

UNIVERSITE DE LIMOGES
ECOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

XLIM – Département « O.S.A. »

Thèse N° 16-2008

Thèse
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Electronique des Hautes Fréquences, Optoélectronique
Spécialité : Télécommunications

présentée et soutenue par

Claude GANGNANT

le 27 juin 2008

Contribution à l'étude de la cartographie et la statistique du champ électromagnétique dans une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes par une méthode hybride FDFD/développement modal.

Thèse dirigée par Monsieur Alain REINEIX

JURY :

Président :

Patrick VAUDON

Professeur

Université de Limoges, XLIM, Dépt. « O.S.A. », Limoges

Rapporteurs :

Françoise PALADIAN

Professeur

Université Blaise Pascal – Clermont II, LASMEA, Aubière

Odile PICON

Professeur

Université Marne la Vallée, ESYCOM, Marne la Vallée

Examineurs :

Frédéric HOËPPE

Ingénieur

Société NEXIO, Toulouse

Alain REINEIX

Directeur de Recherche CNRS

Xlim, Dépt. « O.S.A. », Limoges

Invité :

Bernard PECQUEUX

Ingénieur

Centre d'Etudes de Gramat, Gramat

Remerciements

Mon statut particulier d'enseignant de lycée à plein temps, au cours de cette thèse, m'a amené à cotoyer moins de personnes que les doctorants habituels. Les remerciements que j'adresse à un nombre plus restreint de personnes s'en retrouvent d'autant plus profonds et sincères.

Tout d'abord je tiens à exprimer ma plus grande gratitude envers Monsieur le Professeur Patrick VAUDON, responsable du DEA « Télécommunications Hautes Fréquences et Optiques » de l'Université de Limoges, qui m'a permis de m'inscrire et de réaliser mon stage dans les conditions particulières imposées par ma situation. Sans cette première étape, loin d'être un obstacle facilement franchissable, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je le remercie de plus d'accepter de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie mon Directeur de thèse, Alain REINEIX, directeur de recherche au sein de Xlim de m'avoir accueilli dans son équipe, tant pour le stage de DEA que pour les travaux de doctorat lui faisant suite. Il a su me proposer dans chaque cas, des travaux s'adaptant une fois de plus à mon statut, et qu'il soit bien assuré que j'ai pleinement conscience des difficultés engendrées.

Je remercie Madame le Professeur Odile PICON, de l'université de Marne la Vallée, ainsi que Madame le Professeur Françoise PALADIAN de l'université de Clermont-Ferrand de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également Frédéric HOEPPE d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.

Je remercie particulièrement Christophe GUIFFAUT, chargé de recherche au sein de l'équipe « CEM » pour ces précieux conseils en informatique, tant sur Linux que sur Windows. Qu'il sache que j'ai apprécié les nombreuses discussions et interventions sur des points aussi variés que l'électromagnétisme, la programmation, la mise en page, mais aussi... les programmes scolaires, les énigmes mathématiques et bien d'autres sujets intéressants.

Je remercie également Omar DAFIF, Ingénieur CNRS au sein de l'équipe « CEM » pour ses discussions intéressantes sur les antennes et les CRBM et sur des sujets variés que l'on rencontre dans la vie.

Merci à François TORRES, pour ses conversations très instructives sur les cavités, l'électromagnétisme et pour ses débats ...humoristiques.

Je remercie l'équipe du Centre de Recherches des Armées de GRAMAT, notamment Bernard PECQUEUX d'avoir prêté une oreille attentive à mes travaux. C'est avec plaisir que nous l'invitons à ma soutenance.

Un Merci particulier à Michel AUBOURG, pour son intervention cruciale sur le Cluster de l'Université de Limoges pour la résolution d'un système par « matrices creuses ». Son travail acharné a largement contribué à alléger le mien, à un moment où j'en avais particulièrement besoin.

Merci à l'équipe de Laurent HAGERMAN de m'avoir donné la possibilité d'utiliser le Cluster à partir de mon domicile, possibilité qui a grandement facilité ma tâche.

Merci aux autres doctorants, Moustafa EL-HAFFAR, Bruno BEN-M'HAMED et ceux que j'oublie pour leur aide plus ponctuelle mais non moins précieuse (transmissions de bibliographies, de résultats expérimentaux sur la CRBM de Xlim, de photographies, etc...), ainsi que pour leurs conversations intéressantes.

Merci à Nadine AYMARD, secrétaire de l'équipe « Diffraction Electromagnétique » dont le dévouement et la compétence n'ont plus à être mis en évidence.

Merci à Patrick TEMPLÉREAU, professeur Agrégé de Mathématiques au lycée Blaise Pascal de Châteauroux, pour son aide en topologie.

Merci à ma famille, notamment mon épouse, mes trois enfants et ma petite fille, ainsi qu'à mes parents pour leur soutien sans faille et leur fierté de me voir produire ce travail.

Merci évidemment, à tous ceux que je n'ai pas cités et qui se reconnaîtront.

Sommaire

Introduction Générale.....	9
Chapitre I.....	11
Chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM)	11
I. Description d'une chambre réverbérante	11
II. Principe de fonctionnement des CRBM	13
III. Etat de l'art dans l'étude des CRBM	16
III.1. Simulations numériques	16
III.2. Modélisation du champ de la CRBM	16
III.2.1. Ondes planes aléatoires	17
III.2.2. Décomposition en modes de cavité ou de guide	18
IV. Plan de la thèse	19
Chapitre II	23
Obtention des modes de base.....	23
I. Equation d'Helmholtz	23
II. Discrétisation de l'équation d'Helmholtz	26
II.1. Discrétisation d'une section de forme quelconque : aspect maillage	26
II.2. Discrétisation d'une section de forme quelconque : aspect équations	27
II.3. Cas d'une section de forme rectangulaire	28
III. Visualisation des modes élémentaires (vecteurs propres)	33
III.1. Valeurs propres numériques en section rectangulaire	33
III.2. Vecteurs propres numériques en section rectangulaire.....	38
IV. Approximation polygonale d'une section de forme circulaire	43
IV.1. Valeurs propres numériques en section circulaire	46
IV.2. Vecteurs propres numériques en section circulaire	48
V. Conclusion du Chapitre II	52
Chapitre III.....	55
Produits scalaires permettant de réaliser le développement modal	55

I. Définition d'un produit scalaire	55
I.1. Produit scalaire analytique en section rectangulaire	55
I.2. Produit scalaire analytique en section circulaire	57
I.3. Produit scalaire discrétisé en section rectangulaire	57
I.4. Produit scalaire discrétisé en section circulaire.....	60
II. Calculs de poids et reconstruction de cartographie en section rectangulaire	61
III. Calculs de poids et reconstruction de cartographie en section circulaire	66
IV. Exemples d'éléments propres en section quelconque	71
IV.1. Objectifs	71
IV.2. Sections s'appuyant sur le cercle.....	71
IV.2.1. Section de forme semi-circulaire	71
IV.2.2. Section semi-circulaire tronquée latéralement	73
IV.2.3. Section semi-circulaire tronquée latéralement et échancrée	74
IV.3. Sections concaves s'appuyant sur une forme rectangulaire	76
V. Conclusion du chapitre III	77
Chapitre IV	79
Mise en œuvre d'une méthode Différences Finies dans le Domaine Fréquentiel (FDFD) pour l'étude des cavités	79
I. Position du problème et mise en œuvre	79
II. Maillage de toute la cavité pour code FDFD en 3D	86
II.1. Besoins en terme de mémoire	86
II.2. Besoins en temps de calcul	87
II.3. Prise en compte des pertes	88
II.4. Simulations	91
II.4.1. Généralités sur le protocole de simulation.....	91
II.4.2. Résultats des simulations sur un PC	92
II.4.2.1. Visualisation simultanée dans 3 plans $x=cte$, $y=cte$ et $z=cte$	94
II.4.2.2. Visualisation simultanée dans plusieurs plans $z=cte$	98
II.4.2.3. Visualisations séparées des plans $x=cte$, $y=cte$ et $z=cte$	101
II.4.3. Simulations exigeant plus de ressources.....	106

II.4.3.1. Simulation d'un mode isolé à 251 MHz.....	106
II.4.3.2. Simulation d'un mélange de modes à 550 MHz.....	107
III. Conclusion du chapitre IV	108
Chapitre V.....	109
Hybridation FDFD/Développement modal.....	109
I. Présentation de la méthode	109
II. Equations au niveau de la zone de séparation	110
III. Validation sur cavité parallélépipédique sans brasseur	117
IV. Cavité parallélépipédique avec brasseur	135
IV.1. Modélisation du brasseur.....	135
IV.2. Modifications des équations dues à la présence du brasseur.....	137
IV.3. Applications à la CRBM	138
V. Conclusion du chapitre V	141
Chapitre VI.....	143
Etude statistique	143
I. Objectifs du chapitre	143
II. Traitement des données	146
III. Validation sur la CRBM de Xlim	151
III.1. Données de la simulation et objectifs poursuivis	153
III.2. Résultats de simulations pour la CRBM de Xlim.....	155
III.2.1. Validation des lois statistiques	155
III.2.2. Etude de l'isotropie	160
III.2.3. Etude de l'uniformité.....	163
III.2.4. Etude de la corrélation.....	167
III.2.5. Etude de l'indépendance des échantillons en fonction de la position du brasseur .	170
IV. Conclusion du chapitre VI	174
Conclusion générale et perspectives d'amélioration	177
Conclusion	177
Perspectives d'amélioration	178

ANNEXES.....	181
Annexe 1.....	183
Conditions aux limites	183
Annexe 2.....	187
Expression des composantes transversales en fonction de la composante longitudinale, en ondes progressives	187
Annexe 3.....	191
Expression du champ électromagnétique en fonction de la composante longitudinale, en ondes stationnaires	191
Annexe 4.....	193
Expression du champ électromagnétique en section rectangulaire, en ondes progressives	193
Annexe 5.....	195
Expression du champ électromagnétique en section rectangulaire, en ondes stationnaires.	195
Annexe 6.....	197
Expression du champ électromagnétique en section circulaire, en ondes progressives	197
Annexe 7.....	201
Expression du champ électromagnétique en section circulaire, en ondes stationnaires	201
Annexe 8.....	203
Produit scalaire en section rectangulaire	203
Annexe 9.....	207
Produit scalaire en section circulaire	207
Annexe 10.....	211
Lois statistiques utilisées dans la thèse	211
Annexe 11.....	217
Orthogonalité des modes en section de forme quelconque	217
Bibliographie	219

Introduction Générale

Depuis plus d'une trentaine d'années, on assiste au développement des télécommunications et de nombreux systèmes sans fils (Wi Fi, Bluetooth,...) qui sont autant de sources de perturbation potentielles. Parallèlement, le nombre de systèmes électroniques sensibles est en augmentation constante notamment en ce qui concerne l'électronique embarquée (véhicule automobile). Aussi, se pose le problème crucial de la compatibilité entre les perturbateurs (sources de rayonnement) et les systèmes perturbés. Il est aussi à noter que divers systèmes électroniques peuvent se perturber entre eux.

Une autre problématique est liée à l'avènement des téléphones portables (entre autres), et le développement sans précédent de ce domaine ont rendu encore plus nécessaire l'étude des interactions des ondes électromagnétiques avec le « **vivant** ». Les CRBM sont pressenties comme étant un des outils appropriés dans cette démarche [36] [52].

Afin de palier ces problèmes il existe aujourd'hui des normes (depuis 1996) qui sont autant de règles que doivent suivre les nouveaux systèmes électronique mis sur le marché. Ces règles s'appliquent aussi bien aux problèmes de rayonnement parasite que d'immunité face aux parasites. La difficulté de vérifier si un système « passe » la norme provient de la manière de mesurer soit son rayonnement soit son immunité. En effet, ces mesures doivent être réalisées par des organismes qualifiés d'une part et les mesures doivent être reproductibles d'un site à l'autre d'autre part.

Toutes ces considération montrent la nécessité de posséder un moyen de test performant, le plus simple possible afin d'assurer la reproductibilité et le plus insensible possible aux parasites éventuels extérieurs susceptibles de venir polluer la mesure. Parmi les diverses solutions qui se proposent à nous pour tester ces caractéristiques nous avons :

- Les essais en espace libre, nécessitant de nombreux changements d'orientation et de polarisation de l'antenne émettrice du champ « perturbateur », ainsi que de la position relative source-objet testé.
- Les chambres **anéchoïques**, dont les murs sont tapissés de matériaux absorbants souvent d'un coût important, dont la qualité se dégrade avec le temps et qui ne supportent pas forcément des champs forts, notamment à cause des risques d'incendie.
- Les **chambres réverbérantes à brassage de modes (CRBM)**, dont les murs sont, au contraire, métallisés.

La première solution est longue et complexe à mettre en œuvre. En plus des divers changements de positions nécessaires, il faut rajouter des variations de gamme de fréquences. Les chambres anéchoïques, de par leur nature, génèrent des conditions d'essais se rapprochant de la première solution.

Nous constatons donc depuis quelques années une augmentation sensible de l'utilisation de CRBM, qui au contraire des autres moyens, ne nécessite pas d'intervenir au niveau du positionnement de l'objet sous test [76]. Comme nous aurons l'occasion de le constater tout au long de cette thèse, le rôle des CRBM est de créer à l'intérieur de l'enceinte un champ électromagnétique **uniforme** et **isotrope**. De cette façon, l'objet testé (carte électronique, blindage d'un composant etc...) est **peu sensible** à son orientation et à l'endroit où on le positionne au sein de l'enceinte.

A l'instar de nombreux domaines dans lesquels les expérimentations sont relativement coûteuses et difficiles à mettre en œuvre, il y a deux façons d'analyser les résultats d'une manipulation :

- Expérimentation complète, qualifiée de **réelle**
- Simulation numérique, qualifiée de **virtuelle**

C'est justement les CRBM qui sont l'objet d'étude de cette thèse et particulièrement l'aspect **simulation numérique** du champ électromagnétique à l'intérieur de ces enceintes. L'objectif de ce travail est la mise en place d'un **code informatique** permettant de réaliser la simulation de la cartographie du champ électromagnétique, ainsi que l'étude de la **statistique** de ce champ, dans la CRBM à partir de données de l'excitation par des antennes filaires. Les hypothèses de travail seront celles d'une excitation harmonique, et la méthode de **base** sera la **DFD** (Frequency Domain Finite Difference).

L'étude que nous proposons dans le cadre de cette thèse suit un déroulement progressif allant de la mise en oeuvre des outils de calcul (méthode modale et DFD) qui vont être utilisées et hybridées, jusqu'à la détermination des caractéristiques statistiques. Une comparaison entre la simulation et l'expérimentation sur la **CRBM de Xlim** sera finalement effectuée. Le mémoire se compose comme suit :

- Le **chapitre I** présentera la composition des CRBM, leur rôle et utilisation, ainsi que les deux principales modélisations du champ aléatoire, à savoir les ondes planes (David A. Hill) et la décomposition en modes de cavité ou guide.
- Le **chapitre II** posera les premières pierres de l'hybridation DFD/Développement modal, par résolution de l'équation d'Helmholtz, numériquement (en 2D). Sa résolution fournira les **éléments propres numériques** nécessaires à la méthode hybride.
- Le **chapitre III** définira un **produit scalaire** (analytique, puis numérique) dans lequel les divers vecteurs propres du chapitre précédent formeront une base orthogonale pour des guides cylindriques (section quelconque). Des calculs de poids de modes, ainsi que des reconstructions de cartographies seront effectués en section rectangulaire et circulaire. Des cartes de la composante longitudinale du champ seront présentées, en section quelconque.
- Le **chapitre IV** réalisera le code DFD « classique » avec maillage de toute l'enceinte, et fera apparaître la nécessité d'utiliser des méthodes « matrices creuses ». Les résultats seront validés par comparaison avec l'analytique.
- Le **chapitre V** sera consacré à la méthode **hybride DFD/Développement modal** et nous mettrons en évidence les avantages de la méthode, notamment en termes de temps de calcul, par rapport à la méthode « DFD classique ». Nous utiliserons largement les éléments propres numériques, calculés au **chapitre II**. Là encore, les résultats seront validés par comparaison avec l'analytique.
- Le **chapitre VI** donnera lieu à une validation des résultats par **étude statistique**, et notamment des confirmations des lois suivies par diverses grandeurs concernant le champ électromagnétique. Une comparaison **simulation/expérimentation** sera effectuée sur la CRBM de Xlim.
- La partie « **conclusion générale et perspectives d'amélioration** » analysera les étapes des divers chapitres du mémoire et proposera des travaux possibles dans la continuité de cette thèse, ainsi que les améliorations les plus réalistes à envisager.

Chapitre I

Chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM)

I. Description d'une chambre réverbérante

La chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM) se présente comme une enceinte dont les parois internes sont entièrement métallisées. Elle possède donc toutes les propriétés d'une cavité métallique, d'après la définition que l'on peut trouver dans les cours « classiques » d'électromagnétisme. Sa particularité est d'être munie d'un (ou plusieurs) brasseur(s) métallique(s), mobile(s) autour d'un axe, mis en mouvement par un moteur pas-à-pas ou à courant continu.

Un système **d'émission** (antenne filaire, cornet...) et de **réception** (antenne réceptrice, sonde...) couplé à divers appareils (ordinateur, analyseur de réseau...) permettent la mesure du champ, de puissance, etc... ceci de manière automatisée, en général.



Figure 1 : Vue extérieure de la CRBM de Xlim sur laquelle on aperçoit les divers appareils de mesure, ainsi que les ports permettant la communication intérieur ↔ extérieur



Figure 2 : Vue intérieure de la CRBM de Xlim, sur laquelle on constate la métallisation complète des parois. On aperçoit le brasseur sur la gauche ainsi que son axe de rotation et sur la droite, on remarque la présence du système d'émission.

Dans ce qui suit, on considérera dans une CRBM, deux parties distinctes appelées respectivement « zone de diffraction » et « zone de mesure ». Comme nous le verrons par la suite, il est possible de définir une surface **fictive** dans le plan xOy délimitant les deux régions (**Figure 3**). La « zone de diffraction » correspond à la partie contenant le brasseur et l'antenne émettrice produisant le champ, la « zone de mesure » est alors une « demi-cavité court-circuitée à une extrémité », dans laquelle nous pouvons **analytiquement** établir les expressions du champ électromagnétique en distinguant les modes TM et TE .

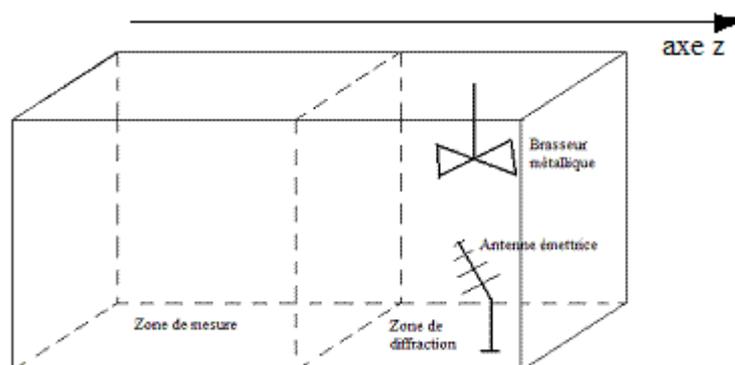


Figure 3 : Diverses parties d'une chambre réverbérante à brassage de modes parallélépipédique

Sur la **Figure 3**, le système de réception a été volontairement omis, car il est considéré comme « peu perturbateur » : sa présence sera négligée dans le code réalisé au cours de cette thèse. Cette hypothèse reste valable dans des **expérimentations** concernant des objets sous test de dimensions faibles devant la longueur d'onde utilisée.

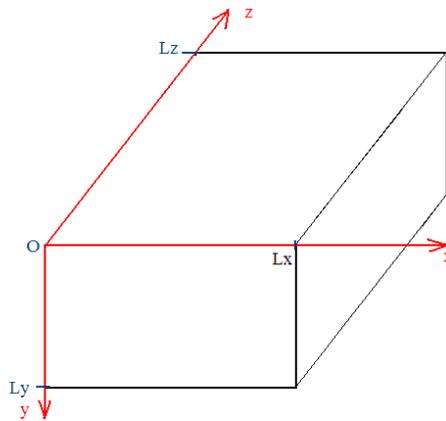


Figure 4 : Notations utilisées par la suite et orientations des axes de la CRBM

II. Principe de fonctionnement des CRBM

Les CRBM permettent de **simuler** les ambiances électromagnétiques perturbatrices auxquelles sont soumis les divers matériels (cartes électroniques, câbles ...) à l'intérieur d'enceintes métalliques (cockpit d'avions, enveloppes de missiles ...). Elles ont été créées dans un but de pouvoir tester rapidement des systèmes électroniques et valider la fiabilité de ces derniers, en particulier ceux susceptibles d'être soumis à des forts niveaux de champs. Les CRBM sont aussi utilisées en **métrologie**, notamment pour le câlilage et la caractérisation de sondes de courant [30]

De manière plus générale, elles permettent aussi de tester la susceptibilité d'un système à une perturbation rayonnée, pouvant correspondre à une perturbation en espace libre, sans qu'une direction privilégiée de ladite perturbation ne soit envisagée. Cette possibilité fait jouer aux CRBM un rôle se rapprochant de celui des **chambres anéchoïques**, avec des différences de taille :

- Les puissances générées par les antennes excitatrices sont moindres, à intensité de champ égale.
- Le coût d'une CRBM est moindre : le prix des absorbants utilisés en chambres anéchoïques auquel nous devons rajouter l'utilisation d'amplificateurs de puissance est nettement plus élevé que celui de l'acquisition d'une CRBM.
- Il n'est pas nécessaire de renouveler les essais sur un dispositif testé (**Device Under Test**), pour changer les conditions de polarisation, de direction des ondes planes qui illuminent le **DUT**..., ceci constituant même une des propriétés essentielles d'une CRBM.

Bien qu'inventées dans les années 60 [1] [6], les CRBM sont de plus en plus utilisées en compatibilité électromagnétique (CEM), surtout depuis le début des années 1990 (Bernard DEMOULIN, en France), pour vérifier l'immunité d'équipements électroniques.

L'objectif du brasseur est de modifier les **conditions aux limites** dans le but d'obtenir en fonction de sa position (définie par un angle de rotation), une superposition différente des divers modes de guide (ondes stationnaires), ceci dans la zone de test. De manière simplifiée, nous pouvons dire que le champ dans la zone de diffraction est « perturbé » et ne correspond pas aux « études classiques ». Ceci

est dû au fait que nous ne nous trouvons pas dans les hypothèses d'une invariance par translation suivant l'axe z , à cause de la présence du brasseur métallique et de l'antenne émettrice.

En revanche dans la zone de test, assez éloignée du brasseur, nous pouvons considérer, à cause de l'invariance par translation suivant l'axe z que le champ électromagnétique est une superposition des divers modes « classiques » de guide. C'est pour cette raison que nous parlons de « **brassage de modes** ».

Grâce aux parois métalliques, une quantité importante d'énergie se retrouve confinée dans un espace relativement réduit, dû aux diverses réflexions du champ électromagnétique sur ces parois. La puissance fournie par l'antenne émettrice sera relativement faible, en dépit d'un champ électromagnétique de niveau fort à l'intérieur de la CRBM. Nous verrons que ceci pourra être obtenu en excitant la cavité à une fréquence relativement élevée, par rapport à la plus basse fréquence de résonance de cette dernière.

Dans une cavité de géométrie « statique », existent des zones où l'amplitude du champ varie spatialement de manière importante, à cause de phénomènes d'ondes stationnaires bien connus qui prennent naissance : présence de maxima et minima (ventres et nœuds). Il est alors difficile, d'une expérimentation à l'autre, de retrouver exactement la même distribution spatiale du champ, à cause de la difficulté de réaliser exactement la même configuration. On se heurte alors au problème crucial de la reproductibilité, au sens **déterministe**.

En revanche un changement de géométrie, dès lors qu'il est suffisamment important permet déplacer les lieux des maxima et minima, et une « bonne » CRBM permet d'espérer obtenir en tout point une valeur significative du champ. Etant donné le nombre importants de configurations possibles, nous pourrions caractériser le champ à l'intérieur de l'enceinte par une étude **statistique**.

Les CRBM sont particulièrement indiquées dans les cas où les fréquences perturbatrices sont telles que la longueur d'onde est plus petite que les dimensions de la cavité : on parle alors de « **cavité surdimensionnée** ». Il existe diverses manières d'obtenir ce brassage de modes :

- Le brassage **électronique** : la cavité, de géométrie fixe, est excitée sur une bande de fréquence autour d'une fréquence centrale. En fonction de la fréquence « instantanée », des modes différents seront excités et ces diverses résonances généreront un changement important de la distribution spatiale du champ électromagnétique.
- Le brassage **mécanique par variation d'une des dimensions** de la cavité, par exemple la longueur L_z variant sinusoïdalement suivant la loi :

$$L_z(t) = L_0 + \Delta L \sin(2\pi f_w t) \quad [14]$$

avec $f_w \ll f$, f étant la fréquence des antennes excitatrices.

En fonction de la longueur « instantanée », la cavité entre en résonance, en excitant des modes différents. Il en résulte donc de la même manière, une variation de la distribution du champ dans la cavité. On parle alors de **Chambres réverbérantes vibrantes**. Une alternative avec des variations **aléatoires** d'une des dimensions est possible [78]

- Le brassage **mécanique** avec introduction d'un ou plusieurs brasseurs métalliques. Ceux-ci doivent perturber suffisamment la structure modale, par modifications des conditions aux limites. Le résultat sera similaire aux autres méthodes de brassage, à savoir une variation importante de la distribution spatiale du champ dans la cavité, d'une position du (ou des) brasseur(s) à une autre. C'est ce dernier type de brassage qui est étudié dans cette thèse.

Dans l'hypothèse d'une CRBM **sans pertes**, considérée sans brasseur pour simplifier, il existe une suite discrète de fréquences pour lesquelles l'enceinte entre en résonance, l'amplitude du champ passant alors par des valeurs maximales, **théoriquement infinies**. Il ne peut **théoriquement** pas y avoir de brassages de modes (sauf cas particuliers où plusieurs modes possèdent la même fréquence de résonance, en cas de longueurs L_x , L_y , L_z multiples l'une de l'autre par exemple). La réponse en fréquence de la CRBM est une série de raies (fonctions de Dirac), sans « chevauchement ».

Pour obtenir plusieurs modes, donc des « chevauchements », nous devons augmenter les pertes. Mais ceci se fait au détriment du niveau du champ à l'intérieur de la cavité.

Nous constatons que nous sommes amenés à rechercher un compromis entre un niveau du champ qui soit acceptable et un nombre de modes suffisant. La « philosophie » des CRBM est donc la suivante (on considère à nouveau la présence du brasseur) : en modifiant la position du brasseur, on « décale » légèrement les fréquences de résonance, ce qui **aurait** pour effet de modifier fortement l'amplitude du champ d'une position à l'autre du brasseur, **si la densité de modes par MHz** à la fréquence de l'excitation, était suffisamment faible. **Mais** si la fréquence de travail est suffisamment élevée (au moins 5 fois la fréquence minimale de résonance), la densité de modes devient importante [10], puisque variant suivant le **cube** de la fréquence [77]. Le « décalage » des fréquences de résonance s'accompagne alors systématiquement d'une entrée en résonance d'une « raie voisine ». On peut ainsi assurer **simultanément** un bon brassage et un niveau de champ élevé.

Examinons les critères permettant de considérer que nous sommes en présence d'un « bon brassage » :

- La première propriété visée est **l'isotropie** : elle consiste à considérer qu'en un point quelconque, les ondes planes équivalentes (voir **paragraphe suivant** sur la modélisation du champ de la CRBM) arrivent de toutes les directions. L'isotropie garantit donc **de manière statistique** qu'en tout point, des ondes planes arrivent de **toutes les directions**, avec **toutes les polarisations**.

Sur le plan pratique, les valeurs prises en moyenne (moyenne calculée en plusieurs points, suivi d'un calcul de « la moyenne de la moyenne » sur un tour de brasseur) par les diverses grandeurs E_x , E_y et E_z ne doivent pas différer de plus de 3 dB en valeurs relatives, à partir d'une certaine fréquence minimale. Cette propriété permet en expérimentation, de ne pas avoir besoin de tourner l'objet sous test.[65]

- La deuxième propriété visée est **l'uniformité du champ** : elle consiste à considérer qu'en un point quelconque, le module du champ électrique $|E| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2}$ prend les mêmes valeurs en moyenne. Nous devons aussi nous attendre qu'en des points différents, la valeur maximale soit la même. Ainsi, un objet sous test permet l'obtention des mêmes résultats, quelle que soit la position de cet objet dans la CRBM.[65] Là aussi toutes les considérations sont de nature statistique, et en pratique nous admettons une certaine **tolérance** concernant les écarts relatifs constatés d'un point à l'autre.

L'étude du champ dans une CRBM s'effectue par **expérimentation directe** à l'aide de capteurs de champ électrique (champ total ou diverses composantes rectangulaires), reliés aux appareils de mesure (analyseurs de réseaux, wattmètres, PC...) par des câbles coaxiaux ou de préférence par des fibres optiques, pour éviter les perturbations qui en découlent.

Pour augmenter l'uniformité, dans certaines CRBM, les murs « lisses » métalliques sont remplacés par des géométries « granuleuses » ou par des formes empruntées aux diffuseurs **acoustiques** [35].

La norme **EN 61000-4-21** est une norme de Compatibilité Electromagnétique décrivant les techniques d'essai et de mesure en CRBM et les diverses tolérances évoquées ci-dessus. D'après cette

même norme, la fréquence minimale d'utilisation est de 5 fois la première fréquence de résonance de la cavité. Cette norme est utilisée pour les modes pas-à-pas ou continus.

Une autre norme, la norme **RTCA/DO-160** ne s'applique qu'au cas « pas-à-pas ». Les différences entre les deux normes sont mineures :

- nombre de points de mesure pour le câblage, égal à 8 pour la première norme citée et égal à 9 pour l'autre
- nombre de pas de brasseur plus élevé pour la deuxième norme citée.

Parmi les paramètres étudiés, on trouve la forme et les dimensions de la cavité, et surtout la forme et les dimensions du brasseur etc...[29] et autant de paramètres difficiles à changer de manière pratique. C'est une des raisons pour lesquelles, nous utilisons des outils de **simulations numériques**.

Un autre avantage non négligeable de la simulation est que le champ **virtuel** en n'importe quel point est obtenu **sans perturbation**, comme cela peut être le cas dans l'utilisation d'antennes ou de sondes bien **réelles** au cours d'expérimentations [32] .

III. Etat de l'art dans l'étude des CRBM

III.1. Simulations numériques

Diverses méthodes sont utilisées en simulation, par exemple :

- Différences finies dans le domaine temporel (**FDTD**) [6] [30] [52] [53] [61] [62] [79]
- Volumes finis dans le domaine temporel (**VFDT**) [31]
- Méthode des moments dans le domaine fréquentiel (**MoM**) [10] [52]
- Eléments finis dans le domaine fréquentiel (**FEM**) [5] [32] [45] [63] [68] [77]
- Différences finies dans le domaine fréquentiel (**DFD**) [1] [7] [8]
- Tracés de rayons [14] [49]
- Méthode des Eléments finis de Frontière (Boundary Element Method, **BEM**) [74] [79]
- Transmission Line Matrix (**TLM**) [35] [58] [74]

III.2. Modélisation du champ de la CRBM

Les deux principales modélisations directes du champ, sans passer par une discrétisation de toute la cavité sont :

- Décomposition en ondes planes aléatoires, provenant de toutes les directions (Modèle de Hill).
- Décomposition en modes de cavité (ou de guide) (parallélépipédiques ou cylindriques ou d'autres formes de sections éventuellement) . C'est ce modèle qui a été étudié tout au long de cette thèse.

III.2.1. Ondes planes aléatoires

Ce modèle **idéal** rend bien compte des propriétés d'isotropie recherchée dans les CRBM [1] [16] .

Il est basé sur le fait que nous considérons qu'en tout point de l'enceinte CRBM le champ électromagnétique est la superposition d'une infinité d'ondes planes provenant de toutes les directions (angle solide égal à 4π), avec toutes les polarisations : en utilisant les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ), en choisissant l'origine au point considéré, le repère local (O, x, y, z) permettant de définir $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ apparaissant sur la Figure 5. Nous pouvons alors écrire en un point situé à l'origine locale, repéré par sa position absolue \vec{r}

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_{4\pi} \vec{F}(\Omega).e^{j\vec{k}.\vec{r}}.d\Omega \text{ avec le vecteur d'onde } \vec{k} \text{ colinéaire à } \vec{U}_\rho$$

où $d\Omega$ est l'angle solide infinitésimal défini par $d\Omega = \frac{\rho^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{\rho^2} = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

et où $\vec{F}(\Omega)$ est une fonction vectorielle s'écrivant comme une combinaison linéaire de \vec{U}_θ et \vec{U}_φ et définissant la polarisation de l'onde **plane transverse**.

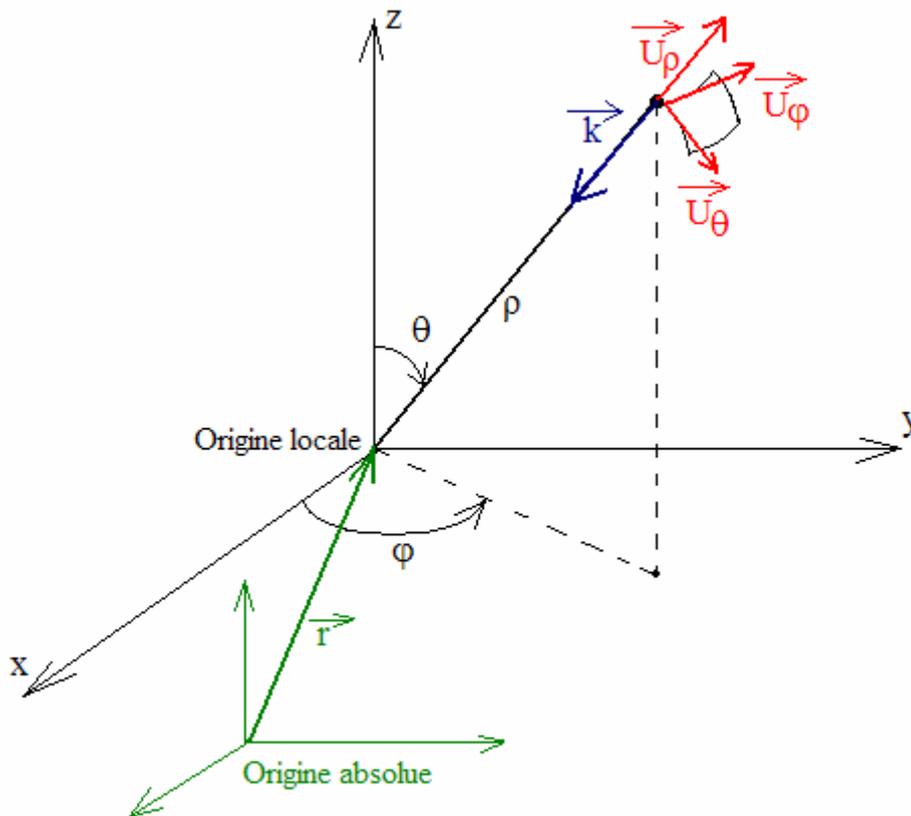


Figure 5 : Notations des coordonnées sphériques

$\vec{F}(\Omega)$ se décompose en 2 polarisations **orthogonales** selon l'écriture :

$$\vec{F}(\Omega) = F_\theta(\Omega).\vec{U}_\theta + F_\varphi(\Omega).\vec{U}_\varphi$$

chaque terme de polarisation étant une grandeur complexe :

$$\begin{cases} F_\theta(\Omega) = F_{\theta r}(\Omega) + iF_{\theta i}(\Omega) \\ F_\varphi(\Omega) = F_{\varphi r}(\Omega) + iF_{\varphi i}(\Omega) \end{cases}$$

Chaque partie réelle et imaginaire étant une **variable aléatoire** variant en fonction de la position du brasseur. Un brassage idéal correspond à des grandeurs $F_{\theta r}, F_{\theta i}, F_{\varphi r}, F_{\varphi i}$ de **moyennes nulles**, et variant de manière **indépendante**, qu'on a coutume de qualifier de « grandeurs **décorrélées** ».

III.2.2. Décomposition en modes de cavité ou de guide

Tout au long de cette thèse, il sera nécessaire de bien faire la distinction entre les modes de **guide** et les modes de **cavité** d'une part et entre les expressions d'**ondes progressives** et **ondes stationnaires** d'autre part. Les expressions sont établies en **Annexe 4** et **Annexe 5**

Les modes de **cavité** se déduisent des modes de **guide** par application de conditions aux limites **supplémentaires** dans la 3^{ème} dimension (dans cette thèse, il s'agira de z).

Pour résumer nous pouvons dire qu'un mode de guide est caractérisé par un **couple d'entiers positifs** (m, n) associé au couple des dimensions (L_X, L_Y), alors qu'un mode de cavité est caractérisé par un **triplet d'entiers positifs** (m, n, p) associé au triplet des dimensions (L_X, L_Y, L_Z)

Dans un premier temps, nous considérerons une enceinte de forme parallélépipédique.

Dans le cas général d'une enceinte de section de forme quelconque, nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un guide invariant par translation suivant l'axe z.

L'objectif est de développer l'expression mathématique des champs électrique et magnétique en tout point de la zone de mesure sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = A_{m,n}^{TM} \cdot \vec{e}_{m,n}^{TM} + A_{p,q}^{TE} \cdot \vec{e}_{p,q}^{TE} \\ \vec{H} = A_{m,n}^{TM} \cdot \vec{h}_{m,n}^{TM} + A_{p,q}^{TE} \cdot \vec{h}_{p,q}^{TE} \end{cases}$$

où chacun des modes élémentaires TM ($\vec{e}_{m,n}^{TM}$ et $\vec{h}_{m,n}^{TM}$) et TE ($\vec{e}_{p,q}^{TE}$ et $\vec{h}_{p,q}^{TE}$) est donné par les expressions établies en **Annexe 5**, dans lesquelles interviennent deux nombres entiers correspondant aux **modes de guide**. Ce développement s'appelle « **Développement modal** ».

Les coefficients $A_{m,n}^{TM}$ et $A_{p,q}^{TE}$ sont appelés « poids » des divers modes concernés.

Le lien entre les deux modélisations ci-dessus provient du fait qu'on peut décomposer les expressions contenant des produits « croisés » de sinus et cosinus en exponentielles complexes (**Annexe 5**) :

Par exemple :

$$\sin(\beta z) \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) = \left(\frac{e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}}{2j} \right) \left(\frac{e^{jk_x x} + e^{-jk_x x}}{2} \right) \left(\frac{e^{jk_y y} - e^{-jk_y y}}{2j} \right)$$

d'où nous pouvons obtenir une **partie** d'une des **composantes d'une** des ondes planes, en développant par rapport au premier terme de chaque parenthèse ci-dessus, nous obtenons ici :

$$-\frac{1}{8}e^{j(k_x x + k_y y + \beta z)} = -\frac{1}{8}e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ avec } \vec{k} = k_x \vec{U}_x + k_y \vec{U}_y + \beta \vec{U}_z$$

qui est bien l'expression générale d'une onde plane.

L'aspect « distribution isotrope » des diverses directions de \vec{k} dans la représentation modale provient des diverses valeurs prises par $\pm k_x, \pm k_y, \pm \beta$, et en observant la **Figure 5**, nous constatons que les vecteurs de base $(\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$ portés par les axes x, y, z et servant à décrire la position de tout point dans la CRBM (espace 3D) peuvent tout aussi bien être considérés comme vecteurs de base de l'espace vectoriel des vecteurs d'ondes \vec{k} .

En développant sur les 3 coordonnées, et en tenant compte des relations entre les angles $\theta, \varphi, k_x, k_y, \beta$ et k_0 , nous arrivons à l'expression **d'une onde plane transverse** pour un couple (m,n), en prenant en compte **les modes TM et TE** :

$$\vec{E} = e^{j(k_x x + k_y y + \beta z)} \left[\frac{k_0 E_0}{2jk_c} A_{m,n}^{TM} \vec{U}_\theta + \frac{k_0 Z_0 H_0}{2jk_c} A_{m,n}^{TE} \vec{U}_\varphi \right]$$

Le facteur entre crochets dans l'expression ci-dessus correspond à $\vec{F}(\Omega)$ et nous constatons l'« équivalence » entre les deux modélisations.

IV. Plan de la thèse

L'objet de cette thèse est l'écriture d'un logiciel de simulation permettant de déterminer la cartographie en 3D du champ électromagnétique à l'intérieur d'une **Chambre Réverbérante à Brassage de Modes**, sur une cavité parallélépipédique, au départ, puis pour une cavité de section quelconque par la suite. Ce logiciel devrait permettre de définir le champ dans les deux zones de diffraction et de mesure d'une CRBM pour une excitation en régime harmonique.

L'objectif principal de cette thèse est le développement d'une méthode **hybride FDFD et développement modal**, permettant d'atteindre les buts suivants :

- Diminution du nombre de points du maillage, donc du nombre d'équations composant le système à résoudre : seuls les points appartenant à la zone de diffraction seront concernés, l'expression du champ dans la zone de mesure étant développée à l'aide des modes élémentaires qui peuvent provenir **d'une étude analytique ou non**.
- Mise en évidence de la faisabilité de la méthode pour une cavité de section quelconque. Cette démarche trouve sa justification dans certaines expérimentations : dans le domaine de l'aéronautique, des portions d'avion contenant divers objets métalliques, absorbants etc... sont « transformés » en CRBM pour des tests. **[79]**

Dans un **premier temps**, nous chercherons à l'aide d'un programme réalisé en Fortran 95 à obtenir les diverses cartographies élémentaires nous permettant d'effectuer un **développement modal**. Chacun de ces modes sera un **vecteur propre** de l'équation de **Helmholtz** que vérifie la composante longitudinale (E_z ou H_z) du champ électromagnétique dans une section droite. Ces vecteurs propres devront former une base orthogonale (dans un produit scalaire qu'il reste à définir à ce stade)

permettant d'engendrer la répartition spatiale de la composante en z du champ dans une section droite. Ces modes élémentaires seront donc obtenus numériquement (par opposition à analytiquement) à partir des données des dimensions de la CRBM. Nous utiliserons pour les déterminer, une méthode FDFD en deux dimensions. La validation de cette étape sera effectuée par comparaison avec les modes **de guide (stationnaires)** analytiques bien connus pour des sections de forme rectangulaire et circulaire.

Nous chercherons dans un **deuxième temps**, et poursuivant le but fixé ci-dessus, à définir un **produit scalaire**, permettant de déterminer les divers poids des modes élémentaires (TM et TE) pour une cartographie donnée. Ce produit scalaire sera défini de manière analytique, puis sa discrétisation sera utilisée pour le calcul des poids. Les vecteurs utilisés seront des n-uplets où n représentera le nombre de points dans une section droite. La validation de cette étape se fera par calculs de divers produits scalaires entre un mode et lui-même, devant donner idéalement une valeur de **1**, et entre un mode et un mode « **orthogonal** », devant donner idéalement une valeur nulle.

Nous utiliserons dans un **troisième temps** les vecteurs propres calculés précédemment et le produit scalaire défini pour calculer les poids intervenant dans diverses cartographies. Ces dernières sont obtenues de diverses manières (autres logiciels, résultats expérimentaux etc...). La validation de cette étape a été réalisée par reconstitution de cartographies obtenues dans une section droite, à l'aide d'un code **FDTD** (Finite Difference Time Domain, en français : Différences finies dans le domaine temporel) et comportant plusieurs modes. Nous aurons alors les divers « poids » des divers modes contenus dans la cartographie de départ.

Nous utiliserons dans un **quatrième temps** ces modes de base pour déterminer le champ dans toute l'enceinte, et la méthode utilisée est alors une méthode **hybride FDFD** (Finite Difference Frequency Domain, en français : Différences finies dans le domaine fréquentiel) en trois dimensions, couplée à un **développement modal**. Le brasseur sera d'abord absent pour permettre la comparaison avec les modes analytiques en enceinte parallélépipédique et l'excitation sera réalisée par des antennes filaires.

Un paragraphe sera consacré à l'aspect « **ressources informatiques** » que nécessite le projet pour des fréquences se rapprochant de celles utilisées en CRBM. Nous constaterons qu'un ordinateur de type PC (Pentium 4) est nettement insuffisant. Nous devons alors utiliser un ordinateur de type **multiprocesseurs à architecture parallèle (Cluster)**. Entre temps, un code FDFD réalisé **sans** développement modal, et **ne différant que par cet aspect** du code final nous permettra d'apprécier les améliorations (...ainsi que les limites) de la méthode hybride par rapport à une méthode FDFD « classique ». La validation sera, une fois de plus effectuée par comparaisons avec l'analytique à des fréquences relativement basses, où la **densité de modes** ne sera pas trop importante, permettant d'« isoler » des modes **de cavité**. Nous retrouverons entre autres les fréquences de résonance faisant intervenir trois nombres entiers dans chacune des directions x,y et z. Des cartographies dans divers domaines de fréquence seront présentées. Puis la prise en compte du brasseur métallique interviendra. Ce brasseur sera modélisé par un plan métallique mince vertical (forme rectangulaire), mobile autour d'un axe vertical. Les fréquences de travail seront augmentées de manière sensible, puisque les fréquences minimales d'étude en CRBM se situeront aux alentours de 5 à 8 fois la plus petite fréquence de résonance.

Les données des dimensions verticale (l) et horizontale (L) définiront le brasseur proprement dit. Sa position sera définie par son « point d'attache » au plafond d'une part, et par un angle de rotation d'autre part :

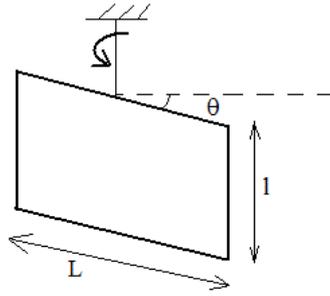


Figure 6 : Paramètres définissant le brasseur.

Nous terminerons l'étude en CRBM parallélépipédique par une validation de lois statistiques que devrait suivre le champ électromagnétique dans l'hypothèse d'un **brassage satisfaisant** et commenterons un éventuel brassage pas entièrement satisfaisant.

Et c'est tout naturellement par une partie « **Conclusion et perspectives d'amélioration** », réalisant la synthèse des activités, et proposant des poursuites possibles des travaux, que nous achèverons cette thèse.

Tout l'aspect mathématique, contenant entre autres, les démonstrations ainsi que les formules analytiques servant aux diverses validations apparaîtra dans les diverses **Annexes** en fin d'ouvrage. Le lecteur pourra à tout moment consulter la référence, par un signalement de cette dernière, dans le texte.

Chapitre II

Obtention des modes de base

I. Equation d'Helmholtz

L'excitation créant le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité est en régime harmonique, et les solutions des champs électrique et magnétique sont envisagées sous la forme particulière :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y).e^{-j\beta z} \\ \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y).e^{-j\beta z} \end{cases}$$

en utilisant la simplification habituelle de ne pas faire apparaître le coefficient en $e^{j\omega t}$, implicitement présent dans toutes les écritures.

Cette écriture décrit des **ondes progressives** dans le sens des z croissants.

β est la constante de propagation longitudinale **guidée**.

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

avec $k_0 = \omega^2 \epsilon \mu = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ = constante de propagation de l'onde en espace libre

k_c = constante de propagation transverse

c = célérité de la lumière dans le vide

On écrit les expressions des champs électrique et magnétique en faisant apparaître leurs composantes transversales et longitudinales :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_T + E_z \vec{u}_z \\ \vec{H} = \vec{H}_T + H_z \vec{u}_z \end{cases}$$

Les équations de Maxwell, écrites en régime harmonique, permettent d'exprimer les composantes transversales en fonction de la composante longitudinale (voir démonstration en **Annexe 2**)

L'équation de Maxwell $\overrightarrow{rot} \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ écrite pour la composante en z nous donne :

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon \cdot E_z \quad (2-1)$$

D'autre part en dérivant le système d'équations **(A2-4)** établi en **Annexe 2**

$$\begin{cases} H_x(x, y) = j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \\ H_y(x, y) = -j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation (2-1) conduit alors à :

$$-j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} \right) = j \omega \epsilon \cdot E_z$$

et on obtient alors l'équation d'**Helmholtz** en E_z :

$$\boxed{\Delta E_z = -k_c^2 \cdot E_z} \text{ pour les modes TM} \quad (2-2)$$

On établit de la même manière, pour la composante H_z , l'équation d'**Helmholtz** en H_z :

$$\boxed{\Delta H_z = -k_c^2 \cdot H_z} \text{ pour les modes TE} \quad (2-3)$$

L'équation d'Helmholtz est l'équation d'onde aux dérivées partielles dont la(les) solution(s) donnera(ont) $E_z(x, y)$ ou $H_z(x, y)$

Toute distribution possible du champ électromagnétique, dans la cavité avec les hypothèses vues plus haut (invariance selon l'axe z), donc solution des équations de Maxwell, vérifie l'équation d'Helmholtz.

Il y a une infinité de solutions et à chacune des solutions E_{z_i} ou H_{z_i} est associé une valeur de k_c notée k_{c_i} . Le coefficient ($-k_{c_i}^2$) est appelée **valeur propre**.

Dans l'hypothèse simplificatrice supplémentaire, consistant à négliger les pertes, et donc l'impédance de surface Z_s des parois (considérées alors comme un métal parfaitement conducteur), nous devons tenir compte des **conditions aux limites suivantes** :

- Pour les modes TM, la composante en z s'annule sur le contour :

$$\boxed{E_z = 0 \text{ sur la frontière métallique}}$$

Nous rappelons que, par définition des modes TM, nous avons aussi

$$\boxed{H_z = 0 \text{ dans tout le volume}}$$

- Pour les modes TE, nous avons la dérivée spatiale normale au contour métallique de la composante en z qui s'annule :

$$\boxed{\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ sur la frontière métallique}}$$

(voir démonstration de ce résultat dans la partie **Annexe 1**)

et aussi, par définition des modes TE :

$$\boxed{E_z = 0 \text{ dans tout le volume}}$$

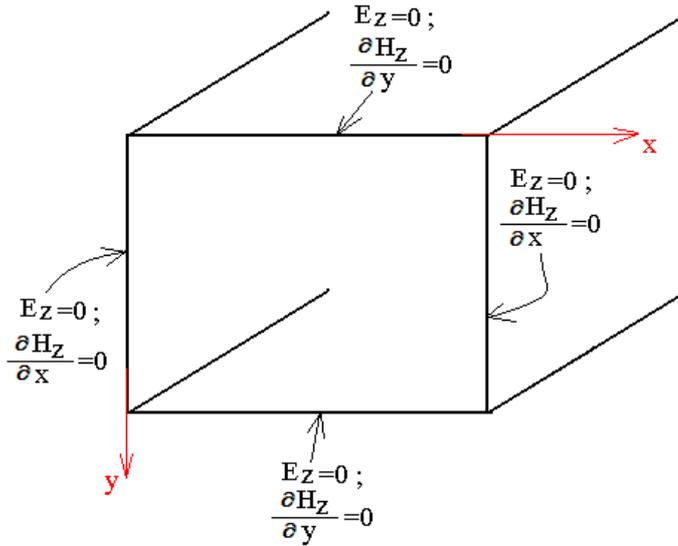


Figure 7 : Conditions aux limites pour une section rectangulaire

D'autre part, nous savons que nous pouvons exprimer les composantes transversales \vec{E}_T et \vec{H}_T en fonction de la composante longitudinale (voir **Annexe 2**) :

Pour les modes TM :

$$\vec{E}_T = -\frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T (E_Z)$$

$$\vec{H}_T = -\frac{j\omega\epsilon}{k_C^2} \cdot \vec{U}_Z \wedge \vec{\nabla}_T (E_Z) \text{ en ondes progressives (donc modes de guide)}$$

Pour les modes TE :

$$\vec{H}_T = -\frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T (H_Z)$$

$$\vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{k_C^2} \cdot \vec{U}_Z \wedge \vec{\nabla}_T (H_Z) \text{ en ondes progressives (donc modes de guide)}$$

En résumé, la résolution de l'équation d'Helmholtz (2-2) et (2-3), en tenant compte des conditions aux limites, permet d'obtenir les solutions en E_Z pour les modes TM et en H_Z pour les modes TE, et à partir des équations ci-dessus, on obtient les composantes transversales, et le champ électromagnétique est alors parfaitement défini dans l'enceinte.

Nous obtenons alors **analytiquement** les expressions des composantes de \vec{E} et \vec{H} dans des **guides** et des **cavités** de section rectangulaire ou circulaire, qu'on peut retrouver en **Annexe 4** et **Annexe 5**

II. Discrétisation de l'équation d'Helmholtz

II.1. Discrétisation d'une section de forme quelconque : aspect maillage

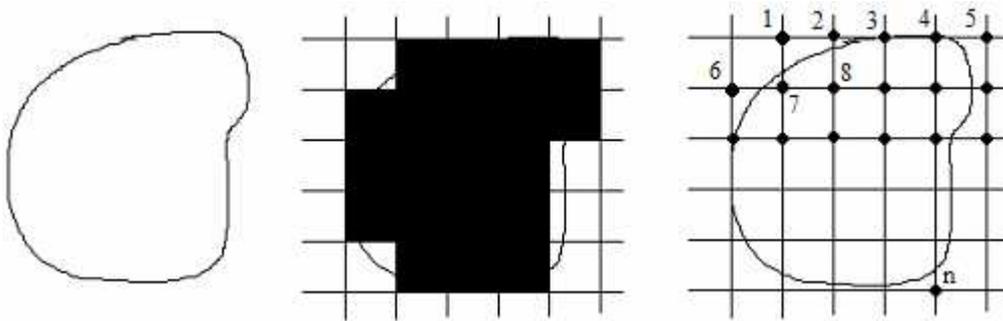


Figure 8 : Discrétisation d'une section de forme quelconque avec un maillage rectangulaire régulier

A partir d'une section réelle, on définit une discrétisation de cette section par un maillage à l'aide de rectangles égaux de dimensions h_x sur h_y , approchant le plus possible la section originale. Pour une cavité de section quelconque, la forme de cette section peut être communiquée par l'utilisateur de deux manières :

- par des paramètres tels que : longueur, largeur pour des sections rectangulaires ou rayons et angles définissant une portion de cercle, deux axes pour une ellipse etc... pour des sections définissables de manière « mathématique ».
- par utilisation d'une interface graphique consistant par exemple en un maillage « vierge » que l'utilisateur noircit, à l'aide de la souris.

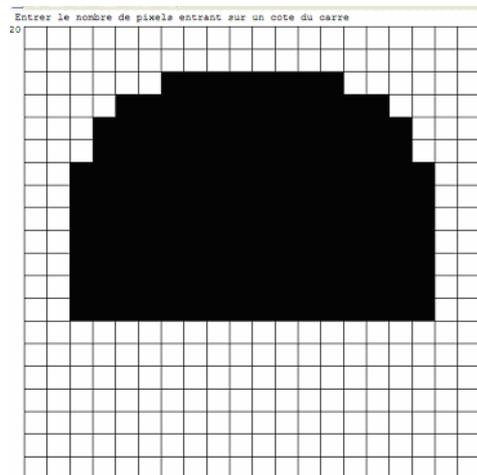


Figure 9 : Section quelconque communiquée par l'utilisateur à l'aide d'un maillage au départ vierge

La numérotation est ensuite effectuée dans l'ordre croissant de la **gauche vers la droite** et du **haut vers le bas**, à l'instar des pixels décrivant une image sur un écran de télévision.

II.2. Discrétisation d'une section de forme quelconque : aspect équations

Formules des différences finies en 2D :

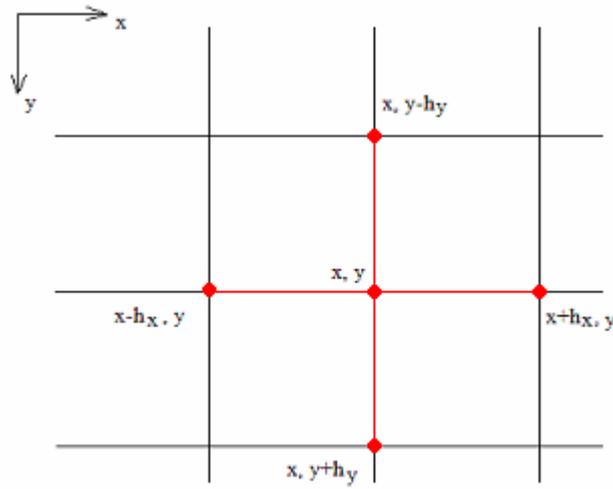


Figure 10 : Calcul des champs aux nœuds du maillage

En effectuant des développements de Taylor, au degré 2, au voisinage du point (x,y) , nous pouvons exprimer de manière approchée les dérivées seconde en x et y en ce point (x,y) .

On appelle V , la fonction qu'on cherche à développer (V sera identifié à E_z pour les modes TM et H_z pour les modes TE)

$$\begin{cases} V(x - h_x, y) = V(x, y) - h_x \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x,y} + \frac{h_x^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{x,y} \\ V(x + h_x, y) = V(x, y) + h_x \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x,y} + \frac{h_x^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{x,y} \end{cases} \quad (2-4)$$

L'addition membre à membre des équations ci-dessus nous permet d'obtenir :

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{x,y} = \frac{V(x - h_x, y) + V(x + h_x, y) - 2 \cdot V(x, y)}{h_x^2}} \quad (2-4)'$$

$$\begin{cases} V(x, y - h_y) = V(x, y) - h_y \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial y} \right]_{x,y} + \frac{h_y^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{x,y} \\ V(x, y + h_y) = V(x, y) + h_y \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial y} \right]_{x,y} + \frac{h_y^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{x,y} \end{cases} \quad (2-5)$$

et nous obtenons de la même manière :

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{x,y} = \frac{V(x, y - h_y) + V(x, y + h_y) - 2V(x, y)}{h_y^2}} \quad (2-5)'$$

En additionnant (2-4)' et (2-5)' nous obtenons une expression approchée de l'équation d'Helmholtz en un point (x,y)

$$\boxed{\frac{1}{h_x^2} \cdot V(x - h_x, y) + \frac{1}{h_y^2} \cdot V(x, y - h_y) - 2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \cdot V(x, y) + \frac{1}{h_x^2} \cdot V(x + h_x, y) + \frac{1}{h_y^2} \cdot V(x, y + h_y) = -k_c^2 \cdot V(x, y)} \quad (2-6)$$

L'équation (2-6) constitue l'**équation d'Helmholtz discrétisée** et nous permet donc d'écrire cette dernière sous forme d'un produit de « matrice par un vecteur » pour le 1^{er} membre, et un produit « nombre réel par un vecteur » pour le 2^{ème} membre

Ecriture matricielle avec un exemple de modes TM :

$$[A][E_z] = -k_c^2 \cdot [E_z] \quad (2-6)'$$

$$\text{où } [E_z] = \begin{bmatrix} E_{z1} \\ E_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{zn} \end{bmatrix}$$

n étant le nombre de points de la section, suite à la discrétisation, conformément à la numérotation adoptée sur la **Figure 11** (voir un peu plus loin) .

A chaque **valeur propre** ($-k_c^2$) est associé un **vecteur propre** $[E_z]$ (ou $[H_z]$ dans le cas TE) qui est donc un n-uplet correspondant à la cartographie du champ longitudinal dans la section.

II.3. Cas d'une section de forme rectangulaire

Les raisonnements et les illustrations seront simplifiés dans cette géométrie, mais l'écriture des algorithmes ne souffrira pas d'une complexité beaucoup plus élevée dans le cas plus général d'une section quelconque. On appelle n_x et n_y les nombres de cellules du maillage 2D selon les directions x et y. Dans le cas d'une section quelconque, on utilisera $n_x(i)$ et n_y où i est un indice de ligne variant de 1 à n_y+1 .

Nous distinguerons les 2 cas d'étude des modes TM et TE, à cause des conditions aux limites différentes de E_z et H_z .

Modes TM :

On sait que $E_z=0$ sur le contour, et le nombre d'inconnues est alors égal à $(n_x-1) \cdot (n_y-1)$

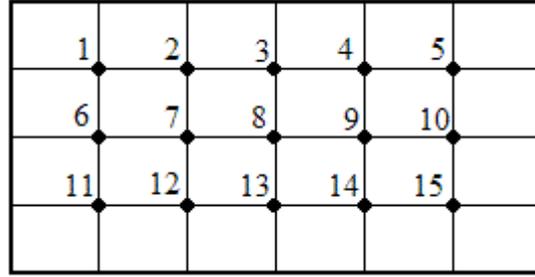


Figure 11 : Exemple de numérotation avec $n_x=6$ et $n_y=4$ pour les modes TM

La discrétisation s'obtient sans difficultés par l'écriture de l'équation (2-6) en chaque nœud du maillage, et en tenant compte de la condition au limite sur le contour.

L'écriture de la $i^{\text{ème}}$ ligne, dont on tirera les coefficients de la matrice [A] s'écrit :

$$\frac{1}{h_y^2} E_{z_{i-n_x+1}} + \frac{1}{h_x^2} \cdot E_{z_{i-1}} - 2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) E_{z_i} + \frac{1}{h_x^2} \cdot E_{z_{i+1}} + \frac{1}{h_y^2} E_{z_{i+n_x-1}} = -k_c^2 \cdot E_{z_i} \quad (2-7)$$

L'équation (2-7) est programmée telle qu'elle est écrite, aux points « internes » (cas général). Ces cas sont les points numérotés 7, 8, 9 sur l'exemple ci-dessus.

Les cas particuliers sont les points (comme les n° 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15 sur l'exemple ci-dessus) pour lesquels un au moins des « voisins » s'annule à cause de la condition aux limites. Ils sont dans le cas d'une section rectangulaire, facile à détecter et ne posent pas de gros problèmes de programmation. Il suffit d'omettre le coefficient correspondant à une valeur nulle dans l'équation (2-7). L'opérateur **Laplacien** de l'équation d'Helmholtz se transforme tout simplement en une fonction linéaire, représentable par une matrice (symétrique, pour information) d'ordre $n=(n_x-1)*(n_y-1)$.

Dés lors, on est ramené à un problème « classique » de recherche de valeurs propres et vecteurs propres dans un espace vectoriel dont les vecteurs sont des n-uplets et dont chaque coordonnée représente E_z en chaque point numéroté dans une section droite de la cavité...

$$\vec{U}_i = \begin{bmatrix} E_{z1} \\ E_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{zn} \end{bmatrix}$$

Après **linéarisation**, l'opérateur Laplacien équivaut donc à une multiplication par une matrice [A] et l'équation d'Helmholtz devient :

$$[A][U_i] = -k_{ci}^2 \cdot [U_i]$$

Nous calculons alors les valeurs propres kc_i^2 de la matrice [A] et les vecteurs propres \vec{U}_i correspondants.

Les vecteurs propres correspondant à une valeur propre (de multiplicité supérieure à 1, a priori) forment une famille génératrice (pas forcément une base) du sous-espace vectoriel associé à la valeur propre. On peut donc en extraire une base B_i , de ce même sous-espace vectoriel.

La réunion de 2 bases B_i et B_j avec $i \neq j$ sera nécessairement une famille libre et la réunion de toutes les bases B_i formera alors une base du sous-espace des solutions de l'équation d'Helmholtz pour la cavité étudiée.

Une cartographie calculée par FDFD (donc un vecteur \vec{U} solution) pourra se décomposer sur la base ainsi définie, et chaque composante sera, par définition le poids du mode correspondant.

Modes TE :

Le nombre d'inconnues est alors plus élevé, à cause du fait que $H_z \neq 0$ a priori, sur le contour, et est égal à $(n_x+1)*(n_y+1)$.

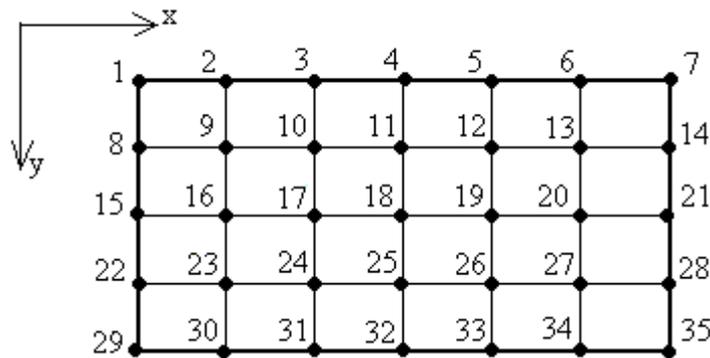


Figure 12 : Exemple de numérotation avec $n_x=6$ et $n_y=4$ pour les modes TE

Le cas général de la discrétisation s'obtient de la même manière que pour les modes TM, par l'écriture de l'équation (2-7) et correspond sur l'exemple ci-dessus aux points numérotés 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27 :

$$\frac{1}{h_y^2} H_{z_{i-n_x-1}} + \frac{1}{h_x^2} H_{z_{i-1}} - 2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) H_{z_i} + \frac{1}{h_x^2} H_{z_{i+1}} + \frac{1}{h_y^2} H_{z_{i+n_x+1}} = -k_c^2 H_{z_i} \quad (2-8)$$

Les cas particuliers se trouvent localisés sur le contour : points numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

Pour obtenir les termes du Laplacien (2D) en ces points particuliers, nous écrivons des développements de Taylor à gauche, à droite, en bas ou en haut, selon la position du point sur le contour, en tenant compte de la condition aux limites $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$

Prenons l'exemple d'un point situé sur le côté gauche du contour (comme le point n° 15)

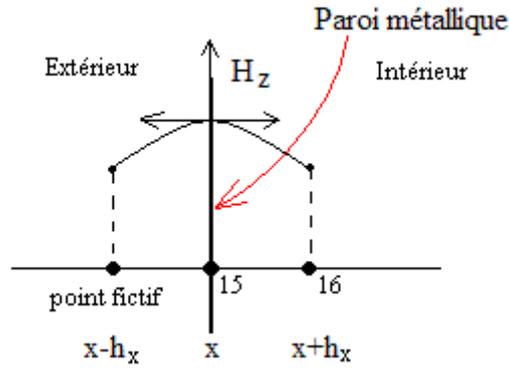


Figure 13

La deuxième équation de (2-5) nous donne, avec la condition aux limites et en remplaçant V par H_z , ici :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x+h_x, y) - H_z(x, y)) \quad (2-9)$$

qui permet donc d'obtenir la discrétisation de ce terme dans l'équation d'Helmholtz pour les points du côté gauche du contour.

Une petite difficulté de logique est à signaler tout de même ici : le passage de (2-5) à (2-9) s'est effectué par **Implication** et non par **Equivalence logique** :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x+h_x, y) - H_z(x, y)) - \frac{2}{h_x} \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x,y} \\ \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x,y} = 0 \end{cases} \quad (2-10)$$

Nous avons (2-10) \Rightarrow (2-9) est vraie, mais la réciproque (2-9) \Rightarrow (2-10) n'est pas vraie a priori.

(2-9) peut être vérifiée sans que la condition $\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x,y} = 0$ le soit .

Ce travail **par implication** oblige, après obtention des vecteurs propres, à vérifier si les conditions aux limites sont vérifiées (à peu près, car nous sommes dans des domaines **numériques**, par opposition à **analytiques**).

Nous pouvons nous passer de cette vérification systématique si nous pouvons « modifier » le problème en un problème équivalent, qui « garantirait » la condition aux limites.

La solution adoptée est (voir **Figure 13**) de rajouter des points fictifs extérieurs à la cavité, symétriques de points internes, par rapport au contour. La valeur de H_z en ces points **serait égale** à la valeur de H_z au point interne symétrique .

Nous pouvons alors évaluer au 1^{er} ordre :

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x,y} = \frac{1}{2.h_x} . (H_z(x+h_x, y) - H_z(x-h_x, y)) = 0$$

Cette technique ne rajoute pas d'inconnues, et nous pouvons utiliser les formules générales (2-4)' et (2-5)'.

Nous constatons qu'avec cette nouvelle formulation du problème, nous retrouvons exactement l'équation (2-9) pour l'évaluation de $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$, la condition aux limites étant « automatique ».

Nous vérifierons tout de même, au cours de l'étape de visualisation des modes élémentaires (vecteurs propres), que cette condition aux limites est vérifiée. Nous pouvons appliquer le même raisonnement pour évaluer les termes de l'équation d'Helmholtz aux autres points du contour, nous obtenons alors, en utilisant l'exemple de numérotation de la **Figure 12** :

Points similaires aux n° :

$$\bullet 15 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x+h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \text{formule générale (2-5)'} \end{cases}$$

$$\bullet 21 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x-h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \text{formule générale (2-5)'} \end{cases}$$

$$\bullet 4 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \text{formule générale (2-4)'} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y+h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

$$\bullet 32 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \text{formule générale (2-4)'} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y-h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

$$\bullet 1 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x+h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y+h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

$$\bullet 29 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x+h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y-h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

$$\bullet 7 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x-h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y+h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

$$\bullet 35 : \begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{2}{h_x^2} (H_z(x-h_x, y) - H_z(x, y)) \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_y^2} (H_z(x, y-h_y) - H_z(x, y)) \end{cases}$$

Nous devons tenir compte de tous ces cas particuliers ci-dessus lors de la programmation permettant d'obtenir la matrice représentant le Laplacien discrétisé dans l'équation d'Helmholtz.

III. Visualisation des modes élémentaires (vecteurs propres)

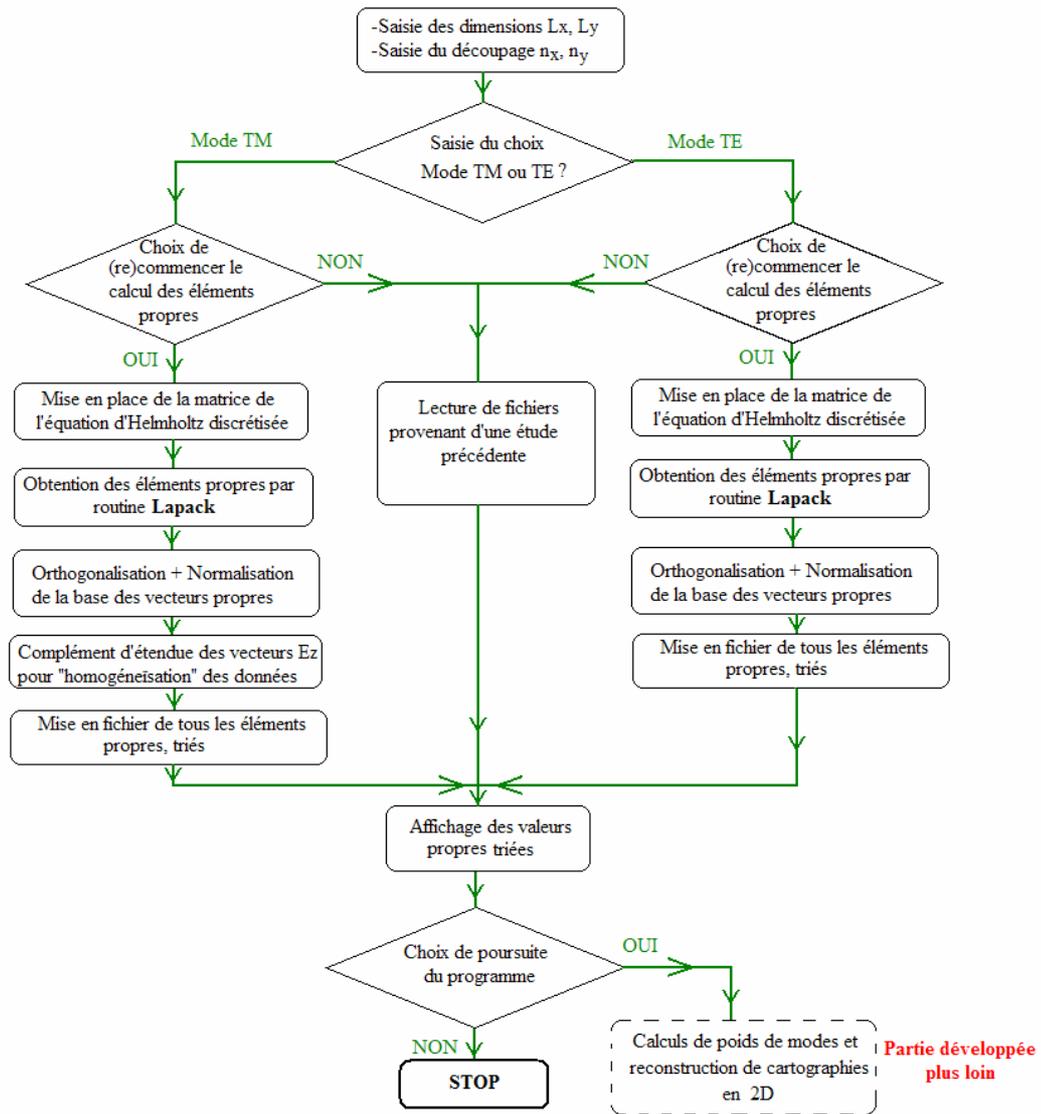
III.1. Valeurs propres numériques en section rectangulaire

Le code réalisé en **Fortran 95**, à partir des données des dimensions de la cavité parallélépipédique crée la matrice [A] de l'équation d'Helmholtz discrétisée (2-6)' en tenant compte du choix de l'utilisateur de traiter les modes TM ou TE.

Les valeurs propres sont alors calculées et rangées dans un fichier. Les vecteurs propres correspondants (dont le nombre est entré par l'utilisateur) sont alors calculés et chacun d'entre eux, correspondant à une cartographie **normalisée**, est sauvegardé dans un fichier. L'exécution du programme peut prendre fin ici, si l'utilisateur le désire.

Nous ne souhaitons pour le moment qu'obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants. Pour terminer à ce stade, nous saisissons une fréquence nulle. En cas de poursuite du programme, nous verrons plus loin en détails, que nous pourrions obtenir les poids des modes TM et TE, ainsi que la possibilité de reconstruire une cartographie dans une section droite.

L'organigramme ci-dessous résume les étapes du code :



Un exemple de découpage 14*14 pour une cavité de section $L_x=3.5$ m ; $L_y=3.0$ m

L'exécution du programme est présentée sur la **Figure 14** ci-dessous :

```

C:\ "C:\FPS4\Unif_Rect_TE_TM\Debug\guide_rect_TE_TM.exe"
entrer les valeurs de lx et ly (en m)
3.5,3
entrer le nb de subdivisions en x et y (superieurs ou egaux a 2)
14,14
Entrer le mode TM ou TE etudie
TM
Voulez-vous recommencer (ou commencer!) le calcul des vecteurs propres.....(r),
ou conserver ceux deja calcules (si deja fait!).....(c)
r
Preparation de la matrice
Matrice prete
Calcul des valeurs propres (en -kc au carre)
Etape pouvant prendre plusieurs minutes !
valeurs propres
info 0
(-149.216775587072,0.0000000000000000E+000)
(-146.850086170131,0.0000000000000000E+000)
(-145.995448325124,0.0000000000000000E+000)
(-143.628758908183,0.0000000000000000E+000)
(-143.037689836230,0.0000000000000000E+000)
(-140.806353315093,0.0000000000000000E+000)
(-139.816362574282,0.0000000000000000E+000)
(-138.439663898151,0.0000000000000000E+000)
(-137.970756056733,0.0000000000000000E+000)

```

Figure 14 : Visualisation de l'obtention des éléments propres pour les modes TM

La liste des valeurs propres est directement présentée par ordre décroissant du module, pour vérifier la cohérence avec le problème étudié, c'est-à-dire des valeurs de $(-k_c^2)$ purement réelles et négatives. Le nombre de valeurs propres est égal à $(n_x+1)*(n_y+1)$, donc ici 225.

La possibilité de **ne pas re-calculer** les éléments propres est envisagée pour d'autres utilisations du logiciel, comme l'obtention de poids de modes pour **diverses** cartographies... Le calcul des éléments propres pouvant être une étape relativement longue, cette éventualité de ré-utiliser les éléments ne dépendant pas de la cartographie testée s'avère très utile.

Le message « info=0 » est une vérification du déroulement sans erreur des calculs (par une routine LAPACK).

L'exécution s'achève comme indiquée ci-dessous :

```

C:\ "C:\FPS4\Unif_Rect_TE_TM\Debug\guide_rect_TE_TM.exe"
(-25.4598150619504,0.0000000000000000E+000)
(-23.3805034133985,0.0000000000000000E+000)
(-22.4290763240442,0.0000000000000000E+000)
(-21.5507773263574,0.0000000000000000E+000)
(-19.5681070794979,0.0000000000000000E+000)
(-19.2077490620965,0.0000000000000000E+000)
(-17.2014176625566,0.0000000000000000E+000)
(-16.4838435468598,0.0000000000000000E+000)
(-16.3616823163261,0.0000000000000000E+000)
(-13.1403550543791,0.0000000000000000E+000)
(-12.6714472129595,0.0000000000000000E+000)
(-11.2947485368286,0.0000000000000000E+000)
(-10.3047577960183,0.0000000000000000E+000)
(-8.07342127488159,0.0000000000000000E+000)
(-7.48235220292845,0.0000000000000000E+000)
(-5.11566278598771,0.0000000000000000E+000)
(-4.26102494098094,0.0000000000000000E+000)
(-1.89433552403978,0.0000000000000000E+000)
Veuillez patienter pendant l etape d orthogonalisation des vecteurs propres
Extension d etendue des vecteurs en Ez
Etape de normalisation
Entrer la frequence(en Hz)
Entrer une frequence nulle pour arreter le programme
0
Press any key to continue_

```

Figure 15 : Diverses étapes utiles à l'obtention des éléments propres

L'étape d'orthogonalisation des vecteurs propres est rajoutée par précautions. En effet, il a été constaté que **dans certains cas**, les valeurs numériques de produits scalaires (produit scalaire défini précisément plus loin, au **Chapitre III**) peuvent s'éloigner un peu de la valeur théorique (de moins de 5%, tout de même et dans le cas le moins gênant correspondant à des vecteurs associés à une valeur multiple).

Cette imprécision n'a lieu que pour les modes TE, car la discrétisation du produit scalaire (voir **Chapitre III, paragraphe I.3.**) introduit une « erreur systématique » au niveau des contours par l'élément « infinitésimal » $H_{z1}(x, y) \cdot H_{z2}(x, y) \cdot \Delta h_x \cdot \Delta h_y$ qui « agrandit » la surface d'une demi-cellule. Cette erreur est d'autant plus élevée que les valeurs de H_z sur les contours sont maximales.

D'autre part, dans le cas de valeurs propres multiples (cas évités en pratique, correspondant à des dimensions L_x et L_y multiples l'une de l'autre), l'espace propre associé est de dimension inférieure ou égale à 2, rien ne garantissant l'orthogonalité des vecteurs associés à cette valeur propre multiple, qui est gênant pour l'obtention des poids. Elle est réalisée par la méthode d'**Orthogonalisation de Schmidt [2]**

Il est important de noter qu'une orthogonalisation de la base ne change pas l'espace généré par cette base, et donc l'ensemble des solutions. De plus l'orthogonalisation de la base modifie très peu les cartographies observées. On peut dire avec une bonne approximation que la base obtenue au départ est « presque orthogonale ». La méthode hybride de calcul, développée au Chapitre V s'appuie sur le fait que la base doit idéalement être orthogonale dès le départ, sauf éventuellement dans le cas de vecteurs correspondant à une valeur propre multiple.

L'étape d'extension d'étendue des vecteurs représentant des cartographies de champs électriques E_z consiste à compléter explicitement les valeurs $E_z=0$ sur les contours, afin d'obtenir des cartographies homogènes et des vecteurs-colonnes de même étendue pour les modes TM et les modes TE (voir **Chapitre III**).

