, si C est convexe alors $\text{co}(C) = C$ et réciproquement. D'autre part, si C est borné (resp. compact) alors $\text{co}(C)$ est borné (resp. compact). \square

1.2.1.1 Cônes

Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit *cône* si

$$\forall \lambda \geq 0, \forall u \in C, \lambda u \in C.$$

Si C est un cône convexe fermé, on définit le *polaire* de C par :

$$C^\circ \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C\}.$$

On appelle *cône normal* d'un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n au point u , l'ensemble définie par :

$$N_C(u) \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in C\}.$$

Remarquons que le cône normal est toujours un cône convexe fermé de \mathbb{R}^n . Par suite, le polaire de $N_C(u)$ sera défini par :

$$(N_C(u))^\circ \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in N_C(u)\}.$$

L'ensemble $(N_C(u))^\circ$ est appelé *cône tangent* à C au point u et dans la suite sera noté par $T_C(u)$.

Un cône C est dit *saillant* si et seulement si $(C) \cap (-C) = \{0\}$, avec

$$(-C) \triangleq \{-u \mid u \in C\}.$$

1.2.2 Fonctions convexes

A présent, nous considérons les fonctions φ telles que

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\bullet.$$

Nous appelons *épigraphe* de la fonction φ , l'ensemble noté par

$$\text{epi } \varphi \triangleq \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \mu\}.$$

Nous notons par :

$$\text{dom } \varphi \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(u) < +\infty\}$$

le domaine de la fonction φ . Si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$ alors la fonction φ est dite *propre*.

La fonction φ est dite *semi-continue inférieurement (s.c.i)* dans \mathbb{R}^n si et seulement si pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$\varphi(u_0) \leq \liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u).$$

Autrement dit, la fonction φ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est un fermé de \mathbb{R}^n . De plus, la fonction φ est dite *semi-continue supérieurement (s.c.s.)* si la fonction $-\varphi$ est s.c.i..

Exemple 1.1. 1. Toute fonction continue est s.c.i..

2. La fonction φ est continue si et seulement si φ et $-\varphi$ sont s.c.i.. (ou bien φ est à la fois s.c.i. et s.c.s.).

□

Définition 1.2. La fonction φ est dite *convexe* si pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $\varphi(u) < +\infty$ et $\varphi(v) < +\infty$, nous avons :

$$\varphi((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite *strictement convexe* si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Remarquons qu'une fonction est convexe si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Exemple 1.2. Considérons la fonction *indicatrice* d'un convexe C de \mathbb{R}^n , définie par :

$$\delta_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in C, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction δ_C vérifie les propriétés suivantes :

1. δ_C est propre ;
2. $\text{epi } \delta_C = C \times \mathbb{R}^+$;
3. δ_C est une fonction convexe si et seulement si C est convexe ;
4. δ_C est une fonction s.c.i. si et seulement si C est fermé.

□

Enfin et dans la suite, nous noterons par $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\bullet$, propres, convexes et s.c.i..

1.2.3 Différentiabilité et sous-différentiabilité

1.2.3.1 Dérivée directionnelle

Dans cette partie, nous présentons rapidement la notion de différentiabilité. Pour cela, nous considérons des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3. Nous appelons *dérivée directionnelle* de φ au point $u \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$, et on note $\varphi'(u; d)$, la limite suivante, si elle existe dans \mathbb{R} :

$$\varphi'(u; d) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u + \tau d) - \varphi(u)}{\tau}$$

Exemple 1.3. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto |u|$. En appliquant la Définition 1.3, Nous trouvons que :

$$\varphi'(0; 1) = 1 \text{ et } \varphi'(0; -1) = 1.$$

□

Définition 1.4. La fonction φ est dite *différentiable* au sens de Gâteaux au point u , si et seulement si la fonction φ admet en u des dérivées directionnelles continues dans toutes les directions d . De plus, nous avons $\varphi'(u; d) = \langle \nabla \varphi(u), d \rangle$, où $\nabla \varphi$ désigne le gradient de la fonction φ au point u .

1.2.3.2 Cas des fonctions convexes

Comme le montre l'Exemple 1.3, les fonctions convexes ne sont pas nécessairement dérivables sur leur domaine, d'où l'intérêt d'introduire de nouveaux objets appelés le sous-gradient et le sous-différentiel qui permettent de généraliser la notion de différentiabilité. Pour plus de détails voir dans [55] et [89].

Considérons une fonction convexe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$.

Théorème 1.1. *Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la fonction φ admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions $d \in \mathbb{R}^n$. De plus, nous avons*

$$\varphi'(u; d) \triangleq \inf_{\tau > 0} \frac{\varphi(u + \tau d) - \varphi(u)}{\tau}$$

Enfin, $-\varphi'(u; -d) \leq \varphi'(u; d)$.

Ce résultat nous donne une idée du comportement d'une fonction convexe.

Définition 1.5. *Un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$ est dit sous-gradient de la fonction φ en u (avec $\varphi(u) < +\infty$) si pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ nous avons*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \xi, v - u \rangle.$$

L'ensemble (vide ou non vide) de tous les sous-gradients de φ en u est appelé *sous-différentiel* de φ en u et est noté par $\partial\varphi(u)$.

Cet ensemble est un ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^n . De plus, il n'est pas nécessairement compact, sauf si la fonction φ est continue.

Théorème 1.2. (Convexité par le gradient)

Si la fonction φ est finie et continue en $u \in \mathbb{R}^n$. Alors, φ est différentiable en u (c.à.d. $\nabla\varphi(u)$ existe) si et seulement si $\partial\varphi(u)$ est réduit à un singleton, à savoir $\nabla\varphi(u)$. Par suite nous obtenons :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla\varphi(u), v - u \rangle.$$

Exemple 1.4. Soit C un ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n . D'après Exemple 1.2, nous obtenons que la fonction indicatrice de C est une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Le sous-différentiel de δ_C au point $u \in C$, est donné par :

$$\partial\varphi(u) = N_C(u),$$

avec la convention $\partial\varphi(u) = \emptyset$ si $u \notin C$. □

Exemple 1.5. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto |u|$. Le sous-différentiel $\partial f(u)$ de f en u est donné par :

$$\partial f(u) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } u > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } u = 0 \\ \{-1\} & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

□

1.2.3.3 Cas des fonctions lipschitziennes

Dans ce paragraphe, nous considérons des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, localement lipschitziennes en $u \in \mathbb{R}^n$ c'est à dire il existe un $k > 0$ et un $\rho > 0$ telle que

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq k\|v - w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{B}_\rho(u).$$

La constante k est appelée constante de Lipschitz de φ en u . Une fonction localement lipschitzienne en un point n'est pas nécessairement différentiable en ce point.

De plus, toute fonction convexe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne en tout point de \mathbb{R}^n et $\text{dom } \varphi = \mathbb{R}^n$. D'où l'intérêt de parler de la notion de sous-gradient et de sous-différentiel d'une fonction localement lipschitzienne. En effet, nous allons définir la dérivée directionnelle généralisée de la fonction φ .

Définition 1.6. Nous appelons dérivée directionnelle généralisée de φ au point $u \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$, et on note $\varphi^\circ(u; d)$, la limite suivante, si elle existe dans \mathbb{R} :

$$\varphi^\circ(u; d) \triangleq \limsup_{w \rightarrow u, \tau \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(w + \tau d) - \varphi(w)}{\tau}$$

Comme la fonction φ est localement lipschitzienne en $u \in \mathbb{R}$, $\varphi^\circ(u; d)$ est finie, et

$$|\varphi^\circ(u; d)| \leq k\|d\|.$$

Définition 1.7. Un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ est dit sous-gradient de Clarke de la fonction φ en u , si pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\varphi^\circ(u; v) \geq \langle w, v \rangle.$$

L'ensemble de tout les sous-gradients de Clarke de φ en u est appelé sous-différentiel Clarke de φ en u et est noté par $\partial_c \varphi(u)$. Cet ensemble est un ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n .

Remarque 1.2. Remarquons que :

1. Si la fonction φ est convexe alors on a $\varphi^\circ(u; d) = \varphi'(u; d)$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, et par suite $\partial_c \varphi(u) = \partial \varphi(u)$.
2. D'après le théorème de Rademacher, la fonction φ (localement lipschitzienne) est différentiable presque-partout sur \mathbb{R}^n (pour la mesure de Lebesgue).

Cela signifie que la fonction φ admet un gradient $\nabla \varphi$ sur $\mathbb{R}^n \setminus N$, avec N un ensemble quelconque de mesure nulle dans \mathbb{R}^n où le gradient de φ n'existe pas. Par suite, le sous-différentiel de Clarke peut être écrit de la façon suivante :

$$\partial_c \varphi(u) = \text{co} \{w \in \mathbb{R}^n \mid \exists (u_i) \in \mathbb{R}^n \setminus N \text{ telle que } u_i \rightarrow u \text{ et } \nabla \varphi(u_i) \rightarrow w\}.$$

□

1.2.4 Éléments de l'analyse multivoque

Dans cette section, nous donnerons quelques définitions et propriétés de l'analyse multivoque. Cette théorie nous servira, d'une part, à bien comprendre la nature du sous-différentiel d'une fonction propre et convexe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ et d'autre part, elle constituera la base de la théorie des "inclusions différentielles" que nous étudierons ultérieurement. Pour plus de détails, nous inviterons le lecteur à consulter à l'ouvrage [14].

Définition 1.8. Une application F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est dite multivoque ou multi-application, si à tout $u \in \mathbb{R}^n$, on associe le sous-ensemble $F(u)$ de \mathbb{R}^n . Le sous-ensemble $F(u)$ est dit image ou bien valeur de F .

Une multi-application sera notée par :

$$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n.$$

De plus, F est une application $u \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ où $2^{\mathbb{R}^n}$ désigne la famille de tous les sous-ensembles de \mathbb{R}^n . Voici quelques outils de l'analyse multivoque. Dans toute la suite, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ désigne une multi-application.

Définitions et propriétés 1.1. 1. Le domaine de F , noté $D(F)$, est l'ensemble défini par :

$$D(F) \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) \neq \emptyset\}.$$

2. Si $D(F) = \mathbb{R}^n$, alors la multi-application F est dite *stricte*.
3. La multi-application F est dite *propre* si son domaine est non-vide.
4. Le *graphe* de F , noté $\text{Gr}(F)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Gr}(F) \triangleq \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in F(u)\}.$$

Par suite, $F(u)$ peut être écrit sous la forme :

$$F(u) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (u, v) \in \text{Gr}(F)\}.$$

5. Nous appelons l'*image* de F , noté $R(F)$, l'ensemble défini par :

$$R(F) \triangleq \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} F(u).$$

6. La multi-application F est dite *compacte* (resp. *bornée*) si son image $R(F)$ est compacte (resp. bornée).
7. *Continuité* :

- La multi-application F est dite *semi-continue supérieurement* (s.c.s) en $u_0 \in \mathbb{R}^n$ si pour tout \mathcal{U} voisinage de $F(u_0)$, il existe un voisinage \mathcal{V} de u_0 telle que $F(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$.
- La multi-application F est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) en $u_0 \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $v_0 \in F(u_0)$ et tout voisinage \mathcal{V} de v_0 , il existe un voisinage \mathcal{U} de u_0 telle que :

$$\forall u \in \mathcal{U}, \quad F(u) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$$

- La multi-application F est dite *continue* en $u_0 \in \mathbb{R}^n$ si elle est à la fois s.c.s et s.c.i en u_0 .
 - Enfin, F est dite s.c.s (resp. s.c.i, continue) si elle est s.c.s (resp. s.c.i, continue) en tout point $u_0 \in \mathbb{R}^n$.
8. La multi-application F est dite *lipschitzienne* s'il existe $k \geq 0$ telle que :

$$\|F(u^*) - F(v^*)\| \leq k \|u - v\|, \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall u^* \in F(u), \forall v^* \in F(v).$$

9. L'opérateur $F^{-1} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est défini par :

$$u \in F^{-1}(v) \iff u \in F(v).$$

De plus, il est clair que

$$D(F^{-1}) = R(F).$$

□

Définition 1.9. L'opérateur F est dit *monotone* si : $\forall u, v \in D(F), \forall u_1 \in F(u), v_1 \in F(v)$, nous avons :

$$\langle v_1 - u_1, v - u \rangle \geq 0.$$

F est dit *maximal monotone* si son epigraphe est maximal dans l'ensemble des graphes des opérateurs monotones ordonnés par l'inclusion (au sens des ensembles).

Pour plus de détails sur la théorie des opérateurs maximaux monotones, nous renvoyons le lecteur à [25].

1.2.4.1 Le sous-différentiel comme un opérateur multivoque

Après avoir donné la définition et les propriétés d'une multi-application, nous remarquons que, pour une fonction φ de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, la correspondance :

$$\begin{aligned} \partial\varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \\ u &\mapsto \partial\varphi(u) \end{aligned}$$

est une multi-application qui vérifie la Définition 1.8. Par suite, nous obtenons que le domaine de $\partial\varphi$ est donné par :

$$D(\partial\varphi) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

D'autre part, l'image de $\partial\varphi$ est définie par :

$$R(\partial\varphi) = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} \partial\varphi(u).$$

De plus, nous avons :

$$D(\partial\varphi) \subset \text{dom } \varphi.$$

Il est bien connu que $\partial\varphi$ est un opérateur maximal monotone (voir [25], [89]).

1.2.5 Analyse de récession et la conjuguée de Fenchel

Dans ce paragraphe, C désigne un convexe fermé non vide dans \mathbb{R}^n et φ désigne une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.10. 1. On appelle cône de récession de C , l'ensemble non vide, convexe et fermé défini par :

$$C_\infty \triangleq \bigcap_{t>0} \left[\frac{C - u_0}{t} \right],$$

où u_0 est un élément arbitraire de C et $C - u_0 \triangleq \{u - u_0 \mid u \in C\}$

2. On appelle fonction de récession associée à φ , notée φ_∞ , la fonction définie par :

$$\varphi_\infty(u) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u_0 + \lambda u) - \varphi(u_0)}{\lambda},$$

où u_0 est un élément arbitraire du $\text{dom}\varphi$.

Notons que la fonction φ_∞ est aussi définie par :

$$(\text{epi}(\varphi))_\infty = \text{epi}(\varphi_\infty).$$

Nous notons par $\ker \varphi_\infty = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\infty(u) = 0\}$, le noyau de φ_∞ qui est un cône convexe fermé de \mathbb{R}^n .

Définition 1.11. On appelle conjuguée de Fenchel de la fonction φ , la fonction $\varphi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\varphi^*(u^*) \triangleq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \{\langle u^*, u \rangle - \varphi(u)\}.$$

Théorème 1.3. (Fenchel-Moreau)

La conjuguée de Fenchel φ^* d'une fonction φ de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ est une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Par suite, nous définissons

$$\varphi^{**}(u) = \sup_{u^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle u^*, u \rangle - \varphi^*(u^*)\},$$

qui est une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. De plus, nous avons

$$\varphi^{**} = \varphi.$$

Nous avons la correspondance de Fenchel suivante :

$$v \in \partial\varphi(u) \iff u \in \partial\varphi^*(v).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{R}(\partial\varphi) = \mathbf{D}(\partial\varphi^*) \subset \text{dom } \varphi^*. \quad (1.1)$$

Définition 1.12. On appelle fonction support associée à C , la fonction définie par :

$$\sigma_C(u) \triangleq (\delta_C)^*(u) = \sup_{v \in C} \langle u, v \rangle.$$

Le domaine de la fonction σ_C , donné par :

$$\text{dom } \sigma_C = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{v \in C} \langle u, v \rangle < +\infty\}, \quad (1.2)$$

est appelé *cône barrière* associé à C et nous le notons par $\mathcal{B}(C)$

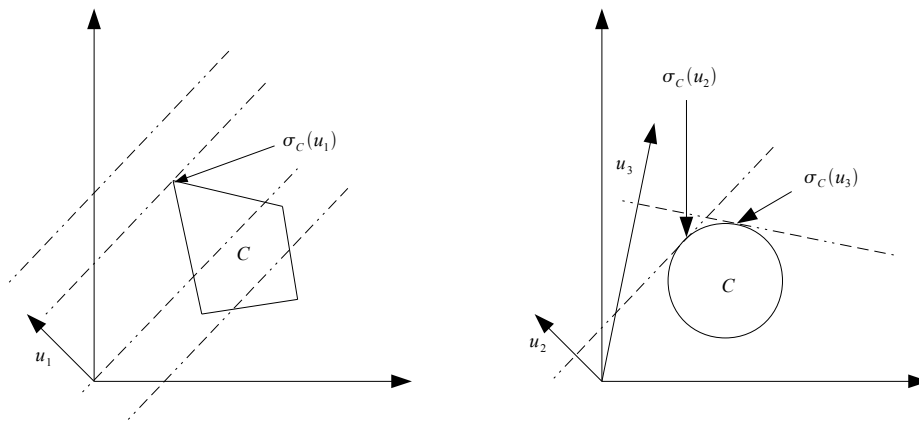


FIGURE 1.1 – Fonction support

Propriété 1.1. Nous avons :

$$\mathcal{B}(C)^\circ = C_\infty. \quad (1.3)$$

Par conséquent, par le théorème du bipolaire, nous aurons

$$\overline{\mathcal{B}(C)} = (C_\infty)^\circ. \quad (1.4)$$

Proposition 1.1. ([89]) Soit C un ensemble convexe. Soit $p \in \mathbb{R}^n$ donné. Nous avons :

$$(a) p \in \overline{C} \iff \sigma_C(w) \geq \langle p, w \rangle, \forall w \in \mathbb{R}^n;$$

$$(b) p \in \text{Int}(C) \iff \sigma_C(w) > \langle p, w \rangle, \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Où $\text{Int}(C)$ désigne l'intérieur topologique de C .

Définition 1.13. Soit φ_1, φ_2 2 fonctions de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. On appelle inf-convolution de φ_1 et φ_2 , la fonction notée $(\varphi_1 \square \varphi_2)(u)$ et définie par :

$$(\varphi_1 \square \varphi_2)(u) \triangleq \inf_v \{ \varphi_1(u - v) + \varphi_2(v) \}. \quad (1.5)$$

Nous disons que la inf-convolution est *exacte* si l'infimum donné dans 1.5 est atteint. De plus, si φ_1 (ou φ_2) est continue sur \mathbb{R}^n , alors :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* \square \varphi_2^* \quad (1.6)$$

et l'inf-convolution $\varphi_1^* \square \varphi_2^*$ est exacte.

Proposition 1.2. ([89]) Soit φ une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ et soit $p \in \mathbb{R}^n$ donné. Nous avons :

$$(i) p \in \overline{\text{dom } \varphi^*} \iff \varphi_\infty(w) \geq \langle p, w \rangle, \forall w \in \mathbb{R}^n;$$

$$(ii) p \in \text{Int}(\text{dom } \varphi^*) \iff \varphi_\infty(w) > \langle p, w \rangle, \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Preuve. La preuve est basée sur le résultat de la Proposition 1.1. En effet, considérons la fonction ψ donnée par : $\psi(u) = \varphi(u) - \langle u, p \rangle$. Par suite, on a :

$$\varphi(u) = \psi(u) + \langle u, p \rangle.$$

De plus, on désigne par C l'ensemble : $C = \text{dom } \varphi^* - p$. D'après le Théorème 12.3 dans [89], on obtient, pour $w^* = u^* - p$, que

$$\psi^*(w^*) = \varphi^*(w^* + p).$$

Par suite, on a

$$\text{dom } \psi^* = C. \quad (1.7)$$

En appliquant le Théorème 13.3 dans [89], on obtient :

$$\sigma_{\text{dom } \psi^*} = \psi_\infty. \quad (1.8)$$

D'autre part, on a l'équivalence suivant :

$$p \in \overline{\text{dom } \varphi^*} \iff 0 \in \overline{C}. \quad (1.9)$$

Finalement, (1.7), (1.8), (1.9) et l'équivalence (a) (resp. (b)) de la Proposition 1.1 donnent l'équivalence (i) (resp. (ii)). ■

1.2.6 Problème d'inéquation variationnelle et problème d'optimisation convexe

Dans cette section, nous présentons les principaux éléments de la théorie des *inéquations variationnelles*. Aujourd'hui, Cette théorie est appliquée à de nombreux problèmes issus de l'économie, l'ingénierie etc... . Pour plus des détails voir ([80], [15] etc...).

Elle fournit des outils dans la formulation des problèmes d'équilibre. Elle donne une analyse qualitative en termes d'existence et unicité de la solution ainsi que de la stabilité et de l'analyse de sensibilité. De plus, elle est utilisée pour l'étude de nombreux problèmes provenant de la programmation mathématique comme les systèmes non-linéaires, les problèmes d'optimisation, les problème de complémentarité etc... .

En dimension finie, on appelle *inéquation variationnelle* tout problème de la forme :

$$\mathcal{IV}(F, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C \text{ tel que :} \\ \langle F(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in C, \end{array} \right.$$

où C est un sous-ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le problème $\mathcal{IV}(F, C)$ peut être représenté géométriquement par la FIGURE 1.2. L'existence et

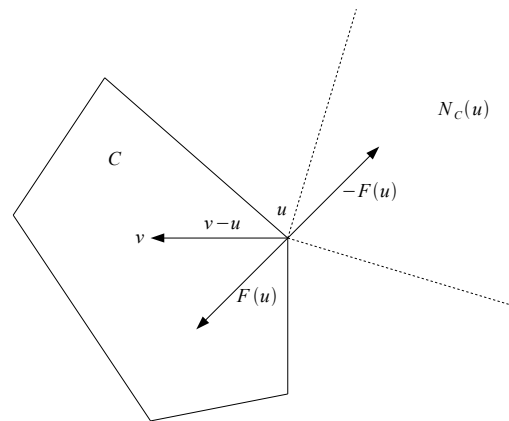


FIGURE 1.2 – Interprétation géométrique du problème $\mathcal{IV}(F, C)$.

l'unicité d'une solution du problème $\mathcal{IV}(F, C)$ sont principalement liés aux propriétés de l'opérateur F et de l'ensemble C . Par exemple, si l'opérateur F est continue et l'ensemble C est de plus compact alors le problème $\mathcal{IV}(F, C)$ admet au

moins une solution. Si de plus, l'opérateur est *fortement monotone* sur C c'est à dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2, \forall u, v \in C,$$

alors, le problème $\mathcal{IV}(F, C)$ admet une solution unique.

Comme nous l'avons déjà mentionné, les problèmes d'optimisation peuvent être modélisé par des inéquations variationnelles. Comme par exemple le cas du *problème d'optimisation convexe* définie par :

$$(OC) \begin{cases} \min \varphi(u) \\ \text{tel que} \\ u \in C, \end{cases}$$

où C est un sous-ensemble convexe fermé et non vide de \mathbb{R}^n , et φ est une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On appelle *solution* du problème (OC) tout u^* où $\varphi(u^*)$ atteint sa valeur minimale sur C . L'ensemble des solutions est noté $\arg \min_{u \in C} \varphi(u)$.

Si la fonction φ est convexe et *coercive* sur C , c'est à dire elle vérifie la condition suivante :

$$\lim_{u \in C, \|u\| \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +\infty.$$

Alors, le problème (OC) admet au moins une solution. Cette dernière est unique si la fonction φ est strictement convexe.

Nous distinguons les cas suivants :

1. Si la fonction φ est différentiable et u^* désigne une solution du problème (OC) alors elle est aussi une solution de l'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(\nabla\varphi, C)$ suivante :

$$\langle \nabla\varphi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0, \forall u \in C.$$

2. Inversement, si la fonction φ est de plus convexe et u^* est une solution de $\mathcal{IV}(\nabla\varphi, C)$ alors elle est aussi une solution du problème (OC).

3. Si la fonction φ n'est pas différentiable, on a :
un point $u^* \in C$ est une solution du problème (OC) si et seulement si

$$0 \in \partial\varphi(u^*) + N_C(u^*).$$

Nous finissons ce paragraphe par la remarque suivante :

Remarque 1.3. Notons que si u^* est une solution du problème (OC) alors elle l'est du problème sans-conainte suivant :

$$\min \varphi(u) + \delta_C(u).$$

□

Partie II

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

La théorie de la stabilité joue un rôle important en théorie des systèmes dynamiques. Différents types de problème de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques. Nous entendons par stabilité du système, la stabilité des points d'équilibre. La stabilité d'un point d'équilibre est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov.

Par définition, si un système est dans un état d'équilibre, il restera dans cet état quand le temps varie. Les définitions de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est "près" d'un état d'équilibre. Cela reflète la possibilité de perturbations affectant le système, sous forme des conditions initiales non nulles. L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857,1918). En 1892, A.M. Lyapunov ([71]) a montré l'existence de certaines fonctions, dites fonctions de Lyapunov, qui garantissait la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues. Les travaux de Lyapunov n'ont été connus qu' à partir des années 60. En 1963, J. Kurzweil [64] a démontré l'équivalence entre l'existence des fonctions de Lyapunov et la stabilité des équilibres des équations différentielles ordinaires continues.

L'objectif de cette partie est de présenter, d'une façon générale, la théorie de la stabilité de Lyapunov pour des équations différentielles ordinaires. Pour des détails supplémentaires, nous invitons les lecteurs à lire les ouvrages de [59], [73]. Considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne c'est à dire :

$$\|f(u) - f(v)\| \leq k\|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (\mathcal{P}) admet une solution unique.

Dans la suite, nous noterons $u(t, u_0)$ la solution du problème (\mathcal{P}) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

De plus, nous supposons que $f(0) = 0$ c'est à dire que la solution triviale 0 est la seule solution du problème (\mathcal{P}).

Après avoir présenté notre problème (\mathcal{P}), nous allons donner maintenant les définitions de la notion de stabilité de Lyapunov.

Définition 1.14. L'origine du problème (\mathcal{P}) est dit attractif, s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathbb{B}_\delta$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, u_0)\| = 0$.

Définition 1.15. L'origine du problème (\mathcal{P}) est dit stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(u_0) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathbb{B}_\delta$, la solution $u(t, u_0) \in \mathbb{B}_\varepsilon$.

Définition 1.16. L'origine du problème (\mathcal{P}) est dit asymptotiquement stable, s'il est à la fois stable et attractif.

Définition 1.17. L'origine du problème (\mathcal{P}) est dit instable, s'il n'est pas stable.

Nous pouvons représenter la notion de la stabilité par la FIGURE 1.3

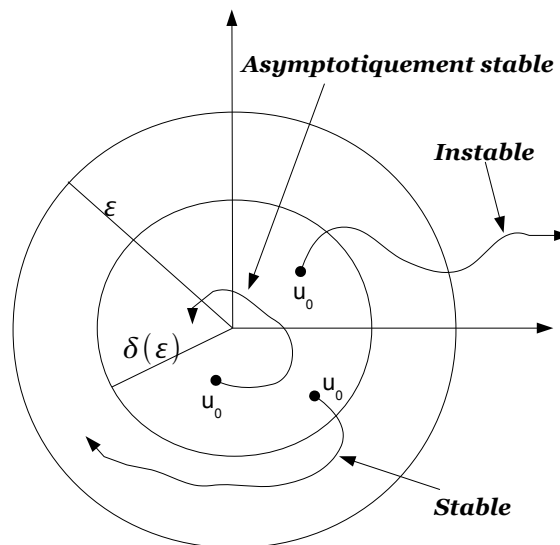


FIGURE 1.3 – Stabilité, stabilité asymptotique et instabilité

Remarque 1.4. L'attractivité n'implique pas la stabilité ni l'inverse. La condition d'attractivité signifie que si l'état initial est dans un certain voisinage de l'origine (l'équilibre), alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant. D'où le contre-exemple suivant. \square

Contre-exemple 1.1. 1. Le système $\frac{du}{dt} = 0$ est stable car tout point au voisinage de 0 reste dans le voisinage de 0, mais 0 n'est pas attractif car la solution ne converge pas vers l'équilibre $u = 0$, elle reste immobile.

2. Nous considérons, pour $(u, v, t) \in (\mathbb{R}^2)^* \times [1, +\infty[$, le système suivant :

$$(\#) \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u}{t} - t^2 u v^2 \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{t} \end{cases}$$

La solution de $(\#)$ est donnée par :

$$\begin{cases} u(t) = \alpha t e^{-\beta^2 t} \\ v(t) = -\frac{\beta}{t} \end{cases}$$

Nous remarquons l'origine $(0, 0)$ de $(\#)$ est attractif mais n'est pas stable. En effet, nous avons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t), v(t)) = 0$. Par contre, nous remarquons que

pour $\varepsilon = e^{-1}$ tel que $\forall \delta > 0, \exists (u_0, v_0) = (\delta^2, \delta)$ tel que $u(1 + \frac{1}{\delta^2}) \geq e^{-1} = \varepsilon$.

□

Nous considérons maintenant l'exemple du pendule simple illustré dans la figure FIG.1.4. Cet exemple est intéressant du fait que de nombreux systèmes physiques

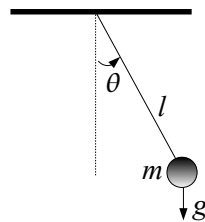


FIGURE 1.4 – Pendule simple

peuvent être modélisés par des équations semblables à celle du pendule. Comme c'est le cas des circuits électriques etc...

Exemple 1.6. L'équation du mouvement du pendule simple est donnée par :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}.$$

Où m, l, θ, k et g désignent respectivement la masse du corps, la longueur du fil, l'angle α à un instant t (avec $\theta(0) = 0$), le coefficient de frottement et la gravité.

En posant $u_1 = \theta$ et $u_2 = \dot{\theta}$, nous réduisons l'équation de seconde ordre en un système de premier ordre, donné par :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = -\frac{g}{l} \sin u_1 - \frac{k}{m} u_2 \end{cases}$$

Nous remarquons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre du problème et pour montrer sa stabilité, il faut calculer sa solution ce qui est difficile. \square

Comme nous venons de le voir dans l'Exemple 1.6, l'utilisation de la définition de stabilité présente certains inconvénients importants comme :

- Le calcul d'une manière explicite de la solution.
- L'application directe de la définition.

D'où l'intérêt de montrer la stabilité sans devoir intégrer les systèmes dynamiques, ce qui va être le but de la prochaine section.

1.3.1 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov, dite aussi 2^{ème} méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non linéaires. En effet, le procédé de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner la dérivée temporelle le long d'une trajectoire.

