

# UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE SCIENCE – TECHNOLOGIE – SANTE

FACULTE des SCIENCES ET TECHNIQUES

Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes - Axe Génie Civil et Durabilité  
(GEMH&GCD)

Thèse N° 472008

## THESE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE DE LIMOGES**

Discipline : Génie Civil

Présentée et soutenue par

**Rostand MOUTOU PITTI**

Ingénieur Génie Civil de l'Université de Masuku, Gabon

Date : 15 Octobre 2008

Découplage des modes mixtes de rupture dans les matériaux viscoélastiques orthotropes : modélisation et expérimentation

Thèse dirigée par : Frédéric DUBOIS

### Jury

M. Joseph GRILL	Directeur de Recherche CNRS, Montpellier	Rapporteur
M. Alain MILLARD	Ingénieur de Recherche HDR, CEA	Rapporteur
Mme. Myriam CHAPLAIN	Maître de Conférences, LMS Bordeaux	Examinatrice
M. Joseph ABSI	Professeur, Université de Limoges	Examineur
M. Frédéric DUBOIS	Professeur, Université de Limoges	Directeur de thèse

# Avant Propos

Je tiens à remercier Monsieur Christophe PETIT, Professeur de l'Université de Limoges, responsable du Laboratoire GEMH&GCD (Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes, Axe Génie Civil et Durabilité) de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je remercie sincèrement le Professeur Frédéric DUBOIS, mon directeur de thèse. Il a accepté d'encadrer ma thèse malgré un financement réduit. Je lui suis entièrement reconnaissant pour les conseils et les directives productives qu'il a su donner à ce travail, tout le mérite de la production scientifique lui en revient également.

Tous mes sincères remerciements au Service de Coopération et d'Action Culturelle du Ministère des Affaires Etrangères Français et à l'association EGIDE pour l'octroie et la gestion de mon financement en thèse.

Toute ma gratitude à Messieurs Joseph GRIL et Alain MILLARD, respectivement Directeur de Recherche CNRS à Montpellier et Ingénieur de Recherche, HDR au CEA qui ont bien voulu, malgré leurs immenses occupations rapporter cette thèse. Tous mes sincères remerciements à leur endroit.

Je reste très sensible à l'aide apporté par l'équipe bois dans mon encadrement, notamment à Nicolas SAUVAT, Claude CHAZAL, tous maîtres de Conférence à l'Université de Limoges. Mes remerciements particuliers à Octavian POP pour sa contribution à la partie expérimentale de cette thèse.

Je reste très sensible au soutien de Monsieur Isaac MOUARAGANDJA, Recteur de l'Université des Sciences et Techniques de Masuku (Gabon), qui m'a incité et encourager à faire cette thèse, ainsi que Bernard BANGANGOYE, Maître de Conférences, et aux enseignants de l'Ecole Polytechniques de Masuku.

Mes amicales pensées à tous mes collègues du laboratoire GEMH, à tout le personnel de l'IUT d'Egletons, aux techniciens qui ont participé de loin ou de près à la bonne réalisation de cette thèse.

Je ne saurais oublier toute ma famille, en particulier, le Professeur Jean Bruno BOGUIKOUMA, Mr Aubert Aimé NDJILA, Mlle Danis Dina OLIGUI, et ma maman pour le soutien moral, financier et matériel qu'ils m'ont apporté.

# Résumé

Ce mémoire présente une nouvelle méthode séparant les modes mixtes de rupture dans les matériaux viscoélastiques orthotropes soumis au fluage. La formulation analytique proposée est basée sur l'intégrale invariante  $M$ . Dans une première phase, une modélisation numérique de l'outil est proposée et comparée avec une formulation analytique issue de la densité d'énergie libre d'Helmholtz. L'indépendance du domaine d'intégration est justifiée, et simultanément, les différentes évolutions du taux de restitution d'énergie  $G$  sont présentées en fonction du temps. Une seconde phase propose une extension de l'intégrale  $M$  à la propagation de fissure. Le formalisme analytique repose sur les théorèmes de conservation énergétiques et une conjonction des champs réels et virtuels. Grâce à une formulation incrémentale du comportement viscoélastique, l'algorithme de propagation proposé est résolu grâce au code de calcul aux éléments finis CASTEM. Ainsi, l'indépendance du domaine est justifiée, et  $G$  est présenté en fonction du temps, de la vitesse de propagation et de la longueur de fissure, justifiant ainsi, la capacité du model à séparer les modes. Enfin, l'éprouvette 2MCG (Mixed Mode Crack Growth), traduisant les effets temporels dus au fluage, est proposée. Sa conception résulte d'une part, d'un compromis entre les éprouvettes DCB (Double Cantilever Beam) et CTS (Compact Tension Shear), et d'autre part de l'observation d'une plage de stabilité de  $G$  instantané calculé via l'intégrale  $M$ . Grâce à une presse et à l'analyse d'images, les essais instantanés sont effectués afin d'obtenir la longueur de fissure, les forces  $F$  et  $G$  critiques. Enfin, une propagation viscoélastique intégrant les phases d'amorçage, les temps critiques et la longueur de la zone d'élaboration mixte est envisagée.

**Mots clés :** Rupture ; Viscoélasticité ; Orthotropie ; Modes mixtes ; Lois de conservation ; Intégrales indépendantes ; Eléments finis ; Epreuve bois ; Analyse d'images.