L'étape de normalisation a pour but de fixer la valeur maximale du champ électrique ou magnétique à 2 ($V \cdot m^{-1}$ ou $A \cdot m^{-1}$), pour les modes de base (voir **Chapitre III**). Cette valeur de 2 ($V \cdot m^{-1}$ ou $A \cdot m^{-1}$) correspond à des ondes stationnaires, dont l'onde incidente possède une amplitude de 1 ($V \cdot m^{-1}$ ou $A \cdot m^{-1}$). On remarquera donc que la base n'est pas **orthonormée**, mais seulement **orthogonale**.

Si le but recherché est l'obtention des éléments propres, le logiciel propose à l'utilisateur d'entrer une fréquence de valeur nulle pour arrêter le programme. C'est pour ce choix que nous opterons à ce stade.

Comparaisons numériques / analytiques :

Nous voulons vérifier la convergence des valeurs de k_c^2 obtenues **numériquement**, vers les valeurs **analytiques**, lorsque le découpage s'affine.

Formule analytique :
$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2$$
 avec $L_x = 3.5 m$ et $L_y = 3.0 m$

Modes TM On doit avoir des valeurs non nulles de m et n

(m, n)	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
k_c^2 avec un découpage 10*10 (en m^{-2})	1.887	4.206	5.043	7.362	7.818	9.960
k_c^2 avec un découpage 14*14 (en m^{-2})	1.894	4.261	5.116	7.482	8.073	10.305
k_c^2 avec un découpage 20*20 (en m^{-2})	1.898	4.291	5.155	7.547	8.212	10.492
k_c^2 avec un découpage 30*30 (en m^{-2})	1.900	4.307	5.176	7.582	8.287	10.594
k_c^2 analytique (en m^{-2})	1.902	4.319	5.192	7.609	8.348	10.675

Modes TE Les valeurs de m ou n peuvent être nulles

(m, n)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
k_c^2 avec un découpage 10*10 (en m^{-2})	$1.1 \cdot 10^{-14}$	0.800	1.088	1.887	3.118	4.206
k_c^2 avec un découpage 14*14 (en m^{-2})	$3.9 \cdot 10^{-13}$	0.802	1.092	1.894	3.169	4.261
k_c^2 avec un découpage 20*20 (en m^{-2})	$1.0 \cdot 10^{-12}$	0.804	1.094	1.898	3.196	4.291
k_c^2 avec un découpage 30*30 (en m^{-2})	$6.4 \cdot 10^{-13}$	0.805	1.096	1.901	3.211	4.307
k_c^2 analytique (en m^{-2})	0	0.806	1.097	1.902	3.223	4.319

Nous constatons bien une convergence des valeurs propres vers les valeurs analytiques et ce d'autant mieux que le découpage de la section est plus fin. Comme nous pouvions nous y attendre, pour les valeurs de plus en plus grande de m et n , entiers caractérisant un mode, la convergence correcte exige un maillage de plus en plus fin.

III.2. Vecteurs propres numériques en section rectangulaire

Le logiciel de visualisation **MATLAB** permet de récupérer les données sauvegardées dans des fichiers et de présenter les divers vecteurs propres sous forme de cartographies 2D, normalisées à une valeur maximale de 2 ($V.m^{-1}$ ou $A.m^{-1}$). La valeur propre correspondante, k_C (constante de propagation transversale) est affichée simultanément pour faciliter l'exploitation des résultats.

Nous visualisons les premiers modes en conservant les dimensions : $L_X=3.5\text{ m}$; $L_Y=3.0\text{ m}$

Avec un découpage $10*10$, les 6 premiers modes donnent les cartographies suivantes pour le **module de E_Z ou H_Z** , avec la valeur **obtenue numériquement** de k_C , en prenant tout simplement la racine carrée de la valeur propre (au signe près).

Modes TM :

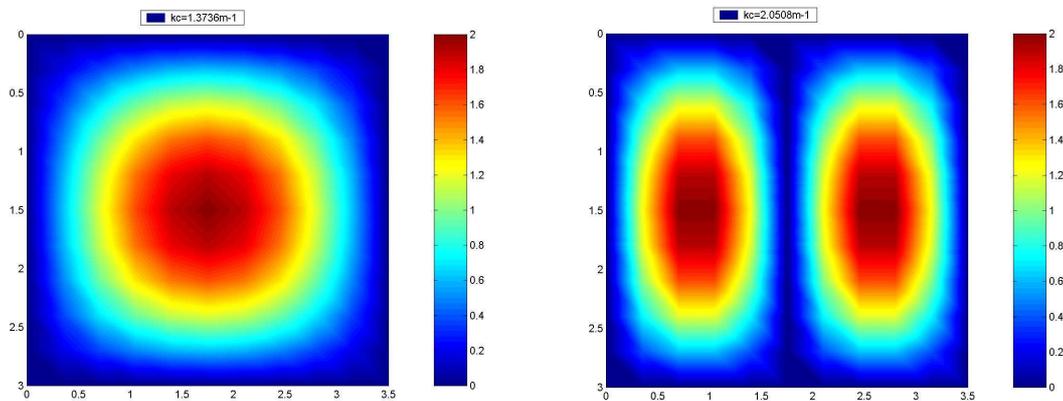


Figure 16 : Cartographies de E_Z , correspondant respectivement à la 1^{ère} valeur propre (k_C analytique= 1.379 m^{-1} et k_C numérique= 1.3736 m^{-1}) et à la 2^{ème} valeur propre (k_C analytique = 2.078 m^{-1} et k_C numérique= 2.0508 m^{-1}). On reconnaît les mode TM_{11} et TM_{21}

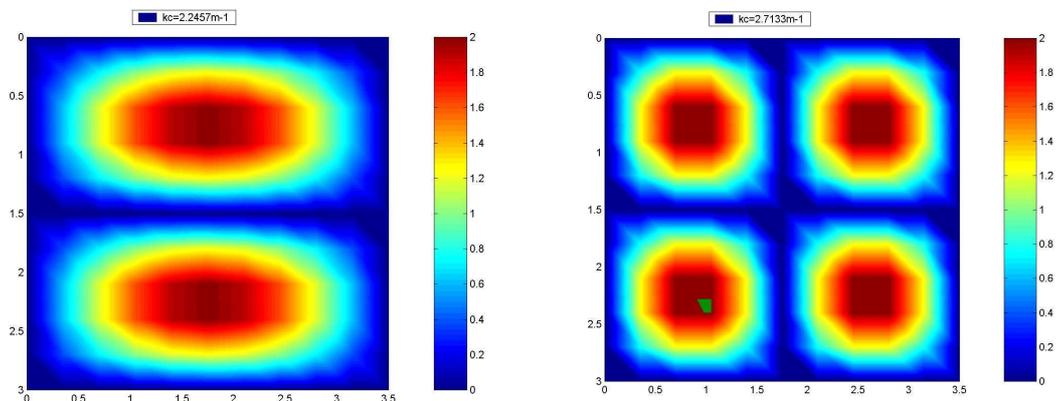


Figure 17 : Cartographies de E_Z correspondant respectivement à la 3^{ème} valeur propre (k_C analytique= 2.279 m^{-1} et k_C numérique= 2.2457 m^{-1}) et à la 4^{ème} valeur propre (k_C analytique= 2.758 m^{-1} et k_C numérique= 2.7133 m^{-1}). On reconnaît les modes TM_{12} et TM_{22}

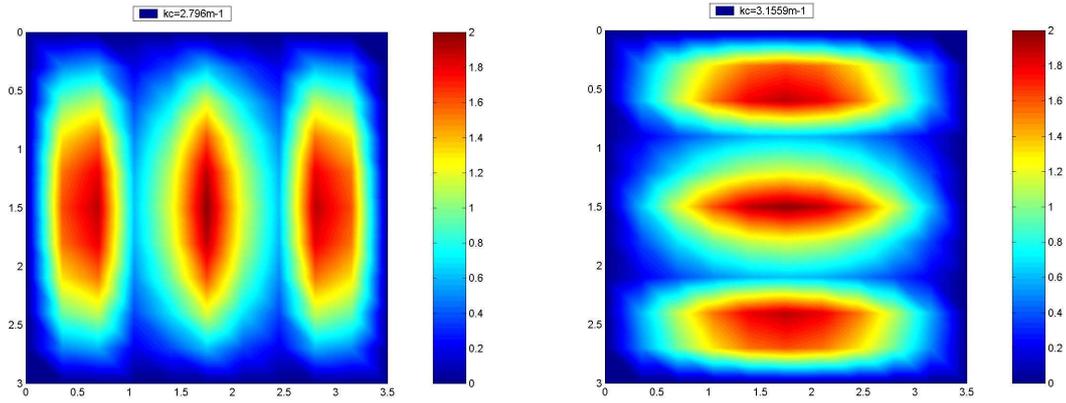


Figure 18 : Cartographies de E_z correspondant respectivement à la 5^{ème} valeur propre (k_C analytique= 2.889 m^{-1} et k_C numérique= 2.796 m^{-1}) et à la 6^{ème} valeur propre (k_C analytique= 3.267 m^{-1} et k_C numérique= 3.156 m^{-1}). On reconnaît les modes TM_{31} et TM_{13}

Modes TE :

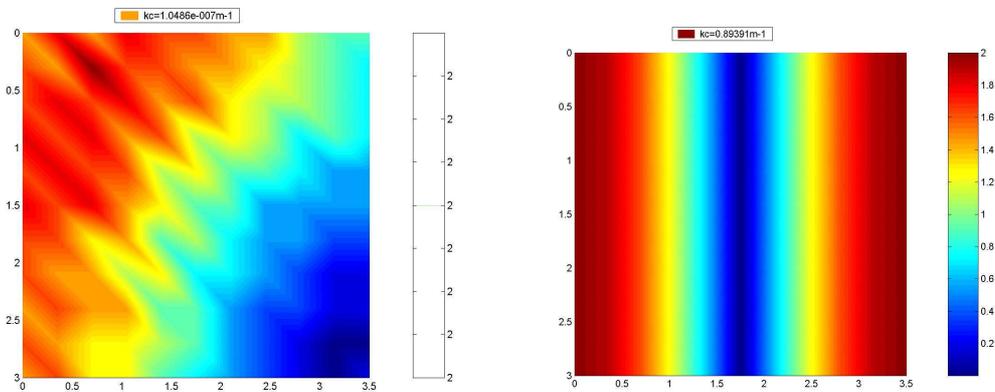


Figure 19 : Cartographies de H_z correspondant respectivement à la 1^{ère} valeur propre (k_C analytique= 0.0 m^{-1} et k_C numérique= $1.05 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$) et à la 2^{ème} valeur propre (k_C analytique = 0.898 m^{-1} et k_C numérique= 0.8939 m^{-1}). On reconnaît le mode TE_{00} (cartographie uniforme, avec une échelle inadaptée, les diverses zones colorées ont en fait la même valeur de 2 Am^{-1}) et le mode TE_{10}

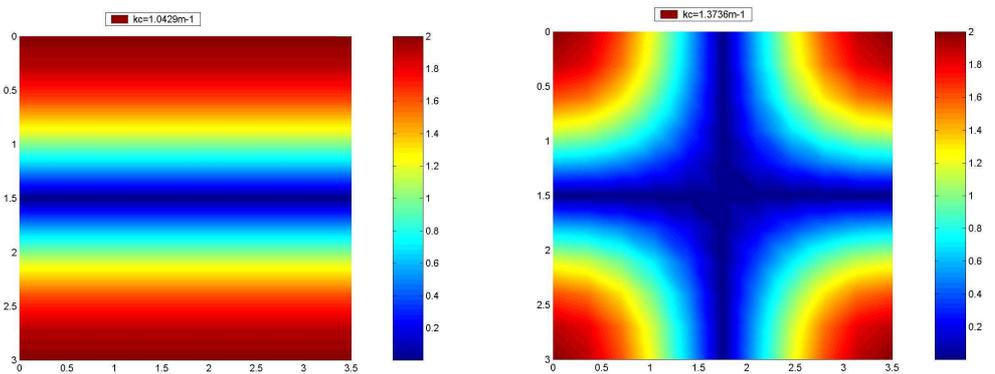


Figure 20 : Cartographies de H_z correspondant respectivement à la 3^{ème} valeur propre (k_C analytique= 1.047 m^{-1} et k_C numérique= 1.043 m^{-1}) et à la 4^{ème} valeur propre (k_C analytique= 1.379 m^{-1} et k_C numérique= 1.3736 m^{-1}). On reconnaît les modes TE_{01} et TE_{11} .

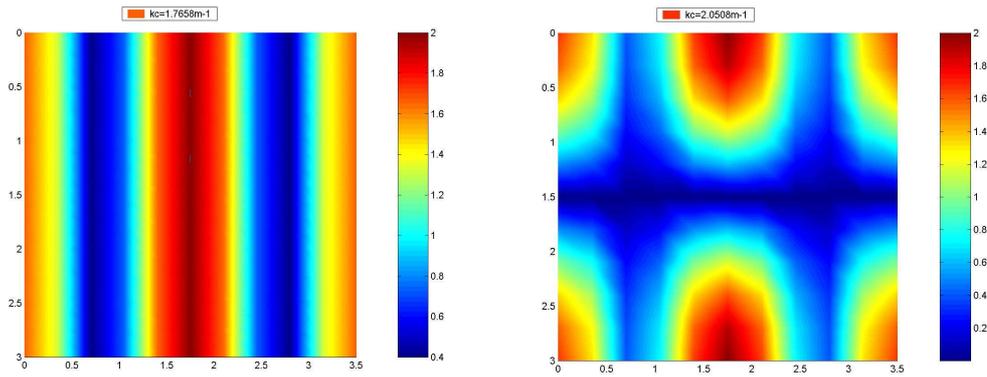


Figure 21 : Cartographies de H_z correspondant respectivement à la 5^{ème} valeur propre (k_C analytique = 1.795 m^{-1} et k_C numérique= 1.766 m^{-1}) et à la 6^{ème} valeur propre (k_C analytique = 2.078 m^{-1} et k_C numérique= 2.051 m^{-1}). On reconnaît les mode TE_{20} et TE_{21}

Les **Figures 16** à **21** font apparaître une insuffisance de « résolution », lorsque les valeurs des entiers caractérisant le mode m et n augmentent, pour un tel découpage.

Observons l'effet de l'augmentation du nombre de cellules élémentaires, en triplant les 2 nombres entiers n_x et n_y . Le programme d'obtention des éléments propres est à nouveau exécuté en choisissant un découpage 30×30 et on visualise les effets sur trois des cartographies précédentes.

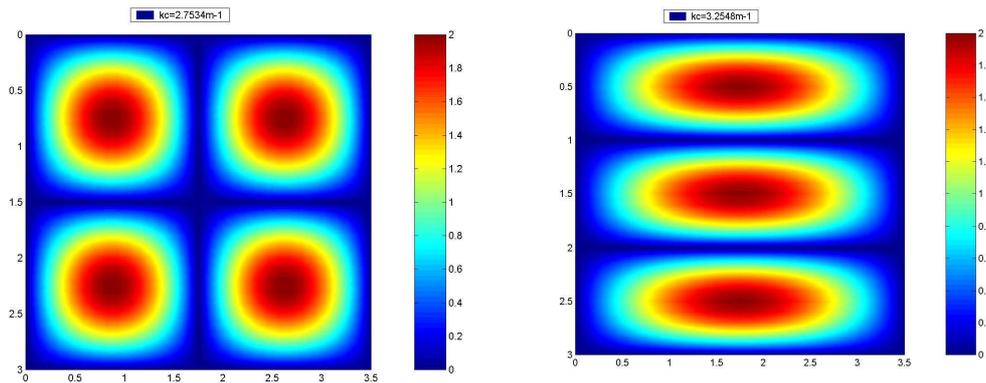


Figure 22 : Modes TM_{22} et TM_{13} avec un découpage 30×30

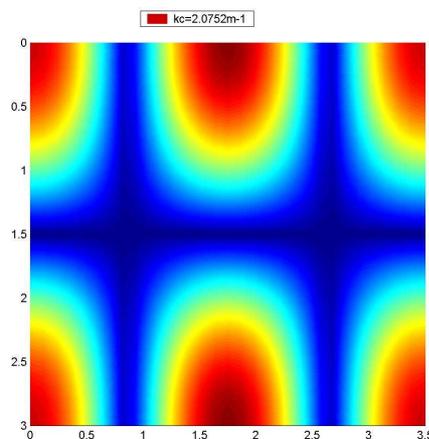


Figure 23 : Mode TE_{21} avec un découpage 30×30

Remarque importante :

Nous avons vu plus haut que, pour les modes TE, il nous faudrait **vérifier** la condition aux limites $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ sur les vecteurs propres obtenus. Une visualisation en 3D de la composante H_z des modes TE_{10} et TE_{11} (choix arbitraires) nous permet de mieux visualiser si cette condition est confirmée. Durant toute la durée de cette thèse, cette condition s'est toujours avérée, et ce d'autant mieux que le découpage était fin.

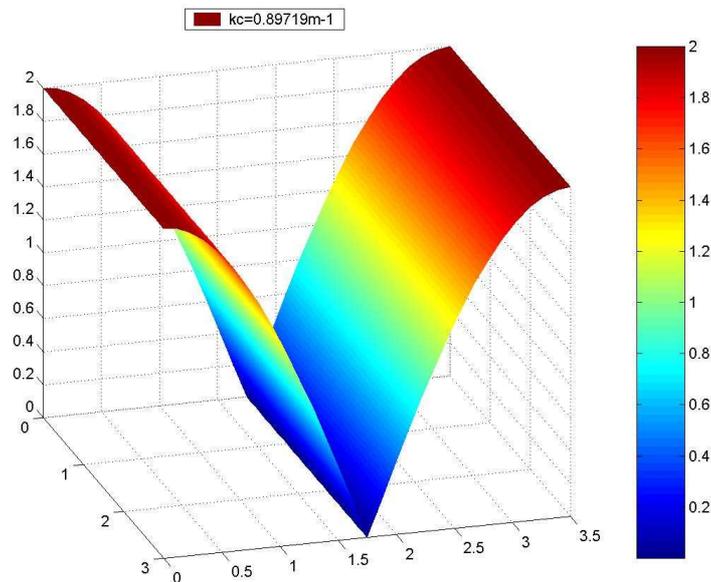


Figure 24 : Vérification « visuelle » de la condition aux limites sur le mode TE_{10}

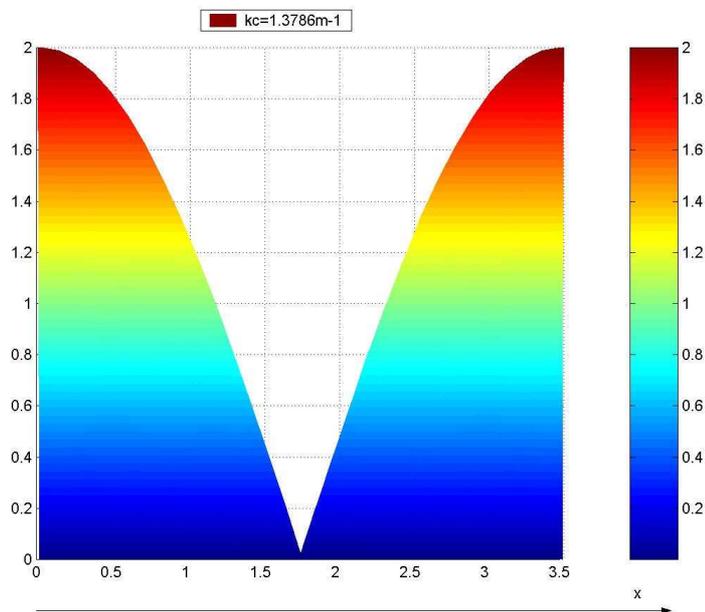


Figure 25 : Vérification « visuelle » de la condition aux limites sur le mode TE_{11}

Cas de valeurs propres multiples :

Dans le cas (**évité en pratique !**) où L_x et L_y sont dans un rapport entier, la formule analytique $k_C^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2$ nous montre qu'on peut trouver facilement des couples d'entiers (m,n) différents et fournissant des valeurs identiques de k_C^2 .

Règles mathématiques :

- L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ (complété avec le vecteur nul pour être rigoureux, puisque les vecteurs propres sont par définition **non nuls**) forme un sous-espace vectoriel E_λ appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ .
- Si λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité p , la dimension du sous-espace propre associé vérifie l'inégalité : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq p$

Dans le cas d'une multiplicité de 2, le sous-espace propre peut au maximum être de dimension 2. Dans le cas où le sous-espace est de dimension 2, on pourra obtenir tous les vecteurs propres associés à une valeur propre en définissant une base de ce sous-espace, nécessitant 2 vecteurs libres quelconques. Si ces 2 vecteurs sont de plus **orthogonaux**, le calcul des poids s'en trouve facilité. C'est une des raisons pour lesquelles, il est procédé à une orthogonalisation de la base (de l'ensemble des solutions) formée par les divers vecteurs propres. Toute cartographie associée à cette valeur propre pourra s'écrire comme une combinaison linéaire de ces 2 vecteurs de base.

Il est à noter que dans le cas où une multiplicité de 2 avec un sous-espace propre associé de dimension 1, la réunion des vecteurs propres ne constituerait plus une base, et on doit alors prévoir de « retirer » l'un des vecteurs propres associés à cette valeur propre de multiplicité 2. Ce cas n'a jamais rencontré, car il aurait alors amené une indétermination (ou une valeur numérique très grande) dans le calcul des poids. Nous considérons, dans cette thèse, qu'il ne se présente pas a priori.

Illustration simple des propos ci-dessus dans un sous-espace vectoriel de dimension 2 :

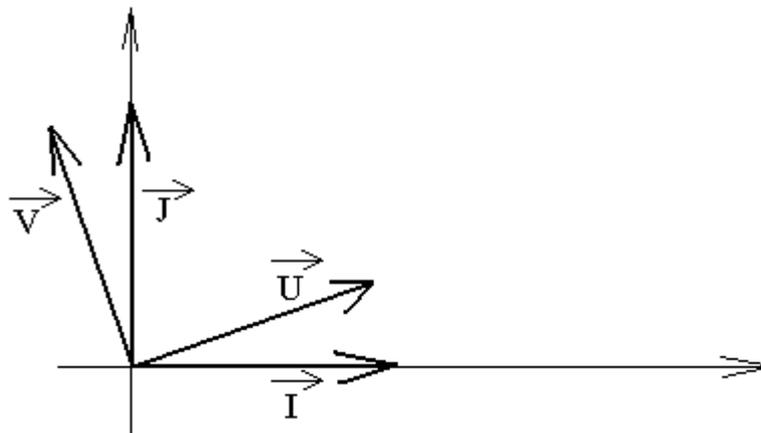


Figure 26 : Pour décomposer tout vecteur du plan de la feuille, le choix de la base (\vec{U}, \vec{V}) est tout aussi valable que celui de la base (\vec{I}, \vec{J}) , considérée comme « classique ».

Nous mettons en évidence cette « propriété » sur les **Figures 27 et 28**

Exemple de telles cartographies pour une section 10 cm * 5 cm pour les modes TE

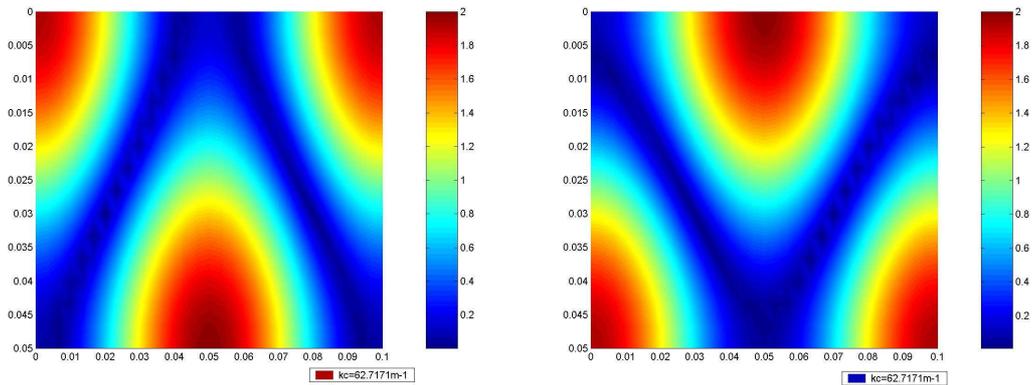


Figure 27 : Les deux cartographies ci-dessus ont été obtenues avec un découpage 30 cellules * 15 cellules, et représentent respectivement le 3^{ème} et le 4^{ème} vecteur propre, correspondant à la même valeur de $k_C=62,72 \text{ m}^{-1}$, et ne coïncident pas avec les vecteurs « classiques » (choix arbitraire), correspondant aux formules de l' **Annexe 5**

Cartographies «classiques », combinaisons linéaires des 2 cartographies différentes :

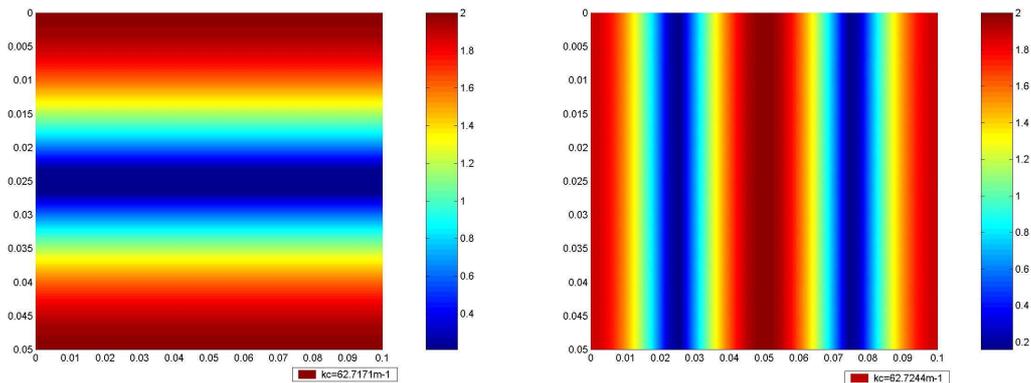


Figure 28 : Nous reconnaissons les modes « classiques » respectivement TE_{01} et TE_{20} , obtenues avec une légère modification du choix de découpage (31 cellules * 15 cellules).

IV. Approximation polygonale d'une section de forme circulaire

La section circulaire originale est remplacée par une section discrétisée dont le contour s'appuie sur le maillage à base de « cellules » élémentaires de forme rectangulaire. Le critère utilisé dans cette thèse est la **minimisation de l'erreur entre l'aire de la surface partielle du cercle et celle obtenue par « pixellisation »**, à l'aide des cellules élémentaires :

Exemple de découpage avec 7 cellules par rayon :

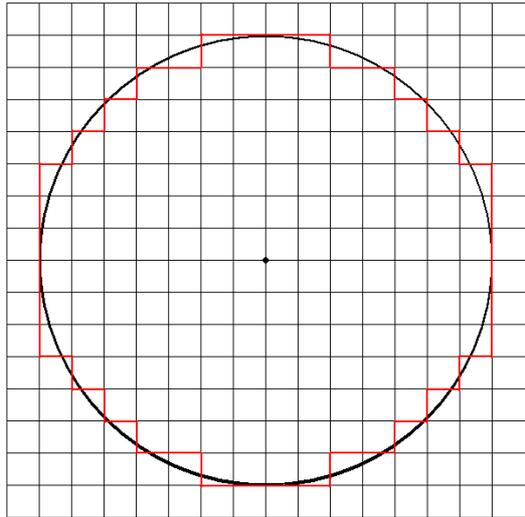


Figure 29 : Section circulaire approximée par une section «polygonale »

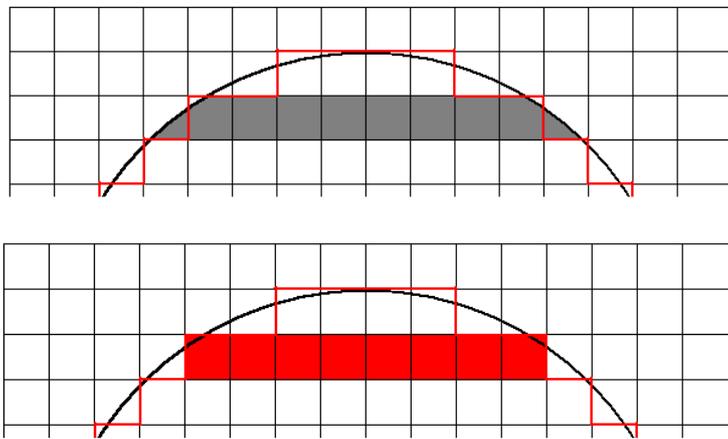


Figure 30 : Comparaisons des aires réelle et approchée servant de critère de choix du nombre de cellules par ligne

Calcul exact de l'aire d'une calotte circulaire

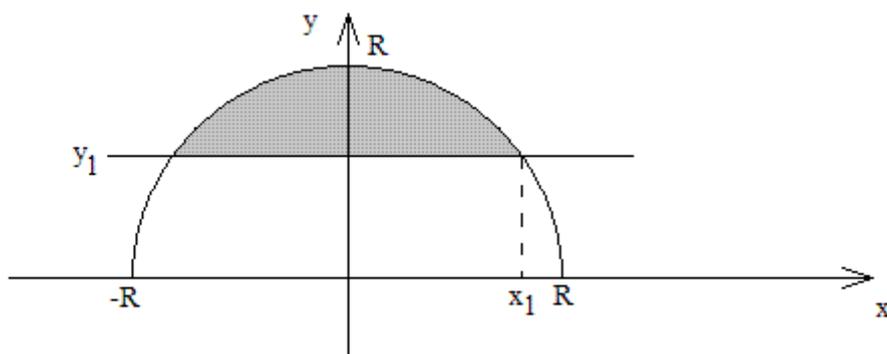


Figure 31 : Calotte circulaire sur un cercle de rayon R dont on veut déterminer l'aire exacte

Cherchons à exprimer l'aire grisée de la **Figure 31** en fonction de y_1

$$Aire = 2 \cdot \int_0^{x_1} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx - 2 \cdot x_1 \cdot y_1$$

$$\left[x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \text{Arcsin} \left(\frac{x}{R} \right) \right]_0^{x_1} - 2 \cdot x_1 \cdot y_1$$

$$x_1 \cdot \sqrt{R^2 - x_1^2} + R^2 \cdot \text{Arcsin} \left(\frac{x_1}{R} \right) - 2 \cdot x_1 \cdot y_1$$

$$x_1 \cdot y_1 + R^2 \cdot \text{Arcsin} \left(\frac{\sqrt{R^2 - y_1^2}}{R} \right) - 2 \cdot x_1 \cdot y_1$$

$$Aire = R^2 \cdot \text{Arcsin} \left(\frac{\sqrt{R^2 - y_1^2}}{R} \right) - y_1 \cdot \sqrt{R^2 - y_1^2}$$

Cette dernière formule est directement implantée dans le programme (par soustraction des 2 aires à des ordonnées séparées d'une valeur d'1 « pas vertical ») pour optimiser la « pixellisation » du cercle, par comparaisons des « aires analytiques » et « aires numériques » de la **Figure 30**. Cette **automatisation** de l'obtention de la section **circulaire numérisée** permet à l'utilisateur de n'avoir à entrer à l'exécution du programme, que le rayon et le nombre de pas sur un rayon.

La numérotation s'effectue de la même manière que pour une section rectangulaire, c'est-à-dire de gauche vers la droite pour chaque ligne, et de haut en bas d'une ligne à l'autre.

Nous retrouvons évidemment le fait que pour les modes TM, la valeur de E_z est nulle sur le contour, et donc le nombre de points (qui est aussi, on le rappelle, la dimension de l'espace vectoriel des cartographies dans une section) est moins important que pour les modes TE.

Modes TM :

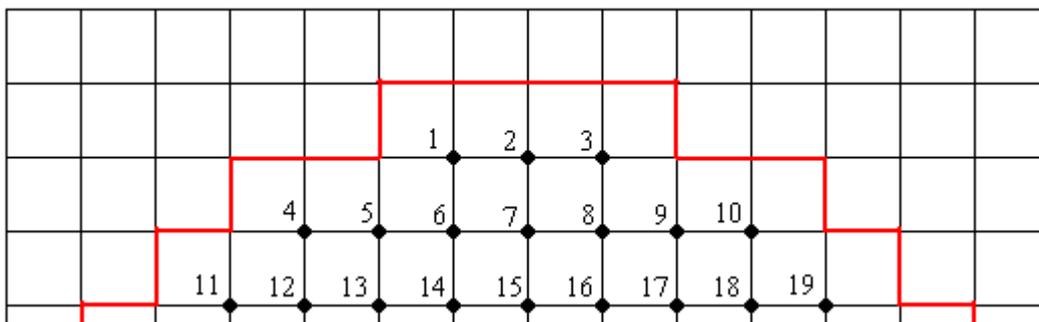


Figure 32 : Numérotation des nœuds pour les modes TM en section circulaire

Les difficultés supplémentaires de programmation sont une valeur du nombre de points par ligne n_x qui varie suivant l'indice de la ligne, et qui devient $n_x(i)$ et un repérage plus délicat des cas particuliers, près du contour.

La solution adoptée, qui est simple, a été un repérage et un marquage de chaque point en fonction de sa position par rapport au contour de la cavité. Une matrice rectangulaire d'entiers, **image de la grille rectangulaire** dans laquelle va s'insérer le « cercle pixellisé », reçoit la valeur 0, 1 ou 2 suivant que le point correspondant se trouve respectivement à l'intérieur strict, à l'extérieur strict ou sur le

contour. La lecture permanente de cette « matrice de repérage » permet de détecter les cas particuliers pour l'écriture de l'équation d'Helmholtz discrétisée.

Sur l'exemple de la **Figure 32**, les cas particuliers correspondent aux points 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 19 qui ont au moins un « voisin » sur le contour.

Les points correspondant au cas général sont : 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Modes TE :

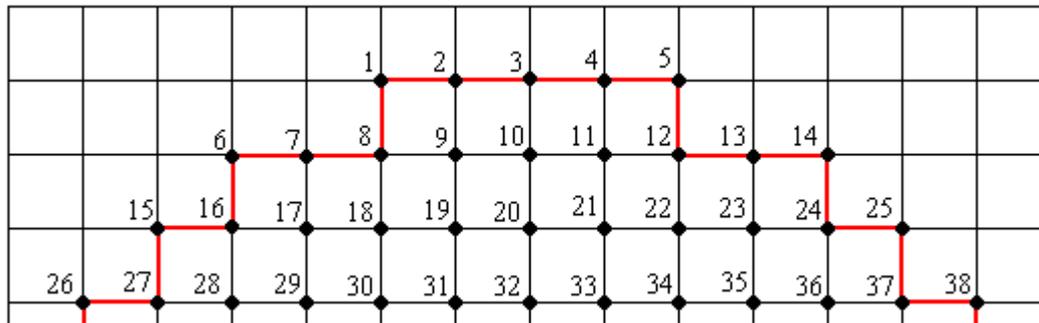


Figure 33 : Numérotation des nœuds pour les modes TE en section circulaire

Les cas particuliers sont un peu plus délicats à traiter, et peuvent facilement être comparés à ceux rencontrés en section rectangulaire, à condition de jeter un regard « **local** » sur ces points, c'est-à-dire à comparer par exemple les points 1, 6, 15 etc... au coin **en haut, à gauche** d'une section rectangulaire, les points 3, 7, 13 ... au **haut du contour** en section rectangulaire. Le même genre de remarques pouvant s'appliquer aux points situés à droite, en bas, aux autres coins etc...

De la même manière que ce que nous avons effectué en section rectangulaire, les équations générales des différences finies seront remplacées par celles vues plus haut au **paragraphe II.3.** pour les divers cas particuliers.

IV.1. Valeurs propres numériques en section circulaire

Comme pour les sections rectangulaires, à partir du **mode** étudié TM ou TE, du **rayon** et du **nombre de pas sur un rayon**, la matrice [A] est créée. Cette dernière correspond à la discrétisation de l'équation d'Helmholtz, en tenant compte des divers cas particuliers, à cause des conditions aux limites.

Nous obtenons alors les éléments propres, $(-k_{ci}^2)$ et les vecteurs propres qui sont simultanément stockés dans des fichiers.

Comparaisons numériques / analytiques :

Nous allons vérifier, exactement de la même façon qu'en section rectangulaire, la convergence des k_c^2 **numériques** vers les valeurs **analytiques** lorsque le découpage s'affine.

Modes TM :

Formule analytique des constantes de propagation transversales :

$$\boxed{(k_c)_{m,n} = \frac{X_{m,n}}{R}} \quad \text{où } X_{m,n} \text{ est la } n^{\text{ème}} \text{ racine de la fonction de Bessel d'ordre } m$$

$$J_m(X_{m,n}) = 0 \quad m \text{ pouvant être nul}$$

Considérons un cylindre de rayon $R= 2.0$ m

(m, n)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(0,2)	(3,1)
k_c^2 avec 10 div/rayon (m^{-2})	1.52	3.83	6.71	7.86	10.40
k_c^2 avec 15 div/rayon (m^{-2})	1.48	3.74	6.62	7.73	10.29
k_c^2 avec 20 div/rayon (m^{-2})	1.48	3.74	6.68	7.75	10.33
k_c^2 avec 25 div/rayon (m^{-2})	1.47	3.72	6.66	7.73	10.30
k_c^2 analytique (m^{-2})	1.45	3.65	6.60	7.62	10.18

Remarque : Bien qu'en analytique, les sections circulaires se traitent à l'aide des coordonnées cylindriques plus adaptées, nous travaillons ici en **coordonnées cartésiennes, suite à la « pixellisation » du cercle**. Cela se justifie d'autant plus que l'un des buts de cette thèse est de traiter, ou tout au moins montrer la faisabilité de la méthode pour des formes de sections quelconques, donc pas forcément à symétrie de révolution.

Modes TE :

Formule analytique : $(k_c)_{m,n} = \frac{X'_{m,n}}{R}$ dans laquelle $X'_{m,n}$ est la $n^{\text{ème}}$ racine de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre m : $J'_m(X'_{m,n}) = 0$

Avec un cylindre de rayon $R=2.0$ m

(m, n)	(0,0) cas dégénéré	(1,1)	(2,1)	(0,1)	(3,1)
k_c^2 avec 10 div/rayon (m^{-2})	$1.60 \cdot 10^{-13}$	0.810	2.215	3.496	4.140
k_c^2 avec 15 div/rayon (m^{-2})	$1.88 \cdot 10^{-13}$	0.814	2.237	3.527	4.208
k_c^2 avec 20 div/rayon (m^{-2})	$7.73 \cdot 10^{-13}$	0.825	2.271	3.575	4.280
k_c^2 avec 25 div/rayon (m^{-2})	$3.20 \cdot 10^{-12}$	0.830	2.285	3.597	4.313
k_c^2 analytique (m^{-2})	0.00	0.847	2.332	3.671	4.412

Nous constatons là encore une bonne convergence des valeurs **numériques** vers les valeurs **analytiques**, et cela d'autant mieux que la finesse du découpage augmente, évidemment.

IV.2. Vecteurs propres numériques en section circulaire

Le logiciel de visualisation des cartographies récupère donc les données calculées par le programme et les résultats sont présentés ci-dessous.

Nous avons toujours $R=2.0$ m, avec un découpage de 15 cellules/rayon

Modes TM

Les cartographies de $|E_z|$ sont affichées, ainsi que les valeurs numériques de k_c

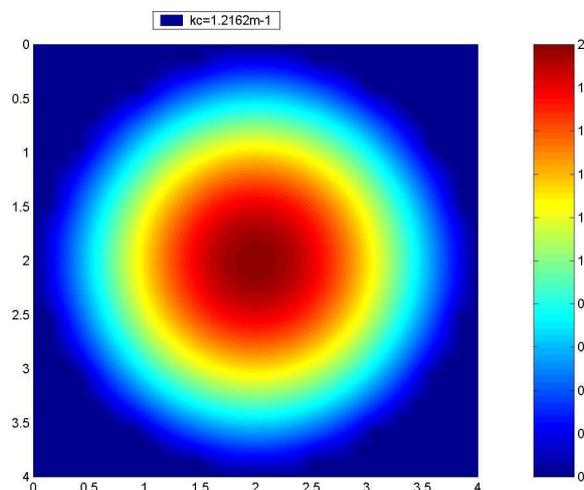


Figure 34 : Cartographie correspondant à la 1^{ère} valeur propre (de multiplicité 1). On reconnaît le mode TM_{10}

Pour les deux cartographies suivantes, nous sommes de nouveau confrontés au problème de valeurs propres multiples. Ce cas est fréquent, il est même **nécessaire**, car dès lors qu'un vecteur propre (une cartographie) est de la forme $\cos(m.\theta)$, avec $m \neq 0$, toutes les cartographies en $\cos(m.\theta + \varphi)$ appartiendront à l'espace des solutions, à cause de la symétrie de révolution du guide. Pour les obtenir toutes, nous avons besoin d'un deuxième vecteur propre (idéalement en $\sin(m.\theta)$, mais pas toujours obtenu directement), correspondant à la même valeur propre.

Nous pouvons toujours trouver 2 coefficients a et b tels que (pour un angle φ donné) l'égalité ci-dessous ait lieu :

$$a.\cos(m.\theta) + b.\sin(m.\theta) = \cos(m.\theta + \varphi)$$

Une fois de plus, c'est ici que nous trouvons encore la justification de l'étape d'orthogonalisation réalisée dans le code informatique.

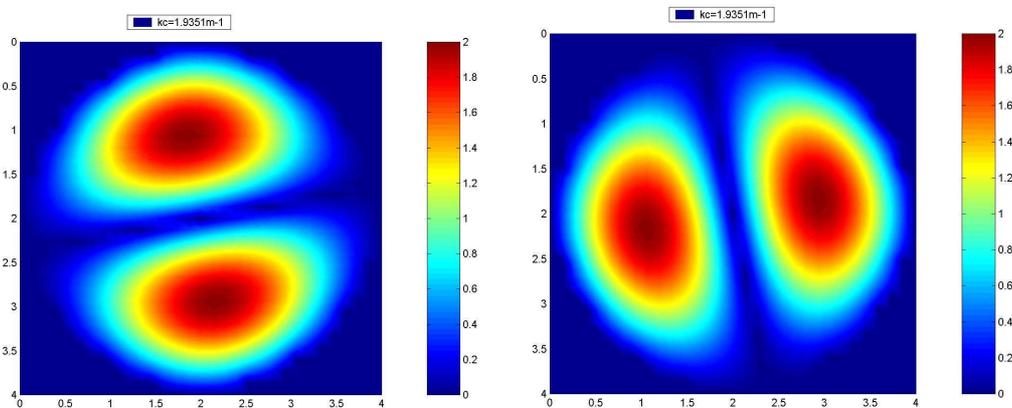


Figure 35 : Cartographies correspondant aux 2^{ème} et 3^{ème} valeurs propres (de multiplicité 2). Nous reconnaissons **2 vecteurs de base** engendrant **tout** mode TM_{11}

Il apparaît clairement sur la **Figure 35** que ces deux cartographies sont respectivement sous la forme $\cos(\theta + \varphi)$ pour la première et $\sin(\theta + \varphi)$ pour la seconde.

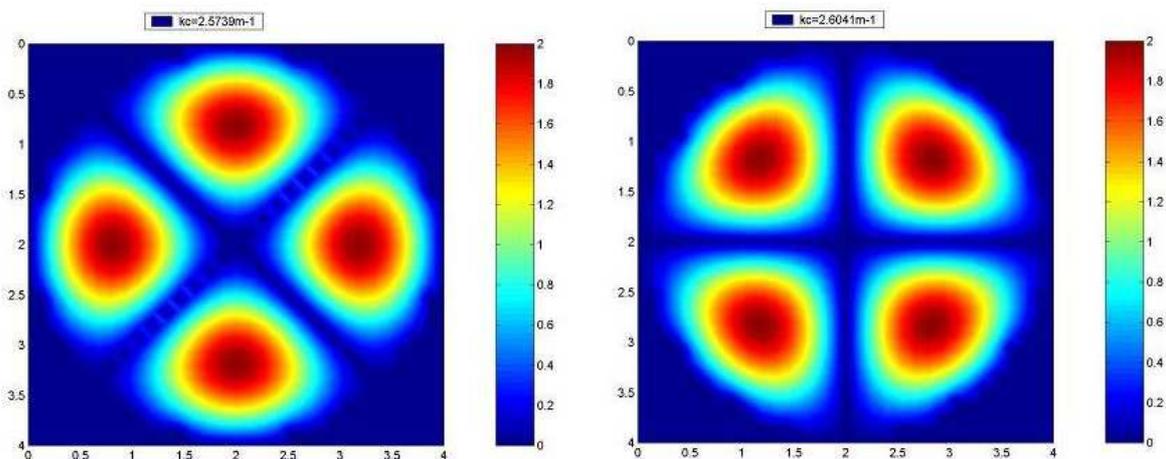


Figure 36 : Autre exemple de valeurs propres de multiplicité 2, pour lequel les valeurs **numériques** des k_C (4^{ème} et 5^{ème} valeurs propres) ne sont pas **totalement identiques** (valeur analytique : $k_C = 2.57 \text{ m}^{-1}$). L'orthogonalité des cartographies apparaît clairement pour une valeur de m égale à 2. On reconnaît des modes TM_{21} .

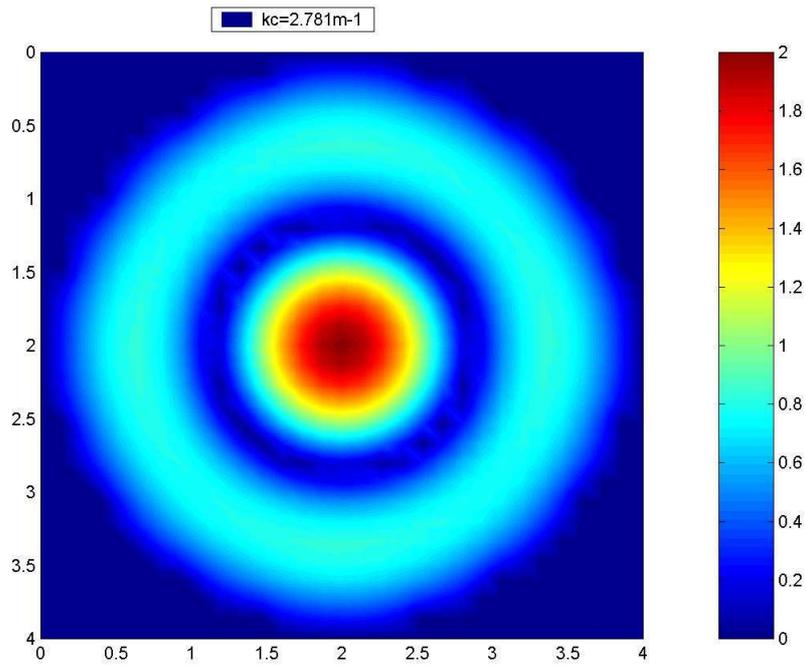


Figure 37 : Cartographie correspondant à la 6^{ème} valeur propre, sur laquelle on reconnaît le mode TM_{02}

Dans le cas du 6^{ème} vecteur propre ci-dessus, la valeur propre est de multiplicité égale à 1, car $m=0$ garantit une symétrie de révolution et un seul vecteur engendre l'espace des solutions correspondant à cette valeur propre.

Modes TE : Les cartographies de $|H_z|$ sont affichées ainsi que les valeurs de k_c

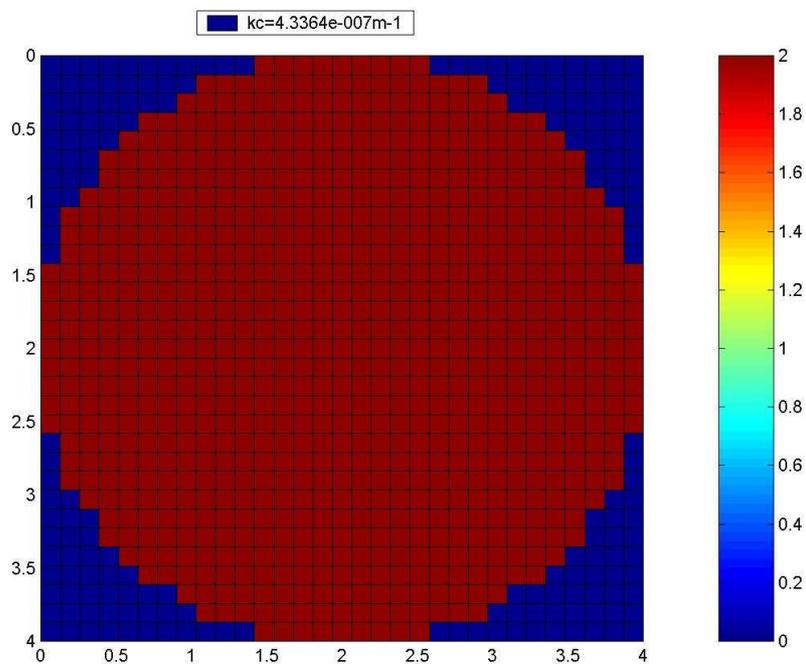
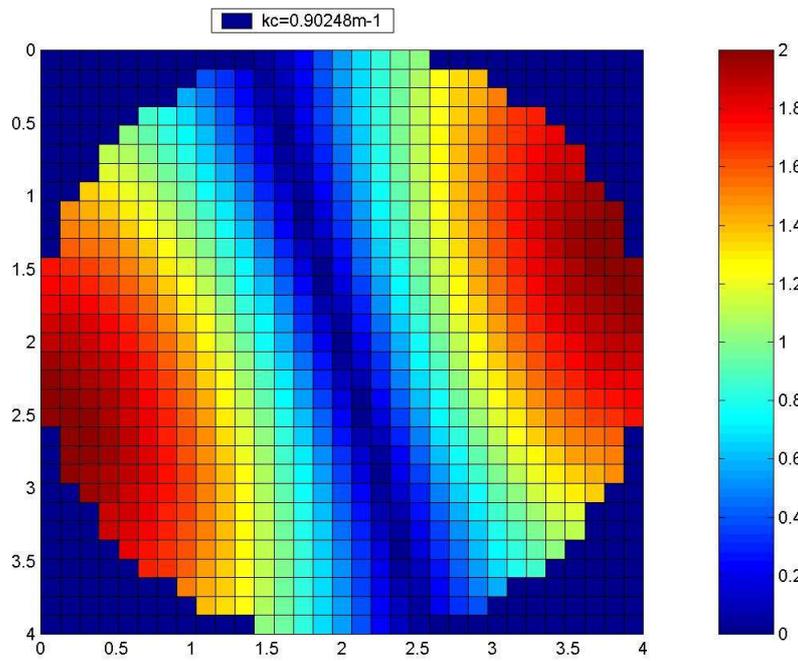
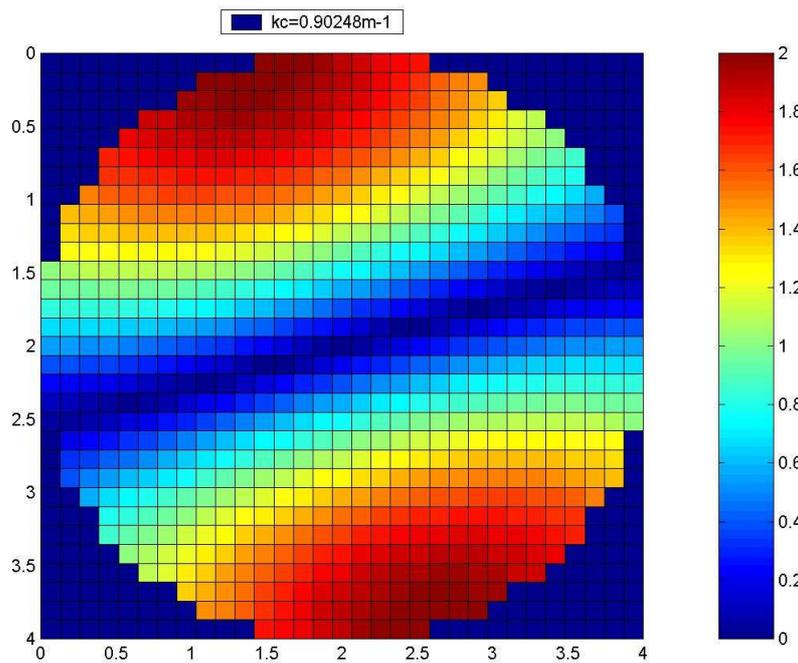


Figure 38 : Cartographie du 1^{er} vecteur propre ; on reconnaît le mode TE_{00} , avec $k_{c_analytique}=0 \text{ m}^{-1}$



(a)



(b)

Figure 39 : Cartographies correspondant aux 2^{ème} (a) et 3^{ème} (b) valeurs propres, de multiplicité 2. On constate encore l'orthogonalité et on reconnaît des modes TE₁₁

Nous constatons une valeur de m égale à 1 sur la **Figure 39(a)**. Nous nous attendons donc, pour la même valeur **analytique** de k_C à une autre cartographie, orthogonale à celle-ci pour le prochain vecteur propre (b).

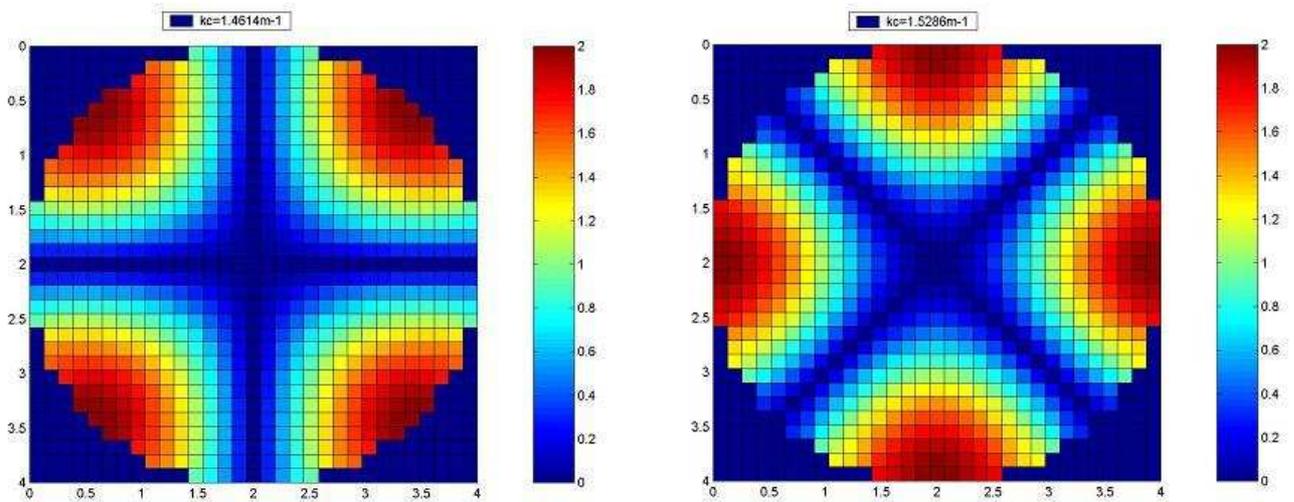


Figure 40 : Cartographies correspondant aux 4^{ème} et 5^{ème} valeurs propre, de multiplicité 2. Nous constatons encore l'orthogonalité et nous reconnaissons des modes TE_{21}

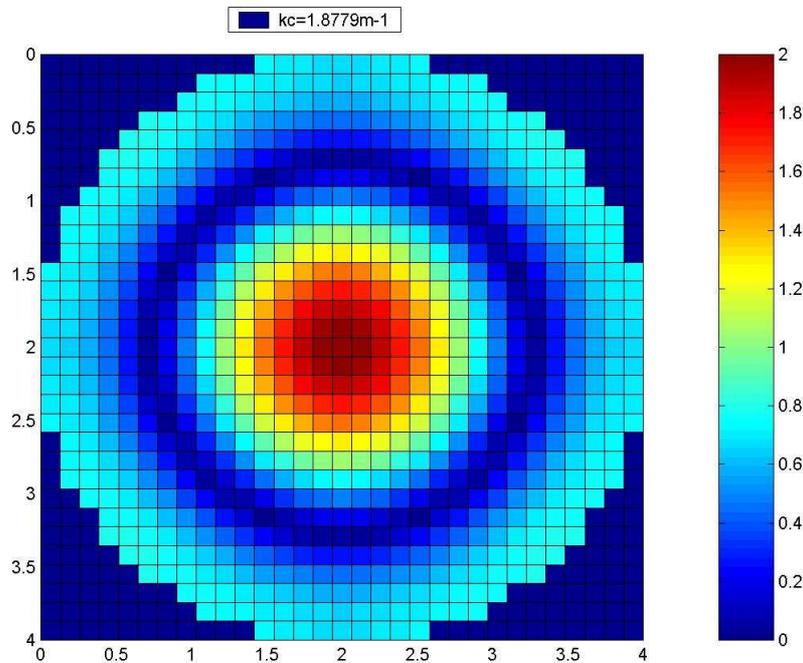


Figure 41 : 6^{ème} vecteur propre pour lequel on reconnaît le mode TE_{01}

V. Conclusion du Chapitre II

Nous avons présenté dans ce chapitre **l'équation d'Helmholtz** à laquelle obéit la composante longitudinale (E_z pour les modes TM, H_z pour les modes TE) dans un guide invariant par translation suivant z . La résolution **numérique** de cette équation nous a permis d'obtenir dans les deux cas particuliers de section **rectangulaire** et **circulaire**, les **éléments propres** de l'équation d'Helmholtz discrétisée. Les valeurs propres (en $-k_c^2$) ainsi que les vecteurs propres, correspondant à des cartographies dans une section droite, de la composante en z ont pu être comparées aux valeurs et cartographies **analytiques**. Ceci nous a conduits à valider la démarche.

Le point important de cette étape est le suivant : bien que l'étude ait été réalisée avec des sections de formes connues, la démonstration a été faite de la **généralité de la méthode**. Nous pourrions donc appliquer toute la démarche à des enceintes de section de forme quelconque. Comme nous savons de plus que la composante transversale du champ électromagnétique peut s'exprimer en fonction de cette composante longitudinale (**Annexe 3**), nous pourrions utiliser ces vecteurs propres (cartographies de base) pour décomposer le champ (dans un but de reconstruction ou de détermination de ce dernier) dans des enceintes (ou tout au moins dans une partie de ces enceintes) de forme **quelconque**.

Chapitre III

Produits scalaires permettant de réaliser le développement modal

I. Définition d'un produit scalaire

Nous cherchons à définir un produit scalaire qui permettrait, à partir d'une cartographie complète d'une section (2D) du champ électromagnétique dans une cavité, de déterminer les divers poids des modes de base intervenant dans l'expression de ce champ. Pour cela, il faudrait que le produit scalaire d'un mode par lui-même donne un nombre bien identifié. Il faudrait de plus que le produit scalaire de deux modes différents (soit par le caractère TM ou TE, soit par les nombres entiers m et n les caractérisant) donne un résultat nul.

L'idée de base est de ne prendre en compte que la connaissance du champ dans une section droite de la cavité, comme dans la **thèse de Cécile FIACHETTI [1]**.

D'autre part, que ce soit pour les modes TM et TE, nous savons qu'il est possible d'exprimer les composantes transversales (en x et y) en fonction de la composante longitudinale. La deuxième idée serait de ne tenir compte que de cette composante en z.

I.1. Produit scalaire analytique en section rectangulaire

On obtient à partir des expressions des champs électrique et magnétique donnés en **Annexe 5**, les composantes longitudinales pour une cavité de section rectangulaire de dimensions respectives L_x , L_y et L_z dont l'excitation (qui peut être une antenne, une onde illuminant une ouverture de la cavité etc...) en régime harmonique a une pulsation ω :

$$\begin{cases} e_z^{TM} = 2.E_0 \cdot \cos(\beta z) \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ h_z^{TM} = 0 \end{cases}$$

où les coefficients k_x , k_y et β sont caractéristiques du mode de guide $TM_{m,n}$ (m et n, entiers positifs) et donnés par :

$$k_x = \frac{m \cdot \pi}{L_x} \quad ; \quad k_y = \frac{n \cdot \pi}{L_y} \quad ; \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \underbrace{k_x^2 + k_y^2}_{k_c^2} + \beta^2 = k_0^2$$

et où on a $\beta = \frac{p \cdot \pi}{L_z}$ **seulement** si on considère une cavité **sans brasseur**

Nous définissons un produit scalaire :

Pour les modes TM :

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot dx \cdot dy$$

Pour les modes TE :

$$\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot dx \cdot dy$$

où \vec{e}_1, \vec{e}_2 d'une part et \vec{h}_1, \vec{h}_2 d'autre part représentent des cartographies dans **une section droite fixée** de la cavité de la composante en z et sont donc des fonctions du type **f(x,y)** (avec z comme paramètre) définies pour

$$0 \leq x \leq L_x \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq L_y$$

Nous démontrons en **Annexe 8** que les modes élémentaires forment une base orthogonale, avec cette définition de produit scalaire.

Une cartographie de champ e_z peut, comme on l'a vu plus haut, s'écrire comme une combinaison linéaire de modes élémentaires :

$$e_z = \sum_{m,n} A_{m,n}^{TM} \cdot e_{z m,n} \quad (3-1)$$

En considérant $\cos(\beta \cdot z)$ comme étant non nul, et en envisageant le seul cas ($m \neq 0$ et $n \neq 0$) nous obtenons le **poïds** du mode correspondant (voir démonstration en **Annexe 8**)

$$A_{m,n}^{TM} = \frac{1}{E_0^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TM}} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z m,n}^{TM} \cdot e_z \cdot dx \cdot dy \quad (3-2)$$

$$\text{avec} \quad K^{TM} = \begin{cases} 1 & \text{si } (m \neq 0 \text{ et } n \neq 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si nous écrivons de la même manière une cartographie h_z comme étant une combinaison linéaire des cartographies **de base** :

$$h_z = \sum_{p,q} A_{p,q}^{TE} \cdot h_{z p,q}$$

nous obtenons, en considérant $\sin(\beta \cdot z)$ comme étant non nul, le **poïds** du mode correspondant :

$$A_{p,q}^{TE} = - \frac{1}{H_0^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TE}} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z p,q}^{TE} \cdot h_z \cdot dx \cdot dy \quad (3-3)$$

$$\text{avec} \quad K^{TE} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_x \neq 0 \text{ et } k_y \neq 0 \\ 2 & \text{si } (k_x = 0 \text{ et } k_y \neq 0) \quad \text{ou} \quad (k_x \neq 0 \text{ et } k_y = 0) \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.2. Produit scalaire analytique en section circulaire

On note R le rayon de cette section.

L'idée est de définir un produit scalaire « calqué » sur celui défini en section rectangulaire :

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad \text{pour les modes TM}$$

$$\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad \text{pour les modes TE}$$

expressions dans lesquelles les vecteurs représentent des cartographies dans une section droite des composantes en z comme définies précédemment. Nous démontrons (voir **Annexe 9**) que dans ce produit scalaire, les modes de base forment une base orthogonale. De plus si nous considérons toute cartographie comme une combinaison linéaire des cartographies élémentaires :

pour les modes TM :

$$e_z = \sum_{m,n} A_{m,n}^{TM} \cdot e_{z\ m,n}$$

Nous obtenons le **poïds** du mode correspondant (voir **équation (A9-5)** établie en **Annexe 9**):

$$A_{m,n}^{TM} = \frac{2}{R^2 \cdot J_{m+1}^2(k_C R) \cdot K\pi} \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} e_{z\ m,n}^{TM} \cdot e_z \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$$

pour les modes TE :

$$h_z = \sum_{p,q} A_{p,q}^{TE} \cdot h_{z\ p,q}$$

Nous obtenons le **poïds** du mode correspondant (voir **équation (A9-6)** établie en **Annexe 9**):

$$A_{p,q}^{TE} = \frac{2k_C^2}{(k_C^2 R^2 - p^2) \cdot J_p^2(k_C R) \cdot K\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} h_{z\ p,q}^{TE} \cdot h_z \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$$

$$\text{avec } K = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

I.3. Produit scalaire discrétisé en section rectangulaire

Nous avons défini plus haut un produit scalaire **analytique** :

$$\text{Deux modes TM entre eux : } \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot dx \cdot dy \quad (3-4)$$

Deux modes TE entre eux : $\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot dx \cdot dy$ (3-5)

Produit scalaire d'un mode TM par un mode TE : $\langle \vec{e} | \vec{h} \rangle = 0$, car une des deux grandeurs est identiquement nulle **par définition même** des modes TM ou TE, puisqu'on considère les composantes en z .

Nous considérons des cartographies h_z (modes TE) et e_z (modes TM) représentées par des vecteurs-colonne, comme vu au **paragraphe II.3. du Chapitre II**, mais **d'étendue** « complétée » pour les $[E_z]$:

$$[H_z] = \begin{bmatrix} H_{z1} \\ H_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ H_{zn} \end{bmatrix} \quad [E_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_{z1} \\ E_{z2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ E_{zi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

vecteurs-colonne de **même** étendue $n=(n_x+1) \cdot (n_y+1)$ dans lesquels les 0 de $[E_z]$ représentent le champ électrique sur le contour avec la même numérotation que celle vue plus haut pour les modes TE. Cette augmentation d'étendue n'est appliquée qu'après l'obtention des vecteurs propres, pour ne pas allonger les temps de calcul, dans un souci d'homogénéité des variables pour les modes TM et TE dans l'écriture du code informatique, ainsi que des fichiers sauvegardés.

Les cartographies **discrétisées** sont donc des n-uplets, considérés comme des éléments d'un espace vectoriel de dimension $n=(n_x+1) \cdot (n_y+1)$.

Notations : On considère des vecteurs

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} \quad et \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix}$$

On définit la notation suivante :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + \dots + U_n \cdot V_n = \sum_{i=1}^n U_i \cdot V_i$$

qui est tout simplement le **produit scalaire « classique »** entre deux n-uplets (à ne pas confondre avec le produit scalaire défini par les expressions (3-4) et (3-5) et noté $\langle \vec{U} | \vec{V} \rangle$)

Nous pouvons évaluer de manière approchée les expressions (3-4) et (3-5) par :

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot dx \cdot dy \approx h_x \cdot h_y \cdot \sum_{i=1}^n e_{z1i} \cdot e_{z2i} = h_x \cdot h_y \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \quad (3-6)$$

$$\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot dx \cdot dy \approx h_x \cdot h_y \cdot \sum_{i=1}^n h_{z1i} \cdot h_{z2i} = h_x \cdot h_y \cdot \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \quad (3-7)$$

où h_x et h_y sont les pas spatiaux correspondant au maillage de la section selon x et y et où les **mêmes** notations \vec{e}_i et \vec{h}_i sont utilisées pour désigner une cartographie de la composante z, sous forme analytiques ou discrétisées.

Nous constatons en regardant les équations (3-6) et (3-7) que nous pouvons simplifier le produit scalaire en prenant tout simplement pour ce dernier le **produit scalaire classique** entre deux n-uplets :

Produit scalaire discrétisé :

$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \text{pour les modes TM} \\ \langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 & \text{pour les modes TE} \\ \langle \vec{e} | \vec{h} \rangle = 0 \end{cases}$$

où les propriétés **d'orthogonalité** entre des modes différents apparaissent immédiatement.

Si une cartographie (un n-uplet) est une combinaison linéaire des modes élémentaires et si nous faisons de plus, le choix de **normaliser** les vecteurs propres, de telle façon que la coordonnée de plus grand module du n-uplet soit ramenée à la valeur « 2 » (à cause du facteur « $2.E_0$ » ou « $2.H_0$ » apparaissant dans les expressions générales en « ondes stationnaires ») et si nous choisissons la cartographie de la section située à la côte z nous avons :

Modes TM :

$$\vec{e}_z = \sum_{m,n} A_{m,n}^{TM} \cdot \vec{e}_{Zm,n}^{TM} \cdot E_0 \cos(\beta_{m,n} \cdot z)$$

$$\langle \vec{e}_z | \vec{e}_{Zm1,n1}^{TM} \rangle = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_{Zm1,n1}^{TM} = A_{m1,n1}^{TM} \cdot (\vec{e}_{Zm1,n1}^{TM})^2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\beta_{m1,n1} \cdot z) = A_{m1,n1}^{TM} \cdot \|\vec{e}_{Zm1,n1}^{TM}\|^2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\beta_{m1,n1} \cdot z)$$

d'où nous déduisons le poids du mode recherché caractérisé par 2 nombres entiers m_1 et n_1

$$A_{m1,n1}^{TM} = \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{Zm1,n1}^{TM}}{\|\vec{e}_{Zm1,n1}^{TM}\|^2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\beta_{m1,n1} \cdot z)} \quad (3-8)$$

où nous considérons **a priori** que $\cos(\beta_{m_1, n_1} \cdot z) \neq 0$, ce qui pourra toujours être réalisé en pratique par une **petite** modification du maillage, dans le cas **très improbable** où le $\cos(\beta_{m_1, n_1} \cdot z) = 0$ se produirait, avec des valeurs obtenues **numériquement**.

Modes TE :

$$\vec{h}_Z = -\sum_{p,q} A_{p,q}^{TE} \cdot \vec{h}_{Z,p,q}^{TE} \cdot j \cdot H_0 \cdot \sin(\beta_{p,q} \cdot z)$$

$$\langle \vec{h}_Z | \vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TE} \rangle = \vec{h}_Z \cdot \vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TE} = -A_{p_1,q_1}^{TE} \cdot \left(\vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TE} \right)^2 \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta_{p_1,q_1} \cdot z) = -A_{p_1,q_1}^{TE} \left\| \vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TM} \right\|^2 \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta_{p_1,q_1} \cdot z)$$

d'où on déduit le poids du mode recherché caractérisé par 2 nombres entiers p_1 et q_1

$$A_{p_1,q_1}^{TE} = \frac{-\vec{h}_Z \cdot \vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TE}}{\left\| \vec{h}_{Z,p_1,q_1}^{TE} \right\|^2 \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta_{p_1,q_1} \cdot z)} \quad (3-9)$$

en considérant pour les mêmes raisons que précédemment que $\sin(\beta_{p_1,q_1} \cdot z) \neq 0$

Remarque importante :

Le signe « moins » apparaissant dans la formule (3-9) provient du facteur « j » complexe des formules des expressions du champ électromagnétique en ondes progressives en section rectangulaire (voir **Annexe 4**), avec un certain choix de la **phase à l'origine**, choix qui conditionne les diverses expressions établies dans les **Annexes 2,3,4,5**

Dans la pratique, pour l'écriture du code informatique, il a été pris en compte le fait que les vecteurs propres obtenus numériquement **pour les modes TE** étaient en quadrature par rapport aux expressions présentées ici. Le signe « moins » disparaît donc dans le coefficient de (3-9).

I.4. Produit scalaire discrétisé en section circulaire

Bien que nous ayons défini un produit scalaire dans lequel les divers modes TM et TE forment une base orthogonale en utilisant les coordonnées cylindriques, la « pixellisation » du cercle, définie au **paragraphe IV** du **Chapitre II** nous amène à utiliser les coordonnées cartésiennes pour définir un produit scalaire discrétisé.

En utilisant la notation « condensée » consistant à noter \mathbf{v}_Z le champ \mathbf{e}_Z ou \mathbf{h}_Z selon le contexte, on a donc le produit scalaire en coordonnées cartésiennes :

$$\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \int_0^{2R} \int_{Lx1(y)}^{Lx2(y)} v_{Z1} \cdot v_{Z2} \cdot dx \cdot dy \approx h^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_{Z1i} \cdot v_{Z2i} = h^2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

où h est le côté d'un « pixel » et n le nombre total de pixels composant le « cercle pixellisé ».

Nous voyons immédiatement que le produit scalaire discrétisé peut de la même manière qu'en section rectangulaire, coïncider avec le **produit scalaire classique** entre deux n-uplets :

$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \text{pour les modes TM} \\ \langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 & \text{pour les modes TE} \\ \langle \vec{e} | \vec{h} \rangle = 0 \end{cases}$$

et il apparaît alors que la validité des formules (3-8) et (3-9) permettant d'obtenir le poids des modes TM et TE est conservée, en prenant comme étendue des « vecteurs-colonnes » représentant une cartographie v_z , le nombre de **nœuds** de la section circulaire « pixellisée » exactement de la même manière qu'en section rectangulaire.

II. Calculs de poids et reconstruction de cartographie en section rectangulaire

Après le calcul des vecteurs propres, l'utilisateur a la possibilité d'utiliser ces derniers, afin de calculer les poids des divers modes composant une cartographie. Le calcul des poids a été vu en détail aux paragraphes I.1. et I.3. , dans lesquels ont été définis divers produits scalaires en section rectangulaire servant justement à ces calculs.

```

C:\FPS4\Unif_Rect_TE_TM\Debug\guide_rect_TE_TM.exe
Entrez la frequence(en Hz)
Entrez une frequence nulle pour arreter le programme
5e9
Entrez la distance de la section (en m)
par rapport au mur electrique en z=0
0.075
On vous propose de calculer les poids d une cartographie
Voulez-vous poursuivre? (o ou n)
o
Entrez le nom du fichier a lire
resu_interm2
Entrez le nom du fichier de sortie
sortie
*****
POIDS ABSOLUS
*****
beta= <77.8152207622897,0.0000000000000000E+000>
poids du mode complexe= <-0.426994300402533,-0.597108059764274>
module du poids= 0.734072317698811
Mode propagatif
-----
beta= <55.6916932698996,0.0000000000000000E+000>
poids du mode complexe= <1.11731398795353,2.07831160220916>
module du poids= 2.35961218499012
Mode propagatif

```

Le programme calcule alors le poids de **tous les modes propagatifs** auquel on rajoute quelques **modes evanescents** (dont le nombre est fixé par l'utilisateur). Pour les premiers modes, sont affichées à l'écran les informations suivantes : les valeurs de la constante de propagation longitudinale β , le poids complexe correspondant, et si le mode est **propagatif** ou **évanescent** (voir ci-dessus).

```

C:\> "C:\FPS4\Unif_Rect_TE_TM\Debug\guide_rect_TE_TM.exe"
*****
POIDS ABSOLUS
*****
beta= <77.8152207622897,0.000000000000000E+000>
poids du mode complexe= <-0.426994300402533,-0.597108059764274>
module du poids= 0.734072317698811
Mode propagatif
-----
beta= <55.6916932698996,0.000000000000000E+000>
poids du mode complexe= <1.11731398795353,2.07831160220916>
module du poids= 2.35961218499012
Mode propagatif
-----
beta= <0.000000000000000E+000,42.4489371831379>
poids du mode complexe= <5.769496058653383E-003,1.764751563442819E-002>
module du poids= 1.856668771855132E-002
Mode evanescent
-----
beta= <0.000000000000000E+000,75.2793145140573>
poids du mode complexe= <-2.400132685672205E-009,1.594613820693558E-009>
module du poids= 2.881567307209564E-009
Mode evanescent
-----
beta= <0.000000000000000E+000,92.8472890111880>
poids du mode complexe= <7.281658700597735E-010,-6.644463743445744E-011>

```

puis, pour mieux fixer le rôle de chaque mode, le poids **relatif** de chacun est affiché, par comparaisons des modules des différents poids :

```

C:\> "C:\FPS4\Unif_Rect_TE_TM\Debug\guide_rect_TE_TM.exe"
*****
POIDS RELATIFS
*****
poids du mode= 0.235862846477650
Mode propagatif
-----
poids du mode= 0.758160787590777
Mode propagatif
-----
poids du mode= 5.965613617861449E-003
Mode evanescent
-----
poids du mode= 9.258688156583598E-010
Mode evanescent
-----
poids du mode= 2.349370898716941E-010
Mode evanescent
-----
poids du mode= 1.075115290536312E-005
Mode evanescent

```

Toutes ces données sont sauvegardées dans divers fichiers, qui seront exploitées par le logiciel de visualisation, qui nous permettra de vérifier la validité des calculs par comparaisons de la cartographie d'origine avec la cartographie **reconstituée à l'aide des modes élémentaires**.

Les données de départ proviennent d'une simulation FDTD (Finite Difference Time Domain), à l'aide du logiciel **TRIDIMO**, suivie d'une transformation de Fourier, pour obtenir la cartographie correspondant au régime harmonique à la fréquence voulue. La cavité est munie d'une ouverture, créant des pertes, pour obtenir un régime permanent au cours de la simulation :

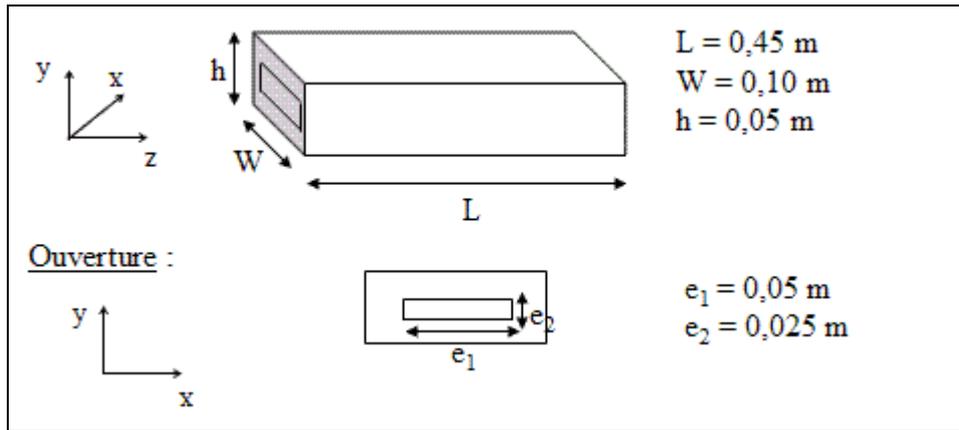


Figure 42 : Cavité avec ouverture utilisée pour la simulation FDTD

L'excitation est réalisée à l'aide d'une antenne filaire, à l'int erieur de la cavité.