Physiquement, cela revient à dire que si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système, (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre. En d'autres termes, le système est stable si son énergie diminue et elle est minimum à l'équilibre.

Donnons d'abord la définition suivante :

Définition 1.18. 1. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $V(0) = 0$.

a) On dit que la fonction V définie positive si $V(u) > 0$ pour tout $u \neq 0$.

b) On dit que la fonction V est semi-définie positive si $V(u) \geq 0$ pour tout $x \in B_\rho$ pour un $\rho > 0$.

c) La fonction V est dite définie négative (resp. semi-définie négative) si $-V$ est une fonction définie négative (resp. semi-définie positive).

2. Soit $g : [0, a] \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue.

i) La fonction g est dite \mathcal{K} -fonction (ou bien de classe \mathcal{K}) si elle est strictement croissante et $g(0) = 0$.

ii) Si de plus $a = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty$, alors g est dite \mathcal{K}_∞ -fonction (ou bien de classe \mathcal{K}_∞).

3. On appelle dérivée temporelle le long de la trajectoire, la fonction \dot{V} définie par :

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}(V \circ u)(t) = \langle \nabla V(u), \frac{du}{dt} \rangle = \langle \nabla V(u), f(u) \rangle \quad (1.10)$$

D'où les théorèmes de stabilité de Lyapunov suivants :

Théorème 1.4. (Stabilité)

L'origine du système (\mathcal{P}) est stable s'il existe une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :

1. V est définie positive, et
2. $\dot{V}(t) = \langle \nabla V(u), f(u) \rangle$ est semi-définie négative.

Comme application directe au Théorème 1.4, nous revenons à l'exemple du pendule simple déjà donné dans Exemple 1.6.

Exemple 1.7. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = -\frac{g}{l} \sin u_1 - \frac{k}{m} u_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous allons montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est stable. pour cela, nous considérons la fonction suivante :

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2} m l^2 u_2^2 + m l (1 - \cos(u_1)).$$

La dérivée temporelle de V est donné par :

$$\dot{V}(t) = -k l^2 u_2^2.$$

Il est claire que la fonction $V(u_1, u_2)$ est définie positive et $V(0, 0) = 0$. D'autre part, nous avons

$$\dot{V} \leq 0.$$

Par suite, d'après Théorème 1.4, l'équilibre $(0, 0)$ est stable. □

Théorème 1.5. (Stabilité asymptotique)

L'origine du système (\mathcal{P}) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(u) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :

1. V est définie positive, et
2. $\dot{V}(u) = \langle \nabla V(u), f(u) \rangle$ est définie négative.

Remarquons que les théorèmes 1.4 et 1.5 peuvent être donnés par le théorème suivant :

Théorème 1.6. *S'il existe une fonction V définie positive de $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que, pour $k \geq 0$,*

$$\langle \nabla V(u), f(u) \rangle + kV(u) \leq 0. \quad (1.12)$$

Alors, l'équilibre $u = 0$ est stable et si $k > 0$ il est asymptotiquement stable.

Il est clair que si le système est stable alors il n'est pas nécessairement asymptotiquement stable, ce qui est le cas dans l'Exemple 1.7. L'importance de cet exemple est de montrer qu'il arrive souvent que l'on trouve une fonction de Lyapunov dont la dérivée est seulement semi-définie négative, ce qui ne permet pas de conclure à la stabilité asymptotique en appliquant le Théorème 1.5. Dans les années 60, J.P. La Salle a étudié cette question en détail et a formulé un principe, connue aujourd'hui sous le nom *principe d'invariance de La Salle* qui permet d'analyser la stabilité asymptotique des équilibres dans le cas où la fonction \dot{V} est seulement semi-définie négative.

D'où l'objectif de la section suivante. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter [59], [58].

1.3.2 Principe d'invariance de La Salle

Le but de ce paragraphe est de présenter le principe d'invariance de La Salle. Nous allons donner l'idée du principe et la démarche pour arriver au résultat de stabilité asymptotique. Mais d'abord, nous allons rappeler quelques définitions qui seront bien utiles pour la suite.

Nous noterons par $u(t, u_0)$ la solution du système (\mathcal{P}) partant de $u_0 \in \mathbb{R}^n$. $d_{\mathcal{M}}(s)$ désigne la distance d'un point s de \mathbb{R}^n à un sous-ensemble \mathcal{M} de \mathbb{R}^n , définie par

$$d_{\mathcal{M}}(s) \triangleq \inf_{m \in \mathcal{M}} \|s - m\|.$$

Définition 1.19. *Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on appelle orbite l'ensemble $\mathcal{O}(u_0)$ définie par*

$$\mathcal{O}(u_0) \triangleq \{u(t, u_0), t \geq 0\}.$$

Définition 1.20. *On dit qu'un point z de \mathbb{R}^n est un point limite de $u(t, u_0)$ s'il existe une suite $(\tau_i)_i \in \mathbb{R}^+$ avec $\tau_i \rightarrow +\infty$ telle que $u(\tau_i, u_0) \rightarrow z$.*

L'ensemble des points limites de $u(t, u_0)$ est appelé ensemble limite de $u(t, u_0)$, nous le noterons par \mathcal{L} cet ensemble.

Remarque 1.5. D'après la Définition 1.20, nous remarquons qu'un point d'équilibre asymptotiquement stable est un point limite pour toute solution partant d'un voisinage du point d'équilibre. \square

Définition 1.21. Un sous-ensemble \mathcal{M} de \mathbb{R}^n est dit invariant par rapport au système (\mathcal{P}) si

$$\forall u_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow u(t, u_0) \in \mathcal{M}, \forall t \geq 0.$$

En d'autre terme, cela signifie que pour $u_0 \in \mathcal{M}$ on a $O(u_0) \subset \mathcal{M}$.

Une première propriété fondamentale de \mathcal{L} est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1. Si $O(x_0)$ est borné alors \mathcal{L} est un ensemble non vide, compact et invariant. De plus, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{L}}(u(t, u_0)) = 0. \quad (1.13)$$

Nous introduisons l'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})}$ suivant :

$$\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})} \triangleq \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla V(u), f(u) \rangle = 0\}.$$

D'après tout ce que nous venons de présenter, nous donnons le théorème suivant connu comme théorème d'invariance de La Salle.

Théorème 1.7. (Invariance de La Salle)

Soit Ω un compact invariant quelconque de \mathbb{R}^n . Soit V une fonction de $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que la fonction \dot{V} est semi-définie négative sur Ω . Soit $\mathcal{M} (\subset \mathbb{R}^n)$ le plus grand sous-ensemble invariant dans $\mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{P})} \triangleq \mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})} \cap \Omega$. Alors nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(t, u_0)) = 0. \quad (1.14)$$

L'idée de la preuve du Théorème 1.7 est de montrer que :

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{E}_\Omega, \quad (1.15)$$

afin d'appliquer Lemme 1.1 pour déduire (1.14).

Remarque 1.6. Nous remarquons que le théorème d'invariance de La Salle 1.7 facilite le travail avec des fonctions définies positives. De plus, l'ensemble Ω peut être n'importe quel ensemble compact invariant. De même, ce théorème est donné pour des fonctions qui ne sont pas nécessairement définies positives. \square

Corollaire 1.1. Le point d'équilibre $u = 0$ du système (\mathcal{P}) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction $V(u) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que :

1. $V(u)$ définie positive,
2. $\dot{V}(u)$ semi-définie négative,

3. l'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(u) = 0\} = \{0\}$.

Dans la remarque suivante, nous commentons le resultat donné dans Corollaire 1.1.

Remarque 1.7. Notons que :

1. L'hypothèse 3. du Corollaire 1.1 signifie que l'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})}$ ne contient pas de trajectoire du système (\mathcal{P}) autre que $u(t, u_0) = 0$.
2. Les hypothèses 1. et 2. du Corollaire 1.1, nous donnent, d'après le Théorème 1.4, la stabilité de l'équilibre 0 et non pas la stabilité asymptotique, d'où l'importance de l'hypothèse 3.. En effet, pour prouver la stabilité asymptotique du système, il reste à montrer l'attractivité de la solution $u(t, u_0)$ par le point d'équilibre $u = 0$ c'est à dire nous allons montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, u_0)\| = 0.$$

Or, d'après (1.14) et (1.15), nous déduisons que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})}}(u(t, u_0)) = 0.$$

Comme $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})} = \{0\}$, nous obtenons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{E}_V^{(\mathcal{P})}}(u(t, u_0)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\{0\}}(u(t, u_0)) = 0$$

D'où l'attractivité et par conséquent la stabilité asymptotique.

3. En pratique et dans les exemples, quand nous allons examiner la stabilité asymptotique, nous appliquons le Corollaire 1.1, comme le montre l'exemple suivant.

□

Exemple 1.8. Nous revenons à l'exemple du pendule donné dans Exemple 1.7 où nous avons vu que pour

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}ml^2u_2^2 + ml(1 - \cos(u_1)),$$

nous avons $\dot{V}(u) = -kl^2u_2^2 \leq 0$ (semi-définie négative). Par suite, les hypothèses 1. et 2. de Corollaire 1.1 sont vérifiées et par conséquent, le système (1.11) est stable.

Pour montrer la stabilité asymptotique, il suffit de vérifier donc l'hypothèse 3. de Corollaire 1.1. En effet, comme $\theta(0) = 0$, L'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_V^{(1.11)} &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(u) = 0\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 = 0\} \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Exemple 1.9. Considérons le circuit électrique RLC donné par la FIGURE 1.5. Où R, L et C désignent respectivement la résistance, l'inductance et la capacité. Nous notons par $i(t) = (i_R(t), i_L(t), i_C(t))$ le courant à travers R, L et C à un temps t et par $v(t) = (v_R(t), v_L(t), v_C(t))$ la tension aux bornes de R, L et C à un temps t .

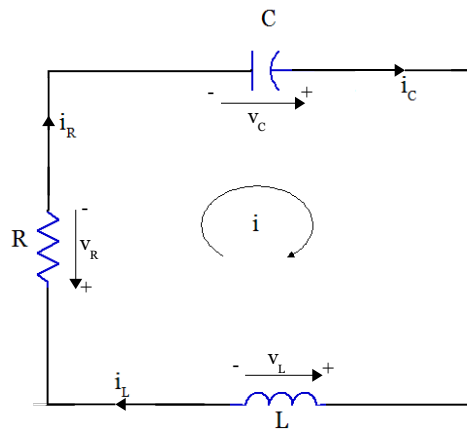


FIGURE 1.5 – Circuit RLC

Nous avons les lois suivantes :

1. Lois de Kirchhoff :
 - $i_R(t) = i_L(t) = -i_C(t)$,
 - $v_R(t) + v_L(t) - v_C(t) = 0$.
2. Loi d'Ohm :
 - $v = g(i), t \geq 0$. Où g est une \mathcal{K}_∞ -fonction.
3. Loi de Faraday : pour $t \geq 0, L > 0, C > 0$, on a

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_L, \\ C \frac{dv_C}{dt} = i_C. \end{cases}$$

D'après les lois données ci-dessus, le circuit RLC sera modélisé par le système suivant :

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_C - g(i_L), \\ C \frac{dv_C}{dt} = -i_L. \end{cases}$$

En supposant $u_1 = i_L$ et $u_2 = v_C$, nous obtenons :

$$\begin{cases} L \frac{du_1}{dt} = u_2 - g(u_1), \\ C \frac{du_2}{dt} = -u_1. \end{cases} \quad (1.16)$$

Comme g est une \mathcal{K}_∞ -fonction, il est clair que le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système (1.16). Nous allons montrer que le point $(0, 0)$ est point d'équilibre asymptotiquement stable, en appliquant Corollaire 1.1. En effet, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}Lu_1^2 + \frac{1}{2}Cu_2^2.$$

Il est évident que la fonction V est une fonction définie positive de classe C^1 . De plus, nous avons $V(0, 0) = 0$ et

$$\dot{V}(u_1, u_2) = Lu_1\dot{u}_1 + Cu_2\dot{u}_2 = -g(u_1)u_1 \leq 0 \quad (\text{semi-définie négative}).$$

Par suite, l'équilibre $(0, 0)$ est un équilibre stable. D'autre part, l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_V^{(1.16)} &= \{(u_1, u_2) \mid \dot{V}(u_1, u_2) = 0\} \\ &= \{(u_1, u_2) \mid -g(u_1)u_1 = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la partie 3. de Corollaire 1.1 assure la stabilité asymptotique de l'équilibre $(0, 0)$. \square

1.4 Conclusion

Ce premier chapitre introductif a été constitué de deux parties. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques outils importants de l'analyse convexe, de l'analyse non convexe, de l'analyse de récession, de l'analyse multivoque ainsi qu'une brève présentation de la théorie des inéquations variationnelles. Le but était de faire le lien entre ces différentes théories qui seront utiles tout au long

de ce travail. Rappelons que pour plus de détails sur cette partie, nous vous renvoyons aux ouvrages suivants [55], [89], [13], [95], [34], [28], [41].

La deuxième partie était consacré à la présentation de la théorie de la stabilité de Lyapunov. Ces résultats de stabilité ont été donnés pour des équations différentielles ordinaires à l'aide des fonctions de Lyapunov. La méthode utilisée est connue sous les noms de " deuxième méthode de Lyapunov " ou bien " méthode directe de Lyapunov ". La théorie d'invariance de LaSalle a été également abordée. Elle constituera une stratégie efficace pour prouver la stabilité asymptotique de l'équilibre d'un système dans le cas où la fonction de Lyapunov admet une dérivée temporelle semi-définie négative. Cette théorie a été motivée par des exemples physiques (pendule simple et circuit électrique RLC).

Dans la suite, les techniques des théories de Lyapunov et d'invariance de LaSalle seront appliquées à d'autres systèmes dynamiques dits "non-régulier" et donnés par des inclusions différentielles. Nous citons ainsi quelques références sur ce sujet qui constitueront une grande partie de ce travail comme [59], [73], [71], [17], [62], [64], [65], [100], [103].

**ÉTUDE DES INÉQUATIONS
VARIATIONNELLES LINÉAIRES
SEMI-COERCIVES**

CHAPITRE 2

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES SEMI-COERCIVES ET ANALYSE DE RÉCESSION

2.1 Introduction et problématique

La théorie des inéquations variationnelles rappelée dans le chapitre 1 est aujourd'hui bien connue. Cette théorie a été introduite dans les années soixante par Hartmann et Stampacchia ([53]) en 1966 puis avec Stampacchia et J.L. Lions ([69]) en 1967, pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) et des problèmes issus de la mécanique.

Aujourd'hui, cette théorie est devenue plus importante et plus attirante. Son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré fructueuse dans de nombreux domaines comme : la mécanique unilatérale, l'économie mathématique, les sciences de l'ingénieur, la mécanique classique etc... Plus récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des problèmes d'équilibre. Nous citons quelques références ([3], [4], [9], [18], [39], [42], [43], [57],...).

Nous nous intéressons aux inéquations variationnelles de la forme :

$$\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Mu + q, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C; \end{array} \right.$$

Avec les hypothèses (\mathcal{H}) suivantes :

1. M est une matrice symétrique semi-définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$;
2. q est un vecteur de \mathbb{R}^n ;

3. $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ bornée inférieurement ;
4. C est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de \mathbb{R}^n
5. $0 \in \text{dom}\varphi \cap C$.

Ce problème fait partie d'un problème plus général de la forme :

$$\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Au - f, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C; \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$
2. $A : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire symétrique borné tel que : $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A) < +\infty$ et A est un opérateur *semi-coercif* i.e.

$$\exists \eta > 0 \mid \langle Au, u \rangle \geq \eta \|Qu\|^2, \forall u \in H,$$

où $Q = I - P_{\ker(A)}$ avec $P_{\ker(A)}$ la projection orthogonale sur $\ker(A)$.

3. $f \in H$;
4. $\varphi \in \Gamma_0(H)$;
5. C est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de \mathbb{R}^n
6. $0 \in \text{dom}\varphi \cap C$.

Des résultats d'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ ont été obtenus dans [69], [26], [67] etc.... quand l'opérateur A est *linéaire* et α -*coercif* c.-à.-d. il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in H,$$

ou bien quand l'opérateur A est *non-linéaire* et *coercif* dans le sens suivant :

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Dans ce travail, nous nous intéressons aux inéquations variationnelles données par $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$, et gouvernées par un opérateur linéaire M semi-coercif. Cette classe des inéquations variationnelles fait partie d'une classe plus générale donnée par le problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ et gouverné par un opérateur A *non-coercif*.

Les premiers théorèmes d'existence de solutions des inéquations variationnelles non coercive (i.e. celles où l'opérateur A est non coercif) sont dus à Fichera (voir [42], [43]), J.L. Lions et Stampacchia [69]. Différentes techniques ont été employées pour résoudre ce problème. Comme la théorie des points critiques, la théorie de Leray-Schauder et la théorie de l'analyse de récession ou bien la régularisation

en perturbant les données (A, f, φ, C) du problème et ramenant le problème non-coercif en un problème coercif. Nous citons par exemple les travaux de [47], [7], [12], [6], [19], [11], [46], [54], [98] etc...

Dans [7], [8] et [9], les auteurs ont considéré la situation dans laquelle l'existence de la solution est stable en perturbant uniformément les données (A, f, φ, C) du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$. En d'autres termes, ces perturbations caractérisent les données (A, f, φ, C) pour lesquelles il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'inéquation variationnelle perturbée $\mathcal{IV}(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ a une solution pour toute donnée $(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ satisfaisant la condition suivante, notées (Ξ) :

1. $A_\varepsilon : H \rightarrow H$ est un opérateur semi-coercif borné tel que :

$$\|A(u) - A_\varepsilon(u)\| < \varepsilon, \quad \forall u \in H;$$

2. $f_\varepsilon \in H$ tel que $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$;
3. $C \subset C_\varepsilon + \mathbb{B}_\varepsilon^H$ et $C_\varepsilon \subset C + \mathbb{B}_\varepsilon^H$, où \mathbb{B}_ε^H désigne la boule de rayon ε dans H ;
4. $\varphi_\varepsilon \in \Gamma_0(H)$ bornée inférieurement telle que :

$$\varphi(u) - \varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(u) \leq \varphi(u) + \varepsilon, \quad \forall u \in H.$$

5. $C_\varepsilon \cap \text{dom}\varphi_\varepsilon \neq \emptyset$.

Notons que la stabilité uniforme décrite plus haut est prise dans le sens d'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$. Il ne s'agit pas de la dépendance continue par rapport aux données du problème comme c'est le cas par exemple de la stabilité au sens d'Hadamard.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales :

Dans la première partie, nous allons présenter les principaux résultats d'existence de solutions d'inéquations variationnelles $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ non-coercives. Nous présentons le cas où l'opérateur A est *pseudo-monotone* ainsi que ces différents cas particuliers comme :

- Cas de l'*optimisation convexe* ;
- Cas où A est un opérateur *monotone* ;

Enfin, nous terminons cette partie en traitant le cas où l'opérateur A est *semi-coercif*. Dans la deuxième partie, nous présentons le résultat principal de ce travail concernant le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$. Des techniques de l'analyse de récession seront utilisées pour établir des conditions nécessaires ou suffisantes pour résoudre ce problème en imposant des conditions de compacité et de compatibilité sur le second membre q . Pour conclure, nous appliquons les résultats obtenus à des exemples en électronique et en mécanique.

2.2 Résultats d'existence

L'objectif de cette section est de présenter quelques résultats d'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$, dans chacun des cas de l'opérateur A cités dans la section 1.1. On peut citer les travaux suivants [4], [6], [7], [8], [9], [10], [3], etc...

2.2.1 Inéquations variationnelles pseudo-monotone

Dans ce paragraphe, nous présentons les principaux résultats d'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ donné par :

$$\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Au - f, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C; \end{array} \right.$$

Où les données sont soumises aux hypothèses (\mathcal{H}_1) suivantes :

1. C est convexe fermé non-vidé d'un espace de Hilbert H tel que $0 \in C$;
2. $f \in H$;
3. $\varphi \in \Gamma_0(H)$ et vérifie $\varphi(0) = 0$;
4. $A : H \rightarrow H$ est un opérateur pseudo-monotone et borné.

Définition 2.1. Un opérateur $A : H \rightarrow H$ est dit pseudo-monotone (au sens de Brezis) si, pour toute suite (u_n) telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0, \quad (2.1)$$

alors,

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Rappelons que " \rightharpoonup " désigne la convergence faible dans H .

La notion de la pseudo-monotonie a été introduite par H. Brezis (voir [26], [29]). Cette classe d'opérateurs couvre une grande classe d'opérateurs.

Remarque 2.1. Si l'opérateur A est borné, la Définition 2.1 est équivalente à : pour toute suite (u_n) telle que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup \xi \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq \langle \xi, u \rangle, \quad (2.2)$$

alors, $\xi = Au$ et $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$. \square

Exemple 2.1. Un opérateur A est dit hémicontinu si pour tous $u, v \in H$, l'application

$$t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle$$

est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Si A est hémicontinu, monotone et borné, alors A est pseudo-monotone. \square

Preuve de l'exemple. Comme l'opérateur A est borné, nous allons utiliser la Remarque 2.1 pour montrer la pseudo-monotonie de A . En effet, soit (u_n) une suite qui vérifie (2.2). Comme l'opérateur A est monotone, on a

$$\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \geq 0,$$

il vient en développant

$$\langle Au_n, u_n \rangle \geq \langle Au_n, u \rangle + \langle Au, u_n - u \rangle,$$

où le membre de droite converge vers $\langle \xi, u \rangle$. En passant à la limite inférieure et d'après (2.2), on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, u_n \rangle \geq \langle \xi, u \rangle \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, u_n \rangle.$$

Par suite, $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle \xi, u \rangle$. Reste à montrer que $\xi = Au$.

En effet, pour $w \in H$, on a $\langle Au_n - Aw, u_n - w \rangle \geq 0$. En développant, on obtient

$$\langle Au_n, u_n - w \rangle \geq \langle Aw, u_n - w \rangle,$$

puis en passant à la limite, on a

$$\langle \xi, u - w \rangle \geq \langle Aw, u - w \rangle.$$

Pour $w = u + tv$ avec $t > 0$, on obtient

$$t \langle A(u + tv), v \rangle \leq t \langle \xi, v \rangle.$$

Divisant par t l'inégalité précédente on en déduit que

$$\langle A(u + tv), v \rangle \leq \langle \xi, v \rangle.$$

De plus, en faisant tendre t vers 0 et en utilisant l'hémicontinuité de l'opérateur A , on aura

$$\langle Au, v \rangle \leq \langle \xi, v \rangle$$

et ceci $\forall v \in H$, donc $Au = \xi$. D'où le résultat. ■

Remarque 2.2. Notons que par définition du sous-différentiel, le problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ f \in Au + \partial(\varphi + \chi_C)(u), \end{cases}$$

où χ_C désigne la fonction indicatrice du convexe C .

□

Dans [29], l'auteur donne un résultat d'existence de la solution du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$. D'autre part, dans [4], [6], [7], [8], [9], les auteurs ont étudié rigoureusement ce problème. Ils ont donné des résultats d'existence de la solution en caractérisant l'ensemble des directions asymptotiques suivantes :

$$R(A, f, \varphi, C) \triangleq \{w \in C_\infty \mid \exists u_n \in C, \|u_n\| \rightarrow +\infty, \\ w_n \triangleq \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow w \text{ et } \varphi(u_n) + \langle Au_n - f, u_n \rangle \leq 0\}.$$

(C_∞ désigne le cône de récession de C). D'où le théorème d'existence suivant :

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_1) soient vérifiées. Si $R(A, f, \varphi, C) = \emptyset$ alors $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ admet au moins une solution.*

Dans certaines applications, il est difficile de montrer que l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$ est vide pour prouver l'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$. Pour résoudre ce problème, S. Adly ([4]) a montré que pour prouver l'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :

Condition de compacité : l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$ est *asymptotiquement compact* c'est à dire si pour chaque élément $w \in R(A, f, \varphi, C)$, les suites $w_n \triangleq \frac{u_n}{\|u_n\|}$ convergent fortement vers w .

Condition de compatibilité : il existe $W \subseteq H \setminus \{0\}$ tel que $R(A, f, \varphi, C) \subset W$ et

$$r_A(w) + \varphi_\infty(w) > \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in W. \quad (2.3)$$

r_A désigne la fonction de récession associée à A introduite par Brézis et Nirenberg et définie par :

$$r_A(w) \triangleq \inf \{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle A(t_n v_n), v_n \rangle \mid t_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow w \}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2. ([4]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_1) sont satisfaites. De plus, si on a :*

1. *l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$ est asymptotiquement compact ;*
2. *il existe un sous ensemble non vide W de $H \setminus \{0\}$ tels que $R(A, f, \varphi, C) \subset W$ et la condition (2.3) soit satisfaites.*

Alors $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ admet au moins une solution.

Exemple 2.2. Considérons l'inéquation variationnelle linéaire en dimension finie suivante :

$$\mathcal{IV}(M, q, 0, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Mu + q, v - u \rangle \geq 0, \forall v \in C. \end{array} \right.$$

Où C est un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , q est un vecteur de \mathbb{R}^n et M est une matrice symétrique *semi-définie positive* i.e.

$$\langle Mu, u \rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Si de plus, nous avons que :

$$\langle q, v \rangle < 0, \forall v \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}, \quad (2.4)$$

alors le problème $\mathcal{IV}(M, q, 0, C)$ admet au moins une solution. ($\ker M$ désigne le noyau de M définie par : $\ker M \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle Mu, u \rangle = 0\}$).

Pour prouver ce résultat, il suffit de vérifier les conditions du Théorème 2.2. En effet, Il est clair que l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$ qui est égal ici à $R(M, q, 0, C)$ est asymptotiquement compact car nous travaillons en dimension finie où la *topologie faible* est équivalente à la *topologie forte* (voir [28]), d'où la condition de compacité. D'autre part, il nous reste à vérifier la condition 2. de compatibilité. Pour cela, si W est égal à $\ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}$, nous allons montrer que :

- (i) $R(M, q, 0, C) \subset \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}$;
- (ii) l'équation (2.3) est satisfaite.

Preuve de (i) :

Soit $w \in R(M, q, 0, C)$, donc il existe une suite $u_n \in C$ telle que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, une suite $w_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow w \in C_\infty \setminus \{0\}$ et

$$\langle Mu_n - q, u_n \rangle \leq 0. \quad (2.5)$$

En divisant (2.5) par $\|u_n\|$, nous obtenons que

$$\left\langle M \frac{u_n}{\|u_n\|} - \frac{q}{\|u_n\|}, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\rangle = \langle Mw_n, w_n \rangle - \left\langle \frac{q}{\|u_n\|}, w_n \right\rangle \leq 0.$$

Par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons que

$$\langle Mw, w \rangle \leq 0.$$

Or, M est une matrice semi-définie positive, nous déduisons que

$$\langle Mw, w \rangle = 0,$$

par suite, $w \in \ker M$. D'où (i).

Preuve de (ii) :

Il suffit de montrer que :

$$r_M(w) > \langle q, w \rangle, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Puisque M est linéaire et semi-définie positive, il en résulte que $r_M(w) \geq 0$. Il est évident que l'inégalité (2.6) est vérifiée grâce à (2.4). \square

2.2.1.1 Problème d'optimisation convexe

Comme nous l'avons déjà mentionné au Chapitre 1, trouver une solution d'un problème d'optimisation convexe est équivalent à trouver une solution d'une inéquation variationnelle. D'où l'intérêt d'évoquer ce cas important qui est un cas particulier du cas donné dans la section 1.2.1. En d'autres termes, nous considérons pour $\varphi \in \Gamma_0(H)$, le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi(u) \\ \text{tel que} \\ u \in H, \end{cases}$$

Ce problème équivaut au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ 0 \in \partial\varphi(u). \end{cases}$$

Par définition du sous-différentiel, ce problème n'est rien d'autre qu'un cas particulier du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ avec $A \equiv 0, f = 0$ et $C = H$. Il sera noté par $\mathcal{IV}(0, 0, \varphi, H)$. De plus, nous obtenons le résultat d'existence suivant :

Corollaire 2.1. ([4]) *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $R(0, 0, \varphi, H)$ est asymptotiquement compacte ;
- $\ker \varphi_\infty$ est un sous espace. De plus, il existe W non vide de H tel que $R(0, 0, \varphi, H) \subset W$ avec

$$\varphi_\infty(w) \geq 0, \quad \forall w \in W.$$

Alors, le problème $\mathcal{IV}(0, 0, \varphi, H)$ admet au moins une solution.

2.2.1.2 Cas d'un opérateur monotone

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats d'existence de solutions du problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ où l'opérateur A est un opérateur monotone. Ce cas est un cas particulier des inéquations variationnelles données dans la section 1.2.1. Notons que la définition d'un opérateur monotone est donnée par la Définition 1.7. D'où le résultat d'existence suivant :

Corollaire 2.2. *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_1) sont vérifiées et l'opérateur A est monotone. Si nous avons les deux conditions de compacité et de compatibilité respectives suivantes :*

- $R(A, f, \varphi, C)$ est asymptotiquement compact ;
- il existe W non vide de $H \setminus \{0\}$ tel que $R(A, f, \varphi, C) \subset W$ et

$$\chi_{A(C)}^*(w) + \varphi_\infty(w) > \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in W.$$

Alors, le problème $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$ admet au moins une solution.

Où $\chi_{A(C)}^*$ désigne la conjuguée de Fenchel de la fonction indicatrice de l'ensemble $A(C)$ (image de C par A), notée $\chi_{A(C)}$.

Nous terminons cette section en donnant la remarque importante suivante :

Remarque 2.3. Dans [4], l'auteur a étudié le cas d'un opérateur *maximal monotone* pour lequel il considère les inéquations variationnelles de la forme :

$$f \in Tu + Au, \quad u \in C. \tag{2.7}$$

Avec,

- $T : C \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone tel que $(0, 0) \in \text{Gr}(T)$.
- $A : C \rightarrow H$ est monotone hémicontinue et borné sur C .