# Abstract

Due to creep process, a new method based on  $M$  integral, separating mixed-modes fractures in viscoelastic material, is presented in this thesis. In the first time, a numerical modelling of  $M$  is proposed and compared with an analytical formulation given by Helmholtz's free energy density. In this fact, the non dependence domain integration is proven. In the same time, the different evolutions of energy release rate  $G$  versus time are shown. In the second time, a generalization of  $M$  to crack growth process is proposed. The analytical development is based on conservative laws and a combination of real and virtual fields. According to an incremental viscoelastic formulation, the proposed numerical crack growth algorithm is resolved with finite element software CASTEM. In this case, the non dependence domain integration is also shown. So, the different evolutions of  $G$  versus time, crack speed and crack length are posted. This fact proves the capacity of the proposed model to traduce efficiently the mixed-modes fractures separation and viscoelastic effect. Finally, a new 2MCG (Mixed-Mode Crack Growth) specimen, traducing viscoelastic characteristics due to creep loading is proposed. Its design results from a judicious compromise between DCB (Double Cantilever Beam) and CTS (Compact Tension Shear) specimens, but also, by the observation of an instantaneous energy release rate stability given by the previous  $M$  integral. Thanks to a press and the images analysis, several instantaneous tests have been performed in order to traduce the crack length and the critical values of the load  $F$  and  $G$ . At the end, a real viscoelastic integrating the crack initiation, the critical time and the length of the process zone in mixed mode is proposed.

**Key Words** : Fracture ; Viscoelastic ; Orthotropic material ; Mixed-modes ; Conservative laws ; Independent path integrals ; Finite element ; Wood specimen; Images analysis.

# Nomenclature

$a, \Delta a$	longueur et incrément de fissure
$A_1 A_2, B_1 B_2$	lèvres de la fissure
$A(\Gamma_1), A(\Gamma_2)$	domaines définies par les $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$
$A_\alpha, B_\alpha (\alpha \in \{1 \dots 7\})$	points de sollicitation de l'éprouvette CTS
$B, B^T$	Jacobien et transposée de la matrice jacobienne
$b$	épaisseur de l'éprouvette CTS
$C_1^p, C_2^p$	complaisances élastiques en mode I et II du $p^{i\text{ème}}$ ressort
$C_\alpha (\alpha \in \{1, 2\})$	complaisances viscoélastiques réduites en mode $\alpha \in [1, 2]$
$C_0$	tenseur de complaisance élastique instantané
$E(t)$	module tangent
$E_x, E_y, G_{xy}$	modules élastiques longitudinal, transverse et de cisaillement
$F$	densité d'énergie libre de déformation d'Helmholtz
$F^\bullet$	forme bilinéaire de la densité d'énergie libre de déformation élastique
$F(t_n)$	chargement extérieur
$\{F^p\}(t_{n-1})$	vecteur force viscoélastique supplémentaire
${}^1G_v^p, {}^2G_v^p$	taux de restitution d'énergie en mode I et II dans le $p^{i\text{ème}}$ ressort
${}^1G_v, {}^2G_v$	taux de restitution d'énergie viscoélastique en mode I et II
$I_1, I_2$	invariants intégraux
$J_{ijkl}$	composantes du tenseur de fluage
$J$	intégrale de Rice
${}^u K_I^p, {}^v K_I^p$	facteurs d'intensité de contrainte réel et virtuel en mode I du $p^{i\text{ème}}$ ressort
${}^u K_{II}^p, {}^v K_{II}^p$	facteur d'intensité de contrainte réel et virtuel en mode II du $p^{i\text{ème}}$ ressort
${}^u K_\alpha^\sigma (\alpha \in \{1, 2\})$	facteur d'intensité de contrainte en mode $\alpha$
${}^u K_\alpha^\varepsilon (\alpha \in \{1, 2\})$	facteur d'intensité d'ouverture de fissure en mode $\alpha$
$K_T^p$	Matrice tangente de rigidité apparente
$k_{ijkl}^p$	composantes du ressort
$M$	nouvelle intégrale $M$
$M\theta$	forme modélisable de l'intégrale $M$
$M\theta_v$	forme viscoélastique de l'intégrale $M\theta$
$\vec{n}$	vecteur normal de composantes $n_j$
$\vec{n}_1, \vec{n}_2$	vecteurs normaux respectifs aux contours $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$
$N$	nombre total d'éléments du modèle de Kelvin Voigt généralisé
$s_j^p$	racines de l'équation caractéristique
$S_{11}^p, S_{22}^p, S_{12}^p, S_{33}^p,$	composantes du tenseur de complaisance
$S$	domaine surfacique
$t, \tau, \beta$	variables temporelles