Exemple d'une cartographie en E_z : fréquence 5.00 GHz

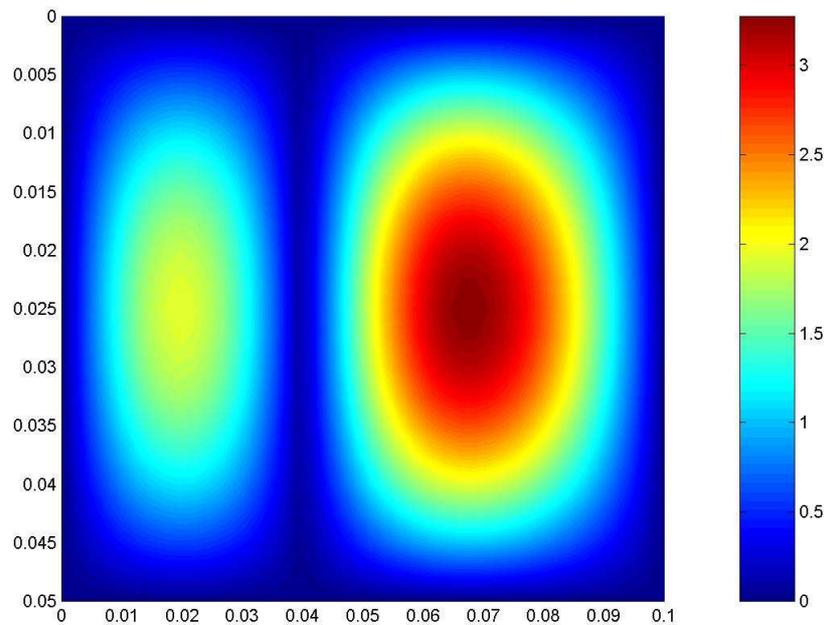
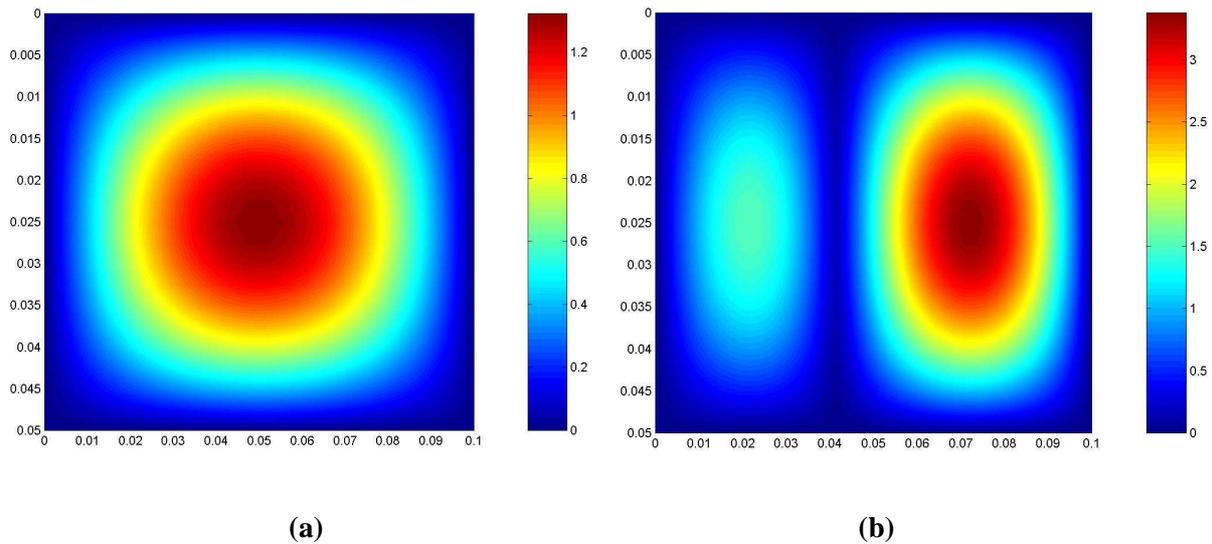


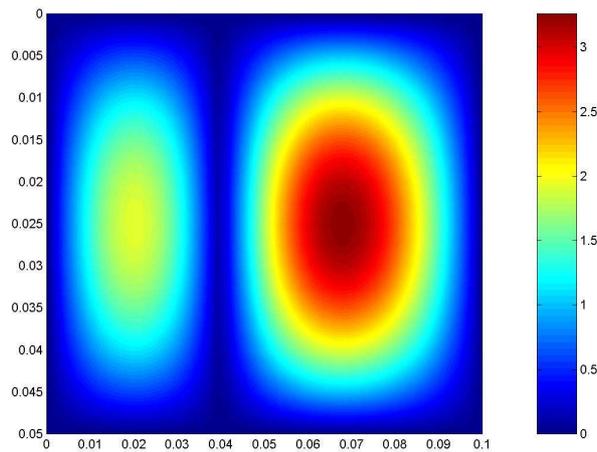
Figure 43 : Allure de $|E_z|$   dans la section $z=cte$ située à 0.075 m du mur électrique, obtenue par FDTD suivie d'une transformation de Fourier, à $f=5.00 \text{ GHz}$

On retrouve sur les saisies d'écran ci-dessus les résultats souhaités, à savoir qu'il y a 2 modes **propagatifs**, et 1 mode ** vanescent** fournissant des poids significatifs avec des poids relatifs respectifs de 23.6% pour le mode TM_{11} , 75.8% pour le mode TM_{21} et 0.6% pour le mode TM_{31} .

Nous présentons ci-dessous la cartographie de $|E_z|$ reconstruite à partir des modes élémentaires, en utilisant les poids, ainsi que les vecteurs propres calculés :



Avec respectivement 1 mode (a) et 2 modes (b)



En rajoutant le 3^{ème} mode, on obtient le résultat final

Figure 44 : Reconstruction de la cartographie originale avec 2 modes propagatifs+1 mode évanescent

Nous constatons sur la **Figure 44** que l'opération de « reconstruction » de la cartographie originale à partir des modes élémentaires s'est effectuée avec succès.

Exemple d'une cartographie en Hz : fréquence : 6.00 GHz

Le calcul des divers poids fait apparaître une plus grande richesse de modes que pour les modes TM, ce qui est normal, à cause de la possibilité d'avoir des entiers m et n caractérisant ces modes, égaux à zéro. De plus la fréquence est prise supérieure à la simulation précédente.

Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

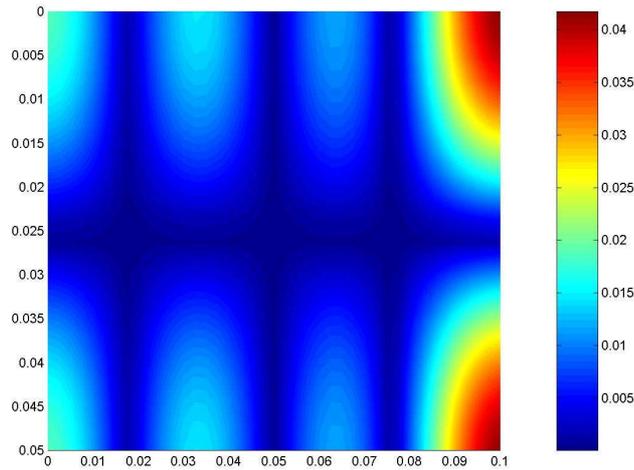


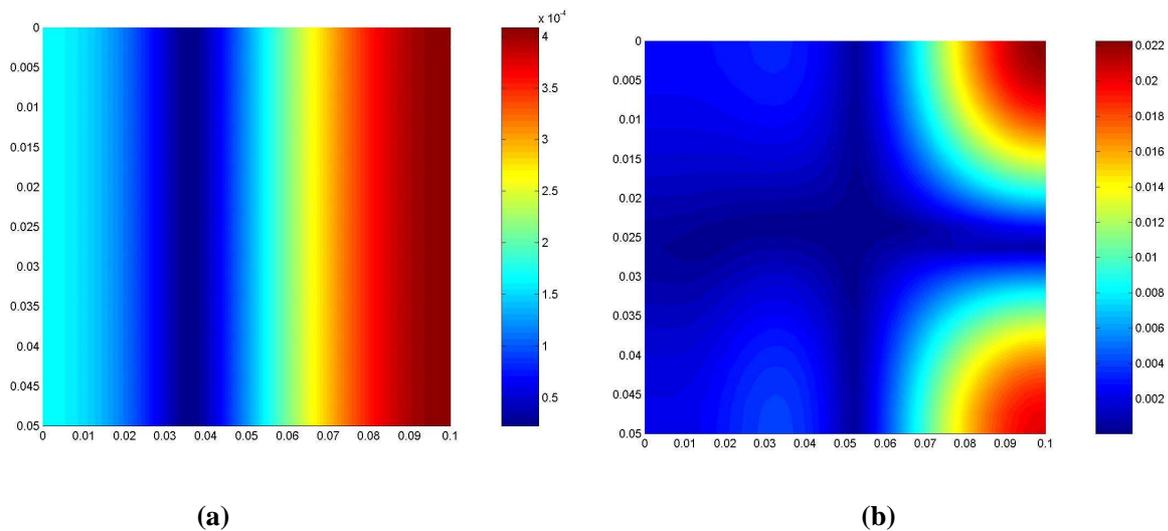
Figure 45 : Allure de $|H_z|$ obtenue par **FDTD** et d'une transformation de Fourier, pour $f=6.00$ GHz

Les modes ayant des poids significatifs, se répartissent comme suit :

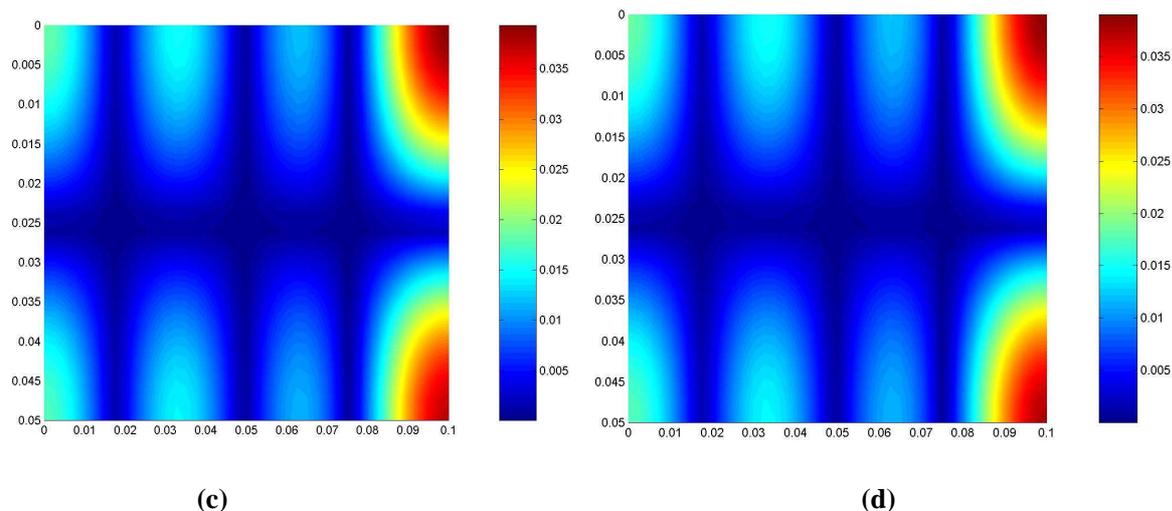
$$\left\{ \begin{array}{l} TE_{00} \rightarrow 19.8 \% \\ TE_{10} \rightarrow 1.0 \% \\ TE_{01} \rightarrow 5.3 \% \\ TE_{20} \rightarrow 0.16 \% \\ TE_{11} \rightarrow 11.7 \% \\ TE_{21} \rightarrow 15.4 \% \\ TE_{30} \rightarrow 23.5 \% \\ TE_{31} \rightarrow 22.9 \% \\ TE_{02} \rightarrow 0.11 \% \end{array} \right.$$

Remarque : Le mode TE_{00} possède une cartographie **uniforme**, qui dans notre cas précis ici ajoute une contribution, dont le module vaut environ $5.8 \cdot 10^{-5}$ A/m, soit à peine plus de 0.1 % du champ total. Cette faible valeur est due au fait que le facteur $\sin(\beta \cdot z)$ vaut environ **-0.0065** dans la section étudiée. Le mode TE_{00} étant un mode « dégénéré », n'ayant qu'une existence « numérique » et non « analytique », il semblerait que son poids ne corresponde qu'à des « dispersions de calculs » tout-à-fait dans les normes (0.1%) qui se retrouvent « amplifiées » par un facteur $1/\sin(\beta \cdot z)$, la conséquence étant un poids de mode « paraissant » important. La suppression de ce mode a une influence à peine visible sur la reconstruction de cartographies .

A présent, nous allons montrer l'influence du nombre de modes sur la qualité de la reconstruction. Pour ce faire, nous allons considérer un nombre de modes de plus en plus important.



Avec respectivement 2 modes (a), puis 7 modes (b)



Avec les 8 premiers modes (c) (le 8^{ème} étant le mode TE_{31}), Nous arrivons finalement au résultat (d)

Figure 46 : Reconstruction de la cartographie originale par superposition de 10 modes propagatifs+2 modes évanescents

III. Calculs de poids et reconstruction de cartographie en section circulaire

Le dispositif étudié est un **missile générique** appelé **GENEC**, provenant du Centre d'Etudes des Armées de Gramat dans le Lot. Il est de forme cylindrique, son rayon est de 0.5 m. Les cartographies fournies sont visualisées ci-dessous. Le but est le même que pour les enceintes de section rectangulaire, à savoir le calcul des divers poids élémentaires composant celles-ci, ainsi que la reconstruction de la cartographie originale avec un nombre fini de modes évanescents. Le code réalisé effectue des opérations en tout point similaires à celles effectuées pour des sections rectangulaires.

Modes TM

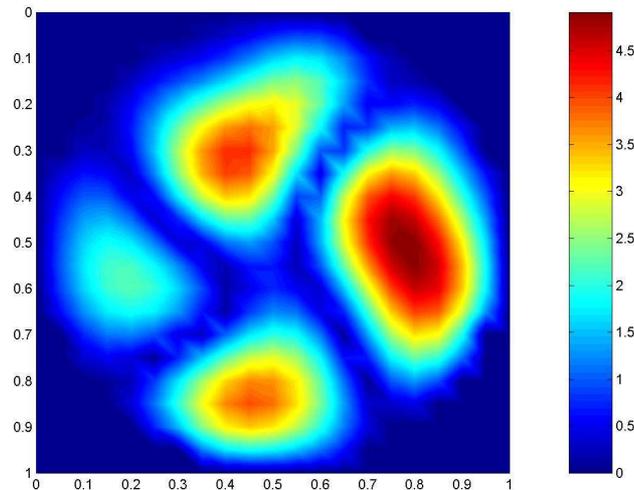


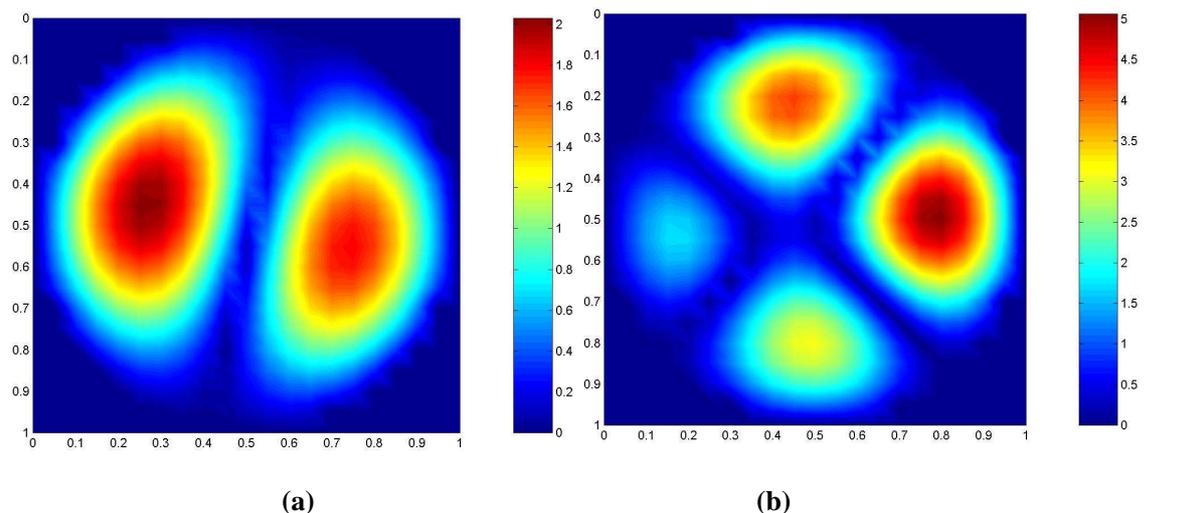
Figure 47 : Champ $|E_z|$ dans une section située à 0.075 m d'un « mur électrique », pour $f=500$ MHz

Le programme fournit les poids suivants, pour les diverses composantes :

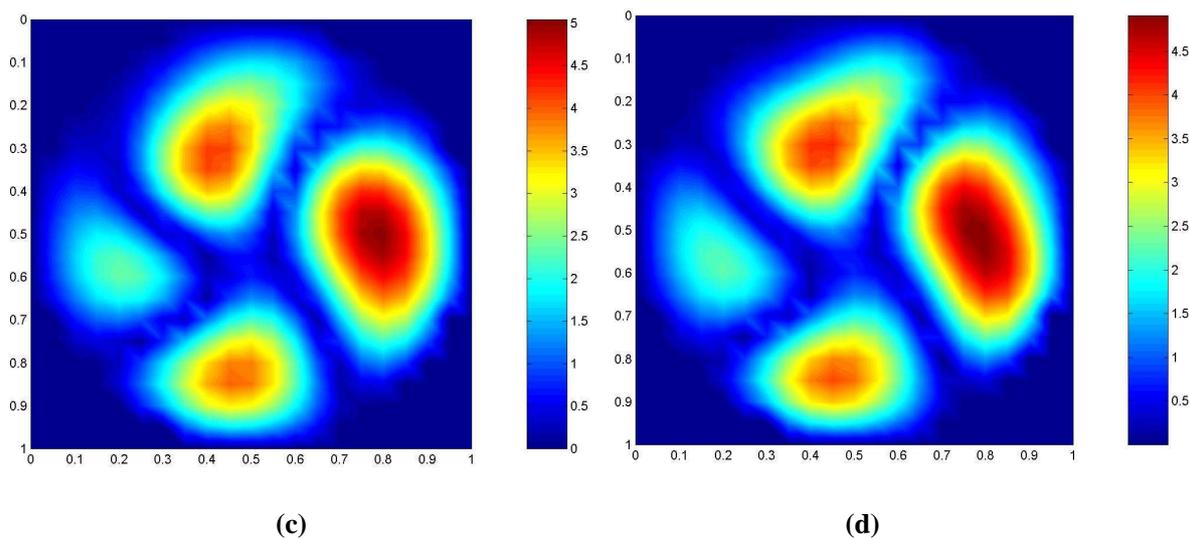
$$\begin{array}{l}
 \text{Modes propagatifs} \left\{ \begin{array}{l}
 TM_{01} \rightarrow 2.5 \% \\
 TM_{11} \rightarrow 17.3 \% \\
 TM_{11} \rightarrow 10.6 \% \\
 TM_{21} \rightarrow 31.9 \% \\
 TM_{21} \rightarrow 4.9 \%
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 \text{multiplicité } 2 \\
 \text{multiplicité } 2
 \end{array} \\
 \\
 \text{Modes évanescents} \left\{ \begin{array}{l}
 TM_{02} \rightarrow 6.2 \% \\
 TM_{31} \rightarrow 3.35 \% \\
 TM_{31} \rightarrow 4.5 \% \\
 TM_{12} \rightarrow 4.4 \% \\
 TM_{12} \rightarrow 0.87 \%
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 \text{multiplicité } 2 \\
 \text{multiplicité } 2
 \end{array} \\
 \\
 + \text{ environ } 10 \text{ modes évanescents totalisant } 13.5 \%
 \end{array}$$

Des commentaires s'imposent concernant le nombre importants de modes évanescents. Les modes évanescents sont présents en « grand » nombre d'une part à cause de la proximité d'ouvertures dans le dispositif donnant sur l'espace libre, la cartographie originale résultant d'illumination du missile générique par une onde plane. Comme nous le verrons plus loin, ces ouvertures créent des pertes supplémentaires, augmentant le nombre de modes à considérer.

La reconstruction numérique donne les résultats ci-dessous :



Avec respectivement 3 modes (a) et 5 modes propagatifs (b)



Avec 5 modes propagatifs+10 modes évanescents (c) et avec 10 modes évanescents de plus (d)

Figure 48 : Reconstitution d'une carte de champ $|E_z|$ à l'aide de 5 modes propagatifs+20 modes évanescents

Nous constatons dans ce cas l'importance des modes évanescents pour retrouver une cartographie fidèle à l'originale. Nous pouvons tout de même noter que la cartographie correspondant à la superposition des 5 modes propagatifs donne déjà un aperçu très correct de la carte originale.

Remarque importante :

Les formules de l' **Annexe 3** font apparaître des coefficients en $\cos(\beta.z)$ et en $\sin(\beta.z)$ et gardent leur validité même dans le cas où la constante de propagation longitudinale β est un nombre imaginaire, ce qui correspond alors respectivement à des **cosinus et sinus hyperboliques**, qui peuvent prendre des valeurs supérieures à 1 en module (et parfois même bien supérieures à 1). Le cas β

imaginaire signifie justement que le mode concerné est évanescent. On ne s'étonnera pas du rôle **relativement** important de certains de ces modes évanescents en ce qui concerne la « visualisation » de la cartographie, en dépit d'un « poids » paraissant peu significatif.

Modes TE

Le pas spatial est diminué à cause de la difficulté plus importante de visualiser correctement les cartographies des champs magnétiques, du fait de leur valeurs maximales atteintes sur les contours.

Nous choisissons un découpage correspondant à 15 cellules par rayon (au lieu de 10). La fréquence de l'excitation est de 200 MHz.

Cartographie originale :

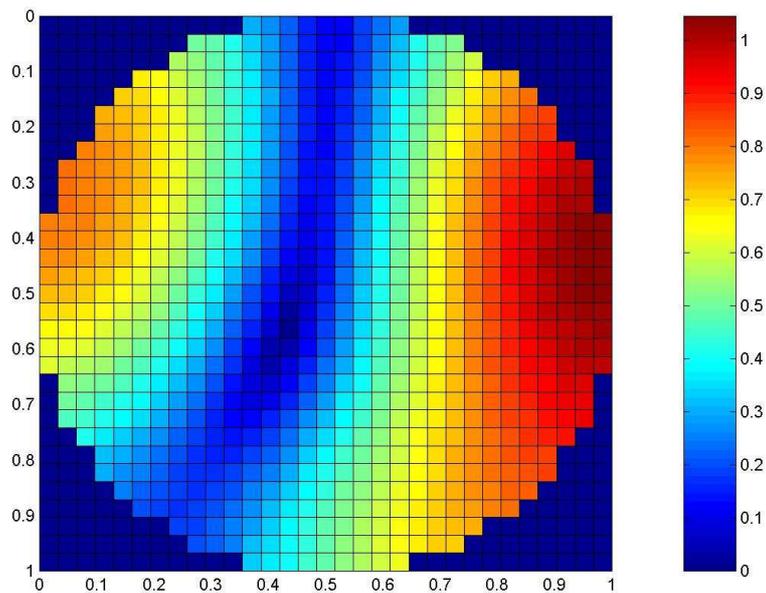
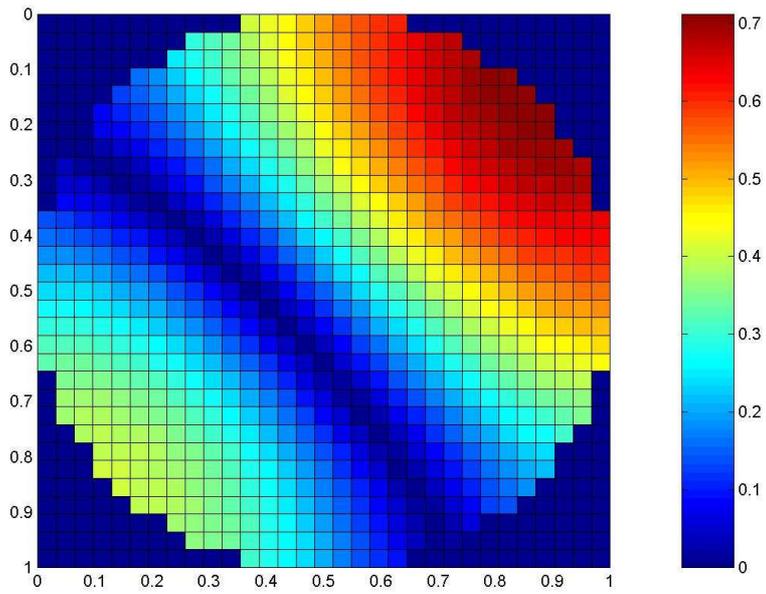


Figure 49 : Cartographie de $|H_z|$ dans une section située à 0.075 m d'un « mur électrique », avec $f=200$ MHz

Composition donnée par l'exécution du programme :

$$\begin{array}{l}
 \text{Modes propagatifs} \left\{ \begin{array}{l} TE_{00} \rightarrow 5.15 \% \\ TE_{11} \rightarrow 36.1 \% \\ TE_{11} \rightarrow 48.6 \% \end{array} \right\} \text{multiplicité } 2 \\
 \text{Modes évanescents} \left\{ \begin{array}{l} TE_{21} \rightarrow 4.6 \% \\ TE_{21} \rightarrow 5.6 \% \end{array} \right\} \text{multiplicité } 2
 \end{array}$$

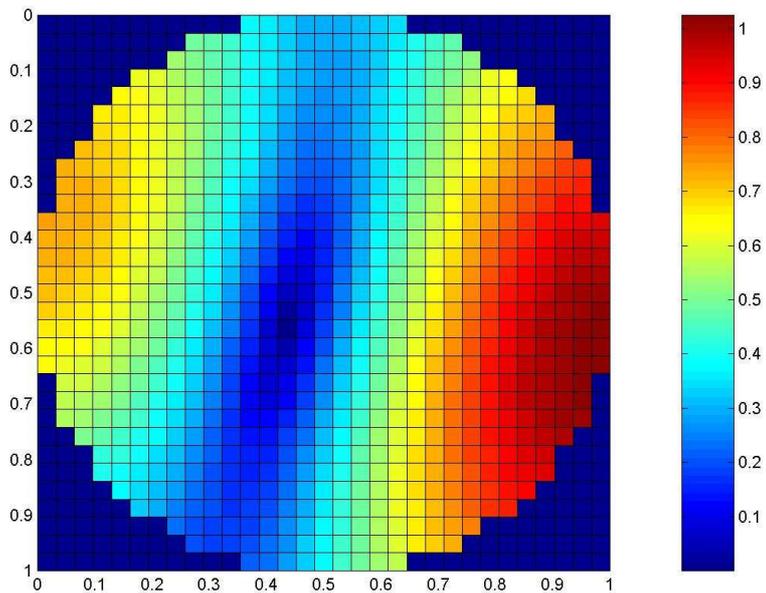


Avec 2 modes



En rajoutant le 3^{ème} mode

(même valeur propre que le 2^{ème} mode)



En rajoutant les 2 modes évanescents

Nous obtenons finalement

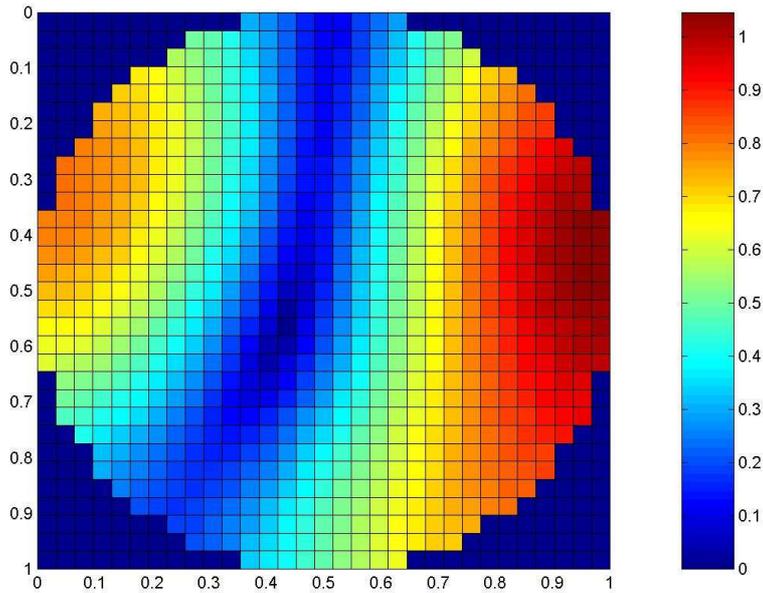


Figure 50 : Reconstruction de la cartographie de $|H_z|$ à l'aide de 3 modes propagatifs+2 modes évanescents

Nous remarquons l'importance d'utiliser tous les vecteurs propres générant le sous-espace vectoriel associé à une valeur propre multiple. La cartographie reconstituée à partir des 2 premiers modes (propagatifs) ne rend pas compte correctement de l'originale. En revanche, en rajoutant le 3^{ème} mode, associé à la même valeur propre, mais **orthogonal** au 2^{ème} mode, on constate aisément le rôle primordial qu'il joue. Puis comme nous avons l'habitude de le constater, les modes évanescents contribuent à obtenir finalement une cartographie totalement ressemblante à l'originale.

IV. Exemples d'éléments propres en section quelconque

IV.1. Objectifs

Nous avons déjà évoqué le fait que l'**objectif principal** de cette thèse était une étude de **faisabilité** de la méthode générale d'**hybridation FDFD/développement modal** dans des CRBM invariables par translation (lorsque considérée sans brasseur !), mais avec une section de **forme quelconque**.

Nous allons donc présenter dans ce chapitre quelques exemples de cartographies de la composante longitudinale z (vecteurs propres 2D) dans des sections de formes différentes et variées. Il est évident que la liste des sections envisageables ne connaît comme seule limite que l'« imagination » de l'utilisateur. Les valeurs de la constante de propagation transversale k_C sera affichée, la comparaison avec l'analytique sera impossible...par définition.

Nous présenterons les cartographies du champ magnétique H_z , en commençant par le premier mode TE, dont la valeur de k_C est toujours idéalement nulle. Ce premier vecteur propre permettra de visualiser immédiatement la forme de la section.

IV.2. Sections s'appuyant sur le cercle

IV.2.1. Section de forme semi-circulaire

Elle pourrait correspondre « grossièrement » à la forme d'une carlingue d'avion ou à celle de hangars métalliques invariant suivant z . Le découpage est de 20 cellules par rayon du cercle. Ce rayon est pris égal à 3.0 m.

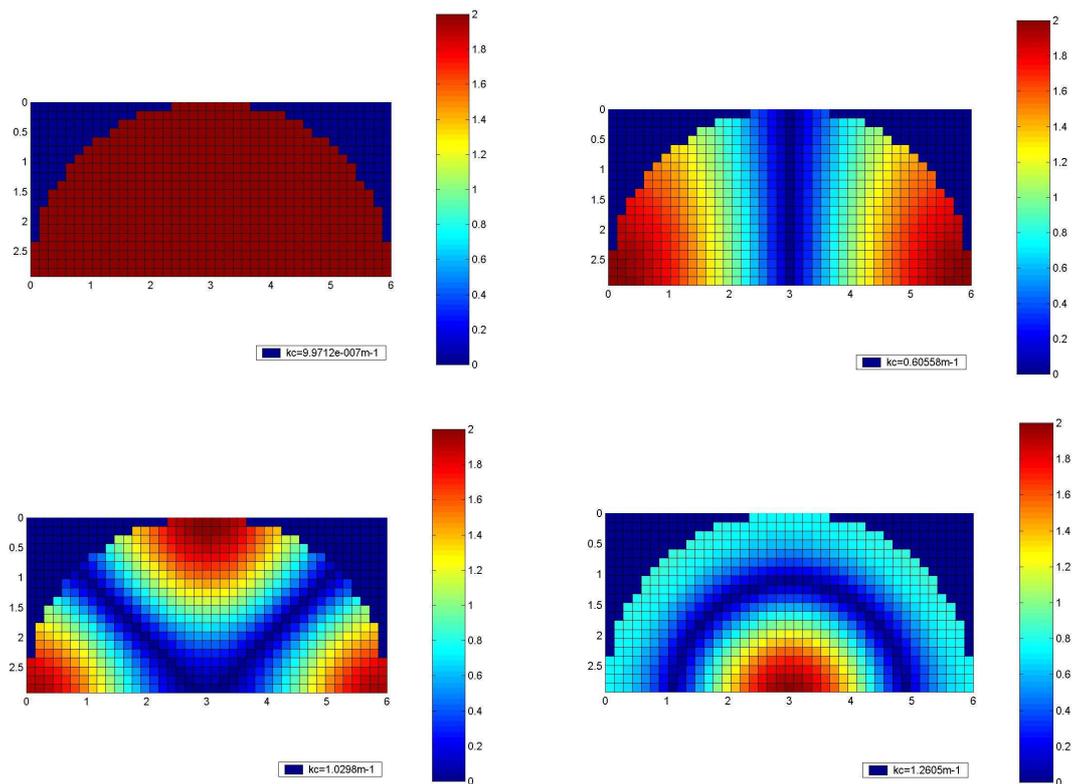


Figure 51 : Cartographies de H_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section semi-circulaire

Nous constatons une ressemblance des vecteurs propres avec ceux obtenus au **Chapitre II** en section circulaire. Ils semblent avoir été « fabriqués » en ayant tout simplement supprimé la partie inférieure de chaque cartographie.

Nous remarquons la **disparition des valeurs propres multiples**, due à la rupture de la **symétrie de révolution** de la section.

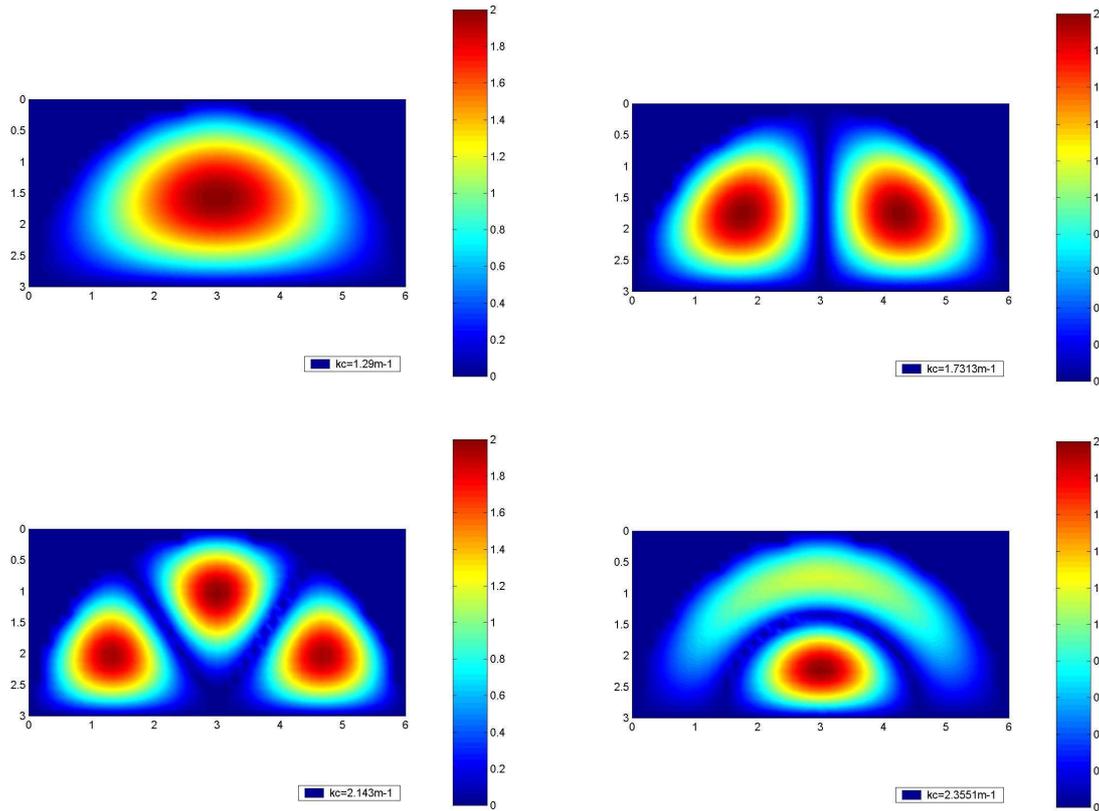
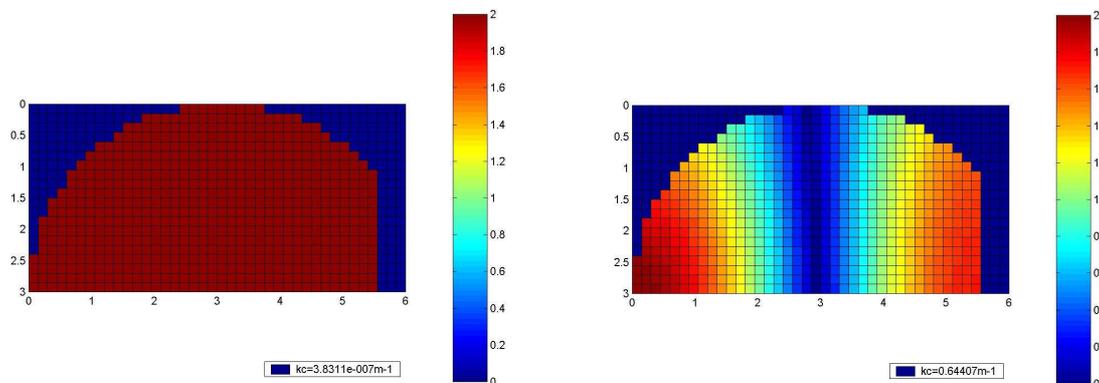


Figure 52 : Cartographies de E_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section semi-circulaire

Chacun des vecteurs propres « se déduit » de ceux obtenus en section circulaire par « déformation » de la partie inférieure, et non plus par simple « suppression » de cette dernière (à rang égal). Le 2^{ème} vecteur propre peut être « vu » comme l'un des 3^{èmes} vecteurs propres **en section circulaire** privée de sa partie inférieure, mais il est plus logique de le voir comme l'un des 2^{èmes} vecteurs propres **en section circulaire** dont on aurait déformé la partie inférieure. Là encore les valeurs propres multiples disparaissent avec la rupture de symétrie de révolution.

IV.2.2. Section semi-circulaire tronquée latéralement

Nous rajoutons à la rupture de symétrie de révolution, une rupture de symétrie axiale : l'axe vertical n'est plus axe de symétrie dans le plan de la section. La section demeure une surface convexe.



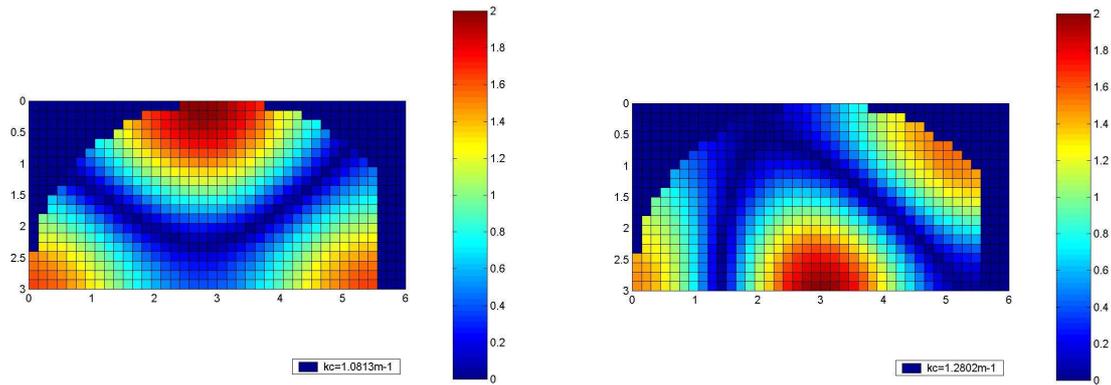


Figure 53 : Cartographies de H_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section semi-circulaire tronquée latéralement

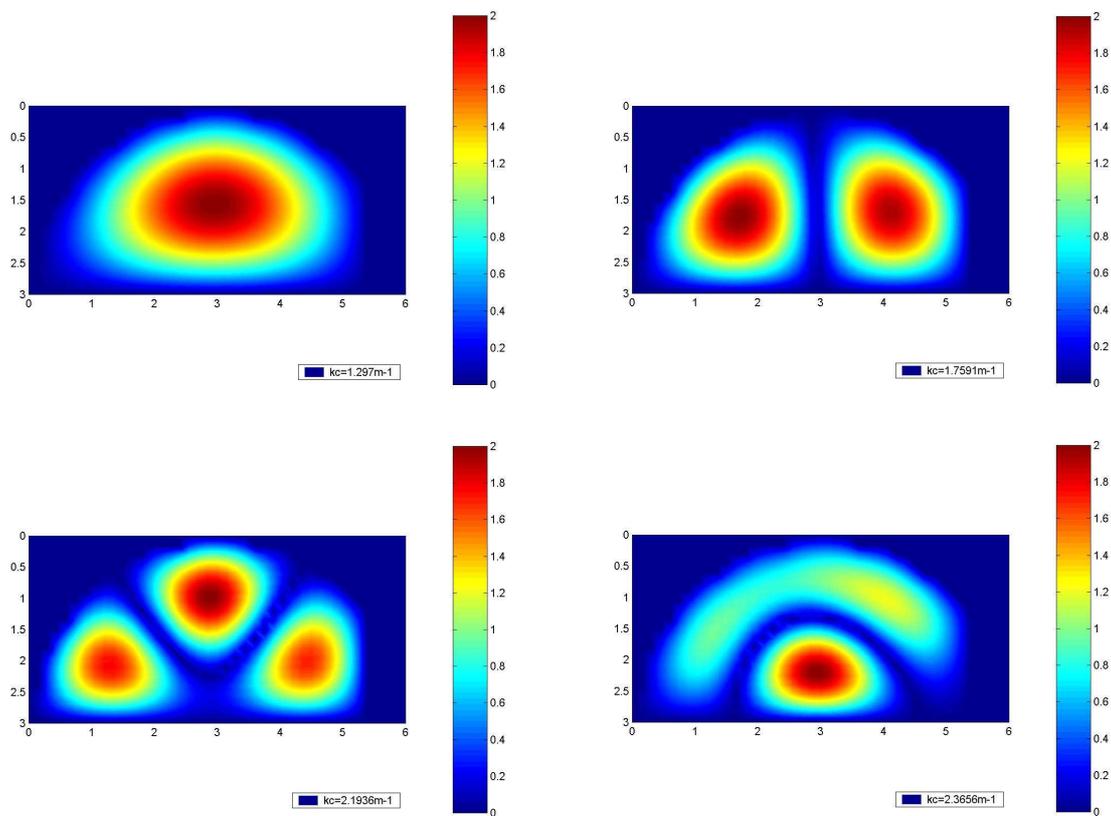


Figure 54 : Cartographies de E_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section semi-circulaire tronquée latéralement

IV.2.3. Section semi-circulaire tronquée latéralement et échantrée

Nous rajoutons une échantrure dans la section de manière à la rendre **concave**.

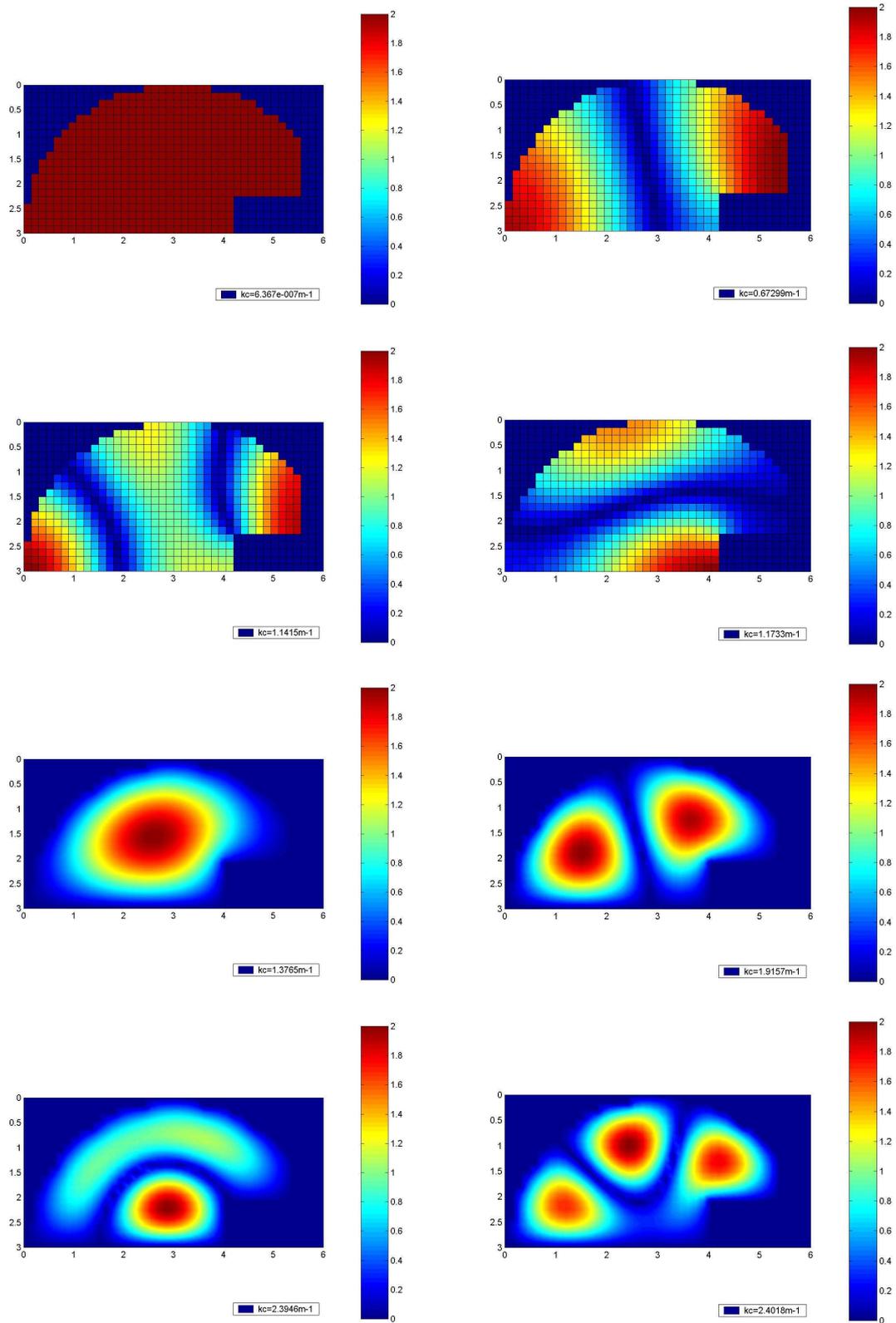


Figure 55 : Cartographies de E_z et H_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section semi-circulaire tronquée latéralement et concave

IV.3. Sections concaves s'appuyant sur une forme rectangulaire

Introduisons maintenant dans la section, une partie de section rectangulaire, **métallique**. Les premières applications auxquelles on pense ne sont pas a priori destinées à la CRBM. On songerait plutôt à des utilisations sur des lignes, pour des calculs d'impédances itératives, de constantes réparties etc...

Nous choisissons des dimensions $L_x=3.5$ m, $L_y=3.0$ m pour le contour extérieur.

L'objet rectangulaire intérieur possède les dimensions $L_{int_x}=1.28$ m, $L_{int_y}=1.10$ m

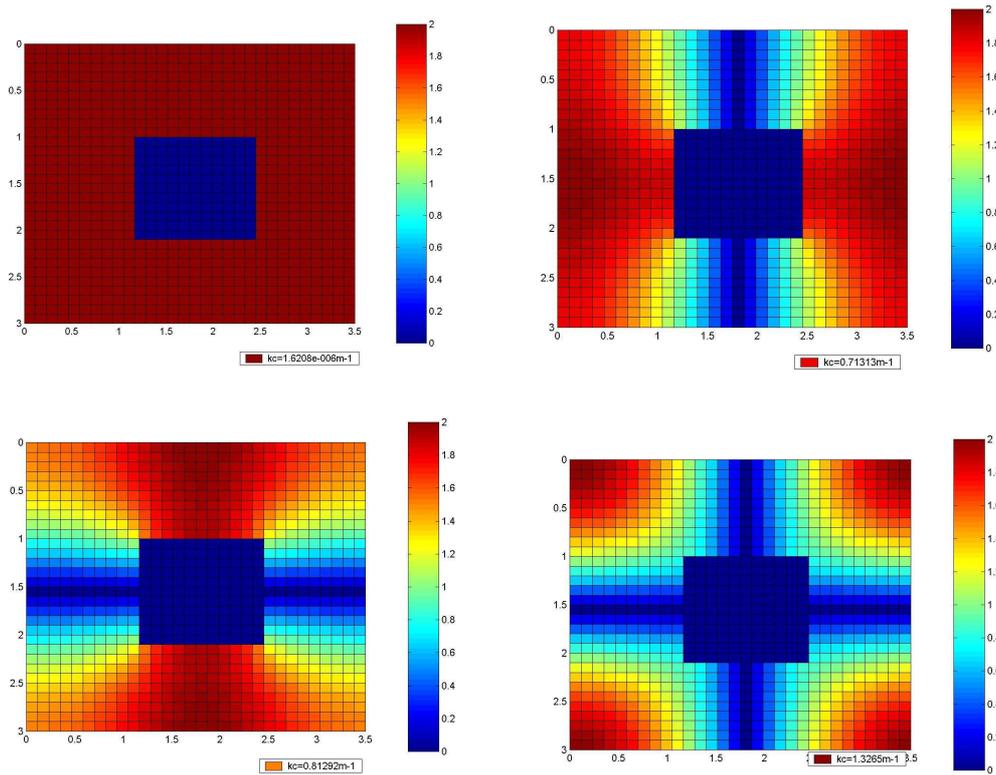


Figure 56 : Cartographies de H_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section rectangulaire avec partie métallique à l'intérieur.

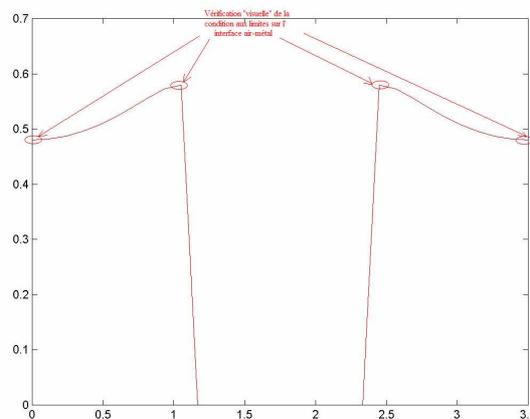


Figure 57 : Variation de H_z par rapport à x , à l'ordonnée $y=1.2$ m sur le 4^{ème} vecteur propre, afin

de vérifier les conditions aux limites $\frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ ici

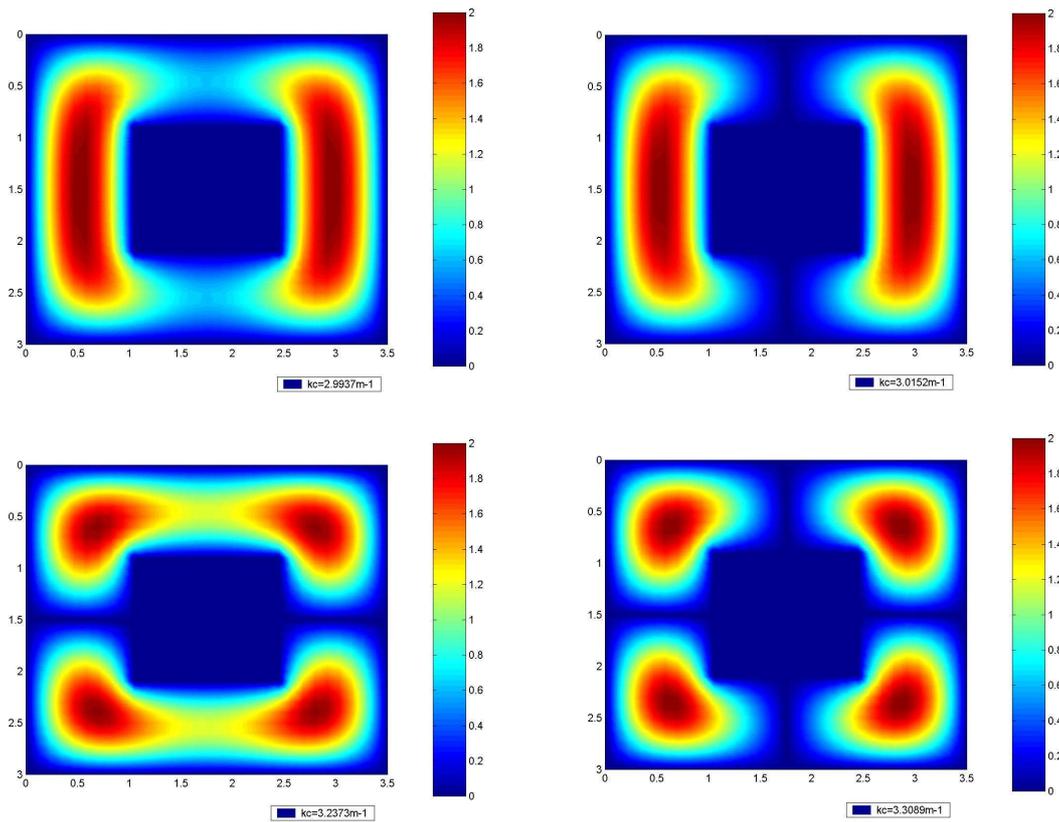


Figure 58 : Cartographies de E_z correspondant aux **4 premiers** vecteurs propres, en section rectangulaire avec partie métallique à l'intérieur

V. Conclusion du chapitre III

Au cours de ce chapitre, nous avons défini un produit scalaire faisant appel aux cartographies dans une **section droite** de la cavité, concernant la seule **composante en z** (E_z pour les modes TM et H_z pour les modes TE). Les divers vecteurs correspondant à des modes de guide différant soit par le caractère TM ou TE, soit par des valeurs différentes des couples d'entiers (m,n) sont orthogonaux avec cette définition de produit scalaire. En revanche le produit scalaire d'un mode par lui-même donne un résultat non nul, permettant de calculer le poids de ce mode dans une cartographie 2D quelconque.

Nous avons utilisé, d'une part les **vecteurs propres** établis au **Chapitre II** (équation d'Helmholtz discrétisée), et d'autre part le **produit scalaire** défini, afin de calculer les poids des divers modes **de guide** présents dans des cartographies de champ électrique ou magnétique obtenus à l'aide d'un logiciel FDTD.

Nous avons vérifié la validité du calcul des poids par reconstruction des cartographies à partir des modes de base. Les validations ont été effectuées dans des enceintes de sections rectangulaire et circulaire et ont produit des résultats valides.

Nous avons pu constater sur quelques exemples **arbitraires** de sections quelconques la possibilité d'obtenir des cartographies **numériques** des composantes H_z ou E_z suivant le cas. Les comparaisons avec l'analytique sont, par définition, impossibles, mais les cartographies semblent (avec toutes les réserves possibles !) être cohérentes, en ce sens que nous pouvons les voir comme des « déformations par continuité », de sections rectangulaires ou circulaires.

Une fois de plus, **le point important** est que la totalité de la démarche reste applicable à des sections de forme **quelconque**, puisque nous avons démontré en **Annexe 11** l'orthogonalité des modes, dans ce cas.

Chapitre IV

Mise en œuvre d'une méthode Différences Finies dans le Domaine Fréquentiel (FDFD) pour l'étude des cavités

I. Position du problème et mise en œuvre

Dans ce chapitre, nous allons nous limiter à l'étude d'une cavité parallélépipédique. La méthode qui va être développée et adaptée à l'étude de CRBM est la FDFD. Elle consiste à réaliser une discrétisation 3D du volume de calcul et à déterminer le champ électromagnétique en chaque cellule. Le choix effectué est de considérer les 6 inconnues par cellule (E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z) toutes « concentrées » au même point correspondant aux **nœuds** du maillage. Les hypothèses de travail sont celles du **régime harmonique**.

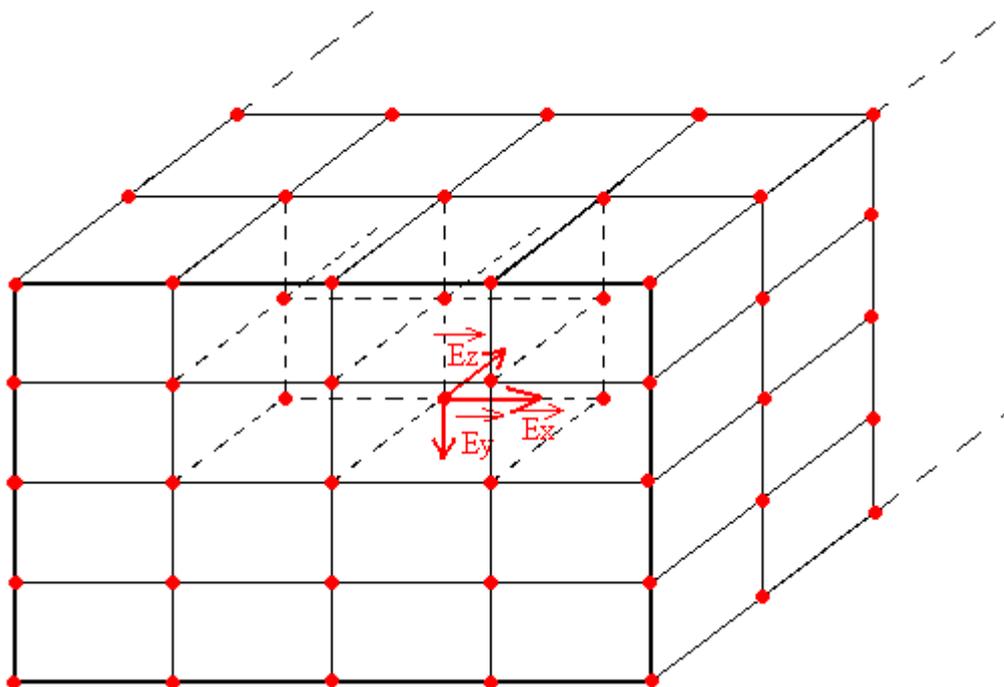


Figure 59 : Positionnement des inconnues aux nœuds du maillage 3D

D'autre part, comme nous le verrons plus loin, en régime harmonique, le champ magnétique se déduit du champ électrique par une relation simple. Dès lors, on choisit (et la suite des opérations justifiera amplement ce choix), de ne garder comme inconnues que les 3 valeurs du champ électrique en chaque nœud, dans un souci d'éviter un nombre trop important de calculs et de stockage mémoire.

Le premier objectif est d'établir une équation ne faisant apparaître que le champ électrique, à partir des équations de Maxwell contenant les champs électrique et magnétique.

En régime harmonique, les équations prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}.\vec{E} = -j.\omega\mu.\vec{H} \\ \overrightarrow{\text{rot}}.\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon.\vec{E} \end{cases}$$

où \vec{J} est la densité volumique de courant au point considéré

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{E} &= -j\omega\mu.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{H} \\ \overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{E} &= -j\omega\mu.(\vec{J} + j\omega\varepsilon.\vec{E}) \end{aligned}$$

et en posant $k_0^2 = \omega^2.\mu\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}$

k_0 est la constante de propagation du champ électromagnétique dans le vide

nous obtenons finalement :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}} - k_0^2\right).\vec{E} = -j.\omega\mu.\vec{J}} \quad (4-1)$$

Remarque : Nous avons l'habitude de simplifier l'écriture $\overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{E}$ par celle d'un Laplacien vectoriel $-\Delta.\vec{E}$ en utilisant le fait que $\text{div}.\vec{E} = 0$ (dans les zones dépourvues de sources). Mais dans ce cas, on considère comme **acquis** le fait que $\text{div}.\vec{E} = 0$, or numériquement l'annulation de la divergence n'est pas assurée. Aussi, dans la suite, nous conservons l'expression

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}.\vec{E}) - \Delta.\vec{E}$$

L'intérêt d'utiliser l'écriture de l'équation (4-1) est de forcer la solution à avoir une **divergence nulle** comme cela a été démontré dans la **Thèse de Cécile FIACHETTI [1]**.

Cela se montre facilement en considérant que dans les zones sans source, la solution de (4-1) vérifie :

$\text{div}\left\{\overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{rot}} - k_0^2\right\}\vec{E} = 0$. La divergence d'un rotationnel étant nulle, il vient alors $\text{div}.\vec{E} = 0$ pour tout vecteur \vec{E}

En projetant l'équation (4-1) sur les 3 axes x,y,z nous obtenons le détail des équations aux dérivées partielles, pour tous les points **strictement internes** à la cavité, c'est-à-dire possédant au moins un « voisin » dans chacune des 6 directions (x, y, z en croissant et x,y,z en décroissant)

Cas général :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_X} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \cdot \partial_X} - k_0^2 \cdot E_X \\ \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \cdot \partial_Y} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \cdot \partial_Y} - k_0^2 \cdot E_Y \\ \frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \cdot \partial_Z} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_Z} - k_0^2 \cdot E_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\omega\mu \cdot J_X \\ -j\omega\mu \cdot J_Y \\ -j\omega\mu \cdot J_Z \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Les composantes en y et en z du système (4-2) se déduisent de celle en x par permutation circulaire

Des exemples de formules ci-dessus pour certains cas permettent de généraliser par permutation circulaire. Nous supposons que nous sommes suffisamment éloignés des parois dans les 3 directions, ce cas constituant ce que nous appellerons le **cas général**. Nous cherchons à établir les formules approchées pour la composante en x de (4-2):

Un exemple de formule de dérivées partielles contenant **deux variables spatiales** :

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_X} = \frac{\partial}{\partial_Y} \left(\frac{\partial E_Y}{\partial_X} \right) \text{ approchée par :}$$

$$\text{en } y+h_Y : \left[\frac{\partial E_Y}{\partial_X} \right]_{y+h_Y} = \frac{E_Y(x+h_X, y+h_Y, z) - E_Y(x-h_X, y+h_Y, z)}{2 \cdot h_X}$$

$$\text{en } y-h_Y : \left[\frac{\partial E_Y}{\partial_X} \right]_{y-h_Y} = \frac{E_Y(x+h_X, y-h_Y, z) - E_Y(x-h_X, y-h_Y, z)}{2 \cdot h_X}$$

d'où nous déduisons la formule cherchée pour cette quantité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_X} &\approx \frac{1}{2 \cdot h_Y} \left\{ \left[\frac{\partial E_Y}{\partial_X} \right]_{y+h_Y} - \left[\frac{\partial E_Y}{\partial_X} \right]_{y-h_Y} \right\} \\ &= \\ &\frac{[E_Y(x+h_X, y+h_Y, z) - E_Y(x-h_X, y+h_Y, z) - E_Y(x+h_X, y-h_Y, z) + E_Y(x-h_X, y-h_Y, z)]}{4 \cdot h_X \cdot h_Y} \end{aligned} \quad (4-3)$$

Nous constatons que la discrétisation de $\frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_X}$ fait apparaître les coefficients : $\pm \frac{1}{4 \cdot h_X \cdot h_Y}$

Remarque :

Les formules ci-dessus, faisant intervenir deux variables spatiales, ont été avantageusement remplacées dans la pratique (programmation) par des formules de dérivation « à gauche » ou « à droite » suivant le cas. Il a en effet été constaté qu'avec les formules du type (4-3) (dérivées centrées), les cartographies obtenues **même pour les premiers modes** (TM₁₁₁, TE₀₁₁, etc...) étaient beaucoup plus « accidentées » qu'avec des formules du type :

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \cdot \partial_X} \approx \frac{[E_Y(x+h_X, y+h_Y, z) - E_Y(x+h_X, y, z) - E_Y(x, y+h_Y, z) + E_Y(x, y, z)]}{h_X \cdot h_Y}$$

(dérivation à droite)

ou avec des formulations « hybrides », de dérivation à droite pour x, à gauche pour y, etc... Une illustration de ces propos est présentée ci-dessous, dans le cas d'un découpage 14*14*14 (il s'agit de la composante Ez dans un plan de coupe x = Cte, dans une simulation visant à obtenir le mode TM₁₁₁ dans une cavité de dimension 3.5 m*3.0m*2.9 m, excitée à la fréquence f=83.7 MHz)

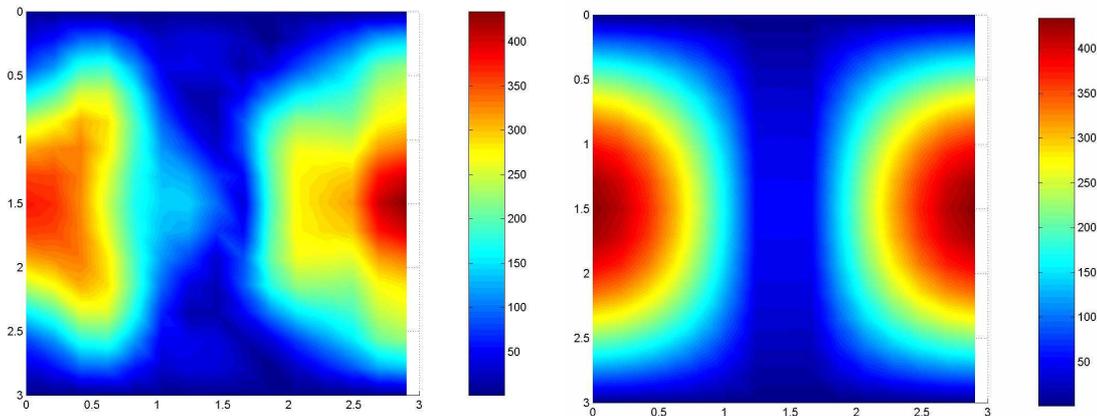


Figure 60 : Cartographie de |Ez| dans une section x=cte avec des dérivées « centrées » (à gauche) et avec les dérivées « à gauche » et « à droite »

NB : Les valeurs des champs électriques sur les échelles de la **Figure 60** ne sont pas « calibrées » à des valeurs réelles, d'une part à cause des valeurs des courants des antennes, prises à des valeurs arbitraires d'1 Ampère, et d'autre part à cause des coefficients modélisant les pertes fixés à des valeurs non réalistes.

Un autre avantage de l'utilisation des dérivées « à gauche » et « à droite » est dans le temps de calcul : la simulation dure environ 1 min 25 s, alors que la même simulation dure environ 3 min 40 s avec l'utilisation des dérivées « centrées ».

Il suffira ensuite de rajouter pour chacun des termes des équations de (4-2) les autres coefficients . Le même raisonnement permet de programmer toutes les dérivées partielles contenant 2 variables spatiales.

Pour les formules de dérivées seconde ne contenant qu'une seule variable : par exemple $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}$, nous utilisons la formule des différences finies établie au **Chapitre II , paragraphe II.1 :**

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2 E_X}{\partial y^2} \right]_{x,y,z} \approx \frac{E_X(x, y - h_Y, z) + E_X(x, y + h_Y, z) - 2.E_X(x, y, z)}{h_Y^2}}$$

avec évidemment le même type de formulation pour les expressions contenant les autres composantes du champ électrique E_Y et E_Z , ainsi que les autres variables spatiales x et z .

Cas particuliers 1: Points situés sur les parois, en dehors des arêtes

Pour les points situés sur les parois, l'équation **correspondant à la composante tangentielle à la paroi** vérifie une autre équation dans laquelle intervient l'impédance de surface Z_S de cette paroi, considérée donc comme **non parfaite** (au **paragraphe II.3.** seront évoquées les deux modélisations de pertes dans l'enceinte, dont celle de l'impédance de surface Z_S).

Nous pouvons alors exprimer la composante tangentielle du champ électrique en fonction de la densité de courant par la **loi d'Ohm**.

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot.rot}_T \vec{E} - k_0^2 \cdot \vec{E}_T = -j \cdot \omega \mu \cdot \vec{J}_T \\ \vec{E}_T = Z_S \cdot \vec{J}_T \end{cases} \quad (4-4)$$

où $\overrightarrow{rot.rot}_T \vec{E}$ représente la composante tangentielle de $\overrightarrow{rot.rot} \vec{E}$

et l'équation correspondant à la composante tangentielle qu'il faut programmer en ce point est donc finalement :

$$\boxed{Z_S \cdot \overrightarrow{rot.rot}_T \vec{E} - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) \cdot \vec{E}_T = 0} \quad (4-5)$$

Dans le cas où nous considérons les points situés sur le « **mur gauche** » de la cavité, **en dehors des arêtes** du parallélépipède, nous avons alors la composante tangentielle en y et z , alors que la composante normale est en x .

Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \partial_X} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \partial_X} - k_0^2 \cdot E_X \\ Z_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \partial_Y} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \partial_Y} \right) - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) E_Y \\ Z_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \partial_Z} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \partial_Z} \right) - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) E_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \omega \mu J_X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les techniques de discrétisation devront être modifiées par rapport à celles correspondant au cas général à cause de la « non existence » de certains « voisins ». En gardant l'exemple du « mur gauche », les dérivées spatiales suivant x seront remplacées par des **dérivées à droite** :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \approx \frac{1}{h_X} [f(x + h_X, y, z) - f(x, y, z)]$$

Pour le « mur de droite », les calculs de dérivées suivant x sont de la même manière remplacés par des **dérivées à gauche**. Les mêmes modifications de formules s'appliquent pour les **parois de dessus** ($y=0$) **et dessous** ($y=L_y$) en ce qui concerne les dérivées spatiales suivant y et pour les parois en $z=0$ et $z=L_z$ pour les dérivées spatiales en z . La densité volumique de courant J_x correspond à la présence **éventuelle** d'une source (antenne) au point considéré.

Remarque importante : L'impédance de surface Z_s définie dans (4-5) est exprimée en Ω et la densité de courant J_T est en $A.m^{-1}$ (densité surfacique de courant notée ci-dessous J_{surf}). Dans l'équation (4-1) la densité de courant J est en $A.m^{-2}$ (densité volumique de courant notée J_{vol}).

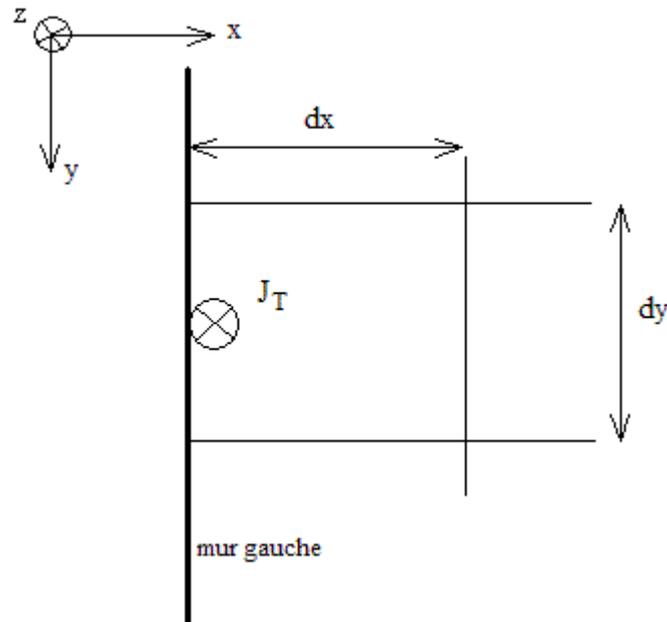


Figure 61 : Exemple de densité surfacique de courant suivant l'axe z

Du fait que la **résolution est imposée par le maillage**, on peut toujours ramener l'expression du courant (en Ampères) à l'intérieur d'un rectangle de dimension dx , dy à des densités **équivalentes** :

$$J_{vol} \cdot dx \cdot dy = J_{surf} \cdot dy \quad (\text{en considérant une densité de courant suivant } z)$$

et la relation entre les deux grandeurs, sur l'exemple d'une étude sur le « mur gauche » est donc :

$$J_{surf} = J_{vol} \cdot dx$$

et la loi d'Ohm écrite en (4-4) s'écrit de manière plus rigoureuse :

$$\vec{E}_T = Z_s \cdot \vec{J}_{T surf} = Z_s \cdot dx \cdot \vec{J}_{T vol}$$

ce qui revient à définir localement une impédance de surface $Z'_s = Z_s \cdot dx$ **exprimée en $\Omega.m$** et c'est en tenant compte de cette remarque que doit être écrite l'équation (4-4)

On pourrait retrouver le même résultat en raisonnant sur la composante tangentielle du courant suivant y plutôt que z .

On définira de la même manière pour les autres parois de la cavité :

- Pour les parois $x = 0$ et $x = L_x$, on définit l'impédance équivalente $Z'_S = Z_S \cdot dx$

- Pour les parois $y = 0$ et $y = L_y$, on définit l'impédance équivalente $Z'_S = Z_S \cdot dy$

- Pour la paroi $z = L_z$, on définit l'impédance équivalente $Z'_S = Z_S \cdot dz$

Cas particuliers 2 : Points situés sur les arêtes en dehors des sommets

Nous prenons l'exemple de l'arête correspondant à l'intersection des parois d'équations $z=L_z$ et $x=0$, comme indiqué sur la **Figure 62** ci-dessous :

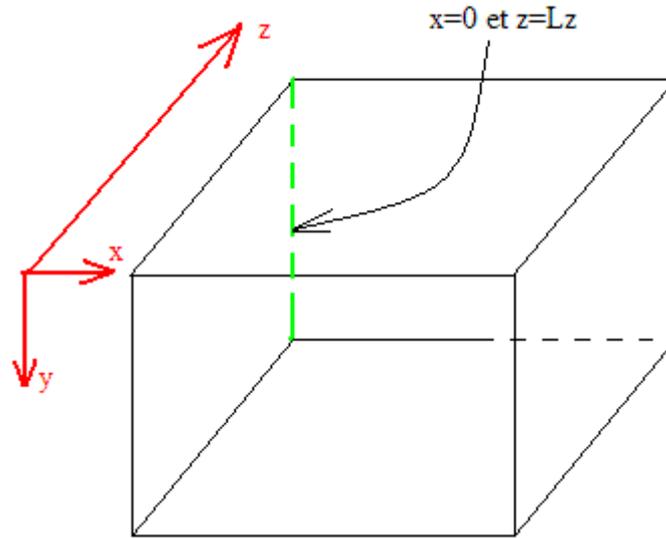


Figure 62 : Points situés sur une arête, en dehors des sommets

Dans ce cas les 3 composantes en x, y et z sont tangentiels à une paroi, les impédances de surfaces équivalentes (en $\Omega.m$) sont prises égales à :

- Pour la composante en x : $Z'_S = Z_S \cdot dz$

- Pour la composante en y : $Z'_S = Z_S \cdot \frac{(dx + dz)}{2}$ (pour ne pas privilégier une direction)

- Pour la composante en z : $Z'_S = Z_S \cdot dx$

Les équations pour cette arête sont alors :

$$\begin{bmatrix} Z_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \partial_X} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial_Y^2} - \frac{\partial^2 E_X}{\partial_Z^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \partial_X} \right) - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) E_X \\ Z_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Z \partial_Y} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Z^2} - \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_X^2} + \frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \partial_Y} \right) - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) E_Y \\ Z_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E_X}{\partial_X \partial_Z} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_X^2} - \frac{\partial^2 E_Z}{\partial_Y^2} + \frac{\partial^2 E_Y}{\partial_Y \partial_Z} \right) - (k_0^2 \cdot Z_S - j \cdot \omega \mu) E_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en donnant à Z_s les valeurs définies plus haut.

En ce qui concerne les expressions contenant des dérivées spatiales en x ou/et en z , les formules générales seront modifiées par des formules de dérivation à **droite** (pour cet exemple) .

Evidemment chaque arête constituera un cas différent nécessitant une adaptation des modifications de Z_s ainsi que les dérivations à **gauche**, à **droite** (suivant x) , « **en haut** », « **en bas** » (suivant y), « **au fond de la cavité** » (suivant z).

En ce qui concerne des expressions du type $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}$ correspondant à une **dérivée seconde normale** d'une **composante tangentielle à la paroi** , nous la considérons comme **pratiquement** nulle, en utilisant le fait que dans les solutions **analytiques (avec des parois parfaitement conductrices)**, dans une cavité sans brasseur l'expression de E_x est en $\sin(k_y \cdot y)$. Ceci n'est totalement exacte que dans le cas d'une paroi parfaitement conductrice, mais semble être une approximation largement suffisante dans le contexte de notre étude.

Cas particuliers 3 : Points situés sur un sommet

Prenons l'exemple du sommet $x=0, y=0, z=Lz$; les équations seront similaires à celles obtenues pour une arête. Les différences mineures se feront sur les valeurs des impédances équivalentes Z_s (en $\Omega.m$) et sur le fait que les dérivées spatiales suivant les directions x, y, z seront des **dérivées à droite** pour x et y et des **dérivées à gauche** pour z .

II. Maillage de toute la cavité pour code FDFD en 3D

Les formules du paragraphe précédent peuvent donc être programmées, et permettent d'obtenir un système d'équations linéaire, dont la résolution donne les 3 composantes du champ électrique en chaque nœud du maillage. Etant donnée la nature même du problème (système multi-résonant avec pour le cas sans pertes, des courbes « Amplitude en fonction de la fréquence » en impulsions de Dirac), demandant a priori une précision importante, l'utilisation de variables **COMPLEXES EN DOUBLE PRECISION** a été retenu.

II.1. Besoins en terme de mémoire

Une variable « complexe double précision » (noté **complex(8)** ou **double complex** en Fortran), occupe 16 octets en mémoire. Dans le cas d'un maillage de la cavité de $20*20*20$ cellules suivant x, y et z , le nombre d'inconnues E_x, E_y, E_z en chaque nœud est donc : $3*21^3 = 27783$ inconnues. La matrice du système linéaire est donc d'ordre 27783, et les besoins en mémoire **seulement pour la matrice principale** seraient donc de $16*27783^2 = 12.4$ Go ! si nous souhaitons résoudre le problème à l'aide de méthodes classiques par « **matrices pleines** ». On comprend mieux pourquoi nous n'avons conservé que la moitié des inconnues en ne conservant que celles représentant le seul champ électrique.

Evidemment, en regardant les équations nous nous rendons compte immédiatement de la nature « extrêmement creuse » de la matrice, puisque les différents coefficients des équations écrites en chaque nœud ne concernent que les «voisins spatiaux» de chacun. Le nombre de coefficients non nuls par ligne, est de 15 au maximum, ce qui donne un besoin en mémoire de $16*27783*15 = 6.7$ Mo (valeur beaucoup plus raisonnable que la précédente), si nous décidons de ne stocker que les coefficients non nuls, donc d'utiliser une résolution par « **matrices creuses** ».

II.2. Besoins en temps de calcul

Les valeurs des temps de calcul ne sont donnés qu'à titre indicatif et sont des « fourchettes » de valeurs moyennes issues de divers essais au cours des différentes résolutions de systèmes lineaires que nous avons été amenés à effectuer sur un ordinateur **de type PC, avec un processeur Pentium IV, 512 Mo de RAM**. En fonction des données du système à résoudre, ce temps est amené à varier de manière très sensible.

- Une résolution par **matrices pleines** avec un découpage $8*8*8$ prend entre 4 et 5 minutes, et n'a été réalisée au début que pour tester le fonctionnement du code, et sert seulement ici à effectuer des comparaisons de performance. Les routines utilisées sont issues des bibliothèques Fortran **Lapack** et **IMSL**. Une poursuite dans cette voie est sans intérêt.
- En utilisant la routine de résolution par méthode itérative pour matrices creuses, du type **bi-gradient conjugué stabilisé** (bicgstab) sous **MATLAB**, avec un découpage $8*8*8$, la résolution dure **moins de 3 secondes**. L'avantage de l'utilisation de routines « matrices creuses », par rapport aux routines « matrices pleines » est criant sur ce simple exemple .

Pour **assurer la convergence de la méthode itérative**, nous avons procédé systématiquement à une factorisation **LU** de la matrice principale, ce qui avait le désavantage de perdre du « caractère creux » de la matrice. La factorisation est comptabilisée dans les temps de calculs.

Le tableau ci-dessous résume ces temps de calculs pour différentes routines utilisées pour la résolution, et pour différents découpages, **sur un PC**. Le problème à résoudre correspond à la simulation d'une cavité parallélépipédique excitée par une antenne dipôle à la fréquence du mode **TM₁₁₁**

	8*8*8	10*10*10	12*12*12	14*14*14	16*16*16
Matrices pleines (Lapack et IMSL) sous Windows XP	4 à 5 min	xxx	xxx	xxx	xxx
Bi-gradient conjugué stabilisé (MATLAB) sous WindowsXP et Linux Mandriva 2007	< 3 s	8 s	26 s	1 min 25 s	8 min 10 s
UMFPACK 2 sous Linux Mandriva 2007	Non testé	Non testé	> 10 min	xxx	xxx
UMFPACK 4 sous Linux Mandriva 2007	Non testé	Non testé	1 min 40 s	5 min 30 s	xxx
UMFPACK 5 sous Linux Mandriva 2007	Non testé	Non testé	1 min 00 s	4 min 20 s	xxx
Version séquentielle de MUMPS sous Linux Mandriva 2007	Non testé	Non testé	Non testé	25 s	50 s

NB : Le symbole « xxx » dans le tableau ci-dessus signifie que l'essai n'a pu être effectué à cause de **l'insuffisance des performances** en termes de mémoire, ou en temps de calculs.

Commentaires :

Nous constatons que le traitement **FDFD** est très « demandeur » en termes de performances et qu'un découpage **à priori** assez modeste ($16*16*16$) permet d'éliminer pratiquement la plupart des bibliothèques « en compétition ». Même si certaines durées peuvent ne pas apparaître comme prohibitives par rapport à d'autres méthodes de simulations (méthode des moments, FDTD etc...qui peuvent réaliser des simulations de plusieurs heures), c'est plus le problème de **mémoire** qui prévaut, bien que les deux soient corrélées. Par exemple, on pourrait penser qu'avec un découpage $18*16*16$, la résolution sous **Windows avec l'utilisation de MATLAB (bicgstab)** devrait s'effectuer avec un temps un peu plus long que 8 min 10 s (v. tableau ci-dessus). En fait il n'en est rien et le programme annonce clairement le **manque de mémoire** pour mener à bien le projet.