Pour montrer une condition suffisante d'existence d'une solution au problème (2.7), l'auteur a employé la notion d'opérateur asymptote T_∞ associé à T introduite dans [11] et [66]. D'où le résultat d'existence du problème (2.7), sous les deux conditions suivantes de compacité et de compatibilité :

- $R(A, f, 0, C)$ est asymptotiquement compact ;
- il existe W non vide de $H \setminus \{0\}$ tel que $R(A, f, 0, C) \subset W$ et

$$\chi_{R(T+A)}^*(w) > \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in W.$$

□

En résumé, l'existence d'une solution au problème général $\mathcal{IV}(A, f, \varphi, C)$, est garantie si :

- d'un part, une certaine condition de *compacité* est vérifiée pour l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$;
- d'autre part, une condition de *compatibilité* est vérifiée pour un ensemble non vide de H contenant l'ensemble $R(A, f, \varphi, C)$.

2.3 Inéquations variationnelles semi-coercives

Dans cette section, nous allons étudier les inéquations variationnelles linéaires semi-coercives dans \mathbb{R}^n , représentées par le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ déjà donnés

dans la section 2.1. En effet, nous donnons un résultat d'existence de solution et un résultat de stabilité de l'ensemble de solutions du problème $I\mathcal{V}(M, q, \varphi, C)$, en perturbant les données au sens de (Ξ) . Mais auparavant, il nous a paru important de rappeler quelques propriétés du cas où l'opérateur A est *pseudo-monotone semi-coercif* dans les espaces de Hilbert. (voir [3], [6], [7], [9], [10], [46], etc...)

Définition 2.2. ([10]) Un opérateur $A : H \rightarrow H$ est dit semi-coercif s'il existe $\lambda > 0$ et un sous-espace fermé \mathcal{U} de H tel que :

$$(\clubsuit) \quad \langle Av - Au, v - u \rangle \geq \lambda (d_{\mathcal{U}}(v - u))^2, \quad \forall u, v \in H$$

$$(\spadesuit) \quad A(u + v) = A(v), \quad \forall v \in H, \forall u \in \mathcal{U} \text{ et } A(H) \subset \mathcal{U}^\perp.$$

Dans la suite, nous noterons par $\text{Sol}(A, f, \varphi, C)$ l'ensemble des solutions du problème $I\mathcal{V}(A, f, \varphi, C)$, donné par

$$\text{Sol}(A, f, \varphi, C) \triangleq \{u \in C \mid \langle Au - f, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \quad \forall v \in C\}.$$

Définition 2.3. L'ensemble $\text{Sol}(A, f, \varphi, C)$ est dit stable, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Sol}(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon) \neq \emptyset$, pour toute donnée $(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ satisfaisant la condition (Ξ) .

Au problème $I\mathcal{V}(A, f, \varphi, C)$, nous associons la fonction $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}^\bullet$ définie par :

$$\psi(u) \triangleq \lambda (d_{\mathcal{U}}(u))^2 + \varphi(u) + \chi_C(u), \quad \forall u \in H. \quad (2.8)$$

De plus, nous lui associons l'ensemble *résolvant* défini par :

$$\mathcal{R}(A, \varphi, C) \triangleq \{f \in H \mid \text{Sol}(A, f, \varphi, C) \neq \emptyset\}.$$

Nous considérons d'abord le cas du problème $I\mathcal{V}(A, f_\varepsilon, \varphi, C)$. Remarquons que, si l'ensemble $\text{Sol}(A, f, \varphi, C)$ est stable au sens de la Définition 2.3 alors l'ensemble $\text{Int}\mathcal{R}(A, \varphi, C)$ (intérieur topologique de $\mathcal{R}(A, \varphi, C)$) est non vide. D'où l'intérêt de caractériser l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{R}(A, \varphi, C)$.

Remarque 2.4. D'après la Remarque 2.2, si u est une solution du problème $I\mathcal{V}(A, f, \varphi, C)$ alors,

$$f \in Au + \partial(\varphi + \chi_C)(u).$$

Par suite,

$$f \in Au + \partial(\varphi + \chi_C)(u) \subset \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} (Au + \partial(\varphi + \chi_C)(u)) \subset R(A) + R(\partial(\varphi + \chi_C)).$$

Et comme,

$$R(\partial\varphi) = D(\partial\varphi^*) \subset \text{dom}\varphi^*$$

On obtient que

$$f \in \overline{R(A)} + \text{dom}(\varphi + \chi_C)^*. \quad (2.9)$$

□

Avant de donner un résultat de caractérisation de l'ensemble $\text{Int}\mathcal{R}(A, \varphi, C)$, nous remarquons que le domaine de la conjuguée de Fenchel associée à ψ , et le cône barrière de l'épigraphe de la fonction ψ , noté par $\text{epi}\psi$, vérifient la relation suivante :

$$g \in \text{Int}(\text{dom}\psi^*) \iff (g, -1) \in \mathcal{B}(\text{epi}\psi).$$

Par suite,

$$\text{dom}\psi^* \times \{-1\} = \mathcal{B}(\text{epi}\psi) \cap (H \times \{-1\}). \quad (2.10)$$

Proposition 2.1. ([10]) *Nous avons la propriété suivante :*

$$\text{Int}\mathcal{R}(A, \varphi, C) = \text{Int}(\text{dom}\psi^*)$$

De plus, nous avons que

$$f \in \text{Int}(\text{dom}\psi^*) \iff \text{la fonction } u \mapsto \psi(u) - \langle f, u \rangle \text{ est coercive.}$$

Dans ce qui suit, nous allons caractériser les données pour lesquelles $\text{Int}\mathcal{R}(A, \varphi, C)$ est non vide. Grâce à la Proposition 2.1 et à (2.10), cela revient à caractériser les ensembles convexes et fermés dont l'intérieur du cône barrière est non vide.

Définition 2.4. ([8]) *Un ensemble $C \subset H$ est dit bien positionné si et seulement s'il existe $u_0 \in H$ et $g \in H$ tel que :*

$$\langle g, u - u_0 \rangle \geq \|u - u_0\|, \quad \forall u \in H.$$

Proposition 2.2. ([10]) *Si C est un ensemble convexe fermé non vide de H . Alors, C est bien positionné si et seulement si $\text{Int}\mathcal{B}(C) \neq \emptyset$. Où*

$$\text{Int}\mathcal{B}(C) = \text{Int}(C_\infty)^\circ = \{f \in H \mid \langle f, u \rangle < 0, \quad \forall u \in C_\infty\}.$$

Nous en déduisons le résultat de stabilité suivant :

Proposition 2.3. ([10]) *Pour tout $f_\varepsilon \in f + \mathbb{B}_\varepsilon^H$, nous avons : $\text{Sol}(A, f_\varepsilon, \varphi, C) \neq \emptyset$ si et seulement si, nous avons*

1. $\text{epi}\psi$ est bien positionné ;
2. $f \in \text{Int}(\text{dom}\psi^*) = \{g \in H \mid \langle g, u \rangle < \varphi_\infty(u), \quad \forall u \in (\mathcal{U} \cap C_\infty) \setminus \{0\}\}.$

Remarque 2.5. Si l'espace H est de dimension finie i.e. $\dim_{\mathbb{R}}H < +\infty$, alors un ensemble $C \subset H$ est bien positionné si et seulement si $C_\infty \cap (-C_\infty) = \{0\}$ c'est à dire que C ne contient pas de droite. \square

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit $(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ les données perturbées dans le sens des hypothèses (Ξ) . Alors, $\text{Sol}(A_\varepsilon, f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon) \neq \emptyset$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\text{epi}\psi$ est bien positionné ;
2. $\langle f, w \rangle < \varphi_\infty(w), \quad \forall w \in \mathcal{U} \cap C_\infty \setminus \{0\}.$

2.3.1 Inéquations variationnelles linéaires semi-coercives

Dans ce paragraphe, nous présentons les principaux résultats de notre étude du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$. Nous donnons des résultats de caractérisation et d'existence de solutions. De ces résultats d'existence, nous en déduisons un résultat de stabilité que nous appliquerons ultérieurement à des problèmes en mécanique et en électronique. Nous rappelons que le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est donné par :

$$\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C \text{ tel que} \\ \langle Mu + q, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C; \end{array} \right.$$

Avec les hypothèses (\mathcal{H}) suivantes :

1. M est une matrice symétrique semi-définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$;
2. q est un vecteur de \mathbb{R}^n ;
3. $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ inférieurement bornée ;
4. C est un sous-ensemble convexe fermé non-vidé de \mathbb{R}^n
5. $0 \in \text{dom}\varphi \cap C$.

Remarquons qu'un opérateur linéaire borné symétrique semi-coercif (dans le sens de la Définition 2.2) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que $\dim_{\mathbb{R}} \ker A < +\infty$, peut être défini de la façon suivante :

$$\exists \eta > 0 \mid \langle Au, u \rangle \geq \eta \|Qu\|^2, \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

où $Q = I - P_{\ker A}$ et $P_{\ker(A)}$ est la projection orthogonal de \mathbb{R}^n sur $\ker A$. En effet, il suffit de prendre \mathcal{U} de la Définition 2.2 est égale à $\ker A$. De plus, par définition de Q , nous remarquons que :

$$\|Qu\| = d_{\ker M}(u).$$

Ce qui est le cas dans le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$.

2.3.1.1 Résultats de caractérisation et d'existence

Dans toute la suite, nous noterons par $\text{Sol}(M, q, \varphi, C)$ l'ensemble des solutions du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$, défini par :

$$\text{Sol}(M, q, \varphi, C) \triangleq \{u \in C \mid \langle Mu + q, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \forall v \in C\}.$$

Comme nous l'avons déjà présenté dans la section 1.3, nous allons donc caractériser l'intérieur de l'ensemble résolvant défini par :

$$\mathcal{R}(M, \varphi, C) \triangleq \{-q \in \mathbb{R}^n \mid \text{Sol}(M, q, \varphi, C) \neq \emptyset\}.$$

Pour celà, nous associons au problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ la fonction suivante, définie par :

$$\psi(u) \triangleq \frac{1}{2} \|Qu\|^2 + \varphi(u) + \chi_C(u), \quad (2.11)$$

Comme

$$\|Qu\| = d_{\ker M}(u),$$

la fonction ψ sera écrite sous la forme :

$$\psi(u) \triangleq \frac{1}{2} (d_{\ker M}(u))^2 + \varphi(u) + \chi_C(u). \quad (2.12)$$

D'où le lemme suivant :

Lemme 2.1. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont satisfaites. Alors, nous avons*

$$\text{dom}\psi^* = \text{R}(M) + \text{dom}(\varphi + \chi_C)^*.$$

Preuve. D'après (2.12), nous pouvons écrire la fonction $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1 = \frac{1}{2} (d_{\ker M}(\cdot))^2$ (qui est convexe et continue) et $\varphi_2 = (\varphi + \chi_C) \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. D'après (1.6)(voir Chapitre 1 1.6), la conjuguée de Fenchel associée à ψ est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi^* &= (\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* \square \varphi_2^* \\ &= \left(\frac{1}{2} (d_{\ker M}(\cdot))^2 \right)^* \square (\varphi + \chi_C)^*. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\text{dom}\psi^* = \text{dom}\left(\frac{1}{2} (d_{\ker M}(\cdot))^2\right)^* + \text{dom}(\varphi + \chi_C)^*.$$

Or, on a (voir [89]) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \|\cdot\|^2 \square \chi_{\ker(M)}\right)(u) &= \inf_v \left\{ \frac{1}{2} \|u - v\|^2 + \chi_{\ker(M)}(v) \right\} \\ &= \inf_{v \in \ker(M)} \left\{ \frac{1}{2} \|u - v\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{1}{2} (d_{\ker M}(\cdot))^2 = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2 \square \chi_{\ker(M)}.$$

D'après (1.6)(voir Chapitre 1 (1.6)), nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2} (d_{\ker M}(\cdot))^2\right)^* = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2 + \chi_{(\ker M)^\perp}.$$

Par suite,

$$\text{dom}\left((d_{\ker M}(\cdot))^2\right)^* = (\ker M)^\perp.$$

Par conséquent,

$$\text{dom } \psi^* = \mathcal{R}(M) + \text{dom}(\varphi + \chi_C)^*. \quad (2.13)$$

D'où le résultat. ■

D'après la Remarque 2.4 et le Lemme 2.1, nous déduisons que si u est une solution du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ alors

$$-q \in \mathcal{R}(M) + \text{Dom}(\varphi + \chi_C)^*. \quad (2.14)$$

Par conséquent, nous avons que

$$\mathcal{R}(M, \varphi, C) \subset \overline{\text{dom}(\psi^*)}. \quad (2.15)$$

Nous obtenons ainsi la condition nécessaire d'existence suivante :

Théorème 2.4. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont satisfaites. De plus, si le problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ a au moins une solution alors le second membre $q \in \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de compatibilité suivante :*

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) \geq 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty. \quad (2.16)$$

Preuve. Remarquons que d'après (i) de la Proposition 1.2, nous avons

$$\overline{\text{dom } \psi^*} = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g, w \rangle \leq \psi_\infty(w), \quad \forall w \in \mathbb{R}^n\},$$

où la fonction ψ_∞ associée à ψ est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_\infty(w) &= \left(\frac{1}{2} (d_{\ker M}(w))^2 + \varphi(w) + \chi_C(w) \right)_\infty \\ &= \left(\frac{1}{2} (d_{\ker M}(w))^2 \right)_\infty + \varphi_\infty(w) + (\chi_C(w))_\infty \\ &= \chi_{\ker M}(w) + \varphi_\infty(w) + \chi_{C_\infty}(w) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Or, si l'ensemble $\text{Sol}(M, q, \varphi, C)$ est non vide alors $-q \in \mathcal{R}(M, \varphi, C)$. Par suite, d'après (2.15), nous obtenons

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) \geq 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty.$$

Doù le résultat. ■

Avant de caractériser l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{R}(M, \varphi, C)$, nous donnons la proposition suivante, dont nous aurons besoin ultérieurement.

Proposition 2.4. *Soit C un ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n . Alors nous avons l'équivalence suivant :*

$$\text{Int } \mathcal{B}(C) \neq \emptyset \iff C_\infty \cap (-C_\infty) = \{0\}, \quad (2.18)$$

où $\mathcal{B}(C)$ est le cône barrière de C .

Preuve. \Rightarrow) Comme $\mathcal{B}(C) = \text{dom}(\chi_C)^*$, nous avons

$$\text{Int } \mathcal{B}(C) \neq \emptyset \iff \text{Int } \text{dom}(\chi_C)^* \neq \emptyset.$$

D'après la Proposition 1.2 (ii), appliquée à $\psi = \chi_C$, nous obtenons que

$$\text{Int } \text{dom } \chi_C^* = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g, w \rangle < \chi_{C_\infty}(w), \forall w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0\}.$$

Par suite

$$\text{Int } \mathcal{B}(C) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g, w \rangle < 0, \forall w \in C_\infty, w \neq 0\}.$$

Donc

$$\text{Int } \mathcal{B}(C) = \text{Int } (C_\infty)^\circ.$$

Par conséquent, si $\text{Int } \mathcal{B}(C)$ est non vide, il existe alors $g \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle g, w \rangle < 0, \forall w \in C_\infty, w \neq 0,$$

ce qui implique que $C_\infty \cap (-C_\infty) = \{0\}$.

\Leftarrow) supposons que $C_\infty \cap (-C_\infty) = \{0\}$. Nous allons raisonner par l'absurde, en effet, supposons que $\text{Int } (C_\infty)^\circ$ est vide. Comme $(C_\infty)^\circ$ est un cône, alors il existe un sous-espace linéaire E de \mathbb{R}^n avec $0 \leq \dim_{\mathbb{R}}(E) \leq n - 1$ tel que : $(C_\infty)^\circ \subset E$ (voir [55]). Donc, $E^\perp \subset (C_\infty)^{\circ\circ} = C_\infty$, où E^\perp est l'orthogonal de E . Ce qui contredit l'hypothèse $C_\infty \cap (-C_\infty) = \{0\}$ (comme $\dim_{\mathbb{R}} E^\perp \geq 1$ et $E^\perp \subset C_\infty$). Par suite, $\text{Int } (C_\infty)^\circ \neq \emptyset$. Par conséquent, $\text{Int } \mathcal{B}(C) \neq \emptyset$, d'où le résultat. \blacksquare

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{R}(M, \varphi, C)$ en fonction de la condition de compatibilité.

Théorème 2.5. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont vérifiées. Alors nous avons*

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) = \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\} \right\}.$$

Preuve. \subset) D'après la Remarque 2.2 et le Lemme 2.1 nous avons

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \subset \text{Int } \text{dom } \psi^*.$$

De plus, nous avons d'après (ii) de la Proposition 1.2 que

$$\text{Int } \text{dom}(\psi^*) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g, w \rangle < \psi_\infty(w), \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

D'après (2.17), nous aurons

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \subset \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\} \right\}.$$

▷) Soit $q \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}. \quad (2.19)$$

Nous allons montrer que $-q \in \mathcal{R}(M, \varphi, C)$. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a le problème $\mathcal{IV}(M + \varepsilon_n I, \varphi, q, C)$ admet une solution et cette dernière est unique. En effet, si on suppose u et u' deux solutions du problème $\mathcal{IV}(M + \varepsilon_n I, \varphi, q, C)$. Alors, on a

$$\langle (M + \varepsilon_n I)u + q, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in C$$

et

$$\langle (M + \varepsilon_n I)u' + q, w - u' \rangle + \varphi(w) - \varphi(u') \geq 0 \quad \forall w \in C.$$

En remplaçant v et w par u' et u respectivement dans les inégalités précédentes puis en les additionnant, on obtient

$$\langle (M + \varepsilon_n I)(u - u'), u' - u \rangle \geq 0.$$

Par suite,

$$\langle (M + \varepsilon_n I)(u' - u), u' - u \rangle \leq 0.$$

Comme la matrice $(M + \varepsilon_n I)$ est définie positive, on obtient que

$$\langle (M + \varepsilon_n I)(u' - u), u' - u \rangle = 0.$$

Ce qui entraîne que $(u' - u) \in \ker(M + \varepsilon_n I)$ et comme $(M + \varepsilon_n I)$ est inversible on en déduit que $u = u'$.

Soit $u_n \in C$, l'unique solution du problème $\mathcal{IV}(M + \varepsilon_n I, \varphi, q, C)$. Nous devons montrer que (u_n) est bornée. Supposons le contraire : il existe alors une sous-suite, notée encore (u_n) telle que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Posons alors $w_n \triangleq \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous avons que $w_n \rightarrow w \neq 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il est évident que $w \in C_\infty$. Nous avons

$$\langle Mu_n + q, v - u_n \rangle + \varepsilon_n \langle u_n, v - u_n \rangle + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq 0, \quad \forall v \in C. \quad (2.20)$$

En particulier pour $v = 0$, (2.20) conduit à

$$\langle Mu_n + q, u_n \rangle + \varepsilon_n \|u_n\|^2 + \varphi(u_n) - \varphi(0) \leq 0. \quad (2.21)$$

En divisant (2.21) par $\|u_n\|^2$, on obtient

$$\left\langle \frac{Mu_n}{\|u_n\|} + \frac{q}{\|u_n\|}, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\rangle + \varepsilon_n + \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} - \frac{\varphi(0)}{\|u_n\|^2} \leq 0. \quad (2.22)$$

Or, on a par hypothèse que la fonction φ est bornée inférieurement par suite, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\varphi(u) \geq m \quad \forall u.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq \frac{m}{\|u_n\|^2},$$

ce qui donne, lorsque $n \rightarrow +\infty$, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{\|u_n\|^2} = 0.$$

Maintenant, en passant à la limite dans (2.22) lorsque $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{Mu_n}{\|u_n\|} + \frac{q}{\|u_n\|}, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\rangle + \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} \leq 0.$$

Ce qui entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{Mu_n}{\|u_n\|} + \frac{q}{\|u_n\|}, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\rangle \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} \leq 0.$$

D'où $\langle Mw, w \rangle \leq 0$. Or M est une matrice symétrique et semi-définie positive (i.e. $\langle Mw, w \rangle \geq 0$), par suite, nous avons que $w \in \ker M$ et par conséquent $w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}$.

D'autre part, en divisant (2.21) par $t_n = \|u_n\|$ et en utilisant le fait que $\langle Mw, w \rangle \geq 0$, nous obtenons

$$\langle q, w_n \rangle + \frac{\varphi(t_n w_n)}{t_n} - \frac{\varphi(0)}{t_n} \leq 0.$$

Par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) \leq 0,$$

d'où la contradiction avec la condition (2.19). Donc la suite (u_n) est bornée et il existe une sous-suite, notée encore (u_n) telle que $u_n \rightarrow u$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (2.11), on obtient que u est une solution de $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$. Par suite, $-q \in \mathcal{R}(M, \varphi, C)$. Donc,

$$\text{Int dom } \psi^* \subset \mathcal{R}(M, \varphi, C),$$

d'où

$$\text{Int dom } \psi^* \subset \text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C).$$

Par conséquent,

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) = \text{Int dom } (\psi^*) = \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\} \right\},$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.5. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont satisfaites. Nous avons l'équivalence suivante :*

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff -(\ker M \cap C_\infty \cap \ker \varphi_\infty) \bigcap (\ker M \cap C_\infty \cap \ker \varphi_\infty) = \{0\},$$

i.e. le cône $(\ker M \cap C_\infty \cap \ker \varphi_\infty)$ est saillant.

Preuve. Nous avons

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff \text{Int } \text{dom}(\psi^*) \neq \emptyset. \quad (2.23)$$

D'autre part, nous avons

$$\left(\text{dom}(\psi^*) \right) \times \{-1\} = \mathcal{B}(\text{epi } \psi) \cap \left(\mathbb{R}^n \times \{-1\} \right), \quad (2.24)$$

où $\mathcal{B}(\text{epi } \psi)$ est le cône barrière de l'ensemble $\text{epi } \psi$.

En effet, soit $p \in \text{dom } \psi^*$ donné. Il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle p, u \rangle - \psi(u) \leq \kappa, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui est équivalent à

$$\left\langle (p, -1), (u, \psi(u)) \right\rangle_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \leq \kappa, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Donc

$$\left\langle (p, -1), (u, \lambda) \right\rangle_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \leq \kappa, \quad \forall (u, \lambda) \in \text{epi}(\psi).$$

Par suite

$$(p, -1) \in \mathcal{B}(\text{epi } \psi).$$

Soit maintenant $(p, -1) \in \mathcal{B}(\text{epi } \psi) \cap \left(\mathbb{R}^n \times \{-1\} \right)$. Alors il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\langle (p, -1), (u, \lambda) \right\rangle_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \leq \kappa, \quad \forall (u, \lambda) \in \text{epi}(\psi).$$

En particulier pour $(u, \lambda) = (u, \psi(u))$, nous avons

$$\langle p, u \rangle - \psi(u) \leq \kappa, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Par conséquent

$$(p, -1) \in \left(\text{dom}(\psi^*) \right) \times \{-1\}.$$

En utilisant (2.23) et (2.24), on obtient l'équivalence suivante

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff \text{Int } \mathcal{B}(\text{epi } \psi) \neq \emptyset.$$

De plus, en appliquant la Proposition 2.4 à $\text{epi } \psi$, il vient :

$$\text{Int } \mathcal{B}(\text{epi } \psi) \neq \emptyset \iff (\text{epi } \psi)_\infty \cap (-\text{epi } \psi)_\infty = \{0\}.$$

Or puisque, $(\text{epi } \psi)_\infty = \text{epi } \psi_\infty$ on a :

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff (\text{epi } \psi_\infty) \cap (-\text{epi } \psi_\infty) = \{0\}.$$

Par hypothèse la fonction φ est bornée donc $\varphi_\infty \geq 0$. Ce qui implique donc ψ l'est également. Par suite, $\psi_\infty \geq 0$ et nous remarquons que :

$$(\text{epi } \psi_\infty) \cap (-\text{epi } \psi_\infty) = (\ker \psi_\infty \times \{0\}) \cap (-(\ker \psi_\infty) \times \{0\}).$$

Donc,

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff (\ker \psi_\infty \times \{0\}) \cap (-(\ker \psi_\infty) \times \{0\}) = \{0\}.$$

Par conséquent

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff (\ker \psi_\infty) \cap (-\ker \psi_\infty) = \{0\}.$$

En utilisant (2.17), nous remarquons que

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset \iff -(\ker M \cap C_\infty \cap \ker \varphi_\infty) \cap (\ker M \cap C_\infty \cap \ker \varphi_\infty) = \{0\},$$

d'où le résultat. ■

2.3.1.2 Résultat de stabilité

Après avoir donné des résultats de caractérisation de l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{R}(M, \varphi, C)$, Nous allons étudier la stabilité du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ en perturbant les données (M, q, φ, C) dans le sens des hypothèses (Ξ) . D'où la définition de la stabilité suivante :

Définition 2.5. *Nous dirons que l'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute matrice M_ε symétrique et semi-définie positive, pour tout vecteur $q_\varepsilon \in q + \varepsilon \mathbb{B}_n$, pour toute fonction bornée φ_ε de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, et pour tout ensemble convexe fermé non-vide C_ε qui satisfont les deux conditions suivantes :*

- (c₁) $0 \in \text{dom } \varphi_\varepsilon \cap C_\varepsilon$;
- (c₂) $\ker M \cap \ker \varphi_\infty \cap C_\infty = \ker M_\varepsilon \cap \ker(\varphi_\varepsilon)_\infty \cap (C_\varepsilon)_\infty$.

Le problème perturbé $\mathcal{IV}(M_\varepsilon, q_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ admet au moins une solution.

Remarque 2.6. Remarquons que les conditions (c_1) et (c_2) sont automatiquement vérifiées lorsque :

- M_ε vérifie $\ker M = \ker M_\varepsilon$;
- φ_ε vérifie $\varphi_\infty = (\varphi_\varepsilon)_\infty$;
- C_ε vérifie $C_\infty = (C_\varepsilon)_\infty$.

□

Avant tout, nous allons donner quelques exemples simples pour motiver la notion de la stabilité du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$.

Exemple 2.3. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, et $\varphi \equiv 0$. Dans ce cas l'ensemble résolvant est donné par :

$$\mathcal{R}(M, 0, C_1) = \{(0, y) \mid y < 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Nous remarquons que $\text{Int } \mathcal{R}(M, 0, C_1) = \emptyset$. Par suite le problème $\text{VI}(M, q, 0, C_1)$ est instable en respectant les petites perturbations du second membre q .

Plus précisément, si nous remplaçons q par q_ε tel que $\|q - q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné, alors l'ensemble des solutions $\text{Sol}(M, q_\varepsilon, 0, C_1)$ du problème perturbé peut être vide. Par ailleurs, on a

$$\ker M \cap C_{1\infty} \cap \ker \varphi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+;$$

ce n'est donc pas cône saillant.

□

Exemple 2.4. Nous reprenons M et φ définie dans l'Exemple 2.3. Considérons maintenant, l'ensemble convexe et fermé C_2 donné par

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}.$$

Dans ce cas, l'ensemble résolvant associé est donné par :

$$\mathcal{R}(M, 0, C_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Comme $\text{Int } \mathcal{R}(M, 0, C_2)$ est non vide alors le problème $\text{IV}(M, q, 0, C_2)$ est stable en respectant les petites perturbations du second membre q . De plus, nous remarquons que

$$\ker M \cap C_{2\infty} \cap \ker \varphi_\infty = \{0\} \times \mathbb{R}^+,$$

qui est un cône saillant.

□

Ces deux exemples montrent l'importance de la géométrie de l'ensemble convexe et fermé C . Cet ensemble joue un rôle capitale dans l'étude de la stabilité de problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$. D'où l'importance des résultats de caractérisation de l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{R}(M, \varphi, C)$ donnés dans la section 1.3.1.1., pour étudier la

stabilité au sens de la Définition 2.5 du problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$.

Nous avons le résultat de stabilité suivant :

Théorème 2.6. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont vérifiées. L'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est alors stable au sens de la Définition 2.5 si et seulement si*

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty, \quad w \neq 0.$$

Preuve. \Leftarrow) D'après le Théorème 2.5, on sait que si

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty \setminus \{0\}$$

alors

$$-q \in \text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) \neq \emptyset.$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$-q + \varepsilon \mathbb{B}_n \subset \text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C). \quad (2.25)$$

Etant donné $(M_\varepsilon, q_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon)$ vérifiant les conditions de la Définition 2.5. D'après la Proposition 2.4, nous avons que

$$\text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C) = \text{Int } \mathcal{R}(M_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon).$$

Donc,

$$-q_\varepsilon \in -q + \varepsilon \mathbb{B} \subset \text{Int } \mathcal{R}(M_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon).$$

Par conséquent, $\text{Sol}(M_\varepsilon, q_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, C_\varepsilon) \neq \emptyset$. Ce qui assure que l'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est stable au sens de la Définition 2.5.

\Rightarrow) Supposons maintenant que l'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ est stable au sens de la Définition 2.5. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que (pour $M_\varepsilon = M$, $\varphi_\varepsilon = \varphi$ et $C_\varepsilon = C$) pour tout $q_\varepsilon \in q + \varepsilon \mathbb{B}_n$, $\text{Sol}(M, q_\varepsilon, \varphi, C) \neq \emptyset$. Donc,

$$-q \in \text{Int } \mathcal{R}(M, \varphi, C).$$

D'après le Théorème 2.5, nous obtenons que

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty, \quad w \neq 0, \quad (2.26)$$

d'où le résultat. ■

Le résultat suivant sera abondamment employé au paragraphe 1.4.

Corollaire 2.3. ([1]) *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}) sont satisfaites. Si la condition de compatibilité suivante*

$$\langle q, w \rangle + \varphi_\infty(w) > 0, \quad \forall w \in \ker M \cap C_\infty, \quad w \neq 0, \quad (2.27)$$

est satisfaite, alors $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, C)$ a au moins une solution.