$u, v$	champs de déplacements réel et virtuel de composantes $u_i$ et $v_i$
$u^p, v^p$	champs de déplacements réel et virtuel propres au $p^{i\text{ème}}$ ressort
$U_e$	énergie libre de déformation
$V$	domaine volumique
$p$	$p^{i\text{ème}}$ ressort du modèle de Kelvin Voigt généralisé
$W_{vis}$	dissipation visqueuse
$W_s$	dissipation due à la fissuration
$W_i$	géométrie de longueur de fissure $a_i$
$x_1, x_2$	axes géométriques
$\alpha(x_1, x_2, t)$	fonction spatiale et temporelle
$\beta$	angles de sollicitations
$\delta L$	variation Langrangienne
$\delta \tilde{u}, \delta \tilde{v}$	representation Euleurienne réelle et virtuelle
$\delta u^*, \delta v^*$	representation Langrangienne réelle et virtuelle
$\{\tilde{\mathcal{E}}^p\}(t_{n-1})$	histoire du tenseur de déformation
$\tilde{\mathcal{E}}_{ij}(t_{n-1}), \tilde{K}_\alpha^\varepsilon(t_{n-1})$	influence globale et locale de l'histoire des déformations
$\eta_{ijkl}^m$	composantes du tenseur de viscosité
$\bar{\theta}$	champ vectoriel
$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$	composantes des tenseurs de contrainte et de déformation
$\sigma_{ij}^u, \sigma_{ij}^v$	composantes des champs de déplacements réel et virtuel
$\sigma_{ij}^p(u), \sigma_{ij}^p(v)$	champs de contraintes réelles et virtuelles dans le $p^{i\text{ème}}$ ressort
$\nu$	coefficient de Poisson
$\partial V$	contour de la pointe de fissure
$\Delta t$	incrément de temps
$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n), \Delta \sigma_{kl}(t_n)$	incréments de déformation et de contrainte
$\{\Delta u^p\}(t_n)$	incrément du vecteur déplacement nodal
$\{\Delta F_{ext}^p\}(t_n)$	incrément du vecteur force nodal
$\Delta K_\alpha^\varepsilon(t_n), \Delta \sigma_\alpha^\sigma(t_n)$	facteur d'intensité d'ouverture de fissure et de contrainte en mode $\alpha$
$\Gamma_1, \Gamma_2$	contours surfaciques
$\Pi_{ijkl}$	composantes du tenseur de déformation
$\Omega$	domaine d'intégration
$\Psi_{ijkl}, \Psi_\alpha$	complaisances équivalente et réduite

# Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
I. FISSURATION VISCOÉLASTIQUE DU BOIS.....	3
II. DÉCOUPLAGE DES MODES DE RUPTURE DANS UN MATÉRIAU VISCOÉLASTIQUE ORTHOTROPE.....	39
III. STRATÉGIE EXPÉRIMENTALE.....	95
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....	134
BIBLIOGRAPHIE .....	136
ANNEXES	

# INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui, et durant les siècles à venir, les problèmes environnementaux comme l'effet de serre, la fonte des calottes glacières ou la limitation du coût énergétique devrait entraîner une progression des parts de marché de la construction en bois et de ses dérivés. Afin de privilégier le matériau bois comme matériau de structure, il est nécessaire de mieux appréhender le comportement en service des éléments bois dont les sollicitations sont, à la fois, d'ordre environnementales (humidité et température) et mécanique (chargement de longue durée). L'ensemble de cet effort scientifique doit déboucher sur des solutions technologiques durables et économiquement réalistes.

Ces structures en bois, comme les poutres entaillées et les assemblages, sont généralement sujettes à des fissurations de cinétiques complexes dues principalement aux différents modes de sollicitation et au caractère viscoélastique orthotrope propre au matériau. Afin de prédire les phases d'amorçage et de propagation de la fissure, de nombreux outils numériques et expérimentaux ont été développés dans le but de caractériser les champs mécaniques dans de tels milieux. Parmi eux, les méthodes énergétiques [BUI 73] [BUI 84] [DUB 02] [DUB 05] qui, sont basées sur la prise en compte d'intégrales invariantes dans l'évaluation de l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces de fissure. Cependant, certains de ces outils sont limités mathématiquement à des modes simples de sollicitations [CHE 77] [BUI 90].

L'objectif de cette thèse est, dans un premier temps, de proposer une nouvelle intégrale invariante séparant l'ensemble des modes mixtes (combinaison du mode d'ouverture de fissure et de cisaillement) en propagation de fissure dans des matériaux caractérisés par un comportement dépendant du temps (cela permettra de connaître la part de chaque mode dans le processus de propagation de la fissure). Ensuite, d'effectuer des modélisations numériques de l'ensemble des formulations analytiques développées. Enfin, de concevoir une nouvelle éprouvette permettant de justifier la stabilité de la fissure tout au long du processus de propagation. Ainsi, il sera plus aisé d'appréhender la part des effets temporels dans la progression du front de fissure et d'en mesurer leur impact dans la ruine de la structure. En somme, les outils analytiques, numériques et expérimentaux seront confrontés afin de traduire la justesse des modèles proposés.

Dans la première partie, les structures cellulaires responsables du comportement dépendant du temps sont, tout d'abord, rappelées. Ensuite, les essais de relaxation, de fluage, de recouvrance et



d'effacement, traduisant le comportement viscoélastique sont décrits. Parallèlement, les formulations fonctionnelles et thermodynamiques conduisant à la relation liant l'histoire des contraintes et des déformations (équations de Boltzmann) sont décrites pour aboutir aux formulations analytiques des différentes densités d'énergie libre de Helmholtz [STA 52]. Par la suite, les champs mécaniques orthotropes [SHI 81] et les valeurs des contraintes limites en traction [SCH 84] [DUG 60] vont être exploités pour proposer une nouvelle longueur de la zone d'élaboration  $\alpha$  (process zone) en mode mixte.