UMFPACK 5 a été capable de résoudre le problème avec un découpage jusqu'à $20*20*20$, mais sur un PC avec 2 Go de RAM au lieu de 512 Mo et la durée du traitement a été de plus de 25 minutes.

La supériorité de la bibliothèque « **MUMPS** » sur les autres est évidente, et nous avons pu aussi effectuer une résolution avec un découpage $20*20*20$, avec toujours 512 Mo de RAM. **MUMPS** est la contraction de **M**ultifrontal **M**assively **P**arallel **S**olver.

La résolution du système linéaire est effectuée par des **méthodes directes** par opposition aux **méthodes itératives**. La bibliothèque MUMPS possède de plus la possibilité d'être utilisée sous une version « parallèle » (**shared memory version**), et c'est donc vers la poursuite dans cette voie que notre choix s'est porté. Nous aurons l'occasion, plus loin, de tester les performances de cette version parallèle.

II.3. Prise en compte des pertes

Préliminaire : Nous pouvons effectuer une comparaison avec les circuits basse fréquence, à éléments localisés (R-L-C) . Pour cela nous considérons **une** fréquence de **résonance**, correspondant à un **mode de cavité** (considérée sans brasseur pour simplifier, mais le raisonnement reste valable même en présence du brasseur), et nous faisons une étude « locale » en ce qui concerne l'échelle des fréquences.

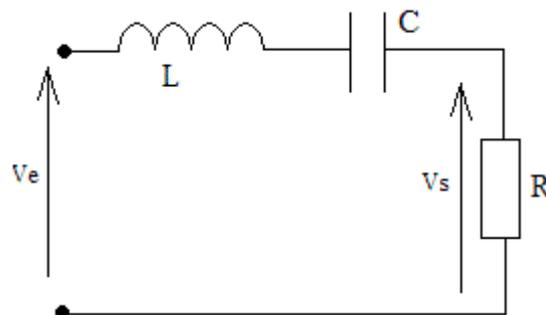


Figure 63 : Circuit R-L-C série en oscillations forcées (régime harmonique)

Si on fait tendre R vers zéro dans le circuit de la **Figure 63**, ce qui revient à avoir un circuit sans pertes, la seule fréquence susceptible de donner une tension non nulle en sortie est la fréquence de résonance :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$$

Pour toute autre fréquence, $V_s=0V$. Ceci est d'autant moins vrai que la valeur de R augmente, et nous retrouvons une bande de fréquence autour de la fréquence de résonance pour laquelle V_s a une valeur « significative ».

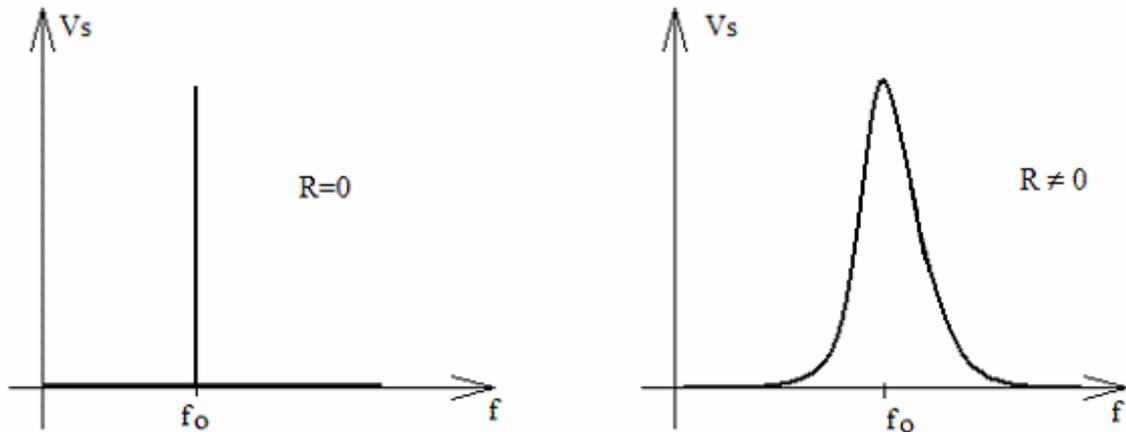


Figure 64 : La bande passante d'un circuit BF s'élargit autour de f_0 quand les pertes augmentent

De la même manière le cas idéal d'une enceinte sans pertes fournirait des courbes de réponse en fréquence de largeur nulle, d'amplitude **théoriquement infinie** aux diverses fréquences de résonance.

Nous avons pu nous rendre compte de cela, en lançant des simulations sans pertes : les valeurs atteintes numériquement par le champ électrique semblaient en effet **sans limitations** au fur et à mesure que nous nous approchions de l'optimum en fréquence . Numériquement, un changement de l'ordre de la **centaine de Hertz**, sur une fréquence de résonance de l'ordre de la **centaine de Megahertz**, peut entraîner un gain d'un facteur 10, et les valeurs atteintes n'ont alors plus rien de réaliste (il n'était pas rare de visualiser des champs électriques de 10^6 à 10^{10} $V.m^{-1}$) .

Physiquement, **ne pas introduire de pertes** revient à envisager une succession de **réflexions d'ondes progressives (modes de guide) sans amortissement**, donc aboutissant à une amplitude tout logiquement infinie pour les ventres des **ondes stationnaires (modes de cavité)** si on excite la cavité **exactement à une fréquence de résonance**.

Il est clair que dans la réalité les pertes fixeront, au même titre que la source (antenne), la valeur du champ électromagnétique dans toute la cavité en **régime harmonique permanent** .

Les diverses pertes seront : les pertes Joule au niveau des parois de la cavité et des objets présents dans la CRBM (brasseur, antenne(s) ...), les diverses ouvertures (portes, port d'entrée et de sortie servant aux mesures ...), ainsi que les pertes diélectriques.

Dans le code réalisé, la modélisation des pertes est effectuée de deux manières, chacune pouvant être réglée ou annulée de manière indépendante de l'autre.

- La première modélisation de pertes est la définition d'une impédance de surface (voir ci-dessus le **paragraphe I** pour les diverses définitions unités en fonction du contexte) sur les parois de la chambre . L'utilisateur du programme a la possibilité d'entrer un **coefficient multiplicatif** (qui peut éventuellement être nul) par rapport à l'impédance de surface du **cuivre** prise comme référence :

$$Z_{S(\text{Cuivre})} = \sqrt{\frac{\pi \cdot \mu \cdot f}{\sigma}}$$

avec $Z_{S(\text{Cuivre})}$ en ohms

$\mu = \text{perméabilité des parois} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

$f = \text{fréquence commune à toutes les grandeurs en Hz}$

$\sigma = \text{conductivité du cuivre} = 5.9 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$

Si on ne considèrait que ces pertes, l'ordre de grandeur du coefficient à introduire par rapport à $Z_s(\text{cuivre})$ est compris entre 10^3 et 10^5 pour obtenir des résultats cohérents.

- La deuxième modélisation de pertes est volumique. Elle consiste à définir une fréquence complexe possédant une partie imaginaire non nulle, à partir de la fréquence « réelle » f :

$$f_{\text{complexe}} = f' = f \cdot \left(1 + j \cdot \frac{f''}{f} \right) = f + jf''$$

En général, $f'' \leq 10^{-3} \cdot f$

La justification de cette modélisation provient du fait que dans l'étude en régime harmonique, toutes les grandeurs sont multipliées par un coefficient implicite $e^{j2\pi ft}$ qui devient alors :

$$e^{j2\pi f' t} = e^{j2\pi f t} \cdot e^{-2\pi f'' t}$$

et le facteur $e^{-2\pi f'' t}$ fait alors apparaître un coefficient d'amortissement équivalent à des pertes.

Sur le plan **physique**, cela revient à envisager des réflexions d'ondes avec **diminution régulière de l'amplitude à chaque réflexion** des ondes progressives et aboutissant à des amplitudes finies aux résonances pour les ondes stationnaires.

On peut relier ce coefficient de fréquence complexe au **facteur de qualité** de la cavité par

$$f_{\text{complexe}} = f_{\text{réelle}} \left(1 + \frac{j}{2Q} \right)$$

Nous serons amené à reparler du facteur de qualité au cours du **Chapitre V**, au cours du développement de la méthode hybride.

Concrètement, c'est dans la simulation numérique de l'équation **(4-1)** à travers le coefficient k_0 qui devient lui aussi **complexe** que vont avoir lieu les diminutions d'amplitudes dues aux pertes volumiques.

Remarque : Nous pouvons pousser plus loin l'analogie de la CRBM avec un circuit résonant R-L-C série, en observant les expressions des champs en **Annexe 5** dans lesquelles apparaît clairement une quadrature temporelle entre \vec{E} et \vec{H} qui correspond à un **maximum d'énergie électrique** au moment où l'énergie **magnétique est au minimum** et vice-versa. Ce phénomène est à rapprocher des échanges d'énergie qui ont lieu entre le condensateur et la bobine dans le circuit R-L-C, à la résonance.

II.4. Simulations

II.4.1. Généralités sur le protocole de simulation

Les premières simulations ont pour but de valider le code. Pour cela, nous devons vérifier la concordance entre les cartographies en E_x , E_y et E_z et les expressions théoriques démontrées en **Annexe 5**.

Les simulations sont effectuées dans un premier temps, **sans brasseur** et à des fréquences correspondant aux **premiers modes de cavité**.

Les diverses données du problème sont :

- dimensions de la cavité
- nombre de cellules par dimensions x, y, z
- nombre d'antennes
- position de(s) l'antenne(s)
- axe x, y ou z de(s) l'antenne(s) rectiligne(s)
- Valeurs complexes du(des) courant(s) sur l'(les) antenne(s)
- Fréquence commune à toutes les antennes
- Impédance de surface
- Coefficient de fréquence complexe

Nous remarquons que pour définir une antenne « oblique », il suffit de la décomposer en plusieurs antennes dirigées suivant x ou (et) y ou (et) z

L'utilisateur fournit au programme les indices (en nombre de cellules) des divers plans de coupe ainsi que la composante E_x , E_y , E_z dont il souhaite visualiser la cartographie.

Toutes les étapes ci-dessus sont réalisées à l'aide d'un code écrit en **Fortran 95**. A partir de toutes ces données, le programme établit la **discrétisation** de l'équation **(4-1)** qui devient un système linéaire de la forme :

$$[A][x] = [b]$$

dans lequel $[A]$ correspond à l'opérateur $(\overrightarrow{rotrot} - k_0^2)$ discrétisé, $[x]$ au vecteur des inconnues rangées dans l'ordre vu plus haut des composantes E_x , E_y , E_z en tous les points de la cavité, et sur les parois.

$[b]$ correspond aux termes contenant les sources (courants sur les antennes) de l'équation **(4-1)**.

Le programme stocke alors dans un fichier les divers coefficients **non nuls** de la matrice principale $[A]$, ainsi que ceux de la matrice du second membre $[b]$, dans un but de récupération par un programme de résolution par matrices creuses.

Le code sauvegarde aussi dans des fichiers des tableaux permettant à partir du rang de l'inconnue dans le vecteur-colonne $[x]$ de retrouver à quoi elle correspond (Ex, Ey ou Ez au point d'indices i, j, k suivant z, y et x) et inversement.

Doivent aussi être stockées les indices des divers plans de coupe dont on souhaite la visualisation ainsi que les grandeurs (Ex, Ey, Ez) concernées.

Les coefficients non nuls des matrices creuses sont transmis sous la forme dite « **des triplets** » :

$$\begin{array}{ccc}
 \textit{indice i} & \textit{indice j} & \textit{Coefficients} \\
 \left[\begin{array}{c} i_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} j_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ j_n \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} A(i_1, j_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A(i_n, j_n) \end{array} \right]
 \end{array}$$

Les coefficients de chaque vecteur colonne pouvant être rangés dans un ordre quelconque. De plus, tout couple d'entiers (i , j) avec

$i = m^{\text{ème}}$ composante du «vecteur colonne indice i » et

$j = m^{\text{ème}}$ composante du «vecteur colonne indice j »

qui se retrouve en **plusieurs exemplaires** provoque l'addition des divers $A(i, j)$ correspondant.

Cette possibilité facilite la programmation permettant d'obtenir les coefficients de la matrice principale, car dans le système (4-2) on retrouve régulièrement d'une ligne à l'autre (ou dans la même ligne d'ailleurs) les mêmes grandeurs inconnues (Ex, Ey, Ez) qui demandent que soient effectuées des sommes de divers termes. Il suffit de communiquer dans le fichier contenant les $A(i, j)$ chaque terme et la sommation sera directement effectuée par le logiciel de **résolution par matrices creuses**.

Notre objectif étant **pour le moment encore éloigné de la CRBM**, un découpage modeste de $12*12*12$ à $14*14*14$ utilisant un ordinateur de type PC est suffisant, et la résolution est effectuée par la méthode du « bi-gradient conjugué stabilisé » à l'aide de MATLAB.

Le programme écrit sous MATLAB récupère alors les divers coefficients des matrices [A] et [b] sous forme de matrices creuses, et résoud le système linéaire.

Puis, il récupère les tableaux d'indices permettant de « **remettre en ordre** » toutes les inconnues et de retrouver les indices en z, y et x correspondant aux points concernés, ainsi que la nature Ex, Ey et Ez de la grandeur. Il lui reste à lire les indices des plans de coupe souhaités ainsi que la nature de la grandeur à visualiser.

II.4.2. Résultats des simulations sur un PC

La première simulation est destinée à obtenir le mode TM_{111} dans une cavité de dimensions :

$$L_x * L_y * L_z = 3.5 \text{ m} * 3.0 \text{ m} * 2.9 \text{ m}$$

Le découpage est $14*14*14$

La fréquence théorique est égale à $f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_z}\right)^2} = 83.68 \text{ MHz}$

L'antenne est du type dipôle de longueur « 1 arête de cellule » suivant l'axe z.

Elle est positionnée au centre de la face $z = L_z$ comme indiqué sur le schéma ci-dessous :

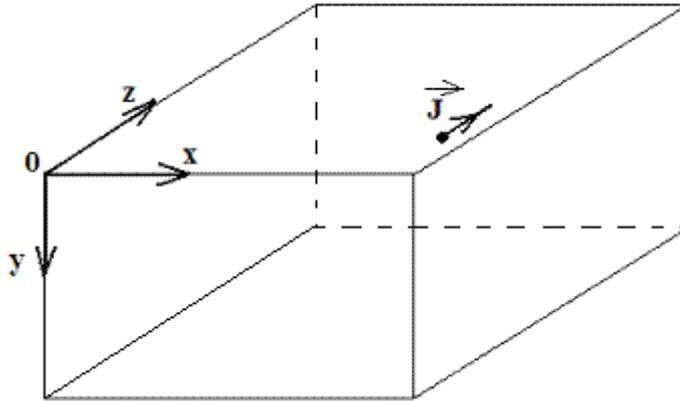


Figure 65 : Cavité excitée par une antenne dipôle à la fréquence $f = 83.7 \text{ MHz}$

Les divers coefficients, pris dans une large mesure de manière arbitraire, apparaissent dans le fichier de simulation lu par le programme :

```

generalites
frequence .8370000E+08
coeff_freq 0.1000000E-03

nb d antennes 1

axe antenne 1 z
Courant 1.0000000 0.0000000
debut 14 8 8
fin 15 8 8

coeff_Zs 0.1000000E+05 0.0000000E+00
    
```

Figure 66 : Partie du fichier « généralités » lu par le programme pour obtenir certaines données

Dans l'ordre, le programme « récupère » :

- la fréquence (en Hz)
- le coefficient de fréquence complexe, défini au **paragraphe II.3.**
- le nombre d'antennes
- l'axe suivant lequel est positionnée la $i^{\text{ me}}$ antenne

- les parties réelle et imaginaire du courant de la $i^{\text{ème}}$ antenne (en A)

le programme considère alors une densité volumique de courant locale :

$$J(A.m^{-2}) = \frac{I(A)}{4 * dx * dy} \text{ (dans le cas d'une antenne dirigée suivant z)}$$

en considérant que l'intérieur des 4 cellules (du plan x-y) contiguës contenant un des nœuds où se trouve l'antenne sont « parcourues » par le courant I, la résolution des « densités de courant » étant fixée par le maillage.

- les coordonnées des extrémités de chaque antenne rectiligne

en indices i, j, k (sur l'exemple ci-dessus les coordonnées de la première extrémité sont $z=(14-1)*dz$, $y=(8-1)*dy$, $x=(8-1)*dx$)

Rappel : le plan $i=1$ correspond à $z=0$ et de même pour les indices j et k.

Les relations générales entre **indices entiers i, j, k** et **coordonnées réelles** sont :

$$z = (i-1)*dz, y = (j-1)*dy, x = (k-1)*dx$$

Les orientations positives des courants sont dans le sens des indices croissants, comme sur la **Figure 65**.

- le coefficient multiplicatif par rapport à l'impédance de surface de référence, sous forme « partie réelle, partie imaginaire » pour prévoir le cas d'une impédance non purement résistive.

Le programme MATLAB stocke la solution dans un fichier, sous forme d'un vecteur-colonne, dans l'ordre, en rajoutant la nature de chaque inconnue (E_x , E_y ou E_z). Il fournit des informations visuelles, sous forme de cartographies des grandeurs souhaitées par l'utilisateur. Il offre plusieurs choix de visualisations, comme nous allons le constater ci-après. Toujours dans l'exemple du mode TM_{111} , l'utilisateur peut demander une visualisation sur la même figure du module de la composante E_x , ceci dans 3 plans $x=5*dx$, $y=5*dy$ et $z=7*dz$. Le programme MATLAB fournit alors les résultats sous forme de cartographies dans plusieurs plans de coupe, en retrouvant les grandeurs demandées dans le **vecteur-solution qu'il a calculé**. Le vecteur-solution ainsi que tous les « tableaux-index » permettant de retrouver la nature de chaque inconnue sont sauvegardés dans divers fichiers.

II.4.2.1. Visualisation simultanée dans 3 plans $x=cte$, $y=cte$ et $z=cte$

L'exemple traité sera le mode TM_{111} avec les données ci-dessus. Ce type de visualisation correspond à une vision globale du problème, permettant de se rendre compte d'oublis ou d'erreurs grossières et permet d'effectuer une vérification rapide. Il est toutefois mal adapté à une étude trop détaillée, malgré les possibilités de **Zoom et de rotations** permises par MATLAB.

De plus, la même échelle n'est pas toujours adaptée, suivant le plan de coupe concerné : dans l'exemple ci-dessous, la cartographie en $x=cte$ est un peu moins « visible » que celles des plans $y=cte$ ou $z=cte$.

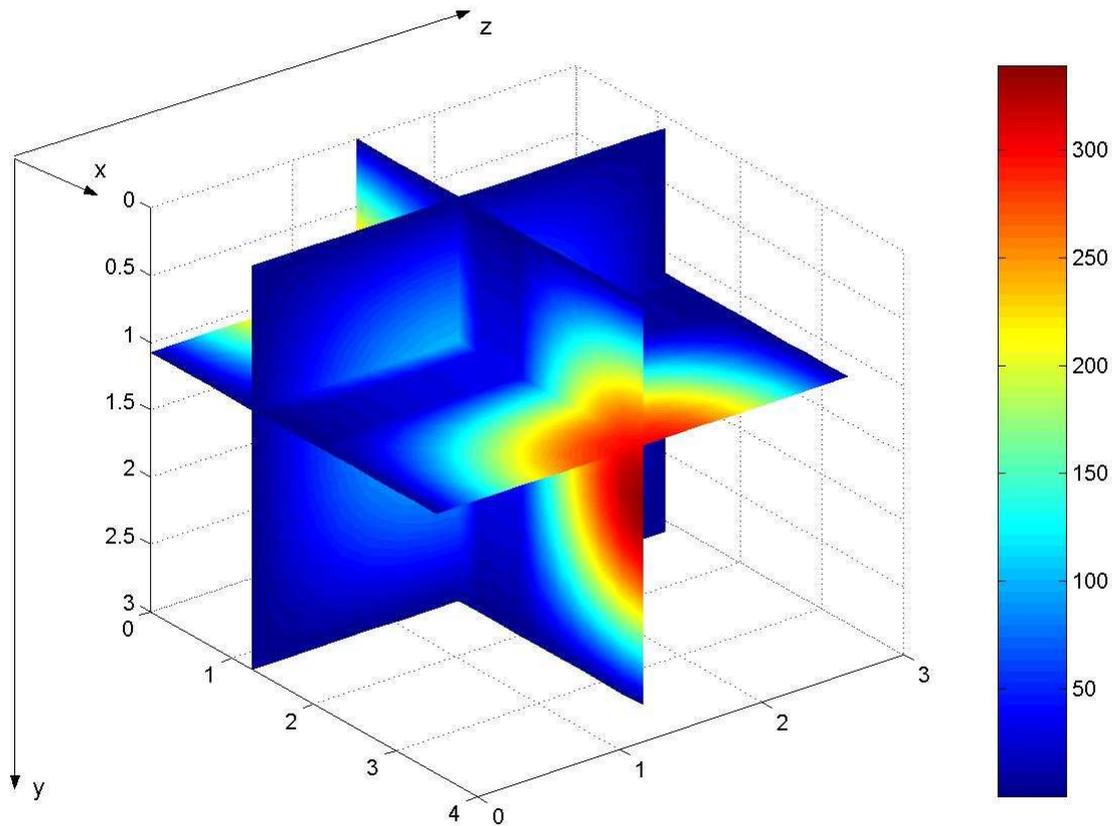


Figure 67 : Visualisation simultanée de $|E_x|$ dans 3 plans de coupe $x=cte$, $y=cte$, $z=cte$

On rappelle que l'échelle des valeurs sur la droite du graphique ne donne aucune indication **dans l'absolu**, étant donné la valeur du courant sur l'antenne fixée à la valeur peu réaliste de 1 A, et les coefficients modélisant les pertes fixés à des valeurs arbitraires. En revanche les valeurs **relatives** permettent de vérifier la validité des **allures** des cartographies d'une part, et de vérifier les rapports tels que $\frac{|E_x|}{|E_y|}$...etc....d'autre part, par rapport à celles établies en théorie. Nous constatons sur la

Figure 67 que les allures des cartographies de $|E_x|$ correspondent tout-à-fait à celles du mode TM_{111} souhaité.

Poussons un peu plus loin nos investigations et visualisons dans les mêmes plans de coupe, les cartographies de $|E_y|$. L'utilisateur exécute à nouveau le programme **Fortran** en indiquant la grandeur qu'il désire visualiser. En revanche, nous n'avons pas besoin de recalculer le **vecteur-solution**, qui est **inchangé**. Un programme MATLAB permet d'utiliser le vecteur-solution déjà calculé pour réaliser les cartographies souhaitées immédiatement. Le résultat obtenu est visible sur la **Figure 68**

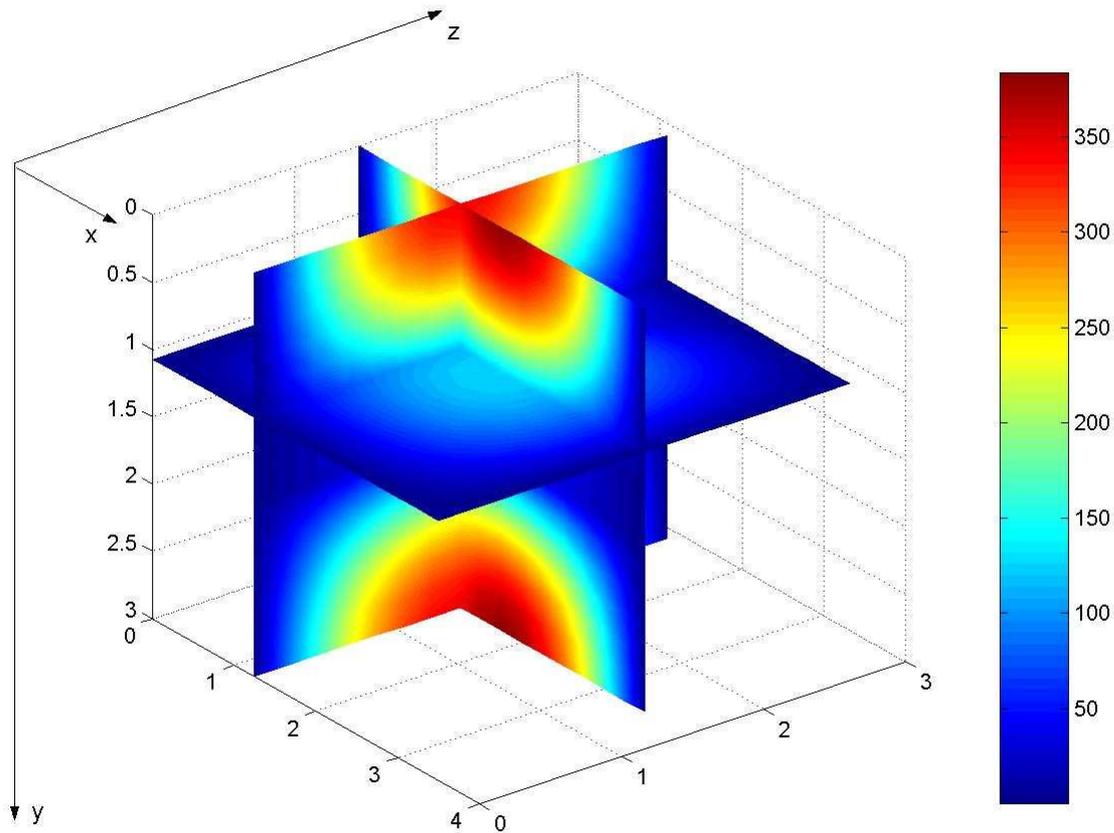


Figure 68 : Visualisation simultanée de $|E_Y|$ dans 3 plans de coupe $x=cte$, $y=cte$, $z=cte$

Là encore on peut constater l'excellente concordance entre les allures des cartographies de la **Figure 68** et celles de $|E_Y|$ du mode TM_{111} . En regardant les expressions établies en **Annexe 5**, nous constatons que les valeurs **maximales** prises par $|E_X|$ et $|E_Y|$ dans **une même section $z=cte$** devrait être dans un rapport :

$$\frac{|E_{X \max}|}{|E_{Y \max}|} = \frac{k_X}{k_Y} = \frac{1 \cdot \pi}{L_X} \cdot \frac{L_Y}{1 \cdot \pi} = \frac{L_Y}{L_X} = \frac{3.0 \text{ m}}{3.5 \text{ m}}$$

Nous constatons sur la **Figure 67** et la **Figure 68** que ces valeurs maximales dans la même section $z=8 \cdot dz$ valent respectivement environ $|E_{X \max}| = 300 \text{ Vm}^{-1}$ et $|E_{Y \max}| = 350 \text{ Vm}^{-1}$ ce qui donne bien le résultat attendu.

Observons les cartographies obtenues, en ce qui concerne la grandeur $|E_Z|$, dans des plans :

$x=5 \cdot dx$, $y=5 \cdot dy$, $z=14 \cdot dz$ (on rappelle que le découpage est $14 \cdot 14 \cdot 14$)

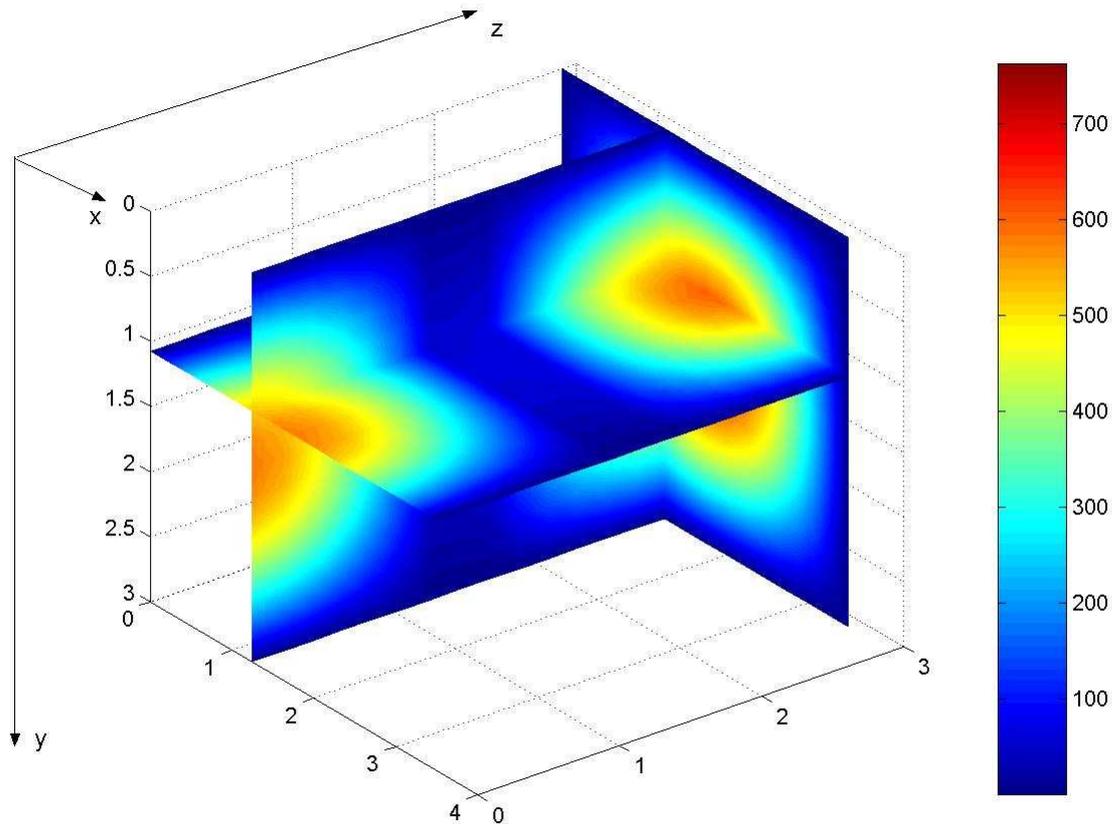


Figure 69 : Visualisation simultanée de $|E_z|$ dans 3 plans de coupe $x=cte$, $y=cte$, $z=cte$

Là encore nous constatons l'excellente correspondance entre les **allures** des cartographies obtenues et celles correspondant au mode TM_{111} .

Effectuons une vérification chiffrée des valeurs relatives : Toujours, en regardant les expressions de l' **Annexe 5**, nous constatons que si nous nous situons pour $|E_y|$ et $|E_z|$ dans des plans $z=cte$ correspondant **aux valeurs maximales suivant z** pour ces deux grandeurs, les **valeurs maximales de chaque plan** doivent se retrouver dans un rapport :

$$\frac{|E_{y \max}|}{|E_{z \max}|} = \frac{\beta \cdot k_y}{k_c^2}$$

Applications numériques :

$$k_0 = \frac{2\pi \cdot f}{c} = 1.817 m^{-1}$$

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} = 0.898 m^{-1}$$

$$k_y = \frac{\pi}{L_y} = 1.047 m^{-1}$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = 1.903 m^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = 1.183 m^{-1}$$

ce qui donne un rapport théorique $\frac{\beta.k_y}{k_c^2} \approx 0.65$

Sur les **Figures 68** et **69**, les plans de coupe en $z=cte$ correspondent justement aux maxima de chacune des grandeurs concernées et en tenant compte de l'échelle des valeurs à droite de chaque graphique, nous **évaluons approximativement** un rapport **observé en simulation** :

$$\frac{|E_{Y_{\max}}|}{|E_{Z_{\max}}|} \approx \frac{360 V.m^{-1}}{550 V.m^{-1}} = 0.65$$

ce qui correspond bien au résultat attendu.

II.4.2.2. Visualisation simultanée dans plusieurs plans $z=cte$

Nous cherchons à retrouver le mode TM_{211} dans la même cavité. La fréquence de résonance est :

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_z}\right)^2} = 111.8 \text{ MHz}$$

Nous allons positionner 2 antennes dipôles de longueur « 1 arête de cellule ». Pour exciter ce mode pair, nous les plaçons aux centres des 2 « demi-faces » symétriques par rapport à $x = \frac{L_x}{2}$, sur la face $z=0$, comme indiqué sur le schéma ci-dessous :

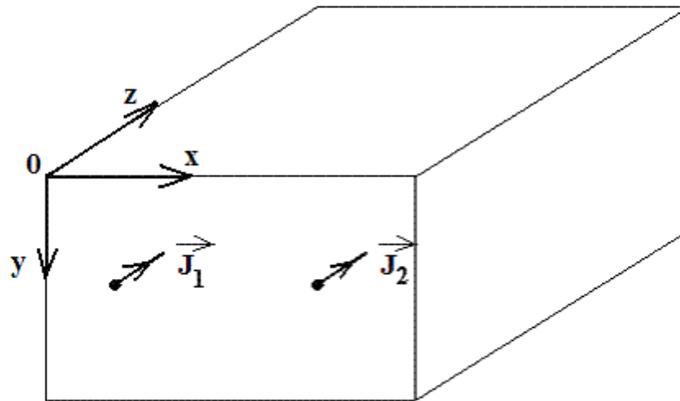


Figure 70: Cavité excitée par 2 antennes dipôles en opposition de phase, $f=111.8 \text{ MHz}$

Nous pouvons visualiser simultanément la grandeur souhaitée dans plusieurs section $z=cte$, ce qui est une autre alternative pour une vue d'ensemble, sans devoir travailler avec précision sur les diverses cartographies. Les résultats sont donnés ci-dessous :

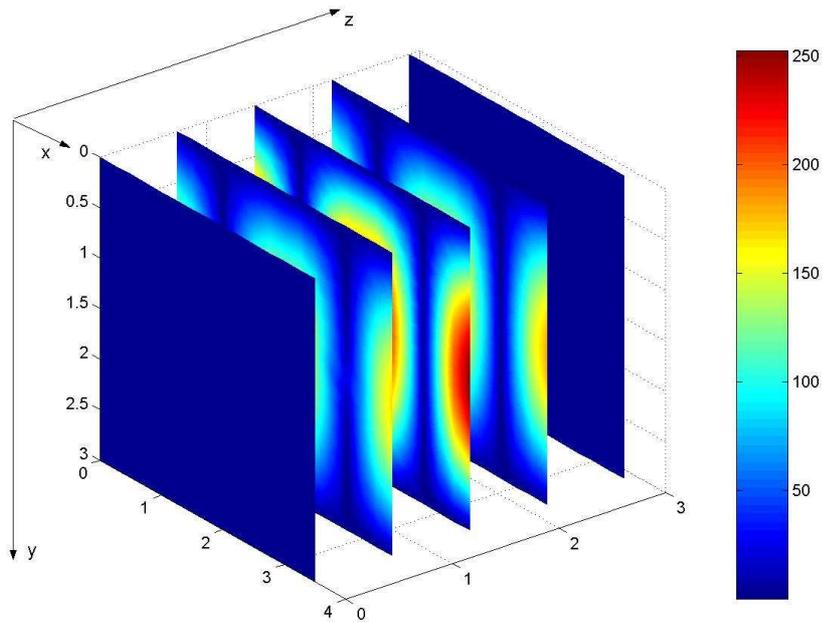


Figure 71 : Visualisation de $|E_x|$ dans plusieurs plans $z=cte$

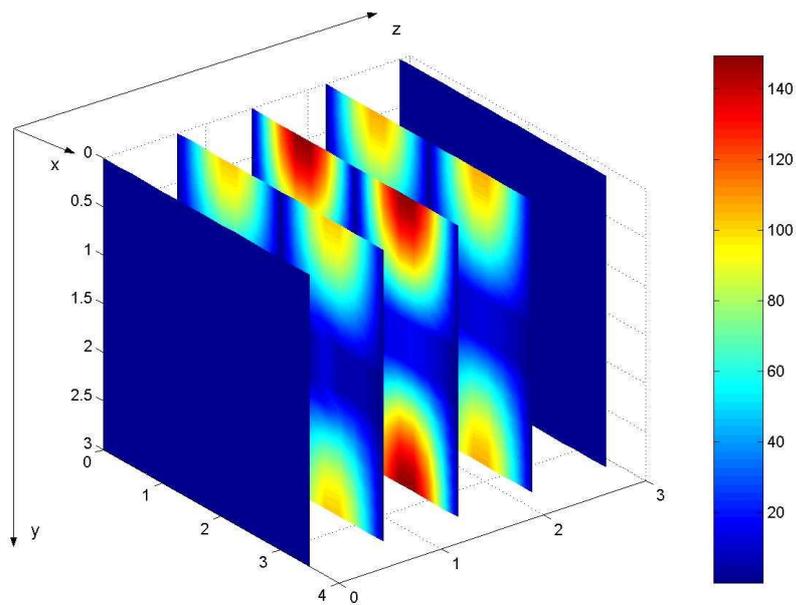


Figure 72 : Visualisation de $|E_y|$ dans plusieurs plans $z=cte$

Les **Figures 71** et **72** font apparaître :

- l'allure correcte des cartographies dans chaque section correspondant bien au mode TM_{211}
- les sections correspondant à des **nœuds** pour E_x et E_y en $z=0$ et $z=L_z$
- la section correspondant $z = \frac{L_z}{2}$, correspondant à un **ventre** pour E_x et E_y

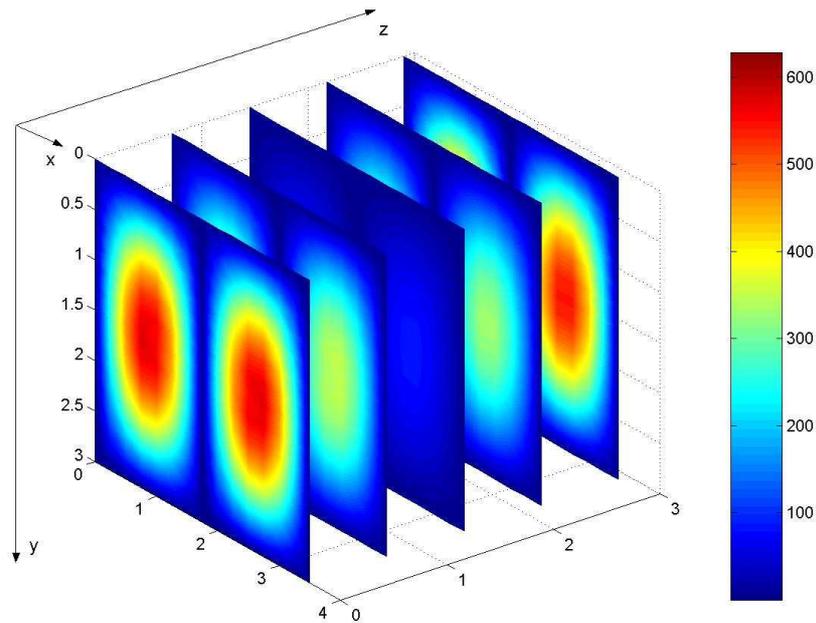


Figure 73 : Visualisation de $|E_z|$ dans plusieurs plans $z=cte$

La **Figure 73** fait apparaître :

- l'allure correcte des cartographies dans chaque section correspondant bien au mode TM_{211}
- les sections correspondant à des **ventres** pour E_z en $z=0$ et $z=L_z$
- les sections en $z = \frac{L_z}{2}$, correspondant à un **noeud** pour E_z

Remarque : Le positionnement d'une seule des deux antennes permet d'obtenir des résultats tout aussi corrects (avec un champ plus faible évidemment), mais cela nous a donné l'occasion de tester le code avec cette option de plusieurs antennes. Nous pouvons réaliser le même type de vérifications quantitatives sur les valeurs relatives des diverses composantes $|E_x|$, $|E_y|$, $|E_z|$. En regardant les expressions de l' **Annexe 5**, nous obtenons le rapport théorique :

$$\text{Dans 2 plans à la même côte } z = L_z/2 : \frac{|E_{X \max}|}{|E_{Y \max}|} = \frac{k_X}{k_Y} = \frac{2\pi}{L_X} \cdot \frac{L_Y}{1\pi} = \frac{2L_Y}{L_X} = \frac{6.0 \text{ m}}{3.5 \text{ m}} \approx 1.7$$

En observant les cartographies ci-dessus, nous avons :

$$\frac{|E_{X \max}|}{|E_{Y \max}|} \approx \frac{250 \text{ V.m}^{-1}}{145 \text{ V.m}^{-1}} \approx 1.7$$

Dans des plans correspondant à des ventres pour chaque grandeur : $z=L_z/2$ pour $|E_x|$ et $z=0$

pour $|E_z|$, en théorie :
$$\frac{|E_{X \max}|}{|E_{Z \max}|} = \frac{\beta \cdot k_X}{k_C^2}$$

Applications numériques :

$$k_0 = \frac{2\pi \cdot f}{c} = 2.343 \text{ m}^{-1}$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} = 1.795 \text{ m}^{-1}$$

$$k_y = \frac{\pi}{L_y} = 1.047 \text{ m}^{-1}$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = 4.318 \text{ m}^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = 1.082 \text{ m}^{-1}$$

ce qui donne le rapport théorique $\frac{\beta \cdot k_x}{k_c^2} \approx 0.45$

Les cartographies permettent d'évaluer un rapport $\frac{|E_{X \max}|}{|E_{Z \max}|} \approx \frac{250 \text{ V.m}^{-1}}{550 \text{ V.m}^{-1}} \approx 0.45$

résultat qui donne encore satisfaction.

II.4.2.3. Visualisations séparées des plans $x=cte$, $y=cte$ et $z=cte$

Nous allons simuler le mode TE_{011}

Pour cela nous allons positionner une antenne dipôle de longueur « une arête de cellule » au centre d'une section $x=1.75 \text{ m}$:

La fréquence de résonance est égale à :

$$f = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{0}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_z}\right)^2} = 71.89 \text{ MHz}$$

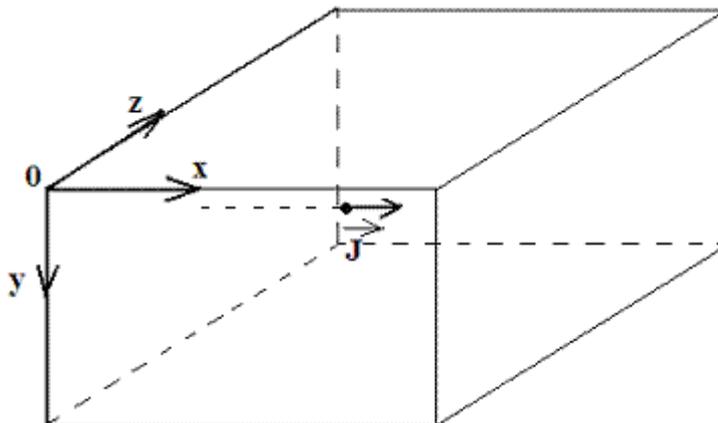


Figure 74 : Cavité excitée par une antenne dipôle à la fréquence $f= 71.9 \text{ MHz}$

Dans ce choix de visualisation, chaque graphique ne présente le champ concerné que dans une section $z=cte$, ou $y=cte$ ou $x=cte$.

Cette option est moins « globale » et demande une certaine habitude, et une certaine « imagination » pour « situer » la cartographie dans la cavité. On doit avoir en mémoire les indices i, j, k des divers plans de visualisations, ainsi que le découpage de tout le volume, pour pouvoir interpréter les résultats.

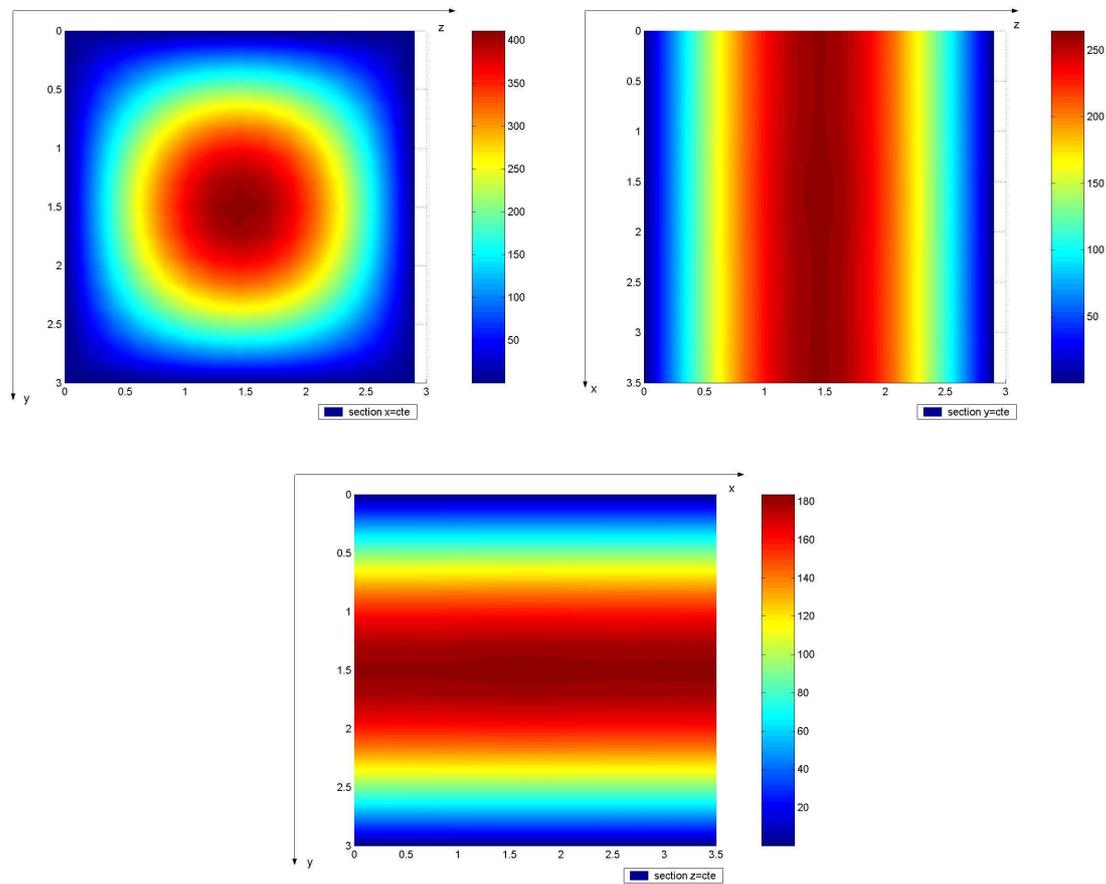


Figure 75 : Cartographies **séparées** de $|E_x|$ dans les 3 plans de coupe d'indices respectifs $k=4$ pour x , $j=4$ pour y , $i=3$ pour z , avec un découpage $14*14*14$

Nous constatons immédiatement le caractère « moins intuitif » de ce choix de présentation des résultats. Nous voyons quand même la validité des résultats en regardant les **allures**, par rapport au mode TE_{011} . D'autre part, les vérifications de la validité des valeurs relatives $\frac{|E_x|}{|E_y|}$, etc ... comme cela a été fait précédemment ne peuvent s'effectuer facilement que si l'utilisateur a choisi les sections de visualisation adéquates, correspondant à des ventres pour les grandeurs concernées. Nous verrons un peu plus loin que ce choix présente tout de même des avantages, par rapport aux visualisations précédentes.

Visualisons dans les mêmes sections les cartographies de $|E_y|$:

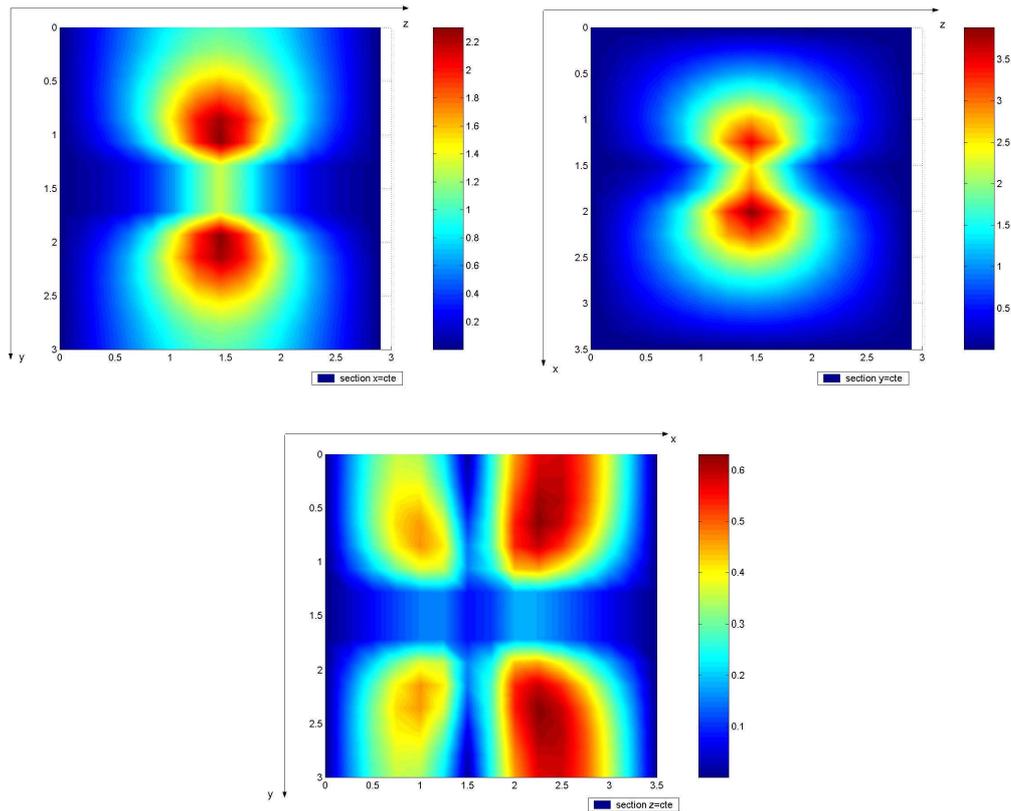


Figure 76 : Cartographies **séparées** de $|E_Y|$ dans les 3 plans de coupe d'indices respectifs $k=4$ pour x , $j=4$ pour y , $i=3$ pour z , avec un découpage $14*14*14$

Il semblerait que les allures soient **incorrectes** par rapport à celles attendues du mode TE_{011} . Mais...en regardant l'**échelle des valeurs**, nous constatons un rapport $\frac{|E_X|}{|E_Y|}$ souvent supérieur à 100 .

De plus, une simulation avec un découpage de $20*20*20$ (avec une machine plus performante) nous a fourni des valeurs du même rapport variant de 400 à plus de 1000. En regardant les expressions de l' **Annexe 5**, nous voyons que ce mode comporte en théorie un coefficient k_x nul, ce qui donne une composante E_Y nulle aussi.

Il est bien connu que lorsqu'on résoud un problème de manière **numérique**, les valeurs théoriquement nulles seront en fait **très petites** devant les autres (non nulles évidemment), et c'est cela que nous avons ici en comparant les valeurs relatives de $|E_X|$ et $|E_Y|$ (qui est alors **considéré comme identiquement nul**). Nous obtenons pour $|E_Z|$ des résultats à interpréter de la même manière : **par définition** des modes TE, nous devons avoir E_Z identiquement nul dans tout le volume.

Les cartographies de $|E_Z|$ donnent les résultats suivants :

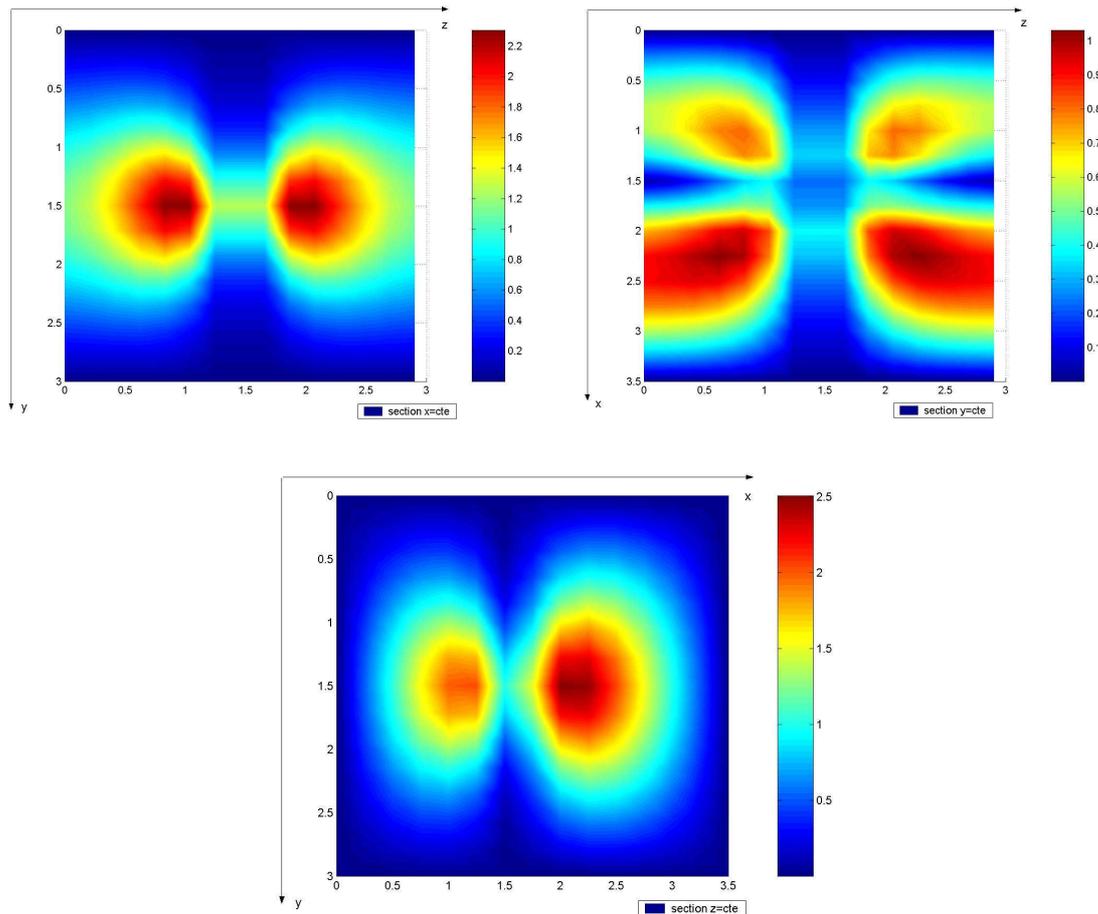


Figure 77 : Cartographies **séparées** de $|E_z|$ dans les 3 plans de coupe d'indices respectifs $k=4$ pour x , $j=4$ pour y , $i=3$ pour z , avec un découpage $14*14*14$

Exactement de la même manière que pour E_y , l'ordre de grandeur du rapport $\frac{|E_x|}{|E_z|}$ est supérieur à

100, et on considère E_z comme identiquement nul dans le volume et un découpage plus fin conduit à un rapport encore plus élevé, supérieur à 1000. Un autre facteur intervenant dans le fait qu'on n'obtient pas **des valeurs rigoureusement nulles de E_y et E_z en simulation**, est qu'on peut retrouver (c'est même une des raisons d'être de cette thèse) d'autres modes TM et TE dans la cavité, avec des poids **manifestement faibles** devant le poids du mode recherché ici. Nous allons mettre en évidence un avantage de ce type de visualisation sur les précédentes :

Les échelles sur chaque graphique ont leur **maximum** fixé par la valeur maximale prise **dans la section concernée** comme nous pouvons le constater sur la **Figure 75**. Dans les 2 autres types de visualisation le maximum est fixé par la valeur maximale prise dans tout le volume (puisque'on peut visualiser n'importe quelle section du volume). Ce point peut avoir de l'importance lorsqu'on sait qu'il arrive très fréquemment qu'à **proximité de l'antenne**, le champ prenne des valeurs beaucoup plus élevées et ce **de manière très localisée**. C'est donc cette valeur qui peut fixer le maximum de l'échelle avec donc comme conséquence immédiate toute une partie de l'échelle « presque pas utilisée », et qui diminue la « visibilité » de certaines cartographies. En revanche, avec des plans de visualisation **séparés** il suffit à l'utilisateur de choisir (ou de re-choisir) une section de visualisation « suffisamment éloignée » de l'antenne pour pouvoir utiliser toute l'échelle des valeurs de manière appropriée. Par exemple, avec les mêmes données que celles utilisées pour simuler le mode TE_{011} , si on utilise la « visualisation simultanée de E_x dans plusieurs plans $z=cte$ », nous obtenons :

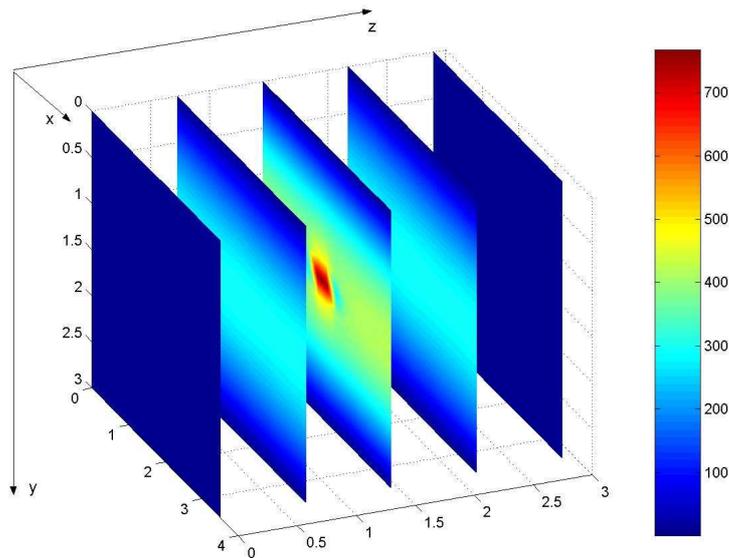


Figure 78 : Cartographie de $|E_x|$ dans plusieurs plans $z=cte$

Nous voyons dans le plan $z = 1.45$ m, à l'emplacement de l'antenne, que $|E_x|$ prend de manière très localisée la valeur maximale qui **fixe l'échelle dans tout le volume** (saturation).

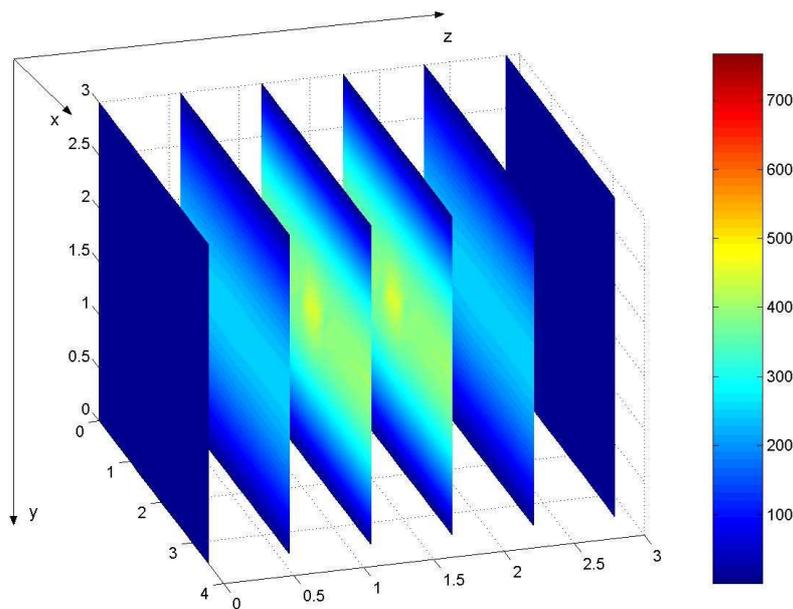


Figure 79 : Cartographie de $|E_x|$ dans plusieurs plans $z=cte$

Nous pouvons constater sur la **Figure 79** le « gaspillage » de l'échelle des valeurs, nuisant à la visualisation précise des cartographies même dans des sections ne contenant pas l'antenne. Cet inconvénient est enlevé si on effectue le choix de la visualisation sur des graphiques séparés. De plus, et de manière évidente, toute étude quantitative précise ne peut être menée correctement que sur ce dernier choix de visualisation des cartographies.

II.4.3. Simulations exigeant plus de ressources

II.4.3.1. Simulation d'un mode isolé à 251 MHz

Les résultats présentés jusqu'à présent sont réalisés à des fréquences inférieures au double de la fréquence de résonance la plus basse de 65.8 MHz correspondant au mode TM_{110} . Dès lors que nous voulons simuler des modes plus élevés, en montant en fréquence, nous nous attendons à plus d'**oscillations spatiales** dans les 3 directions x,y,z sur les cartographies.

La conséquence immédiate, si nous voulons obtenir des résultats corrects, est d'augmenter le nombre de cellules de découpage du volume de la cavité. Comme nous avons pu nous en rendre compte aux **paragraphes II.1.** et **II.2.** il est nécessaire d'utiliser une machine plus performante qu'un simple PC, avec un logiciel de résolution supportant une version parallèle.

Nous avons utilisé la **version parallèle de MUMPS** sur un **Cluster de PC de Xlim**, en faisant travailler en parallèle **4 processeurs**. Nous présentons les résultats de la simulation du mode TM_{333} , dont la fréquence de résonance (dans la même cavité 3.5 m * 3.0 m * 2.9 m) vaut en théorie $f = 251.0$ MHz. La position de l'antenne dipôle servant de source est au centre de la face $z=L_z$ (comme sur la **Figure 65**). Le découpage est de 20 * 20 * 20 cellules. La fréquence **de la simulation** a dû être ajustée par plusieurs essais successifs, à cause du fait que **déjà à cette fréquence, la densité de modes est importante [10]**, et les diverses simulations effectuées nous ont permis d'obtenir des cartographies « non souhaitées » (ex : mode TM_{150} de fréquence théorique 253.5 MHz et quelques autres ...). Nous avons finalement obtenu le mode souhaité à la fréquence de 248.7 MHz, ce qui représente un écart relatif de :

$$\frac{251.0 - 248.7}{251.0} = 0.9 \%$$

que nous considérons comme très correct

Remarque : Loin de nous inquiéter, la difficulté à trouver la mode TM_{333} , « noyé » dans plusieurs modes proches, est même un signe de « bon fonctionnement » du code, et surtout confirme la **raison d'être** d'une **CRBM**, à savoir obtenir un **mélange important de modes de cavité**, même si nous sommes encore sans brasseur .

Application numérique :

Le nombre de modes **de cavité** dont la fréquence de résonance est contenue dans la bande [240.0 MHz ; 260.0 MHz] dans le cas d'une cavité **parfaite** est théoriquement de 19 . En tenant compte du fait qu'il y a un léger « décalage » entre fréquence théorique et numérique d'une part, et des pertes dans la cavité d'autre part (donc une courbe de réponse en fréquence qui n'est pas une « **Dirac** ») les modes compris dans la bande évoquée peuvent facilement être excités et nous comprenons aisément les difficultés que nous avons à « isoler » le mode souhaité.

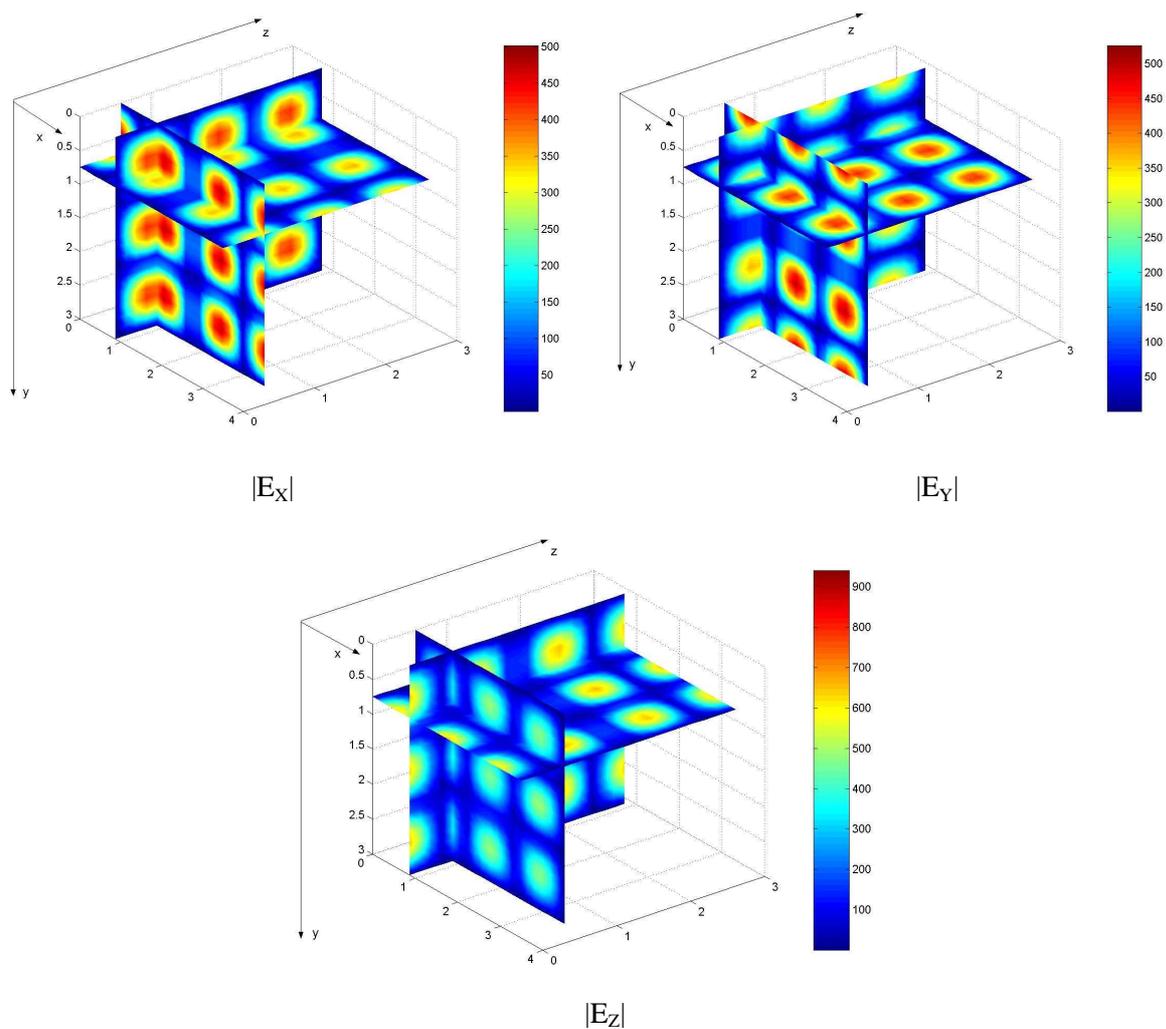


Figure 80 : Cartographies de la simulation à 248.7 MHz avec un découpage 20 * 20 *20

Nous reconnaissons le mode TM_{333} recherché et nous constatons que les **oscillations spatiales** (« **équivalentes en 3 D à des demi-longueurs d'onde 1 D** ») justifie la nécessité d'un maillage plus fin de la cavité et donc l'utilisation de moyens de calculs plus performants.

II.4.3.2. Simulation d'un mélange de modes à 550 MHz

Le but de cette simulation n'est plus d'obtenir **un mode seul**, à cause de la difficulté évoquée au paragraphe précédent. La phase de validation du code, a été effectuée aux plus basses fréquences sur de nombreux cas (une vingtaine de modes **isolés** TM et TE environ) , dont quelques uns seulement ont été présentés dans cette thèse. Aucun échec n'a été constaté au cours de cette phase et on peut considérer le code comme **validé**. Cette simulation a pour but de nous rapprocher plus de « l'ambiance CRBM », puisque nous nous situons à une fréquence supérieure à **8 fois** la fréquence de résonance la plus basse de la cavité. Le découpage est pratiquement **à la limite** permise par nos moyens informatiques, avec la version parallèle de MUMPS sur le Cluster, avec 4 processeurs. Il est de **34*34*34 cellules**. La cavité est toujours la même.

L'antenne dipôle est située suivant l'axe z aux indices :

$i = 11$ (en z), $j = 6$ (en y) et $k = 6$ (en x) pour la première extrémité

et $i = 12$ (en z), $j = 6$ (en y) et $k = 6$ (en x) pour la deuxième extrémité

Les résultats apparaissent dans 3 graphiques séparés et seule la composante E_z est présentée :

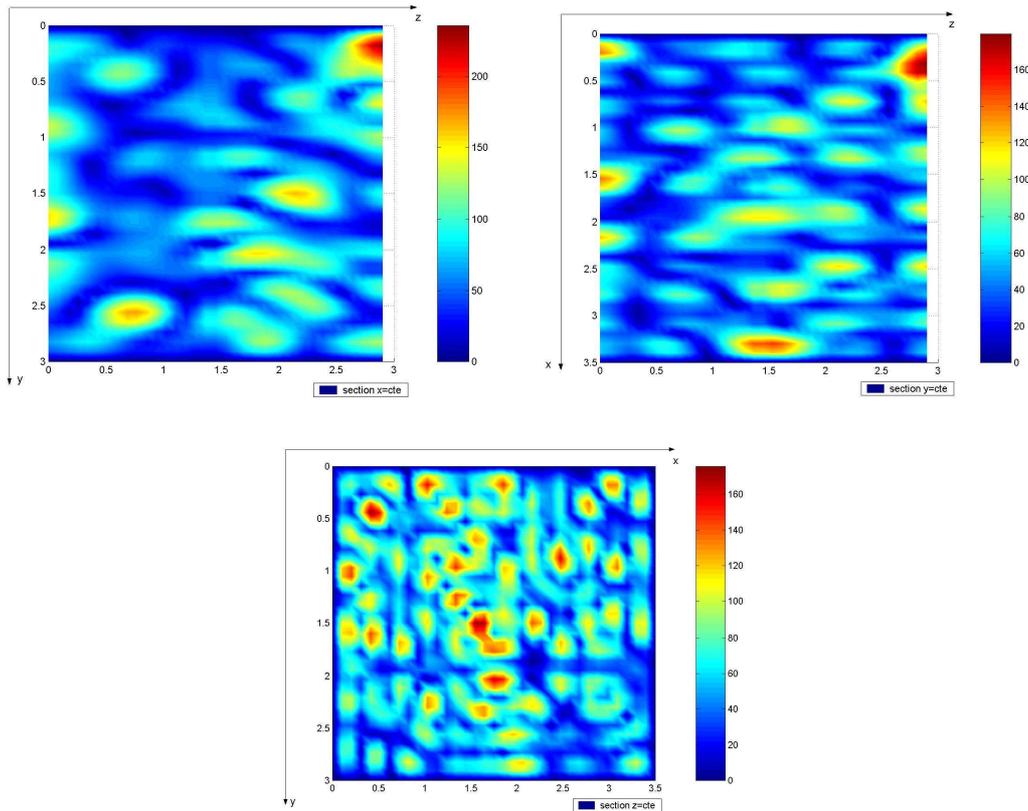


Figure 81 : Cartographies de $|E_z|$ dans 3 sections, à la fréquence 550 MHz avec un découpage $34*34*34$

La durée de la résolution du système d'équations est de 16 min 10 s. Le tracé des cartographies ci-dessus, effectué sous MATLAB, sur le PC dure 20 min 20 s, il faut donc pour ce découpage $34*34*34$ une durée totale de simulation de 36 min 30 s.

III. Conclusion du chapitre IV

Nous avons, au cours de ce chapitre, présenté la mise en œuvre de la résolution numérique de la détermination du champ électromagnétique à l'intérieur d'une enceinte de forme parallélépipédique sans brasseur, excitée par des antennes rectilignes (une antenne plus complexe pouvant toujours être décomposée en segments rectilignes). Nous avons établi les équations de Maxwell discrétisées, ainsi que les divers cas particuliers en fonction de leur position (intérieur strict, sur une paroi, une arête, un sommet...). Nous avons constaté que le problème se ramenait alors à la résolution d'un système d'équations linéaires, dont les inconnues sont les 3 composantes du **champ électrique**. La modélisation des pertes a été réalisée de deux manières (impédance de surface et coefficient de fréquence complexe). Puis, les besoins tant en terme de mémoire qu'en temps de calcul ont mis en évidence la nécessité de résoudre le système linéaire par une méthode par **matrices creuses**.

Nous avons logiquement terminé ce chapitre par la confrontation des cartographies des diverses composantes du champ électrique avec celles provenant de l'analytique en cavité parallélépipédique, ce qui a abouti à la validation du code. Cette validation a été réalisée qualitativement en regardant les **allures** des cartographies, mais aussi quantitativement en comparant les **rappports** des diverses composantes rectangulaires E_x , E_y , E_z .

Chapitre V

Hybridation FDFD/Développement modal

I. Présentation de la méthode

L'objectif est le même que dans le chapitre précédent, à savoir la détermination numérique du champ électromagnétique discrétisé, dans une cavité, avec une résolution fixée par un maillage 3D. Une des principales difficultés d'une **méthode de simulation FDFD** dans une CRBM, est le volume de ressources informatiques nécessaires à l'aboutissement du projet en terme de mémoire et de temps de calcul. (voir **paragraphes II.1.** et **II.2.** du **Chapitre IV**).

L'idée directrice permettant de réaliser l'**hybridation** est directement issue de la **séparation en deux zones distinctes** des CRBM, à savoir une **zone de diffraction** où se trouvent l'antenne, le brasseur etc... et la **zone de mesure** dénuée de tout matériel. (voir **Figure 3** du **Chapitre I**). Si la limite entre les deux zones est suffisamment éloignée du brasseur, la zone de mesure peut être considérée comme un **demi-guide d'ondes court-circuité à l'extrémité**.

Nous savons que le champ électromagnétique **dans la zone de mesure** peut se décomposer sur les **bases de modes de guide TM** et **TE** (transformées en ondes stationnaires de par la présence de la paroi). Le champ électromagnétique est donc **totalemment déterminé** si on connaît les poids de tous les modes susceptibles de se propager (possédant un coefficient de propagation transversal k_c inférieur au coefficient de propagation dans le vide $k_0 = \frac{\omega}{c}$). A ces modes **propagatifs**, on peut rajouter des modes **évanescents** à cause des pertes. L'objectif est donc de remplacer l'écriture des équations de l'opérateur $(\vec{rot}\vec{rot} - k_0^2)$ en chaque nœud de la zone de mesure par des équations de **calcul des poids des modes** au niveau du raccordement des deux zones.

Le nombre d'inconnues est alors considérablement diminué. En effet, si on considère que la zone de mesure contient $n_z * n_y * n_x$ cellules, l'hybridation permet de passer, **pour cette zone**, d'un nombre d'inconnues égal à

$$3 * n_z * (n_y + 1) * (n_x + 1) \text{ (les 3 composantes aux nœuds, section de raccordement exclue)}$$

à un nombre d'inconnues égal à

$$\text{nombre de modes TM + nombre de modes TE}$$

où le nombre des modes TM et TE représente les modes **stationnaires de guides** susceptibles d'exister (avec éventuellement quelques premiers modes évanescents). Chaque mode est défini par **deux entiers** dans le cas **analytique** ou défini par une **valeur propre** $(-k_c^2)$ issue de l'**équation d'Helmholtz discrétisée** (**paragraphe II.3.** du **Chapitre II**) dans le cas plus général, **numérique**.

C'est la différence de nature des inconnues (champ électrique d'une part et poids des modes d'autre part) qui justifie l'appellation d'« **hybridation** »

II. Equations au niveau de la zone de séparation

La tâche préliminaire pour mener à bien la méthode d'hybridation est le calcul des **Eléments propres 2D : valeurs propres et vecteurs propres TM et TE** de l'équation d'Helmholtz discrétisée (en E_z pour les modes TM et en H_z pour les modes TE), présentée au **paragraphe II.3.** du **Chapitre II.** Une fois les éléments propres obtenus, ils sont stockés dans divers tableaux et fichiers.

Au niveau de la séparation des deux zones (que nous considérons à la côte $z = 0$, d'indice $i = 1$), nous **conservons** les inconnues E_z dans la section $z = 0$, **de la même manière que dans la méthode classique déjà testée au Chapitre IV** (sans hybridation).

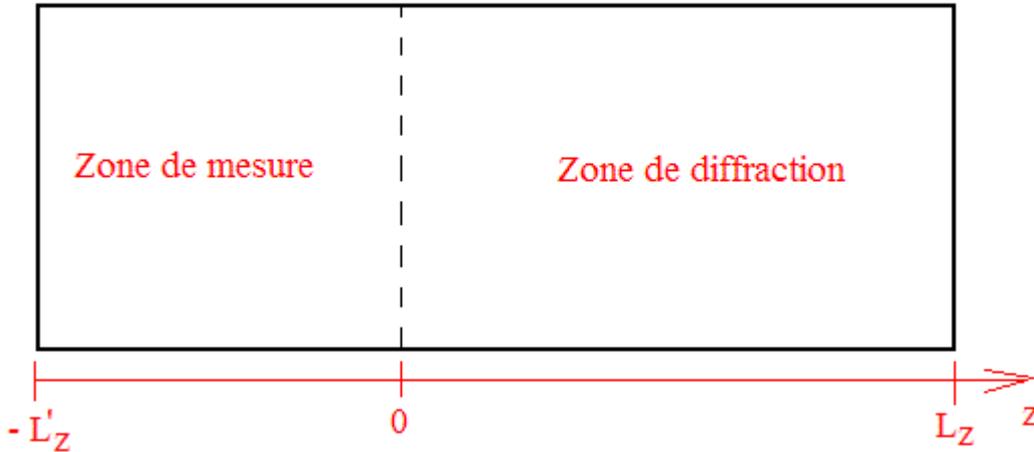


Figure 82 : Définition des diverses notations utilisées

En revanche les inconnues E_x (de même pour E_y) sont **remplacées** par des **combinaisons linéaires** des E_x (de même pour E_y) des divers modes élémentaires TM et TE. On appellera ce développement sur les modes **élémentaires** le « **développement modal** ».

En **chaque point** de la zone de séparation :

$$E_x = \sum_{\text{modes TM}} A^{TM} \cdot e_x^{TM} + \sum_{\text{modes TE}} A^{TE} \cdot e_x^{TE} \quad (5-1)$$

$$E_y = \sum_{\text{modes TM}} A^{TM} \cdot e_y^{TM} + \sum_{\text{modes TE}} A^{TE} \cdot e_y^{TE}$$

expressions dans lesquelles les **inconnues** sont les poids des modes A^{TM} et A^{TE}

Les coefficients e_x^{TM}, e_y^{TM} intervenant dans (5-1) sont calculés à partir des **vecteurs propres 2D en E_z** , grâce à la **discrétisation** de l'équation (A3-1) de l' **Annexe 3**:

$$\vec{E}_T = -\frac{2\beta}{k_c^2} \cdot \sin(\beta \cdot L'_Z) \vec{V}_T(E_z) \quad (5-2)$$

Les coefficients e_x^{TE}, e_y^{TE} sont quant à eux calculés à partir des **vecteurs propres 2D en H_z** , à l'aide de la **discrétisation** de l'équation (A3-2) de l' **Annexe 3**

$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{2\omega\mu}{k_C^2} \cdot \sin(\beta \cdot L'_Z) [\vec{U}_Z \wedge \vec{\nabla}_T (H_Z)]} \quad (5-3)$$

Attention : Les équations (5-2) et (5-3) cachent quelques points délicats apparaissant au moment de l'écriture du code : pour l'équation (5-3) par exemple, il faut regarder les expressions (A3-2) établies en Annexe 3 en respectant **scrupuleusement** les phases **relatives** entre les diverses lignes. La routine **Lapack** fournit les vecteurs propres (en H_Z pour les modes TE) avec la convention « H_Z correspondant à un n-uplet avec coordonnées purement réelles ». Nous voyons dans les expressions (A3-2), qu'il y aura donc un facteur « j » supplémentaire à introduire dans la programmation concrète de (5-3) pour respecter la quadrature entre les diverses expressions de (A3-2). Le non-respect de cette contrainte a été testé pendant la phase de mise au point du code : cela ne permettait pas d'aboutir à un résultat correct.