Preuve. Pour la preuve, on prend $M_\varepsilon = M$, $\varphi_\varepsilon = \varphi$, $q_\varepsilon = q$ and $C_\varepsilon = C$ dans le Théorème 2.1. ■

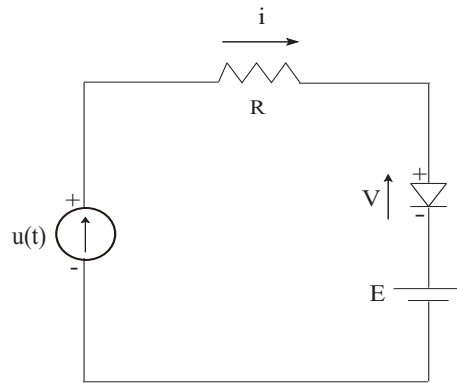


FIGURE 2.1 – Coupe circuit 1 : Diode comme un élément shunt (court-circuit)

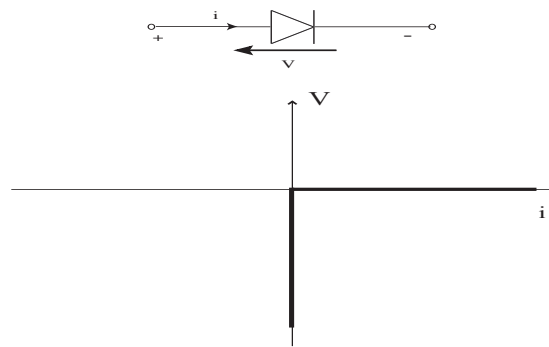


FIGURE 2.2 – Caractéristique Ampère-Volt d'une diode idéale

2.4 Applications

Exemple 2.5. (Coupe circuit 1 / Diode idéale)

Considérons le circuit de la FIGURE 2.1 formé d'une résistance $R > 0$, d'une source d'entrée u , d'un courant instantané correspondant i , d'une diode idéale et d'une tension E .

La FIGURE 2.2 représente la caractéristique ampère-volt d'une diode idéale. Ce modèle constitue un exemple simple. Si $V < 0$ alors $i = 0$ et la diode est dite bloquante. Si $i > 0$ alors $V = 0$ et la diode est dite conductrice.

Nous remarquons d'abord que la diode idéale est décrite par la relation de com-

plémentarité suivante :

$$V \leq 0, \quad i \geq 0, \quad Vi = 0$$

ou bien

$$\min\{-V, i\} = 0.$$

Le potentiel électrique de la diode idéale est :

$$\varphi_D(x) = \delta_{\mathbb{R}^+}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

donc

$$\varphi_D^*(z) = \delta_{\mathbb{R}^-}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

La fonction de récession du potentiel électrique est :

$$(\varphi_D)_\infty(x) = \varphi_D(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De plus, nous avons

$$\partial\varphi_D(x) \triangleq \begin{cases} \mathbb{R}_- & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \\ \emptyset & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\partial\varphi_D^*(z) \triangleq \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \\ \emptyset & \text{si } z > 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

La relation de complémentarité peut être écrite comme

$$V \in \partial\varphi_D(i) \iff i \in \partial\varphi_D^*(V) \iff \varphi_D(i) + \varphi_D^*(V) = iV.$$

La loi de Kirchhoff pour la tension donne

$$u = U_R + V_D + E$$

où $U_R = Ri$ est la différence de potentiel à travers la résistance. $V_D \in \partial\delta_{\mathbb{R}^+}(i)$ désigne la différence de potentiel à travers la diode. Par suite

$$E + Ri - u \in -\partial\delta_{\mathbb{R}^+}(i) \tag{2.28}$$

qui est équivalent à $I\mathcal{V}(R, E - u, 0, \mathbb{R}_+)$, c.-à.-d.

$$i \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } (Ri + E - u)(v - i) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}_+. \tag{2.29}$$

Avec $R > 0$ et pour tout $E, u \in \mathbb{R}$, nous appliquons le Théorème 2.6 pour prouver que (2.29) est stable au sens de la Définition 2.5.

D'abord, remarquons que

$$(2.29) \iff \frac{E}{R} + i - \frac{u}{R} \in -\partial\delta_{\mathbb{R}_+}(i) \iff -\frac{E}{R} + \frac{u}{R} \in i + \partial\delta_{\mathbb{R}_+}(i)$$

$$\iff i = (id_{\mathbb{R}} + \partial\delta_{\mathbb{R}_+})^{-1}\left(\frac{u - E}{R}\right) = \frac{1}{R} \max\{0, u - E\}.$$

Si $u \leq E$ alors la diode est blocante tandis que si $u > E$, la diode est conductrice.

D'autre part, en supposant que l'entrée $u = u(t)$ est une fonction du temps et définissons la sortie $t \mapsto V_o(t)$ par

$$V_o(t) = E + V(t).$$

Le courant $i = i(t)$, qui est à son tour une fonction du temps, est donné par

$$i(t) = \frac{1}{R} \max\{0, u(t) - E\}. \quad (2.30)$$

Par conséquent

$$V_o(t) = V(t) + E = u(t) - Ri(t) = u(t) + \min\{0, E - u(t)\} = \min\{u(t), E\}. \quad (2.31)$$

Ceci montre que le circuit dans la FIGURE 2.1 peut être utilisé pour transmettre la partie d'une entrée u donnée qui se trouve au-dessous d'un certain niveau de référence E donné. \square

Exemple 2.6. (Coupe circuit 1 / diode pratique)

Considérons le circuit dans la FIGURE 2.1 avec une diode pratique. La FIGURE 2.3 représente le caractéristique en ampère-volt d'un modèle d'une diode pratique.

Il y a une tension seuil notée V_1 , à partir de laquelle la diode laisse passer le courant et une tension inverse maximum notée V_2 , qui ne forcera pas la diode à laisser passer le courant. Une fois cette tension seuil est dépassée, la diode laisse passer le courant dans la direction inverse. En générale, $|V_1| \ll |V_2|$ et le modèle est localement idéal.

Par exemple, les diodes utilisées pour une basse fréquence, on a $|V_1| \simeq 0.7 - 2.5$ V et $|V_2| \simeq 5$ kV. Pour les diodes à haute tension, on a $|V_1| \simeq 10$ V et $|V_2| \simeq 30$ kV. Tandis que, pour les diodes rapides utilisées dans les circuits d'alimentation électrique commutée et d'inverseur, on a $|V_1| \simeq 0.7 - 1.5$ V et $|V_2| \simeq 3$ kV. Enfin, les diodes de Schottky utilisées dans les circuits à hautes fréquence, on a $|V_1| \simeq 0.2 - 0.9$ V et $|V_2| \simeq 100$ V.

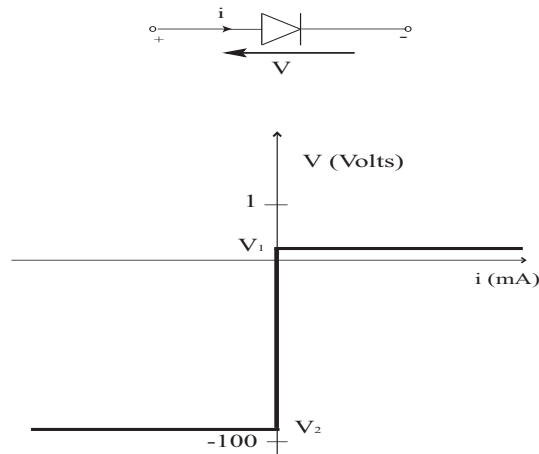


FIGURE 2.3 – Caractéristique d'une diode pratique

Le potentiel électrique de la diode pratique est :

$$\varphi_{DP}(x) = \begin{cases} V_1 x & \text{si } x \geq 0 \\ V_2 x & \text{si } x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\varphi_{DP}^*(z) = \delta_{[V_2, V_1]}(z), z \in \mathbb{R}$$

et la fonction de récession du potentiel électrique est donnée par :

$$(\varphi_{DP})_\infty(x) = \varphi_{DP}(x), x \in \mathbb{R}.$$

De plus, nous remarquons que

$$\partial\varphi_{DP}(x) = \begin{cases} V_2 & \text{si } x < 0 \\ [V_2, V_1] & \text{si } x = 0 \\ V_1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

représente la caractéristique d'Ampère-Volt (i, V) tandis que

$$\partial\varphi_{DP}^*(z) = \begin{cases} \mathbb{R}^- & \text{si } z = V_2 \\ 0 & \text{si } z \in]V_2, V_1[\\ \mathbb{R}^+ & \text{si } z = V_1 \\ \emptyset & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [V_2, V_1] \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

représente la caractéristique du Volt-Ampère (V, i) . La caractéristique d'Ampère-Volt de la diode pratique peut être écrite comme

$$V \in \partial\varphi_{PD}(i) \iff i \in \partial\varphi_{DP}^*(V) \iff \varphi_{DP}(i) + \varphi_{DP}^*(V) = iV.$$

En suivant les étapes de l'Exemple 2.4, nous remarquons que la loi de Kirchoff peut être écrite par $\mathcal{IV}(R, E - u, \varphi_{DP}, \mathbb{R})$, c.-à.-d.

$$i \in C \triangleq \mathbb{R} \text{ tel que } (Ri + E - u)(v - i) + \varphi_{DP}(v) - \varphi_{DP}(i) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Ici $R > 0$ et pour tout $E, u \in \mathbb{R}$, nous appliquons le Théorème 2.6 pour montrer que (2.32) est stable dans le sens de la Définition 2.5. D'ailleurs :

$$i(t) = (id_{\mathbb{R}} + \partial\varphi_{DP})^{-1}\left(\frac{u(t) - E}{R}\right) = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \left| x - \left(\frac{u(t) - E}{R} \right) \right|^2 + \varphi_{DP}(x) \right\}, \quad (2.33)$$

et

$$V_o(t) = u(t) - Ri(t). \quad (2.34)$$

□

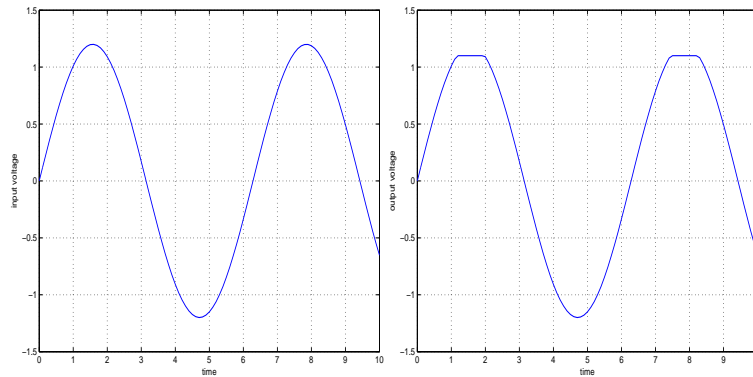


FIGURE 2.4 – Coupe circuit 1 : avec $V_1 = 0.1, V_2 = -90, E = 1$

Interprétation. La FIGURE 2.4 signifie que lorsque la tension aux bornes de la diode est moins que 0.1 alors la diode est un circuit ouvert ou $i = 0$. Ca veut dire que la tension de sortie est égale à la tension d'entrée et elle est sinusoïdale. D'autre part, lorsque la diode devient passante sa tension reste figé à 0.1V et la sortie qui est E + la tension de la diode reste figé à 1.1V. Pour cela, on voit que la sinusoïde est limitée à 1.1V □

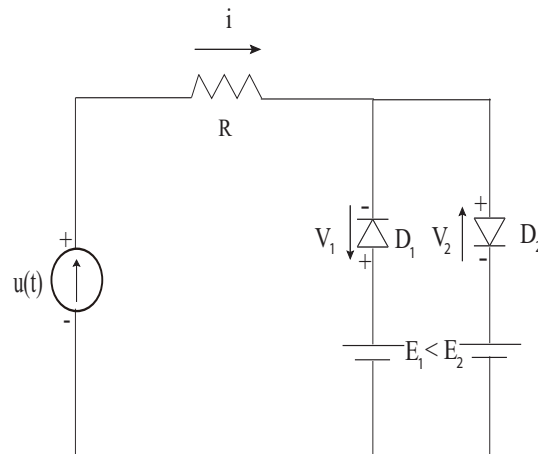


FIGURE 2.5 – Coupe circuit avec double diode

Exemple 2.7. Considérons le circuit représenté par la FIGURE 2.5. Il est constitué d'une résistance $R > 0$, de deux diodes idéales, d'une entrée et de deux sources de tensions E_1 et E_2 avec $E_1 < E_2$. Nous noterons par i le courant à travers la résistance R et nous supposons que $i = i_1 + i_2$ où $-i_1$ désigne le courant à travers la diode D_1 et i_2 désigne le courant à travers la diode D_2 . De plus, nous noterons par μ_1 la différence de potentiel à travers la diode D_1 et par μ_2 la différence de potentiel à travers la diode D_2 .

En utilisant la loi de Kirchoff, on obtient le système :

$$\begin{cases} E_1 + R(i_1 + i_2) - u = +\mu_1 \\ E_2 + R(i_1 + i_2) - u = -\mu_2 \end{cases} \quad (2.35)$$

Les diodes idéales D_1 et D_2 se commutent simplement. Si $\mu_1 < 0$ (resp. $\mu_2 < 0$) alors $-i_1 = 0$ (resp. $i_2 = 0$) et la diode est bloquée tandis que si $-i_1 > 0$ (resp. $i_2 > 0$) alors $\mu_1 = 0$ (resp. $\mu_2 = 0$) et la diode est conductrice. Donc

$$\mu_1 \leq 0, \quad -i_1 \geq 0, \quad \mu_1 i_1 = 0$$

et

$$\mu_2 \leq 0, \quad -i_2 \geq 0, \quad \mu_2 i_2 = 0.$$

Ces 2 relations de complémentarité peuvent être écrites comme :

$$\mu_1 \in \partial \delta_{\mathbb{R}^+}(-i_1) = -\delta_{\mathbb{R}^-}(i_1)$$

et

$$\mu_2 \in \partial \delta_{\mathbb{R}^+}(i_2).$$

Supposons que

$$C = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+, \quad M = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} E_1 - u \\ E_2 - u \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Nous remarquons que le système donné dans (2.35) est équivalent à l'inéquation variationnelle $\mathcal{IV}(M, q, 0, C)$ c.-à.-d. on a :

$$i \in C \text{ tel que } \langle Mi + q, v - i \rangle \geq 0, \forall v \in C. \quad (2.37)$$

Il est clair que la matrice M symétrique et semi-définie positive. De plus, $C_\infty \equiv C$ et

$$\ker M = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = -v_1\}.$$

Par suite,

$$C_\infty \cap \ker M = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \geq 0\}.$$

D'autre part, pour tout $v \in C_\infty \cap \ker M$, avec $v \neq (0, 0)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $v = (-\alpha, \alpha)$ et

$$\langle q, v \rangle = (E_1 - u)v_1 + (E_2 - u)v_2 = \alpha(E_2 - E_1) > 0 \text{ (car } E_2 > E_1). \quad (2.38)$$

Le Théorème 2.6 nous assure la stabilité du problème $\mathcal{IV}(M, q, 0, C)$ au sens de la Définition 2.5.

De plus, d'après (2.35) nous remarquons que :

$$i_1^* + i_2^* = \min\{i_2^*, \frac{u - E_1}{R}\} = \max\{i_1^*, \frac{u - E_2}{R}\}.$$

Par suite

$$i^* = \begin{cases} \frac{u - E_1}{R} & \text{si } u < E_1 \\ 0 & \text{si } E_1 \leq u \leq E_2 \\ \frac{u - E_2}{R} & \text{si } u > E_2 \end{cases}.$$

Donc, pour une entrée $u = u(t)$ (qui dépend du temps), $i^* = i^*(t)$ est donné par :

$$i^*(t) = \begin{cases} \frac{u(t) - E_1}{R} & \text{si } u(t) < E_1 \\ 0 & \text{si } E_1 \leq u(t) \leq E_2 \\ \frac{u(t) - E_2}{R} & \text{si } u(t) > E_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

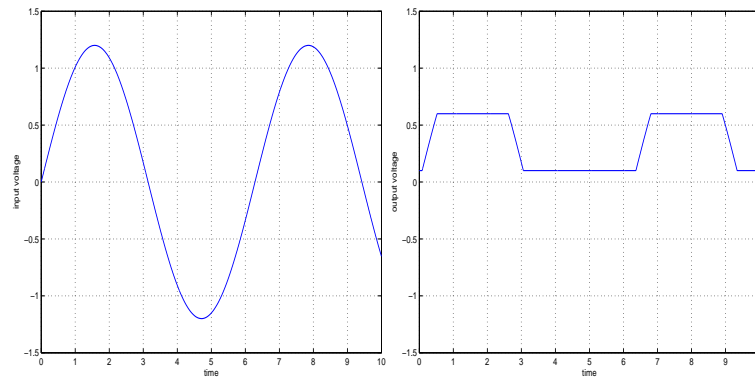


FIGURE 2.6 – Coupe circuit double diode : diodes idéales, $E_1 = 0.1$, $E_2 = 0.6$

et pour une sortie $V_o = V_o(t)$ définie par :

$$V_o(t) = V_2(t) + E_2 = u(t) - Ri^*(t).$$

Par conséquent,

$$V_o(t) = \begin{cases} E_1 & \text{si } u(t) < E_1 \\ u(t) & \text{si } E_1 \leq u(t) \leq E_2 \\ E_2 & \text{si } u(t) > E_2 \end{cases} . \quad (2.40)$$

Ceci montre que le circuit peut être utilisé pour transmettre une partie d'une entrée u donnée, au dessus d'un certain niveau E_1 et au-dessous d'un certain niveau E_2 .

□

Interprétation. Dans la FIGURE 2.6, on a la même chose que dans la FIGURE 2.4 avec une seule différence c'est que lorsqu'on met une autre diode dans le sens opposé de la première, on peut limiter la tension de la partie positive du signal d'entrée aussi bien que pour la partie négative. Dans la FIGURE 2.4, lorsque le signal d'entrée était négatif, la diode était bloquante donc $i = 0$ et le signal de sortie est égale au signal d'entrée.

Dans ce cas, lorsque le signal d'entrée est négatif, il y a une des deux diodes qui va être passante et qui va avoir une tension fixe à ses bornes et donc va limiter la tension de sortie. D'autre part, lorsque le signal d'entrée est positif, il y a une des deux diodes qui est passante et l'autre est bloquante qui ne laisse pas passer le courant.

Ce genre d'applications sera utilisé pour changer un signal sinusoïdal en un signal presque carré. \square

Exemple 2.8. Considérons le circuit de la FIGURE 2.5 et supposons que le potentiel électrique de chacune des diodes D_1 et D_2 est donné (modèle d'une diode pratique) :

$$\varphi_{DP}(x) = \begin{cases} V_1x & \text{si } x \geq 0 \\ V_2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

où $V_2 < 0 < V_1$. De plus, nous supposons que :

$$|V_2| > \frac{E_2 - E_1}{2}. \quad (2.41)$$

Nous obtenons ainsi que

$$\bar{\varphi}_{DP}(x) = \varphi_{DP}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}_{DP}(x_1) + \varphi_{DP}(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.42)$$

D'après la loi de Kirchhoff, le système devient

$$\begin{cases} E_1 + R(i_1 + i_2) - u = +\mu_1 \in -\partial\bar{\varphi}_{DP}(i_1) \\ E_2 + R(i_1 + i_2) - u = -\mu_2 \in -\partial\varphi_{DP}(i_2) \end{cases}. \quad (2.43)$$

Ceci est équivalent à l'inéquation variationnelle $IV(M, q, \varphi, \mathbb{R}^2)$, c.-à.-d.

$$i \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \langle Mi + q, v - i \rangle + \varphi(v) - \varphi(i) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (2.44)$$

où M et q sont donnés dans (2.36) et φ est donné par (2.42). Dans ce cas, $\ker M$ vérifie :

$$\ker M = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = -v_1\}.$$

Étant donné $v \in \ker(M)$, $v \neq 0$, nous avons :

$$\langle q, v \rangle + \varphi_\infty(v) = v_2(E_2 - E_1) + \varphi_{DP}(-v_1) + \varphi_{DP}(v_2) = v_2(E_2 - E_1) + 2\varphi_{DP}(v_2).$$

Par conséquent, pour $v_2 > 0$, on a :

$$\langle q, v \rangle + \varphi_\infty(v) = v_2(E_2 - E_1) + 2V_1v_2$$

tandis que si $v_2 < 0$, on a :

$$\langle q, v \rangle + \varphi_\infty(v) = -v_2(2|V_2| - (E_2 - E_1)) > 0.$$

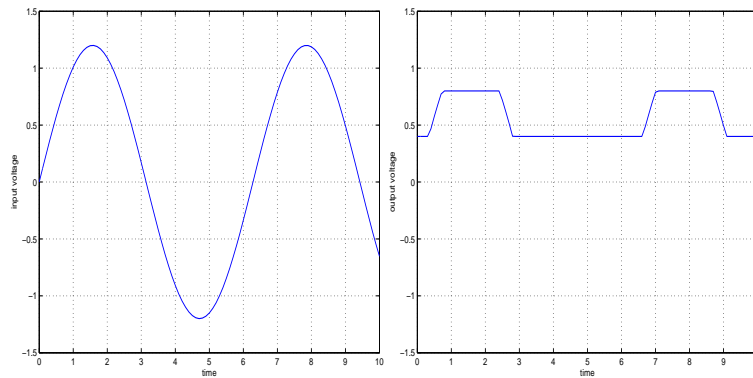


FIGURE 2.7 – Coupe circuit double diode : diode pratique

En appliquant le Théorème 2.6 au problème $\mathcal{IV}(M, q, \varphi, \mathbb{R}^2)$, nous aurons la stabilité dans le sens de la Définition 2.5.

D'autre part, la fonction φ est strictement convexe et la solution ω^* de (2.44) est unique et donnée par :

$$\zeta^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \varphi(x) \right\}. \quad (2.45)$$

Donc, pour une entrée qui dépend du temps $t \mapsto u(t)$ le courant à travers la résistance dépend du temps $t \mapsto i^*(t)$ et est donné par : $i^*(t) = i_1^*(t) + i_2^*(t)$ où

$$\begin{pmatrix} i_1^*(t) & i_2^*(t) \end{pmatrix}^T = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle + (E_1 - u(t))x_1 + (E_2 - u(t))x_2 + \varphi(x) \right\}$$

et la sortie V_o est donnée par la formule suivante : $V_o(t) = u(t) - Ri^*(t)$.

□

Interprétation. la différence entre cette FIGURE 2.7 et FIGURE 2.6, est la valeur de la tension à partir de laquelle la diode devient passante. C'est le même principe que la FIGURE 2.6 avec une différence dans la valeur maximale et minimale du signal de sortie qui dépend des diodes.

Si la tension qui caractérise la diode est 0.7, la tension maximale aux bornes sera limitée à 0.7. Par contre, la tension minimale n'est pas limitée car il va avoir un courant nul et la tension à ce moment va être la même que celle de l'entrée. Si on inverse la diode, elle limite la tension minimale à -0.7 et ne limite pas la tension positive.

□

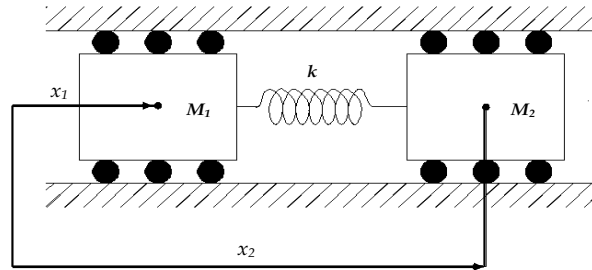


FIGURE 2.8 – Masse-ressort

Exemple 2.9. Considérons le système de deux solides M_1 and M_2 liées entre eux par un ressort de rigidité $k > 0$ et contraint à se déplacer selon la direction horizontale (voir FIGURE 2.8). Les positions relatives de M_1 et M_2 à l'origine sont représentées respectivement par x_1 . De plus, Les masses M_1 et M_2 sont soumises à des forces extérieures et de frottement de Coulomb notées respectivement par q_1, q_2, F_1 et F_2 .

L'état d'équilibre du système est caractérisé par les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} F_1 + k(x_2 - x_1) + q_1 = 0 \\ F_2 - k(x_2 - x_1) + q_2 = 0 \end{cases} .$$

Les forces de frottements de Coulomb F_1 et F_2 sont données par :

$$F_1 \in \begin{cases} -\mu & \text{si } x_1 < 0 \\ [-\mu, \mu] & \text{si } x_1 = 0 \\ +\mu & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} ,$$

$$F_2 \in \begin{cases} -\mu & \text{si } x_2 < 0 \\ [-\mu, \mu] & \text{si } x_2 = 0 \\ +\mu & \text{si } x_2 > 0 \end{cases} ,$$

où $\mu > 0$ représente le coefficient de frottement de Coulomb. Ces deux relations

multivoques peuvent être écrites comme

$$\begin{cases} F_1 \in \partial\psi(x_1) \\ F_2 \in \partial\psi(x_2) \end{cases},$$

où $\psi(x) = \mu|x|$, ($x \in \mathbb{R}$). Soit

$$\varphi(x) = \psi(x_1) + \psi(x_2), \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$M = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Nous remarquons que le système d'équilibre est équivalent à l'inéquation variationnelle $IV(M, -q, \varphi, \mathbb{R}^2)$, donnée par :

$$x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \langle Mx + q, v - x \rangle + \varphi(v) - \varphi(x) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (2.47)$$

Il est bien clair que la matrice M est symétrique et semi-définie positive. D'ailleurs,

$$\ker(M) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = v_1\}.$$

En supposant que $|q_1 + q_2| < 2\mu$, on obtient que pour tout $v \in \ker(M)$, $v \neq (0, 0)$ il existe $\alpha \neq 0$ tel que $v = (\alpha, \alpha)$ et

$$\varphi_\infty(v) + \langle q, v \rangle = 2\mu|\alpha| + (q_1 + q_2)\alpha. \quad (2.48)$$

Si $\alpha > 0$, on a :

$$2\mu|\alpha| + (q_1 + q_2)\alpha = (2\mu + (q_1 + q_2))\alpha > 0,$$

et si $\alpha < 0$, on a :

$$2\mu|\alpha| + (q_1 + q_2)\alpha = (2\mu - (q_1 + q_2))|\alpha| > 0.$$

D'après le Théorème 2.6, nous obtenons que le système est stable dans le sens de la Définition 2.5. \square

2.5 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons étudié la stabilité, au sens des hypothèses (Ξ) , de l'ensemble des solutions des inéquations variationnelles gouvernées par un opérateur linéaire semi-coercif et un sur-potentiel convexe. Au début du chapitre, il nous a semblé important de présenter quelques résultats principaux sur

ce sujet, afin de faire le lien entre les travaux existant auparavant et ce travail. Nous avons vu qu'établir cette stabilité, revient à caractériser l'intérieur topologique de l'ensemble résolvant associé au problème. Ces résultats ont été donnés à l'aide de l'analyse convexe et plus particulièrement de l'analyse de récession. Ils ont été suivis par une série d'applications et d'exemples concrets venant de l'électronique et de la mécanique.

Dès les années soixante et les deux travaux fondateurs de Hartman-Stampachia [53] et de Lions-Stampachia [69], la littérature est devenue de plus en plus riche à propos de ce sujet. Nous trouvons des résultats divers concernant l'étude des inéquations variationnelles gouvernées par des différents types d'opérateurs comme : opérateurs monotones, maximales monotones, pseudomonotones, coercifs, non coercifs, semi coercifs et d'autres. Nous vous invitons aux références suivantes : [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [18], [19], [27], [38], [40], [42], [43], [46], [47], [52], [57], [96], [97], [98]. Notons aussi qu'il existe des inéquations variationnelles dominées par un sur-potentiel non-convexe. Elles sont connues sous le nom des "inéquations hemivariationnelles". Elles ont été introduites par Panagiotopoulos (voir [85], [86], [37], [49], etc ...).

**SYSTÈMES DYNAMIQUES
NON-RÉGULIERS ET STABILITÉ DE
LYAPUNOV**

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES ET HÉMIVARIATIONNELLES D'ÉVOLUTION

3.1 Introduction et problématique

Au Chapitre 1, nous avons présenté la notion de la stabilité au sens de Lyapunov. Cette théorie est basée sur l'étude des fonctions portant le nom de Lyapunov. De plus, elle a été achevée dans les années soixante avec Kruzweil et La Salle. Ce dernier a énoncé un principe d'invariance portant actuellement son nom.

Depuis, l'étude de la stabilité a beaucoup évolué. Elle constitue un élément important dans l'étude des systèmes dynamiques. Nous trouverons aussi de nombreux travaux comportant sur la nature des fonctions de Lyapunov (de classe C^1 , localement lipschitzienne etc...). Ainsi que de nombreuses applications en automatique, en mécanique et en électronique. Pour examiner la stabilité au sens de Lyapunov d'un système, il est suffisant de trouver une fonction de Lyapunov compatible.

Nous nous intéresserons aux inclusions différentielles de la forme :

$$\frac{du}{dt} \in -F(u(t)) - \partial\Psi(u(t)) \text{ p.p. } t \geq 0, \quad (3.1)$$

Nous distinguons deux cas importants qui constituent nos motivations et nos intérêts tout au long de ce travail.

♠) Cas convexe :

C'est le cas quand Ψ est une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ et ∂ est le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe définie au Chapitre 1, qu'on note aussi par ∂ . De plus, F est supposé un opérateur k -lipschitzien. Comme conséquence du Théorème de Kato [94], le système (3.1) admet une unique solution, partant de toute condition initiale.

Physiquement, le terme $-\partial\Psi$ signifie que les forces de contact monotones dérivent de super-potentiels convexes. Ce type de problème a été traité par J. J. Moreau et beaucoup d'autres comme Marques, Attouch, Brogliato, etc ... Par définition du sous-différentiel, le système (3.1) peut être vu comme étant une *inéquation variationnelle d'évolution* ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$).

Par ailleurs, si la fonction Ψ est donnée par la fonction indicatrice χ_C d'un cône convexe fermé C , le système (3.1) se réécrit comme un *problème de complémentarité* :

$$\frac{du}{dt} \in -F(u(t)) - N_C(u(t)),$$

où $N_C(u(t))$ désigne le cône normal à C au point $u(t)$.

♣) Cas non-convexe :

C'est le cas quand Ψ est une fonction localement lipschitzienne et ∂ sera le sous-différentiel au sens de Clarke, noté ∂_c . Dans ce cas, le système (3.1) entre dans le cas des inclusions différentielles de type Filippov donné dans [44].

Le terme $-\partial_c\Psi$ a été introduit par Panagiotopoulos. Il signifie que les contraintes non convexes sont des forces dérivant de super-potentiels non convexes. Par définition du sous-différentiel de Clarke, le système (3.1) se réécrit comme une inéquation d'évolution dite *inéquation hémivariationnelle d'évolution* ($\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E}$). Cette classe des problèmes unilatéraux a été introduite et étudiée par Panagiotopoulos. Nous remarquons que dans ce cas, le problème (3.1) peut admettre une solution qui n'est pas unique, partant de toute condition initiale.