Dans la seconde partie, l'intégrale  $M$  [CHE 77] est adaptée au comportement viscoélastique orthotrope et par la suite modélisée à l'aide du code de calcul aux éléments finis Cast3M. L'éprouvette CTS (Compact Tension Shear) [RIC 81] a été utilisée pour la séparation des modes mixtes. Simultanément, cette intégrale est étendue à la propagation de fissure. La démarche consiste finalement à proposer l'écriture de l'intégrale à partir des propriétés de symétries, de conservation d'énergie et une combinaison des champs de déplacements réels et virtuels induisant une forme bilinéaire de l'énergie libre de déformation élastique. Ensuite, cette formulation est généralisée au comportement viscoélastique via l'introduction du modèle rhéologique de Kelvin Voigt généralisé. Celui-ci est composé d'un ensemble de ressorts et d'amortisseurs reproduisant le comportement viscoélastique recherché. Un algorithme de propagation est chargé de mettre en œuvre dans le code aux éléments finis l'ensemble des procédures intégrées.

Dans la dernière partie, une nouvelle géométrie est proposée, en s'inspirant des éprouvettes DCB (Double Cantilever Beam) [DUB 97] [DUB 02] à inertie variable et CTS pour des sollicitations polymodales, et en s'aidant de la décroissance du taux de restitution d'énergie  $G$  calculé via l'intégrale  $M$ . L'éprouvette 2MCG (Mixed Mode Crack Growth) proposée a pour but de générer un taux de mixité voulu, tout en garantissant la stabilité de la fissure durant sa propagation. La validation de cette géométrie est justifiée en effectuant des essais de fissuration instantanés afin de vérifier, par les méthodes d'analyse d'images, les plages de propagation prédites numériquement. En même temps, les taux de restitutions d'énergie expérimentaux et numériques sont découplés suivant des taux de mixités fixés. Enfin, une modélisation viscoélastique intégrant les phases d'amorçage et d'évaluation de la longueur de la zone d'élaboration  $\alpha$  est proposée pour un mode mixte de  $45^\circ$ .

# CHAPITRE I. FISSURATION VISCOELASTIQUE DU BOIS

---

<b>I.1. Généralité sur le matériau bois .....</b>	<b>5</b>
I.1.1. Structure cellulaire et viscoélasticité .....	5
I.1.1.1. Constituants chimiques .....	5
I.1.1.2. Comportement viscoélastique .....	6
I.1.2. Comportement à la fissuration .....	7
I.1.3. Modélisation du matériau bois .....	8
I.1.3.1. Homogénéité .....	8
I.1.3.2. Orthotropie .....	8
I.1.3.3. Linéarité et vieillissement .....	9
<b>I.2. Formulation du comportement viscoélastique .....</b>	<b>9</b>
I.2.1. Expériences fondamentales traduisant la viscoélasticité .....	9
I.2.1.1. Fluage et relaxation .....	9
I.2.1.2. Recouvrance et effacement .....	10
I.2.2. Formulations fonctionnelle et thermodynamique .....	12
I.2.2.1. Formulation fonctionnelle .....	12
I.2.2.2. Formulation thermodynamique .....	13
I.2.3. Thermodynamique des modèles rhéologiques .....	15
I.2.3.1. Modèle de Maxwell généralisé .....	15
I.2.3.2. Modèle de Kelvin Voigt généralisé .....	17
I.2.4. Calcul des structures viscoélastiques .....	19
I.2.4.1. Transformée de Laplace .....	19
I.2.4.2. Le problème élastique équivalent .....	20
I.2.5. Influence de la température et de l'humidité .....	21
I.2.5.1. Principe d'équivalence temps-température .....	21
I.2.5.2. Influence de l'humidité .....	21
<b>I.3. Formulation en mécanique de la rupture .....</b>	<b>22</b>
I.3.1. Zones et modes de fissuration .....	22
I.3.1.1. Zones de fissuration .....	22
I.3.1.2. Modes de sollicitation .....	23
I.3.2. Equilibre thermodynamique .....	24

I.3.3. Energie dissipée et critères de fissuration.....	25
I.3.3.1. Approche locale .....	25
I.3.3.2. Approche globale.....	26
I.3.4. Comportement viscoélastique en zone d’élaboration .....	28
I.3.4.1. Champs mécaniques isotropes .....	28
I.3.4.2. Champs mécaniques orthotropes .....	31
I.3.5. Comportement dégradé en zone d’élaboration .....	33
I.3.5.1. Zone d’élaboration viscoélastique .....	33
I.3.5.2. Comportement viscoélastique en zone dégradée.....	35
I.3.5.3. Généralisation à des configurations mixtes .....	35
I.3.6. Découplage des modes de rupture .....	36
I.3.6.1. Intégrales de contour.....	36
I.3.6.2. Méthodes de découplage des modes.....	36
<b>I.4. Conclusion.....</b>	<b>38</b>

---

## I.1. Généralité sur le matériau bois

Le bois est une matière ligneuse et compacte qui compose les branches, le tronc, et les racines des arbres et des arbrisseaux. C'est un ensemble de tissus composés des fibres ligneuses, de parenchymes et de vaisseaux. Du fait de sa composition chimique, il présente un comportement viscoélastique, amplifié par la présence d'humidité et de température. Parallèlement, son étude et son comportement mécanique sont rendus complexes suite à son caractère orthotropique, doublé d'une anisotropie prononcée entre les plans longitudinaux et les plans transversaux. Pour mieux aborder notre étude, il est indispensable de connaître la composition chimique qui justifie sa dimension viscoélastique, son comportement à la fissuration, et enfin, les hypothèses indispensables à sa modélisation.