Puis le système d'équations est complété par l'écriture des équations en nombre égal **au nombre total de modes TM et TE pris en compte pour le développement modal**. Ces équations rendront compte du fait que les divers poids sont calculés dans la **section droite correspondant à $z = 0$** (pour les notations, se reporter à la **Figure 82**) :

$$A_{\text{ième mode}}^{TM} = \frac{\vec{e}_Z \cdot \vec{e}_{Z \text{ ième mode}}^{TM}}{\left\| \vec{e}_{Z \text{ ième mode}}^{TM} \right\|^2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\beta_{\text{ième mode}} \cdot L'_Z)} \quad (5-4)$$

$$A_{\text{jème mode}}^{TE} = \frac{-\vec{h}_Z \cdot \vec{h}_{Z \text{ jème mode}}^{TE}}{\left\| \vec{h}_{Z \text{ jème mode}}^{TE} \right\|^2 \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta_{\text{jème mode}} \cdot L'_Z)}$$

Là encore des adaptations en fonction de la convention de phase des vecteurs propres calculés par Lapack ont été nécessaires en pratique, et la prise en compte de ce point n'ayant pas été effectuée, au début de la mise au point du code, nous étions confrontés à des « invalidations » dont les causes ont été difficiles à repérer. En pratique, les formules (5-4) sont **modifiées**, avec des fonctions de **base** considérées en un **ventre** (et non à la côte $z=0$), ce qui a pour effet de supprimer les « carrés » des sinus et cosinus dans les expressions programmées dans le code final :

$$\boxed{A_{\text{ième mode}}^{TM} = \frac{\vec{e}_Z \cdot \vec{e}_{Z \text{ ième mode}}^{TM}}{\left\| \vec{e}_{Z \text{ ième mode}}^{TM} \right\|^2 \cdot E_0^2 \cdot \cos(\beta_{\text{ième mode}} \cdot L'_Z)}} \quad (5-4)'$$

$$\boxed{A_{\text{jème mode}}^{TE} = \frac{-\vec{h}_Z \cdot \vec{h}_{Z \text{ jème mode}}^{TE}}{\left\| \vec{h}_{Z \text{ jème mode}}^{TE} \right\|^2 \cdot H_0^2 \cdot \sin(\beta_{\text{jème mode}} \cdot L'_Z)}} \quad (5-4)'$$

La cartographie dans la section, \vec{h}_Z , est obtenue en utilisant l'**équation de Maxwell discrétisée** :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{j}{\omega \cdot \mu} \cdot \text{rot} \cdot \vec{E}} \quad (5-5)$$

Dans les équations (5-4)' les inconnues sont : les poids A^{TM} , A^{TE} , ainsi que les diverses composantes E_z dans toute la section $z = 0$. Nous appellerons la procédure de remplacement des **équations classiques (sans hybridation)** par celles faisant intervenir le développement modal, le **raccordement modal**.

Il a aussi été effectué un changement par rapport à la méthode classique, au niveau des parois de la cavité, car les cartographies obtenues, bien que correctes à l'intérieur de la cavité, présentaient **parfois** des défauts en ce qui concerne **les allures de la composante normale sur les parois**. Pour justifier le changement des équations écrites à ce niveau, nous allons démontrer une autre condition aux limites :

Considérons un parallélépipède entièrement contenu dans la cavité, infiniment proche de la paroi (sur l'exemple la paroi est la section $z = L_z$) (voir **Figure 83** ci-dessous). Nous considérons que les parois sont parfaitement conductrices, ce qui est une approximation justifiée dans la pratique, en dépit de la possibilité d'une impédance de surface non nulle.

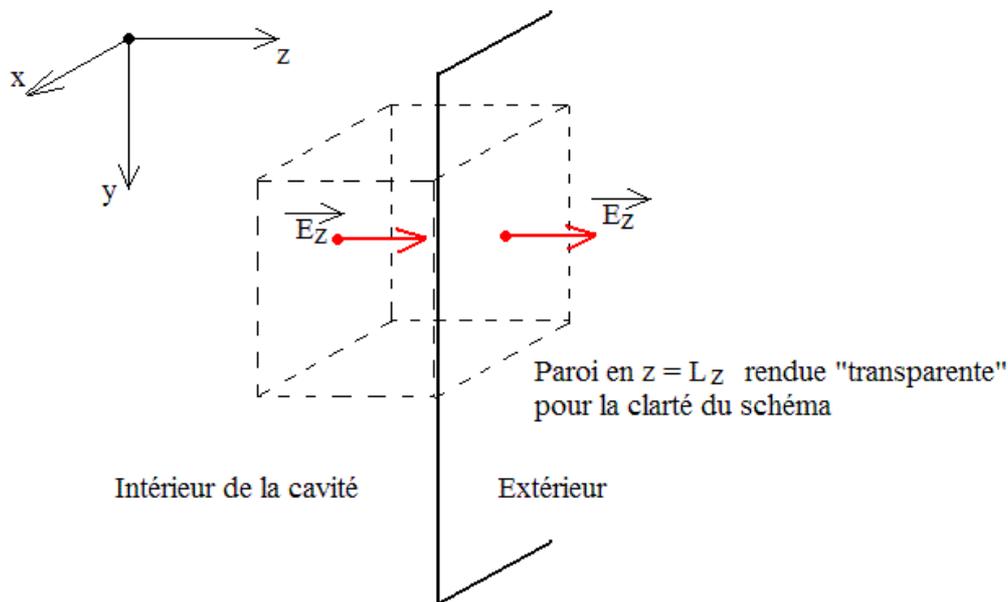


Figure 83 : Nouvelle condition aux limites introduite dans les équations

Nous considérons qu'il n'y a pas de charges à l'intérieur de ce parallélépipède, et d'après le **théorème de Gauss**, le flux du champ électrique à travers la surface fermée du volume **est nul**. Nous savons d'après la condition aux limites démontrée en **Annexe 1** que **la composante tangentielle du champ électrique** sur une paroi parfaitement conductrice est nulle. Si nous faisons tendre la dimension suivant z de ce parallélépipède vers zéro, nous considérons E_x et E_y nulles sur toute la surface délimitant le volume infinitésimal. Nous constatons alors que les seules grandeurs susceptibles de produire un flux non nul à travers la surface sont les composantes \vec{E}_z représentées sur la **Figure 83** et la seule façon d'obtenir cela est que les deux composantes E_z représentées sur le schéma soient égales.

Nous avons introduit donc la condition aux limites ici : $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ qu'on peut appliquer à toutes les parois et de manière générale, nous avons :

$$\boxed{\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0} \quad (5-6)$$

où l'indice "n" signifie dérivée de la « composante normale » calculée suivant la normale

Cette condition aux limites a été programmée au niveau des parois, pour la composante normale du champ électrique, en remplacement de l'équation classique, qui donnait tout de même des résultats acceptables.

Le système matriciel complet prend la forme décrite ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 \text{Zone de diffraction} \left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_1 E_{ix} + \beta_1 E_{iy} + \gamma_1 E_{iz} + \dots = -j\omega\mu J_{ix} \\
 \alpha_2 E_{ix} + \beta_2 E_{iy} + \gamma_2 E_{iz} + \dots = -j\omega\mu J_{iy} \\
 \alpha_3 E_{ix} + \beta_3 E_{iy} + \gamma_3 E_{iz} + \dots = -j\omega\mu J_{iz}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Limite entre zones} \left\{ \begin{array}{l}
 \alpha'_1 E_{ix} + \beta'_1 E_{iy} + \gamma'_1 E_{iz} + \dots + \sum_m A_m^{TM} \alpha''_1 E_{x_mode_m}^{TM} + \sum_n A_n^{TE} \alpha'''_1 E_{x_mode_n}^{TE} \dots = 0 \\
 \alpha'_2 E_{ix} + \beta'_2 E_{iy} + \gamma'_2 E_{iz} + \dots + \sum_m A_m^{TM} \beta''_2 E_{y_mode_m}^{TM} + \sum_n A_n^{TE} \beta'''_2 E_{y_mode_n}^{TE} \dots = 0 \\
 \alpha'_3 E_{ix} + \beta'_3 E_{iy} + \gamma'_3 E_{iz} + \dots + \sum_m A_m^{TM} (\alpha''_3 E_{x_mode_m}^{TM} + \beta''_3 E_{y_mode_m}^{TM}) \\
 \qquad \qquad \qquad + \sum_n A_n^{TE} (\alpha'''_3 E_{x_mode_n}^{TE} + \beta'''_3 E_{y_mode_n}^{TE}) \dots = 0
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Produits scalaires} \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k \text{ dans section } z=0} \gamma_k E_{z_k} \cdot E_{z_k_mode_m} - A_m^{TM} = 0 \\
 \sum_{k \text{ dans section } z=0} (\alpha_k E_{x_k} + \beta_k E_{y_k}) \cdot H_{z_k_mode_n} - A_n^{TE} = 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

- Les équations repérées « zone de diffraction » correspondent à celles déjà rencontrées dans le **Chapitre IV, équations (4-1) et (4-5)** (avec tous les cas particuliers évoqués) et ne contiennent comme inconnues **que les composantes de champ électrique**.

Le nombre d'équations de cette partie est égal au nombre de points de la zone de diffraction, multiplié par 3, **sans la section « limite », z=0**.

- Les équations repérées « Limite entre zones » correspondent aux mêmes équations à la base, mais dans lesquelles toute composante de champ E_x et E_y concernant un point de cette limite ($z=0$) est remplacée par son **développement sur les modes de base TM et TE**. On rappelle que ces composantes **transversales** ont pu être obtenues **numériquement** (par opposition à analytiquement) à partir des composantes **longitudinales**, elles mêmes obtenues **numériquement**, par résolution de l'équation d'Helmholtz.

Cette partie contient donc comme inconnues, aussi bien les composantes de champ électrique que les poids des modes notés A_m^{TM} et A_n^{TE} .

Le nombre d'équations de cette partie est égal au nombre de points de la section « limite », $z=0$, multiplié par 3.

Les composantes en z des champs ne sont pas développées sur la base des modes élémentaires.

En observant en détails l'opérateur $\overrightarrow{rot.rot}$ nous constatons que :

La composante en x ne fait intervenir que E_x **pour le développement modal**

La composante en y ne fait intervenir que E_y **pour le développement modal**

La composante en x fait intervenir E_x et E_y **pour le développement modal**

d'où nous déduisons la structure de la partie « limite entre zones » du système vu ci-dessus.

- La partie « Produits scalaires » correspond aux égalités que doivent vérifier les produits scalaires définis au **Chapitre III** entre la cartographie en $z=0$ (inconnue) et celles correspondant aux divers modes TM et TE (connues) et les poids A_m^{TM} et A_n^{TE} . C'est la programmation des **équations (5-4)'** pour les modes TM et TE, auxquelles il faut rajouter **l'équation (5-5)** pour les modes TE. **Chacune** de ces équations contient les composantes de champ (E_z pour les modes TM ou E_x, E_y pour les modes TE) dans la section $z=0$ et **un seul** poids comme inconnues.

Le nombre d'équations de cette partie est tout simplement égal au nombre total de poids des modes TM et TE pris en compte pour le développement modal (modes **de guide stationnaires** propagatifs + quelques modes évanescents).

Nous constatons que le système linéaire obtenu contient un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues, et la structure du système matriciel à résoudre est donc décrite ci-dessous :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
 \alpha_{11} \dots \beta_{11} \dots \gamma_{11} \dots & \dots & \alpha_{1i} \dots \beta_{1i} \dots \gamma_{1i} \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \alpha_{21} \dots \beta_{21} \dots \gamma_{21} \dots & \dots & \alpha_{2i} \dots \beta_{2i} \dots \gamma_{2i} \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \alpha_{31} \dots \beta_{31} \dots \gamma_{31} \dots & \dots & \alpha_{3i} \dots \beta_{3i} \dots \gamma_{3i} \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & \\
 \alpha'_{11} \dots \beta'_{11} \dots \gamma'_{11} \dots & \dots & \alpha'_{1i} \dots \beta'_{1i} \dots \gamma'_{1i} \dots & \dots & \dots & \alpha''_{1i} E_{xi}^{TM} & \dots & \alpha'''_{1i} E_{xi}^{TE} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha'_{21} \dots \beta'_{21} \dots \gamma'_{21} \dots & \dots & \alpha'_{2i} \dots \beta'_{2i} \dots \gamma'_{2i} \dots & \dots & \dots & \beta''_{2i} E_{yi}^{TM} & \dots & \beta'''_{2i} E_{yi}^{TE} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha'_{31} \dots \beta'_{31} \dots \gamma'_{31} \dots & \dots & \alpha'_{3i} \dots \beta'_{3i} \dots \gamma'_{3i} \dots & \dots & \dots & \alpha''_{3i} E_{xi}^{TM} & \dots & \beta''_{3i} E_{yi}^{TM} & \dots & \alpha'''_{3i} E_{xi}^{TE} & \dots & \beta'''_{3i} E_{yi}^{TE} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \\
 \gamma_1 E_{z_{-1_mode_m}} \dots \gamma_k E_{z_{-k_mode_m}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (-1) & \dots & \dots & 0 \\
 \alpha_1 H_{z_{-1_mode_n}} & \beta_1 H_{z_{-1_mode_n}} & \dots \\
 \alpha_k H_{z_{-k_mode_n}} & \beta_k H_{z_{-k_mode_n}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & (-1) & \dots & 0
 \end{array} \right]}_{\text{Coefficients concernant les inconnues "composantes de champ"}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc}
 E_{1x} \\
 E_{1y} \\
 E_{1z} \\
 \vdots \\
 E_{ix} \\
 E_{iy} \\
 E_{iz} \\
 \vdots \\
 A_1^{TM} \\
 A_1^{TE} \\
 \vdots \\
 A_m^{TM} \\
 A_m^{TE} \\
 \vdots \\
 A_n^{TE}
 \end{array} \right]}_{\text{Coefficient concernant les inconnues "poids des modes TM et TE"}} = \left[\begin{array}{c}
 -j\omega\mu J_{1x} \\
 -j\omega\mu J_{1y} \\
 -j\omega\mu J_{1z} \\
 \vdots \\
 -j\omega\mu J_{ix} \\
 -j\omega\mu J_{iy} \\
 -j\omega\mu J_{iz} \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{array} \right]$$

dans laquelle nous faisons clairement apparaître les 3 zones définies plus haut, en ce qui concerne les divers types d'équations programmées.

Nous constatons donc que la matrice principale présente des **blocs** de structures différentes.

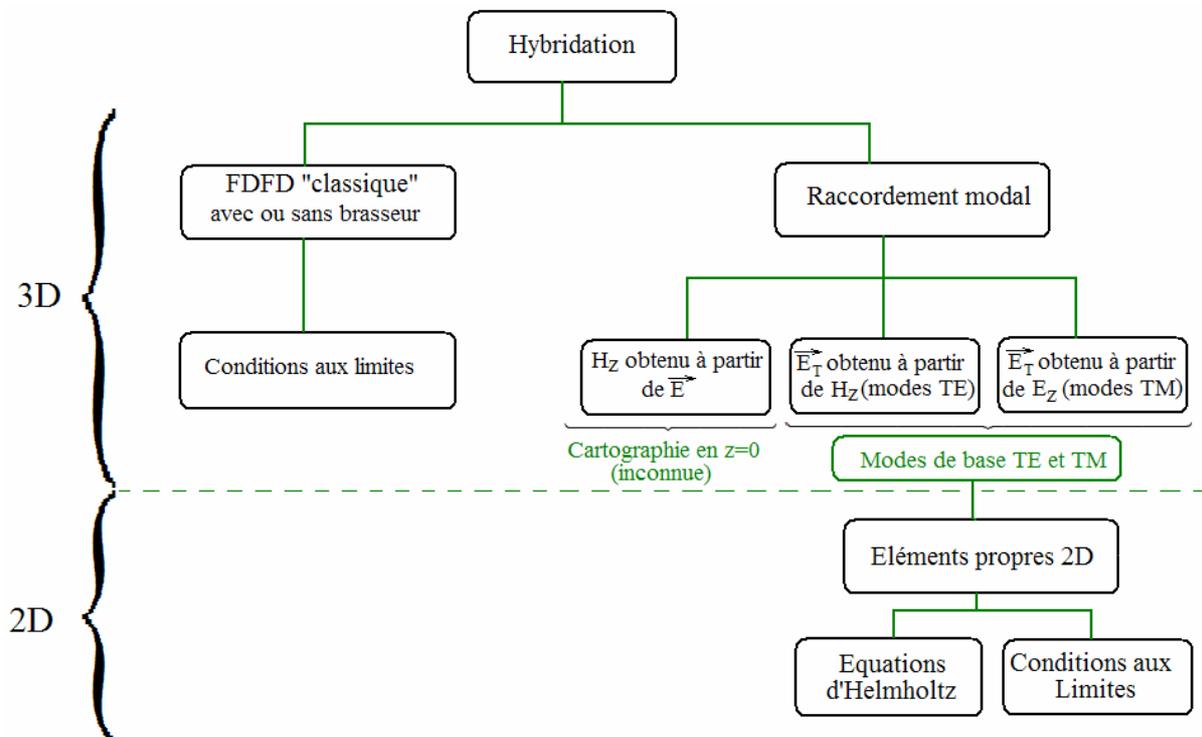
- Le 1^{er} bloc est formé de coefficients non nuls concernant **quelques inconnues de champ électrique**, les coefficients concernant les poids étant tous nuls. Ce bloc est **extrêmement creux**.
- Le 2^{ème} bloc contient la même structure que le 1^{er} auquel il faut rajouter **tous les coefficients concernant les poids TM et TE**. Ce bloc est **d'autant plus dense** que le nombre d'inconnues « poids des modes » est élevé, donc que la **fréquence augmente**, tous les autres paramètres restant égaux par ailleurs.
- Quant au 3^{ème} bloc, pour les modes TM, chaque ligne contient **tous** les coefficients concernant les **composantes en z** du champ électrique **dans la section z=0**, et **un seul** coefficient « poids d'un mode TM », égal à (-1) et contient [(n_Y+1)*(n_X+1)+1] coefficients non nuls.

Toujours pour le 3^{ème} bloc et pour les modes TE, chaque ligne contient **tous** les coefficients concernant les **composantes en x et y** du champ électrique **dans la section z=0**, et **un seul** coefficient « poids d'un mode TE », égal à (-1) et contient [2*(n_Y+1)*(n_X+1)+1] coefficients non nuls.

Ce bloc est évidemment moins creux que le 1^{er}. Le « caractère creux », en **pourcentage** du nombre N (**ordre** de la matrice, aussi égal au nombre total d'inconnues) est **d'autant plus marqué** que le découpage est **fin**, dans la **direction z**.

Le nombre d'équations contenues dans ce bloc est d'autant plus élevé que le nombre de modes TM et TE pris en compte pour le développement modal augmente, donc que la fréquence de travail est élevée.

L'organigramme suivant résume les interactions et la hiérarchisation des **grandes étapes** de l'hybridation :

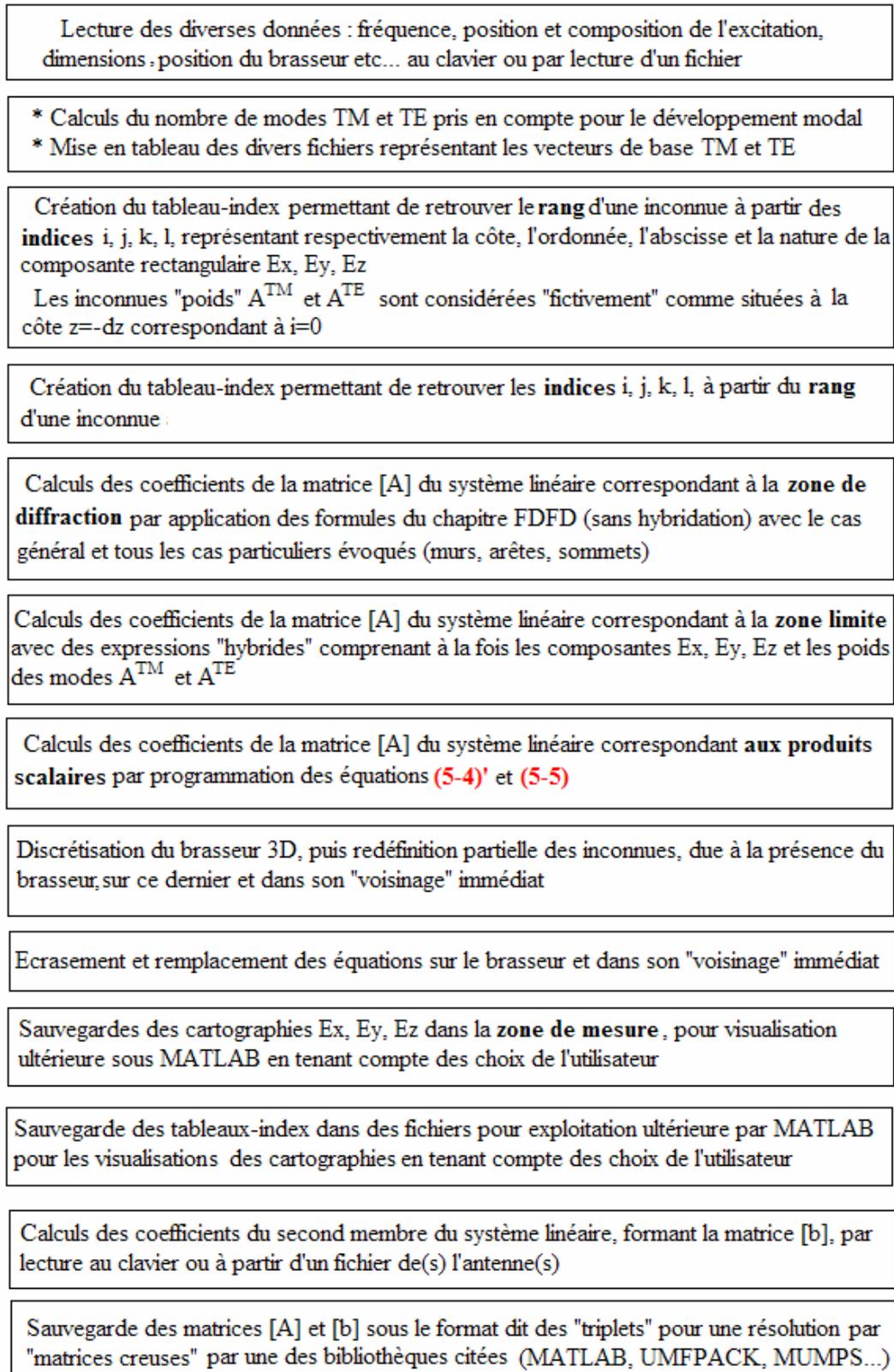


Remarque : Nous pourrons toujours obtenir le champ électrique \vec{E} (et donc les 3 composantes rectangulaires E_x, E_y, E_z) en n'importe quel point de la zone de mesure en développant celui-ci sur la base de **modes de guide stationnaires** :

$$\vec{E} = \sum_{\text{modes TM}} A^{TM} \cdot \vec{E}^{TM} + \sum_{\text{modes TE}} A^{TE} \cdot \vec{E}^{TE}$$

puisqu'après résolution du système, nous pourrions avoir accès aux poids A^{TM} et A^{TE}

L'organigramme plus détaillé suivant résume les **étapes** du code « FDFD-Hybridation » réalisé :



III. Validation sur cavité parallélépipédique sans brasseur

Nous procédons de la même manière que pour la validation du code réalisé avec **maillage complet de toute la cavité**, c'est-à-dire vérification de l'allure des cartographies pour les premiers modes, car la densité de modes par unité de fréquence permet d'« isoler » un mode avec un choix approprié de fréquence d'excitation de l'antenne. Pour vérifier la validité, le mieux est de réaliser les mêmes essais que pour la méthode avec **maillage de toute la cavité**, ou tout au moins avec le maximum de points communs. La première simulation a pour but d'obtenir le mode TM_{111} dans la même cavité **toujours sans brasseur**.

En nous reportant aux notations de la **Figure 82**, nous choisissons des longueurs $L_z = 2.07$ m et $L'_z = 0.83$ m pour positionner la zone de séparation (nous remarquons qu'on retrouve bien la longueur totale de la cavité suivant z égale à 2.9 m). Les autres dimensions sont évidemment inchangées, ainsi que la position de l'antenne. Tous les autres paramètres (impédance de surface, coefficient de fréquence etc...) sont aussi inchangés. Pour obtenir un « découpage équivalent » à celui réalisé pour le cas « maillage de toute la cavité » (pour rappel : $14*14*14$) nous choisissons un découpage **de la zone de diffraction** de $14*14*10$.

Les diverses sections visualisées correspondent aux mêmes que celles du paragraphe **II.4.2.** du **Chapitre IV** et nous obtenons :

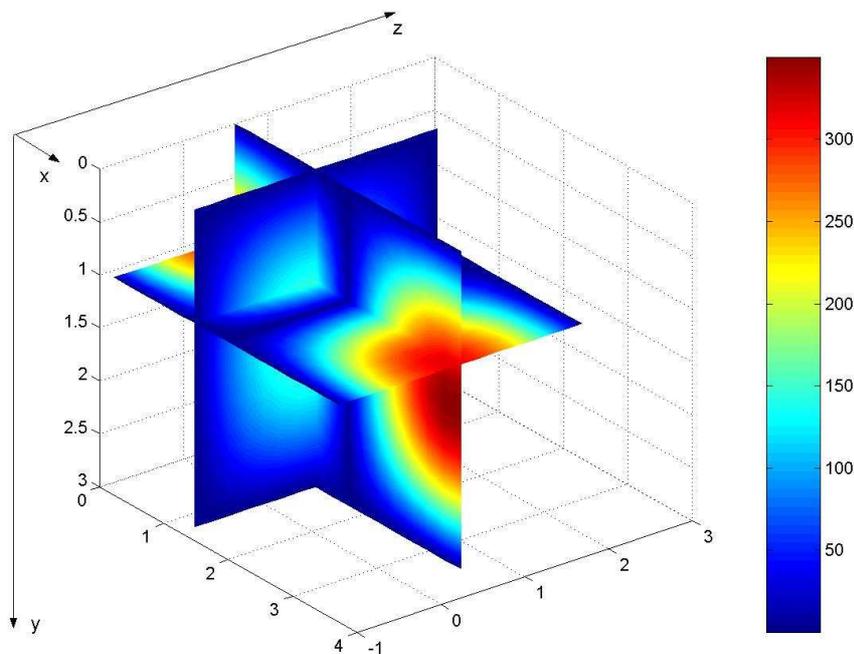


Figure 84 : Cartographies de $|E_x|$ avec **développement modal** avec un découpage **de la seule zone de diffraction** en $14*14*10$

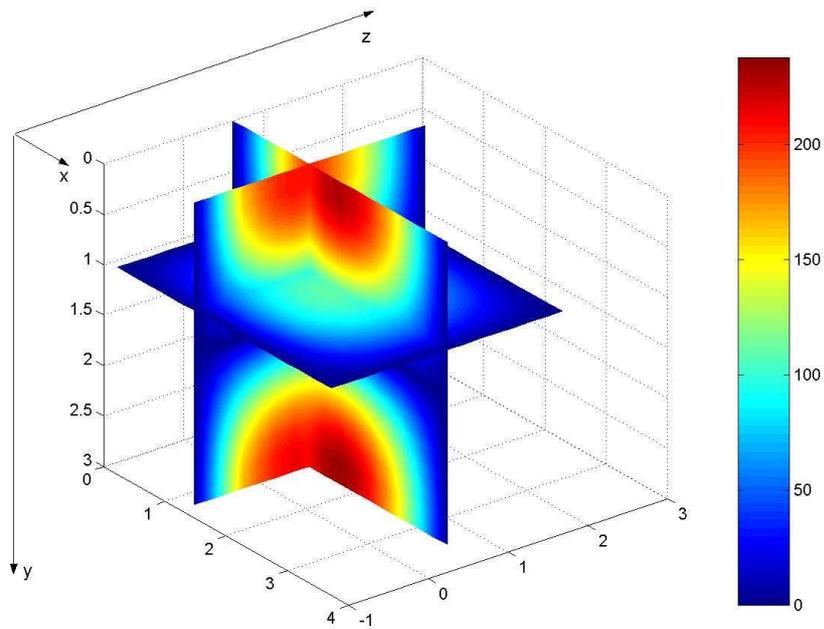


Figure 85 : Cartographies de $|E_y|$ avec **développement modal** avec un découpage **de la seule zone de diffraction**

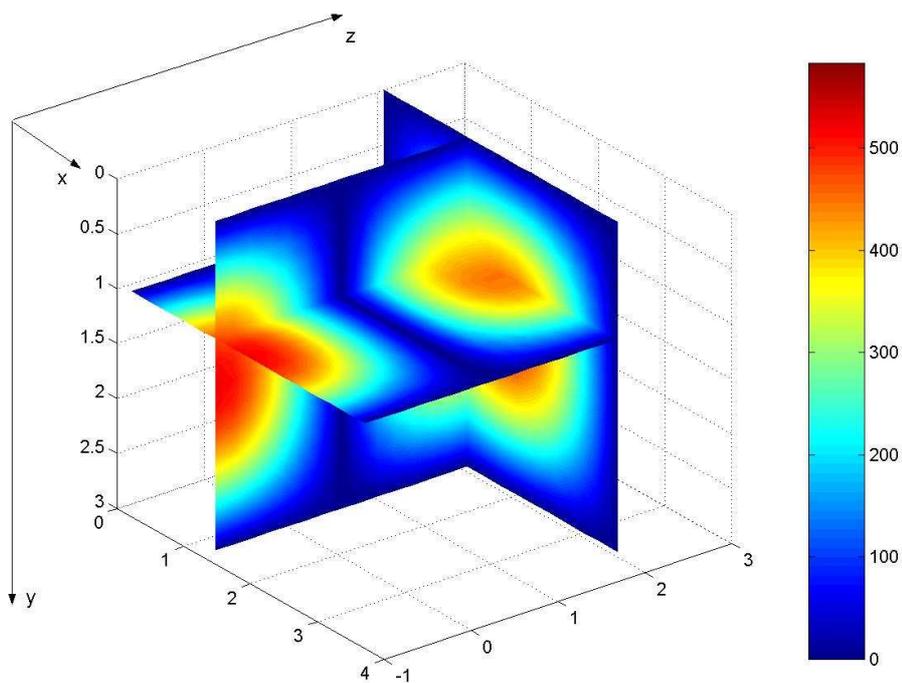


Figure 86 : Cartographies de $|E_z|$ avec **développement modal** avec un découpage **de la seule zone de diffraction**

Nous constatons que les **allures** des cartographies obtenues avec maillage complet du volume d'une part, et avec **hybridation** d'autre part, concordent.

Attention de tenir compte du « **décalage de la coordonnée en z** » par rapport au chapitre précédent, dû à la nouvelle position $z = 0$.

En ce qui concerne les **valeurs numériques**, des différences apparaissent. Nous allons revenir sur ce point un peu plus loin. La fréquence de la simulation est 84.65 MHz au lieu de 83.70 MHz pour

obtenir des valeurs du même ordre de grandeur. La méthode d'hybridation avec le découpage $14*14*10$ « équivalent » au précédent découpage $14*14*14$, sans développement modal permet une résolution du système d'équations en environ 40 secondes avec un Pentium 4, sous MATLAB (Windows XP). Sans hybridation, la résolution avait duré environ 1 min 40 s, et jusqu'à 2 min 10 s pour certains cas.

La résolution fournit, comme nous l'avons vu plus haut les **poinds des modes TM et TE** et dans notre cas, le poids le plus élevé correspond au 1^{er} mode de guide, le mode TM_{11} avec un poids complexe apparaissant dans la structure générale du fichier « **solution.txt** » dont on donne **un aperçu de la fin de ce dernier** sur la **Figure 87** ce fichier comportant **7433** lignes, dans notre cas :

$3*15*15*11$ composantes de champs aux nœuds de la zone de diffraction + 3 modes TM (1 propagatif + 2 évanescents) + 5 modes TE (3 propagatifs + 2 évanescents) = **7433 inconnues**

Chaque ligne est composée d'une description **brève et claire** de la nature de l'inconnue (qui ne l'est plus après résolution!), suivie de la partie réelle et imaginaire de celle-ci comme on peut le voir ci-dessous :

```

Champ_Ey      -1.206647e-014   -1.020054e-016
Champ_Ez      -4.927265e-011   -9.806533e-011
Champ_Ex      -7.069257e-017   -4.371873e-017
Champ_Ey      -6.046671e-015    6.490266e-016
Champ_Ez      1.056249e-010   -1.746680e-010
Champ_Ex      -7.069257e-017   -4.371873e-017
Champ_Ey      -1.548112e-016    3.389523e-016
Champ_Ez      2.894414e-010   -1.043208e-009
Poids_TM1     -1.110730e+001    2.913073e+002
Poids_TM2     6.711014e-003    4.419370e-001
Poids_TM3     -9.712623e-003    2.926250e-001
Poids_TE1     1.959084e-003    4.900280e-005
Poids_TE2     3.421292e-003    1.013893e-004
Poids_TE3     1.141035e-001    5.421827e-003
Poids_TE4     -4.983627e-007   -2.405167e-004
Poids_TE5     -5.003388e-005   -1.742960e-003

```

Figure 87 : Aperçu de la fin du fichier « solution.txt »

Nous constatons que le module du poids le plus élevé, comme nous nous y attendions est le 1^{er} mode de guide TM. Nous voyons de plus, qu'ont été pris en compte 3 modes TM et 5 modes TE. Durant toutes les simulations de cette thèse, le nombre de modes évanescents (numériquement) a été choisi égal à 2 et a toujours donné satisfaction. Il peut être modifié à tout moment.

Petit problème ...

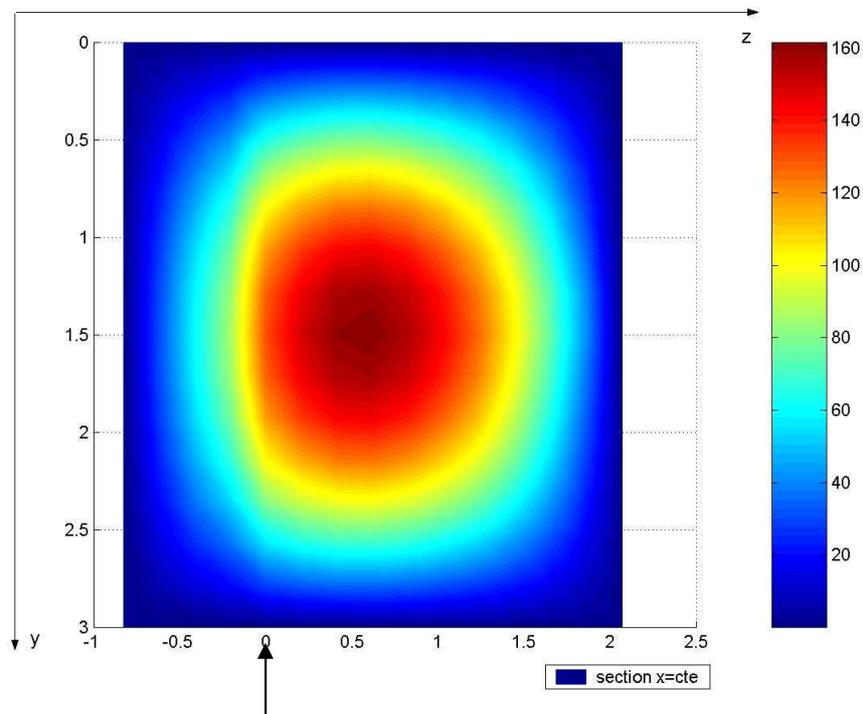
Dans la phase de **validation** du code pour la méthode **sans développement modal**, nous avons vérifié les égalités entre les valeurs **théoriques** et **obtenues en simulation**, pour des rapports

$\frac{|E_x|}{|E_y|}$...etc.... au **paragraphe II.4.2.** du **Chapitre IV** et cette étape avait donné satisfaction.

Le rapport évoqué ci-dessus devrait valoir environ 0.85, ce qui **semble** ne pas être correctement vérifié lorsque nous regardons la **Figure 84** et la **Figure 85**.

Et sa solution :

Attention de ne pas porter un jugement trop rapide à propos du rôle joué par **un mode** par la simple lecture de son **poïds**. Pour illustrer ces propos nous allons, à partir de la cartographie de $|E_x|$ dans une section $x = \text{cte}$, découvrir le rôle plus ou moins important de certains modes. La zone de séparation est repérée par la côte « $z = 0$ ».



Zone de raccordement

Figure 88 : Cartographie de $|E_x|$ dans une section $x=\text{cte}$ avec prise en compte des 3 modes TM + 0 mode TE (fréquence = 84.65 MHz)

Nous constatons une certaine « discontinuité » du champ au niveau de la zone de raccordement lorsque nous ne tenons pas compte des modes TE, dont les poïds ont un module très inférieur à celui du 1^{er} mode TM. La cartographie obtenue en **ne tenant compte que de ce 1^{er} mode TM** est identique à celle obtenue avec les 3 modes TM, confirmant le rôle primordial de ce 1^{er} mode TM.

Puis nous donnons la cartographie de $|E_x|$ en tenant compte des 3 modes TM et de 2 modes TE (dans l'ordre croissant des constantes de propagation transversale k_c comme présenté dans le fichier « solution.txt »).

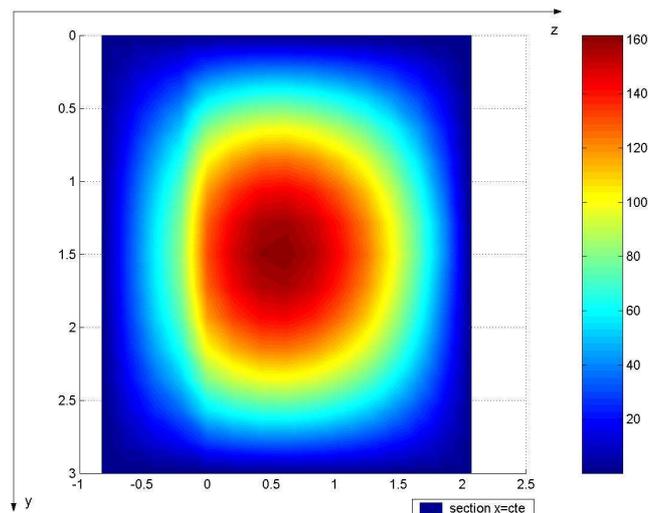


Figure 89 : Cartographie de $|E_x|$ dans une section $x=cte$ avec prise en compte des 3 modes TM + 2 modes TE (fréquence = 84.65 MHz)

Nous ne constatons pas de différences notables entre la **Figure 88** et la **Figure 89**. En consultant le fichier solution (**Figure 87**) nous voyons que le 3^{ème} mode TE a un poids plus important que les deux premiers modes TE, **bien que très inférieur** au mode **principal TM**.

La **Figure 90** présente la cartographie obtenue en rajoutant ce 3^{ème} mode TE

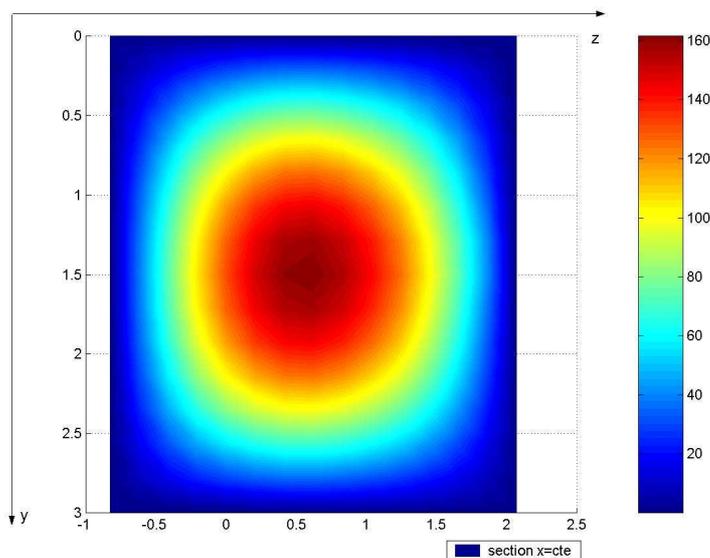


Figure 90 : Cartographie de $|E_x|$ dans une section $x=cte$ avec prise en compte des 3 modes TM + 3 modes TE (fréquence = 84.65 MHz)

En observant la cartographie obtenue sur la **Figure 90**, nous voyons immédiatement que la conclusion s'impose d'elle-même : le 3^{ème} mode TE (correspondant au mode **de guide analytique** TE_{11}) joue un rôle **non négligeable** en dépit d'un module du poids près de **2600 FOIS PLUS FAIBLE** que celui du principal mode TM . Le fait de tenir compte des 2 derniers modes TE ne change pratiquement pas le résultat. Nous nous devons de rechercher la cause d'un résultat qui **semble aller** contre toute attente : comment se fait-il qu'un mode ayant un module du poids 2600 fois plus faible qu'un autre puisse jouer un rôle relatif aussi important ?

Pour comprendre ce « paradoxe », revenons aux définitions des vecteurs propres en 2D obtenus par résolution de l'Equation d'Helmholtz **paragraphes II.3.** et **III.2.** du **Chapitre II.** La convention choisie pour ces vecteurs propres (qui rappelons le, étaient formés par les composantes en E_z ou H_z dans une section droite $z=cte$) était une « **normalisation** » de la composante **maximale** (en module) à 2 V/m pour les modes TM et à 2 A/m pour les modes TE (choix justifié par le fait qu'il correspond à des **ondes stationnaires** issues d'une réflexion d'**ondes progressives** d'amplitudes respectives 1 V/m et 1 A/m sur une paroi parfaite). Les composantes en x et y des cartographies des divers modes TM et TE élémentaires étaient déduites des vecteurs propres par les formules **(A3-1)** et **(A3-2)** établies en **Annexe 3.**

En regardant les expressions **analytiques** établies pour le champ électromagnétique des modes TM et TE, en **Annexe 5** nous constatons que la valeur maximale prise par $|E_x|$ pour le mode **de base**

$$\text{TM}_{11} \text{ (avec } E_0 = 1 \text{ V/m) est } |E_{x \text{ max}}| = \frac{2 \cdot \beta \cdot E_0 \cdot k_x}{k_c^2} = 1.054 \text{ V/m}$$

Nous pouvons calculer $|E_{x \text{ max}}|$ pour le mode **de base** TE_{11} :

$$|E_{x \text{ max}}| = \frac{2 \cdot k_0 \cdot Z_0 \cdot H_0 \cdot k_y}{k_c^2} = 735.7 \text{ V/m (avec aussi } H_0 = 1 \text{ A/m)}$$

Nous comprenons maintenant la raison pour laquelle, **malgré un poids beaucoup fois plus faible**, le mode TE_{11} joue un rôle non négligeable. En tenant compte du **poids** (établi après résolution du système d'équations), nous obtenons des valeurs maximales de $|E_x|$: (voir copie du fichier « **solution.txt** » ci-dessus)

$$\text{Mode TM}_{11} : |E_{x \text{ max}}| = 291.5 \times 1.054 = 307.2 \text{ V/m}$$

$$\text{Mode TE}_{11} : |E_{x \text{ max}}| = 0.114 \times 735.7 = 83.9 \text{ V/m}$$

Et nous constatons effectivement que le mode TE_{11} joue un rôle important, car la **norme euclidienne** du vecteur colonne \vec{e}_{x11}^{TE} est beaucoup plus élevée que celle de \vec{e}_{x11}^{TM}

Nous rappelons que les vecteurs ci-dessus sont des n-uplets pour lesquels chaque coordonnée est la composante E_x , dans une section $z=cte$, avec la numérotation définie au **paragraphe II.3.** du **Chapitre II :**

$$\|\vec{e}_{x11}^{TE}\| \gg \|\vec{e}_{x11}^{TM}\|$$

Remarque : les valeurs calculées ci-dessus sont plus élevées que celles des **Figure 84 à 86** car les cartographies n'étaient pas tracées dans une section correspondant à un ventre (selon x). On peut s'en convaincre en observant la **Figure 84** .

D'autres cartographies sont présentées ci-dessous pour constater le bon résultat fourni par le développement modal au niveau de la zone de jonction.

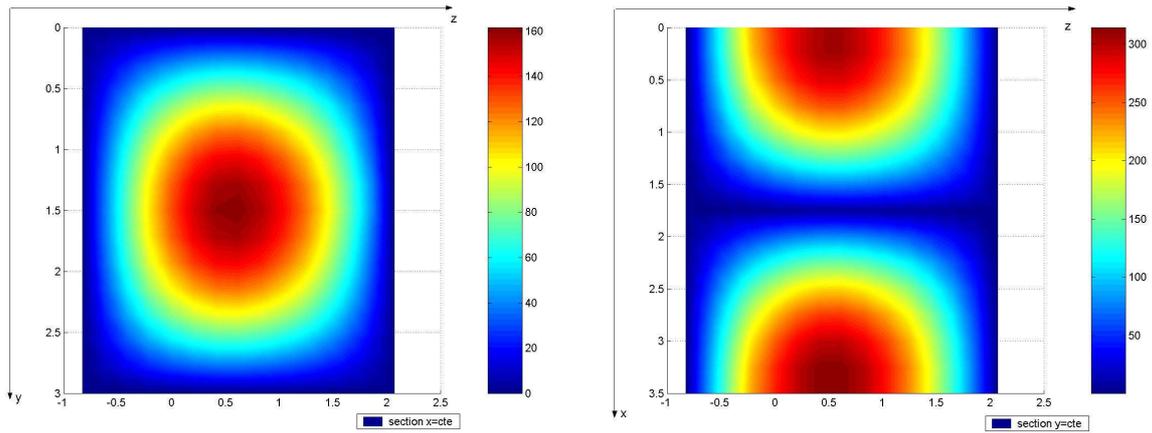


Figure 91 : Cartographies de $|E_x|$ permettant de constater la transition **DFD/Développement modal**

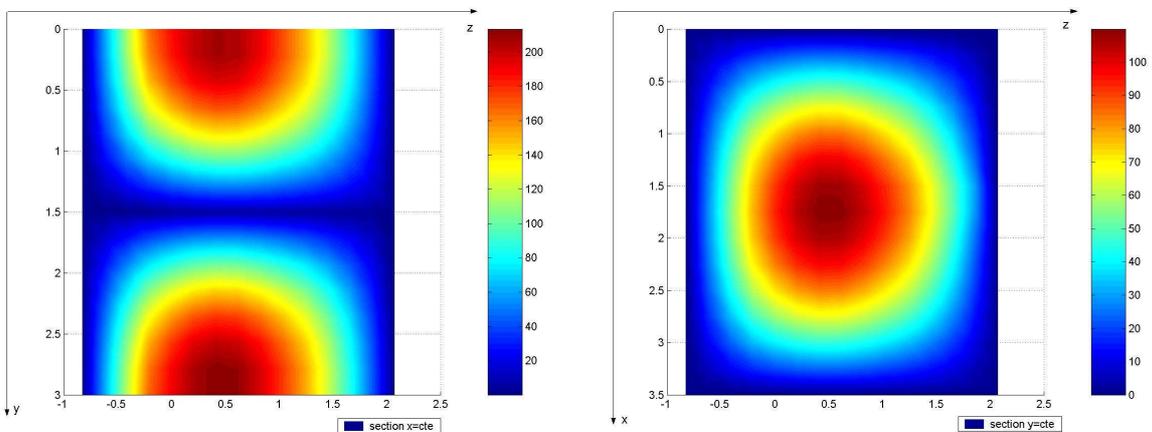


Figure 92 : Cartographies de $|E_y|$ permettant de constater la transition **DFD/Développement modal**

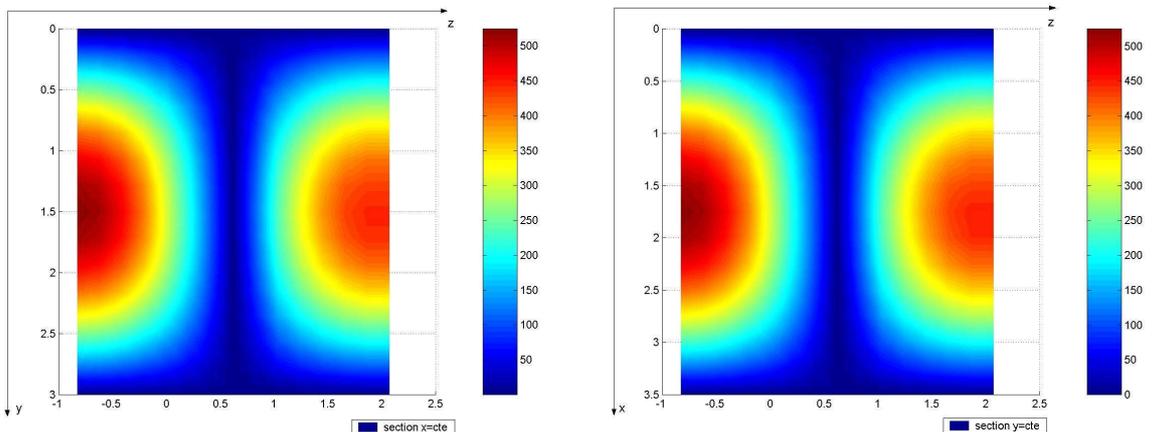


Figure 93 : Cartographies de $|E_z|$ permettant de constater la transition **DFD/Développement modal**

Nous pouvons constater la bonne concordance visuelle du **raccordement modal**.

Nous allons réaliser une nouvelle simulation en **déplaçant la zone de raccordement** avec les valeurs $L_z = 1.656$ m et $L'_z = 1.244$ m . Nous pouvons vérifier que ces valeurs permettent de réaliser une simulation « équivalente » en terme de découpage à la simulation précédente, si nous choisissons un découpage $14*14*8$. La fréquence est conservée égale à 84.65 MHz.

Nous ne présentons que quelques cartographies (choix arbitraire) pour comparer aux précédentes.

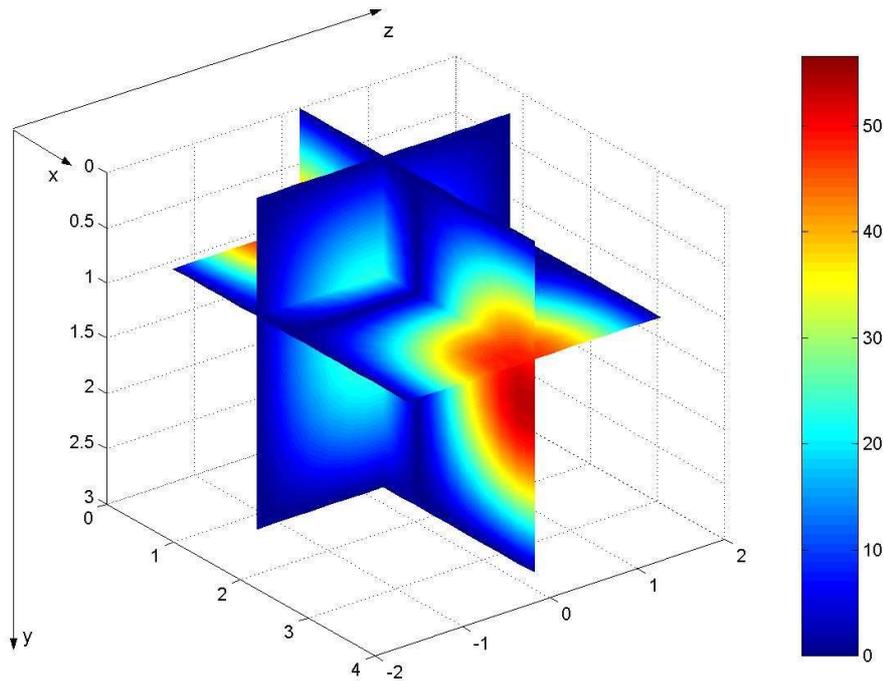


Figure 94 : Cartographie de $|E_x|$ avec maillage de la zone de diffraction seule ($14*14*8$)

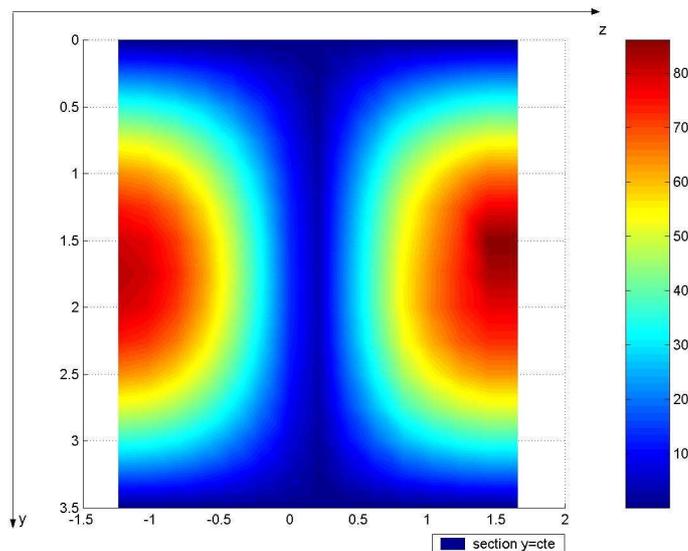


Figure 95 : Cartographie de $|E_z|$ dans une section $y = cte = 5*dy$ (découpage $14*14*8$)

Nous constatons une fois de plus les allures correctes des quelques cartographies ci-dessus, sans défaut apparent dans la zone de raccordement. Toutefois les amplitudes ne correspondent pas à celles obtenues **à la même fréquence** avec un découpage de la zone de diffraction $14*14*10$; nous reviendrons sur ce point un peu plus loin. Regardons les résultats obtenus en **changeant le découpage**, en conservant la position de la zone de séparation ainsi que la fréquence de la première simulation

Nous effectuons donc une simulation avec $L_z = 2.07$ et $L'_z = 0.83$ m, à une fréquence de 84.65 MHz, **mais un découpage $14*14*12$** au lieu de $14*14*10$ qui avait été effectué alors. Les résultats sont donnés ci-dessous :

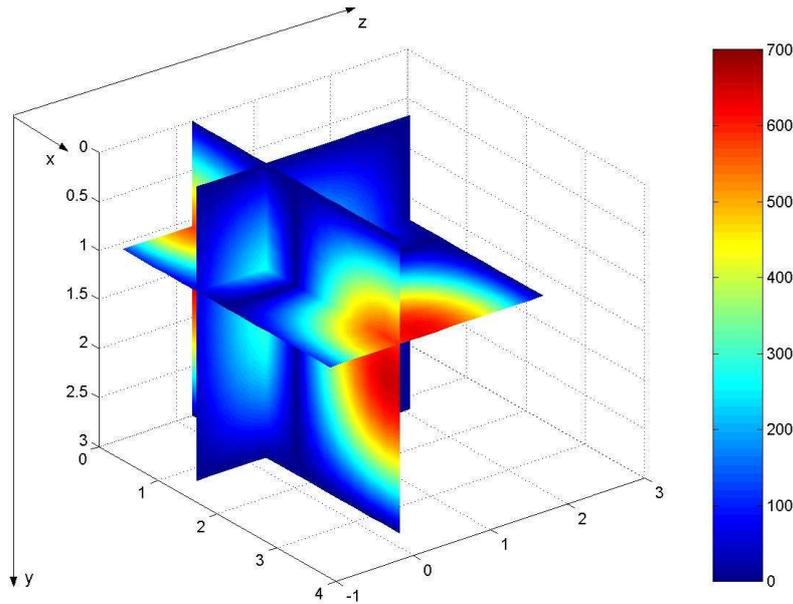


Figure 96 : Cartographie de $|E_x|$ avec maillage de la zone de diffraction seule ($14*14*12$)

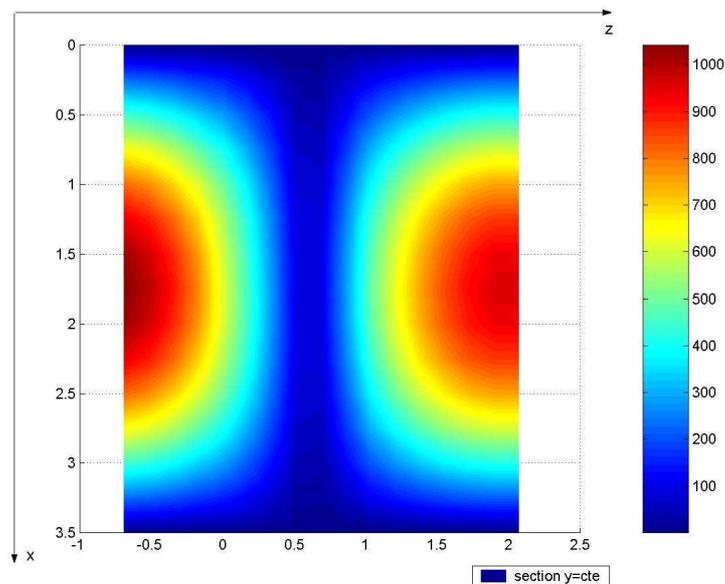


Figure 97 : Cartographie de $|E_z|$ dans une section $y = cte = 5*dy$ (découpage $14*14*12$)

Nous constatons dans les cas présentés (et nous pourrions multiplier les exemples) les **allures** des cartographies sont quasiment identiques et correspondent à chaque fois à celles attendues en théorie, mais... les valeurs peuvent varier fortement suivant **la position de la zone de séparation** ou **le découpage**. (nous rappelons que ces chiffres n'ont que des valeurs **relatives**, aucune recherche de **calibration** n'a été effectuée pour le moment).

En fait la **reproductibilité exacte** suivant les divers paramètres (position de la zone de raccordement, maillage etc...) ne doit pas être recherchée à **une fréquence précise**, mais dans une étude **globale, sur une bande de fréquence**. Nous présentons ci-dessous des courbes donnant **l'amplitude maximale de $|E_z|$ dans une même section $x = cte = 1.25$ m**, en fonction de la fréquence. N'importe quelle autre section, ainsi que n'importe quelle autre grandeur aurait fait l'affaire, puisque les cartographies sont « quasiment identiques » et donc définies à une constante de proportionnalité près. Les simulations sont effectuées avec les paramètres suivants :

- Impédance de surface définie avec un coefficient 10^3 par rapport à celle du cuivre
- Coefficient de fréquence complexe = 10^{-4} donc $f' = f \cdot (1 + j \cdot 10^{-4})$
- Dimensions de la cavité $L_X = 3.5$ m ; $L_Y = 3.0$ m ; $L_Z + L'_Z = 2.9$ m

La modélisation des pertes a été vue en détails au **paragraphe II.3.** du **Chapitre IV.**

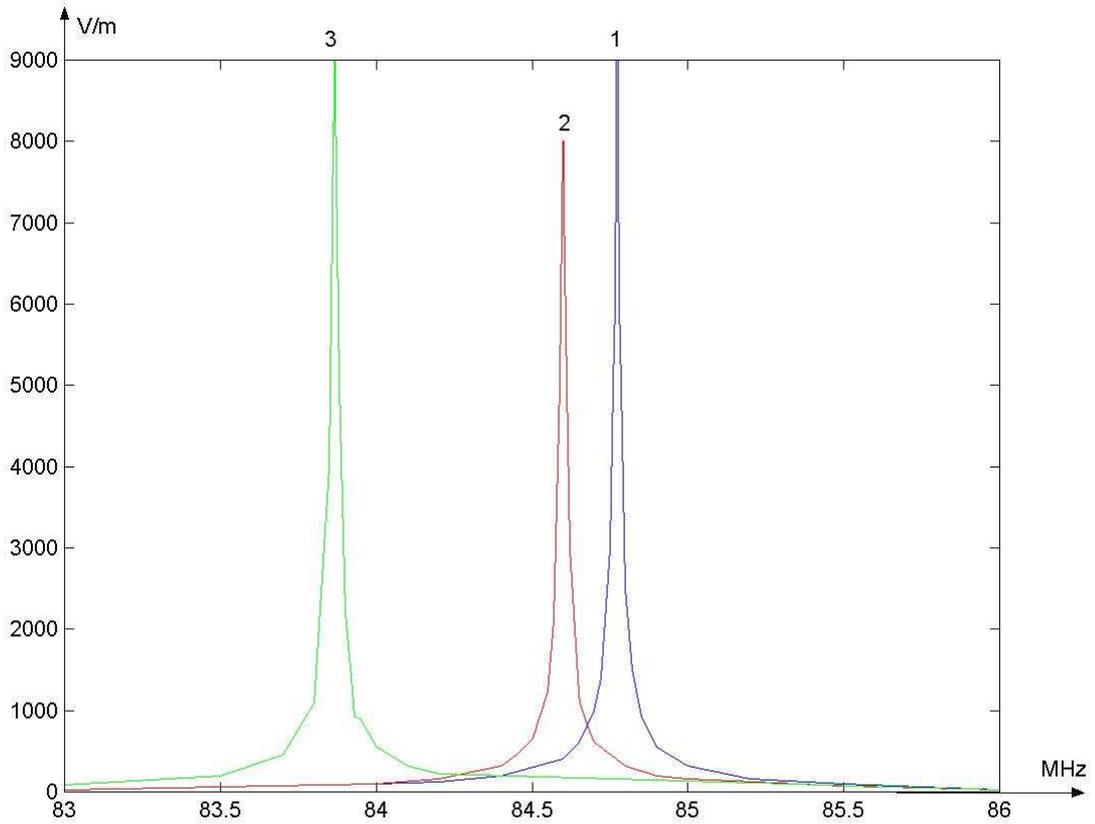


Figure 98 : Variation de $|E_{z_{max}}|$ dans la section $x = 1.25$ m en fonction de la fréquence avec différents maillages (voir tableau ci-dessous)

	L_Z	L'_Z	Découpage
Courbe 1	2.07 m	0.83 m	14*14*10
Courbe 2	2.07 m	0.83 m	14*14*12
Courbe 3	1.656 m	1.244 m	14*14*8

Les valeurs maximales sur la **Figure 98** correspondent respectivement aux fréquences 83.869 MHz, 84.601 MHz et 84.772 MHz soit une erreur relative maximale d'environ 1 %

En présentant une échelle de fréquence plus étendue permettant de mieux appréhender le pourcentage d'erreur calculé ci-dessus :

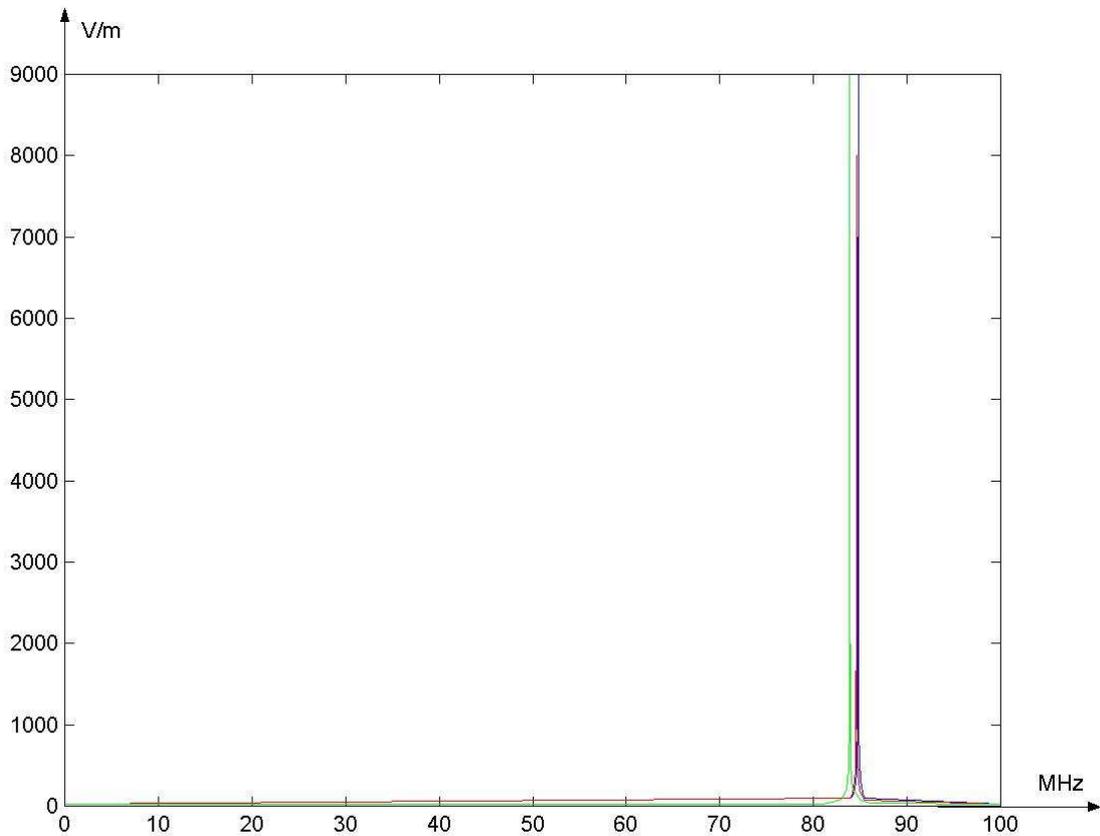


Figure 99 : Variation de $|E_{z_{max}}|$ dans la section $x = 1.25$ m, avec une échelle de fréquence élargie

Nous constatons que la **Figure 99** permet de conclure à la **quasi-reproductibilité** des simulations avec des maillages différents. La courbe a été **extrapolée** entre 0 et 70 MHz sans tenir compte des modes présents (il devrait apparaître 2 « pics de résonance » correspondant aux modes TE). Ce graphique permet par ailleurs de se rendre compte de l'« étroitesse » des courbes de résonance conformément à ce que la théorie le laisser prévoir. Dans le cas **parfait** (sans pertes) ces courbes deviennent des « pics de Dirac ». De la même manière, nous obtenons le même type de résultats dans divers cas (non présentés ici) de **déplacement de la zone de raccordement ou/et changement de découpage**, et nous comprenons maintenant que les simulations présentant des **ressemblances au niveau des allures**, avec des différences d'amplitudes nettes se situent en fait dans une zone proche de la résonance pour l'une des courbes et nous pouvons considérer que le code donne satisfaction sur ce point aussi.

Nous allons examiner l'effet d'une **augmentation des pertes** (en jouant sur l'un des facteurs prévus pour simuler ces pertes, par exemple le coefficient de fréquence complexe, défini plus haut). Pour ce faire, nous réalisons un ensemble de simulations avec deux valeurs différentes du coefficient de fréquence complexe :

$L_z = 1.656$ m ; $L'_z = 1.244$ m ; Découpage $14 \times 14 \times 8$; Impédance de surface définie avec un coefficient 10^3 ; coefficient de fréquence : $1 \cdot 10^{-4}$ et $5 \cdot 10^{-4}$ respectivement. Nous notons la valeur maximale de $|E_z|$ dans une section $x = 5 \cdot dx$ (choix arbitraire) en fonction de la fréquence avec deux valeurs du paramètre « coefficient de fréquence complexe ». Nous obtenons les courbes ci-dessous :

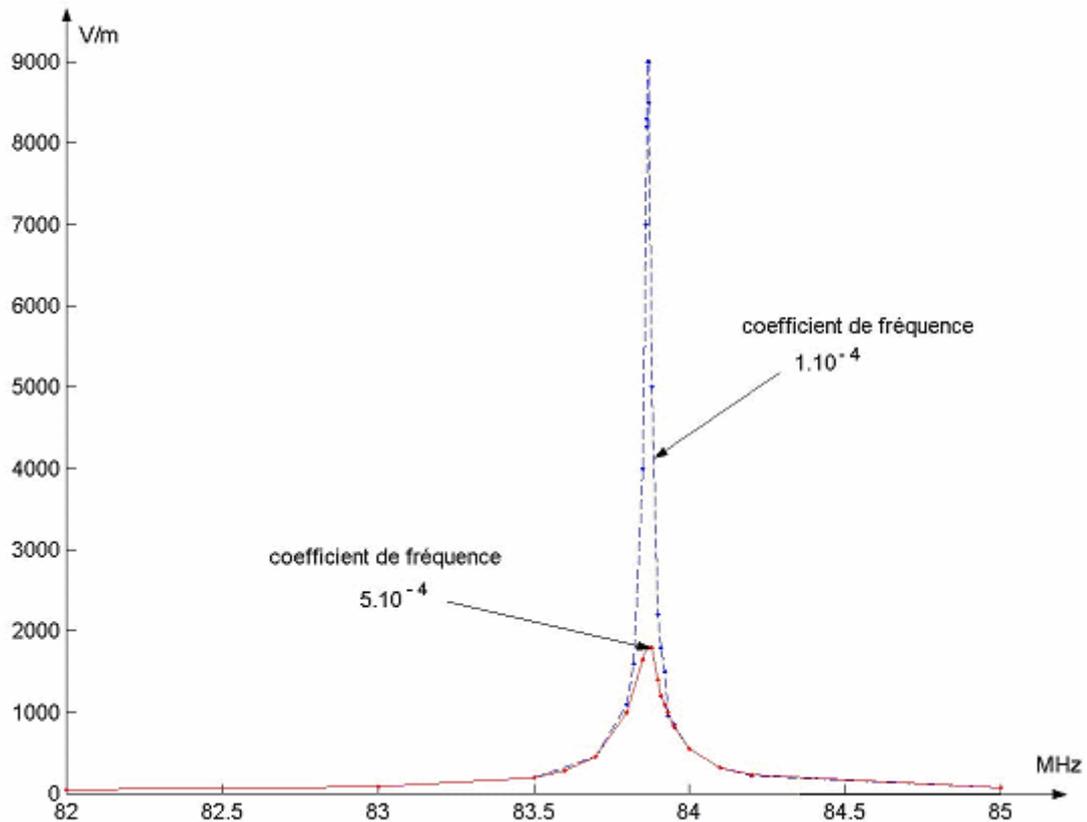


Figure 100 : Variation de $|E_z|$ en fonction de la fréquence pour deux valeurs du coefficient de fréquence complexe

Nous constatons une résonance de moins en moins « aigüe » au fur et à mesure que les pertes augmentent. La grandeur permettant de caractériser la « sélectivité » plus ou moins grande des courbes de réponse (type **Figure 100**) est le **facteur de qualité Q** défini de la même manière que pour des circuits résonants basse fréquence [13] :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{-3dB}} \quad \text{où } f_0 \text{ est la fréquence de résonance et } \Delta f_{-3dB} \text{ la bande passante à } -3dB$$

Lorsque les pertes sont modélisées par le coefficient de fréquence complexe (ce qui correspond à peu de chose près à notre cas ici, les pertes sur les parois étant significativement plus faibles que les pertes volumiques), nous avons aussi la relation :

$$f_{\text{complexe}} = f_{\text{réelle}} \left(1 + \frac{j}{2Q} \right) \quad \text{qui nous montre que ce qu'on a défini comme étant le coefficient de fréquence complexe s'identifie en fait à } \frac{1}{2Q} \text{ [3]}$$

Vérification numérique :

En réalisant des « zooms » sur les courbes nous obtenons :

- Pour le coefficient de fréquence complexe égal à 1.10^{-4} une bande passante $\Delta f_{-3dB} = 17.5 \text{ kHz}$ et une fréquence de résonance $f_0 = 83.87 \text{ MHz}$ ce qui donne une valeur

du **coefficient de fréquence mesuré** $\frac{\Delta f_{-3dB}}{2f_0} = 1.04 \times 10^{-4}$ ce qui est en bon accord avec la valeur « théorique ».

- Pour le coefficient de fréquence complexe égal à $5 \cdot 10^{-4}$ une bande passante

$\Delta f_{-3dB} = 84.0 \text{ kHz}$ et la même fréquence de résonance ce qui donne une valeur du **coefficient de fréquence mesuré** $\frac{\Delta f_{-3dB}}{2f_0} = 5.008 \times 10^{-4}$ ce qui est encore en bon accord avec la valeur « théorique ».

Nous présentons ci-dessous quelques modes d'ordres supérieurs permettant de confirmer le bon fonctionnement du code.

L'objectif est de retrouver le mode TM_{322} dont la fréquence de résonance théorique est égale à 192.8 MHz. Il est déjà difficile **d'isoler un mode** à ce niveau là, à cause de la densité de modes (de guide ou de cavité) par MHz, importante [10] [13]. On y parvient tout de même en plaçant une antenne dipôle au fond de la cavité, au centre de la face $z = L_z$ dirigé suivant l'axe z . La fréquence est prise égale à 193.8 MHz, soit un écart relatif de 0.5 % entre les fréquences théorique et pratique.

La séparation est telle qu'on a $L_z = 1.656 \text{ m}$ et $L'_z = 1.244 \text{ m}$ (avec les mêmes valeurs de L_x et L_y)

Le découpage est : $20 * 20 * 14$

La résolution effectuée avec MUMPS sur le Cluster avec 4 processeurs dure moins d' 1 minute.

Le travail le plus long a été de retrouver « visuellement » ce mode, ce qui ne sera pas nécessaire dans l'utilisation pratique, puisque le but est d'effectuer justement un **mélange de modes**.

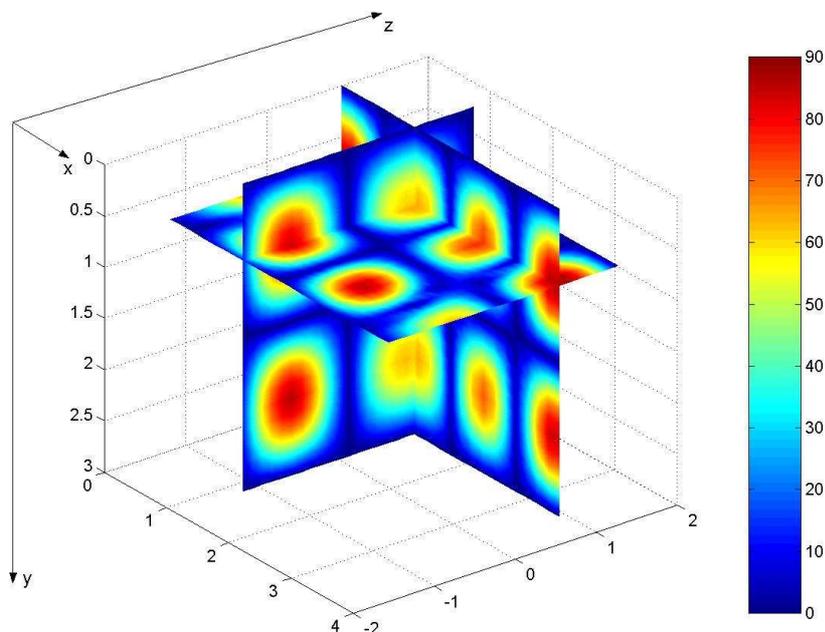


Figure 101: Cartographies de $|E_x|$ dans lesquelles on reconnaît les modes $\text{TM}/\text{TE}_{322}$

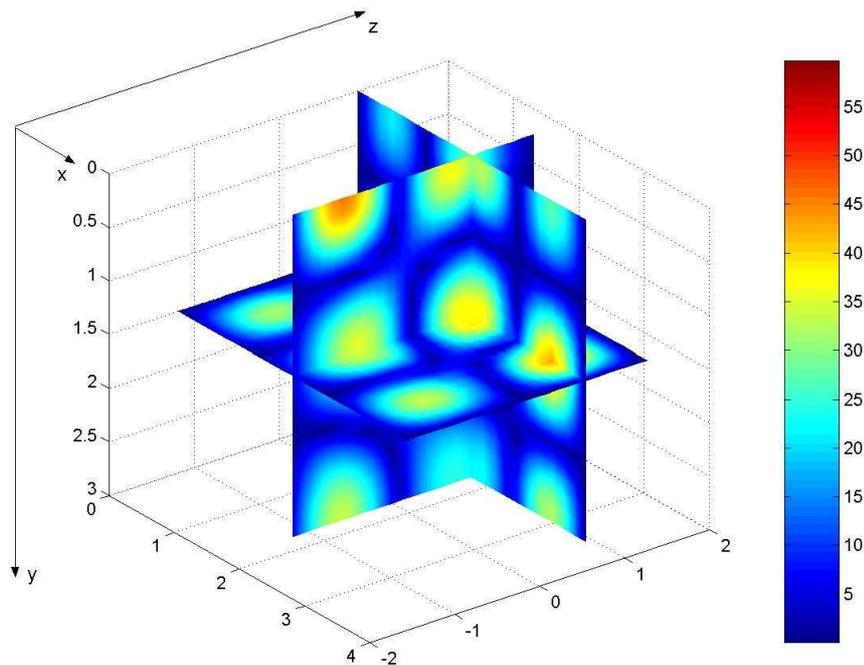


Figure 102 : Cartographies de $|E_y|$ dans lesquelles on reconnaît encore les modes TM/TE₃₂₂

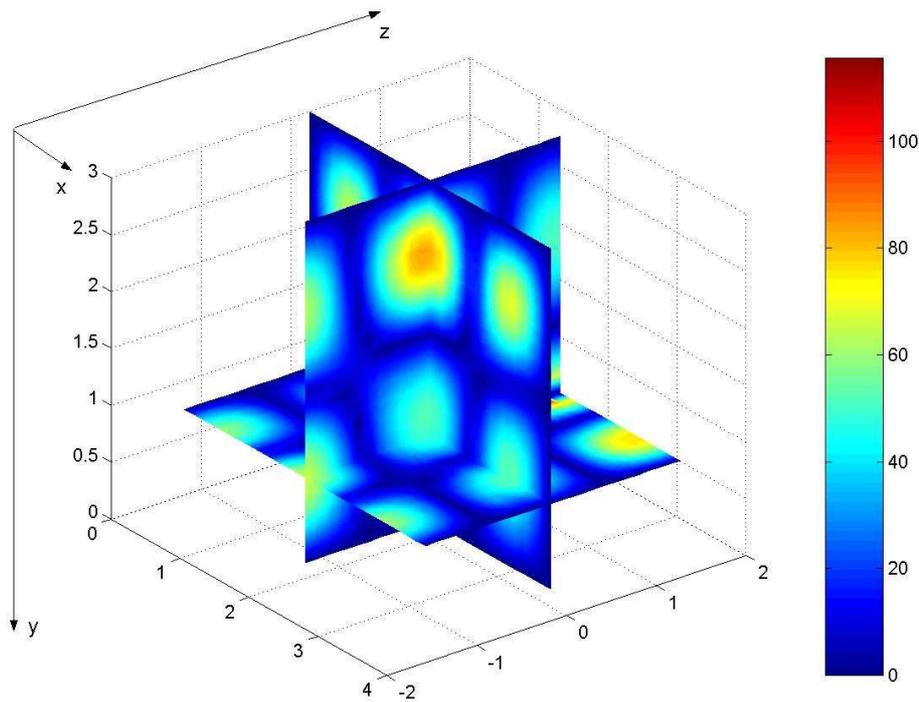


Figure 103: Cartographies de $|E_z|$ dans lesquelles on reconnaît encore le mode TM₃₂₂

Les cartographies ci-dessus font apparaître les 2 modes prépondérants TE/TM correspondant à la même fréquence de résonance. Le poids relatif du mode TM₃₂₂ sur les 29 premiers modes TM (donc en prenant en compte des modes évanescents) est de 54 %, les poids les plus forts suivants valant respectivement 16.6 % et 14.4 %. C'est pour cela que les cartographies des **Figures 101 à 103** présentent quelques « déformations » par rapport aux modes **purs** TM/TE₃₂₂. Nous constatons encore que le raccordement modal s'effectue correctement sur les figures ci-dessus.