Les deux cas " convexe " et " non-convexe " coïncident si la fonction Ψ est de classe C^1 ; alors nous avons

$$\partial\Psi = \partial_c\Psi = \{\nabla\Psi\}.$$

Par suite, le système (3.1) se ramène à une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{du}{dt} = -F(u(t)) - \nabla\Psi(u(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système (3.1) pour les cas convexe et non convexe.

La première partie est consacrée à l'étude de la stabilité en temps fini du système (3.1), dans le cas convexe.

Des nombreux résultats de stabilité ont été établis. Dans [48], les auteurs ont donné des résultats de stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov de classe C^1 pour des inéquations variationnelles d'évolutions de premier ordre dans des espaces de Hilbert et en dimension finie. Plus récemment, S. Adly et D. Goeleven, dans [5], ont obtenu un résultat de stabilité asymptotique en étendant le principe d'invariance de La Salle au problème (3.1) dans le cas convexe. Les outils employés dans [5] et [48] ont inspiré notre travail.

L'étude de la stabilité en temps fini (S.T.F.) sera faite à l'aide de fonctions de Lyapunov de classe C^1 . Autrefois, le terme *stable en temps fini* était utilisé pour désigner la stabilité sur un intervalle de temps fini. Intuitivement, la stabilité en temps fini veut dire que la trajectoire du système rejoindra le point d'équilibre au bout d'un certain temps fini et qu'elle y reste par la suite et que le point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov. Ce temps fini est appelé *temps d'établissement*.

L'idée de la S.T.F. a été précisée par Haimo, en 1986. Il a fallu attendre la fin des années 90, pour que Bhat et Berstein développent la notion de stabilité en temps fini des équations différentielles ordinaires. Dans [24], les auteurs ont donné une condition suffisante et une autre nécessaire pour établir la S.T.F. en utilisant des fonctions de Lyapunov de classe C^1 .

Moulay et Perruquetti ([77], [78], [79]) ont étendu les travaux de Bhat et Berstein à différentes classes des systèmes comme les inclusions différentielles de type Filippov et les équations différentielles à retard. Nous nous inspirons de leurs travaux pour établir les résultats de S.T.F. pour le système (3.1).

Dans la deuxième partie, nous allons étudier le système (3.1) dans le cas non convexe.

Dans un premier temps, nous obtenons un résultat d'existence, de stabilité et de stabilité asymptotique. Nous étendons le principe d'invariance de La Salle en nous inspirant des travaux de Clarke [34] et de Filippov [44]. Nous terminons cette partie par l'étude de la S.T.F. d'un tel problème.

Par la suite, nous notons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n et par $\| \cdot \|$

norme correspondante. Pour $\rho > 0$, \mathbb{B}_ρ (resp. $\overline{\mathbb{B}}_\rho$) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de centre l'origine et de rayon ρ .

3.2 Cas d'un sur-potentiel convexe

3.2.1 Inéquation variationnelle d'évolution ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$)

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur k -Lipschitzien c.-à.-d. pour $\kappa > 0$, F vérifie la relation suivante :

$$\|Fu - Fv\| \leq k\|u - v\|, \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Notons que F est continue et $F + kI$ est monotone, où I_n désigne l'application identique sur \mathbb{R}^n .

Soit φ une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Nous considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R}^n) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^n) \text{ telle que} \\ \left\langle \frac{du}{dt} + F(u(t)), v - u(t) \right\rangle + \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0, \\ u(t) \in D(\partial\varphi), t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Où $D(\partial\varphi)$ désigne le domaine du sous-différentiel $\partial\varphi$. Par définition de $\partial\varphi$, le problème ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$) peut être écrit sous la forme de l'inclusion différentielle suivante :

$$(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} \in -F(u(t)) - \partial\varphi(u(t)) \\ u(t) \in D(\partial\varphi), t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

3.2.1.1 Résultat d'existence et unicité

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$), nous utilisons une conséquence du théorème de Kato (voir [94]).

Théorème 3.1. ([94]) *Soit φ une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ et soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur k -lipschitzien. Soit $u_0 \in D(\partial\varphi)$ donné. Alors le problème ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$) admet une solution unique.*

Ètant donné $u_0 \in D(\partial\varphi)$, $u(t, u_0)$ ($u(t)$ s'il n'y a pas de confusion possible) désigne la solution du problème (I'VE).

Rappelons la forme suivante du lemme de Gronwall dont nous nous servons plus loin.

Lemme 3.1. ([94]) Soit $T > 0$ donné et $a, b \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ avec $b(t) \geq 0$ p.p. $t \in [0, T]$ et soit f une fonction absolument continue tel que $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait, pour $0 \leq \alpha < 1$,

$$(1 - \alpha)f'(t) \leq a(t)f(t) + b(t)f^\alpha(t), \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Alors,

$$f^{1-\alpha}(t) \leq f^{1-\alpha}(0)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds, \forall t \in [0, T].$$

Nous en déduisons une propriété importante des solutions du problème (I'VE).

Théorème 3.2. ([5]) Soit $\tau \geq 0$ fixé. L'application

$$u(\tau, \cdot) : u_0 \mapsto u(\tau, u_0)$$

est uniformément continue sur $D(\partial\varphi)$.

Preuve. Soit $\tau \geq 0$ fixé. On va montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tel que, pour $u_0, u_0^* \in D(\partial\varphi)$, $\|u_0 - u_0^*\| \leq \delta$ alors $\|u(\tau, u_0) - u(\tau, u_0^*)\| \leq \varepsilon$.

Ètant donné u_0 , le problème (I'VE) admet une solution $u(t)$ qui vérifie $u(0) = u_0$ et

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t) + F(u(t)), v - u(t) \right\rangle + \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0. \quad (3.2)$$

De la même façon, étant donné u_0^* , le problème (I'VE) admet une solution $u^*(t)$ qui vérifie $u_0^*(0) = u_0^*$ et

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t) + F(u(t)), z - u^*(t) \right\rangle + \varphi(z) - \varphi(u^*(t)) \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0. \quad (3.3)$$

En remplaçant, v par $u^*(t)$ dans (3.2) et z par $u(t)$ dans (3.3), par suite, les inégalités sont respectivement respectivement données par :

$$-\left\langle \frac{du}{dt}(t) + F(u(t)), u^*(t) - u(t) \right\rangle + \varphi(u(t)) - \varphi(u^*(t)) \leq 0, \text{ p.p. } t \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\left\langle \frac{du^*}{dt}(t) + F(u^*(t)), u^*(t) - u(t) \right\rangle + \varphi(u^*(t)) - \varphi(u(t)) \leq 0, \text{ p.p. } t \geq 0. \quad (3.5)$$

En additionnant (3.4) et (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d(u^* - u)}{dt}(t), u^*(t) - u(t) \right\rangle &\leq \langle \omega u^*(t) - \omega u(t), u^*(t) - u(t) \rangle \\ &\quad - \langle [F + \omega I](u^*(t)) - [F + \omega I](u(t)), u^*(t) - u(t) \rangle \\ &\leq \omega \|u^*(t) - u(t)\|^2, \quad p.p. \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $u \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ et $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^n)$, on peut donc écrire

$$\frac{d}{dt} \|u^*(t) - u(t)\|^2 \leq 2\omega \|u_0^* - u_0\|^2, \quad p.p. \quad t \geq 0.$$

En appliquant le Lemme 3.1 pour $T > \tau, \alpha = 0, b(\cdot) = 0, a(\cdot) = 2\omega$ et $f(\cdot) = \|u^*(\cdot) - u(\cdot)\|^2$, on déduit que

$$\|u^*(t) - u(t)\|^2 \leq \|u_0^* - u_0\|^2 e^{2\omega t}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{e^{2\omega(\tau)}}}$, on trouve :

$$\|u^*(\tau) - u(\tau)\| \leq \delta \sqrt{e^{2\omega(\tau)}} = \varepsilon.$$

D'où le résultat. ■

Dans la suite et tout au long de cette partie, nous supposons que :

$$0 \in D(\partial\varphi) \text{ et } F(0) \in -\partial\varphi(0). \quad (3.6)$$

Par suite, la fonction identiquement nulle est l'unique solution du problème $(I\mathcal{V}\mathcal{E})$.

3.2.1.2 Problème de complémentarité

Dans ce paragraphe et afin de commencer l'étude de stabilité du problème $(I\mathcal{V}\mathcal{E})$, nous rappelons le cas des problème de complémentarité. Nous considérons la situation où φ est la fonction indicatrice χ_C d'un cône convexe fermé C de \mathbb{R}^n contenant 0. Rappelons que la fonction indicatrice de C est donnée par :

$$\chi_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le sous-différentiel $\partial\chi_C$ de χ_C au point u est donné par

$$\partial\chi_C = N_C(u),$$

avec la convention $\partial\chi_C = \emptyset$ si $u \notin C$ ($N_C(u)$ désigne le cône normale à C au point u).

Par conséquent, le problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ se réécrit sous la forme (\mathcal{P}_C) suivante :

$$(\mathcal{P}_C) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec} \\ \left\langle \frac{du}{dt} + F(u(t)), v - u(t) \right\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C, \text{ p.p. } t \geq 0, \\ u(t) \in C, \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

D'autre part, la condition (3.6) se traduit par :

$$-F(0) \in N_C(0). \quad (3.7)$$

3.2.2 Résultats de stabilité

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats de stabilité du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ donné dans [5] et [48]. Nous rappelons dans un premier temps les définitions de la stabilité de la solution triviale de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$. Dans toute la suite, nous supposons que la condition (3.6) est vérifiée.

Définition 3.1. *Le point d'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est dit stable au sens de Lyapunov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in D(\partial\varphi) \cap \mathbb{B}_\delta$, la solution $u(t, u_0) \in \mathbb{B}_\varepsilon$.*

Définition 3.2. *Le point d'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est dit attractif s'il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $u_0 \in D(\partial\varphi) \cap \mathbb{B}_\delta$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\| = 0$.*

Définition 3.3. *Le point d'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Le théorème suivant qui garantit la stabilité à l'aide de fonctions de Lyapunov compatible au problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$. Il généralise le théorème de Lyapunov pour les équations différentielles, rappelé au premier chapitre.

Théorème 3.3. ([48]) *Supposons qu'il existe $\rho > 0$ et une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ définie positive tels que*

$$\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) \geq 0, \quad \forall u \in D(\partial\varphi) \cap \mathbb{B}_\delta. \quad (3.8)$$

Alors le point d'équilibre $u = 0$ est stable.

Remarque 3.1. La condition (3.8), du Théorème 3.3, signifie que la dérivée temporelle de V est une fonction semi-définie négative. Cela n'est pas suffisant pour montrer la stabilité asymptotique (d'après le théorème de Lyapunov donné au Chapitre 1). Pour cela, dans [48], les auteurs ont prouvé la stabilité asymptotique en remplaçant la condition (3.8) par la condition suivante : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) \geq \lambda V(u), \quad \forall u \in D(\partial\varphi) \cap \mathbb{B}_\delta.$$

Ce qui permet à la fonction \dot{V} d'être définie négative. D'où l'intérêt du principe d'invariance de La Salle dans le cas où la fonction \dot{V} est semi-définie négative. \square

Dans [48], le Théorème 3.3 est appliqué au problème de complémentarité (\mathcal{P}_C).

Corollaire 3.1. *Supposons qu'il existe $\rho > 0$ et $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tel que*

1. $V(0) = 0$ et il existe $h \in \mathcal{K}_\infty$ tel que $V(u) \geq h(\|u\|)$, $\forall u \in C \cap \mathbb{B}_\delta$;
2. $\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) \geq 0$, $\forall u \in C \cap \mathbb{B}_\delta$;
3. $(u - \nabla V(u)) \in C$, $u \in \text{fr}(C) \cap \mathbb{B}_\delta$, (où $\text{fr}(C)$ désigne la frontière de C).

Alors, le point d'équilibre $u = 0$ est stable.

Remarque 3.2. La condition 3. du Corollaire 3.1 peut être remplacé par la condition suivante :

$$-\nabla V(u) \in T_C(u), \quad \forall u \in \text{fr}(C) \cap \mathbb{B}_\delta,$$

où $T_C(u)$ désigne le cône tangent à C au point u . \square

Dans [5], les auteurs ont étendu le principe d'invariance de La Salle aux cas des inéquations variationnelles d'évolution. Pour $u_0 \in D(\partial\varphi)$, nous notons par $\mathcal{O}(u_0)$ l'orbite et par $C(F, \varphi)$ l'ensemble des points stationnaires associés au problème ($\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E}$) à savoir

$$C(F, \varphi) \triangleq \{z \in D(\partial\varphi) \mid F(z) \in -\partial\varphi(z)\},$$

Pour une fonction V de $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, nous introduisons l'ensemble suivant

$$\mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})} \triangleq \{u \in D(\partial\varphi) \mid \langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) = 0\}.$$

Théorème 3.4. (Théorème d'invariance [5])

Soit Ω un compact de \mathbb{R}^n et une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que

1. la fonction $\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - \nabla V(\cdot))$ est s.c.i. sur $D(\partial\varphi) \cap \Omega$;
2. $\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) \geq 0$, $\forall u \in D(\partial\varphi) \cap \Omega$;
3. $D(\partial\varphi)$ est fermé.

On pose $\mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})} \triangleq \mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})} \cap \Omega$ et soit \mathcal{M} le plus grand sous-ensemble invariant de \mathcal{E}_Ω . Alors, pour $u_0 \in D(\partial\varphi)$ tel que $\mathcal{O}(u_0) \subset \Omega$, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(\tau)) = 0.$$

Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant, qui prouve la stabilité asymptotique du point d'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$.

Corollaire 3.2. ([5]) *Supposons que les hypothèses de Théorème 3.4 soient vérifiées. De plus, nous supposons que la fonction V est définie positive et l'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})} = \{0\}$. Par suite, la solution triviale du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est asymptotiquement stable.*

Le résultat du Corollaire 3.2 constitue un résultat très important qui va être utilisé pour montrer la stabilité en temps fini de l'équilibre trivial du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$.

3.2.3 Stabilité en temps fini

La stabilité en temps fini est devenue une question capitale dans l'étude de la stabilité. Elle intervient dans de nombreux problèmes d'ingénierie et principalement en robotique. Par exemple, nous ne souhaitons pas seulement que la convergence (vers un point précis) du robot soit asymptotique mais qu'il la fasse aussi en un temps fini.

Définition 3.4. *L'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est dit stable en temps fini (S.T.F.) si*

1. *il est stable pour $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$, et*
2. *$\forall u_0 \in D(\partial\varphi)$, il existe $T_f \in \mathbb{R}^+$ tel que $u(t) = 0, \forall t \geq T_f$.*

Le temps T_f n'est pas unique et est appelé temps d'établissement de la solution $u(\cdot, u_0)$.

Dans la suite, nous utiliserons la définition suivante.

Définition 3.5. *Un opérateur F est dit (α, η) -fortement monotone, pour un $\eta > 0$ et $\alpha \in [0, 2[$, si et seulement si, nous avons*

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^\alpha. \quad (3.9)$$

Remarque 3.3. Un opérateur (α, η) -fortement monotone est un opérateur monotone. D'après le Théorème 3.1, l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ sont assurées lorsque l'opérateur F est (α, η) -fortement monotone. \square

3.2.3.1 Conditions suffisantes

Le but de ce paragraphe est de donner deux conditions suffisantes pour établir la stabilité en temps fini du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$. Nous appliquons ce résultat au problème de complémentarité

Théorème 3.5. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.2 soient vérifiées. S'il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_\infty$ telles que*

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.10)$$

et,

$$\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) \geq g(V(u)), u \in D(\partial\varphi), \text{ p.p. } t \geq 0, \quad (3.11)$$

alors, l'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est S.T.F.

Preuve. D'après le Corollaire 3.2, l'origine est asymptotiquement stable. Soit $u(t)$ la solution de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ qui tend vers l'origine avec un temps d'établissement $0 \leq T_f \leq +\infty$. Il reste de montrer que $T_f < +\infty$. Utilisant la définition de la stabilité asymptotique pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que u_0 peut être choisie suffisamment petit dans \mathbb{B}_δ pour assurer que $u(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon$ pour $t \geq 0$.

De plus, la fonction $(V \circ u) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(V \circ u)(t) = V(u(t))$ est strictement décroissante pour $t \geq 0$. En effet, pour $T > 0$, la fonction $u(\cdot)$ est absolument continue sur $[0, T]$ et V est de classe C^1 , donc $(V \circ u)$ est différentiable p.p. sur $[0, T]$. De plus, on a

$$\frac{d(V \circ u)}{dt}(t) = \left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle, \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Puisque $u(t)$ est la solution de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$, il existe $\omega(t) \in \partial\varphi(u(t))$ p.p. $t \geq 0$, telle que

$$\frac{du}{dt} + F(u(t)) + \omega(t) = 0, \text{ p.p. } t \geq 0. \quad (3.12)$$

D'autre part, on a :

$$\omega(t) \in \partial\varphi(u(t)) \Leftrightarrow \langle \omega(t), v - u(t) \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u(t)), \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0.$$

Pour $v = u(t) - \nabla V(u(t))$ nous obtenons,

$$\langle \omega, -\nabla V(u) \rangle \leq \varphi(u - \nabla V(u)) - \varphi(u), \forall v \in \mathbb{R}^n \text{ p.p. } t \geq 0. \quad (3.13)$$

Utilisant (3.11), (3.12) et (3.13), on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle &= -\langle F(u(t)), \nabla V(u(t)) \rangle - \langle \omega(t), \nabla V(u(t)) \rangle \\ &\leq -\langle F(u(t)), \nabla V(u(t)) \rangle + \varphi(u(t) - \nabla V(u(t))) - \varphi(u(t)) \\ &\leq -g(V(u(t))) \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

De (3.15), on en déduit

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle \leq 0 \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Par suite,

$$\frac{d(V \circ u)}{dt}(t) \leq 0 \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Comme $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ et $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ par suite $(V \circ u) \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$. D'après le Lemme 3.1, on obtient que $(V \circ u)$ est décroissante sur $[0, T]$ et comme T est arbitrairement choisi, $(V \circ u)$ est décroissante sur $[0, +\infty)$.

Utilisant la changement de variable : $[0, T_f] \rightarrow [0, V(u_0)]$ donné par $z = V(u(t))$, nous obtenons

$$\int_{V(u_0)}^0 \frac{dz}{-g(z)} = \int_0^{T_f} \frac{\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle}{-g(V(u(t)))} dt. \quad (3.16)$$

De (3.14), nous avons

$$\frac{\left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle}{-g(V(u(t)))} \geq 1. \quad (3.17)$$

En utilisant (3.16) et (3.17), on obtient que

$$T_f = \int_0^{T_f} dt \leq \int_0^{T_f} \frac{\left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle}{-g(V(u(t)))} dt = \int_0^{V(u_0)} \frac{dz}{g(z)} < +\infty.$$

Par suite, l'origine de $(I\mathcal{V}\mathcal{E})$ est S.T.F. ■

Exemple 3.1. Considérons le cas où l'opérateur F est nul et la fonction $\varphi(u) = |u|$. Le problème $(I\mathcal{V}\mathcal{E})$ sera donné par l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} \in -\partial(|u|).$$

Pour étudier la stabilité en temps fini, nous appliquons le Théorème 3.5.

Soient $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$ et $V(u) = \frac{1}{2}u^2$. Nous avons $\nabla V(u) = u$.

Il est évident que la fonction $g \in \mathcal{K}_\infty$ et qu'elle vérifie la condition (3.11). Si nous montrons que la fonction V vérifie les hypothèses du Corollaire 3.2, alors nous

obtiendrons la stabilité asymptotique. Reste à montrer que la condition (3.13) est satisfaite. En effet,

$$\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u) - \varphi(u - \nabla V(u)) = |u| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}|u| = g(V(u)).$$

Par suite, l'équilibre $u = 0$ est S.T.F. \square

Si nous appliquons le Théorème (3.5) au problème de complémentarité (\mathcal{P}_C) , nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.2 soient vérifiées. Si de plus, nous supposons que $\mathcal{E}_C \triangleq \{u \in C \mid \langle F(u), \nabla V(u) \rangle = 0\} = \{0\}$, et s'il existe $g \in \mathcal{K}_\infty$ tel que :*

1. $\langle F(u), \nabla V(u) \rangle \geq g(V(u)), \forall u \in C;$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty.$

Alors, l'équilibre $u = 0$ de (\mathcal{P}_C) est S.T.F..

Nous donnons maintenant une autre condition suffisante, à savoir que F est un opérateur (α, η) -fortement monotone au sens de la Définition 3.5.

Théorème 3.6. *Si F est un opérateur (α, η) -fortement monotone, alors l'équilibre $u = 0$ est S.T.F..*

Preuve. Pour montrer la stabilité en temps fini de l'équilibre $u = 0$, on va vérifier la définition 3.4. En effet, on considère la fonction $V(u(t)) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2$. Par suite, on a :

$$\left(\sqrt{2}\right)^\alpha \left(\sqrt{V(u(t))}\right)^\alpha = \|u(t)\|^\alpha. \quad (3.18)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{d(V \circ u)}{dt}(t) = \left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle = \left\langle u(t), \frac{du}{dt} \right\rangle. \quad (3.19)$$

Comme $u(t)$ est la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$, alors on a :

$$\frac{du}{dt} \in -F(u(t)) - \partial\varphi(u(t)). \quad (3.20)$$

En utilisant (3.19) et (3.20), on obtient que

$$\frac{d(V \circ u)}{dt}(t) \in \langle u(t), -F(u(t)) - \partial\varphi(u(t)) \rangle. \quad (3.21)$$

D'après (3.6) et (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(V \circ u)}{dt}(t) &\in \langle u(t), -F(u(t)) + F(0) + \partial\varphi(0) - \partial\varphi(u(t)) \rangle \\ &\in \langle u(t), F(0) - F(u(t)) \rangle + \langle u(t), \partial\varphi(0) - \partial\varphi(u(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Comme F est un opérateur (α, η) -fortement monotone et comme l'opérateur $\partial\varphi$ est monotone, on obtient que

$$\frac{d(V \circ u)}{dt}(t) = \left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle \leq -\eta \|u(t)\|^\alpha < 0. \quad (3.22)$$

D'après le théorème de Lyapunov, nous en déduisons que l'équilibre $u = 0$ est stable. Il reste à montrer que la condition 2. de la Définition 3.4 est vérifiée.

En effet, soit $T_f \in [0, +\infty]$ le temps d'établissement de la solution $u(t)$. D'après (3.22) et d'après la preuve du Théorème 3.5, on obtient que la fonction $(V \circ u)$ est décroissante sur $[0, +\infty)$.

Utilisant la changement de variable : $[0, T_f] \rightarrow [0, V(u_0)]$ donné par $z = V(u(t))$, on déduit que

$$\int_{V(u_0)}^0 \frac{dz}{-z^{\frac{\alpha}{2}}} = \int_0^{T_f} \frac{\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle}{-(V(u(t)))^{\frac{\alpha}{2}}} dt. \quad (3.23)$$

D'après (3.18) et (3.22), on a

$$\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle \leq -\gamma (V(u(t)))^{\frac{\alpha}{2}}, \text{ avec } \gamma \triangleq \eta (\sqrt{2})^\alpha.$$

Par suite, on a

$$-\frac{\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle}{(V(u(t)))^{\frac{\alpha}{2}}} \geq \gamma, \quad (3.24)$$

De (3.23) et (3.24), on obtient

$$\int_0^{T_f} \gamma dt \leq \int_0^{T_f} -\frac{\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle}{(V(u(t)))^{\frac{\alpha}{2}}} dt = \int_0^{V(u_0)} \frac{dz}{z^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Comme $\alpha \in [0, 2[$, on en déduit que

$$T_f \leq \frac{2 \left(\sqrt{V(u_0)} \right)^{2-\alpha}}{\gamma(2-\alpha)} < +\infty.$$

Par suite, l'équilibre $u = 0$ est S.T.F. ■

3.2.3.2 Condition Nécessaire

Théorème 3.7. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.2 soient vérifiées. Si l'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ est S.T.F. et s'il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_\infty$ tel que*

$$\langle F(u), \nabla V(u) \rangle + \varphi(u + \nabla V(u)) - \varphi(u) \leq g(V(u)), \quad \forall u \in D(\partial\varphi), \quad (3.25)$$

alors, nous avons

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve. Soit $u(t)$ la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ avec le temps d'établissement $0 \leq T_f < +\infty$. Utilisant la définition de la stabilité asymptotique, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que u_0 peut être choisie suffisamment petit dans \mathbb{B}_δ pour avoir que $u(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon$ pour $t \geq 0$.

De plus, la fonction $(V \circ u) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(V \circ u)(t) = V(u(t))$ est strictement décroissante pour $t \geq 0$.

En utilisant le changement de variables : $[0, T_f] \rightarrow [0, V(u_0)]$ donné par $z = V(u(t))$, nous obtenons :

$$\int_{V(u_0)}^0 \frac{dz}{-g(z)} = \int_0^{T_{\text{sol}}(u)} \frac{\left\langle \nabla V(u(t)), \frac{du}{dt} \right\rangle}{-g(V(u(t)))} dt. \quad (3.26)$$

Comme $u(t)$ est la solution de $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$, il existe $\omega(t) \in \partial\varphi(u(t))$ p.p. $t \geq 0$, tel que

$$\frac{du}{dt} + F(u(t)) + \omega(t) = 0, \quad \text{p.p. } t \geq 0. \quad (3.27)$$

Or,

$$\omega(t) \in \partial\varphi(u(t)) \Leftrightarrow \langle \omega(t), v - u(t) \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u(t)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

Pour $v = u(t) + \nabla V(u(t))$, on a :

$$\langle \omega(t), \nabla V(u(t)) \rangle \leq \varphi(u(t) + \nabla V(u(t))) - \varphi(u(t)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{p.p. } t \geq 0 \quad (3.28)$$

En utilisant (3.26), (3.27) and (3.28), on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle &= -\langle F(u(t)), \nabla V(u(t)) \rangle - \langle \omega(t), \nabla V(u(t)) \rangle \\ &\geq -\langle F(u(t)), \nabla V(u(t)) \rangle + \varphi(u(t)) - \varphi(u(t) + \nabla V(u(t))) \\ &\geq -g(V(u(t))). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{\left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle}{-g(V(u(t)))} \leq 1 \quad (3.29)$$

D'après (3.25) et (3.29), on a

$$\int_0^{V(u_0)} \frac{dz}{g(z)} = \int_0^{T_f} \frac{\left\langle \frac{du}{dt}, \nabla V(u(t)) \right\rangle}{-g(V(u(t)))} dt \leq \int_0^{T_f} dt = T_f < +\infty.$$

D'où le résultat. ■

En appliquant ce résultat au problème de complémentarité, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.4. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.2 soient satisfaites. Si l'équilibre $u = 0$ est S.T.F. et s'il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_\infty$ telle que*

1. $\langle F(u(t)), \nabla V(u(t)) \rangle \leq g(V(u(t))), u(t) \in C, p.p. t \geq 0;$
2. $\nabla V(u) \in T_C(u);$
3. $\mathcal{E}_C = \{0\},$

alors

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

3.3 Applications

Dans cette partie, nous allons appliquer le Théorème 3.4 à un problème issu de l'électronique.

Exemple 3.2. [Circuit RLD]

Considérons le circuit donné dans la FIGURE 3.1 . Ce circuit est constitué d'une résistance $R > 0$, d'une diode D et d'une inductance L . Nous notons par u le contrôle et par i le courant à travers le circuit.

Le super-potentiel électrique de la diode est donné par :

$$j_D(i) \triangleq \frac{\sqrt{2}}{2}|i|.$$

Les lois Kirchhoff donnent

$$u - U_R - U_L = U_D,$$

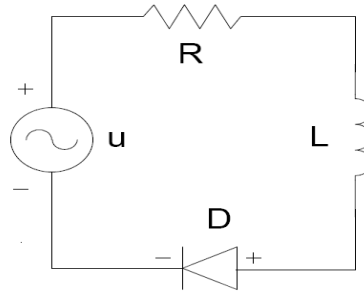


FIGURE 3.1 – Circuit RLD

où $U_R = Ri$ est la différence de potentiel à travers la résistance, $U_L = L \frac{di}{dt}$ et $U_D \in \partial j_D(i)$ est la différence de potentiel à travers le diode. D'où

$$L \frac{di}{dt} + Ri - u \in -\partial j_D(i). \quad (3.30)$$

En supposant que $u = 0$ et la valeur de L vaut 1, (3.30) s'écrit comme :

$$\frac{di}{dt} + Ri \in -\partial j_D(i). \quad (3.31)$$

Pour étudier la stabilité en temps fini de l'équilibre $i = 0$ de (3.31), nous appliquons le Théorème 3.5.

En effet, soit la fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ et la fonction $V(i) = \frac{1}{2}i^2$ donc $\nabla V(i) = i$.

Il est facile de vérifier qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{K}_\infty$ telle que $V(i) \geq h(\|i\|)$ (il suffit de prendre $h(i) = V(i)$). D'autre part, la fonction V vérifie toutes les hypothèses du Corollaire 3.2 et donc, nous montrons que l'équilibre est asymptotiquement stable. Reste à montrer les conditions du Théorème 3.5. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} = \int_0^\varepsilon \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} < +\infty.$$

Par ailleurs, pour $F(i) = Ri$, on obtient que

$$\begin{aligned} \langle F(i), \nabla V(i) \rangle + j_D(i) - j_D(i - \nabla V(i)) &= \langle Ri, i \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|i| \\ &= Ri^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}|i| \\ &\geq g(V(i)) = \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Par suite, l'équilibre $i = 0$ est S.T.F.. □

3.4 Cas d'un sur-potentiel non-convexe

3.4.1 Inéquation hémivariationnelle d'évolution (\mathcal{IHE})

Dans cette partie, nous noterons par $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une multi-application continue et par $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipshitzienne. Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, nous considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{IHE}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R}^n) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n) \text{ telle que} \\ \langle \frac{du}{dt} + F(u(t)), v \rangle + j^\circ(u(t); v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Rappelons que $j^\circ(u(t); v)$ désigne la dérivée directionnelle généralisée de j au point u dans la direction v (voir Chapitre 1).