### I.1.1. Structure cellulaire et viscoélasticité

#### *I.1.1.1. Constituants chimiques*

##### La cellulose

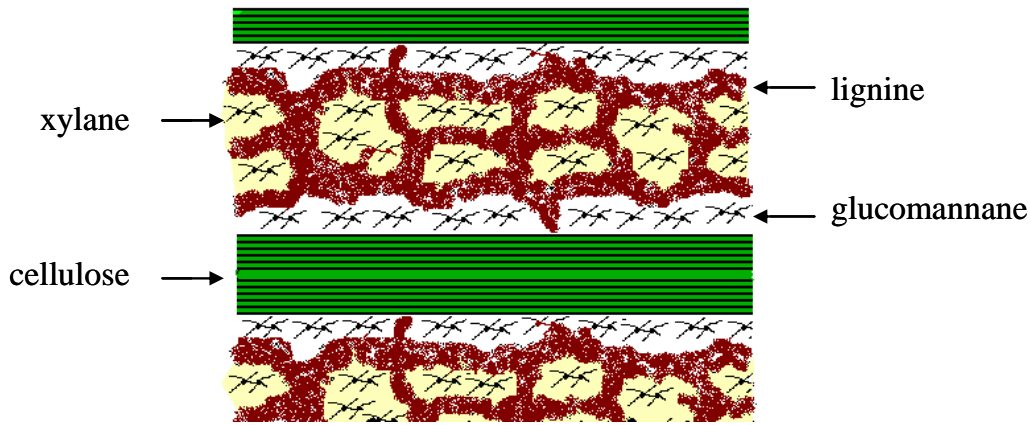
Elle demeure le constituant le plus abondant du bois et est formée de longues chaînes de molécules linéaires. La cellulose comporte à la fois des régions cristallines (60 à 70 % pour la cellulose du bois) et des régions amorphes qui jouent un rôle considérable dans la rhéologie du matériau.

##### Les hémicelluloses

Ce sont des polymères amorphes ramifiés, c'est-à-dire que la chaîne principale possède des chaînes latérales. Les principaux types sont les mannanes, les xylanes et les galactanes, Figure I.1.1. La composition des hémicelluloses est variable suivant les essences. Les résineux sont riches en mannanes, pauvres en xylanes. Inversement, les feuillus sont pauvres en mannanes et galactanes et très riches en xylanes.

##### La lignine

La lignine est un polymère hétérogène complexe, amorphe et réticulé. Le polymère est ramifié et ses chaînes latérales se joignent pour former un réseau tridimensionnel. Les lignines possèdent un ensemble de groupements (fonctions alcool, phénols, esthers) libres qui peuvent former des ponts hydrogène, ce qui leur confère une certaine hygroscopicité [PLU 92].

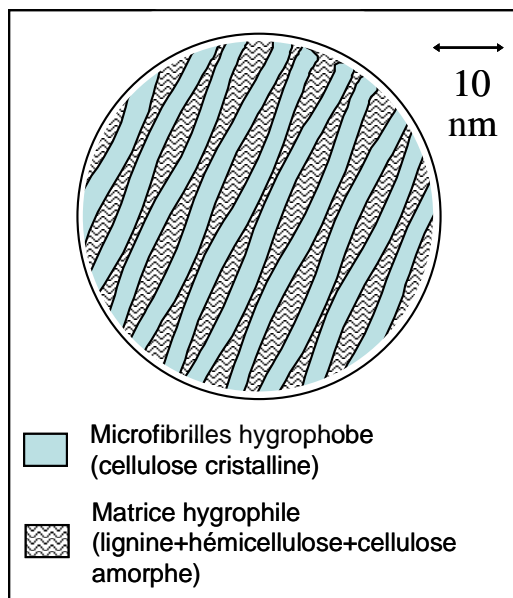


**Figure I.1.1.** Structure moléculaire du bois [GRI 93]

*1.1.1.2. Comportement viscoélastique*

La viscosité désigne la propriété, pour un corps, de se situer dans une position intermédiaire entre un solide et un liquide. Appliquée à un solide, la notion de viscosité signifie donc que celui-ci possède un aspect liquide dans son comportement. Inversement, on dit qu'un liquide est visqueux lorsqu'il se rapproche du comportement d'un solide [GRI 93].

La capacité du bois à se retrouver dans une position intermédiaire entre un solide élastique, où la déformation s'établit instantanément après application d'une force, et celle d'un fluide visqueux, où la contrainte est proportionnelle au chargement appliqué, traduit sa viscoélasticité.