Une étape nécessaire à la vérification du code est la simulation de modes TE, étant donné la procédure différente et plus complexe, en ce qui concerne les calculs des poids des modes TE (voir le **paragraphe II.**) au cours du raccordement modal. Dans ce but, nous réalisons la simulation du mode TE_{011} dont la fréquence de résonance théorique est égale à 71.9 MHz et nécessite un découpage relativement modeste du volume. Nous choisissons des longueurs des zones de diffraction et de mesure respectivement égales à $L_z=2.07$ m et $L'_z = 0.83$ m, avec un découpage $12*12*10$ que nous résolvons sous MATLAB avec un PC. Le coefficient de fréquence est égal à 10^{-3} . Nous plaçons une antenne dipôle au centre de la face $x=0$, dans la direction de l'axe x

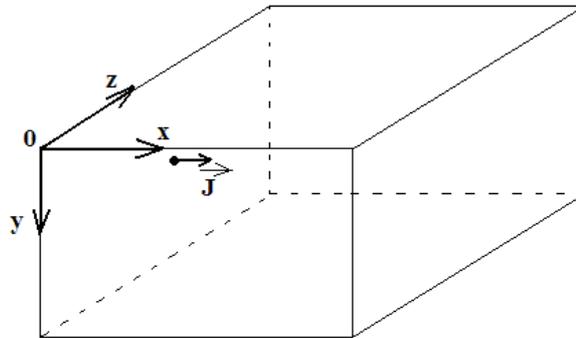


Figure 104 : Position de l'antenne pour la simulation du mode TE_{011}

La fréquence de la simulation est prise égale à : 72.3 MHz, soit un écart inférieur à 0.6 % par rapport à la fréquence analytique. En regardant les expressions en **Annexe 5** nous constatons que seule doit exister la composante E_x en théorie. Nous constatons en effet des amplitudes de E_x plus de 100 fois supérieures à celles de E_y et E_z . Avec un découpage plus fin (nécessitant une machine plus performante), les rapports entre grandeurs non nulles et celles « théoriquement nulles » dépassent 1000.

Seules les cartographies de $|E_x|$ sont présentées ci-dessous :

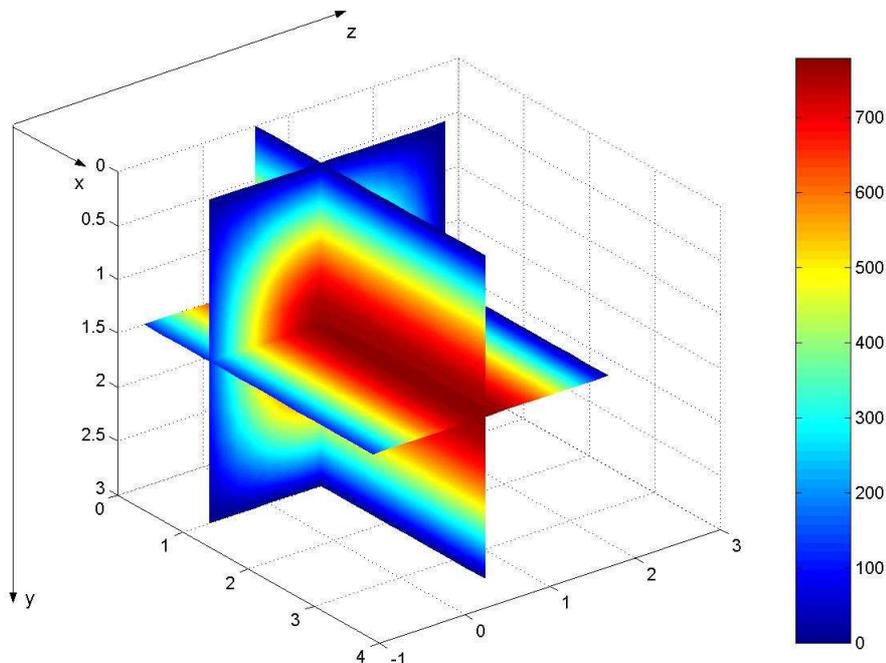


Figure 105 : Cartographies de $|E_x|$ sur lesquelles nous reconnaissons le mode TE_{011}

Une autre simulation est réalisée, avec le même découpage et la même position de la zone de séparation, dans le but de retrouver le mode TE_{101} , dont la fréquence analytique est 67.13 MHz.

L'antenne est positionnée au centre de la face $y=0$, suivant l'axe y .

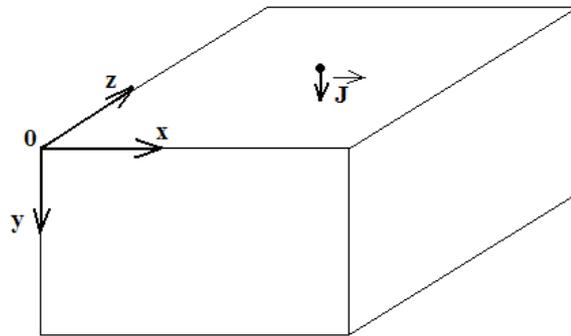


Figure 106 : Position de l'antenne pour la simulation du mode TE_{101}

L'**Annexe 5** permet de prévoir que seule la composante E_Y devrait exister. Nous retrouvons là encore des résultats cohérents en simulation, avec des amplitudes au moins 100 fois plus faibles pour les composantes E_X et E_Z par rapport à celles de E_Y et dépassant 1000 avec des découpages plus fins. La simulation est effectuée à une fréquence de 67.4 MHz soit un écart de 0.4 % entre fréquences théorique et pratique. Nous ne présentons là encore que les cartographies de $|E_Y|$ ci-dessous :

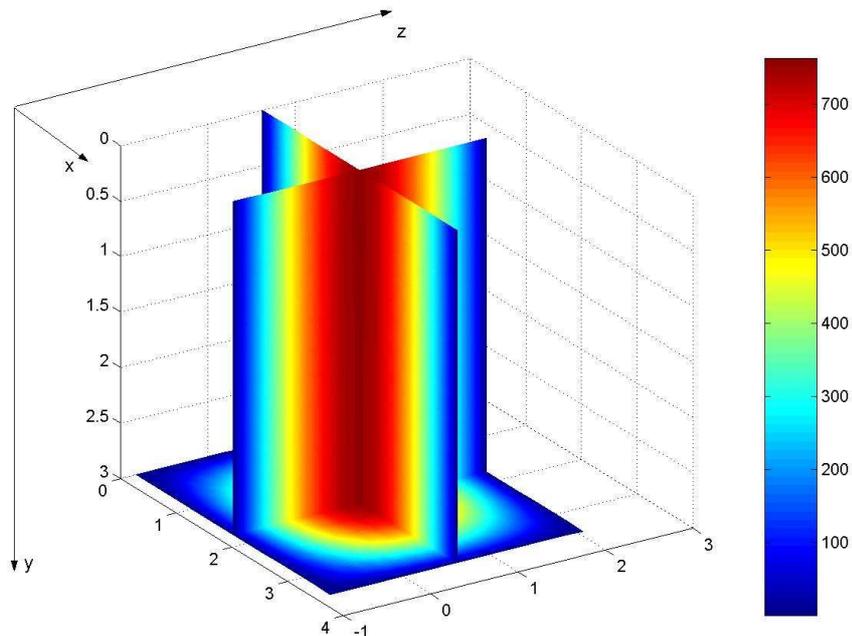


Figure 107 : Cartographies de $|E_Y|$ sur lesquelles on reconnaît le mode TE_{101}

Une simulation à une fréquence plus élevée, mais considérée comme **relativement** basse est effectuée, sans recherche d'un mode « isolé ». Nous nous rapprochons de l'ambiance CRBM. Nous choisissons arbitrairement une valeur de 350 MHz. Les valeurs sont : $L_Z=1.19$ m et $L'_Z=1.71$ m, avec un découpage $34*34*14$

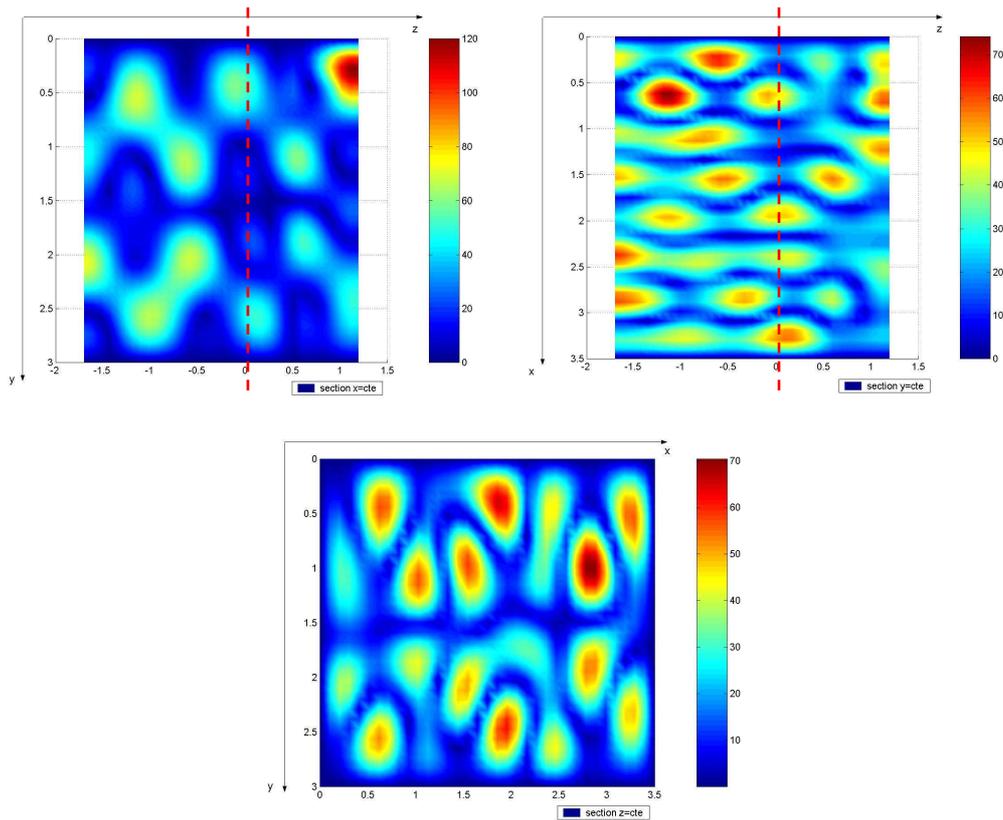


Figure 108 : Cartographies de $|E_z|$ dans 3 plans de coupe, à une fréquence de 350 MHz, avec développement modal (zone de raccordement en pointillés rouges)

Une dernière simulation **sans brasseur** est réalisée, à la fréquence de 550 MHz correspondant plus à l'utilisation en CRBM. Les valeurs des zones de mesure et de diffraction, ainsi que celles du découpage sont conservées, correspondant au même découpage que lors de la simulation à la même fréquence, **sans** développement modal.

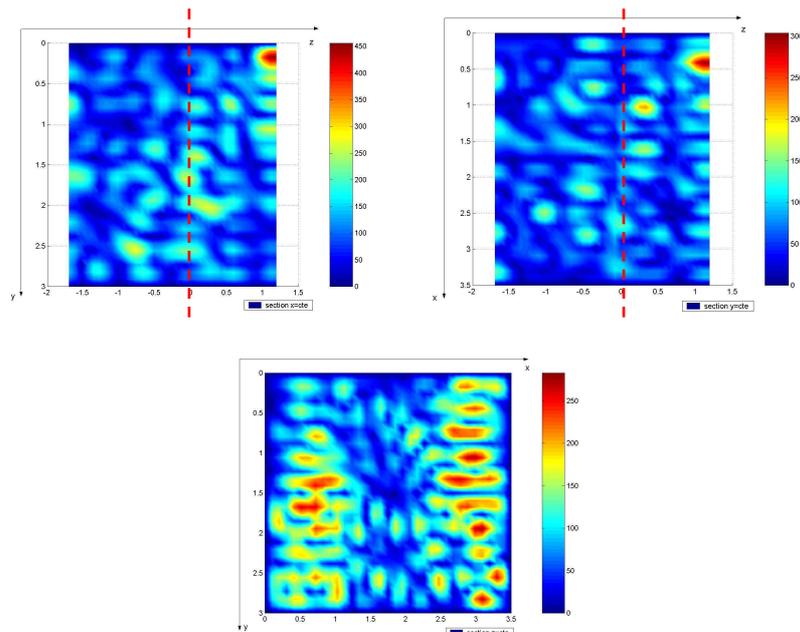


Figure 109 : Cartographies de $|E_z|$ dans 3 plans de coupe, à une fréquence de 550 MHz, avec développement modal et un découpage 34*34*14

Nous constatons comme nous nous y attendions que les « **oscillations spatiales** » du champ sont de dimensions de plus en plus petites au fur et à mesure que la fréquence augmente. Sans brasseur, nous voyons que la distribution du champ est déjà très « accidentée ». Nous concevons sans peine que l'introduction d'un brasseur modifiant les conditions aux limites, à ces mêmes fréquences ou à des fréquences supérieures provoque avec une rotation de ce brasseur, un champ statistiquement très variable dans l'espace. On remarque de plus sur la **Figure 108** et la **Figure 109** que le raccordement modal en $z=0$ s'effectue très correctement, sans discontinuités significatives.

Concernant les temps de calcul, la dernière simulation à 550 MHz a été effectuée avec une zone de diffraction (qui ne contient pas d'objet diffractant pour le moment) $L_z=1.19$ m. La résolution a duré **25 minutes**. En déplaçant la zone de séparation à $L_z=1.365$ m (avec $L'_z=1.535$ m) à la même fréquence et en conservant un « découpage équivalent », soit $34*34*16$, nous arrivons à des durées de **50 minutes**.

Nous présentons les cartographies obtenues, et nous ne nous en étonnerons pas de la « non reproductibilité totale des résultats » comme nous l'avons constaté sur la **Figure 98** et la **Figure 99**

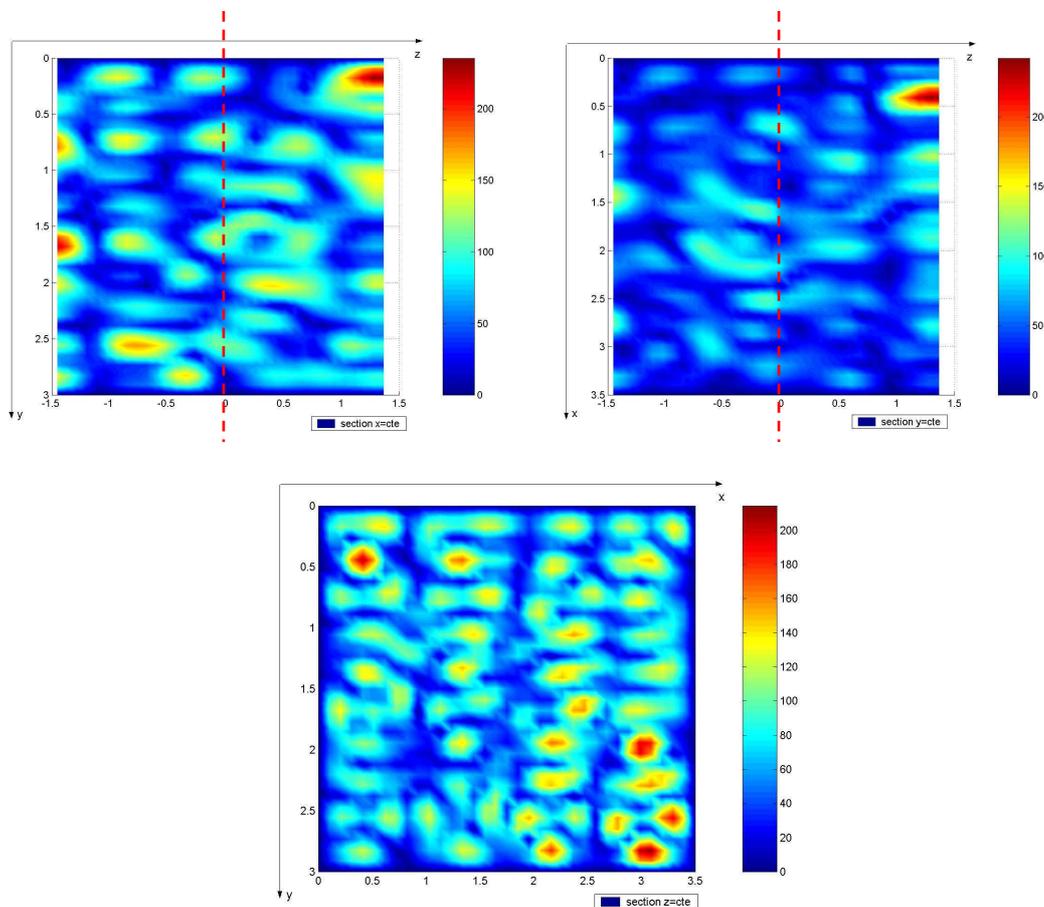


Figure 110 : Cartographies de $|E_z|$ dans 3 plans de coupe, à une fréquence de 550 MHz, avec développement modal et un découpage $34*34*16$

Le passage du **simple au double** pour le temps de calcul, pour une variation de l'emplacement de la zone de séparation nous permet d'appréhender l'intérêt de la méthode FDFD avec développement modal. L'utilisateur du code devra donc trouver un **compromis** entre zone de séparation suffisamment **éloignée** du brasseur et zone de séparation permettant un découpage avec **le moins** de cellules suivant z . Les difficultés auxquelles nous nous heurtons lorsque nous montons en fréquence sont les suivantes :

- Un maillage plus serré à cause des oscillations spatiales plus petites, contrainte à laquelle nous nous attendions et que nous retrouvons exactement de la même manière pour la méthode FDFD classique, sans développement modal
- Une densité de modes de plus en plus élevée augmentant le nombre d'équations produisant les lignes de la matrice les **plus denses** (au niveau de la zone de séparation)

Le dernier point évoqué ci-dessus semble avoir une importance que nous avons sous-estimé dans un premier temps. Nous serons amené à en reparler dans les **perspectives d'amélioration de la méthode**. Pour illustrer le rôle de la fréquence sur le temps de calcul : avec deux fréquences respectivement de 350 MHz et 550 MHz, **tout le reste (position de l'antenne, découpage, zone de séparation...)** étant égal (le maillage correspondant respectivement à environ $\frac{\lambda}{10}$ et $\frac{\lambda}{6}$) nous obtenons les temps de calcul suivants :

- pour 350 MHz, un nombre de modes de guide égal à 41 modes TM + 56 modes TE, nécessitant un temps de résolution du système de **14 minutes**
- pour 550 MHz, un nombre de modes de guide égal à 111 modes TM + 135 modes TE, nécessitant un temps de résolution du système de **22 minutes**

IV. Cavité parallélépipédique avec brasseur

IV.1. Modélisation du brasseur

Le brasseur modélisé est une surface rectangulaire métallique (considérée comme parfaitement conductrice dans le code réalisé) infiniment mince et en rotation autour d'un axe vertical. Nous tenons compte de la présence du brasseur, dans le programme, à travers l'appel d'un sous-programme totalement autonome, réalisant **l'écrasement** des équations écrites sans brasseur. L'amélioration du code par modélisation d'un brasseur **plus réaliste** ne nécessiterait que la modification de ce sous-programme. Bien entendu, cette démarche peut être envisagée dans les **perspectives d'amélioration de la méthode**.

Comme cela est expliqué dans la **Thèse de Cécile FIACHETTI [1]**, dans une technique type « différences finies », le brasseur doit **épouser le maillage** et donc subir une déformation au cours des rotations, déformation d'autant moins importante que le maillage est « serré ».

Un programme auxiliaire, en **Fortran 95** permet de visualiser en 2D la **projection du brasseur sur un plan $y=Cte$** avec le quadrillage de la zone de diffraction, en fonction de l'angle de rotation, en degrés. Apparaissent sur ce schéma la projection des brasseurs « analytique » et « numérique ».

Cette étape est pratique pour se rendre compte de l'**encombrement** du brasseur et pour visualiser l'écart entre le brasseur « analytique » et son approximation « en marche d'escalier », mais surtout se retrouve être une étape **indispensable** pour une étude **statistique** dans laquelle deux valeurs différentes de l'angle peuvent engendrer le même brasseur numérique, et donc **fausser** cette étude.

Cette étape de visualisation de tous les angles possibles donnant des « brasseurs équivalents numériques » différents est donc effectuée **systématiquement** avant toute étude statistique (voir importance de ce point en **Annexe 10**).

Par exemple un découpage de la **zone de diffraction** en $n_x=34$ et $n_z=12$ donne un même brasseur numérisé, pour les deux angles de 15 et 20 degrés. Ces deux angles devront donc être considérés comme étant **trop proches** par rapport à la **résolution** induite par ce découpage.

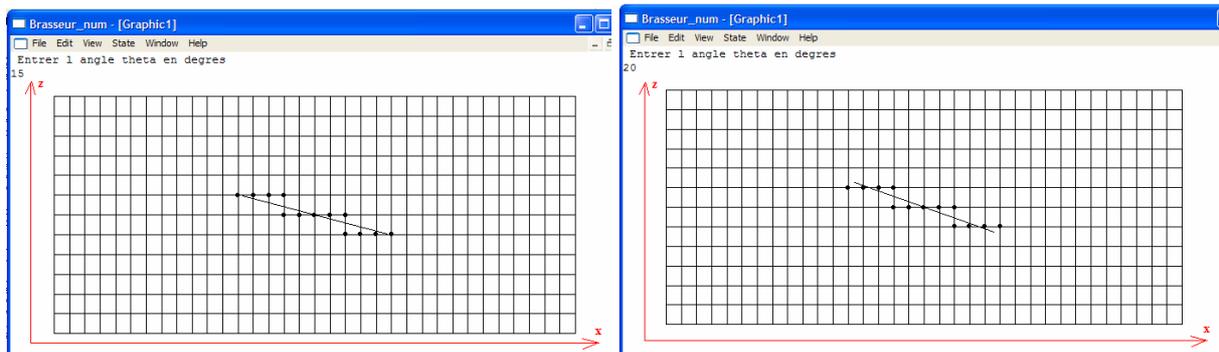


Figure 111 : Projection des brasseurs sur un plan $y=Cte$ pour deux valeurs d'angle de 15 et 20 degrés

L'opération de discrétisation du brasseur dans le cas de cette géométrie simple est assez aisée : un « balayage » des points suivant x , à l'intérieur duquel on effectue un « balayage » suivant z , et où l'algorithme ne retient comme « candidats » à l'appartenance au brasseur numérisé que les points distants du brasseur analytique de moins d'une « longueur de cellule ».

La projection du brasseur sur un plan $y=Cte$ (appelé brasseur 2D) est une ligne croissante dans le plan (x,z) , ce qui permet de ne réaliser le balayage suivant z , qu'à partir d'une valeur i_min , cette valeur de i_min ne pouvant qu'**augmenter** au cours du balayage suivant x .

Algorithme de numérisation du brasseur :

```

* Etude ramenée à 1 seul cadran ( x et z positifs)
* Détermination de l'équation de droite du brasseur 2D
* k_min=1, i_min=1
  de k=k_min à k_max (indices en x)
    de i=i_min à i_max (indices en z)
      Si (distance point/brasseur) < distance_max (=max(dx,dz))
        i_min=i
        Point déclaré comme appartenant au brasseur 2D
        Calcul distance2=distance(brasseur/point à droite)
        Calcul distance3=distance(brasseur/point au dessus)
        Si distance2<distance3
          Point à droite déclaré comme appartenant au brasseur 2D
        Sinon
          Point au dessus déclaré comme appartenant au brasseur 2D
          i_min=i
        Fin Si
      Fin Si
    Fin Boucle
  Fin Boucle

```

* Suppression des extrémités du brasseur : pour un angle inférieur à 45 degrés, l'extrémité doit être selon l'axe x et pour un angle supérieur à 45 degrés, l'extrémité doit être selon l'axe z

* Extension du brasseur à 2 cadrans par symétrie centrale, de centre égal au point d'attache du brasseur

* Définition du brasseur 3D par translation du brasseur 2D selon l'axe y sur la largeur adéquate

Le **brasseur 3D** est tout simplement déduit du brasseur 2D par translation suivant l'axe y , sur la largeur communiquée par l'utilisateur et convertie en un nombre entier de longueurs élémentaires dy .

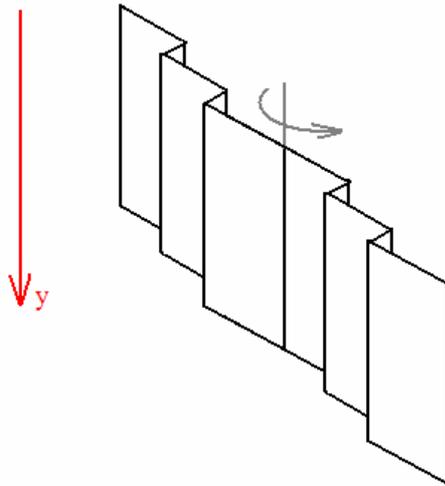


Figure 112 : Brasseur 3D numérisé pour le code FDFD

IV.2. Modifications des équations dues à la présence du brasseur

Nous rappelons que dans les régions sans brasseur, **strictement dans la zone de diffraction** (par opposition à la zone de séparation), les inconnues en chaque nœud du maillage sont E_x , E_y et E_z . Au niveau des points appartenant au **brasseur 3D** les inconnues seront remplacées par (**Figure 113**) :

- La composante normale sur la 1^{ère} face du brasseur
- La composante normale sur la 2^{ème} face du brasseur
- Une inconnue « fictive » nulle représentant à la fois la composante tangentielle sur les 2 faces (le brasseur est alors considéré comme parfaitement conducteur)

Ces nouvelles inconnues interviendront sur les parties du brasseur considérées comme **admettant localement une normale suivant x ou z**, et ne présentant pas une « arête » sur le brasseur 2D.

Pour les points du brasseur correspondant à une **arête** sur le brasseur 2D (et donc aussi sur le brasseur 3D), on considère que le champ électrique est à la fois tangentiel à la surface du brasseur pour E_x et E_z et on annule donc ces quantités. Il en est de même pour les **extrémités**, où on considère que les 3 composantes sont tangentielles malgré la modélisation d'un brasseur infiniment mince, mais où dans la pratique il y a une certaine épaisseur.

Sur **tout le brasseur** on écrit la nullité de E_y étant donné la définition du brasseur comme étant une plaque rectangulaire verticale.

Les divers cas de définitions des nouvelles inconnues apparaissent sur la **Figure 113** ci-dessous :

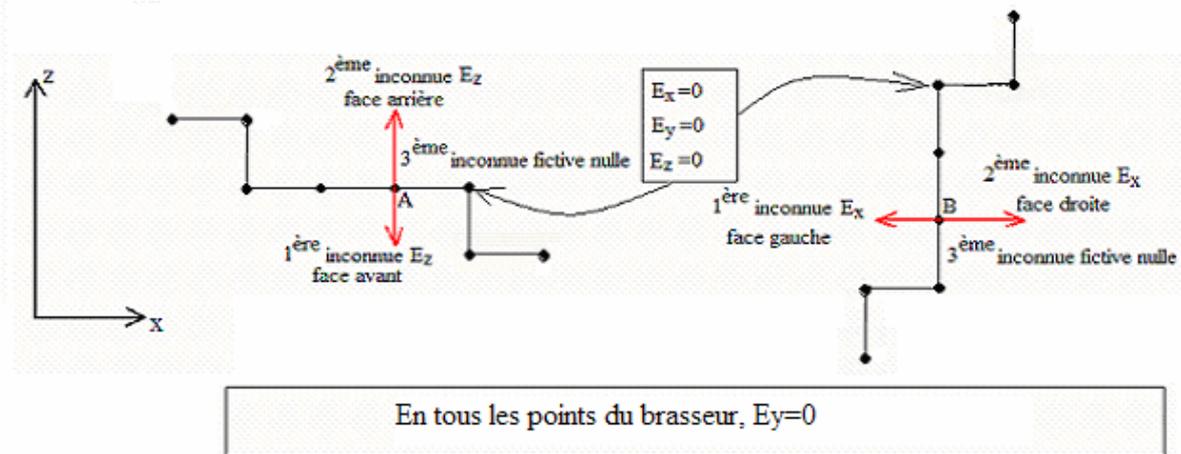


Figure 113 : Diverses inconnues au niveau du brasseur selon la « nature locale » de la surface

Les divers cas envisagés pour les points du brasseur sont :

- Points sur une surface localement parallèle à x
- Points sur une surface localement parallèle à z
- Points situés sur une arête
- Points situés sur une extrémité

Au niveau de la **réécriture** des équations, pour une face localement parallèle à l'axe des x, on applique les mêmes conditions aux limites sur la 1^{ère} face que pour la **paroi** « $z = L_z$ », avec des dérivations à gauche. Pour la 2^{ème} face, les équations aux limites sont celles que nous avons écrites pour la **paroi** « $z=0$ », dans le code **sans développement modal**.

De la même manière pour une face localement parallèle à l'axe des z, on écrit les mêmes conditions aux limites respectivement sur les 1^{ère} et 2^{ème} face que pour les **parois** « $x=L_x$ » et « $x=0$ ». Ces réécritures ne concernent que les composantes normales, les seules à ne pas être considérées comme nulles a priori. Pour les composantes tangentielles, seule une annulation de ces dernières est nécessaire. Evidemment, cette nouvelle définition des inconnues sur le brasseur oblige à réécrire aussi les équations au niveau des points **voisins** du brasseur, à cause de leur intervention dans les équations discrétisées de Maxwell. De nombreux cas différents en fonction de leurs **positions relatives** par rapport aux divers points du brasseur ont dû être traités.

IV.3. Applications à la CRBM

L'utilisation en CRBM se fait généralement à des fréquences telles que les diverses longueurs de la cavité sont supérieures à 5 fois la longueur d'onde, dans le vide.

Dans notre cas, la plus petite dimension est $L_z=2.90$ m, ce qui donne une longueur d'onde maximale de 58 cm, correspondant à une fréquence minimale de 517 MHz environ.

Nous nous proposons de réaliser des simulations à une fréquence 550 MHz.

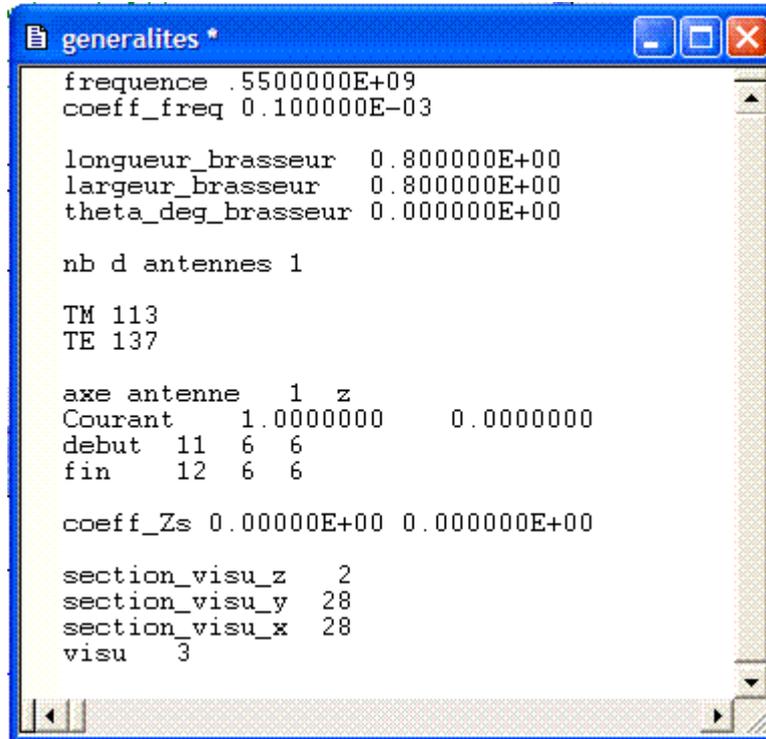
Dimensions de la cavité $L_x * L_y * L_z = 3.5 \text{ m} * 3.0 \text{ m} * 2.9 \text{ m}$

Séparation en 2 zones : zone de mesure : $L'_z = 0.9 \text{ m}$; zone diffractante : $L_z = 2.0 \text{ m}$

Découpage 34 * 30 * 12

Brasseur : rectangle vertical de 0.8 m sur 0.8 m (ici de forme carrée)

Paramètres dans le fichier lu par le programme :



```
generalites *
frequence .5500000E+09
coeff_freq 0.100000E-03

longueur_brasseur 0.800000E+00
largeur_brasseur 0.800000E+00
theta_deg_brasseur 0.000000E+00

nb d antennes 1

TM 113
TE 137

axe antenne 1 z
Courant 1.0000000 0.0000000
debut 11 6 6
fin 12 6 6

coeff_Zs 0.000000E+00 0.000000E+00

section_visu_z 2
section_visu_y 28
section_visu_x 28
visu 3
```

Figure 114 : Fichier contenant les divers paramètres d'entrée ou de sortie, respectivement lus ou écrits par le programme

Les appellations au début de chaque ligne sont suffisamment explicites pour les six premières lignes.

Les chiffres 113 et 137 représentent les nombres de modes TM et TE. Ce sont des grandeurs **écrites** par le programme et non **lues**, le nombre total de modes étant calculé, en prenant par exemple 2 modes évanescents supplémentaires (réglé par l'utilisateur dans le code source). Les nombres sont **réactualisés** par le programme et inscrits dans le fichier **à la fin de l'exécution du programme**. En clair, ces nombres doivent être vus par l'utilisateur comme des « **sorties** » plutôt que des « **entrées** ».

L'antenne excitatrice est dirigée selon l'axe z et le courant de cette antenne vaut $(1+j.0)$ A.

Les extrémités de l'antenne sont respectivement $(i=11, j=6, k=6)$ et $(i=12, j=6, k=6)$, avec i, j, k représentant le nombre d'arêtes de cellules respectivement suivant z, y, x.

Le coefficient de Zs est presque indifférent jusqu'à une valeur d'environ 10^5 et est pris nul, signifiant que les pertes sont volumiques et modélisées par le coefficient de fréquence complexe, égal à $0.1 \cdot 10^{-3}$ ici.

Les diverses sections visualisées sont $i=2$, suivant z, $j=28$ suivant y, $k=28$ suivant x

visu=3 signifie que la grandeur visualisée est E_z (on aurait mis visu=1 pour visualiser E_x ou visu=2 pour visualiser E_y)

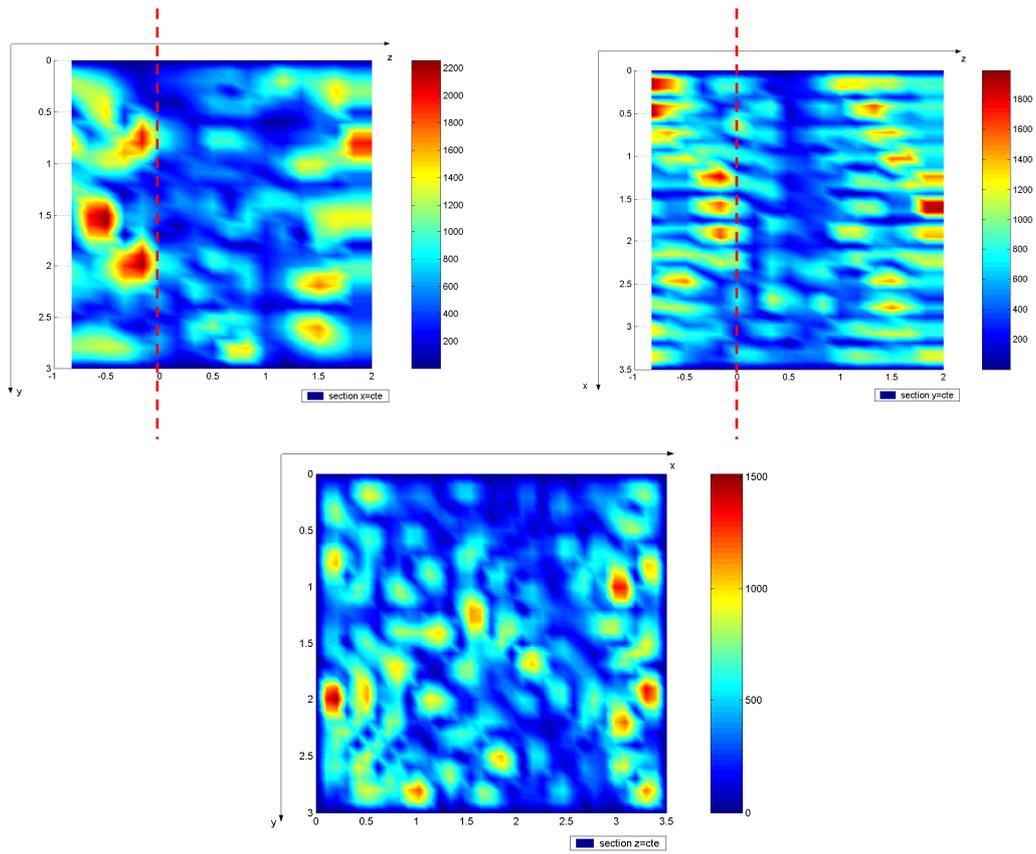


Figure 115 : Cartographies de $|E_z|$ avec un angle du brasseur égal à 0°

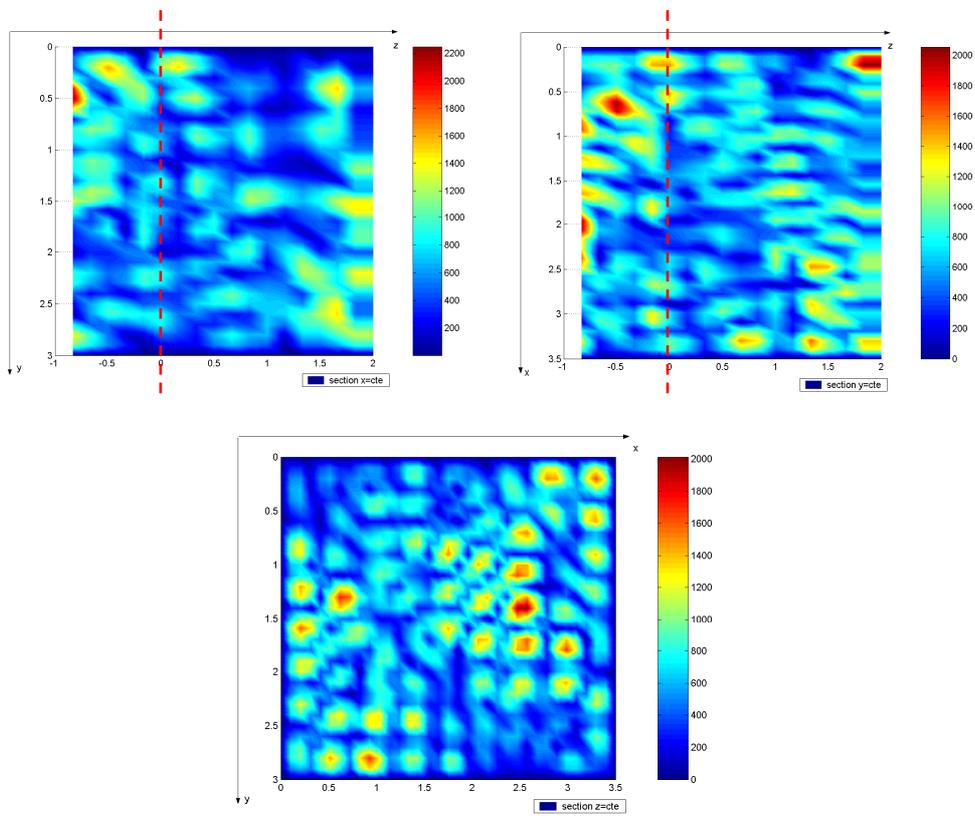


Figure 116 : Cartographies de $|E_z|$ avec un angle du brasseur égal à 30°

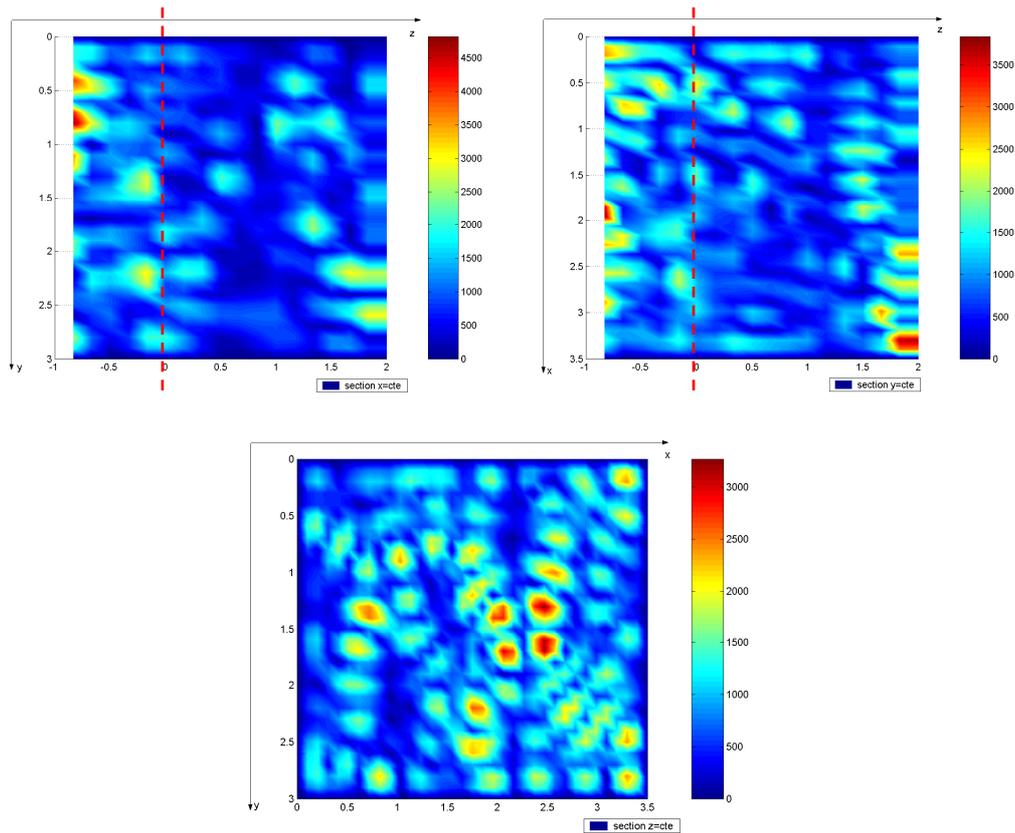


Figure 117 : Cartographies de $|E_z|$ avec un angle du brasseur égal à 90°

Nous ne pouvons pas commenter **pour le moment** la validité des résultats obtenus sur les **Figures 115 à 117**, cette démarche ne pouvant être que de nature **statistique** (étude effectuée au **Chapitre VI**). Toutefois, nous pouvons constater des changements importants dans la répartition spatiale du champ, en fonction de la position du brasseur. Les variations des **échelles** des valeurs sur les figures n'interviennent que sur des **zones relativement restreintes**, et on peut dire que les valeurs moyennes des champs sont du même **ordre de grandeur** sur les diverses cartographies.

V. Conclusion du chapitre V

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode hybride utilisant une programmation classique FDFD couplée à un développement modal, dans le but de réduire les ressources informatiques nécessaires à l'établissement du champ électromagnétique dans une enceinte parallélépipédique avec ou sans brasseur.

Pour mener à bien ce projet, nous avons vu en détails le rôle des chapitres précédents, et notamment ceux concernant les **éléments propres** de l'équation d'Helmholtz permettant l'obtention des vecteurs de la base sur laquelle nous cherchons à développer toutes les grandeurs dans la zone dite « de mesure ».

Les poids des divers modes ont pu être calculés à partir des **produits scalaires** (**équations (5-4)'**) entre cartographies **longitudinales**, dans une section $z=cste$. L'importance du fait que toutes les composantes de champ pouvaient être obtenues à partir des seules composantes **longitudinales** a été largement mise en évidence. Nous avons aussi utilisé l'**équation (5-5)** qui permet d'obtenir le champ **magnétique** à partir de la connaissance du champ **électrique**. Cette équation est aussi à la base du choix effectué au départ de ne garder comme inconnues que les grandeurs correspondant au « champ électrique ».

Le détail du système matriciel a été présenté, où nous avons constaté une structure formée par des **blocs** de densité différente, amenée à varier sensiblement avec le découpage et la fréquence.

La validation a d'abord été effectuée sans brasseur, par comparaison avec l'analytique, autant de manière qualitative, que quantitative. Nous avons aussi constaté sur un exemple que les diverses cartographies de bases (vecteurs-colonnes) pouvaient avoir des normes euclidiennes très différentes, et qu'il fallait être attentif dans l'interprétation du rôle joué par certains modes.

Il a aussi été montré que toute recherche de reproductibilité avec un changement du découpage ou de la position de la zone de séparation n'a de sens que de **manière globale**, c'est-à-dire en comparant des « courbes de réponse » en fonction de la fréquence, et non les valeurs **d'une seule** simulation.

Le gain obtenu dans l'utilisation de la méthode hybride par rapport à la méthode FDFD classique a été utilisé pour simuler des modes correspondant à des fréquences de plus en plus élevées, où il a été mis en évidence que la densité de modes devenaient alors importantes.

La modélisation et la prise en compte du brasseur a été introduite, avec les modifications des définitions d'inconnues et des équations qui en découlent alors. Il a été évoqué que la présence du brasseur résultait d'un sous-programme largement autonome, qui pourrait faire l'objet d'amélioration notamment, concernant la géométrie de celui-ci.

Nous avons conclu ce chapitre par la présentation de diverses cartographies en présence du brasseur, à des fréquences se rapprochant plus de celles utilisées en pratique, en CRBM. Une fois de plus il est à noter que la validité de la méthode dans le cas d'enceintes de **section quelconque** n'a aucune raison d'être remise en cause.

Chapitre VI

Etude statistique

I. Objectifs du chapitre

On rappelle que l'une des propriétés d'une CRBM **idéale** est l'obtention en **chaque point** d'un module du champ **constant, en moyenne**, sur l'ensemble des différentes positions du brasseur : c'est la propriété d'**homogénéité** ou d'**uniformité**.

De plus, si on positionne un objet susceptible d'être perturbé par un champ électromagnétique, une « **bonne** » CRBM doit garantir que le champ prend « **toutes** » les valeurs, directions et sens, sur un tour complet du brasseur, et ce **quel que soit le point** de la CRBM où on place l'objet : c'est la propriété d'**isotropie**.

Sur le plan statistique, les diverses composantes $\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$, traitées comme variables centrées et réduites doivent vérifier une loi de Gauss.

Les dimensions de la cavité parallélépipédique sont $3.5 \text{ m} \times 3.0 \text{ m} \times 2.9 \text{ m}$

La fréquence est fixée à **550 MHz**, soit environ 8.5 fois la plus petite fréquence de résonance $f_{\min} = 65.8 \text{ MHz}$.

Le découpage est : $34 \times 30 \times 12$ cellules, avec $L_z = 1.19 \text{ m}$, $L'_z = 1.71 \text{ m}$

Le coefficient de fréquence complexe est de 10^{-3} , correspondant à un facteur de qualité de 500.

On peut vérifier que le maillage est légèrement inférieur à $\frac{\lambda}{5}$ pour la fréquence de 550 MHz.

Les grandeurs prises de manière « brute », sans pratiquer à une **réduction**, c'est-à-dire une division des valeurs par l'**écart-type** variaient dans une trop grande proportion, et ne possédaient pas la même **variance**. (en revanche, le **centrage**, c'est-à-dire la soustraction de la valeur-moyenne s'avérait inutile, chacune des variables étant pratiquement centrée)

Il aurait alors été difficile de valider des lois statistiques du type **Rayleigh d'ordre 2** en ce qui concerne les modules $|E_x|$, $|E_y|$, $|E_z|$ ou **Rayleigh d'ordre 6** pour le module du champ $|\vec{E}|$, les lois de Rayleigh s'appuyant sur le fait que les différentes composantes $\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$ doivent varier de manière **indépendante** et de même **variance**.

Remarque importante : Si nous considérons le **cas extrême** où les pertes sont considérées comme nulles, l'équation à la base du système linéaire que nous résolvons est rappelée ici :

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} - k_0^2 \right) \vec{E} = -j \cdot \omega \mu \cdot \vec{J}$$

et nous constatons que dans le cas « sans pertes », la discrétisation conduit à un système où tous les coefficients sont **réels** (en supposant des densités de courant au niveau des antennes (dipôles) purement imaginaires, auxquelles on peut toujours se ramener par un choix adéquat de la phase à l'origine). Dans ce cas les diverses grandeurs E_x , E_y , E_z sont purement réelles et leurs phases

respectives ne prennent que les valeurs 0° ou 180°. Par un raisonnement « par continuité », nous concevons aisément que l'introduction de pertes permet d'obtenir des grandeurs possédant une partie imaginaire d'autant plus importante que les pertes augmentent. Cet argument constitue une des raisons pour lesquelles nous avons travaillé en centrant et en réduisant chacune des grandeurs $\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$.

Nous verrons dans le **paragraphe suivant** comment nous pouvons exploiter les données « brutes » sous certaines conditions, notamment en simulant une augmentation des pertes comme nous venons de le voir plus haut, mais il faut noter que l'**expérimentation** sur la CRBM de **Xlim**, à cette fréquence ne permet pas non plus de trouver des valeurs rigoureusement égales pour $|E_x|$, $|E_y|$, $|E_z|$.

Nous rappelons qu'un des critères de « bon » brassage se « contente » d'une déviation maximale de 3 dB entre les diverses composantes. Pour **chaque position du brasseur**, nous définissons la variable aléatoire **centrée** et **réduite**

$$X = \frac{t - \langle t \rangle}{\sigma}$$

dans laquelle **t** représente en alternance, les valeurs de $\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$, $\langle t \rangle$ et σ sont respectivement la **moyenne** et l'**écart-type** de t. Toutes ces valeurs sont prises dans un parallélépipède dont les indices varient de :

$i = 2$ à n_z (rappel : indices vont de 1 à n_z+1 , entre la zone de séparation et la paroi du fond)

$j = 13$ à n_y (une grande partie de la zone au dessous du brasseur)

$k = 2$ à n_x

Ce parallélépipède possède les dimensions **3.4 m*1.8 m*1.1 m** et contient **6534 points**

Puis on effectue une **numérotation dans l'ordre** :

Position de brasseur 0°:

(i=2, j=13, k=2)...(i=2, j=13, k=3)(i=2, j=13, k=nx)
 (i=3, j=13, k=2)(i=3, j=13, k=nx)

 (i=nz, j=13, k=2).....(i=nz, j=ny, k=nx)

Position de brasseur 15° : Idem

.....

Position de brasseur 165 ° : Idem

et nous sélectionnons (de manière totalement arbitraire) des échantillons plus ou moins grands de points régulièrement espacés (dans la numérotation effectuée ci-dessus) . L'étude est d'abord réalisée sur la grandeur désirée **$\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$, $|E_x|$, $|E_y|$, $|E_z|$, $|\vec{E}|$** .

Exemples :

- 1 point sur 5 pour les positions 1 à 3 du brasseur
- 1 point sur 10 pour les positions 1 à 6 du brasseur
- tous les points pour 1 position du brasseur
- 1 point sur 100 pour toutes les positions du brasseur etc

Puis nous essayons de valider pour chacune de ces grandeurs, les lois statistiques qu'elles sont censées vérifier. Le critère retenu pour effectuer la validation (ou l'invalidation !) est **le test du χ^2 avec « un risque de 5% »** (voir **Annexe 10** pour les détails).

Rappels des notations utilisées dans ce test : Nous établissons l'**histogramme de l'échantillon**, qui consiste à ranger les individus en k classes. Nous définissons la **variable aléatoire :**

$$x = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$$

dans laquelle T_i et O_i représentent respectivement les valeurs des effectifs

théorique et **observé** dans la $i^{\text{ème}}$ classe. Pour un **échantillon donné**, nous appelons $\chi^2_{\text{observé}}$ la valeur « observée », c'est-à-dire correspondant à la valeur de $\chi^2_{\text{observé}}$ pour ce « tirage ». Si l'échantillon suivait **parfaitement** la loi théorique, nous aurions $\chi^2_{\text{observé}} = 0$. Plus la valeur de $\chi^2_{\text{observé}}$ est faible et plus nous nous attendons à ce que la **population** suive effectivement la loi théorique et plus la grandeur **Prob($\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}$)** est élevée.

Le résultat du test du χ^2 sera fourni sous forme de probabilité : **Prob($\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}$)** correspondant à l'aire de la **zone ombrée** sur la **Figure 118**

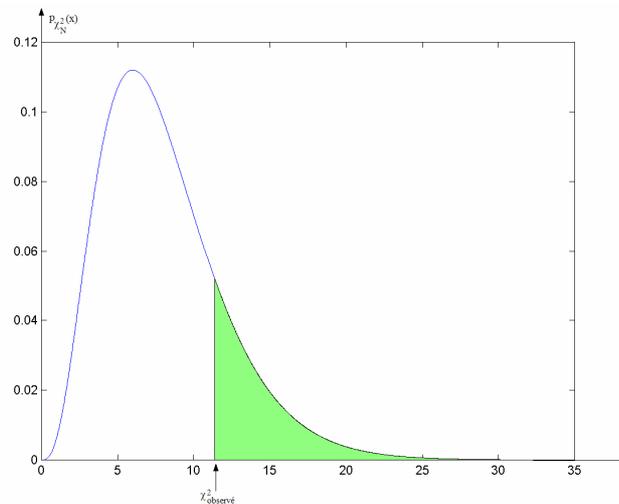


Figure 118 : Représentation graphique de la grandeur **Prob($\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}$)**

Pour obtenir la validation d'une loi, le résultat doit être : **Prob($\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}$) \geq 5 %** correspondant à une valeur de χ^2 **inférieure** à la valeur limite.

Avec le découpage réalisé, il y a 18 positions du brasseur donnant des **positions distinctes** après numérisation du brasseur : $0^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 55^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 125^\circ, 135^\circ, 140^\circ, 150^\circ, 155^\circ, 165^\circ$. Tous ces angles de rotation correspondent aux valeurs prises sur **un demi-tour** du brasseur, étant donné la symétrie de rotation de ce brasseur **particulièrement simple**.

II. Traitement des données

1^{er} traitement :

Nous considérons l'échantillon obtenu en prenant une 1 position du brasseur sur 5 à partir de 0°, et pour chacune de ces positions 1 point sur 10 dans la numérotation vue ci-dessus. L'effectif de l'échantillon s'élève alors à 2616 individus. Nous obtenons les histogrammes suivants pour la grandeur E_X par exemple :

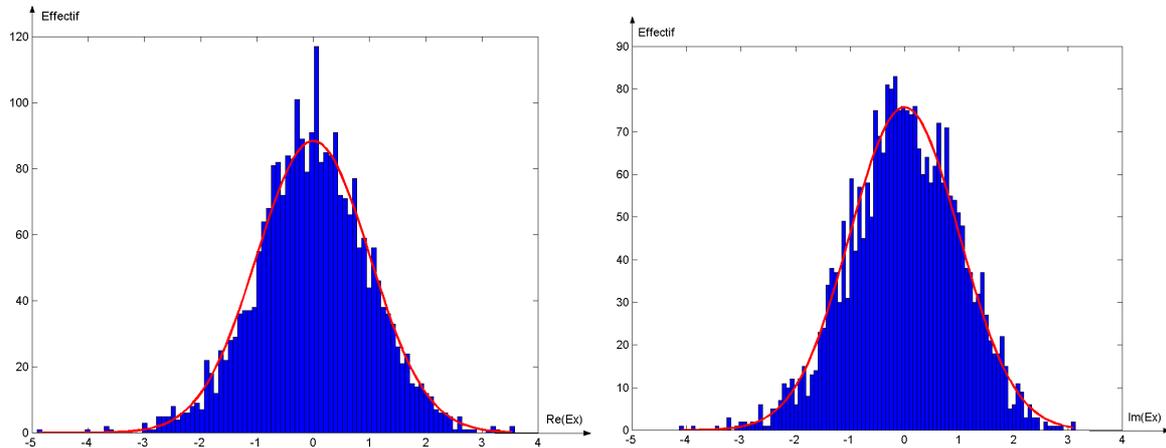


Figure 119 : Histogramme de $\text{Re}(E_X)$ et $\text{Im}(E_X)$ avec 2616 individus répartis en 100 classes avec la courbe théorique en rouge.

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
$\text{Re}(E_X)$	65.7 %	Validée
$\text{Im}(E_X)$	43.7 %	Validée
$\text{Re}(E_Y)$	14.0 %	Validée
$\text{Im}(E_Y)$	44.6 %	Validée
$\text{Re}(E_Z)$	72.2 %	Validée
$\text{Im}(E_Z)$	78.9 %	Validée

Figure 120 : Résultats du test du χ^2 pour les diverses composantes rectangulaires, avec un échantillon de 2616 individus

Nous constatons donc que les 6 grandeurs étudiées sur les histogrammes ci-dessus vérifient toutes une **loi normale centrée réduite**, et laissent supposer un brassage correct, au moins sur ce point. Il est à noter que l'échantillon choisi (rappel : 1 position de brasseur sur 5 et un point sur 10 dans la

numérotation évoquée plus haut) l'a été de manière **totalemment hasardeuse, dès le premier échantillon.**

Remarque importante :

Il faudra faire très attention à l'apparence **purement visuelle** d'un histogramme pour porter un jugement : des histogrammes « se rapprochant de la courbe théorique » sont largement « favorables » aux effectifs plus faibles, à cause du calcul de χ^2 lui-même

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$$

où O_i et T_i représentent les effectifs observés et théoriques par classe

A cause de la présence du carré au numérateur, un « **même** écart visuel » sur une classe se traduit par une contribution **double** si l'effectif est double. (voir exemple en **Annexe 10**)

C'est la raison pour laquelle, il est **primordial**, avant toute étude statistique demandant plusieurs positions du brasseur, de vérifier que chaque angle correspondant à ladite position fournisse bien une configuration **distincte après numérisation du brasseur**. Sans cette vérification, on cumulerait le même « histogramme » en double, ce qui fausserait l'étude.

Une autre comparaison visuelle est proposée sur la **Figure 121**, la courbe d'**effectifs cumulés** de l'échantillon obtenu en **simulation** et celle de la **loi théorique (loi normale)**.

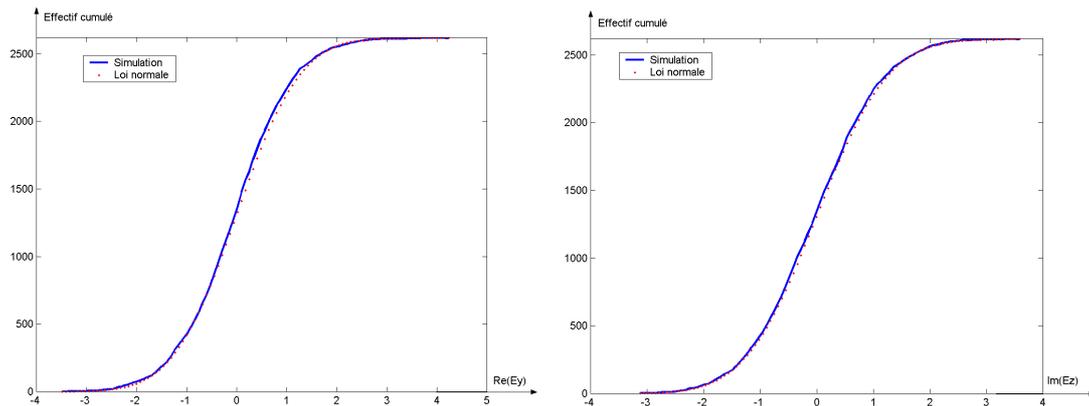


Figure 121 : Courbes des effectifs cumulés (simulation et théorique) et pour **Re(Ey)** et **Im(Ez)**

Nous constatons l'excellente concordance entre les courbes des effectifs cumulés.

2^{ème} traitement :

Dés lors que les diverses composantes $Re(E_X)$, $Im(E_X)$, $Re(E_Y)$, $Im(E_Y)$, $Re(E_Z)$, $Im(E_Z)$ sont des variables aléatoires **indépendantes** vérifiant des lois de Gauss, les 3 grandeurs $|E_X|$, $|E_Y|$, $|E_Z|$ doivent vérifier chacune une loi de **Rayleigh d'ordre 2** (**Annexe 10**). Observons si nous parvenons à valider cela.

Nous obtenons les histogrammes suivants pour les grandeurs $|E_Y|$ et $|E_Z|$ par exemple :

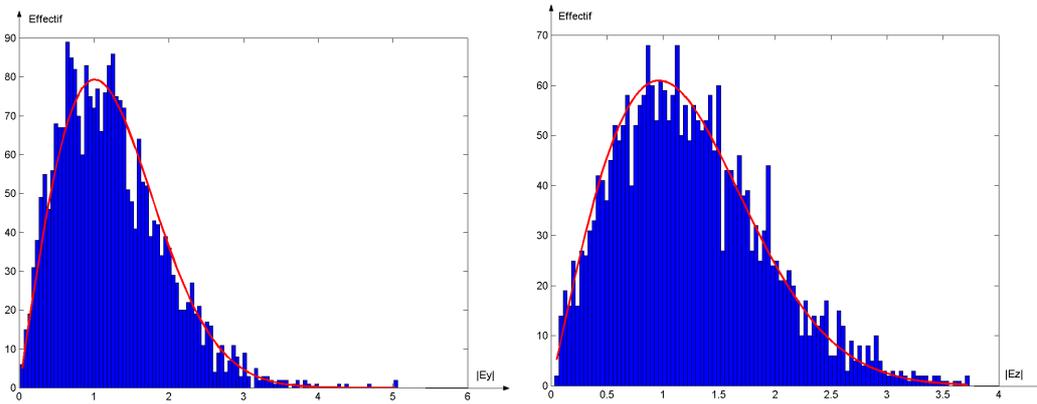


Figure 122 : Histogrammes de, $|E_Y|$ et $|E_Z|$ avec 2616 individus répartis en 100 classes, avec la courbe théorique en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
$ E_x $	20.3 %	Validée
$ E_y $	12.1 %	Validée
$ E_z $	57.2 %	Validée

Figure 123 : Résultats du test du χ^2 pour les divers modules des composantes rectangulaires, avec un échantillon de 2616 individus

Nous concluons à la validation de la loi de Rayleigh d'ordre 2 suivie par les modules des diverses composantes rectangulaires, **centrées** et **réduites**.

Remarque : Le fait que les **parties réelle et imaginaire** doivent varier de manière **indépendante** (en plus du fait qu'elles doivent obéir à une loi normale) peut être mis en évidence ci-dessous :

Si nous traçons dans des axes orthonormés, en abscisse la grandeur **Re(Ez)** et en ordonnée **Im(Ez)**, nous obtenons un nuage de points se répartissant de manière aléatoire autour de la 1^{ère} bissectrice, et ce d'autant plus que les 2 grandeurs varient de manière indépendante.

Au contraire, si les 2 grandeurs en abscisse et en ordonnée sont fortement **corrélées**, les points se répartissent d'autant plus près de la 1^{ère} bissectrice que cette corrélation est élevée. Nous pouvons observer cela sur la **Figure 124** où sont représentées **Re(Ez)** et **Im(Ez)** d'une part et **Re(Ez)** en abscisse et en ordonnée d'autre part.

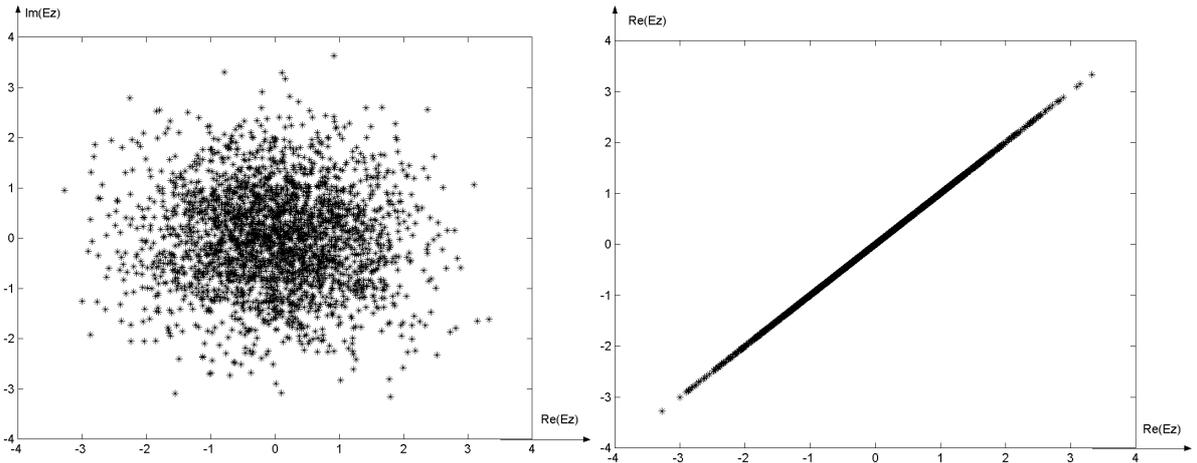


Figure 124 : Nuage de points faisant apparaître l'indépendance de $\text{Re}(\mathbf{Ez})$ et $\text{Im}(\mathbf{Ez})$ (à gauche) et la dépendance maximale entre $\text{Re}(\mathbf{Ez})$ et « elle-même » (à droite).

Nous traçons ci-dessous l'histogramme de la grandeur : $|\text{Re}(\mathbf{Ez})+\mathbf{j}.\text{Re}(\mathbf{Ez})|$ (Grandeur fictive)

Nous rajoutons la courbe théorique correspondant à la loi de **Rayleigh d'ordre 2** sur le graphique :

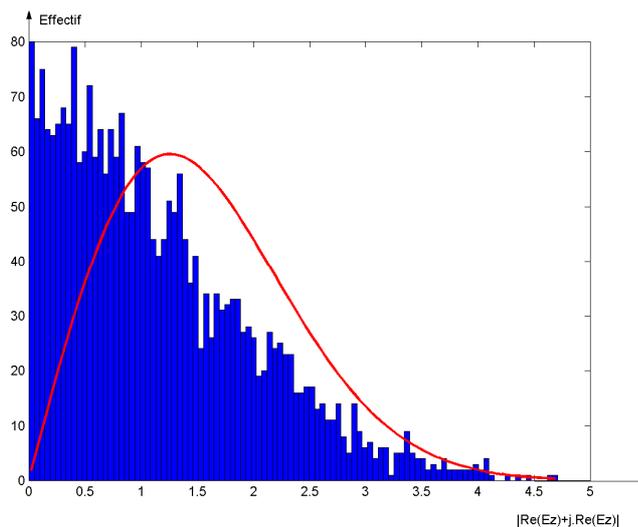


Figure 125 : Histogramme de la grandeur fictive $\text{Re}(\mathbf{Ez})+\mathbf{j}.\text{Re}(\mathbf{Ez})$ avec la courbe théorique en rouge

Il apparaît clairement sur la **Figure 125** que la grandeur fictive étudiée **ne suit pas** la loi théorique, bien que **chacune** des parties réelle et imaginaire suive une loi normale. Ceci est bien évidemment dû à la **dépendance extrême** entre les parties réelle et imaginaire. Ce cas limite conduit par « **continuité** » à toujours rechercher une variation indépendante des parties réelle et imaginaire pour que le **module** de la grandeur étudiée suive une loi de Rayleigh d'ordre 2.

D'autres grandeurs **fictives**, ne correspondant à rien de physique, comme : $|\text{Re}(\mathbf{Ex})+\mathbf{j}.\text{Re}(\mathbf{Ez})|$ par exemple donne d'excellents résultats à cause de l'**indépendance** des parties réelle et imaginaire : nous obtenons $\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})=75.2 \%$

3^{ème} traitement :

Le module du champ électrique total $|\vec{E}| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2}$ quant à lui doit suivre une loi de Rayleigh d'ordre 6 (**Annexe 10**); Un découpage en 160 classes fournit de bons résultats.

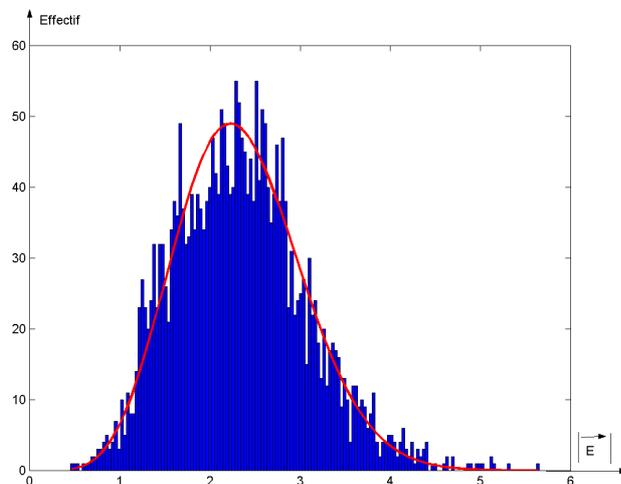


Figure 126 : Histogramme de $|\vec{E}|$ avec 2616 individus répartis en 160 classes avec la courbe théorique tracée en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
$ \vec{E} $	26.3 %	Validée

Figure 127 : Résultat du test du χ^2 pour $|\vec{E}|$ avec un échantillon de 2616 individus

De **multiples essais**, distincts entre eux par le choix de l'échantillon, se sont montrés concluants, certains conduisant à des « non validations » dans la mesure où ils fournissaient un χ^2 supérieur à celui correspondant à la limite des 5 %, mais en général une modification du nombre de classes ou du choix de l'échantillon conduit à la validation.

Parmi les paramètres **critiques** pouvant conduire à un mauvais choix d'échantillon se trouvent de manière tout-à-fait attendue, les diverses **corrélations** qui résultent de points trop rapprochés spatialement. En effet, comme le montre David A. Hill **[16] [1]** la longueur de corrélation entre deux points est égale à la **demi-longueur d'onde** (dans le vide) correspondant à la fréquence de l'antenne excitatrice.

Une autre corrélation constatée dans les échantillons apparaît lorsque nous sélectionnons des positions de brasseur trop voisines. Deux angles consécutifs (généralement séparés de 5°) dans l'étude statistique peuvent parfois provoquer une non-validation (ou tout-au-moins une moins bonne validation). Nous nous en rendons compte en faisant des choix d'échantillons dans lesquels nous ne sélectionnons qu'une position de brasseur sur 2 (ou 3...), et pour lesquels le critère du χ^2 est plus facilement validé.

Une courbe intéressante est celle de la **phase** des trois grandeurs E_x , E_y , E_z qui, théoriquement devrait varier de manière uniforme entre $-\pi$ et $+\pi$ avec la densité de probabilité constante $\frac{1}{2\pi}$ [27]. En considérant 1 point sur 5 dans la numérotation adoptée et 1 position de brasseur sur 3 (soit une population de 7842 individus), nous obtenons les résultats ci-dessous :

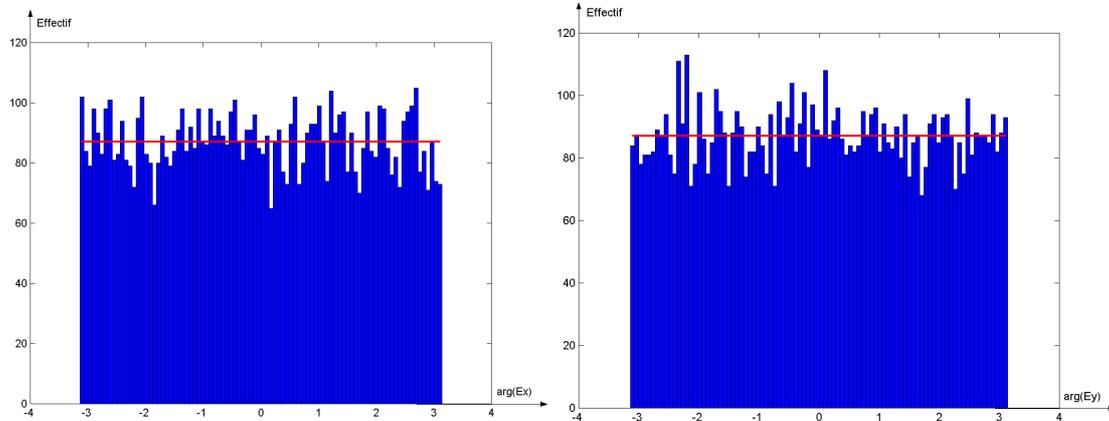


Figure 128 : Histogramme de la phase de E_x et E_y avec un échantillon de 7842 individus. L'effectif théorique uniforme est tracé en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
Phase de E_x	38.1 %	Validée
Phase de E_y	65.6 %	Validée
Phase de E_z	55.8 %	Validée

Figure 129 : Résultats du test du χ^2 pour les phases des diverses composantes rectangulaires, avec un échantillon de 7842 individus

III. Validation sur la CRBM de Xlim

Les dimensions de la CRBM de Xlim sont rappelées :

$$L_x=2.455 \text{ m}, L_y=2.460 \text{ m}, (L_z+L'_z)=3.570 \text{ m}$$

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'introduction de pertes plus conséquentes devrait permettre d'obtenir des phases variant de manière uniforme sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$, pour les diverses composantes $\text{Re}(E_x)$, $\text{Im}(E_x)$, $\text{Re}(E_y)$, $\text{Im}(E_y)$, $\text{Re}(E_z)$, $\text{Im}(E_z)$, en exploitant les données **brutes**, c'est-à-dire sans ramener chacune de ces dernières à une **variable centrée et réduite**.

Réflexion préliminaire :

Observons comment varie la phase de l'expression suivante :

$$g(z) = e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}$$

correspondant par exemple à l'expression (à des coefficients près) de la composante E_z avec un mur électrique en $z=0$.

Cette phase est notée : $f(z) = \arg(g(z))$

avec $\beta=1+j\alpha$, où α correspond à un coefficient de pertes et un intervalle de variation pour z de

$[0 ; 4\pi]$ par exemple.

Pour les valeurs de α respectivement égales à 0 ; 0.001 ; 0.01 ; 0.1 ; 0.5 ; 1.0 , on obtient dans l'ordre les courbes de la phase $f(z)$:

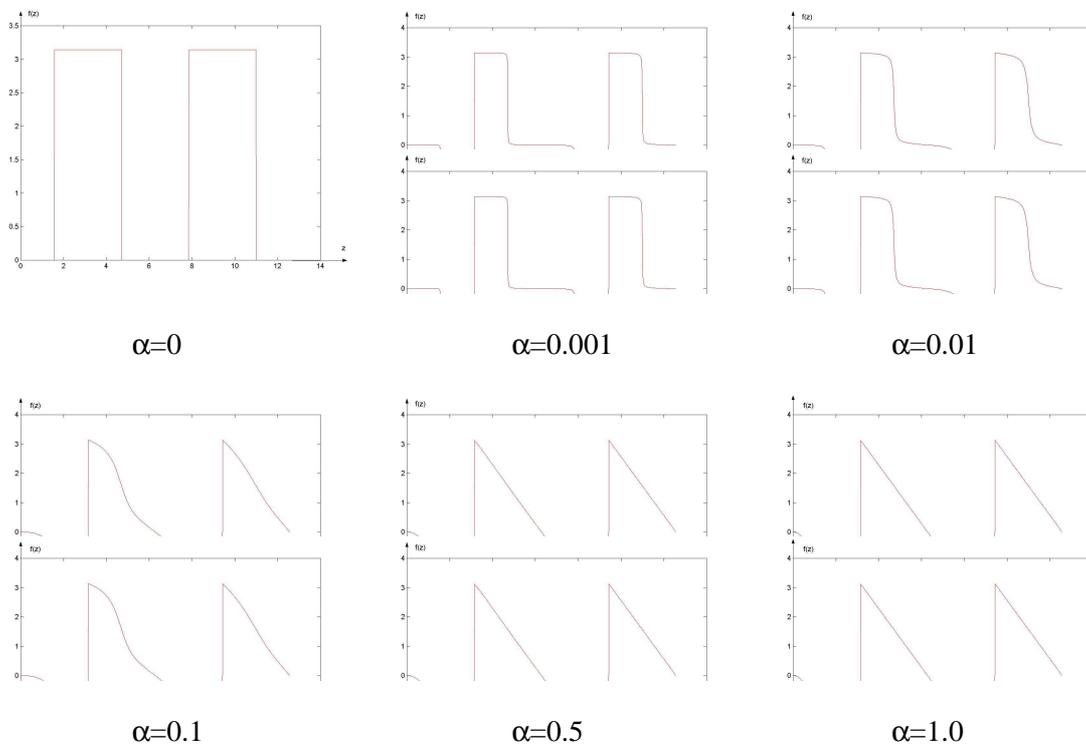


Figure 130 : Variation de la phase en fonction de z , avec le coefficient de pertes α en paramètre

Les résultats de la **Figure 130** sont interprétés comme ceci : sans pertes, ou à faibles pertes, la phase ne prend quasiment que les valeurs correspondant à un nombre réel pur [77] . L'augmentation des pertes, par l'intermédiaire du **coefficient α de fréquence complexe** déjà vu plus haut permet d'obtenir une variation « uniforme » de la phase lorsqu'on se déplace suivant z . Cette uniformité de la phase ne varie plus de manière sensible à partir de certaines valeurs de α plus élevées.

Nous obtenons des résultats similaires en étudiant la phase de l'expression $h(z) = e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}$ correspondant à l'expression de E_x et E_y avec un mur électrique en $z=0$.

Evidemment le raisonnement utilisé ici est purement **déterministe** et non **probabiliste**, mais il est à appliquer avec diverses constantes de propagation β prenant d'autant plus de valeurs que le nombre

de modes augmentera. A cela il faudra ajouter le rôle du brasseur qui sera alors un mur électrique local avec une position changeante. Nous pourrions nous attendre à une phase variant de manière statistiquement **uniforme**, de manière **pseudo-aléatoire** dans la CRBM.

En conclusion, on ne pourra s'attendre à un bon brassage, correspondant à une variation **gaussienne** et **indépendante** des parties réelle et imaginaire des diverses composantes (donc à une phase variant de manière uniforme pour ces composantes) qu'avec une valeur minimale de pertes. **[53] [60]**.

Remarque :

Une autre façon de prévoir les valeurs prises par les phases dans le cas « sans pertes » (ou par continuité avec peu de pertes) est de revenir à l'équation de base du code FDFD réalisé (sans développement modal pour simplifier le raisonnement) :

$$\left(\overrightarrow{rot.rot} - k_0^2\right)\vec{E} = -j.\omega\mu.\vec{J}$$

où nous voyons que si k_0 est purement réelle, et avec un choix des excitations des antennes en quadrature par rapport à la référence des phases, l'équation ci-dessus discrétisée conduit à un système d'équations linéaires (avec un **déterminant principal non nul**) dont **tous les coefficients sont réels**, donc ayant un vecteur-solution purement réel aussi.

En revanche l'introduction d'une fréquence complexe (à travers le même coefficient α) conduit à k_0 **non** purement réel et à un système d'équations linéaires avec des coefficients complexes, et à un vecteur-solution non purement réel, a priori.

III.1. Données de la simulation et objectifs poursuivis

La zone de séparation est prise avec $L_z=1.40$ m et donc $L'_z=2.17$ m.

La fréquence est de **650 MHz** soit 8.8 fois plus élevée que la plus basse fréquence de résonance $f_{min}=74.1$ MHz

Le **compromis** (précision des résultats/ressources informatiques) est poussé à sa limite, correspondant à une finesse du maillage légèrement inférieur à $\lambda/5$, soit une longueur d'arête de cellule maximale de **9 cm**.

Le découpage adopté est de : $n_x*n_y*n_z = 28*28*16$ cellules correspondant à des dimensions de cellules $dx*dy*dz=8.77$ cm***8.79** cm * **8.75** cm

Le brasseur est une plaque carrée parfaitement conductrice de **0.8 m * 0.8 m** en rotation autour d'un axe vertical, situé à une cellule au dessous du « plafond ».

Le coefficient de pertes (fréquence complexe) est réglé à $\alpha=0.5*10^{-2}$, correspondant à un facteur de qualité **Q=100**.

Avec ces données, le brasseur peut prendre **32 positions différentes** sur un demi-tour, deux positions consécutives étant séparées par un angle compris entre 5° et 10°.

L'excitation est formée par une antenne dipôle oblique, d'une longueur d'une cellule dans chacune des directions x, y et z. Pour ce faire, on définit 3 antennes de type dipôle élémentaire suivant les 3 axes. Le courant de chaque élément est pris égal à $(1+j0)$ Ampère.