D'autre part, remarquons que l'inéquation

$$\langle \frac{du}{dt} + F(u(t)), v \rangle + j^\circ(u(t); v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } t \geq 0,$$

est équivalente à l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} \in -F(u(t)) - \partial_c j(u(t)), \text{ p.p. } t \geq 0, \tag{3.32}$$

où $\partial_c j(u(t))$ désigne le sous-différentiel au sens de Clarke de la fonction j au point u dont nous rappelons la définition :

$$\partial_c j(u) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid j^\circ(u; v) \geq \langle w, v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

3.4.1.1 Résultat d'existence

Le but de cette partie est de montrer l'existence de solutions du problème (\mathcal{IHE}) . Ce résultat est une application directe de la contribution de Górniewicz dans [50] pour l'inclusion différentielle de la forme :

$$\frac{du}{dt} \in \mathcal{F}(u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (3.33)$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ est une multi-application semi-continue supérieurement (s.c.s.) à valeurs compactes et convexes. Pour une condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{S}_T(\mathcal{F}, u_0)$ l'ensemble des solutions de l'inclusion (3.33).

Ces solutions sont des fonctions absolument continues et vérifient (3.33) presque partout avec $u(0) = u_0$.

Théorème 3.8. ([50]) *S'il existe $c > 0$ tel que :*

$$\|v\| \leq c(1 + \|u\|), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathcal{F}(u), \quad (3.34)$$

alors l'ensemble $\mathcal{S}_T(\mathcal{F}, u_0)$ est non vide, connexe et compact.

Dans la littérature, la condition 3.34 est dite *condition de croissance linéaire*.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat au problème (\mathcal{IHE}) . Désignons par $\mathcal{S}(u_0, F, j)$ l'ensemble des solutions du problème (\mathcal{IHE}) . Nous obtenons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.9. *S'il existe :*

1. *une constante $c_F > 0$ telle que :*

$$\|F(u)\| \leq c_F(1 + \|u\|), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n;$$

2. *une constante $c_j > 0$ telle que :*

$$\|v\| \leq c_j(1 + \|u\|), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, v \in \partial_c j(u).$$

Alors, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{S}(u_0, F, j)$ est non-vide.

Preuve. Soit $T > 0$ fixé. On va vérifier les hypothèses du Théorème 3.8, pour $\mathcal{F} = -F - \partial_c j$. Or, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\partial_c j(u)$ est non-vide, convexe et compacte (voir [34]). De plus, la multi-application $\partial_c j$ est s.c.s.. D'autre part, les hypothèses 1. et 2. nous montrent qu'il existe une constante $c \triangleq (c_F + c_j) > 0$ telle que :

$$\|v\| \leq c(1 + \|u\|), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathcal{F}(u).$$

Par suite, il existe une fonction $u \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n)$ avec $u(0) = u_0$, et qui vérifie

$$\left\langle \frac{du}{dt} + F(u(t)), v \right\rangle + j^\circ(u(t); v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } 0 \leq t \leq T.$$

Pour T choisi arbitrairement, nous déduisons l'existence d'une solution du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$. ■

Dans toute la suite, nous supposons que les hypothèses du Théorème 3.2 soient vérifiées. De plus, nous supposons que :

$$F(0) \in -\partial_c j(0). \quad (3.35)$$

Ce qui vaut à dire que 0 est une solution de problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$.

Enfin, pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, nous notons par $u(t)$ la solution du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$.

3.4.2 Resultats de stabilité

Après avoir donné un résultat d'existence de solution du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$, ce paragraphe sera consacré à l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$. De plus, nous étendons le principe d'invariance aux cas des inéquations hémivariationnelles d'évolution représentées par le problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$.

Tout d'abord, nous rappelons les définitions de la stabilité de Lyapunov de la solution triviale du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$.

Définition 3.6. Le point d'équilibre $u = 0$ de $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ est dit stable au sens de Lyapunov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathbb{B}_\eta$, alors pour toute solution $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$, nous avons $\|u(t)\| \in \mathbb{B}_\varepsilon$, pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.7. Le point d'équilibre $u = 0$ de $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ est dit attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathbb{B}_\delta$, alors pour toute solution $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$, vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\| = 0.$$

Définition 3.8. Le point d'équilibre $u = 0$ de $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Notons $C(F, j)$ l'ensemble des points stationnaires associés au problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ à savoir :

$$\begin{aligned} C(F, j) &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle F(z), v \rangle + j^\circ(z; v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid F(z) \in -\partial_c j(z)\}. \end{aligned}$$

Par suite, la condition (3.35) entraîne que $0 \in C(F, j)$.

Étant donné une fonction V de $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, on associe à toute solution u du problème (\mathcal{IHE}) , l'ensemble noté $\dot{V}(u)$ des dérivées orbitales de la fonction V à savoir :

$$\dot{V}(u) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists w \in \partial_c j(u), \lambda = \langle -\nabla V(u), F(u) + w \rangle\}. \quad (3.36)$$

Comme $\partial_c j(x)$ est convexe et compact, nous obtenons que \dot{V} est un convexe, fermé et borné. Par suite, $\dot{V}(u)$ est un intervalle fermé de \mathbb{R} de la forme :

$$\dot{V}(u) = [\dot{V}_{\text{inf}}(u), \dot{V}_{\text{sup}}(u)],$$

où $\dot{V}_{\text{inf}}(u)$ et $\dot{V}_{\text{sup}}(u)$ désignent respectivement les dérivées orbitales inférieure et supérieure de la fonction V et définies par :

$$\dot{V}_{\text{inf}}(u) \triangleq \min_{w \in \partial_c j(u)} \langle -\nabla V(u), F(u) + w \rangle; \quad (3.37)$$

$$\dot{V}_{\text{sup}}(u) \triangleq \max_{w \in \partial_c j(u)} \langle -\nabla V(u), F(u) + w \rangle. \quad (3.38)$$

La notion des dérivées orbitales a été introduit et définie par Filippov (voir [44]).

Remarque 3.4. ([44]) Remarquons que si $u(t)$ est une solution de (\mathcal{IHE}) , alors nous avons :

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) \in \dot{V}(u(t)) \text{ p.p. } t \geq 0.$$

□

Définition 3.9. Une fonction $V : \overline{\mathbb{B}}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ et de classe C^1 , est dite de Lyapunov pour le système (\mathcal{IHE}) , si elle est définie positive et si

$$\dot{V}_{\text{sup}}(u) \leq 0, \quad \forall u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma. \quad (3.39)$$

D'où le théorème de stabilité suivant :

Théorème 3.10. (Stabilité)

S'il existe une fonction de Lyapunov V au sens de la Définition 3.9) pour le problème (\mathcal{IHE}) , alors l'équilibre $u = 0$ de (\mathcal{IHE}) est stable.

Preuve. Par hypothèse, la fonction V est définie positive et de classe C^1 , donc pour $\sigma > 0$, il existe une fonction $\psi : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{K} telle que

$$V(u) \geq \psi(\|u\|), \quad \forall u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma. \quad (3.40)$$

Soit $\varepsilon \in]0, \sigma[$. Comme $V(0) = 0$ et par continuité de V , il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in \overline{\mathbb{B}}_\delta$, on a $|V(u_0)| < \psi(\varepsilon)$.

Soit $\eta = \eta(\varepsilon)$ avec $0 < \eta < \min(\varepsilon, \delta)$. Le but est de montrer que pour tout $u_0 \in \overline{\mathbb{B}}_\eta$ et pour tout $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$, on a :

$$\|u(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

En effet, nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$ et $\tau > 0$ tel que $\|u(\tau)\| \geq \varepsilon$.

Or, comme $\|u(0)\| = \|u_0\| < \varepsilon$, il existe $\bar{t} > 0$ tel que

$$\|u(t)\| < \varepsilon, \forall t \in [0, \bar{t}[\quad \text{avec} \quad \|u(\bar{t})\| = \varepsilon \quad (\text{Par continuité de } u).$$

De plus, la fonction $t \mapsto W(t) \triangleq V(u(t))$ est strictement décroissante sur $[0, \bar{t}]$. En effet, la fonction W est absolument continue sur $[0, \bar{t}]$, donc W est différentiable p.p. sur $[0, \bar{t}]$ et nous avons

$$\nabla W(t) = \frac{d}{dt} V(u(t)) \in \dot{V}(u(t)) \text{ p.p. } [0, \bar{t}].$$

D'autre part, puisque $\|u(\bar{t})\| = \varepsilon$, la condition (3.40) nous donne que

$$W(\bar{t}) = V(u(\bar{t})) \geq \psi(\varepsilon).$$

Comme V est fonction de Lyapunov, on a

$$\dot{V}(u(t)) \subset]-\infty, 0] \text{ p.p. } t \in [0, \bar{t}].$$

On obtient ainsi que $\nabla W(t) \leq 0$ p.p. $t \in [0, \bar{t}]$. Par conséquent, on a

$$W(t) \leq W(0) = V(u_0) < \psi(\varepsilon), \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (3.41)$$

En faisant tendre t vers \bar{t} dans (3.41), on obtient que

$$W(\bar{t}) \leq W(0) < \psi(\varepsilon),$$

Ce qui contredit (3.40) et établit la stabilité de l'équilibre $u = 0$. ■

Remarque 3.5. Notons que l'étude de la stabilité des systèmes de type Filippov a été le but de nombreux chercheurs comme Clarke & al. [35], Bacciotti et Rosier [18], Ceragioli[33], Paden et Sastry [84] etc... . Dans leurs travaux, nous trouvons plusieurs versions du théorème stabilité dépendant chacune de la nature de la fonction de Lyapunov utilisée, que ce soit lisse ou non. □

Remarque 3.6. notons que si

$$\langle \nabla V(u), F(u) \rangle - j^\circ(u; \nabla V(u)) \geq 0, \quad u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma,$$

alors $\dot{V}^{\text{sup}}(u) \leq 0$, pour $u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma$. En effet, pour $u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma$, nous avons :

$$w \in \partial_c j(u) \iff j^\circ(u; v) \geq \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Pour $v = \nabla V(u)$, on obtient

$$\langle w, \nabla V(u) \rangle \geq -j^\circ(u; \nabla V(u)).$$

En ajoutant $\langle \nabla V(u), F(u) \rangle$ des deux cotés de l'inégalité, il vient que

$$\langle \nabla V(u), F(u) \rangle + \langle \nabla V(u), w \rangle \geq \langle \nabla V(u), F(u) \rangle - j^\circ(u; \nabla V(u)).$$

par suite,

$$\langle -\nabla V(u), F(u) + w \rangle \leq -\langle \nabla V(u), F(u) \rangle + j^\circ(u; \nabla V(u)).$$

Par conséquent, on en déduit

$$\dot{V}^{\text{sup}}(u) \leq -\langle \nabla V(u), F(u) \rangle + j^\circ(u; \nabla V(u)) \leq 0.$$

Comme nous l'avons vu, le résultat de stabilité donné par le Théorème 3.10 est lié au signe de la dérivée orbitale supérieure de la fonction de Lyapunov. Pour cela, le but de cette remarque est de montrer que, pour étudier la stabilité de Lyapunov et plus particulièrement le signe de la dérivée orbitale supérieure, il suffit de vérifier que

$$-\langle \nabla V(u), F(u) \rangle + j^\circ(u; \nabla V(u)) \leq 0.$$

Comme c'est le cas dans l'étude de la stabilité du système $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ (voir la condition (3.8)). \square

Théorème 3.11. (Stabilité asymptotique)

S'il existe une fonction de Lyapunov et s'il existe $\lambda > 0$, telle que

$$\dot{V}^{\text{sup}}(u) \leq -\lambda V(u), \quad \forall u \in \overline{\mathbb{B}}_\sigma,$$

alors, la solution triviale $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$ est asymptotiquement stable.

Preuve. D'après le Théorème 3.10, on a la solution triviale est stable. Reste à montrer qu'elle est attractive. En effet, par hypothèse, nous avons que $\dot{V}(u) \subset]-\infty, -\lambda V(u)]$. Or, $W'(t) \in \dot{V}(u(t))$ p.p. $t \geq 0$, donc on a

$$\nabla W(t) \leq -\lambda W(t), \quad \text{p.p. } t \geq 0. \quad (3.42)$$

En intégrant (3.51), on obtient

$$W(t) \leq W(t_0)e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

D'après la preuve du Théorème 3.10, nous obtenons que

$$0 < \psi(\|u(t)\|) \leq V(u_0)e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de la fonction ψ , nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\| = 0.$$

D'où le résultat. \blacksquare

Exemple 3.3. Considérons l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} \in -\partial j(u(t)),$$

où j est la fonction définie par :

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2) \mapsto j(u) = |u_1| + |u_2|$$

Le sous-différentiel de la fonction j est donné par :

$$\partial j(u_1, u_2) = \begin{cases} (\text{Sgn}(u_1), \text{Sgn}(u_2)) & \text{si } (u_1, u_2) \neq (0, 0) \\ \overline{\text{co}}\{(-1, -1); (-1, 1), (1, -1); (1, 1)\} & \text{si } (u_1, u_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Ici, Sgn est définie par :

$$\text{Sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } u = 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$u = (u_1, u_2) \mapsto V(u) = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2.$$

V est une fonction de Lyapunov. En effet, il est clair que V est définie positive. De plus, on a

$$\dot{V}(u) = \begin{cases} \{-|u_1| - |u_2|\} & \text{si } (u_1, u_2) \neq (0, 0) \\ \{0\} & \text{si } (u_1, u_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Ce qui entraîne que $\dot{V}(u) \subset]-\infty, 0]$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Donc V est une fonction de Lyapunov et d'après le Théorème 3.10, nous déduisons la stabilité de l'équilibre $(0, 0)$. \square

3.4.2.1 Extension du principe d'invariance de La Salle

Dans cette partie, nous étendons le principe d'invariance de La Salle aux inéquations hémivariationnelles d'évolution. Rappelons que, le principe d'invariance permet d'obtenir la stabilité asymptotique et plus particulièrement la condition d'attractivité. Avant d'énoncer le résultat principale de ce paragraphe, nous établissons quelques résultats préliminaires.

Rappelons que pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$, l'ensemble limite, noté \mathcal{L} , de u défini par :

$$\mathcal{L} \triangleq \{q \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{\tau_i\} \subset [0, +\infty); \tau_i \rightarrow +\infty \text{ et } u(\tau_i) \rightarrow q\}.$$

Nous disons qu'un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est *invariant* pour le problème (IHE) , si pour tout $u_0 \in \mathcal{M}$, il existe $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$ tel que $u \in \mathcal{M}$.

Lemme 3.2. L'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})} \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(u) \ni 0\}$ est fermé.

Preuve. Soit $u \in \overline{\mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})}}$. Il existe une suite $(u_k) \in \mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})}$ telle que $u_k \rightarrow u$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, et

$$\langle -\nabla V(u_k), F(u_k) + w_k \rangle = 0, \quad \text{avec } w_k \in \partial_c j(u_k). \quad (3.43)$$

Soit \mathcal{N}_u un voisinage compact de u avec $(u_k)_k \in \mathcal{N}_u$. Alors, nous avons

$$w_k \in \partial_c j(\mathcal{N}_u) = \bigcup_{v \in \mathcal{N}_u} \partial_c j(v).$$

Or, $\partial_c j$ est s.c.s. et pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\partial_c j(u)$ est non-vide, convexe et compact. Ce qui entraîne que la suite $(w_k)_k$ est bornée (voir [44]). Par suite, il existe une sous-suite w_{k_i} de w_k telle que $w_{k_i} \rightarrow w \in \partial_c j(u)$. En passant à la limite dans (3.43), on en déduit que

$$\langle -V'(u), F(u) + w \rangle = 0 \quad (\text{par continuité de } \nabla V \text{ et de } F).$$

Ce qui implique que $u \in \mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})}$. ■

Il nous a paru important de donner le lemme suivant qui n'est rien d'autre qu'une conséquence directe du Théorème 3.1.7 dans [34].

Lemme 3.3. Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et K un compact de \mathbb{R}^n . Pour tout entier $i \geq 0$, soit $u_i : I \rightarrow K$ une fonction absolument continue solution de (\mathcal{IHE}) . S'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|\frac{du_i}{dt}\| \leq \mu$ p.p. $t \in I$. Alors, la suite (u_i) admet une sous-suite qui converge uniformément vers une solution $u : I \rightarrow K$ du problème (\mathcal{IHE}) .

Lemme 3.4. Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour toute solution bornée $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème (\mathcal{IHE}) , l'ensemble limite \mathcal{L} est non vide, compact et invariant pour le problème (\mathcal{IHE}) . De plus, nous avons $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{L}}(u(\tau)) = 0$.

Preuve. Nous avons que l'ensemble \mathcal{L} est compact et non-vide (voir [44]). Reste à montrer les conditions suivantes :

1. \mathcal{L} est invariant.
2. $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{L}}(u(\tau)) = 0$.

Preuve de 1.

Étant donné $q \in \mathcal{L}$, il existe une suite $(t_i)_i$ telle que $t_i \rightarrow +\infty$ et $u(t_i) \rightarrow q$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$u_i(t) = u(t + t_i), \quad t \geq -t_i.$$

D'après la preuve du Théorème 3.9, le problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ s'écrit sous la forme de l'inclusion différentielle

$$\frac{du}{dt} \in \mathcal{F}(u(t)), \quad (3.44)$$

où $\mathcal{F} = -F - \partial_c j$ est une multi-application s.c.s.. Pour tout i , u_i est une solution de (3.44) telle que $u_i(0) \rightarrow q$ lorsque $i \rightarrow +\infty$. Posons $I_m \triangleq [m-1, m]$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Comme u est bornée, donc l'ensemble $K \triangleq \text{cl}(u([0, +\infty[))$ est un compact \mathbb{R}^n .

Par suite, l'ensemble $\mathcal{F}(K)$ est compact puisque \mathcal{F} est s.c.s. et à valeurs compactes.

Ce qui entraîne que $\frac{du}{dt} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$.

En appliquant le Lemme 3.3 pour $\mu = \|\frac{du}{dt}\|_\infty$, la suite $(u_i|_{I_1})$ admet une sous-suite $(u_{\sigma_1(i)}|_{I_1})$ qui converge uniformément vers une fonction $\tilde{u}_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant (3.44) presque partout avec $\tilde{u}_1(0) = q$.

De même, la suite $(u_{\sigma_1(i)}|_{I_2})$ admet une sous-suite $(u_{\sigma_2(i)}|_{I_2})$ qui converge uniformément vers une fonction $\tilde{u}_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui satisfait (3.44) p.p. avec $\tilde{u}_2(1) = \tilde{u}_1(1)$. Et ainsi de suite, on déduit l'existence d'une sous-suite $(u_{\sigma_m(i)})_{m \in \mathbb{N}^*} \subset (u_i)_i$ qui converge uniformément sur l'intervalle $I_m = [m-1, m]$ vers $\tilde{u}_j : I_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant (3.44) presque partout avec $\tilde{u}_m(m-1) = \tilde{u}_{m-1}(m-1)$.

Considérons la fonction $\tilde{u} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par : $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_m(t)$, $\forall t \in I_m$. Elle vérifie (3.44) et $\tilde{u}(0) = q$. D'autre part, la suite $(u_{\sigma_m(m)}) \subset (u_n)$ converge uniformément vers \tilde{u} sur tout intervalle $[0, m]$. En effet, comme $(t_{\sigma_m(m)}) \subset (t_i)$, nous avons $u_{\sigma_m(m)}(t) = u(t + t_{\sigma_m(m)}) \rightarrow \tilde{u}(t)$ lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Ensuite, pour $q \in \mathcal{L}$ il existe $\tilde{u}(t) \in \mathcal{S}(q, F, j)$ telle que $\tilde{u}(t) \in \mathcal{L}$ pour tout $t \geq 0$. Par suite, \mathcal{L} est invariant.

Preuve de 2.

Nous raisonnons par l'absurde. En effet, nous supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(\tau_i)_i \subset [0, +\infty)$ tels que $\tau_i \rightarrow +\infty$ et $d_{\mathcal{L}}(u(\tau_i)) \geq \varepsilon$. Comme la suite $(u(\tau_i))_i$ est bornée, elle admet une sous-suite, notée $u(\tau_i)$, telle que $u(\tau_i) \rightarrow q$. Par suite, $q \in \mathcal{L}$. Ce qui contredit le fait que $d_{\mathcal{L}}(q) \geq \varepsilon$.

D'où le résultat. ■

Nous concluons ainsi le théorème d'extension du principe d'invariance de La Salle pour le problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ suivant :

Théorème 3.12. (Invariance)

Soit V une fonction de classe C^1 telle que $\dot{V}^{\text{sup}}(u) \leq 0$. Pour $c > 0$, soit Ω_c la composante connexe de l'ensemble de niveau $\text{Lev}(V, c) \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m \mid V(u) \leq c\}$ de V contenant 0.

Pour $u_0 \in \Omega_c$, soit $u \in \mathcal{S}(u_0, F, j)$ une solution du problème (\mathcal{IHE}) .

Si Ω_c est borné et si \mathcal{M} désigne le plus grand ensemble invariant de $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})} \cap \Omega_c$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(t)) = 0.$$

Preuve. La preuve se divise en deux :

Dans un premier temps, on montre que la solution $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bornée. Nous appliquons alors le Lemme 3.4 pour obtenir que $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{L}}(u(\tau)) = 0$.

Dans un deuxième temps, on montre que $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})} \cap \Omega_c$ puis à l'aide du Lemme 3.4, on peut en déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(t)) = 0$.

Tout d'abord, on montre, par l'absurde, que la solution $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bornée. En effet, supposons que la solution est non-bornée donc il existe $\tau_1 \geq 0$ tel que $u(\tau_1) \notin \Omega_c$. La continuité de $t \mapsto u(t, u_0)$ entraîne que $u(\tau_1)$ n'est contenu dans aucune autre composante connexe de $\text{Lev}(V, c)$. Par suite,

$$V(u(\tau_1)) > c \geq V(u_0). \quad (3.45)$$

D'autre part, comme $\dot{V}^{\text{sup}}(u) \leq 0$, la fonction $t \mapsto W(t) = V(u(t))$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ (d'après la preuve du Théorème 3.10). Ce qui contredit (3.45). On déduit ainsi que u est bornée. Par conséquent, d'après le Lemme 3.4, on en déduit que : $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{L}}(u(\tau)) = 0$.

On va montrer maintenant que $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_V^{(\mathcal{IHE})} \cap \Omega_c$. Comme la fonction $t \mapsto W(t)$ est décroissante et bornée sur $[0, +\infty[$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u(t)) = k$. Si $p \in \mathcal{L}$, il existe une suite $(t_i)_i$ telle que $t_i \rightarrow +\infty$ et $u(t_i) \rightarrow q$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Par continuité de la fonction V , on obtient que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} W(t_i) = V(p) = k.$$

Par suite, on en déduit que V est constante sur \mathcal{L} .

D'autre part, pour toute solution $v(t) \triangleq v(\cdot, p)$ de (\mathcal{IHE}) , on a $v(t) \in \mathcal{L}$. Comme $V(v(t)) = k$ sur \mathcal{L} , pour tout $t \geq 0$, on obtient que :

$$\frac{d}{dt} V(v(t)) = 0 \text{ p.p. } t \geq 0.$$

Par suite,

$$\dot{V}(v(t)) = \{0\} \text{ p.p. } t \geq 0.$$

Par conséquent, on a

$$v(t) \in \mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})} \text{ p.p. } t \geq 0.$$

Soit une suite (τ_i) , avec $\tau_i \rightarrow 0$ une suite telle que $v(\tau_i) \in \mathcal{R}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par continuité de la fonction $t \mapsto v(t, p)$, on déduit que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} v(\tau_i, p) = v(0, p) = p \in \overline{\mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})}} = \mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})} \text{ (d'après le Lemme 3.2).}$$

Ce qui entraîne que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})} \cap \Omega_c.$$

Enfin, si \mathcal{M} est le plus grand sous-ensemble invariant de $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})} \cap \Omega_c$, alors on a $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. D'après le Lemme 3.4, on obtient que

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(\tau)) = 0.$$

D'où le résultat. ■

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème d'invariance précédent. Il permet de donner la stabilité asymptotique de l'équilibre $u = 0$.

Corollaire 3.5. *Sous les hypothèse du Théorème 3.5. Si la fonction V est une fonction de Lyapunov et si l'ensemble $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})}$ est réduit à 0, alors la solution triviale du problème $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$ est asymptotiquement stable.*

3.4.3 Stabilité en temps fini

Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité en temps fini de la solution triviale du problème $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce problème admet une solution qui n'est pas unique. Par suite, la définition de la stabilité en temps fini donnée pour le cas convexe n'est plus valable dans ce cas. La définition convenable est la suivante :

Définition 3.10. *L'équilibre $u = 0$ de $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$ est dit stable en temps fini (S.T.F.) si*

1. *il est stable pour $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$,*
2. *$\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $T_f^{\text{sol}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $u(t) = 0$ pour tout $t \geq T_f^{\text{sol}}$.*

où \mathcal{S} est l'ensemble défini par :

$$\mathcal{S} \triangleq \bigcup_{u_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{S}(u_0, F, j).$$

T_f^{sol} est dit temps d'établissement de la solution $u(\cdot)$.

Notons que si T_f^{sol} existe et est continue alors pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit *temps d'établissement du système* (\mathcal{IHE}) par :

$$T_f(u_0) \triangleq \sup_{u(t;u_0) \in \mathcal{S}(u_0, F, j)} T_f^{sol}(u(t)),$$

et cette quantité est finie.

3.4.3.1 Condition suffisante

Théorème 3.13. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.5 soient vérifiées. S'il existe une fonction g de \mathcal{K}_∞ telle que :*

$$\dot{V}^{sup}(u) \geq -g(V(u)), \quad (3.46)$$

avec

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.47)$$

Alors, le point d'équilibre $u = 0$ de (\mathcal{IHE}) est S.T.F..

Preuve. D'après le Corollaire 3.5, nous déduisons que la solution triviale est asymptotiquement stable. De plus, d'après la preuve du Théorème 3.10, la fonction $W(t)$ définie par $V(u(t))$ est strictement décroissante pour $t > 0$.

Considérons le changement de variable : $[0, T_f^{sol}(u(t))] \rightarrow [0, W(u_0)]$ donné par $z = W(t)$. On obtient

$$\int_{W(u_0)}^0 \frac{dz}{-g(z)} = \int_0^{T_f^{sol}(u(t))} \frac{W'(t)}{-g(W(t))} dt. \quad (3.48)$$

De (3.46), on tire $\dot{V}(u) \in]-\infty, -g(V(u))]$. Comme $W'(t) \in \dot{V}(u(t))$ p.p. $t \geq 0$, on obtient que

$$\nabla W(t) \leq -g(W(t)), \quad p.p. \quad t \geq 0 \quad (3.49)$$

En utilisant (3.48) et (3.49), on déduit que

$$T_f^{sol}(u(t)) = \int_0^{T_f^{sol}(u(t))} dt \leq \int_0^{T_f^{sol}(u(t))} \frac{\nabla W(u(t))}{-g(W(u(t)))} dt = \int_0^{W(u_0)} \frac{dz}{g(z)} < +\infty.$$

Par suite, $T_f^{sol}(u(t)) < +\infty$. De plus, comme le terme $\int_0^{W(u_0)} \frac{dz}{g(z)}$ est indépendant de $u(t)$, on en déduit que le temps d'établissement du système $T_f(u_0)$ est fini. D'où la stabilité en temps fini de la solution triviale de (\mathcal{IHE}). ■

3.4.3.2 Condition nécessaire

Théorème 3.14. *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.5 soient vérifiées. Si le point d'équilibre $u = 0$ du problème $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ est S.T.F. et s'il existe une fonction g de \mathcal{K}_∞ telle que :*

$$\dot{V}_{\text{inf}}(u) \geq -g(V(u)). \quad (3.50)$$

Alors, nous avons

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{g(z)} < +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve. En utilisant le changement de variable donné dans la preuve du Théorème 3.13, on obtient :

$$\int_{W(u_0)}^0 \frac{dz}{-g(z)} = \int_0^{T_f^{\text{sol}}(u(t))} \frac{\nabla W(t)}{-g(W(t))} dt. \quad (3.51)$$

D'après (3.50), on a $\dot{V}(u) \in [-g(V(u)), -\lambda V(u)]$. Comme $\nabla W(t) \in \dot{V}(u(t))$ p.p. $t \geq 0$, on obtient que

$$\nabla W(t) \leq -g(W(t)), \quad p.p. \quad t \geq 0 \quad (3.52)$$

En utilisant (3.51), (3.52) et la solution triviale étant stable en temps fini, on en déduit que

$$\int_0^{W(u_0)} \frac{dz}{g(z)} = \int_0^{T_f^{\text{sol}}(u(t))} \frac{\nabla W(u(t))}{-g(W(u(t)))} dt \leq T_f^{\text{sol}}(u(t)) < +\infty.$$

D'où le résultat. ■

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité de Lyapunov ainsi que la stabilité en temps fini des " inéquations variationnelles et hémivariationnelles d'évolutions" $((I\mathcal{V}\mathcal{E})$ et $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$). Nous avons vu que ces inéquations peuvent être vues comme des inclusions différentielles. De plus, les $(I\mathcal{V}\mathcal{E})$ admettent une solution unique, d'après une conséquence du théorème de Kato utilisant une régularisation de Moreau-Yoshida de la fonction φ (voir [94]). Par contre, pour les $(I\mathcal{H}\mathcal{E})$ la solution existe mais elle n'est pas unique. Ce résultat d'existence est une conséquence directe du théorème de Filippov ([44]) pour des inclusions différentielles

de type Filippov.

L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov pour ces problèmes est récente. Pour les $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$, le travail de Goeleven-Motreanu-Motreanu [48] est un des premiers travaux dans ce domaine. Ainsi que le travail de Adly-Goeleven [5] qui donne une extension de la théorie d'invariance de La Salle pour établir la stabilité asymptotique. Dans un premier temps, notre contribution consistait à étudier la stabilité en temps fini des $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ ainsi que l'étude directe de la stabilité au sens de Lyapunov des $(\mathcal{I}\mathcal{H}\mathcal{E})$.