**Figure I.1.2.** Structure visqueuse

En effet, comme tout matériau polymérique, le bois possède une part de comportement visqueux qui provient de la capacité des macromolécules, Figure I.1.2, à savoir : lignines, hémicelluloses, cellulose amorphe, entrant dans sa constitution, de changer plus ou moins rapidement de configuration en réponse à des sollicitations mécaniques. Du fait de la présence d'un réseau continu de microfibrilles cellulosiques, il est aussi particulièrement cristallin, ce qui lui confère une part de comportement élastique. Physiquement, le couplage des propriétés d'élasticité et de viscosité, fait que le comportement du matériau bois peut être assimilé à de la viscoélasticité.

### **I.1.2. Comportement à la fissuration**

En dehors des dommages non négligeables dus, le plus souvent, aux sollicitations mécaniques [MOU 04], les déformations peuvent se justifier par la libération des contraintes de croissance observées dans l'arbre durant toute son histoire, c'est-à-dire depuis sa formation jusqu'aux produits usinés que nous utilisons [JUL 95]. Ces contraintes s'expriment au niveau du bois débité par des déformations dites instantanées ou différées précurseuses de fissurations diverses.

Les déformations instantanées peuvent apparaître après la coupe de l'arbre sur pied, et ce, dès le début du séchage. Elles sont essentiellement de quatre types [ORM 98]: le tuilage ou bombement, le gauchissement ou vrillage, le voilement ou flèche de rive, enfin, le voilement longitudinal ou flèche de face. Ces phénomènes s'expliquent dans le bois par l'influence de trois paramètres [ORM 99] : l'anisotropie prononcée du matériau bois, l'orientation des cernes de croissance, et l'angle de fil ou angle moyen des microfibrilles des couches S2 [ORM 00]. Ainsi, lors du séchage d'une rondelle de bois vers, Moutou [MOU 05] a observé, par analyse d'images, une évolution préférentielle des fissures du cœur vers la périphérie de l'éprouvette et simultanément, une variation importante des déformations radiales et tangentielles. Il est donc indispensable, lors de l'usinage, de prélever le bois dans des parties bien précises de l'arbre pour amoindrir les déformations citées précédemment [DUL 98].

Les contraintes de croissance peuvent terminer ultérieurement leur libération de façon plus lente, et ce, pendant le stockage du bois, justifiant ainsi la présence des déformations différées. Leurs manifestations peuvent être accélérées en cas de séchage ou chauffage [JUL 95] [MOU 05]. Les déformations viscoélastiques (évoquées dans ce travail) dépendant du temps, constituent une manifestation éloquentes de ces contraintes de croissance.

### I.1.3. Modélisation du matériau bois

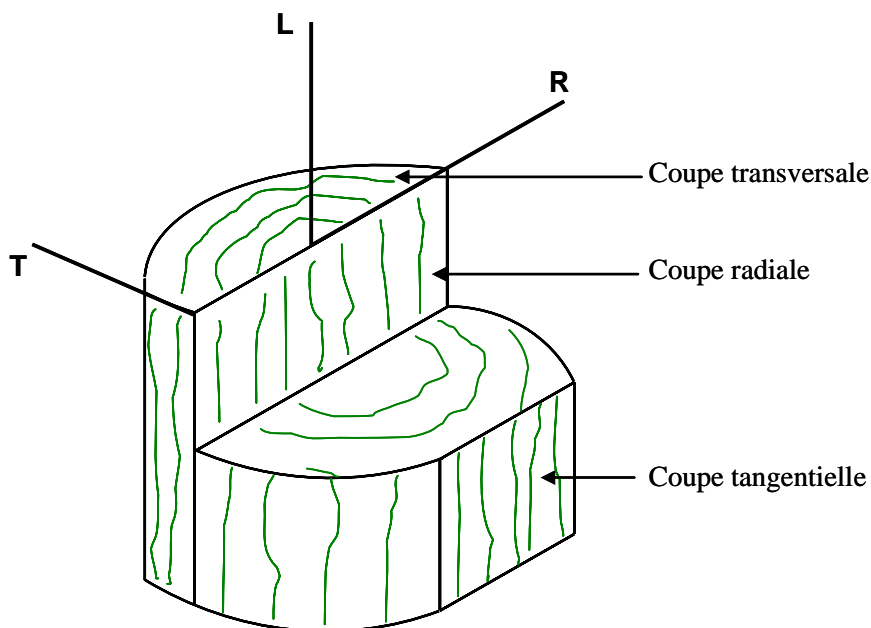
#### I.1.3.1. Homogénéité

Nous admettons que le bois est homogène et, en particulierité, que toutes les caractéristiques (densité, humidité, température, résistance...) sont les mêmes pour tout élément de volume [GAU 80]. Il est évident que pour la partie expérimentale, il faudra nécessairement tenir compte de la présence des nœuds, de l'alternance du bois d'été et du bois de printemps. Toutefois, les conditions expérimentales seront choisies pour répondre le mieux possible à l'hypothèse d'homogénéité.

#### I.1.3.2. Orthotropie

La coupe d'un tronc, selon une direction perpendiculaire à la direction longitudinale, révèle une section transversale où les cernes annuels sont nettement visibles. Une seconde coupe, selon la direction perpendiculaire à ces cernes et la direction radiale, montre un plan appelé lui aussi plan radial. Enfin une troisième coupe est tangentielle aux cernes. On note ainsi les trois directions préférentielles du bois : longitudinale  $L$ , radiale  $R$  et tangentielle  $T$  [VAN 07], Figure I.1.3.