Au cours de la simulation, nous choisissons de manière arbitraire comme échantillon maximal (en ce sens, qu'on ne pourra éventuellement n'en étudier qu'une partie, comme on l'a vu plus haut) pour une étude statistique, un parallélépipède de dimensions $8 \cdot dx$ suivant x, $8 \cdot dy$ suivant y, $6 \cdot dz$ suivant z correspondant à des dimensions **0.70 m*0.70 m* 0.53 m**. Ce volume d'étude est choisi suffisamment éloigné du brasseur d'une part et des diverses parois d'autre part.

Le parallélépipède étudié contient donc **567 points**.

La simulation est lancée en automatisant les 32 positions du brasseur, et en sauvegardant dans divers fichiers, les grandeurs étudiées aux points concernés. La durée de l'étude complète est d'environ **7 à 8 heures**.

Les objectifs poursuivis sont les validations des diverses lois statistiques suivies par les grandeurs brutes **Re(E_x), Im(E_x), Re(E_y), Im(E_y), Re(E_z), Im(E_z)** et des combinaisons de ces grandeurs, comme au **paragraphe II**.

Nous chercherons aussi à vérifier l'**isotropie** du champ ou tout au moins si les valeurs moyennes de $|E_x|$, $|E_y|$, $|E_z|$ sont dans des rapports correspondant à ceux observés expérimentalement à cette fréquence. Les moyennes sont calculées sur les 8 sommets du parallélépipède-échantillon, en cumulant les données obtenues sur les 32 positions du brasseur.

Pour l'**uniformité** du champ, nous calculons sur chacun des 8 sommets du parallélépipède-échantillon, la moyenne (sur les 32 positions du brasseur) du module du champ électrique total et nous

observons le rapport $\frac{\langle |\vec{E}| \rangle_{\max}}{\langle |\vec{E}| \rangle_{\min}}$, afin de vérifier si ce rapport n'est pas trop élevé.

Sur le plan pratique, le but de l'uniformité du champ est de s'assurer qu'en chaque point, le champ électrique prend au moins une fois la valeur maximale, ou tout au moins des valeurs maximales dont le rapport d'un point à un autre ne dépasse pas des valeurs trop élevées, fixées à un maximum de 3 dB (ce critère de 3 dB est fixé par la norme, avec **une autre formule**, qui sera aussi **vérifiée**).

Il sera donc intéressant de visualiser des cartographies de $|\vec{E}|_{\max}$ dans diverses sections de l'échantillon et de vérifier que les rapports calculés en divers points prennent des valeurs relativement peu dispersées.

Nous pourrions effectuer la même vérification sur les valeurs **moyennes** du champ total $\langle |\vec{E}| \rangle$.

Nous devons nous attendre, **à cause de la simplicité du brasseur modélisé**, à des résultats de simulations pas toujours à la hauteur de ceux obtenus en expérimentations (brasseur a priori correct) en ce qui concerne l'uniformité.

Parmi les études intéressantes, il y a aussi la **fonction de corrélation spatiale** du champ (total ou de l'une des composantes) [16] [28]. La manière simple et conviviale de vérifier la « décorrélation » au-delà d'une longueur égale à une demi-longueur d'onde est de visualiser les valeurs prises par la fonction de corrélation dans diverses sections de l'échantillon, fonction de corrélation calculée entre chaque point de la section et un **point fixe**, par exemple arbitrairement **un des sommets** de la section.

III.2. Résultats de simulations pour la CRBM de Xlim

Contrairement à ce qui a été fait dans un premier temps au **paragraphe II**, nous conservons les valeurs « brutes » des champs obtenus pour chaque position du brasseur, sans centrage, ni réduction, ni normalisation quelconque.

Nous nous doutons bien qu'avec cette analyse, les diverses validations vont être plus difficiles à obtenir, et dans plusieurs cas, l'échantillon étudié (par exemple 1 position de brasseur sur 2, 1 point sur 3, nombre de classes pour la loi du χ^2 etc...) nécessitait des « tâtonnements » et ne donnait pas immédiatement satisfaction. Toutefois, des choix légèrement différents donnaient souvent et ceci rapidement, des résultats valides.

III.2.1. Validation des lois statistiques

1^{er} traitement :

Les diverses composantes $\text{Re}(E_X)$, $\text{Im}(E_X)$, $\text{Re}(E_Y)$, $\text{Im}(E_Y)$, $\text{Re}(E_Z)$, $\text{Im}(E_Z)$ doivent suivre chacune une loi de Gauss et avoir des variances sensiblement égales (ou tout au moins pas trop dispersées).

Le critère de validation reste **la loi du χ^2 à 5%**, comme précédemment. Nous présentons les divers histogrammes avec le nombre de classes utilisées et la grandeur « $\text{prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$ » qui doit être supérieure à **5%** pour la validation. Nous choisissons un échantillon correspondant à **tous les points** du « petit » parallélépipède de **567** points, avec **1 position de brasseur sur 5**, soit un effectif de **3969** individus.

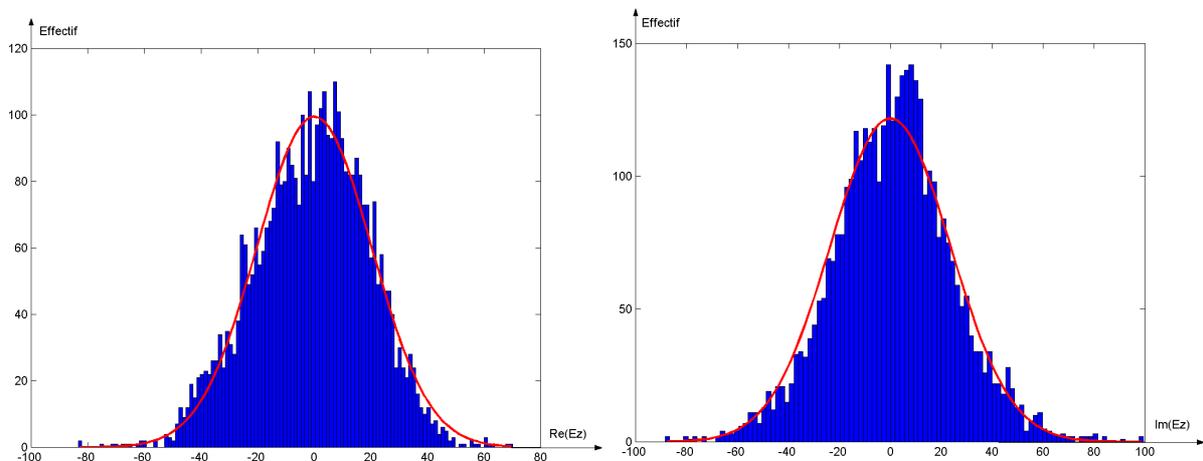


Figure 131 : Histogrammes de $\text{Re}(E_z)$ et $\text{Im}(E_z)$ avec un échantillon de 3969 individus, avec la courbe théorique tracée en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
Re(E_x)	27.7 %	Validée
Im(E_x)	6.3 %	Validée
Re(E_y)	5.1 %	Validée
Im(E_y)	17.3 %	Validée
Re(E_z)	5.1 %	Validée
Im(E_z)	9.9 %	Validée

Figure 132 : Résultats du test du χ^2 pour les diverses composantes rectangulaires avec un échantillon de 3969 individus.

Nous constatons bien que chaque composante étudiée suit une **loi normale**, le nombre de classes ayant été adapté dans certains cas pour permettre de valider par le critère retenu, mais sans cette étape, nous arrivions par exemple à des valeurs de $\text{Prob}(\chi^2 > \chi^2_{\text{observé}}) = 3.7\%$ au lieu des 5% « visé », ce qui aurait pu correspondre à une validation avec un critère moins restrictif de 1% comme cela se pratique parfois. Il est à noter en comparant la **Figure 132** à la **Figure 120**, la plus grande difficulté à satisfaire le **critère de validation**, ce qui était prévu.

La grandeur qui a posé quelques difficultés est **Re(E_y)** qui possède un écart-type sensiblement plus élevé que les autres, puisque les écart-types prennent les valeurs suivantes :

$\sigma_{\text{Re}(E_x)} = 19.2 \text{ V.m}^{-1}$	$\sigma_{\text{Im}(E_x)} = 20.4 \text{ V.m}^{-1}$
$\sigma_{\text{Re}(E_y)} = 34.8 \text{ V.m}^{-1}$	$\sigma_{\text{Im}(E_y)} = 27.9 \text{ V.m}^{-1}$
$\sigma_{\text{Re}(E_z)} = 20.2 \text{ V.m}^{-1}$	$\sigma_{\text{Im}(E_z)} = 23.5 \text{ V.m}^{-1}$

Nous présentons sur la **Figure 133** les courbes d'**effectif cumulé** de deux grandeurs pour une comparaison visuelle de la **simulation** et de la **loi théorique (loi normale)**.

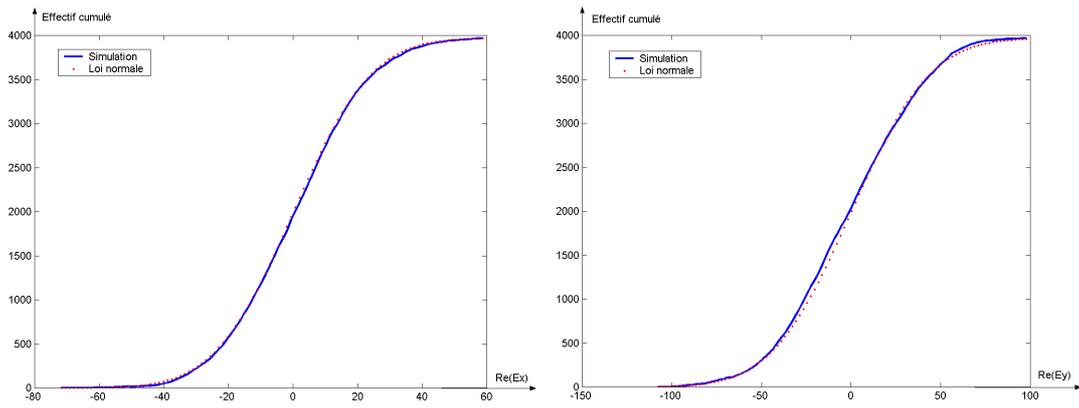


Figure 133 : Courbes d'effectif cumulé (simulation et théorique) pour $\text{Re}(\mathbf{E}_x)$ et $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$

Nous constatons les bonnes concordances des courbes d'effectif cumulé.

2^{ème} traitement :

Nous cherchons à valider la loi de Rayleigh d'ordre 2 que doivent suivre $|E_x|, |E_y|, |E_z|$. Nous conservons le même échantillon que celui du 1^{er} traitement.

Nous obtenons les résultats suivants :

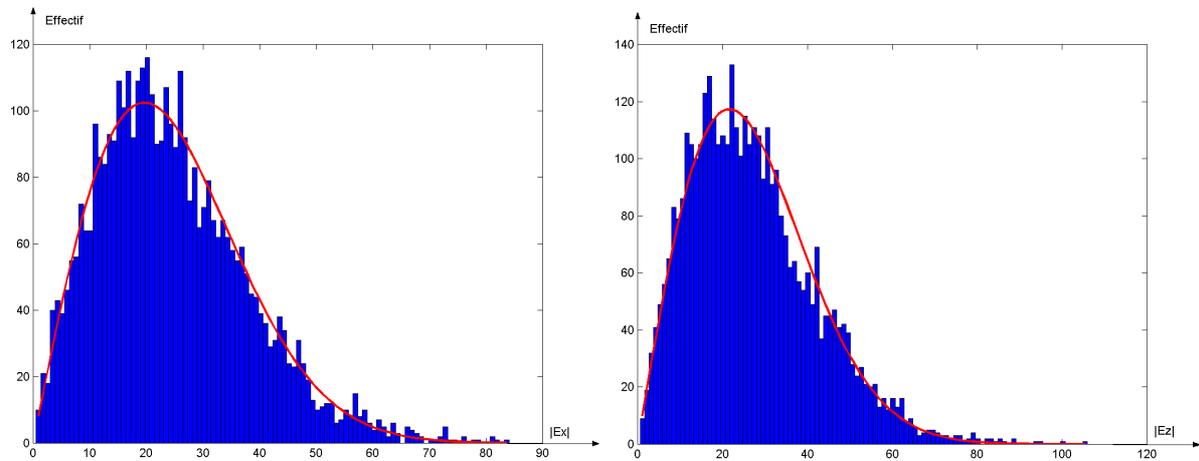


Figure 134 : Histogramme de $|E_x|$ et $|E_z|$ avec 3969 individus répartis en 100 classes avec courbe théorique tracée en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
$ E_x $	14.7 %	Validée
$ E_y $	5.1 %	Validée
$ E_z $	43.5 %	Validée

Figure 135 : Résultats du test du χ^2 pour les divers modules des composantes rectangulaires, avec un échantillon de 3969 individus

Nous constatons une fois de plus, la validité de la loi de Rayleigh d'ordre 2 pour les modules des 3 composantes rectangulaires, avec une valeur de l'écart-type de $|E_y|$ sensiblement plus élevée et une adaptation nécessaire du nombre de classes pour la validation correspondant à cette dernière.

3^{ème} traitement :

Nous cherchons à valider la loi de Rayleigh d'ordre 6 que doit suivre $|\vec{E}|$. Nous conservons le même échantillon que celui des 1^{er} et 2^{ème} traitements.

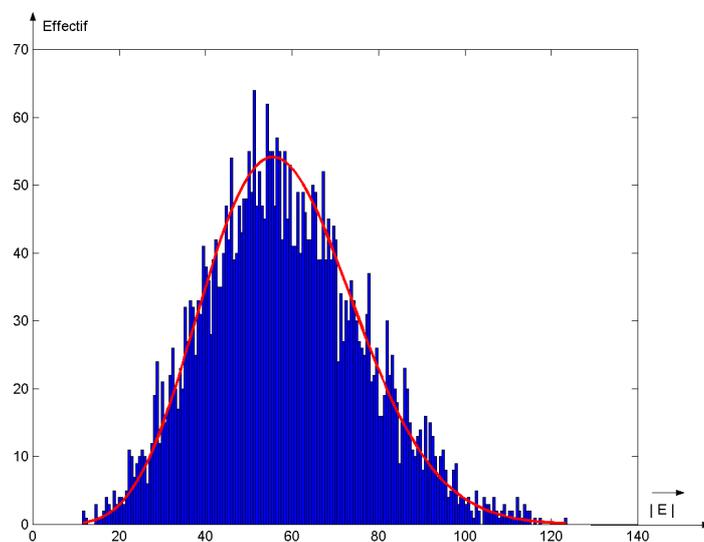


Figure 136 : Histogramme de $|\vec{E}|$ avec 3969 individus répartis en **190 classes** avec courbe théorique tracée en rouge

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
$ \vec{E} $	9.4 %	Validée

Figure 137 : Résultat du test du χ^2 pour $|\vec{E}|$ avec un échantillon de 3969 individus

Nous constatons donc la validation de la loi de Rayleigh d'ordre 6 pour $|\vec{E}|$, avec un nombre de classes qu'il a fallu rechercher en quelques essais pour obtenir satisfaction avec le critère à 5 %

Il est particulièrement intéressant de regarder les histogrammes des phases de E_x , E_y , E_z . Pour cela nous choisissons un échantillon cumulant **1 position sur 4** du brasseur, avec **tous les points** du « petit » parallélépipède, contenant donc **4536** individus.

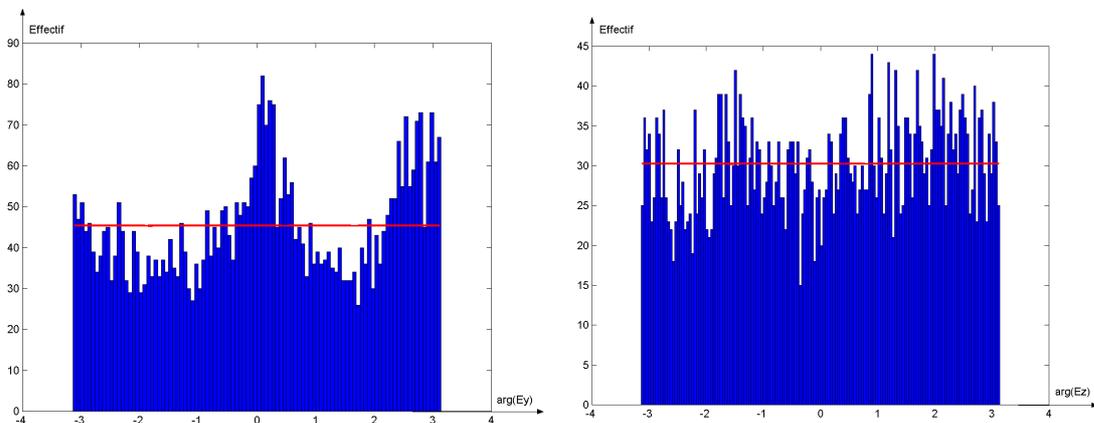


Figure 138 : Histogrammes des phases de E_y et E_z avec un échantillon de 4536 individus

Grandeur étudiée	$\text{Prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$	Résultat
Phase de E_x	17.5 %	Validée
Phase de E_y	$\ll 5.0 \%$	Non validée
Phase de E_z	6.3 %	Validée

Figure 139 : Résultats des tests du χ^2 pour les phases des composantes rectangulaires avec un effectif de 4536 individus

Nous constatons les validations des phases de E_x et E_z qui peuvent être considérées comme **uniformes**, mais en revanche le **rejet** de la loi uniforme pour la phase de E_y . Celle-ci connaît un « surplus » d'effectif pour les angles proches de $-\pi$, 0 , π correspondant à E_y purement réel et au

contraire pour des angles distincts de ces valeurs, il y a une « pénurie » d'effectif. Ceci semble expliquer les difficultés rencontrées pour la validation des lois statistiques concernant E_Y .

Cela est-il dû au fait que le brasseur est une plaque métallique verticale sur laquelle en tout point $E_Y=0$? On peut raisonnablement le supposer.

III.2.2. Etude de l'isotropie

1^{er} traitement :

Pour chaque position du brasseur, nous relevons les valeurs de $|E_X|, |E_Y|, |E_Z|$ aux 8 sommets du parallélépipède-échantillon, et nous effectuons les **moyennes** pour chacune de ces 3 grandeurs (moyennes calculées sur un échantillon d'effectif égal au nombre de positions de brasseur). Nous obtenons 3 « tableaux » ($|E_X|_{moy}, |E_Y|_{moy}, |E_Z|_{moy}$) avec 8 valeurs dans chacun, une pour chaque sommet. Nous calculons ensuite les **moyennes** de chaque tableau.

Nous comparons ensuite si les valeurs prises par ces 3 moyennes ne se dispersent pas de manière trop importante. Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \langle |E_X|_{moy} \rangle = 28.0 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_Y|_{moy} \rangle = 39.0 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_Z|_{moy} \rangle = 25.0 \text{ V.m}^{-1} \end{cases}$$

soit un rapport maximal $\frac{\langle |E_Y|_{moy} \rangle}{\langle |E_Z|_{moy} \rangle} = 1.56$

Bien que supérieure à la valeur « limite » de 1.414 correspondant à 3dB, cette valeur est acceptable à cause des valeurs **mesurées** dans la CRBM de Xlim à cette fréquence (650 MHz) que nous pouvons considérer comme pouvant atteindre **1.4 à 2.0** entre 500.0 MHz et 800.0 MHz (voir **Figure 140**).

D'autre part, les valeurs « anormalement » élevées de $|E_Y|$ (à cause du brasseur vertical ?) déjà constatées plus haut faussent un peu plus l'objectif recherché.

Nous fournissons les résultats **de mesures réelles** (par opposition aux résultats de simulations) obtenus sur la CRBM de Xlim, pour diverses fréquences sur la **Figure 140**.

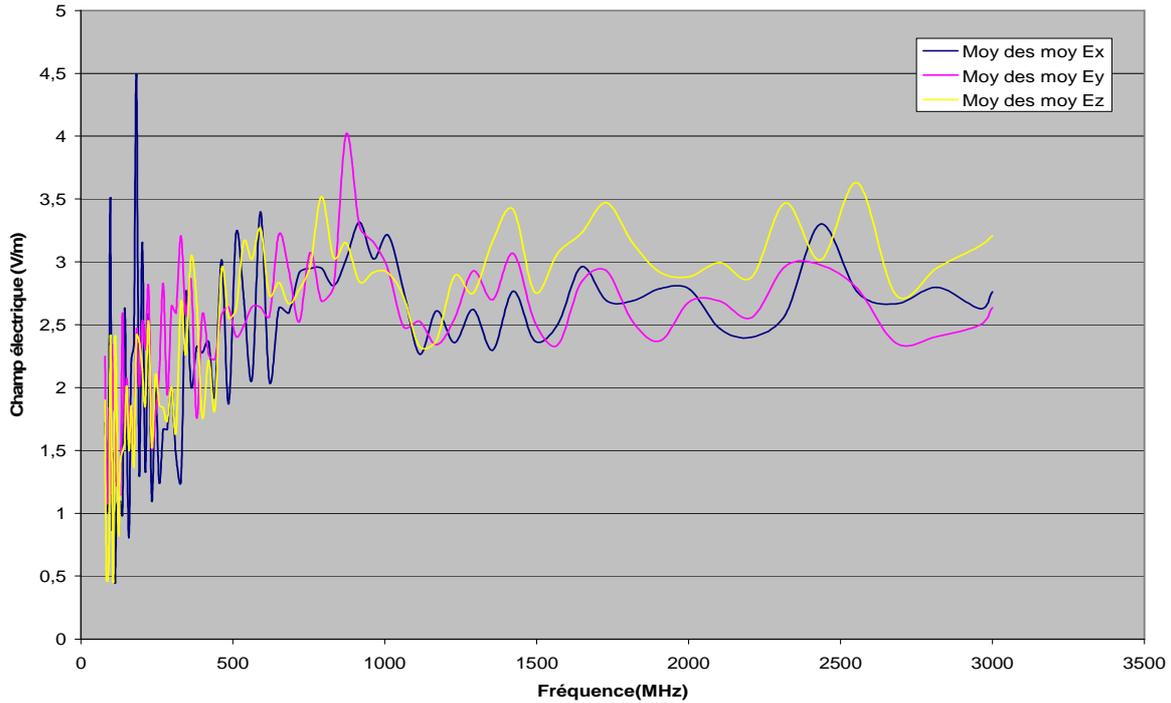


Figure 140 : Variation de $\langle |E_x|_{moy} \rangle$, $\langle |E_y|_{moy} \rangle$, $\langle |E_z|_{moy} \rangle$, valeurs moyennes établies en 8 points, sur un tour de brasseur, en fonction de la fréquence, sur la CRBM de Xlim

Les valeurs **relevées** du rapport entre 621 MHz et 652 MHz atteignent, sur la CRBM de Xlim :

$$\frac{\langle |E_y|_{moy} \rangle}{\langle |E_z|_{moy} \rangle} = \frac{3.22}{2.05} = 1.57$$

En reprenant la démarche, et en choisissant **arbitrairement** 27 points au lieu de 8, (les 8 sommets + les 12 milieux des sommets sur chaque arête + les 6 milieux de chaque face + le centre du parallélépipède-échantillon), nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \langle |E_x|_{moy} \rangle &= 26.6 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_y|_{moy} \rangle &= 37.4 \text{ V.m}^{-1} \text{ (résultats issus de simulations)} \\ \langle |E_z|_{moy} \rangle &= 26.7 \text{ V.m}^{-1} \end{aligned}$$

soit un rapport maximal $\frac{\langle |E_y|_{moy} \rangle}{\langle |E_x|_{moy} \rangle} = 1.4$ qui entre dans les limites « autorisées ».

Remarque : Toutes les simulations effectuées ne peuvent évidemment pas être présentées ici, mais nous pouvons signaler que, parfois en changeant la position de l'antenne, la longueur du brasseur, la fréquence, il arrivait que ce soit $\langle |E_x|_{moy} \rangle$ ou $\langle |E_z|_{moy} \rangle$ qui prenne la plus grande valeur, mais très souvent avec des rapports maximaux du même ordre de grandeur, et ne dépassant pas 1.8 dans le pire des cas.

Nous avons aussi obtenu des cas (pour une fréquence inférieure, égale à 500 MHz) où le rapport maximal était inférieur à 1.1 ou 1.2 . Il pourrait sembler curieux que pour une fréquence inférieure,

nous avons obtenu une amélioration du rapport étudié, mais en regardant la **Figure 140** nous nous rendons compte que pour des fréquences inférieures à 800 MHz, le rapport étudié est loin de varier de manière monotone.

2^{ème} traitement :

Nous cherchons maintenant à comparer les modules des 3 composantes de champ, mais en ne retenant que la **valeur maximale** prise en chacun des points (au nombre de 8 ou de 27 comme vu dans le 1^{er} traitement), sur un tour de brasseur. Le calcul de la **moyenne de ces valeurs maximales** est effectué sur les points (moyenne calculée sur un échantillon de 8 ou 27 points suivant le cas).

Les **mesures** (par opposition aux simulations) sur la CRBM de Xlim fournissent le résultat de la **Figure 141**

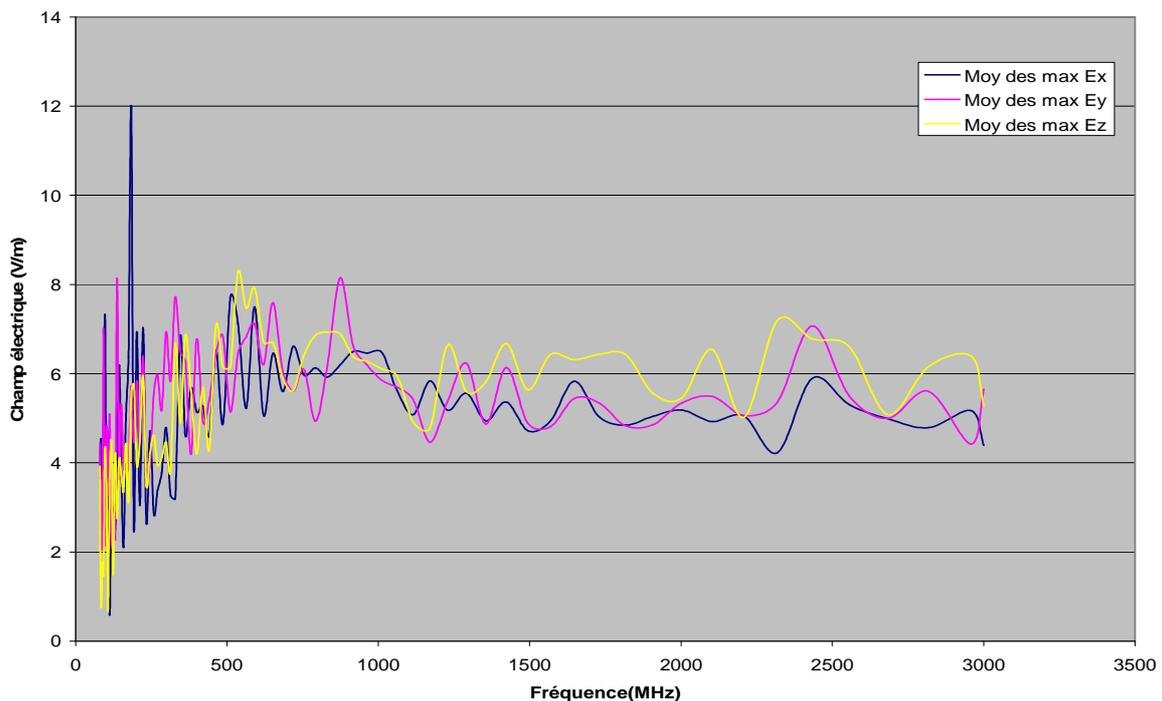


Figure 141 : Variation de $\langle |E_x|_{\max} \rangle$, $\langle |E_y|_{\max} \rangle$, $\langle |E_z|_{\max} \rangle$ établies sur un tour de brasseur, valeurs moyennes établies en 8 points, en fonction de la fréquence, sur la CRBM de Xlim

Les valeurs **relevées** du rapport étudié, entre 621 MHz et 652 MHz atteignent :

$$\frac{\langle |E_y|_{\max} \rangle}{\langle |E_x|_{\max} \rangle} = \frac{7.6}{5.1} = 1.49$$

et à 652 MHz (seule) :

$$\frac{\langle |E_y|_{\max} \rangle}{\langle |E_x|_{\max} \rangle} = \frac{7.6}{6.5} = 1.17$$

Les résultats obtenus en simulation, en considérant **8 points** sont :

$$\begin{cases} \langle |E_x|_{\max} \rangle = 49.9 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_y|_{\max} \rangle = 66.6 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_z|_{\max} \rangle = 51.1 \text{ V.m}^{-1} \end{cases} \quad (\text{simulations})$$

soit un rapport maximal :

$$\frac{\langle |E_y|_{\max} \rangle}{\langle |E_x|_{\max} \rangle} = 1.33$$

Et en considérant **27 points** :

$$\begin{cases} \langle |E_x|_{\max} \rangle = 50.8 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_y|_{\max} \rangle = 65.2 \text{ V.m}^{-1} \\ \langle |E_z|_{\max} \rangle = 54.3 \text{ V.m}^{-1} \end{cases} \quad (\text{simulations})$$

soit un rapport maximal :

$$\frac{\langle |E_y|_{\max} \rangle}{\langle |E_x|_{\max} \rangle} = 1.28$$

La norme **EN 61000-4-21** évalue pour chaque composante rectangulaire du champ un écart-type

$$\sigma_i (dB) = 20 \log \left(1 + \frac{\sigma_i}{\langle |E_{i_max}| \rangle} \right), i = x, y, z$$

calculé sur les **8 sommets** du parallélépipède-échantillon. **[6]**

Nous obtenons, en cumulant les 32 positions du brasseur :

$$\begin{cases} \sigma_x = 1.97 \text{ dB} \\ \sigma_y = 2.52 \text{ dB} \\ \sigma_z = 1.83 \text{ dB} \end{cases}$$

Ces résultats montrent des écart-types inférieurs à 3 dB pour **chaque** composante rectangulaire, et donc des **écarts relatifs** évidemment inférieurs à 3 dB **entre** les composantes.

Nous pouvons donc considérer comme satisfaisant l'aspect « isotropie » de la CRBM dans les conditions utilisées, en dépit d'un brasseur **modélisé** très simple.

III.2.3. Etude de l'uniformité

Nous calculons sur chacun des 8 sommets du parallélépipède-échantillon la moyenne (sur les 32 positions de brasseur) $\langle |\vec{E}| \rangle$ et nous calculons le rapport maximal. Nous obtenons la valeur suivante :

$$\frac{\langle |\vec{E}| \rangle_{\max}}{\langle |\vec{E}| \rangle_{\min}} = 1.62 \quad (\text{simulation})$$

Nous pouvons aussi calculer le rapport maximal des valeurs **maximales** pour les différentes positions du brasseur (au lieu des valeurs moyennes) et nous obtenons :

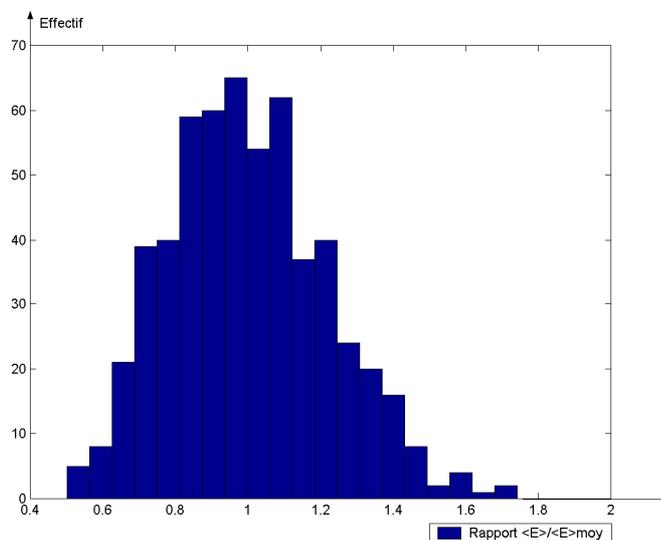
$$\frac{|\vec{E}|_{\max}}{|\vec{E}|_{\min}} = 1.66 \quad (\text{simulation})$$

Ces grandeurs ne donnent pas une bonne idée de l'uniformité du champ, car elles utilisent les valeurs extrêmes maximale et minimale, et une cartographie peut très bien avoir une uniformité générale satisfaisante, avec de **très petites zones** provoquant un rapport (des valeurs moyennes ou maximales) important.

De plus, prendre un nombre plus importants de points (comme cela était évoqué pour l'étude de l'isotropie) **ne peut que faire empirer** le rapport entre les valeurs maximales, de manière évidente, mais aussi le rapport des valeurs moyennes, car les moyennes sont calculées ici sur les **positions du brasseur**.

Pour une CRBM fonctionnant correctement, les valeurs moyennes du champ (calculées sur les diverses positions de brasseur) en tout point, doivent varier de +/- 3 dB.

Nous fournissons ci-dessous l'histogramme de la grandeur $\frac{\langle |\vec{E}| \rangle}{\langle |\vec{E}| \rangle_{\text{moy}}}$ où $\langle |\vec{E}| \rangle$ est la moyenne en chaque point, calculée sur les 32 positions du brasseur et $\langle |\vec{E}| \rangle_{\text{moy}}$ est la moyenne de $\langle |\vec{E}| \rangle$ calculée sur les différents points de l'échantillon :



Un dénombrement permet d'obtenir que seuls 47 points sur 567 ont des valeurs $\frac{\langle |\vec{E}| \rangle}{\langle |\vec{E}| \rangle_{moy}}$ qui sont soit légèrement inférieure à 0.707 (-3 dB), soit légèrement supérieure à 1.414 (+3 dB).

Pour juger de l'uniformité, il est intéressant aussi d'observer des cartographies des **valeurs moyennes** ou des **valeurs maximales** dans diverses sections.

Nous présentons ces cartographies dans la section d'indice $i=2$, correspondant à une distance égale à **1.31 m** du mur électrique suivant z , à l'extrémité de la zone de diffraction. Les dimensions de la zone visualisée valent respectivement suivant x et y : $0.7 \text{ m} * 0.7 \text{ m}$ soit des côtés un peu plus grand que 1.52 longueurs d'onde.

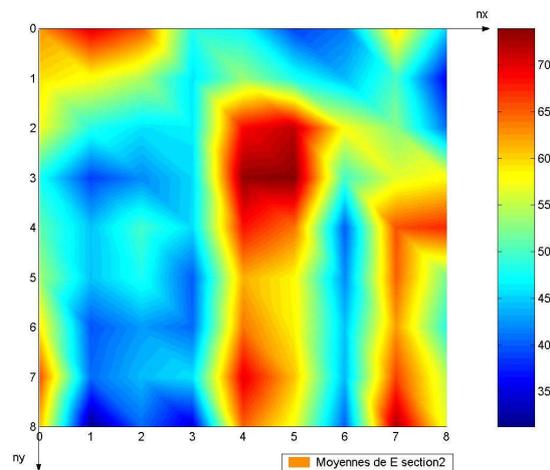


Figure 143 : Cartographie de $\langle |\vec{E}| \rangle$, avec graduations en nombre de cellules suivants x et y dans une section $z=cte$ dans le parallélépipède-échantillon

Nous constatons sur la **Figure 143** que les valeurs entre les maxima et les minima peuvent en effet atteindre des valeurs proches de 2.0, mais que sur une **grande partie** de la cartographie, le rapport des valeurs moyennes n'excède pas 1.4

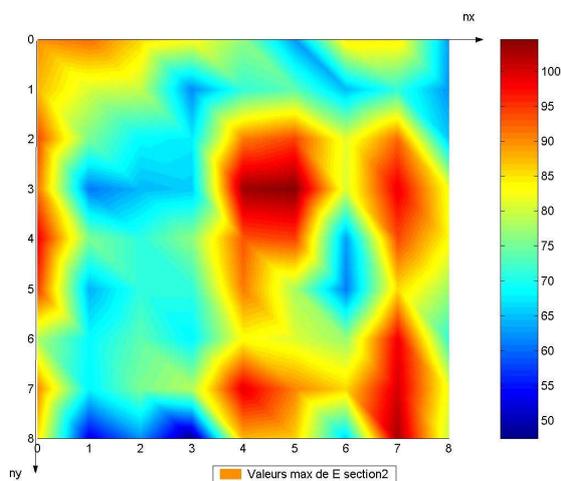


Figure 144 : Cartographie de $|\vec{E}|_{max}$, avec graduations en nombre de cellules suivants x et y dans une section $z=cte$ dans le parallélépipède-échantillon

Nous voyons sur la **Figure 144** que la valeur du rapport entre valeurs maximale et minimale peut approcher 2.0, mais il est clair que cela ne concerne que des zones très réduites par rapport au reste de la section visualisée. Sur la grande partie de la zone étudiée, ce rapport n'excède pas 1.3, ce qui reste tout-à-fait convenable.

De plus, le but recherché **en pratique** est que le champ puisse approcher la valeur **maximale**, en tout point, pour au moins une position du brasseur, et cette grandeur est donc plus importante que la valeur moyenne sur un tour de brasseur.

Des cartographies dans d'autres sections donnent des résultats parfois moins concluants (mais tout de même raisonnables), mais dans la **plupart** des cas, nous retrouvons des valeurs de rapport du même ordre de grandeur, autant pour les valeurs moyennes que maximales.

Une autre visualisation (la plus parlante) permettant de constater l'uniformité du champ dans la CRBM est de visualiser pour **toutes** les positions du brasseur, les cartographies de la valeur de $|\vec{E}|$ dans la même section. Ainsi, nous pouvons voir une véritable « animation » de la configuration spatiale du champ, voir les modifications importantes se « matérialiser », et constater que les maxima peuvent atteindre tous les points de la section visualisée.

Evidemment nous ne pouvons présenter ici qu'un nombre limité d'images de ces configurations du champ, pour quelques positions du brasseur repéré par l'angle θ , ci-dessous :

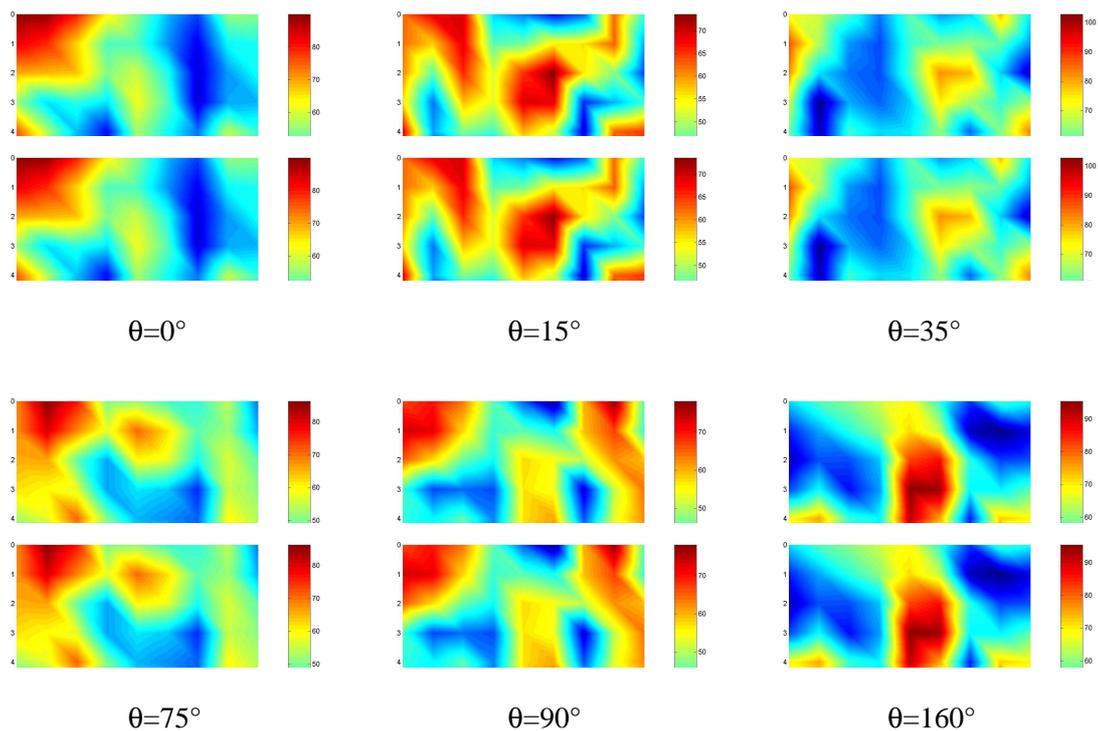


Figure 145 : Cartographies de $|\vec{E}|$ dans une section $z=cte$ du parallélépipède-échantillon, pour 6 positions du brasseur (sur 32 positions au total)

Nous constatons sur la **Figure 145** que toutes les zones sont à un moment donné, soumises à un champ relativement élevé suivant la position du brasseur, et c'est là l'objectif de l'uniformité du champ électromagnétique à l'intérieur d'une CRBM.

Lorsque nous observons les 32 positions, nous nous rendons compte de manière encore plus évidente que le brassage permet d'atteindre une bonne uniformité **sur un parallélépipède-échantillon pris totalement au hasard, dès le départ** (dans une zone ne contenant pas le brasseur tout de même).

La norme **EN 61000-4-21** permet d'évaluer l'uniformité du champ dans la CRBM à l'aide de la formule :

$$\sigma_{x,y,z} (dB) = 20 \log \left(1 + \frac{\sigma_{x,y,z}}{\langle |E_{x,y,z_max}| \rangle} \right)$$

calculée en « **mélangeant** » les valeurs **maximales** des diverses composantes rectangulaires sur les 8 sommets (les moyenne et écart-type étant alors évalués sur un effectif de $3 \times 8 = 24$ individus). Une valeur inférieure à **3 dB** permettant de conclure à une bonne uniformité. [6]

Nous obtenons, en cumulant les 32 positions de brasseur : $\sigma_{x,y,z} = 2.18 \text{ dB}$ et concluons à un **critère d'uniformité correct**, au cours de notre étude.

III.2.4. Etude de la corrélation

Nous avons constaté que les diverses grandeurs $|E_x|, |E_y|, |E_z|$ suivent un loi de Rayleigh d'ordre 2 et que $|\vec{E}|$ suit une loi de Rayleigh d'ordre 6. Cela ne peut se produire que si les diverses parties réelles et imaginaires de E_x, E_y, E_z suivent chacune une loi de Gauss et **varient de manière indépendante**.

Pour étudier cette indépendance **d'un point à l'autre** de la CRBM, il a été défini une fonction de corrélation spatiale, fonction de 2 points repérés par leurs positions respectives \vec{r}_1 et \vec{r}_2 [16]

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle \vec{E}(\vec{r}_1) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\vec{E}(\vec{r}_1)|^2 \rangle \cdot \langle |\vec{E}(\vec{r}_2)|^2 \rangle}}$$

(le symbole « * » signifie « complexe conjugué »)

Le cas $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, conduit pour cette fonction, à une valeur égale à 1.

Cette fonction prendra une valeur d'autant plus proche de 0 que le champ électrique complexe aux 2 points considérés variera de manière indépendante.

David A. Hill a montré, dans l'hypothèse d'un **brassage parfait**, et si on considère qu'on peut modéliser le champ électromagnétique dans une CRBM par une superposition d'ondes planes de directions et de polarisations aléatoires [16], que la longueur de corrélation était égale à la demi-longueur d'onde (mesurée à la même fréquence, dans le vide). Sur le plan pratique, cela signifie que dans une CRBM, le champ en deux points séparés d'une distance supérieure à la longueur de corrélation varie de manière totalement indépendante.

Dans notre cas, et toujours à cause de la simplicité du brasseur utilisé, et à la fréquence choisie, nous nous attendons à des résultats non parfaits, et nous estimerons qu'un coefficient inférieur à 0.37 (valeur fixée par la **norme EN 61000-4-21**, dans un contexte un peu **différent**, d'indépendance d'échantillons pour le pas du brasseur (voir **paragraphe III.2.5.**)) correspond déjà à un critère de décorrélation entre 2 points.

Nous présentons quelques cartographies, dans des sections $z=cte$, dans lesquelles est représentée en **chaque point** la valeur de la fonction de corrélation entre **ce point** et un **point fixe** (pour une section donnée), qui est le point du « coin » en haut à gauche, reconnaissable par le fait qu'il donne la valeur maximale à la fonction de corrélation (les sections seront repérées par leur valeur de $z=cte$, dans un repère « local », $z=0$ correspondant à la face dont la côte z est la moins élevée, $z=0.525$ m la côte la plus élevée).

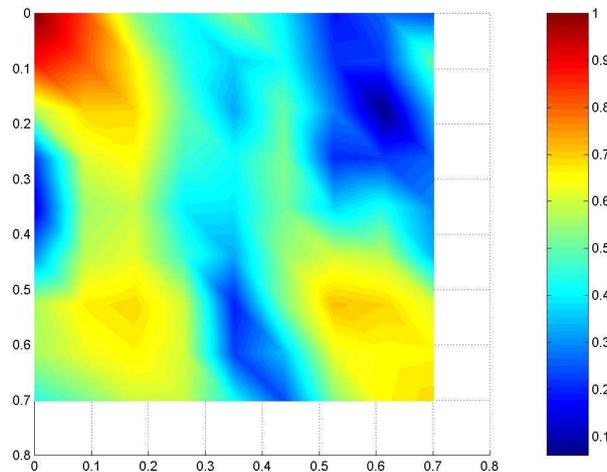


Figure 146 : Cartographie du module de la fonction de corrélation entre chaque point et le coin en haut à gauche dans la section $z=0$ du parallélépipède-échantillon

A la fréquence de 650 MHz, la longueur de corrélation est théoriquement égale à 0.23 m.

Nous voyons sur la **Figure 146** que la fonction de corrélation est égale à 1 au point de référence par rapport auquel on calcule, pour chaque section, la fonction de corrélation spatiale. Nous constatons aussi la chute de cette fonction à mesure qu'on s'éloigne du point de référence, en respectant correctement la valeur théorique de 0.23 m.

Lorsque nous nous éloignons plus, nous constatons la présence de vastes zones où cette corrélation prend des valeurs très faibles (bien en dessous de 0.37), mais... avec des zones non négligeables où la corrélation atteint 0.65 . La **Figure 146** correspond au pire cas rencontré dans les diverses cartographies visualisées.

Nous présentons ci-dessous des cartographies de la fonction de corrélation spatiale donnant de meilleurs résultats :

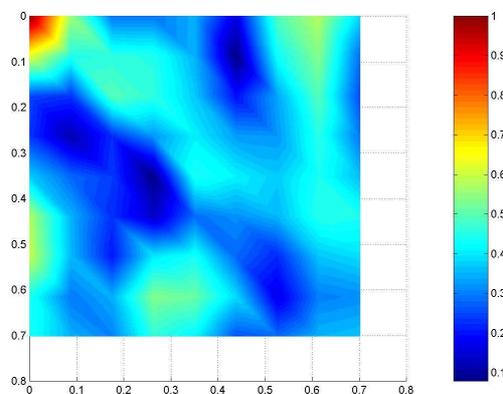


Figure 147 : Cartographie du module de la fonction de corrélation entre chaque point et le coin en haut à gauche dans la section $z=0.525$ m du parallélépipède-échantillon

Nous constatons sur la **Figure 147** une amélioration très sensible de l'aspect général de la corrélation spatiale par rapport à la figure précédente. Il est à noter que sur des zones non négligeables, cette corrélation atteint 0.55, mais sur la **majeure partie**, elle garde des valeurs acceptables, et la plupart des cartographies visualisées (non présentées ici) sont plus proches de ce cas.

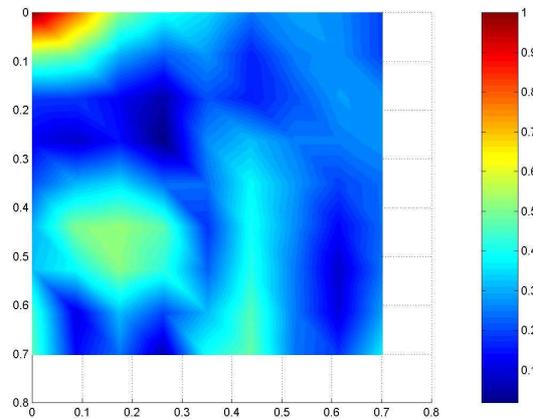


Figure 148 : Cartographie du module de la fonction de corrélation entre chaque point et le coin en haut à gauche dans la section $z=0.26$ m du parallélépipède-échantillon

La **Figure 148** est le meilleur résultat obtenu et nous constatons une quasi-décorrélation du champ dans la section $z=0.26$ m en dépit de petites zones où la fonction de corrélation atteint 0.5, mais le résultat est tout-à-fait acceptable dans sa globalité.

David A. Hill montre [16] que dans le cas d'un brassage **parfait**, avec une modélisation par ondes planes, que ce coefficient de corrélation vaut :

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\sin(k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \text{(VI-1)}$$

Nous pouvons voir sur la **Figure 148** que s'il est fait abstraction de la « zone » où la fonction de corrélation prend une valeur plus élevée que la théorie (rappelons-le, dans un cas théoriquement parfait !) l'**équation (VI-1)** est assez bien vérifiée comme nous pouvons le constater sur la figure ci-dessous, en tenant compte du fait encore une fois que le brasseur est particulièrement simple dans notre simulation :

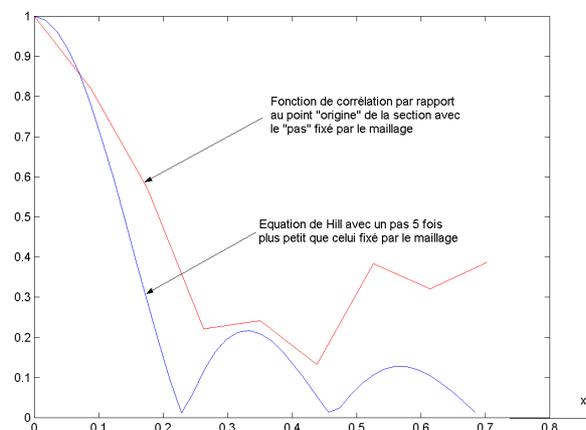


Figure 149 : Fonction de corrélation en fonction de x (par rapport au point « origine » de la section $z=ccte$) sur l'axe correspondant à $z=0.525$ m, $y=0$ du parallélépipède-échantillon

Nous remarquons sur la **Figure 149** une certaine concordance entre l'**équation (VI-1)** les résultats de la simulation. Evidemment, le découpage en $\lambda/5$ ne permet pas d'espérer une vérification plus précise, en plus du problème de la qualité du brasseur.

III.2.5. Etude de l'indépendance des échantillons en fonction de la position du brasseur

La norme **EN 61000-4-21** prévoit pour une étude statistique, que les divers échantillons prélevés (avec un échantillon correspondant à une position du brasseur) soient **indépendants** ou tout au moins qu'ils ne soient pas trop corrélés. Une limite supérieure du coefficient de corrélation entre deux positions considérées comme « indépendantes » est fixée à $\frac{1}{e} = 0.37$.

Par exemple, si l'étude porte sur le module du champ électrique $|\vec{E}| = E$ dans un **échantillon d'effectif N**, nous calculons le coefficient de corrélation entre 2 positions du brasseur repérées par les indices respectifs 1 et 2, par la formule :

$$\boxed{\text{Coeff corrélation} = \frac{\text{Cov}(E_1, E_2)}{\sigma_{E_1} \times \sigma_{E_2}}} \text{ avec } \text{Cov}(E_1, E_2) = \frac{1}{N} \sum_i (E_{i1} - \langle E_1 \rangle) \times (E_{i2} - \langle E_2 \rangle) \text{ et}$$

σ_{E_1} et σ_{E_2} respectivement écart-type de $|\vec{E}|$ pour les échantillons 1 et 2.

$\langle E_1 \rangle$ et $\langle E_2 \rangle$ représentant les valeurs moyennes de $|\vec{E}|$ sur chaque échantillon 1 et 2.

Les échantillons mis en jeu étant pris au même emplacement, dans l'enceinte, on parle aussi de **coefficient d'auto-corrélation**.

Nous représentons quelques courbes du **coefficient d'auto-corrélation** entre chaque échantillon correspondant à chaque angle de rotation du brasseur, et **une position fixe** déterminée aussi par un angle de rotation du brasseur.

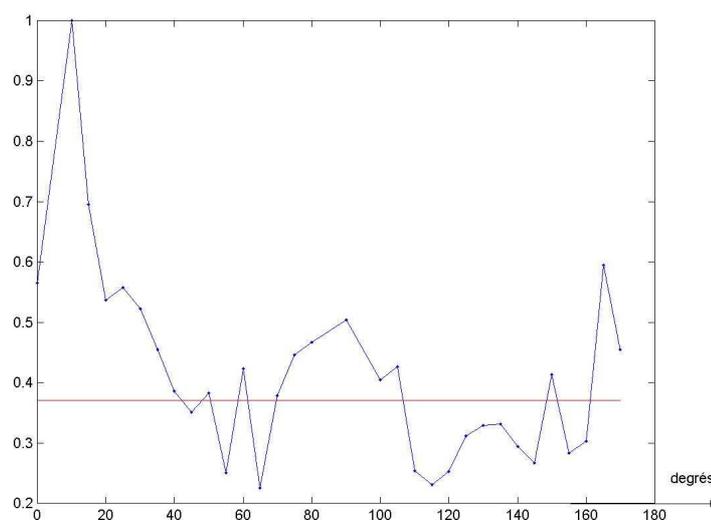


Figure 150 : Coefficient d'auto-corrélation de $|\vec{E}|$ entre les divers échantillons repérés chacun par l'angle du brasseur et la position du brasseur $\theta=10^\circ$ (la limite de 0.37 est tracée en rouge)

Nous remarquons sur la **Figure 150** que la valeur maximale de 1.0 correspond évidemment à la corrélation entre un échantillon (10°) et lui-même. Nous voyons aussi que même si un nombre **non négligeable** de positions sont décorrélés (sur le critère d'une infériorité à 0.37), un plus grand nombre encore se retrouvent à ne pas satisfaire ce critère. La trop grande simplicité du brasseur est la cause de cette « corrélation » relative. Toutefois, c'est le même « parallélépipède-échantillon » qui avait permis de valider les lois statistiques aux **paragraphes II.** et **III.2.1.**, et on rappelle que nous avons été amenés à ne pas prendre **toutes** les positions de brasseur pour valider certaines lois, avec le critère du χ^2 à 5%.

Nous pouvons tout de même considérer une **certaine** décorrélation malgré tout entre les échantillons correspondant aux diverses positions du brasseur, le coefficient dépassant assez peu souvent la valeur de 0.45 .

D'autres valeurs des coefficients d'auto-corrélation entre une position (facilement repérable sur le graphique, puisque correspondant au maximum, et valant 1) et les autres positions du brasseur suivent ci-dessous. Il est bien évidemment impossible de les présenter toutes. Nous choisissons de présenter les **pire** et **meilleur** cas, un cas « intermédiaire », sur la **Figure 150**, ayant déjà été présenté.

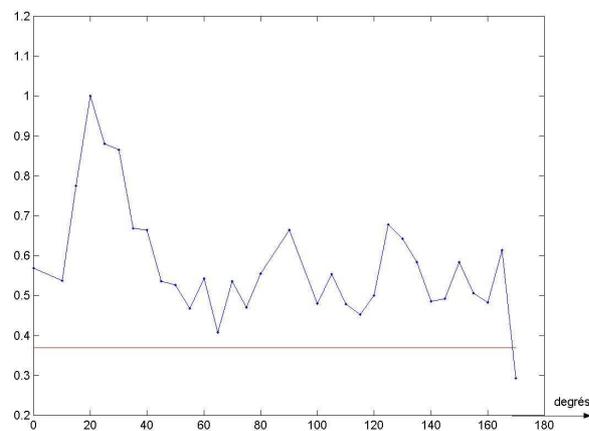


Figure 151 : Pire cas rencontré : coefficient d'auto-corrélation de $|\vec{E}|$ entre les divers échantillons et la position du brasseur $\theta=20^\circ$ (la limite de 0.37 est tracée en rouge)

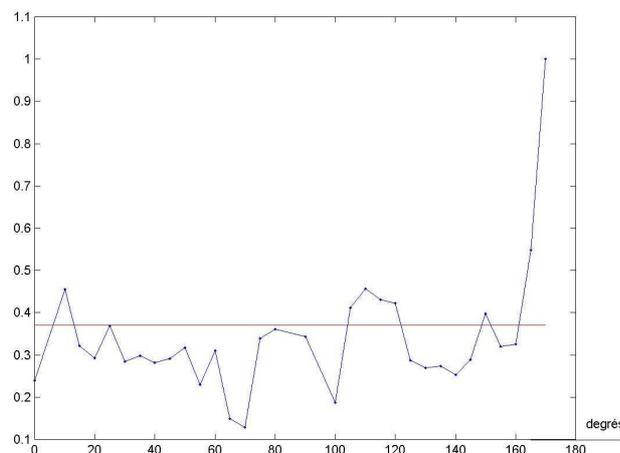


Figure 152 : Meilleur cas rencontré : coefficient d'auto-corrélation de $|\vec{E}|$ entre les divers échantillons et la position du brasseur $\theta=170^\circ$ (la limite de 0.37 est tracée en rouge)

D'autres courbes d'auto-corrélation sont présentées ci-dessous, correspondant à une simulation avec un découpage différent (22*22*20), mais avec un **brasseur plus vaste** : 1.7 m*0.8 m (l'augmentation du **diamètre** est prépondérante par rapport à l'augmentation de la **hauteur** du brasseur [37] [73]). La fréquence est de 550 MHz. Le nombre de positions différentes du brasseur est de 28, à cause du découpage différent de la zone de diffraction.

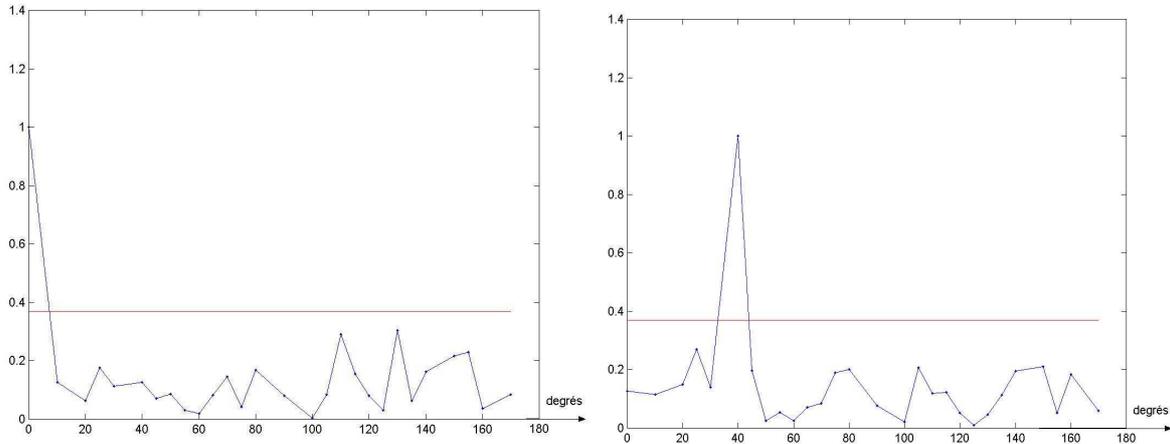


Figure 153 : Coefficient d'auto-corrélation de $|\vec{E}|$ entre les divers échantillons et la position du brasseur $\theta=0^\circ$ et $\theta=40^\circ$ avec un brasseur vertical de plus grand **diamètre** (la limite de 0.37 est tracée en rouge)

Les autres positions du brasseur donnaient des résultats tout aussi bons en ce qui concerne l'indépendance des échantillons en fonction de l'angle du brasseur, mais...les résultats concernant les lois statistiques étaient **curieusement moins bons** que ceux présentés plus longuement dans cette thèse.

Les figures ci-dessous donnent une autre présentation de cas avec différentes valeurs du coefficient d'auto-corrélation. Chaque « étoile » représentée a pour **abscisse** le module du champ pour la **position 1**, $|E_1|$ et pour **ordonnée** le module du champ pour la **position 2**, $|E_2|$ au même point physique. Le nombre d'étoiles est donc égal au nombre de points de chacun des échantillons.

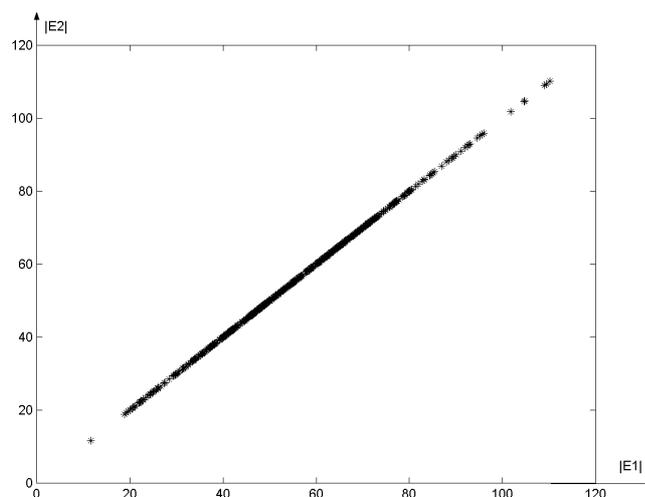


Figure 154 : Nuage de points pour les positions 20° et 20° , donnant un coefficient d'auto-corrélation égal à 1

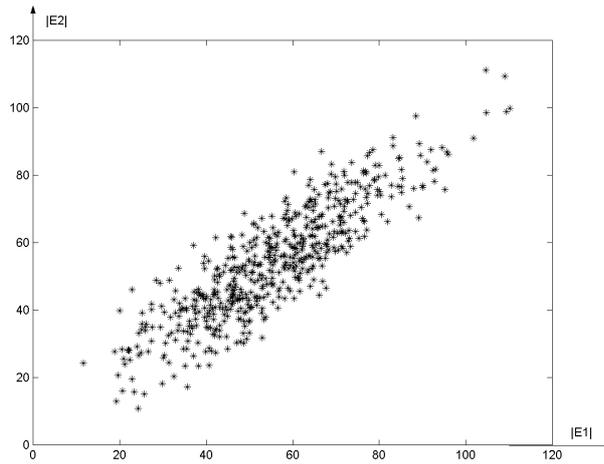


Figure 155 : Nuage de points pour les positions 20° et 25° , donnant un coefficient d'auto-corrélation égal à 0.87

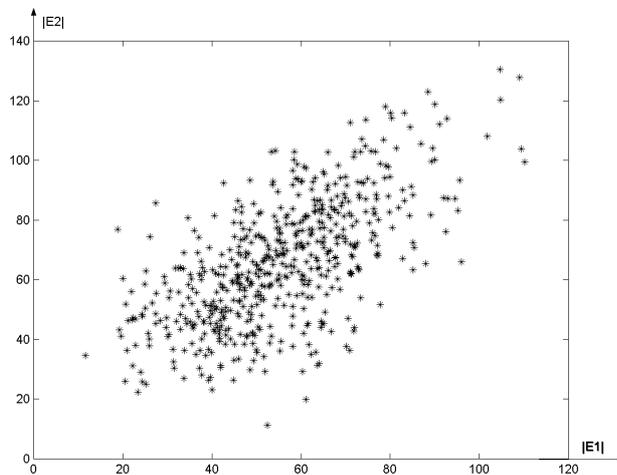


Figure 156 : Nuage de points pour les positions 20° et 35° , donnant un coefficient d'auto-corrélation égal à 0.65

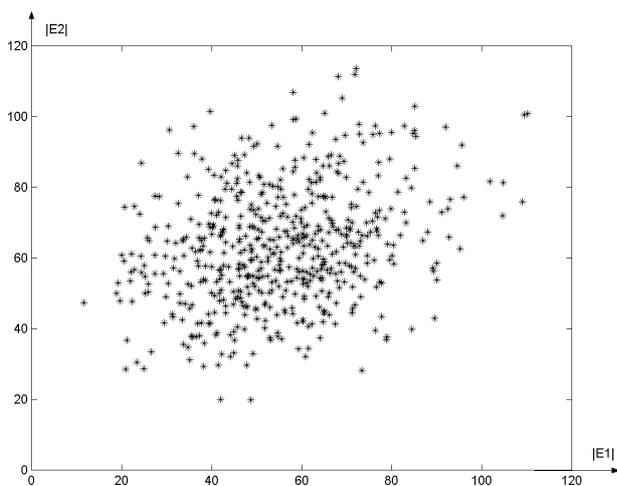


Figure 157 : Nuage de points pour les positions 20° et 170° , donnant un coefficient d'auto-corrélation égal à 0.29

Les **Figures 154 à 157** permettent de visualiser et d'interpréter les valeurs des coefficients d'auto-corrélation et nous percevons bien la notion d' « indépendance » entre deux échantillons ainsi que son importance.

IV. Conclusion du chapitre VI

L'objectif de ce chapitre était de vérifier si les simulations effectuées **en présence du brasseur et avec une fréquence générant un nombre plus important de modes**, permettraient de retrouver les résultats **des mesures** sur une CRBM. Evidemment, la méthode **hybride** de résolution mise au point trouve ici sa justification : le fait de ne « mailler » que la zone de diffraction permet un gain précieux en terme de ressources informatiques. La difficulté pour mener à bien le projet a été une **modélisation réaliste** du brasseur. Pour l'instant le brasseur est une simple plaque rectangulaire parfaitement conductrice en rotation autour d'un axe vertical. Il correspond au brasseur initial de la CRBM de Xlim. Comme cela a été souligné, la prise en compte du brasseur provient d'un sous-programme autonome, qui gagnerait à être amélioré

Nous nous sommes « contents » dans un premier temps de travailler sur des **variables aléatoires centrées réduites**, à partir des grandeurs « brutes » **Re(E_x), Im(E_x), Re(E_y), Im(E_y), Re(E_z), Im(E_z)**.

Cette démarche était rendue nécessaire, du fait que ces diverses grandeurs variaient sur des échelles relatives trop éloignées. Il est à noter qu'une recherche de **normalisation** (parfois différente de la nôtre) de diverses grandeurs est courante dans les études en CRBM. **[1] [10] [27]**

Il a été montré le rôle primordial des pertes, qui existent toujours dans la réalité, en prélimaire d'une étude sur **les grandeurs brutes**. C'est en simulant une augmentation du coefficient de fréquence complexe, que nous comptons atteindre un but plus ambitieux que le précédent.

Dans un second temps, et en augmentant de manière importante les pertes, il a été procédé à des confrontations « simulation/mesures » sur la **CRBM de Xlim, en grandeurs brutes**. Nous avons réalisé des calculs statistiques se rapprochant de ceux effectués suivant la **norme EN 61000-4-21** (mesures effectués en 8 sommets d'un parallélépipède-échantillon).

Il a été tiré profit de l'outil de simulation pour pousser l'étude statistique sur un plus grand nombre de points (27 points, puis 567 points).

En dépit de quelques difficultés, nous pouvons considérer les résultats satisfaisants en ce qui concerne **les lois statistiques, l'isotropie et l'uniformité** du champ. De plus, les résultats obtenus sont conformes à ceux des mesures, notamment sur d'éventuelles dispersions de rapports entre grandeurs.

En revanche, nous nous devons de reconnaître une certaine « déception » en ce qui concerne les fonctions de **corrélations spatiales et d'indépendance d'échantillons mesurée par la fonction d'auto-corrélation**.

Malgré ces corrélations un peu trop importantes, les lois statistiques ont pu être validées. Nous rappelons que la question du choix de certains échantillons au cours de l'étude statistique avait été évoquée **avant même l'étude des corrélations**, et que nous avons déjà remarqué que certaines difficultés apparaissaient lorsque des positions **consécutives** de brasseur faisaient partie du même échantillon. Il semble raisonnable de penser que certaines corrélations provoquaient ces « difficultés de validation ».

Nous ne pouvons pas à aller jusqu'à parler de « non validation », puisque de nombreux cas donnent des résultats convenables. Sans être totalement certains des raisons de ces « invalidations partielles », il semblerait une fois encore que la **trop grande simplicité du brasseur** en soit la cause principale.

De toute façon, les difficultés rencontrées ne remettent pas du tout en cause la validité du **code et de la méthode hybride** mise au point au cours de cette thèse. Nous pourrions de plus remarquer, que si les validations s'étaient effectuées sans la moindre difficulté, cela aurait pu signifier que la **forme** et les **dimensions** du brasseur influent peu sur le résultat en CRBM, ce qui est loin d'être le cas [15] [5] [6] [37] [73] .

Nous pourrions même dire que nous avons pu vérifier avec ce code, qu'un brasseur trop simple comme celui que nous avons simulé, bien que permettant un brassage correct, fournit des échantillons avec des corrélations non négligeables. Nous trouvons là une justification dans la recherche de brasseurs plus complexes.[58]

Nous noterons que les **diverses études** sur l'efficacité du brasseur, en fonction des rapports « diamètre/hauteur » etc...ne conduisent pas toujours à des conclusions identiques. Par exemple dans l'article [67] , **Luk R. Arnaut** conclut à une plus grande efficacité d'un « petit brasseur simple » dans une CRBM aux murs comportant de fortes « rugosités » par rapport à un « grand brasseur complexe » avec des murs « lisses ».

Nous devons citer les travaux de **Gérard Orjubin** [5] , **Elodie Richalot**, **Odile Picon** et **Olivier Legrand** qui justifient dans l'article [77] le rôle crucial de la forme du brasseur pour obtenir les propriétés d'**uniformité** et d'**isotropie**, entre autres.

Conclusion générale et perspectives d'amélioration

Conclusion

L'objectif de cette thèse a été la mise au point d'une technique numérique permettant la détermination du champ électromagnétique à l'intérieur d'une chambre réverbérante à brassage de modes (CRBM) en régime harmonique. Notre choix s'est porté sur une méthode hybride FDFD/développement modal. Une étude de faisabilité pour des enceintes de section quelconque a été l'idée sous-jacente, toujours présente tout au long de ce travail même si la plus grande partie du travail a été consacrée aux enceintes de forme parallélépipédique.

Pour effectuer ce travail, nous avons considéré que la cavité pouvait être séparée en deux parties complémentaires :

- la zone de champ diffracté contenant le brasseur et les antennes
- la zone calme pour laquelle la cavité peut être assimilée à un guide possédant des conditions aux limites d'extrémité particulières.

Cette constatation nous a amenés à développer deux approches complémentaires, chacune étant adaptée à une région. La première méthode permettant le traitement de la zone calme est le développement modal. Dans ce cadre, nous avons mis en œuvre un produit scalaire simple qui permet le calcul des poids des modes TE et TM du guide caractérisé par la géométrie de sa section. Dans le cas d'une géométrie simple : rectangulaire ou circulaire, une forme analytique peut être trouvée. Par contre, dans le cas d'une forme plus complexe et quelconque, nous avons fait appel à un calcul de valeurs propres et de vecteurs propres. Diverses sections de formes quelconques, convexes ou concaves, avec ou sans présence de métal à l'intérieur ont été étudiées.

Des reconstitutions de cartographies de champ obtenues de manière expérimentale, ou par utilisation d'autres logiciels ont permis de valider la méthode de décomposition du champ sur les cartographies élémentaires ainsi définies (fonctions de base). Ces reconstructions ont été réalisées sur des sections de forme rectangulaire et circulaire.

La seconde approche permet le traitement dans la zone de champ diffracté. La technique mise en œuvre est de type différences finies dans le domaine fréquentiel. Cette approche consiste à résoudre l'équation d'Helmholtz aux dérivées partielles du second ordre. Une des difficultés rencontrées a été le choix de la technique de discrétisation des dérivations spatiales : une dérivée décentrée est ainsi préférable à une dérivée centrée de par le choix du schéma adopté. Les pertes ont été introduites de manière efficace dans la cavité par l'utilisation d'un nombre d'onde complexe.

Nous avons ensuite réalisé l'hybridation des deux méthodes. Dans ce cas, la problématique se situe au niveau de l'interface au niveau de la zone de raccordement. A l'interface nous avons écrit les champs d'une part sur la base discrète de la FDFD et d'autre part sur la base modale des modes TE et TM du guide. L'utilisation de produits scalaires sur ces bases a permis de compléter notre système d'équations.

La méthode FDFD bien qu'aboutissant à une matrice creuse demande d'importantes ressources informatiques. En effet, le nombre d'inconnues augmentent comme N^3 . Au contraire, pour la méthode du développement modal, les seules inconnues sont les poids des modes. Aussi, l'hybridation permet elle de réduire le nombre d'inconnues de la FDFD dans une direction. Celui devient :

$$N_{inconnues} = N_x * N_y * (N_z - N_{z2}) + N_{mod}$$

Nous constatons donc qu'il faudrait un nombre de modes très important pour retrouver un nombre d'inconnues égal au nombre d'inconnues du problème entièrement traité par FDFD.

Nous avons dans un premier temps validé la programmation FDFD 3D proprement dite, sans développement modal, et sans brasseur. Cette validation a été effectuée sur des enceintes parallélépipédiques par comparaison avec les cartographies analytiques 3D.

Puis nous avons procédé à la validation complète de la méthode hybride, toujours par comparaison avec l'analytique, toujours sans brasseur.

Nous avons terminé par des simulations complètes, avec brasseur, et les validations effectuées n'ont pu être que de nature statistique. Les résultats visés étaient des recherches de similitudes avec des références bibliographiques ou des résultats expérimentaux sur la CRBM de Xlim. En dépit de la simplicité du brasseur **simulé**, cette étape a donné satisfaction, même lorsqu'il s'agissait de montrer que le **brasseur lui-même** n'était pas totalement satisfaisant.

La grande difficulté pour mener à bien le projet est liée à l'importance considérable de ressources informatiques mobilisées.

Perspectives d'amélioration

Comme cela a été évoqué au **paragraphe III.** du **Chapitre V**, la méthode d'hybridation permet un gain important concernant l'utilisation des ressources informatiques, tant que la fréquence n'est pas trop élevée, à cause du nombre croissant de modes. En effet nous avons vu au **Chapitre V** que la matrice de notre système était constituée de blocs de structures différentes. Un seul de ces blocs est directement affecté en cas d'augmentation de la fréquence. La version parallèle de MUMPS donne la possibilité de transmettre les coefficients de la matrice creuse par **blocs**. Nous pourrions évidemment en profiter pour augmenter la finesse du maillage. Il serait donc intéressant de constater le gain susceptible d'être obtenu en utilisant cette option.

L'autre point important qui doit à tout prix être amélioré est la simulation d'un brasseur plus réaliste, notamment par des plans autres que verticaux. Plusieurs études montrent le rôle important de celui-ci [5] [6]. Une autre possibilité serait de permettre la simulation de plusieurs brasseurs. L'amélioration constatée en expérimentation [15] devrait se retrouver en simulation. Le code réalisé aurait permis la prise en compte d'un deuxième brasseur, mais n'aurait été possible de manière efficace qu'avec l'amélioration évoquée ci-dessus de la transmission de la matrice par blocs, puisque nous poussions le système à ses limites.

La prise en compte du (ou des) brasseur(s) étant un sous-programme autonome, cette amélioration est très réaliste.

Le code ayant largement fait appel à de la programmation **modulaire**, chaque paroi de la cavité est traitée de manière indépendante (pour le moment en section rectangulaire), par des sous-programmes autonomes. Il est tout-à-fait possible de changer les propriétés d'une paroi seule (impédance de surface, présence d'ouvertures etc...), pour des cas plus variés et plus proches de la réalité.

Une autre amélioration concerne l'un des objectifs initiaux de la thèse, à savoir la généralisation de la méthode à des enceintes de sections quelconques. Nous aurions alors la possibilité de conserver toute la partie du code concernant le raccordement modal, ainsi que toute la mise en place des vecteurs propres. Les modifications à apporter à la partie FDFD 3D ne devrait pas constituer un obstacle insurmontable.

Nous pourrions aussi envisager la **généralisation** du **raccordement modal** à un nombre plus élevé de « zones perturbées » et « zones calmes » : chaque volume, suivant sa nature, serait traité par **FDFD classique** ou par **développement modal**, avec le « raccordement » appliqué à chaque « section limite », avec la même technique que celle développée dans cette thèse. Une difficulté surgirait alors dans les conditions aux limites : les différents « tronçons » concernés par le développement modal ne seraient plus tous des demi-guides court-circuités. La poursuite dans cette voie serait intéressante, avec un gain important en termes de nombre d'inconnues.

ANNEXES

Annexe 1

Conditions aux limites

Seules les conditions aux limites directement utilisées pour les besoins de cette thèse sont présentées ici, ainsi que les éléments de démonstration. On ne s'intéresse donc qu'aux interfaces air-métal, qui correspondent à des conditions sur le contour interne des cavités ou guides métalliques avec, pour les 2 milieux, des constantes $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$.

Ces conditions aux limites seront utilisées dans les programmes informatiques réalisés pour la FDFD (2D et 3D) ainsi que dans les formules analytiques permettant entre autres, l'établissement des expressions des champs électromagnétiques en ondes stationnaires, à partir des expressions en ondes progressives.

Ces formules sont fondamentales pour la mise en place du développement modal.

Composante tangentielle du champ électrique

Nous savons qu'à cause de l'effet de peau, le champ électromagnétique ne pénètre pas à l'intérieur d'un conducteur, et ce d'autant moins que le conducteur est bon.

L'amplitude du champ décroît exponentiellement, en $e^{-\frac{z}{\delta}}$ où δ est l'épaisseur de peau donnée par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}}$$

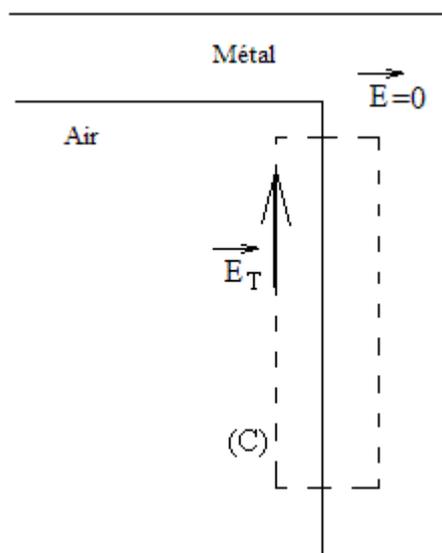
avec

$\mu =$ perméabilité du métal

$\sigma =$ conductivité du métal (en $S.m^{-1}$)

$f =$ fréquence

Cette formule fait clairement apparaître que pour un métal parfait ($\sigma = \infty$), $\delta = 0$ donc le champ électromagnétique ne pénètre pas dans le métal, et on considère qu'il est nul à l'intérieur du métal.



On considère un contour (pointillés sur le schéma ci-dessus) sur lequel on veut évaluer la circulation du champ électrique sur le contour (C) fermé : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{M}$

D'après la formule de Stokes, on sait que cette circulation est égale au flux du rotationnel de \vec{E} à travers la surface délimitée par le contour (C)

Or d'après l'équation de Maxwell : $rot.\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ et si on fait tendre la surface délimitée par (C) vers zéro en rapprochant \vec{E} de la surface du métal, on obtient un flux de $rot.\vec{E}$ nul, et donc la circulation s'annule aussi. Ceci ne peut-être réalisé que si la composante tangentielle est nulle .

Nous avons donc la première condition aux limites, à l'interface air/métal parfait :

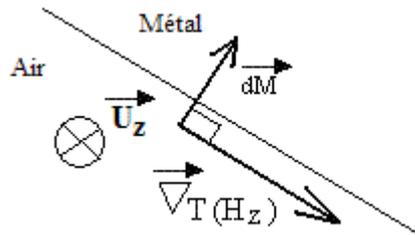
$$\boxed{\vec{E}_T = \vec{0}} \quad (\text{A1-1})$$

Cela revient à dire que sur la surface interne du guide, le champ électrique est normal à cette surface.

Dérivée normale de la composante tangentielle du champ magnétique

D'après l'équation (A2-8)' de l' Annexe 2, et à cause de ce qui vient d'être vu (A1-1), $\vec{\nabla}_T(H_Z)$ doit être tangent au contour métallique.