Pourtant dans la littérature, nous trouvons de nombreux travaux étudiant la stabilité des systèmes de type Filippov (voir [17], [33], [34], [44], [48], [71], [59], [73], [84], [92], [95]). Notons que dans ces références, nous trouvons aussi des études concernant la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov qui ne sont pas nécessairement de classe C^1 ou bien dérivables. Ceci nécessite l'usage des techniques plus avancées de l'analyse non-lisse genre sous-différentiel de Clarke et sous-différentiel de Fréchet pour les fonctions de Lyapunov considérées. De plus, nous citons les travaux de Moulay et Perruquetti qui ont étendu la notion de la stabilité en temps fini pour des "équations différentielles ordinaires", " inclusion différentielles de type Filippov " et des " équations différentielles à retard " (voir [77], [78], [78]).

CHAPITRE 4

APPLICATIONS AUX SYSTÈMES DE TYPE EULER-LAGRANGE NON-RÉGULIERS CONSERVATIFS

4.1 Introduction et problématique

Les fondements de la mécanique classique connue aujourd'hui sont dûs à Isaac Newton. Il a réussi à décrire les phénomènes de la nature, en terme de *forces* agissant sur des *systèmes*. La méthode de Newton est une méthode difficile à manipuler, surtout en présence de nombreuses contraintes. Joseph-Louis de La Grange proposa une autre formulation où il a fait dépendre l'état du système d'un certain nombre de paramètres indépendants, comme par exemple les angles ou les distances, à un instant quelconque. Ces paramètres suffisent pour déterminer la position de toutes ses parties. Ils se combinent entre eux selon certaines règles sous lesquelles pendant que le phénomène naturel mécanique se déroule, la combinaison ne varie pas. Nous obtenons ainsi des équations différentielles avec des paramètres indépendants dites " *Équations de Lagrange* ".

Aujourd'hui, le concept de la méthode de Lagrange n'est pas seulement utilisé en mécanique classique mais il est étendu à de nombreux domaines comme par exemple de l'économie, l'électronique, l'automatique etc... . La méthode de Lagrange traite des phénomènes mécaniques dits *Conservatifs* et non pas *Dissipatifs*. Même si les phénomènes dissipatifs sont de loin les plus nombreux dans la nature. Le but de ce chapitre sera d'étudier le cas des systèmes conservatifs. Cela signifie que la force appliquée au système dérive d'un potentiel.

La méthode de Lagrange consiste à introduire une fonction connue aujourd'hui

comme *Le Lagrangien du système*. C'est une fonction de type énergie dépendant de la *position* et de la *vitesse*. Pour $q = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$, le Lagrangien est définie comme suivant :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \triangleq \mathcal{E}_c(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q). \quad (4.1)$$

$\mathcal{E}_c(q, \dot{q})$ désigne l'énergie cinétique du système. Elle est donnée par la forme quadratique suivante :

$$\mathcal{E}_c(q, \dot{q}) \triangleq \frac{1}{2} \langle M(q) \dot{q}, \dot{q} \rangle,$$

où $M(q)$ est dite *Matrice d'inertie* du système dont nous verrons les propriétés ultérieurement. La fonction $\mathcal{V}(q)$ représente l'énergie potentielle du système. En notant par F la somme des forces exercées sur le système, ce dernier s'écrit sous la forme d'un système appelé *Euler-Lagrange* donné par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right) + F = 0. \quad (4.2)$$

Cette écriture permet de représenter le phénomène physique à l'aide des équations différentielles. En développant (4.2), nous en déduisons le problème suivant :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F = 0. \quad (4.3)$$

Où la matrice $C(q, \dot{q})$ contient les forces *centrifuges* et de *Coriolis*. Elle est appelée *Matrice de Coriolis* et est donnée par :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt} (M(q)) \dot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(q, \dot{q})}{\partial q} \right).$$

Les symboles utilisés dans (4.3) ($M(q)$ et $C(q, \dot{q})$) sont les *Symboles de Christoffel*.

Dans ce travail, nous considérons le problème (4.3) dans le cas conservatif et quand il est soumis à une force de frottement. En d'autres termes, en écrivant la force F comme étant la somme de deux forces f_1 et f_2 , où f_1 représente les forces conservatives, notées par $\nabla \mathcal{V}(q)$. La force f_2 désigne les forces de frottement de type Coulomb. Elle est considérée comme étant un élément de $\partial \Phi(\dot{q})$ pour une fonction Φ de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Par suite, (4.3) s'écrit sous la forme :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla \mathcal{V}(q) \in -\partial \Phi(\dot{q}).$$

Ce chapitre a pour but d'examiner la stabilité au sens de Lyapunov du système

de type Euler-Lagrange, noté (\mathcal{EL}) , suivant :

$$(\mathcal{EL}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } q \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n) \text{ et } \ddot{q} \in L_{loc}^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^n) \text{ telle que} \\ \dot{q}(t) \in D(\partial\Phi), t \geq 0, \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla\vartheta(q) \in -\partial\Phi(\dot{q}) \text{ p.p. } t \geq 0, \\ q(0) = q_0 \text{ et } \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \end{array} \right.$$

Actuellement, cette classe de systèmes Lagrangiens est utilisée dans de nombreuses applications et plus particulièrement en automatique. Les systèmes de type Euler-Lagrange ont été la cible de nombreux chercheurs à l'exemple de B. Brogliato, R. Lozano, R. Ortega, G. Besançon, H. K. R. Kelly, V. Santibañez et beaucoup d'autres. Dans la littérature, nous ne trouverons pas des systèmes de type Euler-Lagrange écrits sous une forme d'une inclusion différentielle. Par contre, nous trouverons des nombreux travaux sur les mêmes systèmes muni d'un contrôle. Ceci intéresse plus les ingénieurs dans leurs recherche à des applications concrètes. Dans ce chapitre, notre contribution sera une étude théorique et mathématiques de la stabilité de Lyapunov du système (\mathcal{EL}) .

Mentionnons que le travail réalisé dans ce chapitre ne concerne pas l'étude d'existence et d'unicité de la solution du problème (\mathcal{EL}) . Jusqu'à présent, c'est un problème ouvert. Il existe un résultat d'existence et d'unicité dans le cas linéaire où la matrice $M(q)$ ne dépend pas de q et la matrice $C(q, \dot{q})$ est égale à $C\dot{q}$, (voir ([5]), que nous rappelons ultérieurement).

Pour plus de détails sur les systèmes de type Euler-lagrange, nous vous invitons le lecteur à consulter [5], [16], [21], [22], [23], [58], [70], [83], [74], [93].

4.2 Propriétés du problème (\mathcal{EL})

Les propriétés des membres de l'inclusions différentielles du système (\mathcal{EL}) joueront un rôle important dans l'étude du système et en particulier dans l'examen de la stabilité. Pour cela, le but de ce paragraphe est de rappeler quelques unes de ses propriétés qui seront indispensable pour notre étude. En effet, nous donnons des propriétés de la matrice d'inertie $M(q)$, de la matrice des forces centrifuges et Coriolis $C(q, \dot{q})$ et de forces gravitationnelles représentées par $\nabla\vartheta(q)$.

Rappelons d'abord quelques résultats sur les matrices. Si A est une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$, on désigne par A^T la matrice transposée de A . Remarquons que la matrice $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique. Nous disons que A est une matrice *définie positive* (resp. *semi-définie positive*) si

$$\langle u, Au \rangle > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (\text{resp. } \forall u \in \mathbb{R}^n).$$

Pour plus de détails, nous renvoyons les lecteurs à [58].

4.2.1 La matrice d'inertie $M(q)$

La matrice d'inertie $M(q)$ est reliée principalement à l'énergie cinétique du système par la relation :

$$\mathcal{E}_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle M(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle.$$

De plus, c'est une matrice $M(q)$ est symétrique définie positive de dimension $n \times n$ et dépend seulement de l'état q . Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Il existe $\kappa_1 > 0$ tel que :

$$M(q) \geq \kappa_1 I_n, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n,$$

où I_n désigne la matrice identité de dimension $n \times n$. Ceci est équivalent à dire que

$$\langle M(q)\xi, \xi \rangle \geq \kappa_1 \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. La matrice $M(q)^{-1}$ existe et est définie positive.
3. Pour tous u, v et w de \mathbb{R}^n , il existe $\kappa_2 > 0$ tel que :

$$\|M(u)w - M(v)w\| \leq \kappa_2 \|u - v\| \|w\|.$$

4. Pour tous u et v de \mathbb{R}^n , il existe $\kappa_3 > 0$ tel que :

$$\|M(u)v\| \leq \kappa_3 \|v\|.$$

Remarque 4.1. Dans la plupart des systèmes physiques rencontrés (sauf s'il s'agit d'une translation), la masse du solide utilisé ne permet pas de caractériser la difficulté à mettre un solide en mouvement. Sa répartition est à retenir.

D'où l'explication de la présence des deux quantités scalaires, la *moment d'inertie* et le *produit d'inertie* qui caractérisent la répartition de la masse autour d'un axe. De ces deux quantités, nous obtenons ce qu'on appelle la matrice d'inertie. \square

4.2.2 La matrice des forces centrifuges et de Coriolis $C(q, \dot{q})$

La matrice $C(q, \dot{q})$ désigne la matrice des coefficients des forces centrifuges et de Coriolis $C(q, \dot{q})$. Elle est de dimension $n \times n$ et vérifie les propriétés suivantes :

1. La matrice $C(q, \dot{q})$ n'est pas unique. Par contre, le vecteur $C(q, \dot{q})\dot{q}$ est unique.
2. $C(q, 0) = 0$, pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.
3. Pour tous q, u et v de \mathbb{R}^n , on a :

$$C(q, u)v = C(q, v)u.$$

4. Pour tous q, u, v et w de \mathbb{R}^n , il existe $\kappa_4 > 0$ tel que :

$$\|C(q, u)v\| \leq \kappa_4 \|u\| \|v\|.$$

5. La matrice $C(q, \dot{q})$ est reliée à la matrice $M(q)$ par la relation suivante :

$$\left\langle u, \left(\frac{d}{dt} (M(q)) - 2C(q, \dot{q}) \right) u \right\rangle = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

ceci est équivalent à dire que la matrice $\left(\frac{d}{dt} (M(q)) - 2C(q, \dot{q}) \right)$ est *anti-symétrique*.

6. Nous avons aussi : $\frac{d}{dt} (M(q)) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T$.

Remarque 4.2. La matrice $C(q, \dot{q})$ est constituée des coefficients des forces centrifuges et de Coriolis. Cette dernière porte le nom de Gaspard-Gustave Coriolis.

Physiquement, les forces centrifuges et de Coriolis agissent perpendiculairement à la direction d'un corps en déplacement dans un milieu lui-même en rotation uniforme. Elles sont qualifiées comme étant les principales forces inertielles ou fictives. \square

4.2.3 Le vecteur $\nabla \vartheta(q)$

Le vecteur $\nabla \vartheta(q)$ désigne le vecteur de gravité du système (\mathcal{EL}). L'importance de ce vecteur est due à la fonction ϑ . Cette fonction représente l'énergie potentielle du système. D'où son rôle important dans la construction de la dynamique. Il est de dimension $n \times 1$ et il dépend seulement de l'état q . Il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. pour tout $T > 0$, nous avons

$$\int_0^T \langle \nabla \vartheta(q(t)), \dot{q}(t) \rangle dt = \vartheta(q(T)) - \vartheta(q_0).$$

2. La fonction $\nabla\vartheta(q)$ est Lipschitienne, c-à-d il existe $\kappa_5 > 0$ telle que

$$\|\nabla\vartheta(u) - \nabla\vartheta(v)\| \leq \kappa_5 \|u - v\|$$

4.2.4 Réduction de $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ en premier ordre

Dans ce paragraphe, nous allons réduire le problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ donné par un système de second ordre en un système de premier ordre. Cette réduction nous servira par la suite. Elle aura pour rôle de simplifier le travail et l'étude de la stabilité. De plus, elle nous donnera une forme simple à manipuler de la fonction de Lyapunov. Ce type de transformation a été utilisé dans [16] pour des systèmes de type Euler-Lagrange avec un degré de liberté. Ici, nous allons l'étendre au cas du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ donné par n degrés de liberté.

Rappelons que si q est une solution du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ alors elle vérifie l'inclusion différentielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla\vartheta(q) \in -\partial\Phi(\dot{q}) \text{ p.p. } t \geq 0.$$

La réduction d'ordre sera donnée à l'aide des deux changements de variables suivants :

Premier changement :

Il est représenté par l'application Θ suivante, pour $q_1 \in \mathbb{R}^n$ et $q_2 \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\Theta : (q_1, q_2) \mapsto (q, \dot{q}).$$

Il est clair que la fonction Θ est une bijection ce qui implique l'équivalence entre le problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ et le problème $(\mathcal{E}\mathcal{L}_1)$ suivant :

$$(\mathcal{E}\mathcal{L}_1) \begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 \\ M(q_1)\dot{q}_2 + C(q_1, q_2)q_2 + \nabla\vartheta(q_1) \in -\partial\Phi(q_2). \end{cases}$$

Deuxième changement :

En supposant $R(q_1) \triangleq \sqrt{M(q_1)}$, nous définissons l'application $\tilde{\Theta}$ suivante :

$$\tilde{\Theta} : (q_1, q_2) \mapsto (u_1, u_2)^T = (q_1, R(q_1)q_2)^T.$$

En appliquant l'application $\tilde{\Theta}$ au problème $(\mathcal{E}\mathcal{L}_1)$, nous le ramenons à un autre équivalent. Afin d'établir cette équivalence, nous aurons besoin de montrer que la fonction $\tilde{\Theta}$ est bijective. Notons que la matrice $R(q_1)$ est une matrice symétrique

définie positive.

Bijection de $\tilde{\Theta}$: pour prouver cette bijection, nous allons montrer qu'elle est injective et surjective.

1. **Injective** : Soit $(q_1, q_2), (q'_1, q'_2)$ deux éléments de \mathbb{R}^{2n} tels que

$$\tilde{\Theta}(q_1, q_2) = (u_1, u_2) = \tilde{\Theta}(q'_1, q'_2) = (u'_1, u'_2).$$

Par suite, nous avons que :

- $u_1 = u'_1 \Rightarrow q_1 = q'_1$;
- $u_2 = u'_2 \Rightarrow R(q_1)q_2 = R(q_1)q'_2$ donc $R(q_1)(q_2 - q'_2) = 0$.

Ceci entraîne que

$$(q_2 - q'_2) \in \ker(R(q_1)).$$

Comme la matrice $R(q_1)$ est inversible, nous obtenons ainsi que $q_2 - q'_2 = 0$. D'où $q_2 = q'_2$. D'où l'injectivité.

2. **Surjective** : Pour tout (u_1, u_2) , nous avons que :

$$\tilde{\Theta}\left(u_1, (R(u_1))^{-1} u_2\right) = \left(u_1, R(u_1) (R(u_1))^{-1} u_2\right) = (u_1, u_2).$$

D'où la surjectivité.

Nous en déduisons ainsi que la fonction $\tilde{\Theta}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Maintenant, appliquons le changement de variables décrit par la fonction $\tilde{\Theta}$ introduite ci-dessus, au système (\mathcal{EL}_1) et pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^m$ avec $m = 2n$. Nous obtenons que :

$$\dot{u}_1 = \dot{q}_1 = q_2 = R(u_1)^{-1} u_2.$$

D'autre part,

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{2} R(u_1)^{-1} \left(\frac{d}{dt} (M(u_1)) \right) q_2 + R(u_1) \dot{q}_2.$$

Par suite,

$$R(u_1) \dot{u}_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M(u_1)) q_2 + M(u_1) \dot{q}_2.$$

Par conséquent, le problème (\mathcal{EL}_1) est équivalent au problème (\mathcal{EL}_2) suivant :

$$(\mathcal{EL}_2) \begin{cases} \dot{u}_1 = R(u_1)^{-1}u_2; \\ \dot{u}_2 - \frac{1}{2}R(u_1)^{-1} \left(\frac{d}{dt} (M(u_1)) - 2C(u_1, R(u_1)^{-1}u_2) \right) \begin{matrix} R(u_1)^{-1}u_2 + R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1) \\ \in -R(u_1)^{-1}\partial\Phi(R(u_1)^{-1}u_2) \end{matrix} \end{cases}$$

Finalement, nous avons que

$$(\mathcal{EL}) \iff (\mathcal{EL}_1) \iff (\mathcal{EL}_2).$$

D'autre part, si nous notons par

$$H(u_1, u_2) \triangleq \frac{d}{dt} (M(u_1)) - 2C(u_1, R(u_1)^{-1}u_2),$$

et par $u \triangleq (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^m$, le problème (\mathcal{EL}_2) s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u)u + \mathcal{F}(u) \in -\partial\Psi(u) \quad (4.4)$$

$$\text{avec } \mathcal{A}(u) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -R(u_1)^{-1} \\ 0 & -\frac{1}{2}R(u_1)^{-1}H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(u) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1) \end{pmatrix}$$

$$\partial\Psi(u) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ R(u_1)^{-1}\partial\Phi(R(u_1)^{-1}u_2) \end{pmatrix} (\Psi(u) = (\Phi \circ R(u_1)^{-1})(u_2)) \text{ et } u_0 \triangleq \begin{pmatrix} q_0 \\ R(q_0)\dot{q}_0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.3. 1. Comme la fonction $\tilde{\Theta}$ n'est pas un changement de coordonnées généralisées, le système (\mathcal{EL}_2) n'est pas un système Lagrangien.

2. Le but de ce changement de variable n'était seulement l'étude de la stabilité de Lyapunov mais l'étude de l'existence et l'unicité de la solution. En effet, nous avons essayé de réduire le système de seconde ordre en une inclusion de premier ordre afin de l'étudier. Nous remarquons ainsi que la fonction Ψ est un élément de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ et le terme $\mathcal{F}(u)$ est lipschitz.

□

4.3 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous donnerons un résultat de stabilité et de stabilité asymptotique locales du problème (\mathcal{EL}) . Pour établir ce résultat, nous utiliserons des propriétés des matrices d'inertie $M(q)$ et de coriolis $C(q, \dot{q})$, afin d'appliquer la deuxième méthode de Lyapunov introduite et utilisée auparavant aux Chapitre 1 & 3. Par ailleurs, le principe d'invariance de La Salle étendu au cas convexe au

Chapitre 3 sera bien appliqué.

Dans un deuxième temps, nous appliquerons ce résultat générale au *cas scalaire*. Nous entendons par cas scalaire, le cas où les matrices $M(q)$ et $C(q, \dot{q})$ ne dépendent pas de l'état q . Ce cas a été considéré dans [5]. Nous citons quelques ouvrages indispensables dans le domaine [21], [58], [74].

Avant tout, nous définissons l'ensemble des points stationnaires du problème (\mathcal{EL}) , noté par :

$$C(\vartheta, \Phi) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n \mid \nabla \vartheta(s) \in -\partial\Phi(0)\}.$$

Par la suite, nous supposons que l'hypothèse (\diamond) suivante soit vérifiée :

$$(\diamond) \quad \nabla \vartheta(0) = 0, \quad 0 \in \partial\Phi(0);$$

D'après (\diamond) , il est clair que $0 \in C(\vartheta, \Phi)$.

4.3.1 Théorème de stabilité

Dans toute la suite, nous considérons que la condition (\diamond) soit vérifiée. Le théorème suivant donne un résultat de stabilité de l'origine du problème (\mathcal{EL}) .

Théorème 4.1. *L'origine du problème (\mathcal{EL}) est stable s'il existe $\rho > 0$ telle que la fonction ϑ soit définie positive sur $\overline{\mathbb{B}}_\rho$.*

Preuve. Considérons la fonction suivante :

$$V(u) = \frac{1}{2} \langle u_2, u_2 \rangle + \vartheta(u_1). \quad (4.5)$$

Comme la fonction ϑ est définie positive sur $\overline{\mathbb{B}}_\rho$ donc $V(u)$ est une définie positive sur $\overline{\mathbb{B}}_\rho$. De plus, c'est une fonction de classe C^1 . Pour montrer la stabilité, nous allons montrer que la dérivée temporelle de la fonction V tout au long de la trajectoire est au moins semi-définie négative. En effet,

$$\frac{d}{dt} (V \circ u) = \langle u_2, \dot{u}_2 \rangle + \langle \nabla \vartheta(u_1), \dot{u}_1 \rangle.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = R(u_1)^{-1}u_2, \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{2}R(u_1)^{-1}H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1}u_2 - R(u_1)^{-1}\nabla \vartheta(u_1) + \omega, \end{cases}$$

avec $\omega \in R(u_1)^{-1}\partial\Phi(R(u_1)^{-1}u_2)$. En remplaçant \dot{u}_1 et \dot{u}_2 par leurs valeurs, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \circ u) &= \langle u_2, \dot{u}_2 \rangle + \langle \vartheta(u_1), \dot{u}_1 \rangle \\ &= \langle u_2, \omega \rangle + \frac{1}{2} \underbrace{\langle u_2, R(u_1)^{-1}H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1}u_2 \rangle}_{\alpha} \\ &\quad - \left(\underbrace{\langle R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1), u_2 \rangle - \langle \nabla\vartheta(u_1), R(u_1)^{-1}u_2 \rangle}_{\beta} \right). \end{aligned}$$

– **Calcul de α** : Comme la matrice $R(u_1)^{-1}$ est symétrique et la matrice $H(u_1, u_2)$ est anti-symétrique, on obtient que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle u_2, R(u_1)^{-1}H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1}u_2 \rangle \\ &= \langle R(u_1)^{-1}u_2, H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1}u_2 \rangle \\ &= R(u_1)^{-2} \langle u_2, H(u_1, u_2)u_2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

– **Calcul de β** : On a :

$$\begin{aligned} \beta &= \langle R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1), u_2 \rangle - \langle \nabla\vartheta(u_1), R(u_1)^{-1}u_2 \rangle \\ &= \langle R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1), u_2 \rangle - R(u_1)^{-1} \langle \nabla\vartheta(u_1), u_2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}(V \circ u) = \langle u_2, \omega \rangle, \quad \omega \in -R^{-1}(u_1)\partial\Phi(R^{-1}(u_1)u_2).$$

D'après (\diamond) la définition du sous-différentiel, on obtient que $\frac{d}{dt}(V \circ u)$ est semi-définie négative. Par conséquent, l'origine du problème (\mathcal{EL}) est stable. ■

Remarque 4.4. La stabilité du problème (\mathcal{EL}) peut être établie en terme de fonction de Lyapunov sans transformer le système de second ordre en un autre de premier ordre. En effet, si nous considérons la fonction $V(q)$ suivante

$$V(q) = \frac{1}{2} \langle M(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle + \vartheta(q),$$

il est clair que la fonction $V(q)$ est une fonction définie positive sur $\overline{\mathbb{B}}_\rho$. De plus, sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \circ q) &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt}(M(q)\dot{q}), \dot{q} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle M(q)q, \ddot{q} \rangle + \langle \nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt}(M(q)) \dot{q}, \dot{q} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle M(q)\ddot{q}, \dot{q} \rangle + \frac{1}{2} \langle M(q)\dot{q}, \ddot{q} \rangle + \langle \nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle M(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle M(q)\ddot{q}, \dot{q} \rangle + \langle \nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour $\omega \in -\partial\Phi(\dot{q})$, on a :

$$M(q)\ddot{q} = -C(q, \dot{q})\dot{q} - \nabla \vartheta(q) + \omega \quad (4.7)$$

D'après (4.6) et (4.7), on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \circ q) &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt}(M(q)\dot{q}), \dot{q}, \dot{q} \right\rangle + \langle -C(q, \dot{q})\dot{q} - \nabla \vartheta(q) + \omega, \dot{q} \rangle + \langle \nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt}(M(q)\dot{q}), \dot{q}, \dot{q} \right\rangle + \langle -C(q, \dot{q})\dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle -\nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle + \langle \omega, \dot{q} \rangle + \langle \nabla \vartheta(q), \dot{q} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{d}{dt}(M(q)) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{q}, \dot{q} \right\rangle + \langle \omega, \dot{q} \rangle. \end{aligned}$$

Comme la matrice $\left(\frac{d}{dt}(M(q)) - 2C(q, \dot{q}) \right)$ est antisymétrique, on obtient que :

$$\frac{d}{dt}(V \circ q) = \langle \omega, \dot{q} \rangle.$$

D'après la condition (\diamond) et la définition du sous-différentiel, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt}(V \circ q) \leq 0.$$

D'où le résultat. □

4.3.2 Théorème de stabilité asymptotique

Le but de ce paragraphe est de donner un théorème de stabilité asymptotique du problème (\mathcal{EL}) . Ce résultat sera montré à l'aide du principe d'invariance de La Salle étendu au cas convexe.

Théorème 4.2. *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.1 sont vérifiées et l'ensemble $\partial\Phi(0)$ se réduit au singleton $\{0\}$. De plus, si les hypothèses suivantes*

1. $\Phi(u) > \Phi(0)$, pour tout $u \in \overline{\mathbb{B}}_\rho \setminus \{0\}$,
2. $\nabla\vartheta(0) = 0$ et $\nabla\vartheta(u) \neq 0$, pour tout $u \in \overline{\mathbb{B}}_\rho \setminus \{0\}$,

sont vérifiées, alors l'origine du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ est asymptotiquement stable.

Preuve. Considérons la même fonction V du Théorème 4.1, donnée par :

$$V(u) = \frac{1}{2}\langle u_2, u_2 \rangle + \vartheta(u_1). \quad (4.8)$$

D'après le théorème 4.1, nous avons que l'origine du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ est stable. D'autres part, la preuve du même théorème nous donne que :

Pour $\omega \in -R(u_1)^{-1}\partial\Phi(R(u_1)^{-1}u_2)$, on a

$$\dot{V}(u) = \langle u_2, \omega \rangle, \quad (4.9)$$

qui est une fonction semi-définie négative sur $\overline{\mathbb{B}}_\rho$. Pour prouver la stabilité asymptotique, nous allons appliquer le principe d'invariance de La Salle. Pour cela, nous supposons que le compact $\Omega \triangleq \overline{\mathbb{B}}_\rho$. Nous introduisons l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{E}\mathcal{L})} \triangleq \mathcal{E}_V^{(\mathcal{E}\mathcal{L})} \cap \Omega$ où $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{E}\mathcal{L})}$ est donné par : $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{E}\mathcal{L})} \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m \mid \dot{V}(u) = 0\}$. Par suite, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{E}\mathcal{L})} &= \{u \mid \langle u_2, \omega \rangle = 0\} \\ &= \{(u_1, 0) \mid u_1 \in \mathbb{B}_\rho\} \end{aligned}$$

Si \mathcal{M} est le plus grand invariant de $\mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{E}\mathcal{L})}$, donc d'après le Théorème 3.4 d'invariance de La Salle, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(\tau)) = \{0\}.$$

Le but est de montrer que $\mathcal{M} = \{0\}$. En effet, soit \mathcal{I} un invariant de $\mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{E}\mathcal{L})}$ et soit $\xi \in \mathcal{I}$, donc on a :

$$u(t, \xi) \in \mathcal{I} \text{ pour } t \geq 0.$$

Or, la fonction $u(\cdot, \xi)$ vérifie :

$$\dot{u}_1(t, \xi) = R(u_1)^{-1}u_2(t, \xi); \quad (4.10)$$

$$\dot{u}_2(t, \xi) = \frac{1}{2}R(u_1)^{-1}H(u_1, u_2)R(u_1)^{-1}u_2(t, \xi) - R(u_1)^{-1}\nabla\vartheta(u_1) + \omega. \quad (4.11)$$

Comme \mathcal{I} est un invariant de $\mathcal{E}_V^{(\mathcal{E}\mathcal{L})}$ donc on a :

$$\mathcal{O}(\xi) \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{E}_\Omega^{(\mathcal{E}\mathcal{L})},$$

où $\mathcal{O}(\xi)$ désigne l'ensemble des orbites. Par suite, $u_2(t, \xi) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

De plus, on a :

$$(4.10) \Rightarrow u_1(t, \xi) = \gamma \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$(4.11) \Rightarrow \nabla \vartheta(\gamma) \in -\partial\Phi(0).$$

Par hypothèse, on a $\partial\Phi(0) = \{0\}$, donc $\nabla \vartheta(\gamma) = 0$. De l'hypothèse 2., on en déduit que $\gamma = 0$. Par conséquent, on obtient que :

$$\begin{cases} u_1(t, \xi) = 0 \\ \text{et} \\ u_2(t, \xi) = 0. \end{cases}$$

Donc $\mathcal{I} = \{0\}$, ce qui entraîne que $\mathcal{M} = \{0\}$, et par conséquent, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_{\mathcal{M}}(u(\tau)) = \{0\}.$$

d'où l'attractivité de l'origine. L'origine de (\mathcal{EL}) est attractif et stable, on en déduit donc qu'il est asymptotiquement stable, d'où le résultat. ■

Remarque 4.5. Comme application directe des résultats de stabilité donnés dans les paragraphes précédentes, est la cas du *Problème scalaire*. C'est le cas où la matrice d'inertie $M(q)$ ne dépend pas de q , ainsi que la matrice de $C(q, \dot{q})$ est nulle.

Pour $(q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $\dot{q}_0 \in D(\partial\varphi)$, nous considérons le problème (\mathcal{EL}_S) suivant :

Trouver $q \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ et $\ddot{q} \in L_{loc}^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ tels que :

$$(\mathcal{EL}_S) \begin{cases} \dot{q}(t) \in D(\partial\varphi), t \geq 0, \\ M\ddot{q} + \nabla \vartheta(q) \in -\partial\Phi(\dot{q}) \text{ p.p. } t \geq 0, \\ q(0) = q_0 \text{ et } \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \end{cases}$$

La stabilité du problème (\mathcal{EL}_S) a été étudié dans [5]. Son importance intervient dans plusieurs applications. Après transformation en un problème de premier ordre, il sera écrit d'une façon équivalente au problème $(\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{E})$ introduit et étudié au Chapitre 3.. De plus, la stabilité et la stabilité asymptotique de l'origine de (\mathcal{EL}_S) a été démontré sous les mêmes conditions des théorèmes 4.1 et 4.2.

Dans [5], les auteurs ont utilisé un changement de variable qui n'est pas le même qu'on a proposé auparavant. Ce qui montre que le changement de variable n'a pour rôle que de faciliter le travail et l'étude du problème.