Un matériau est orthotrope lorsqu'il existe, localement, deux plans de symétrie matérielle orthogonaux. C'est approximativement le cas du bois, pour lequel le plan radial (RL) et le plan transverse (RT) constituent des symétries matérielles locales. Lorsqu'un matériau est orthotrope, son élasticité se décrit simplement à condition de se placer dans le repère d'orthotropie, par exemple  $(R, T, L)$ , pour le bois.



**Figure I.1.3.** Orthotropie locale : deux plans de symétrie matérielle.

### 1.1.3.3. Linéarité et vieillissement

En générale, le comportement du matériau est supposé viscoélastique linéaire, c'est-à-dire qu'il existe une correspondance fonctionnelle linéaire entre l'histoire des contraintes  $\sigma$  et l'histoire des déformations  $\varepsilon$ . Ainsi, lors des essais d'identification du comportement viscoélastique, la linéarité permet d'écrire la réponse de toute l'histoire de la sollicitation à partir de la connaissance de la seule fonction de retard ou de relaxation.

L'intégration de la température ou des variations hydriques va modifier le comportement linéaire viscoélastique du matériau dont il faudra tenir compte dans nos formulations à venir.

Un matériau viscoélastique non vieillissant est celui dont les caractéristiques mécaniques n'évoluent pas au cours du temps. Dans ce cas, soit l'âge du matériau n'intervient pas dans les différentes modélisations, soit l'humidité interne constante ne modifie pas les propriétés mécaniques. Selon Mandel, un matériau viscoélastique non vieillissant se caractérise, soit par un effacement total des contraintes lors d'un essai de relaxation ou par un recouvrement total des déformations lors d'un essai de fluage [MAN 66].

## I.2. Formulation du comportement viscoélastique

### I.2.1. Expériences fondamentales traduisant la viscoélasticité

Cinq expériences fondamentales mettent en évidence l'existence de la déformation permanente variant en fonction du temps, témoin du comportement visqueux de la matière [PLU 92].

#### 1.2.1.1. Fluage et relaxation

##### Fluage

L'essai de fluage consiste à imposer soudainement une contrainte et à la maintenir constante. La déformation élastique observée instantanément lors de la charge initiale est suivie d'une déformation différée dite aussi déformation de fluage. On applique un échelon de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$ , et ce, à partir de l'instant  $\tau$ :

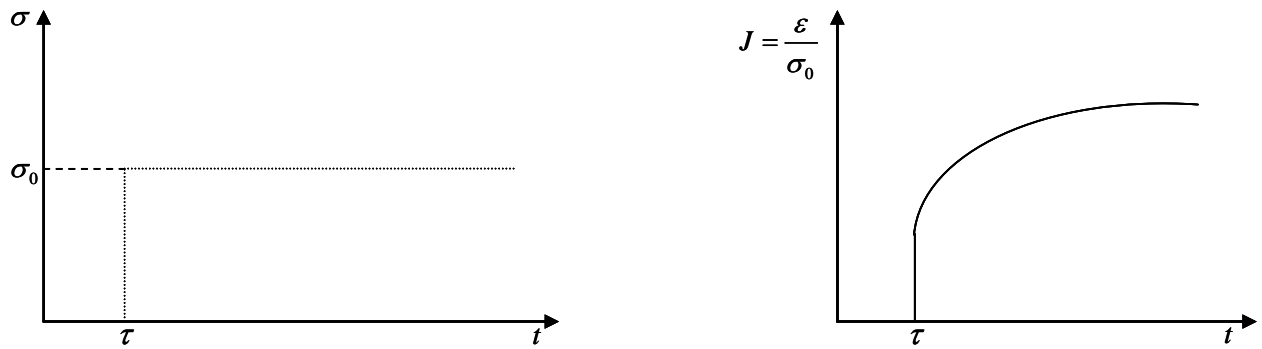
$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t - \tau) \quad (\text{I.2.1})$$

$H$  est la fonction d'Heaviside. L'évolution de la déformation en fonction du temps est généralement de la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t - \tau) \quad (\text{I.2.2})$$



$J$  est la fonction de fluage croissante pour un instant  $t > \tau$ , Figure I.2.1.



**Figure I.2.1.** Représentation de la fonction de fluage

Relaxation

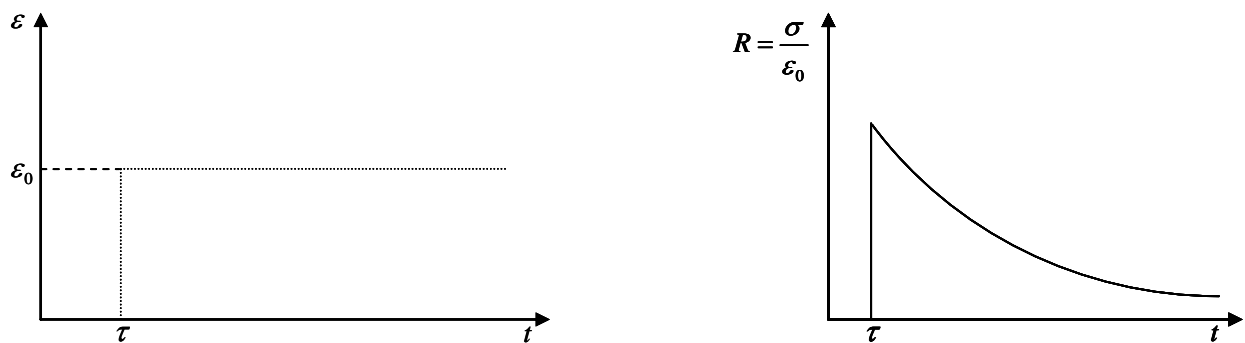
L’essai de relaxation consiste à imposer soudainement une déformation et à la maintenir constante. Cette fois-ci, on observe une diminution, ou relaxation, de la contrainte. On impose ainsi, au matériau un échelon de déformation d’amplitude  $\epsilon_0$ , et ce, à partir de l’instant  $\tau$  :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot H(t - \tau) \tag{I.2.3}$$