Si on calcule la variation infinitésimale sur un **déplacement normal** à la surface métallique



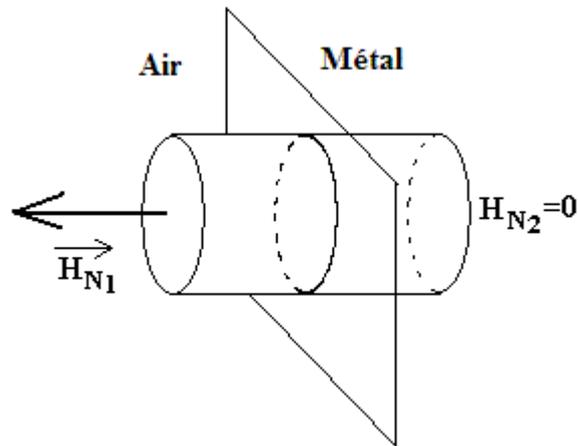
$$dH_z = \vec{\nabla}_T(H_z) \cdot d\vec{M} = 0$$

d'où nous déduisons la deuxième condition aux limites sur la surface métallique, considérée comme parfaitement conductrice :

$$\boxed{\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0} \quad (\text{A1-2})$$

expression dans laquelle la lettre « n » signifie que la dérivation partielle est évaluée dans la direction normale au contour métallique.

Composante normale du champ magnétique :



Nous considérons un cylindre infinitésimal dont l'axe est normal à la surface de séparation air-métal. Dans le métal le champ magnétique est nul. Si on fait tendre la longueur de ce cylindre vers zéro, le flux total φ du champ magnétique à travers la surface « enveloppant » ce cylindre se réduit au flux de \vec{H}_{N1} à travers la section circulaire (voir schéma ci-dessus). Comme nous avons $div.\vec{B} = 0$ qui se réduit ici à $div.\vec{H} = 0$, on a $\varphi = 0$ et ceci n'est possible que si la composante normale H_{N1} est nulle et la troisième condition aux limites est, à l'interface air-métal :

$$\boxed{\vec{H}_N = \vec{0}}$$

(A1-3)

Annexe 2

Expression des composantes transversales en fonction de la composante longitudinale, en ondes progressives

En régime harmonique, les équations de Maxwell utilisées ici s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{rot.}\vec{E} = -j\omega\mu.\vec{H} \\ \text{rot.}\vec{H} = j\omega\epsilon.\vec{E} \end{cases} \quad \text{à l'intérieur strict de la zone de mesure, } \mathbf{dépourvue \ de \ sources}$$

Les expressions générales des champs électrique et magnétique sont :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y).e^{-j\beta z} \\ \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y).e^{-j\beta z} \end{cases} \quad \text{pour une onde progressive dans le sens des z croissants}$$

Modes TM

$$\text{rot.}\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} \end{bmatrix} = -j\omega\mu \cdot \begin{bmatrix} H_x(x, y).e^{-j\beta z} \\ H_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ H_z(x, y).e^{-j\beta z} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rot.}\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y}.e^{-j\beta z} + j\beta.E_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ -j\beta.E_x(x, y).e^{-j\beta z} - \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x}.e^{-j\beta z} \\ \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x}.e^{-j\beta z} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y}.e^{-j\beta z} \end{bmatrix} = -j\omega\mu \cdot \begin{bmatrix} H_x(x, y).e^{-j\beta z} \\ H_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} H_x(x, y) = \frac{j}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega\mu} \cdot E_y(x, y) \\ H_y(x, y) = \frac{\beta}{\omega\mu} \cdot E_x(x, y) - \frac{j}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad \mathbf{(A2-1)}$$

$$\text{rot.}\vec{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x, y, z)}{\partial y} \end{bmatrix} = j\omega\epsilon \begin{bmatrix} E_x(x, y).e^{-j\beta z} \\ E_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ E_z(x, y).e^{-j\beta z} \end{bmatrix}$$

$$\text{rot.}\vec{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} .e^{-j\beta z} + j\beta.H_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ -j\beta.H_x(x, y).e^{-j\beta z} - \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} .e^{-j\beta z} \\ \frac{\partial H_y(x, y)}{\partial x} .e^{-j\beta z} - \frac{\partial H_x(x, y)}{\partial y} .e^{-j\beta z} \end{bmatrix} = j\omega\epsilon \begin{bmatrix} E_x(x, y).e^{-j\beta z} \\ E_y(x, y).e^{-j\beta z} \\ E_z(x, y).e^{-j\beta z} \end{bmatrix}$$

en se rappelant que H_z est identiquement nulle (mode TM), on arrive à

$$\begin{cases} E_x(x, y) = \frac{\beta}{\omega\epsilon} .H_y(x, y) \\ E_y(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\epsilon} .H_x(x, y) \end{cases} \quad (\text{A2-2})$$

et en reportant les expressions de $H_y(x, y)$ et $H_x(x, y)$ issus des équations (A2-1) dans (A2-2), nous obtenons :

$$\begin{cases} E_x(x, y) = \frac{\beta^2}{\omega^2 .\epsilon\mu} .E_x(x, y) - \frac{j\beta}{\omega^2 .\epsilon\mu} .\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \\ E_y(x, y) = -\frac{j\beta}{\omega^2 .\epsilon\mu} .\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + \frac{\beta^2}{\omega^2 .\epsilon\mu} .E_y(x, y) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{k_0^2 - \beta^2}{k_0^2} .E_x(x, y) = -\frac{j\beta}{k_0^2} .\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \\ \frac{k_0^2 - \beta^2}{k_0^2} .E_y(x, y) = -\frac{j\beta}{k_0^2} .\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A2-3})$$

$$\text{avec } k_0^2 = \omega^2 \epsilon\mu \text{ et } k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

Nous obtenons finalement la composante **transversale** du champ électrique en fonction de la composante **longitudinale** :

$$\boxed{\vec{E}_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} .\vec{\nabla}_T(E_z)} \quad (\text{A2-3})'$$

dans lequel l'indice « T » signifie que l'opérateur $\vec{\nabla}_T$ est le « gradient tangentiel » en dimension 2, sur les composantes x et y.

En combinant les équations (A2-2) et (A2-3) nous obtenons :

$$\begin{cases} H_x(x, y) = j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \\ H_y(x, y) = -j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A2-4})$$

Nous obtenons finalement l'expression du champ magnétique **transversal** en fonction de E_z :

$$\boxed{\vec{H}_T = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \cdot \vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(E_z)} \quad (\text{A2-4})'$$

avec \vec{U}_z vecteur unitaire porté par l'axe z, dans le sens des z croissants.

Modes TE

En se rappelant qu'on a alors E_z identiquement nul

$$\text{rot} \cdot \vec{E} \begin{bmatrix} j\beta \cdot E_y(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ -j\beta \cdot E_x(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix} = -j\omega\mu \cdot \begin{bmatrix} H_x(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ H_y(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ H_z(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix}$$

d'où nous tirons immédiatement :

$$\begin{cases} H_x(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu} \cdot E_y(x, y) \\ H_y(x, y) = \frac{\beta}{\omega\mu} \cdot E_x(x, y) \end{cases} \quad (\text{A2-5})$$

$$\text{rot} \cdot \vec{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \cdot e^{-j\beta z} + j\beta \cdot H_y(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ -j\beta \cdot H_x(x, y) \cdot e^{-j\beta z} - \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \cdot e^{-j\beta z} \\ \frac{\partial H_y(x, y)}{\partial x} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{\partial H_x(x, y)}{\partial y} \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix} = j\omega\epsilon \cdot \begin{bmatrix} E_x(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ E_y(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \\ E_z(x, y) \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} E_x(x, y) = -\frac{j}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + \frac{\beta}{\omega \epsilon} \cdot H_y(x, y) \\ E_y(x, y) = -\frac{\beta}{\omega \epsilon} \cdot H_x(x, y) + \frac{j}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A2-6})$$

et en reportant les équations (A2-6) dans (A2-5) nous obtenons :

$$\begin{cases} H_x(x, y) = \frac{\beta^2}{\omega^2 \cdot \epsilon \mu} \cdot H_x(x, y) - \frac{j\beta}{\omega^2 \cdot \epsilon \mu} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \\ H_y(x, y) = -\frac{j\beta}{\omega^2 \cdot \epsilon \mu} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + \frac{\beta^2}{\omega^2 \cdot \epsilon \mu} \cdot H_y(x, y) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} H_x(x, y) = -\frac{j\beta}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \\ H_y(x, y) = -\frac{j\beta}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A2-7})$$

Nous obtenons finalement l'expression de la composante **transversale** du champ magnétique en fonction de la composante **longitudinale** :

$$\boxed{\vec{H}_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_T(H_Z)} \quad (\text{A2-7}')$$

En reportant (A2-7) dans (A2-6) nous obtenons :

$$\begin{cases} E_x(x, y) = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \\ E_y(x, y) = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A2-8})$$

Et nous obtenons finalement l'expression du champ électrique qui est **transversal** en fonction de la composante **longitudinale** du champ magnétique :

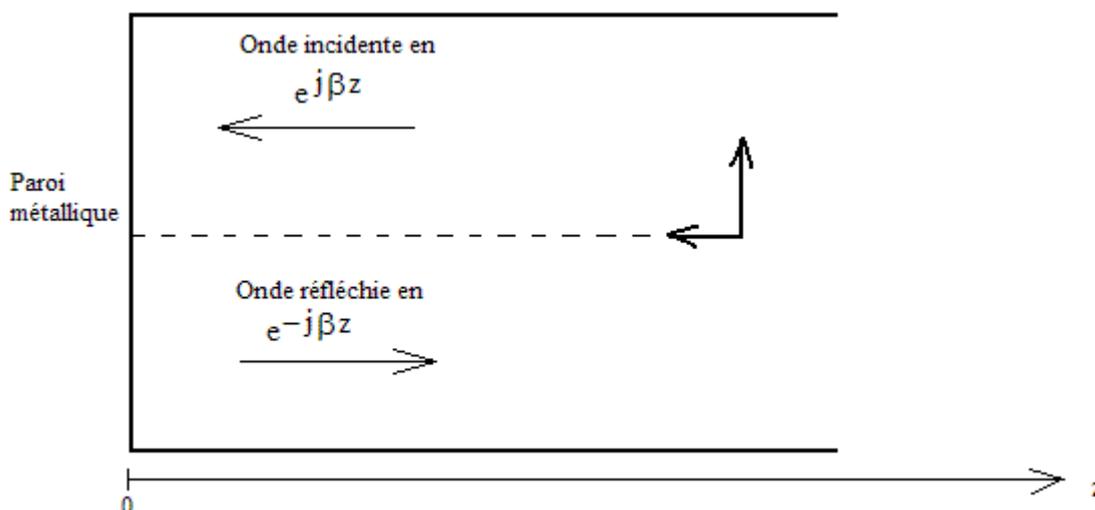
$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(H_Z)} \quad (\text{A2-8}')$$

Annexe 3

Expression du champ électromagnétique en fonction de la composante longitudinale, en ondes stationnaires

Nous cherchons à établir les expressions **générales** du champ électromagnétique en fonction de la composante longitudinale (en z) en considérant le problème d'une onde incidente, se réfléchissant normalement à la surface d'un métal parfait. Même en cas de réflexions multiples (sur la paroi en $l=L_z$ dans le cas d'une cavité vide, par exemple), nous pouvons toujours nous ramener à ce cas simple (onde incidente + onde réfléchie), seule les amplitudes changeant alors. Nous nous plaçons dans les hypothèses d'un **régime harmonique permanent**. Nous sommes alors obligés de considérer qu'il y a des pertes, **mais qu'elles n'ont pas lieu sur cette paroi considérée comme parfaitement conductrice**.

Nous utilisons donc les conditions aux limites de l'**Annexe 1** et les expressions des ondes progressives de l'**Annexe 2**



Modes TM :

Système d'ondes incidentes

Système d'ondes réfléchies

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_Z = E_Z(x, y) \cdot \vec{U}_Z \cdot e^{j\beta z} \\ \vec{E}_T = \frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T(E_Z) \cdot e^{j\beta z} \\ \vec{H}_T = -\frac{j\omega\epsilon}{k_C^2} \cdot [\vec{U}_Z \wedge \vec{\nabla}_T(E_Z)] e^{j\beta z} \end{array} \right. \xrightarrow{\vec{E}_T=0 \text{ sur la paroi en } z=0} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_Z = E_Z(x, y) \cdot \vec{U}_Z \cdot e^{-j\beta z} \\ \vec{E}_T = -\frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T(E_Z) e^{-j\beta z} \\ \vec{H}_T = -\frac{j\omega\epsilon}{k_C^2} \cdot [\vec{U}_Z \wedge \vec{\nabla}_T(E_Z)] e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

Ce qui donne pour l'expression du champ électromagnétique en **ondes stationnaires** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_z = 2E_z(x, y) \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot \vec{U}_z \\ \vec{E}_T = -\frac{2\beta}{k_C^2} \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot \vec{\nabla}_T(E_z) \\ \vec{H}_T = -\frac{2j\omega\epsilon}{k_C^2} \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot [\vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(E_z)] \end{array} \right. \quad (\text{A3-1})$$

Modes TE :

Système d'ondes incidentes

Système d'ondes réfléchies

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_z = -H_z(x, y) \cdot \vec{U}_z \cdot e^{j\beta z} \\ \vec{H}_T = -\frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T(H_z) \cdot e^{j\beta z} \\ \vec{E}_T = -\frac{j\omega\mu}{k_C^2} \cdot [\vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(H_z)] \cdot e^{j\beta z} \end{array} \right. \xrightarrow{\vec{H}_N=0 \text{ et } \vec{E}_T=0 \text{ sur la paroi en } z=0} \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_z = H_z(x, y) \cdot \vec{U}_z \cdot e^{-j\beta z} \\ \vec{H}_T = -\frac{j\beta}{k_C^2} \cdot \vec{\nabla}_T(H_z) \cdot e^{-j\beta z} \\ \vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{k_C^2} \cdot [\vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(H_z)] \cdot e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

Ce qui donne pour l'expression du champ électromagnétique en **ondes stationnaires**

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_z = -2j \cdot H_z(x, y) \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot \vec{U}_z \\ \vec{H}_T = -\frac{2j\beta}{k_C^2} \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot \vec{\nabla}_T(H_z) \\ \vec{E}_T = \frac{2\omega\mu}{k_C^2} \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot [\vec{U}_z \wedge \vec{\nabla}_T(H_z)] \end{array} \right. \quad (\text{A3-2})$$

Annexe 4

Expression du champ électromagnétique en section rectangulaire, en ondes progressives

Pour une onde se propageant dans le sens des z croissants (V est égal à E ou H, selon le cas) :

Les solutions de l'équation d'Helmholtz (2-2) ou (2-3) en V_Z sont de la forme :

$$V_Z = [A_1 \sin(k_x x) + A_2 \cos(k_x x)][A_3 \sin(k_y y) + A_4 \cos(k_y y)] \text{ en séparant les variables } x \text{ et } y.$$

En appliquant les conditions aux limites (Annexe 1) on obtient V_Z et à l'aide des résultats de l'Annexe 2, on exprime alors V_X et V_Y .

Dans toutes les écritures ci-dessous, nous avons :

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x} \quad ; \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y} \quad ; \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \underbrace{k_x^2 + k_y^2}_{k_c^2} + \beta^2 = k_0^2 \text{ avec } m, n \text{ entiers positifs}$$

Modes TM :

$$\text{Champ électrique : } \vec{E}(x, y, z) \begin{bmatrix} -\frac{j\beta}{k_c^2} E_0 k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-j\beta z} \\ -\frac{j\beta}{k_c^2} E_0 k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j\beta z} \\ E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-j\beta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A4-1})$$

$$\text{Champ magnétique : } \vec{H}(x, y, z) \begin{bmatrix} \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} E_0 k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j\beta z} \\ -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} E_0 k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-j\beta z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4-2})$$

Modes TE :

$$\text{Champ électrique : } \vec{E}(x, y, z) \begin{bmatrix} \frac{j\omega\mu}{k_c^2} H_0 k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-j\beta z} \\ -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} H_0 k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j\beta z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4-3})$$

$$\text{Champ magnétique : } \vec{H}(x, y, z) \begin{bmatrix} \frac{j \cdot \beta}{k_C^2} \cdot H_0 \cdot k_X \cdot \sin(k_X x) \cdot \cos(k_Y y) \cdot e^{-j\beta z} \\ \frac{j \cdot \beta}{k_C^2} \cdot H_0 \cdot k_Y \cdot \cos(k_X x) \cdot \sin(k_Y y) \cdot e^{-j\beta z} \\ H_0 \cdot \cos(k_X x) \cdot \cos(k_Y y) \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A4-4})$$

Annexe 5

Expression du champ électromagnétique en section rectangulaire, en ondes stationnaires.

En utilisant les résultats de l'**Annexe 3** et de l'**Annexe 4**, nous obtenons les expressions **fondamentales** pour cette thèse, et notamment pour les diverses validations **numériques/analytiques**.

En utilisant l'impédance du vide $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ et la vitesse de la lumière $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$, nous remarquons que nous avons dans les expressions de l'**Annexe 3** et de l'**Annexe 4**

$$\omega \cdot \epsilon = k_0 \cdot c \cdot \epsilon = \frac{k_0}{Z_0} \quad \text{et} \quad \omega \cdot \mu = k_0 \cdot c \cdot \mu = k_0 \cdot Z_0$$

Modes TM :

$$\vec{e}^{TM} = \begin{bmatrix} -2 \frac{\beta \cdot E_0}{k_C^2} \cdot \sin(\beta z) \cdot k_x \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ -2 \frac{\beta \cdot E_0}{k_C^2} \cdot \sin(\beta z) \cdot k_y \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \\ 2 \cdot E_0 \cdot \cos(\beta z) \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}^{TM} = \begin{bmatrix} 2j \frac{k_0 \cdot E_0}{Z_0 \cdot k_C^2} \cdot \cos(\beta z) \cdot k_y \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \\ -2j \frac{k_0 \cdot E_0}{Z_0 \cdot k_C^2} \cdot \cos(\beta z) \cdot k_x \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modes TE :

$$\vec{e}^{TE} = \begin{bmatrix} 2 \frac{k_0 \cdot Z_0 \cdot H_0}{k_C^2} \cdot \sin(\beta z) \cdot k_y \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ -2 \frac{k_0 \cdot Z_0 \cdot H_0}{k_C^2} \cdot \sin(\beta z) \cdot k_x \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

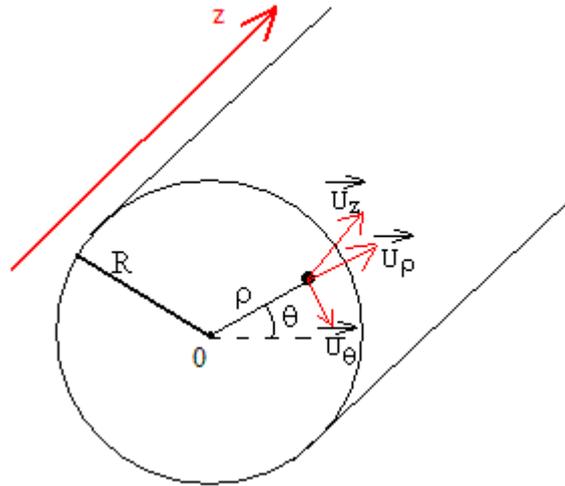
$$\vec{h}^{TE} = \begin{bmatrix} 2j \frac{\beta \cdot H_0}{k_c^2} \cdot \cos(\beta z) \cdot k_x \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \\ 2j \frac{\beta \cdot H_0}{k_c^2} \cdot \cos(\beta z) \cdot k_y \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ -2j \cdot H_0 \cdot \sin(\beta z) \cdot \cos(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \end{bmatrix}$$

Annexe 6

Expression du champ électromagnétique en section circulaire, en ondes progressives

Nous utilisons le système de coordonnées cylindriques, mieux adapté à la symétrie de révolution.

Les équations (A2-3)',(A2-3)',(A2-4)',(A2-7)',(A2-8)' utilisent des expressions des composantes longitudinales ne dépendant que des variables « transversales » du type $E_z(x,y)$ ou $H_z(x,y)$ gardent toute leur validité, si on les remplace par des expressions dépendant des variables « transversales » ρ et θ .



Tout point à l'intérieur du guide est repéré par (ρ, θ, z)

L'équation d'Helmholtz s'écrit alors avec $V=E_z$ ou $V=H_z$ suivant le cas :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + k_c^2 \cdot V = 0} \quad [3] \quad (\text{A6-1})$$

qui, en séparant les variables, peut se décomposer en un système

$$\begin{cases} V(\rho, \theta) = f(\rho) \cdot g(\theta) \\ \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 g}{d\theta^2} + m^2 = 0 \\ \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{df}{d\rho} + k_c^2 \left(1 - \frac{m^2}{k_c^2 \cdot \rho^2} \right) \cdot f = 0 \end{cases} \quad [3] \quad (\text{A6-2})$$

dont les solutions sont données par :

$$\boxed{V_z(\rho, \theta) = A \cdot \cos(m \cdot \theta + \varphi) \cdot J_m(k_c \cdot \rho)} \quad (\text{A6-3})$$

où J_m est la **fonction de Bessel** d'ordre m .

En appliquant les conditions aux limites (**Annexe 1**) nous obtenons V_z .

Pour les **modes TM**, V_z est identifié à E_z et la condition aux limites $\vec{E}_T = \vec{0}$ en $\rho=R$ impose :

$k_C \cdot R = X_{m,n}$, où $X_{m,n}$ est la $n^{\text{ème}}$ racine de la fonction de Bessel d'ordre m .

Nous obtenons donc les diverses valeurs de la constante de propagation transversale, correspondant à des modes différents, chacun étant caractérisé par un couple d'entiers positifs (m,n) .

$$\boxed{(k_C)_{m,n} = \frac{X_{m,n}}{R}} \quad m \text{ pouvant être nul}$$

Pour les **modes TE**, V_z est identifié à H_z et la condition aux limites $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ qui s'écrit ici

$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0$ impose : $k_C \cdot R = X'_{m,n}$, où $X'_{m,n}$ est la $n^{\text{ème}}$ racine de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre m .

Nous obtenons donc les diverses valeurs de la constante de propagation transversale, correspondant à des modes différents, chacun étant caractérisé par un couple d'entiers positifs (m,n) .

$$\boxed{(k'_C)_{m,n} = \frac{X'_{m,n}}{R}} \quad m \text{ pouvant être nul}$$

L'équation (**A2-3**)' permet d'obtenir les coordonnées dans le trièdre **local** $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$ du champ électrique pour une onde se propageant dans le sens des z croissants :

Modes TM :

$$\vec{E}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{j \cdot \beta}{k_C} \cdot E_0 \cdot J'_m(k_C \cdot \rho) \cdot \cos(m \cdot \theta + \varphi) \cdot e^{-j\beta z} \\ \frac{j \cdot m \cdot \beta}{k_C^2 \cdot \rho} \cdot E_0 \cdot J_m(k_C \cdot \rho) \cdot \sin(m \cdot \theta + \varphi) \cdot e^{-j\beta z} \\ E_0 \cdot J_m(k_C \cdot \rho) \cdot \cos(m \cdot \theta + \varphi) \cdot e^{-j\beta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A6-4})$$

Remarque : La composante en \vec{U}_θ n'est pas infinie en $\rho = 0$ car si $m \neq 0$, les fonctions de Bessel $J_m(x)$ s'annulent en $x=0$, et si $m=0$, le numérateur s'annule aussi.

Pour le champ magnétique, on utilise l'équation (**A2-4**)'

$$\vec{H}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{j\omega\epsilon m}{k_C^2 \rho} E_0 J_m(k_C \rho) \sin(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ -\frac{j\omega\epsilon}{k_C} E_0 J'_m(k_C \rho) \cos(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6-5})$$

Modes TE : Pour le champ électrique, on utilise l'équation (A2-8)'

$$\vec{E}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} \frac{j\omega\mu}{k_C^2 \rho} H_0 m J_m(k'_C \rho) \sin(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ \frac{j\omega\mu}{k'_C} H_0 J'_m(k'_C \rho) \cos(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6-6})$$

et pour le champ magnétique, on utilise l'équation (A2-7)'

$$\vec{H}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{j\beta}{k'_C} H_0 J'_m(k'_C \rho) \cos(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ \frac{j m \beta}{k_C^2 \rho} H_0 J_m(k'_C \rho) \sin(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \\ H_0 J_m(k'_C \rho) \cos(m\theta + \varphi) e^{-j\beta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A6-7})$$

Annexe 7

Expression du champ électromagnétique en section circulaire, en ondes stationnaires

Les équations (A3-1) et (A3-2) utilisent des expressions des composantes longitudinales ne dépendant que des variables « transversales » du type $E_z(x,y)$ ou $H_z(x,y)$ gardent toute leur validité, si on les remplace par des expressions dépendant des variables « transversales » ρ et θ .

Nous obtenons donc pour les modes stationnaires :

Modes TM

$$\vec{E}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{2\beta}{k_c} E_0 J'_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \sin(\beta z) \\ \frac{2m\beta}{k_c^2 \rho} E_0 J_m(k_c \rho) \sin(m\theta + \varphi) \sin(\beta z) \\ 2E_0 J_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \cos(\beta z) \end{bmatrix} \quad (\text{A7-1})$$

$$\vec{H}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{2j\omega\epsilon m}{k_c^2 \rho} E_0 J_m(k_c \rho) \sin(m\theta + \varphi) \cos(\beta z) \\ -\frac{2j\omega\epsilon}{k_c} E_0 J'_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \cos(\beta z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7-2})$$

Modes TE

$$\vec{E}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} \frac{2\omega\mu}{k_c^2 \rho} H_0 m J_m(k_c \rho) \sin(m\theta + \varphi) \sin(\beta z) \\ \frac{2\omega\mu}{k_c} H_0 J'_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \sin(\beta z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7-3})$$

$$\vec{H}(\rho, \theta, z) \begin{bmatrix} -\frac{2j\beta}{k_c} H_0 J'_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \cos(\beta z) \\ \frac{2j m \beta}{k_c^2 \rho} H_0 J_m(k_c \rho) \sin(m\theta + \varphi) \cos(\beta z) \\ -2j H_0 J_m(k_c \rho) \cos(m\theta + \varphi) \sin(\beta z) \end{bmatrix} \quad (\text{A7-4})$$

Annexe 8

Produit scalaire en section rectangulaire

Nous obtenons, à partir des expressions des champs électrique et magnétique établies en **Annexe 5**, les composantes longitudinales pour une cavité de section rectangulaire de dimensions respectives L_X , L_Y et L_Z dont l'excitation (qui peut être une antenne, une onde illuminant une ouverture de la cavité etc...) en régime harmonique a une pulsation ω :

$$\begin{cases} e_z^{TM} = 2.E_0 \cdot \cos(\beta z) \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \\ h_z^{TM} = 0 \end{cases}$$

où les coefficients k_x , k_y et β sont caractéristiques du **mode de guide** $TM_{m,n}$ (m et n , entiers positifs) et donnés par :

$$k_x = \frac{m \cdot \pi}{L_X} \quad ; \quad k_y = \frac{n \cdot \pi}{L_Y} \quad ; \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \underbrace{k_x^2 + k_y^2}_{k_c^2} + \beta^2 = k_0^2$$

et où on a $\beta = \frac{p \cdot \pi}{L_Z}$ **seulement** si on considère une cavité **sans brasseur**

Modes TM

Considérons l'expression suivante, **évaluée dans une section droite à la côte z** :

$I = \int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} e_z^{TM} \cdot e_z^{TM} \cdot dx dy$ dans laquelle e_z^{TM} et e_z^{TM} sont deux modes TM correspondant à des couples d'entiers (m,n) et (m',n'), associés à des constantes k_x, \dots, k'_x etc...

Nous avons :

$$I = 4E_0^2 \cdot \cos(\beta z) \cdot \cos(\beta' z) \int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} \sin(k_x x) \cdot \sin(k'_x x) \cdot \sin(k_y y) \sin(k'_y y) dx dy$$

$$I = 4E_0^2 \cdot \cos(\beta z) \cdot \cos(\beta' z) \underbrace{\int_0^{L_X} \sin(k_x x) \cdot \sin(k'_x x) \cdot dx}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{L_Y} \sin(k_y y) \cdot \sin(k'_y y) \cdot dy}_{I_2}$$

Supposons $k_x \neq k'_x$

Nous avons alors :

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_X} \{ \cos[(k_x - k'_x) \cdot x] - \cos[(k_x + k'_x) \cdot x] \} dx$$

A cause du fait que $k_x L_X = m \cdot \pi$, nous avons donc $I_1 = 0$

De la même manière, si $k_y \neq k'_y$, à cause du fait que $k_y L_Y = n \cdot \pi$, nous avons $I_2 = 0$

Et nous aboutissons finalement au résultat

$$I = 0 \text{ si } (k_x, k_y) \neq (k'_x, k'_y)$$

Dans le cas où $(k_x, k_y) = (k'_x, k'_y)$ nous sommes amenés au calcul suivant :

$$I = 4E_0^2 \cdot \cos^2(\beta z) \cdot \int_0^{L_x} \sin^2(k_x x) \cdot dx \cdot \int_0^{L_y} \sin^2(k_y y) \cdot dy$$

$$I = 0 \text{ si } (k_x = 0 \text{ ou } k_y = 0)$$

$$I = E_0^2 \cdot \cos^2(\beta z) \cdot L_x \cdot L_y \text{ si } (k_x \neq 0 \text{ et } k_y \neq 0)$$

Le cas $k_x=0$ ou $k_y=0$ est un cas **trivial**, correspondant à un champ identiquement nul dans toute l'enceinte .

Considérons une cartographie de champ e_z qui peut, comme nous l'avons vu plus haut s'écrire comme une combinaison linéaire de modes élémentaires :

$$e_z = \sum_{m,n} A_{m,n}^{TM} \cdot e_{z\ m,n} \tag{A8-1}$$

Utilisons les résultats ci-dessus pour calculer l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z\ m,n}^{TM} \cdot e_z \cdot dx \cdot dy = A_{m,n}^{TM} \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TM}$$

avec $K^{TM} = \begin{cases} 1 & \text{si } (m \neq 0 \text{ et } n \neq 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où, en considérant $\cos(\beta \cdot z)$ comme étant non nul, et en envisageant le cas $m \neq 0$ et $n \neq 0$

$$A_{m,n}^{TM} = \frac{1}{E_0^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TM}} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z\ m,n}^{TM} \cdot e_z \cdot dx \cdot dy \tag{A8-2}$$

Nous voyons donc que si nous définissons un produit scalaire (pour le moment seulement pour les champs électriques) dans lequel chaque vecteur est une cartographie dans une section de cote z :

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot dx \cdot dy$$

Nous constatons que deux cartographies e_{z1} et e_{z2} correspondant à deux modes **de base** TM différents, donnent un résultat nul, et sont donc **orthogonales**.

En revanche, le produit scalaire d'une cartographie correspondant à un mode **de base** par elle-même donne un résultat non nul.

De plus, grâce à la formule **(A8-2)**, le produit scalaire d'une combinaison linéaire des modes de base TM par un vecteur de base, permet de calculer le poids de ce mode.

Remarque : Le produit scalaire d'une cartographie correspondant à un mode TE, dans lequel, par définition la composante en e_z est identiquement nulle, donne de manière évidente un résultat nul.

Cette définition de produit scalaire permet donc de « séparer » (lorsqu'on effectue le produit scalaire d'une cartographie quelconque par un mode de base) non seulement les modes TM différents, mais aussi tous les modes TE.

Modes TE

De manière identique à ce qui a été fait pour les modes TM, nous pouvons calculer l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_z^{TE} \cdot h_z^{TE} \cdot dx dy$$

$$I = 2jH_0 \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot 2jH_0 \cdot \sin(\beta' \cdot z) \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \cos(k_x x) \cdot \cos(k'_x x) \cdot \cos(k_y y) \cdot \cos(k'_y y) \cdot dx \cdot dy$$

$$I = -4H_0^2 \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot \sin(\beta' \cdot z) \underbrace{\int_0^{L_x} \cos(k_x x) \cdot \cos(k'_x x) \cdot dx}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{L_y} \cos(k_y y) \cdot \cos(k'_y y) \cdot dy}_{I_2}$$

Supposons $(k_x, k_y) \neq (k'_x, k'_y)$

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_x} \{ \cos[(k_x + k'_x) \cdot x] + \cos[(k_x - k'_x) \cdot x] \} dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_y} \{ \cos[(k_y + k'_y) \cdot y] + \cos[(k_y - k'_y) \cdot y] \} dy$$

Le seul cas pour lequel nous avons $I_1 \neq 0$ et $I_2 \neq 0$ est $(k_x, k_y) = (k'_x, k'_y)$

Dans le cas de nos hypothèses, nous avons donc : $I_1 \cdot I_2 = 0$

Et nous avons finalement

$$\boxed{I = 0 \text{ si } (k_x, k_y) \neq (k'_x, k'_y)}$$

Dans le cas où $(k_x, k_y) = (k'_x, k'_y)$ nous sommes ramenés au calcul suivant :

$$I = -4 \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) \cdot \int_0^{L_x} \cos^2(k_x x) \cdot dx \cdot \int_0^{L_y} \cos^2(k_y y) \cdot dy$$

$$I = -H_0^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TE}$$

$$\text{avec } K^{TE} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_x \neq 0 \text{ et } k_y \neq 0 \\ 2 & \text{si } (k_x = 0 \text{ et } k_y \neq 0) \text{ ou } (k_x \neq 0 \text{ et } k_y = 0) \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si nous écrivons une cartographie h_z comme une combinaison linéaire des cartographies **de base** :

$$h_z = \sum_{p,q} A_{p,q}^{TE} \cdot h_{z,p,q}$$

Utilisons les résultats ci-dessus pour calculer l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z,p,q}^{TE} \cdot h_z \cdot dx \cdot dy = -A_{p,q}^{TE} \cdot H_0^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TE}$$

$$\text{avec } K^{TE} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p \neq 0 \text{ et } q \neq 0) \\ 2 & \text{si } (p = 0 \text{ et } q \neq 0) \text{ ou } (p \neq 0 \text{ et } q = 0) \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où nous obtenons, en considérant $\sin(\beta \cdot z)$ comme étant non nul

$$A_{p,q}^{TE} = -\frac{1}{H_0^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot K^{TE}} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z,p,q}^{TE} \cdot h_z \cdot dx \cdot dy \quad (\text{A8-3})$$

Nous voyons donc que si nous définissons un produit scalaire dans lequel chaque vecteur est une cartographie dans une section de cote z :

$$\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot dx \cdot dy$$

Nous constatons que deux cartographies h_{z1} et h_{z2} correspondant à deux modes **de base** TE différents, donnent un résultat nul, et sont donc **orthogonales**.

En revanche, le produit scalaire d'une cartographie correspondant à un mode **de base** par elle-même donne un résultat non nul.

De plus, grâce à la formule (A8-3), le produit scalaire d'une combinaison linéaire des modes de base TE par un vecteur de base, permet de calculer le poids de ce mode.

Remarque : Le produit scalaire d'une cartographie correspondant à un mode TM, dans lequel, par définition la composante en h_z est identiquement nulle, donne de manière évidente un résultat nul.

Cette définition de produit scalaire permet donc de « séparer » (lorsqu'on effectue le produit scalaire d'une cartographie quelconque par un mode de base) non seulement les modes TE différents, mais aussi tous les modes TM.

En conclusion, nous constatons que nous avons défini un produit scalaire, qui ne met en jeu que les composantes longitudinales (e_z pour les modes TM et h_z pour les modes TE), pour lequel les vecteurs de base (une cartographie dans une section) sont orthogonaux deux à deux.

D'autre part le produit scalaire d'une cartographie quelconque (combinaison linéaire des modes de base) par un mode de base (TM ou TE) permet de calculer le poids de ce mode, grâce aux formules (A8-2) et (A8-3).

Annexe 9

Produit scalaire en section circulaire

On note R le rayon de cette section.

Nous définissons un produit scalaire « calqué » sur celui défini en section rectangulaire :

$$\boxed{\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} e_{z1} \cdot e_{z2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta} \quad \text{pour les modes TM}$$

$$\boxed{\langle \vec{h}_1 | \vec{h}_2 \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} h_{z1} \cdot h_{z2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta} \quad \text{pour les modes TE}$$

expressions dans lesquelles les vecteurs représentent des cartographies dans une section droite des composantes en z comme définies précédemment.

D'après l'Annexe 6, l'expression générale de la composante en z, pour les modes TM et TE :

$$\boxed{V_z(\rho, \theta) = A \cdot \cos(m \cdot \theta) \cdot J_m(k_c \cdot \rho)} \quad \text{(A9-1)}$$

Le produit scalaire, sur une **section circulaire** pour les 2 cas TM et TE donne l'intégrale notée I

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} V_{z1} \cdot V_{z2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = A_1 \cdot A_2 \underbrace{\int_0^R \rho \cdot J_{m_1}(k_{c1} \cdot \rho) \cdot J_{m_2}(k_{c2} \cdot \rho) \cdot d\rho}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m_1 \cdot \theta) \cos(m_2 \cdot \theta) \cdot d\theta}_{I_2}$$

Nous constatons immédiatement que dès que $m_1 \neq m_2$ nous avons $I_2 = 0$ et donc $I = 0$.

L'orthogonalité entre 2 modes différant par les valeurs de m est donc montrée.

Dans le cas où 2 modes diffèrent par les valeurs de k_c , (avec $m_1 = m_2$), nous sommes amenés à étudier I_1 .

Préliminaires :

$J_m(k_c \cdot \rho)$ est solution de l'équation d'inconnue f (Annexe 6)

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{df}{d\rho} + k_c^2 \left(1 - \frac{m^2}{k_c^2 \cdot \rho^2} \right) \cdot f = 0$$

Nous avons donc $\rho^2 \cdot \frac{d^2 J_m(k_c \rho)}{d\rho^2} + \rho \cdot \frac{dJ_m(k_c \rho)}{d\rho} + k_c^2 \rho^2 \cdot J_m(k_c \rho) - m^2 \cdot J_m(k_c \rho) = 0$

$$\boxed{\rho \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_c \rho)}{d\rho} \right] + (k_c^2 \rho^2 - m^2) \cdot J_m(k_c \rho) = 0} \quad \text{(A9-2)}$$

Si nous considérons 2 solutions différant seulement par des valeurs distinctes k_{c1} et k_{c2}

Nous avons d'après (A9-2) :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} \right] + \left(k_{C1}^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) \cdot J_m(k_{C1}\rho) = 0 \\ \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \right] + \left(k_{C2}^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) \cdot J_m(k_{C2}\rho) = 0 \end{cases}$$

$$J_m(k_{C2}\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} \right] - J_m(k_{C1}\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \right]$$

d'où :

$$= -k_{C1}^2 \rho \cdot J_m(k_{C1}\rho) \cdot J_m(k_{C2}\rho) + k_{C2}^2 \rho \cdot J_m(k_{C1}\rho) \cdot J_m(k_{C2}\rho)$$

Nous pouvons évaluer l'intégrale ci-dessous par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} (k_{C2}^2 - k_{C1}^2) \int_0^R \rho J_m(k_{C1}\rho) J_m(k_{C2}\rho) \cdot d\rho &= \left[\rho J_m(k_{C2}\rho) \frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} \right]_0^R - \int_0^R \rho \frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} d\rho \\ &\quad - \left[\rho J_m(k_{C1}\rho) \frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \right]_0^R + \int_0^R \rho \frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} d\rho \end{aligned}$$

$$(k_{C2}^2 - k_{C1}^2) \int_0^R \rho J_m(k_{C1}\rho) J_m(k_{C2}\rho) \cdot d\rho = R \cdot J_m(k_{C2} \cdot R) \left[\frac{dJ_m(k_{C1}\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=R} - R \cdot J_m(k_{C1} \cdot R) \left[\frac{dJ_m(k_{C2}\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=R}$$

(A9-3)

Le deuxième membre de l'équation (A9-3), que ce soit pour des modes TM ou TE, est nul à cause des conditions aux limites en $\rho = R$ (Annexe 1 et Annexe 6). Puisque $k_{C2} \neq k_{C1}$ par hypothèse, c'est donc l'intégrale qui est nulle.

Nous venons donc de démontrer que si $k_{C2} \neq k_{C1}$, alors :

$$\int_0^R \rho J_m(k_{C1}\rho) J_m(k_{C2}\rho) \cdot d\rho = 0$$

Cette intégrale n'est rien d'autre que I_1 et nous obtenons bien le résultat recherché, à savoir que 2 modes différents, que ce soit par les valeurs de m , ou par les valeurs de k_C donnent un résultat nul pour le produit scalaire défini, et sont donc **orthogonaux**.

Cherchons à évaluer maintenant le produit scalaire d'un mode par lui-même.

En prenant l'équation (A9-2) et en multipliant le tout par $2 \cdot \frac{dJ_m(k_C\rho)}{d\rho}$ nous obtenons :

$$2\rho \cdot \frac{dJ_m(k_C \rho)}{d\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dJ_m(k_C \rho)}{d\rho} \right] + 2(k_C^2 \cdot \rho^2 - m^2) J_m(k_C \rho) \cdot \frac{dJ_m(k_C \rho)}{d\rho} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \frac{dJ_m(k_C \rho)}{d\rho} \right)^2} + \underbrace{\hspace{15em}}_{(k_C^2 \cdot \rho^2 - m^2) \frac{dJ_m^2(k_C \rho)}{d\rho}} = 0$$

en intégrant, nous arrivons donc à :

$$\int_0^R \frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \frac{dJ_m(k_C \rho)}{d\rho} \right)^2 \cdot d\rho = - \int_0^R (k_C^2 \cdot \rho^2 - m^2) \frac{dJ_m^2(k_C \rho)}{d\rho} \cdot d\rho$$

$$\left(R \cdot \left[\frac{dJ_m}{d\rho} \right]_{\rho=R} \right)^2 = -k_C^2 \cdot \int_0^R \rho^2 \frac{dJ_m^2(k_C \rho)}{d\rho} \cdot d\rho + m^2 \cdot [J_m^2(k_C R) - J_m^2(0)] \quad (\text{A9-4})$$

avec $\int_0^R \rho^2 \frac{dJ_m^2(k_C \rho)}{d\rho} \cdot d\rho = [\rho^2 \cdot J_m^2(k_C \rho)]_0^R - \int_0^R 2\rho \cdot J_m^2(k_C \rho) \cdot d\rho$

que nous reportons dans l'équation (A9-4)

$$\left(R \cdot \left[\frac{dJ_m}{d\rho} \right]_{\rho=R} \right)^2 = -k_C^2 \cdot \left[R^2 J_m^2(k_C R) - \int_0^R 2\rho J_m^2(k_C \rho) \cdot d\rho \right] + m^2 \cdot [J_m^2(k_C R) - J_m^2(0)]$$

que nous réécrivons

$$-k_C^2 \cdot \int_0^R 2\rho J_m^2(k_C \rho) \cdot d\rho = -(k_C^2 R^2 - m^2) \cdot J_m^2(k_C R) - \underbrace{m^2 \cdot J_m^2(0)}_{=0} - \left(R \cdot \left[\frac{dJ_m}{d\rho} \right]_{\rho=R} \right)^2$$

et nous arrivons à :

$$\int_0^R \rho J_m^2(k_C \rho) \cdot d\rho = \frac{1}{2k_C^2} (k_C^2 R^2 - m^2) \cdot J_m^2(k_C R) + \frac{1}{2k_C^2} \left(R \cdot \left[\frac{dJ_m}{d\rho} \right]_{\rho=R} \right)^2$$

En utilisant la propriété des fonctions de Bessel permettant le calcul de la dérivée de la fonction d'ordre m en fonction des fonctions de Bessel d'ordre m et m+1 :

$$\frac{d[J_m(k_C \rho)]}{d\rho} = -k_C \cdot J_{m+1}(k_C \rho) + \frac{m}{\rho} \cdot J_m(k_C \rho)$$

dans le cas de modes TM, à cause de la condition aux limites, il ne reste que le 2^{ème} terme du second membre et nous avons finalement :

$$\int_0^R \rho J_m^2(k_C \rho) . d\rho = \frac{R^2}{2} . J_{m+1}^2(k_C R)$$

modes TM

Dans le cas des modes TE, seul le 1^{er} terme du second membre est non nul et nous avons :

$$\int_0^R \rho J_m^2(k_C \rho) . d\rho = \frac{1}{2k_C^2} (k_C^2 R^2 - m^2) . J_m^2(k_C R)$$

modes TE

Les deux intégrales ci-dessus ne sont rien d'autre que I_1 et nous permettent d'obtenir une valeur du produit scalaire d'un mode TM ou TE par lui-même en effectuant le produit $I=I_1 . I_2$

I_2 se calcule aisément par :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(m . \theta) . d\theta = K . \pi$$

$$\text{avec } K = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

et nous obtenons finalement les formules **analytiques** permettant d'obtenir le poids d'un mode, dans une combinaison linéaire des divers modes de base :

pour les modes TM :
$$e_Z = \sum_{m,n} A_{m,n}^{TM} . e_{Z m,n}$$

nous avons alors :
$$\int_0^R \int_0^{2\pi} e_{Z m,n}^{TM} . e_Z . \rho . d\rho . d\theta = A_{m,n}^{TM} . \frac{R^2}{2} . J_{m+1}^2(k_C R) . K\pi$$

d'où nous déduisons le poids :
$$A_{m,n}^{TM} = \frac{2}{R^2 . J_{m+1}^2(k_C R) . K\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} e_{Z m,n}^{TM} . e_Z . \rho . d\rho . d\theta$$
 (A9-5)

pour les modes TE :
$$h_Z = \sum_{p,q} A_{p,q}^{TE} . h_{Z p,q}$$

nous avons alors
$$\int_0^R \int_0^{2\pi} h_{Z p,q}^{TE} . h_Z . \rho . d\rho . d\theta = A_{p,q}^{TE} . \frac{1}{2k_C^2} (k_C^2 R^2 - p^2) . J_p^2(k_C R) . K\pi$$

d'où nous déduisons le poids :
$$A_{p,q}^{TE} = \frac{2k_C^2}{(k_C^2 R^2 - p^2) . J_p^2(k_C R) . K\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} h_{Z p,q}^{TE} . h_Z . \rho . d\rho . d\theta$$
 (A9-6)

Annexe 10

Lois statistiques utilisées dans la thèse

Loi normale :

La densité de probabilité à laquelle obéit la variable aléatoire continue x est :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
, la valeur moyenne vaut $\langle x \rangle = \mu$ et l'écart-type est égal à σ et est notée $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$

Lorsque cette loi est **centrée** ($\mu = 0$) et **réduite** ($\sigma = 1$), on l'appelle **loi de Gauss**

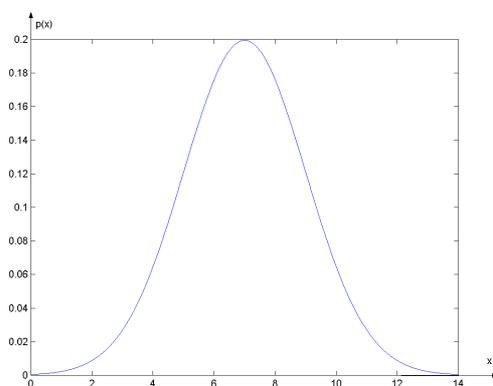


Figure 158 : Densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une **loi normale** de moyenne 7 et d'écart-type 2

Dans une **CRBM idéale**, les parties réelle et imaginaire des diverses composantes rectangulaires du champ électrique obéissent à une loi normale **centrée** (moyenne nulle) et de **même écart-type**.

Loi de Rayleigh d'ordre 2 :

La densité de probabilité est :
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

C'est la loi utilisée pour décrire le module d'un nombre complexe dont les parties **réelle** et **imaginaire** varient de **manière indépendante**, chacune selon une loi normale **centrée**, d'écart-type σ .

La valeur moyenne $\langle x \rangle = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et l'écart-type vaut $\sigma \cdot \sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}$

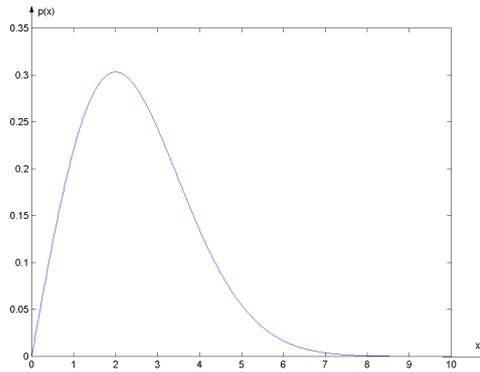


Figure 159 : Densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de **Rayleigh d'ordre 2**.
Les parties réelle et imaginaire sont centrées et possèdent un écart-type égal à 2

Dans une **CRBM idéale**, les **modules** des trois composantes rectangulaires du champ électrique obéissent chacun à une loi de Rayleigh d'ordre 2.

Loi de Rayleigh d'ordre 6 :

La densité de probabilité est :
$$p(x) = \frac{1}{8\sigma^6} x^5 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

C'est la loi utilisée pour décrire la norme d'un vecteur d'un espace de **dimension 3** dont chaque composante possède une partie **réelle** et **imaginaire** variant de **manière indépendante**, chacune selon une loi normale **centrée**, d'écart-type σ .

La valeur moyenne $\langle x \rangle = \sqrt{\frac{225\pi \cdot \sigma^2}{128}}$ et l'écart-type vaut $\sigma \cdot \sqrt{\left(6 - \frac{225\pi}{128}\right)}$

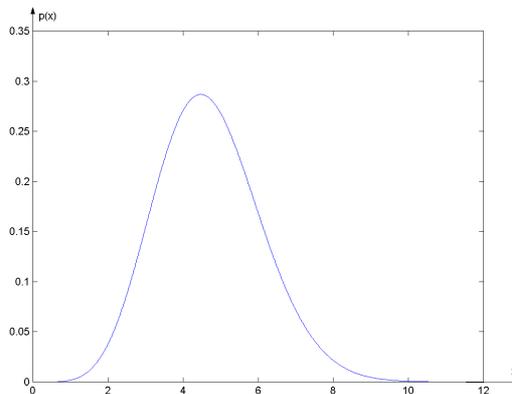


Figure 160 : Densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de **Rayleigh d'ordre 6**.
Les parties réelle et imaginaire de chaque composante rectangulaire sont centrées et possèdent un écart-type égal à 2

Loi du χ^2_N (loi du Khi-deux d'ordre N, avec N entier)

La densité de probabilité est : $p_{\chi_N^2}(x) = \frac{x^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$ dans laquelle Γ est la fonction « gamma »,

dont la restriction à un argument entier n s'obtient à partir de la factorielle :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Nous avons de plus la relation récursive : $\Gamma(z) = (z-1) \cdot \Gamma(z-1)$, avec z =réel, qui avec les valeurs initiales :

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{cases} \text{ nous permet de calculer toutes les valeurs qui nous intéressent.}$$

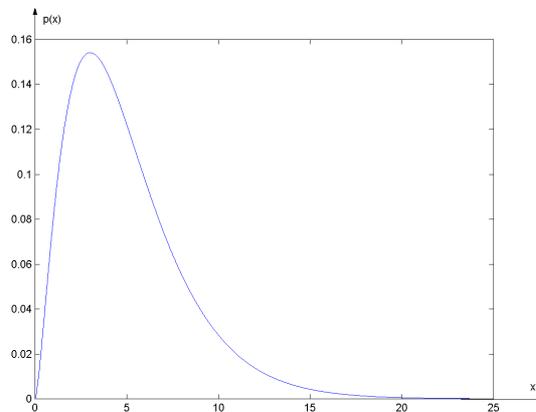


Figure 161 : Densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi du χ_N^2 avec $N=5$

C'est la loi utilisée pour décrire la somme des carrés de N variables aléatoires x_i variant chacune, **de manière indépendante**, suivant une loi **normale centrée réduite**.

$$x = \chi_N^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Test du χ^2 :

C'est le test qui permet de valider (ou invalider) le fait qu'une variable aléatoire suit (ou non) une loi théorique donnée, à partir d'un échantillon d'effectif total N . On établit dans un premier temps l'**histogramme de l'échantillon**, qui permet de ranger des effectifs en k classes :

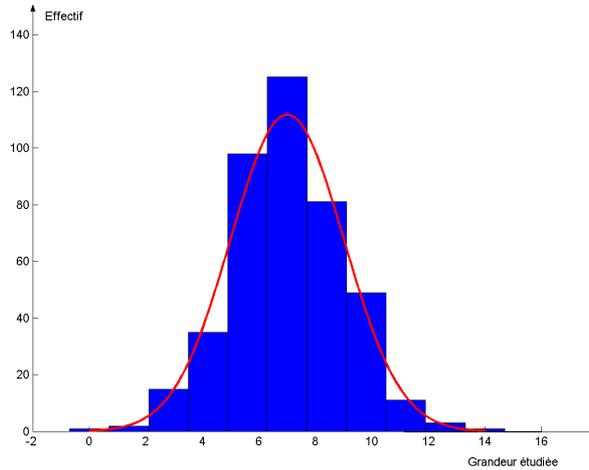


Figure 162 : Histogramme d'un échantillon comparé à la courbe d'effectifs théoriques

Nous calculons ensuite la **variable aléatoire** : $x = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$ **(A10-1)**

dans laquelle T_i et O_i représentent respectivement les valeurs des effectifs **théorique** et **observé** dans la $i^{\text{ème}}$ classe.

L'exemple de la **Figure 162** met à l'épreuve un échantillon d'effectif total égal à 400, **censé** suivre une loi **normale** de moyenne 7 et d'écart-type 2. La courbe des effectifs théoriques par classe, est tracée en rouge.

La grandeur calculée $\chi^2_{\text{observé}}$ est d'autant plus **petite** que l'échantillon **suit la loi théorique**.

La quantité $\text{prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$ est représentée par la **surface ombrée** sur la figure ci-dessous, sur laquelle est représentée la densité de probabilité de la loi χ^2_N . La valeur de N est généralement prise égale à $N=(k-3)$, si k représente le nombre de classes de l'histogramme. Certains ouvrages prennent $N=(k-1)$. On parle de « loi du khi-deux d'ordre N » ou « loi du khi-deux à N degrés de liberté ».

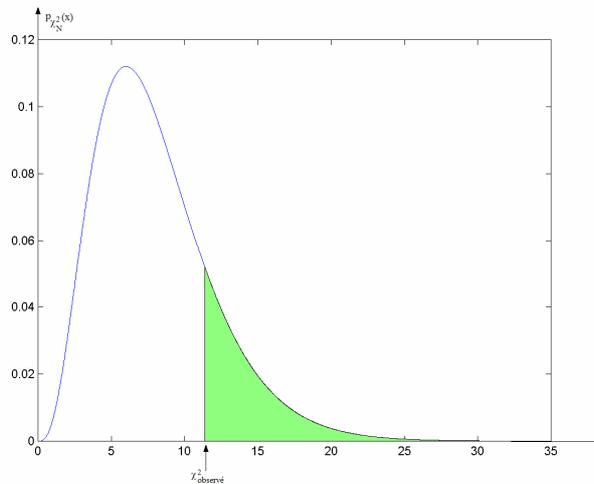


Figure 163 : Représentation graphique de la quantité $\text{prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}})$

Dans l'exemple de la **Figure 162**, il y a 11 classes, et nous choisissons donc $N=8$. Nous obtenons $\chi^2_{\text{observé}}=11.37$. Nous reportons cette valeur sur l'axe des abscisses de la **Figure 163** et nous obtenons $prob(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}) = 0.18$. Le résultat est interprété comme suit : nous avons 18% de chance d'obtenir un χ^2 supérieur à celui de l'échantillon étudié. Plus la valeur de $\chi^2_{\text{observé}}$ est élevée, plus on a de raisons de « mettre en doute » le fait que la variable aléatoire suive vraiment la loi théorique censée la décrire.

Le critère couramment retenu est « **le risque à 5 %** », ce qui signifie que tout $\chi^2_{\text{observé}}$ supérieur à la valeur limite χ^2_{α} (dans l'exemple actuel, $\chi^2_{\alpha} = 15.5$) nous amène à **rejeter la loi théorique avec un risque d'erreur égal à 5 %**. Dans le cas inverse, on ne peut pas rejeter la loi.

L'histogramme de l'échantillon de la **Figure 162** donnant une valeur $\chi^2_{\text{observé}}=11.37$, nous amène donc à conclure à la validation de la loi (ou tout au moins au « non rejet »).

Remarque très importante :

Il faut faire très attention au côté **visuel** d'un histogramme qui est **très trompeur** pour nous amener à valider une loi, en comparant l'écart entre courbes des effectifs théoriques et observés.

En effet l'**équation (A10-1)** nous montre clairement que si on double les effectifs de chaque classe, on obtient un $\chi^2_{\text{observé}}$ double, en conservant **le même aspect visuel de l'histogramme et de la courbe théorique**.

Le test du χ^2 permet de donner un **critère scientifique objectif** pour la validation d'une loi.

Nous garderons toujours à l'esprit la règle suivante : **à aspect visuel constant** le test du χ^2 donnera largement l'avantage à l'effectif total **le plus faible**.

Exemple :

Les deux graphiques ci-dessous ne diffèrent que par des effectifs qui passent du simple au double :

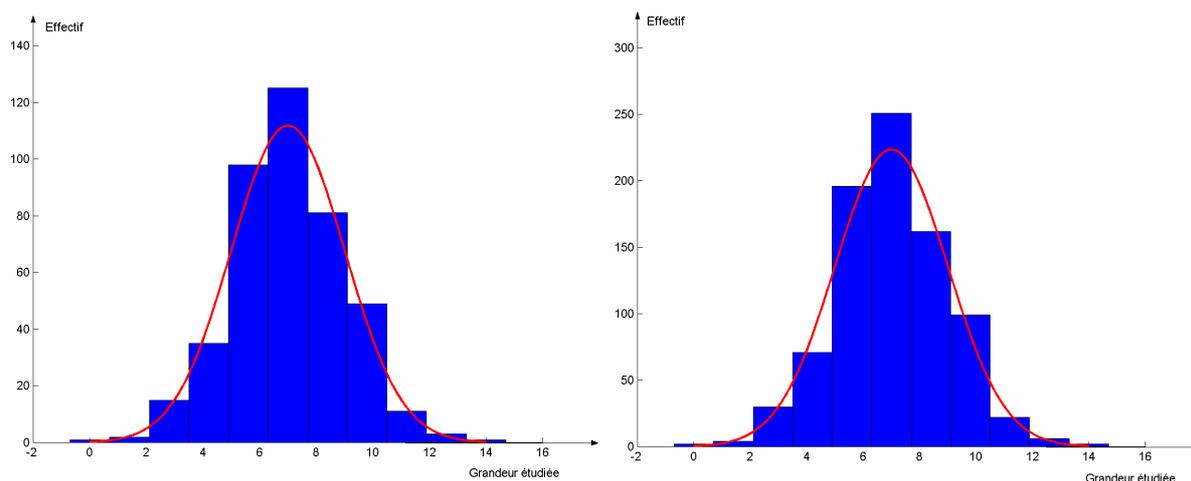


Figure 164 : Comparaison « visuelle » des effectifs théorique et observé de deux échantillons d'effectifs respectifs 400 et 800

Leurs aspects visuels identiques amèneraient, **sans précaution**, aux conclusions identiques sur une validation (ou non) de la loi théorique.

Le premier fournit $\chi^2_{\text{observé}}=11.37$ et $\text{prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}) = 0.18$ conduisant à la validation.

Le deuxième fournit $\chi^2_{\text{observé}}=22.8$ et $\text{prob}(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{observé}}) = 0.0036$ conduisant à un rejet.

Ce que nous venons de constater est **crucial** sur l'étude statistique dans une CRBM. En effet, dans cette thèse, à cause de la « numérisation » du brasseur, deux angles différents définissant la position de celui-ci, peuvent en fait correspondre au même angle « numérisé ». Si on ne repère pas cette anomalie, l'étude statistique s'en trouve faussée par un phénomène proche de celui de la **Figure 164**. (voir **Chapitre VI**)

Nous pouvons poursuivre le raisonnement « par continuité », en constatant une conséquence **idéalement** identique en cas de **corrélation** entre deux positions du brasseur. C'est une des raisons pour lesquelles, dans le **Chapitre VI** le choix d'échantillon correspondant à des positions **non consécutives** du brasseur facilitait les validations. Nous comprenons mieux l'importance de vérifier l'**indépendance des échantillons**.

Dernière remarque : pour une même valeur de $\chi^2_{\text{observé}}$, le critère est d'autant plus difficile à atteindre que N est petit. En faisant le choix $N=(k-3)$ au lieu de $N=(k-1)$, nous nous sommes placés dans le pire cas.

Annexe 11

Orthogonalité des modes en section de forme quelconque

La 2^{ème} identité de **Green** nous fournit l'égalité suivante (en 3D) :

$$\boxed{\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f) d\vec{S}}$$

dans laquelle Ω est un volume fermé délimité par la surface $\partial\Omega$ et où $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ sont deux fonctions scalaires. La surface est orientée selon la normale extérieure.

Nous identifierons f et g à E_z pour les modes TM et à H_z pour les modes TE. Supposons que nous avons au départ f et g définies **dans une section droite** perpendiculaire à l'axe z .

Nous considérons le volume obtenu par translation de cette section suivant z , entre les côtes $z=0$ et $z=Z$, comme sur la figure ci-dessous :

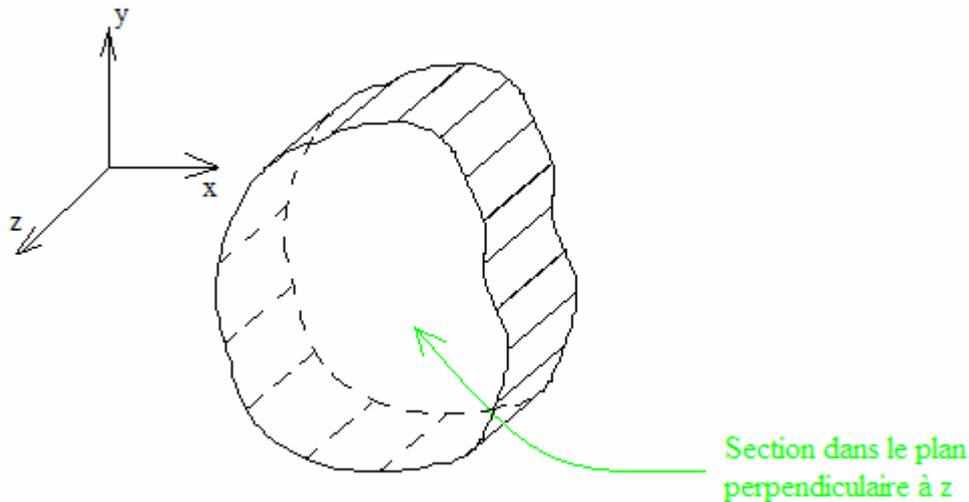


Figure 165 : Volume obtenu par translation de la section suivant z , entre les côtes $z=0$ et $z=Z$

Nous considérons par hypothèse que dans ce volume $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ ne dépendent pas de z , et nous posons $f(x,y,z)=f(x,y)$ et $g(x,y,z)=g(x,y)$.

$f(x,y)$ et $g(x,y)$ ne correspondent plus forcément à E_z (ou H_z) dans le **volume physique**, mais à des fonctions « fictives ».

Le 1^{er} membre de l'identité de Green s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \int_0^Z \left[\iint_{\text{section S}} (f \cdot \Delta_T g - g \cdot \Delta_T f) dS \right] dz = Z \cdot \iint_{\text{section S}} (f \cdot \Delta_T g - g \cdot \Delta_T f) dS$$

Le 2^{ème} membre de l'identité de Green s'écrit :

$$\int_0^Z \left[\int_{\text{Contour}} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T f) \cdot \vec{n} \cdot dC \right] dz + \underbrace{\iint_{\text{avant}} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot d\vec{S}}_0 + \underbrace{\iint_{\text{arrière}} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot d\vec{S}}_0$$

avec dC =variation infinitésimale sur le contour au point considéré et \vec{n} colinéaire à $d\vec{S}$

Les 2 intégrales sur les faces « avant » et « arrière » s'annulant, car les « gradients » sont tous orthogonaux aux vecteurs surface des faces « avant » et « arrière ».

et le 2^{ème} membre se réduit à :

$$Z \cdot \left[\int_{\text{Contour}} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T f) \cdot \vec{n} \cdot dC \right]$$

L'identité de Green se réduit à l'égalité en 2D suivante :

$$\boxed{\iint_{\text{section S}} (f \cdot \Delta_T g - g \cdot \Delta_T f) \cdot dS = \int_{\text{Contour}} (f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T g - g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_T f) \cdot \vec{n} \cdot dC}$$

Hypothèses supplémentaires sur $f(x,y)$ et $g(x,y)$: elles sont solutions de l'équation d'Helmholtz :

En omettant l'indice « T » de « tangentiel »

$$\begin{cases} \Delta f = -k_{C1}^2 \cdot f \\ \Delta g = -k_{C2}^2 \cdot g \end{cases}$$

$$\iint_{\text{Section S}} (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \cdot dS = \iint_{\text{Section S}} (-k_{C2}^2 \cdot f(x,y) \cdot g(x,y) + k_{C1}^2 \cdot f(x,y) \cdot g(x,y)) \cdot dx \cdot dy = 0$$

car le 2^{ème} membre est nul à cause des conditions aux limites :

Modes TM : $f(x,y)$ et $g(x,y)$ représentent E_Z et **s'annulent sur le contour**

Modes TE : $f(x,y)$ et $g(x,y)$ représentent H_Z et on a alors : $\overrightarrow{\text{grad}}(f \text{ ou } g) \cdot \vec{n} = 0$

D'où :

$$\boxed{(k_{C1}^2 - k_{C2}^2) \iint_{\text{Section S}} f(x,y) \cdot g(x,y) \cdot dx \cdot dy = 0}$$

Si on pose par hypothèse que $k_{C1}^2 \neq k_{C2}^2$ c'est que l'intégrale sur la section est nulle.

Nous avons donc obtenu l'orthogonalité entre 2 modes de guide différents, et ce pour les modes TM et TE, dans une section de forme quelconque.

Bibliographie

- [1] Thèse de Doctorat de Cécile Fiachetti « Modèles du champ électromagnétique aléatoire pour le calcul du couplage sur un équipement électronique en chambre réverbérante à brassage de modes et validation expérimentale » 2002
- [2] Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Patrick Lascaux, Raymond Théodor (tomes 1 et 2) , Dunod 1986
- [3] Les hyperfréquences, PUF « Que sais-je ? » n°1643 André-Jean Berteaud 1976
- [4] Les ondes hertziennes, PUF « Que sais-je ? » n°1509 Théo Kahan 1974
- [5] Thèse de Doctorat de Gérard Orjubin « Modélisation modale d'une chambre réverbérante par la méthode des éléments finis : caractérisation de la perturbation induite par la rotation du brasseur, application à l'analyse paramétrique des tests statistiques » 2005
- [6] Thèse de Doctorat de Frédéric Petit « Modélisation et simulation d'une chambre réverbérante à brassage de modes à l'aide de la méthode des différences finies dans le domaine temporel »
- [7] A compact 2-D Full-Wave Finite-Difference Frequency-Domain Method for General Guided Wave Structures ,Yong-Jiu Zhao, Ke-Li Wu, Kwok-Keung M.Cheng . IEEE Transactions on microwave theory and techniques, Vol. 50, n°7, July 2002
- [8] The introduction of Surface Resistance in the Three-Dimensional Finite-Difference Method in Frequency Domain, Detlev Hollmann, Steffen Haffa, Friedhelm Rostan and Werner Wiesbeck. IEEE Transactions on microwave theory and techniques, Vol. 41, n°5, May 1993
- [9] Improved Finite Difference Formulation in Frequency Domain for Three-Dimensional Scattering Problems, Klaus Beilinhoff, Wolfgang Heinrich, Hans L.Hartnagel. IEEE transactions on microwave theory and techniques, Vol. 40, n°3, March 1992
- [10] A Closer look at Reverberation Chambers-3D Simulation and Experimental Verification, Christian Bruns, Ruediger Vahldieck. IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°3, August 2005
- [11] Reverberating Chambers as Sources of Stochastic Electromagnetic Fields, Paolo Corona, Giuseppe Ferrara, Maurizio Migliaccio, IEEE transactions on electromagnetic compatibility Vol. 38, n° 3, August 1996.
- [12] Thirty Years in Electromagnetic Compatibility : Projects and Colleagues, David A.Hill . IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol.49, n°2, May 2007
- [13] Electronic Mode Stirring for Reverberation Chambers, David A. Hill, Vol 36, n°4, November 1994
- [14] Electromagnetic Chaos in Mode-Stirred Reverberation Enclosures, Luisa Cappetta, Maurizion Feo, Vincenzo Fiumara, Vincenzo Pierro, Innocenzo M. Pinto. IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 40, n°3, August 1998
- [15] A spectral approach for the Determination of the Reverberating Chamber Quality Factor, Paolo Corona, Fellow, IEEE, Giuseppe Ferrara, and Maurizio Migliaccio, Member, IEEE IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility, Vol 40, n°2, May 1998
- [16] Plane Wave Integral Representation for Fields in Reverberation Chambers, David A. Hill, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 40, n°3, August 1998
- [17] <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/conducti/21perman/21perman.htm>
- [18] Algèbre/Algèbre linéaire – Collection de mathématiques du CNED Volume 2 Martine KAHN
- [19] Electromagnétisme – Cours et Problèmes – Joseph A. Edminister – Mac Graw Hill, Série SCHAUM

- [20] Théorie et applications du Calcul différentiel et Intégral –Frank AYRES JR. Mac Graw Hill, Série SCHAUM
- [21] Précis de Mathématiques et de Statistiques – J.-P. TRUC, F. BAILLY – Nathan
- [22] Optique- Cours et problèmes- Eugène HECHT Mac-Graw-Hill, Série SCHAUM
- [23] Thermodynamique, fondements et applications, MASSON, J.Ph.PEREZ, A.M. ROMULUS
- [24] http://www.nag.co.uk/numeric/FL/manual/html/G01/g01_conts.html
- [25] Dictionnaire des Mathématiques - Fondements, Probabilités, Applications - Encyclopaedia UNIVERSALIS
- [26] Manuel complet du langage Fortran 90 et Fortran 95, MASSON, Patrice LIGNELET
- [27] Correspondence on the Phase Statistics of the Electromagnetic Field in Reverberating Chambers, Maurizio Migliaccio, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol 43, n° 4, November 2001
- [28] Linear Dipole Response in a Reverberation Chamber, David A. Hill, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 41, n°4, November 1999
- [29] Simulation Numérique du Brassage de Modes et Confrontation avec des Mesures de Fonction Cumulative de Distribution d'Amplitude du Champ Electromagnétique, Frédéric Hoëppe, Pierre-Nicolas Gineste, Lamine Kone, Bernard Demoulin
- [30] A Metrology Application of Reverberation Chambers : The Current Probe Calibration, Valter Mariani Primiani, Franco Moglie, Anna Pia Pastore, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°1, February 2007
- [31] Thèse de doctorat de Sébastien LALLECHERE : Modélisations numériques temporelles des CRBM en compatibilité électromagnétique. Contribution aux schémas volumes finis.
- [32] A Two-Dimensional Finite-Element Analysis of Reverberation Chambers, Charles F. Bunting, Karl J. Moeller, C. J. Reddy, and Stephen A. Searce, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 41, n°4, November 1999
- [33] Méthodes statistiques, Bernard Grais, Dunod (3^{ème} edition)
- [34] Cours en ligne de l'IUFM de Poitou-Charentes sur les Tests statistiques.
- [35] Investigation of the Field Uniformity of a Mode-stirred Chamber Using Diffusors Based on Acoustic Theory, Markus Petirsch and Adolf Josef Schwab, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 41, n°4, November 1999
- [36] Reverberation-Chamber Research—Then and Now : A Review of Early Work and Comparison With Current Understanding, Paolo Corona, John Ladbury and Gaetano Latmiral, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol 40 n°1, February 2002
- [37] Experimental Investigation and Mathematical Modeling of Design Parameters for Efficient Stirrers in Mode-Stirred Reverberation Chambers, Niklas Wellander, Olof Lundén and Mats Bäckström, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol 49 n°1, February 2007.
- [38] A Reflection Coefficient Derivation for the Q of a Reverberation Chamber, David A. Hill, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 38, N°4, November 1996
- [39] Spatial Correlation Function for Fields in a Reverberation Chamber, David A. Hill, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 37, n°1, February 1995
- [40] Radiated Emissions and Immunity of Microstrip Transmission Lines: Theory and Reverberation Chamber Measurements , David A. Hill, Dennis G. Cammel, Kenneth H. Kavcey and Galen H. Koepke, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 38, n°2, May 1996.
- [41] http://www.cem.inrets.fr/index_crbs.htm

- [42] Power Transfer Characteristics of a Microwave Reverberation Chamber, Atindra K.Mitra and Thomas F.Trost, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 38, n°2, May 1996
- [43] Effect of Local Stir and Spatial Averaging on Measurement and Testing in Mode-Tuned and Mode-Stirred Reverberation Chambers, Luk R.Arnaut, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 43, n°3, August 2001.
- [44] Operation of Electromagnetic Reverberation Chambers With Wave Diffractors at Relatively Low Frequencies, Luk R.Arnaut, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 43, n°4, November 2001.
- [45] Statistical Characterization and the Simulation of a Reverberation Chamber Using Finite-Element Techniques, Charles F. Bunting, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 44, n°1, February 2002
- [46] Microwave Field-to-Wire Coupling Measurements in Anechoic and Reverberation Chambers, Stefan Silfverskiöld, Mats Bäckström and Jörgen Lorén, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 44, n°1, February 2002
- [47] Compound Exponential Distributions for Undermoded Reverberation Chambers, Luk R. Arnaut, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 44, n°3, August 2002
- [48] Statistics of the Quality Factor of a Rectangular Reverberation Chamber, Luk R. Arnaut, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 45, n°1, February 2003
- [49] Theoretical Investigation of the Field Conditions in a Vibrating Reverberation Chamber With an Unstirred Component, Nikolaos K. Kouveliotis, Panagiotis T. Trakadas and Christos N. Capsalis, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 45, n°1, February 2003
- [50] Reciprocity in Reverberation Chamber Measurements, David A. Hill, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 45, n°1, February 2003.
- [51] Shielding Effectiveness Measurements of Materials Using Nested Reverberation Chambers, Christopher L. Holloway, David A. Hill, John Ladbury, Galen Koepke and Garzia, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 45, n°2, May 2003.
- [52] Calculated and Measured Absorption Cross Sections of Lossy Objects in Reverberation Chamber, Ulf Carlberg, Per-Simon Kildal, Andreas Wolfgang, Omid Sotoudeh and Charlie Orlenius, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 46, n°2, May 2004.
- [53] Convergence of the Reverberation Chambers to the Equilibrium Analyzed With the Finite-Difference Time-Domain Algorithm, Franco Moglie, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 46, n°3, August 2004.
- [54] Boundary Fields in Reverberation Chambers, David A. Hill, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°2, May 2005.
- [55] Extracting Electrical Material Parameters of Electrically Large Dielectric Objects From Reverberation Chamber Measurements of Absorption Cross Section, Paul Hallbjörner, Ulf Carlberg, Kent Madsén and Johan Andersson, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°2, May 2005.
- [56] HIRF Penetration Into Simplified Fuselage Using a Reverberation Chamber Approach, Tassos Panaretos, Constantine A. Balanis, and Craig R. Birtcher, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°3, August 2005.
- [57] Source Stirring Mode for Reverberation Chambers, Graziano Cerri, Valter Mariani Primiani, S. Pennesi and Paola Russo, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°4, November 2005.
- [58] Optimization of Stirrer Designs in a Reverberation Chamber, Janet Clegg, Andrew C. Marvin, John F. Dawson and Stuart J. Porter, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 47, n°4, November 2005.

- [59] Shielding Effectiveness in a Two-Dimensional Reverberation Chamber Using Finite-Element Techniques, Charles F. Bunting, IEEE Transactions on electromagnetics compatibility, Vol. 45, n°3, August 2003.
- [60] Requirements for an Effective Reverberation Chamber : Unloaded or Loaded, Christopher L. Holloway, David A. Hill, John M. Ladbury and Galen Koepke, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°1, February 2006.
- [61] FDTD Analysis of Plane Wave Superposition to Simulate Susceptibility Tests in Reverberation Chambers, Franco Moglie and Anna Pia Pastore, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°1, February 2006.
- [62] Numerical and Experimental Analysis of the Field to Enclosure Coupling in Reverberation Chamber and Comparison With Anechoic Chamber, Gabriele Gradoni, Franco Moglie, Anna Pia Pastore and Valter Mariani Primiani, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°1, February 2006.
- [63] Statistical Model of an Undermoded Reverberation Chamber, Gérard Orjubin, Elodie Richalot, Stéphanie Mengué and Odile Picon, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°1, February 2006.
- [64] Estimating the Number of Independent Samples in Reverberation Chamber Measurements From Sample Differences, Paul Hallbjörner, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°2, May 2006.
- [65] Maximum Power Available to Stress Onto the Critical Component in the Equipment Under Test When Performing a Radiated Susceptibility Test in the Reverberation Chamber, Magnus Höjjer, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°2, May 2006.
- [66] Spatial Correlation Functions of Fields in a Reverberation Chamber Based on Expansion of Spherical Bessel Functions, Liu Huikan, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°2, May 2006.
- [67] Effect of Size, Orientation, and Eccentricity of Mode Stirrers on Their Performance in Reverberation Chambers, Luk R. Arnaut, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 48, n°3, August 2006.
- [68] Maximum Field Inside a Reverberation Chamber Modeled by the Generalized Extreme Value Distribution, Gérard Orjubin, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°1, February 2007.
- [69] Transmitting Antenna's Reflected Power and its Influence on Reverberation Chamber Calibration, X.C. Wei and Er-Ping Li, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°1, February 2007.
- [70] Evaluation of Transmit Antenna Position in Reverberation Chamber, Zhiyong Yuan, Jinliang He, Shuiming Chen, Rong Zeng and Tun Li, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°1, February 2007.
- [71] On the Measurement of Total Radiated Power in Uncalibrated Reverberation Chambers, Hans Georg Krauthäuser, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°2, May 2007.
- [72] Scattering Cross Section Measurement in Reverberation Chamber, Geoffroy Lerosey and Julien de Rosny, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, November 2006.
- [73] Maximum Working Volume and Minimum Working Frequency Tradeoff in a Reverberation Chamber, Alyse Coates and Alistair P. Duffy, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°3, August 2007.

- [74] Validation of a Three-Dimensional Transmission Line Matrix (TLM) Model Implementation of a Mode-Stirred Reverberation Chamber, Alyse Coates, Hugh G. Sasse, Dawn E. Coleby, Alistair P. Duffy and Antonio Orlandi, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°4, November 2007.
- [75] Investigation of Reverberation Chamber Measurements Through High-Power Goodness-of-Fit Tests, Christophe Lemoine, Philippe Besnier and M'hamed Drissi, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°4, November 2007.
- [76] Shielding Measurements of Equipment Enclosures in the Radiating Near Field, Andrew C. Marvin and Yong Cui, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°4, November 2007.
- [77] Chaocity of a Reverberation Chamber Assessed From the Analysis of Modal Distributions Obtained by FEM, Gérard Orjubin, Elodie Richalot, Odile Picon and Olivier Legrand, IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, Vol. 49, n°4, November 2007.
- [78] A new Method For Developing Reverberation Chamber Conditions, N.K. Kouveliotis and C.N. Capsalis, National Technical University of Athens.
- [79] Thèse de doctorat de Frédéric Hoëppe, « Analyse du comportement électromagnétique des chambres réverbérantes à brassage de modes par l'utilisation de simulation numériques », décembre 2001