Rappelons le changement de variable donné dans [5] :

pour $u = (u_1 \quad u_2)^T$ et pour $R = \sqrt{M}$ avec

$$\begin{cases} u_1 = Rq \\ u_2 = R\dot{q}, \end{cases}$$

le problème (\mathcal{EL}_S) s'écrit de la forme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + F(u) \in -\partial\Psi(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

La fonction est donnée par :

$$F = F_1 u + F_2(u),$$

avec $F_1 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_2(u) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}\nabla\vartheta(R^{-1}u_1) \end{pmatrix}$ et $u_0 \triangleq \begin{pmatrix} Rq_0 \\ R\dot{q}_0 \end{pmatrix}$. De plus, nous avons que

$$\Psi(u) \triangleq \Phi \circ R^{-\frac{1}{2}}(u_2),$$

Il est clair que la fonction Ψ obtenue est une fonction de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

En appliquant le changement de variable du paragraphe 4.2.4 au problème (\mathcal{EL}_S) , nous aurons que : $F_1 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -R^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_2(u) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}\nabla\vartheta(u_1) \end{pmatrix}$ et $u_0 \triangleq \begin{pmatrix} Rq_0 \\ R\dot{q}_0 \end{pmatrix}$. De plus, nous avons que

$$\Psi(u) \triangleq \Phi \circ R^{-1}(u_2).$$

Remarquons que même avec ce changement de variable, nous gardons l'existence, l'unicité et la stabilité du problème $(\mathcal{IV}\mathcal{E})$. \square

4.4 Applications

Exemple 4.1. Considérons le système donné par la FIGURE 4.1. Il est constitué d'une masse $m > 0$ accrochée à un fil rigide de longueur l qui à son tour accroché à un ressort de constant de raideur $k > 0$. La position du système est déterminée par l'angle θ qui le fait le fil avec la verticale. Nous supposons que le système est soumis à une force de frottement au sens de type Coulomb. Cette force de frottement est représentée par :

$$f \in -\partial\Phi(\dot{\theta}),$$

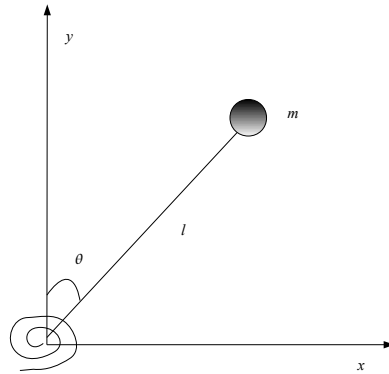


FIGURE 4.1 – Bras de robot

où $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi(u) = \kappa|u|$. L'équation générale du mouvement est donnée par :

$$ml^2\ddot{\theta} + k\theta - mgl \sin(\theta) \in -\partial\Phi(\dot{\theta}). \quad (4.12)$$

Ici, l'état $q = \theta$, la matrice $M = ml^2$ et l'énergie potentiel est donnée par :

$$\vartheta(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

De plus, nous supposons que $k > mgl$. Nous allons vérifier les hypothèses du Théorème 4.1. En effet, il est clair que $\vartheta(0) = \nabla\vartheta(0) = 0$. D'autre part, nous avons que :

$$0 \in \partial\Phi(0) = [-\kappa, \kappa].$$

Par suite, la condition (\diamond) est vérifiée et comme $k > mgl$ alors il existe $\rho > 0$ tel que

$$\vartheta(\theta) > 0, \forall \theta \in \overline{\mathbb{B}}_\rho \setminus \{0\}.$$

□

Exemple 4.2. Sous les mêmes hypothèses de l'Exemple 4.1, nous considérons de plus que la fonction Φ est telle que $\partial\Phi(0) = \{0\}$ avec $\Phi(u) = 0, \forall u \neq 0$. D'autre part, il existe $\rho' > 0$ tel que pour tout $\theta \in \overline{\mathbb{B}}_{\rho'} \setminus \{0\}$, on a $\nabla\vartheta(\theta) > 0$.

D'après le Théorème 4.1, on obtient que l'origine est asymptotiquement stable. □

Exemple 4.3. Dans cet exemple, nous accrochons le pendule donné à l'Exemple 4.1 à un chariot de masse M (voir FIGURE 4.2.)

De plus, nous supposons que le système est soumis à une force de frottement de type Coulomb. L'équation du mouvement est donnée par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla\vartheta(q) = F. \quad (4.13)$$

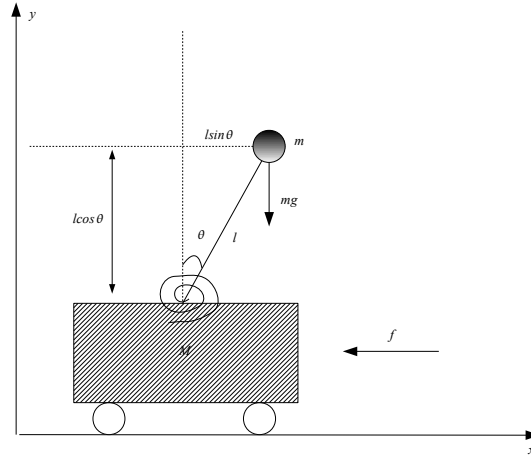


FIGURE 4.2 – Chariot portant un bras de Robot

Avec : $q \triangleq (x \ \theta)^T$ et

$$M(q) = \begin{pmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{pmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla \mathcal{D}(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}k\theta^2 - mgl \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in -\partial\Phi(\dot{q}), \text{ avec } f(v) = \gamma |v|.$$

Il est clair que la $M(q)$ est symétrique et $|M(q)| > 0$, par suite, $M(q)$ est définie positive pour tout q . D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}(M(q)) - 2C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & ml\dot{\theta} \sin \theta \\ -ml\dot{\theta} \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

donc c'est une matrice antisymétrique. L'énergie potentielle du pendule est définie par $h(\theta) = mgl(\cos \theta - 1)$ avec

$$\nabla f(q) = \frac{\partial h}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Nous avons que $\partial\Phi(0) = \begin{pmatrix} [-\gamma, \gamma] \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme dans l'exemple 4.1 et d'après le Théorème 4.1, nous en déduisons que l'origine du problème (4.13) est stable. \square

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les systèmes de type Euler-Lagrange soumis à des forces de frottement de Coulomb. Nous avons vu que l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov est liée aux propriétés de chacun des membres du système $(\mathcal{E}\mathcal{L})$. Il paraît que l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ est une question difficile. Nous avons vu que l'étude de stabilité du problème $(\mathcal{E}\mathcal{L})$ est due au fait que son énergie potentielle admet un minimum local au voisinage de l'équilibre. Ces résultats de stabilité ont trouvés leurs applications en mécanique. Pour bien amener ce travail, nous nous sommes appuyés sur les travaux suivants [5], [16], [21], [22], [23], [58], [70], [83], [74], [93] ...

Conclusion et perspectives

Ce manuscrit résume les quatre années de thèse que j'ai effectuées au sein du laboratoire XLIM-Département Mathématiques et Informatique de l'université de Limoges, sous la direction des professeurs Samir Adly et Michel Théra.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des inéquations variationnelles semi-coercives en utilisant des outils de l'analyse de récession. Les résultats théoriques ont trouvé leurs applications à des différents problèmes provenant de l'électronique et de la mécanique.

La seconde partie traite, dans un premier temps, l'étude de la stabilité en temps fini des inéquation variationnelles d'évolution à l'aide du concept de Lyapunov. Dans un second temps, nous avons étudié la stabilité au sens de Lyapunov des inéquations hémivariationnelles d'évolution où nous donnons une extension du principe d'invariance de La Salle.

Enfin, nous examinons le cas des systèmes de type Euler-Lagrange conservatifs soumis à des forces de frottement de type Coulomb.

Perspectives

Ce travail nous a ouvert de nombreux chemins à suivre et plus particulièrement dans l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov.

- Étude de la stabilité en temps fini des systèmes dynamiques non-réguliers de second ordre dans le cas convexe. Durant l'étude de ce cas, nous avons trouvé qu'il est nécessaire de faire l'étude à l'aide des fonctions de Lyapunov non-lisses. Ceci nécessite l'utilisation des sous-différentiels de type Clarke ou de Fréchet pour examiner le signe de la dérivée temporelle selon la nature de la fonction de Lyapunov considérée.

- Étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques non-réguliers de second ordre dans le cas non-convexe.

- Étude des systèmes dynamiques non-réguliers avec choc élastique :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) \in -\partial\theta(u(t)).$$

- Étude des systèmes dynamiques non-réguliers avec choc élastique et frottement sec :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + \partial\theta(u(t)) \in \partial\varphi(\dot{u}(t)).$$

- Étude du cas des problème de *Sweeping Process* qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\dot{u}(t) + f(u(t)) \in N_{C(t)}(\dot{u}(t)).$$

- Concernant le système Lagrangien considéré au Chapitre 4., il paraît important d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème ainsi que l'étude de cas non-convexe.

Bibliographie

- [1] K. ADDI, S. ADLY, D. GOELEVELN & H. SAOUD, *A sensitivity analysis of a class of semi-coercive variational inequalities using recession tools*, Journal of Global Optimization, Vol. 40, No. 1-3, 7-27, 2008.
- [2] K. ADDI, B. BROGLIATO & D. GOELEVELN, *A qualitative mathematical analysis of a class of variational inequalities via semi-complementarity problems. Applications in electronics*, Preprint 2006.
- [3] S. ADLY, *Stability of linear semi-coercive variational inequalities in Hilbert spaces : application to the Signorini-Fichera problem*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis Volume , Number , .
- [4] S. ADLY, *Analyse Variationnelle Appliquée aux Problèmes Unilatéraux : Analyse de récession, méthodes variationnelles et algorithmiques*, Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges, Octobre 1995.
- [5] S. ADLY & D. GOELEVELN, *A stability theory for second-order nonsmooth dynamical systems with application to friction problems*, J. Maths. Pures Appl. 83 (2004) 17-51.
- [6] S. ADLY, D. GOELEVELN & M. THÉRA, *Recession mappings and noncoercive variational inequalities*. Nonlinear Anal. 26 (1996), no. 9, 1573–1603.
- [7] S. ADLY, E. ERNST & M. THÉRA, *Stability of non-coercive variational inequalities*, Communications in Contemporary Mathematics Vol. 4, 1, 145-160 (2002).
- [8] S. ADLY, E. ERNST & M. THÉRA, *Well-positioned closed convex sets and well-positioned closed convex functions* J. of Global Optim. 29, pp 337-351 (2004).
- [9] S. ADLY, E. ERNST & M. THÉRA, *Stability in frictional unilateral elasticity revisited : an application of the theory of semi-coercive variational inequalities*, Amer. Inst. of Physics published May 2006, ISBN 0-7354-0328-7, pp 1-11.
- [10] S. ADLY, E. ERNST & M. THÉRA, *Stabilité de l'ensemble des solutions d'une inéquation variationnelle non coercive*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 409-414, 2001.
- [11] H. ATTOUCH, Z. CHBANI & A. MOUDAFI, *Recession operators and solvability of variational problems*, Preprint, Laboratoire d'Analyse Convexe, Université de Montpellier II, 1993.

- [12] D. D. ANG, K. SCHMIDT & K. VY, *Noncoercive variational inequalities : some applications*, *Nonlinear Anal.*, T. M. A., 15, No. 6, 497-512, 1990.
- [13] J. -P. AUBIN & A. CELLINA, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [14] J. -P. AUBIN & H. FRANKOWSKA, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [15] C. R. BECTOR, S. CHANDRA & J. DUTTA, *Principles of Optimization Theory*, Published by Narosa Publishers, New Delhi, India, September 2004 and Alpha Science International, Harrow, U. K, 2005. Pages 224.
- [16] G. BESANÇON, *Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems*, *Automatica*, 36, 1915-1921, 2000.
- [17] A. BACCIOTTI & L. ROSIER, *Liapunov functions and stability in control theory*, 2nd ed. Springer, Berlin, 2005.
- [18] C. BAIOCCHI, G. BUTTAZZO, F. GASTALDI & F. TOMARELLI, *General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 100, 2, 149-180, 1988.
- [19] C. BAIOCCHI, F. GASTALDI & F. TOMARELLI, *Some existence results on non-coercive variational inequalities*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (4) 13, 617-659, 1986.
- [20] B. BROGLIATO & D. GOELEN, *The Krakovskii-La Salle invariance principle for a class unilateral dynamical systems*. *Math. Control signals Systems*, 2005, 17 : 57-76.
- [21] B. BROGLIATO, R. ORTEGA & R. LOZANO, *Global tracking controllers for flexible-joint manipulators : a comparative study*, *Automatica*, Vol. 31, No. 7, pp. 941-956, 1995.
- [22] B. BROGLIATO, S.-I. NICULESCU & P. ORHANT, *On the control of finite-dimensional mechanics systems with unilateral constraints*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 2, February 1997.
- [23] B. BROGLIATO, R. LOZANO, B. MASHKE & O. EGELAND, *Dissipative systems analysis and control, theory and applications*, 2nd Edition, Springer-Verlag London Limited 2007.
- [24] S. P. BHAT & D. S. BERNSTEIN, *Finite time stability of continuous autonomous systems*. *SIAM J. Control Optimization*, 2000, vol. 38, No. 3, 751-766.
- [25] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
- [26] H. BREZIS, *Equations et inéquations non-linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 18, 1, 115 -175, 1968.
- [27] H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux*, *J. Math. Pures et Appl.*, 51, 1 -168, 1972.

- [28] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [29] H. BREZIS, *Sur certains problèmes non linéaires*, Séminaire Choquet, Initiation à l'analyse, tome 6, No.2, exp. No. 18, p. 1-18, 1966-1967.
- [30] H. BREZIS & G. STAMPACCHIA, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Buletin de la S.M.F., tome 96, p. 153-180, 1968.
- [31] F. BROWDER, *Nonlinear maximal monotone mappings in Banach spaces*, Math. Ann. 175, 81–113 (1968).
- [32] V. BURKOV & L. B. FREIDOVICH, *Stabilization of the position of a Lagrangian systems with elastic elements and bounded control, with and without measurment of velocities*, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 61, No 3, pp. 433-441, 1997.
- [33] F. M. CERAGIOLI, *Discontinuous ordinary differential equations and stabilization*, Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica, Universit'a di Cagliari, Firenze, Modena, Perugia e Siena, 1995-1999.
- [34] F. H. CLARKE, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley and sons, New York, 1983.
- [35] F.H. CLARKE, YU.S. LEDYAEV, R.J. STERN & P.R. WOLENSKI, *Nonsmooth analysis and control theory*. Springer-Verlag, New York, Grad. Texts in Math. 178, 1998.
- [36] A. DE LUCA & B. SICILIANO, *An asymptotically stable joint PD controller for robot arms with flexible links under gravity*, Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tuscon, Arizona, decembre 1992.
- [37] G. DINCA, P.D. PANAGIOTOPOULOS & G. POP, *An existence result on non-coercive hemivariational inequalities*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6, 6 no. 4 (1997), p. 609-632.
- [38] P. DANIELE, A. MAUGERI, *Equilibrium problems and variational inequalities : a continuum transportation model*, Computational fluid and solid mechanics, Vol. 1, 2, 1543-1545, Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [39] G. DUVAUT, J.L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.
- [40] C. ECK, J. JARUSEK, *Existence results for the semicoercive static contact problem with coulomb friction*, Nonlinear Analysis, 42, pp 961-976, 2000.
- [41] F. FACCHINEI & J.-S. PANG, *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*, Vol. I & II. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [42] G. FICHERA, *Boundary value problems in elasticity with unilateral constraints*, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, VIa.2, 347-389, 1972.

- [43] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Atti. Accad. Naz. Lincei Mem. Sez. I (8), 7, 71–140, 1964.
- [44] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [45] M. V. P. GARCIA & F. A. TAL, *Stability of equilibrium of conservative systems with two degrees of freedom*, J. Differential Equations 194, 364-381, 2003.
- [46] D. GOELEN, *On the solvability of noncoercive linear variational inequalities in separable Hilbert spaces*, Journal of Optimization Theory and Applications : Vol. 79, No. 3, December 1993
- [47] D. GOELEN, J. GWINNER, *On semicoerciveness a class of variational inequalities, and an application to Von Karman plates*. Math. Nachr. 244, 89–109, 2002.
- [48] D. GOELEN, D. MOTREANU & V. V. MOTREANU, *On the stability of stationary solutions of first order evolution variational inequalities*, Adv. Nonlinear Var. Inequal., 6 (2003), 1-30.
- [49] D. GOELEN, D. MOTREANU, *Variational and hemivariational inequalities theory, methods and applications*. Vol.2 : Unilateral Problems and Unilateral Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
- [50] L. GÓRNIOWICZ, *Topological approach to differential inclusions*, in "Topological Methods in Differential Equations and Inclusions" (M. Frigon, A. Granas, eds.), NATO ASI Series C 472, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 129-190.
- [51] W. HAM, *Adaptive control based on explicit model of robot manipulator*, IEEE Transactions Automatic Control, Vol. 38, No. 4, April 1993.
- [52] Y. HE, *Stable pseudomonotone variational inequality in reflexive Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 330, 2007, 352-363.
- [53] P. HARTMAN, G. STAMPACCHIA, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, Acta Mathematica, 115, 271–310, 1966.
- [54] I. HLAVACEK, J. LOVISEK, *Semi-coercive variational inequalities with uncertain input data. Applications to shallow shells*, Mat. Mod. and Meth. in Applied Sc. Vol 15, No 2, pp 273-299, 2005.
- [55] J.B. HIRIART-URRUTY, C. LEMARÉCHAL, *Fundamentals of convex analysis*, Springer, 1993.
- [56] V. T. HAIMO, *Finite time controllers*, SIAM J. Control and Optimisation 24 (4), 1986, 804-833.
- [57] G. IDONE, A. MAUGERI, C. VITANZA, *Variational inequalities and the elastic-plastic torsion problem*, J. Optim. Theory Appl. 117, no. 3, 489-501, 2003.
- [58] H. K. R. KELLY, V. SANTIBANEZ & A. LORIA, *Control of robot manipulators in joint space*, Springer-Verlag, London Limited, 2005.

- [59] H. K. KHALIL, *Nonlinear systems*, NJ 07458, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [60] D. KINDERLEHERE & G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 24, pages 19-77, 1963.
- [61] D. KODITSCHKEK, *Natural Motion for Robot Arms*, Proceedings of 23rd Conference on Decision and control, Las Vegas, NV-December 1984.
- [62] N. N. KRASOVSKII, *Problems of the theory of stability of motion*, Stanford Univ. Press, 1963. Translation from the original Russian edition, Moscow, 1959.
- [63] N. N. KRASOVSKII, *Stability of Motion : Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*, Standford University Press, Standford, 1963. Academic Press, New-York, 1980.
- [64] J. KURZWEIL, *On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion*, Academic Press, New-York, 1980.
- [65] P.L. LA SALLE & S. LEFSCHETZ, *Stability by Lyapunov's direct method with applications*, Academic Press, New York, 1961.
- [66] P.L. LIONS, *Two remarks on the convergence of convex functions and monotone operators*, Nonlinear Analysis, Vol. 2, No. 5, pp 553-562, 1978.
- [67] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod, 1969.
- [68] J.L. LIONS, *Quelques remarques sur les inéquations variationnelles*, Séminaires Jean Leray, No. 3, 1969, p. 23-30.
- [69] J.L. LIONS, G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., 20, pp 493-519, 1967.
- [70] R. LOZANO & B. BROGLIATO, *Adaptive control robot manipulators with flexible joints*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 2, February 1992.
- [71] A. LIAPOUNOFF (LYAPUNOV), *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 2, tome 9, p. 203-474, 1907.
- [72] A. N. MICHEL, L. HOU & D. LIU *Stability of dynamical systems, continuous, discontinuous and discrete systems*, Birkhauser, Bostons, Basel, Berlin.
- [73] R. K. MILLER & A. N. MICHEL, *Ordinary differential equations*, Academic Press, 1982.
- [74] J. K. MILLS & D. M. LOKHORST, *Stability and control of robotic manipulators during contact/noncontact task transition*, IEEE Transactions on robotics and Automation, Vol. 9, No. 3, June 1993.
- [75] B.S. MORDUKHOVICH, *Variational analysis and generalized differentiation I*. Springer, Berlin, 2006.
- [76] J.J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Jean Leray, No. 2, 1966-1967, p. 1-108.

- [77] E. MOULAY, *Une Contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lille, Décembre 2005.
- [78] E. MOULAY & W. PERRUQUATTI, *Finite time stability of differentials inclusions*, IMA J. Math. Control Info., 2005 ; No. 22, pp. 465-475.
- [79] E. MOULAY & W. PERRUQUATTI, *Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems*, J. Math. Anal. Appl., 2006, vol. 323, No. 22, pp. 1430-1443.
- [80] A. NAGURNAY, *Variational inequalities*, Isenberg School of Management University of Massachusetts Amherst, MA 01003, 2002.
- [81] S. NICOSIA & P. TOMEI, *Output feedback control of flexible joint robots*, Manuscript received July 15, 1993.
- [82] Y. ORLOV, *Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems*, SIAM, J. Control Optim., 2004, vol. 43, No. 4, pp. 1253-1271.
- [83] R. ORTEGA, A. LORIA, R. KELLY & L. PRALY *On passivity-based output feedback global stabilization of Euler-Lagrange systems*, Proceedings of 33rd Conference on Decision and control, Lake Buena Vista, FL-December 1994.
- [84] B. PADEN & S. SASTRY, *A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators*, IEEE Transaction on Circuits and Systems, Vol. Cas-34, No. 1, January 1997, 73-8.
- [85] P. D. PANAGIOTOPOULOS, *Inequality problems in mechanics and applications, convex and nonconvex energy functions*, Birkhäuser, Basel, 1985.
- [86] P. D. PANAGIOTOPOULOS, M. FUNDO & V. RADULESCU, *Existence theorems of Hartman-Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications*, Journal of Global Optimization, 15, 41-54, 1999.
- [87] P. R. PAGILLA, *Control of contact problem in constrained Euler-Lagrange systems*, IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 46, No. 10, October 2001.
- [88] E. P. RYAN, *An integral invariance principle for differential inclusions with applications in adaptive control*, SIAM J. Control and Optim., Vol.36, May 1998, No.3, 960-980.
- [89] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [90] R. T. ROCKAFELLAR & R.J.-B. WETS, *Variational analysis*. Springer, Berlin, 1997.
- [91] V. SANTIBANEZ, R. KELLY & M. A. LLAMA, *A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 13, No. 3, June 2005.
- [92] D. SHEVITZ & B. PADEN, *Lyapunov stability theory of nonsmooth systems*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 39, No. 9, September 1994, 1910-1914
- [93] S. SHISHKIN, R. ORTEGA, D. HILL & A. LORIA, *On output feedback stabilization of Euler-Lagrange systems with nondissipative forces*, Proceedings of 34rd Conference on Decision and control, New Orleans, LA-December 1995.

- [94] R. E. SHOWALTER, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*. Mathematical Surveys and Monographs 49. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [95] G. V. SMIRNOV, *Introduction to the theory of differential inclusions*, VOL. 41, GRADUATE STUDIES IN MATHEMATICS 2002.
- [96] G. STAMPACCHIA , *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. ACAD. SCI. PARIS, 258, PP 4413-4416, 1964.
- [97] G. STAMPACCHIA , *Variational inequalities, theory and applications of monotone operators*, A. GHIZZETTI ODERISI GUBBIO, 1969.
- [98] F. TOMARELLI, *Noncoercive variational inequalities for pseudomonotone operators*, PREPRINT 1993.
- [99] L.K. VY & D. D. ANG, *Frictional contact of an elastic body with a rigid support*, NONLIN. ANAL. TMA, VOL. 25, NO. 24, PP 339-343, 1995.
- [100] T. YOSHIZAWA, *Stability theory by Liapunov's second method*. THE MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPON, 1966.
- [101] F. ZHANG, D. M. DAWSON, M. S. DE QUEIROZ & W. E. DIXON, *Global adaptive output feedback tracking control of robot manipulators*, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 45, NO. 6, JUNE 2000.
- [102] Q. J. ZHU, *Lower semicontinuous Lyapunov functions and subdifferential calculus*, PROCEEDINGS OF 41ST IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, LAS VEGAS, NEVADA USA, DECEMBER 2002.
- [103] V.I. ZUBOV, *Methods of A. M. Lyapunov and their application*, TRANSLATION SERIES (PHYSICS), 1963. TRANSLATED FROM A PUBLICATION OF THE PUBLISHING HOUSE OF LENINGRAD UNIVERSITY, 1957.

Index

- CÔNE :
- barrière, 19
 - normal, 11
 - récession, 18
 - tangent, 12
- CÔNE :
- saillant, 12
- CONDITION :
- compacité, 42
 - compatibilité, 42
 - croissance linéaire, 90
- CONVEXE :
- ensemble, 11
 - enveloppe, 11
 - fonction, 12
- DÉRIVÉE :
- directionnelle, 13
 - directionnelle généralisée, 15
 - orbitale inférieure, 92
 - orbitale supérieure, 92
- DIFFÉRENTIEL :
- sous-différentiel, 14
 - sous-différentiel de Clarke, 15
- ENSEMBLE :
- bien positionné, 47
 - invariant, 29
 - limite, 28
 - résolvant, 46
- EQUILIBRE :
- asymptotiquement stable, 24
 - attractif, 24
 - Instable, 24
 - stable, 24
- stable en temps fini, 81
- FONCTION :
- épigraphe de, 12
 - coercive, 22
 - convexe, 12
 - définie négative, 26
 - définie positive, 26
 - de classe \mathcal{K} , 26
 - de classe \mathcal{K}_∞ , 27
 - domaine de, 12
 - indicatrice, 13
 - localement lipschitzienne, 15
 - propre, 12
 - récession, 18
 - semi-continue inférieurement, 12
 - semi-continue supérieurement, 12
 - semi-définie négative, 26
 - semi-définie positive, 26
 - strictement convexe, 12
 - support, 19
- GRADIENT :
- sous-gradient, 14
 - sous-gradient de Clarke, 15
- INÉQUATION HÉMIVARIATIONNELLE :
- d'évolution, 89
- INÉQUATION VARIATIONNELLE :
- d'évolution, 76
 - pseudo-monotone, 40
 - stable, 55
- INÉQUATIONS VARIATIONNELLE :
- semi-coercive, 45
- MATRICE :
- d'inertie, 106

forces centrifuges et Coriolis, 107

MULTI-APPLICATION :

bornée, 16

compacte, 16

domaine, 16

graphe, 16

image, 16

lipschitzienne, 17

propre, 16

semi-continue inférieurement, 17

semi-continue supérieurement, 17

stricte, 16

OPÉRATEUR :

(α, η) -fortement monotone, 81

α -coercif, 38

coercif, 38

hémicontinu, 40

maximal monotone, 17

monotone, 17

pseudo-monotone, 40

semi-coercif, 46

PROBLÈME :

complémentarité, 78

optimisation convexe, 22

CONJUGUÉE DE FENCHEL, 18

INF-CONVOLUTION, 20

ORBITE, 28

PRINCIPE D'INVARIANCE, 28

POLAIRE, 11

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous étudions les problèmes unilatéraux et leurs applications. Cette thèse se divise en deux parties. La première partie est consacrée à l'étude des inéquations variationnelles semi-coercives linéaires. Le but est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du problème par rapport à la perturbation des données. Pour cela, nous essayons de caractériser l'intérieur topologique de l'ensemble résolvant associé au problème. Ces résultats théoriques sont prouvés à l'aide des outils de l'analyse de récession. Nous discutons quelques applications de ces résultats abstraits à la fois en électronique et en mécanique. La seconde partie porte sur l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des inéquations variationnelles ($\mathcal{IV}\mathcal{E}$) et hémivariationnelles ($\mathcal{IH}\mathcal{E}$) d'évolution. Dans un premier temps, nous rappelons quelques résultats de stabilité des ($\mathcal{IV}\mathcal{E}$) portant sur l'étude des fonctions de Lyapunov et du principe d'invariance de La Salle. Ensuite, nous donnons deux conditions suffisantes et une condition nécessaire pour établir la stabilité en temps fini (S.T.F.) de l'équilibre des ($\mathcal{IV}\mathcal{E}$). Ces résultats sont appliqués aussi au problème de complémentarité. Dans un second temps, on étudie la stabilité de Lyapunov des ($\mathcal{IH}\mathcal{E}$). Nous donnons une extension du principe d'invariance de La Salle ainsi qu'une étude de la S.T.F. Dans les deux cas considérés, les résultats trouvés utilisent des fonctions de Lyapunov de classe C^1 . Finalement, nous étudions la stabilité des systèmes de type Euler-Lagrange soumis à une force de frottement sec. Nous appliquons le résultat obtenu à un problème issu de la mécanique.

MOTS-CLÉS. Analyse convexe, analyse de récession, opérateur semi-coercif, inéquation variationnelle, inéquation hémivariationnelle, inclusion différentielle, stabilité de Lyapunov, principe d'invariance de La Salle, stabilité en temps fini, système Euler-Lagrange, frottement de Coulomb, circuit électrique.

ABSTRACT. In this thesis, we study the unilateral problems and their applications. It is divided in two parts. The first part is dedicated to the study of the linear semi-coercive variational inequalities. The aim is to give necessary and sufficient conditions for the stability of the problem with respect to data perturbation. For that, we try to characterize the topological interior of the resolvent set associated to the problem. These theoretical results are proved by using of the recession analysis. Some applications of the abstract results in mechanics and in electronic circuits involving devices like ideal diode and practical diode are discussed. The second part concerns the study of the Lyapunov stability for the variational (\mathcal{VEI}) and hémivariational (\mathcal{HEI}) evolution inequalities. First, we recall some results of stability of (\mathcal{VEI}) using Lyapunov's functions and La Salle's invariance principle. Moreover, we give two sufficient conditions and a necessary condition to establish the finite-time stability (F.T.S.) of the equilibrium of (\mathcal{VEI}). These results are also applied to the complementarity problem. Second, we study the Lyapunov stability of (\mathcal{HEI}). We give an extension of the La Salle principle invariance as well as a study of the F.T.S.. In both cases considered, the results found use Lyapunov's functions of class C^1 . Finally, we study the stability of Euler-Lagrange's systems subjected to a dry friction. The result found is applied to a mechanical problem.

KEYWORDS. Convex Analysis, Recession Analysis, Semi-Coercive Operator, Variational Inequality, Hémivariational Inequality, Differential Inclusion, Lyapunov Stability, La Salle Principle Invariance, Finite-Time Stability, Euler-Lagrange Systems, Coulomb Friction, electrical circuit.