On observe une diminution de la contrainte en fonction du temps selon la relation suivante,

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \cdot R(t - \tau) \tag{I.2.4}$$

Où  $R$  est la fonction de retard, Figure I.2.2 :



**Figure I.2.2.** Représentation de la fonction de relaxation

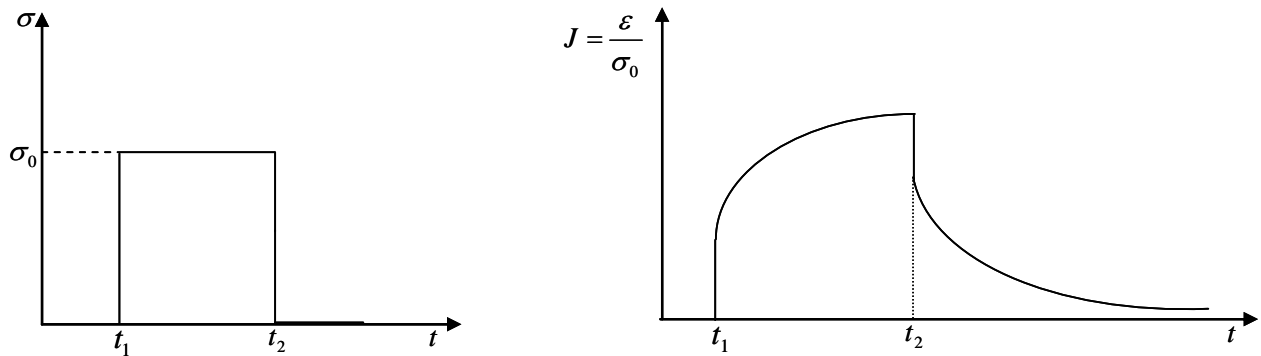
*1.2.1.2. Recouvrance et effacement*

Recouvrance

La recouvrance se définit comme la diminution avec le temps de l'amplitude de la déformation quand la contrainte appliquée est réduite. On impose un créneau de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot [H(t-t_1) - H(t-t_2)] \quad t_1 < t_2 \quad (\text{I.2.5})$$

La réponse en déformation est représentée sur la Figure I.2.3. Après un retour de la déformation correspondant à l'élasticité instantanée, il y a apparition du phénomène de recouvrance jusqu'à annulation de la déformation.

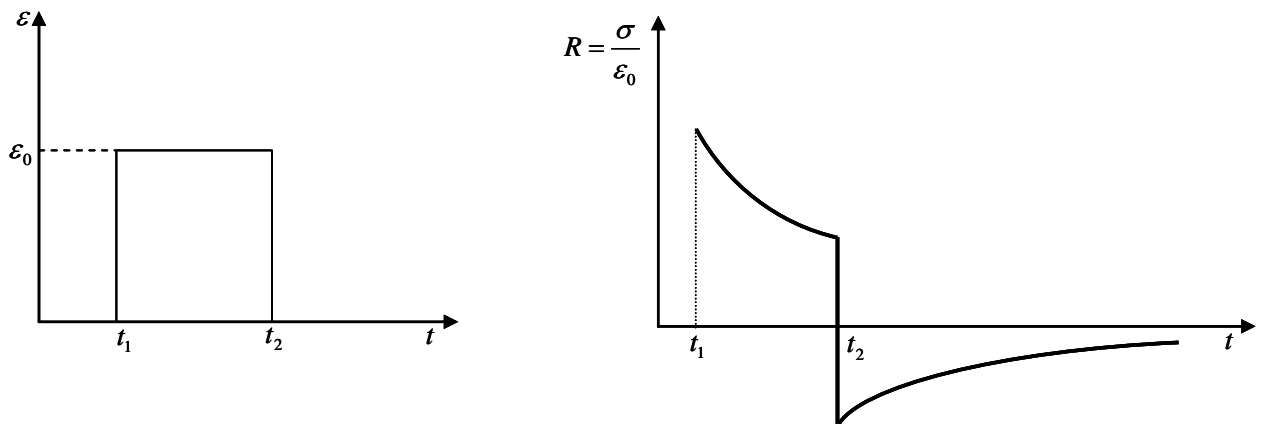


**Figure I.2.3.** Représentation de la fonction de recouvrance

### Effacement

L'effacement des contraintes correspond à la réponse en contrainte lorsqu'un créneau de déformation est imposé :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot [H(t-t_1) - H(t-t_2)] \quad (\text{I.2.6})$$



**Figure I.2.4.** Représentation de l'effacement des contraintes

A l'instant  $t_2$ , pour ramener l'amplitude de la déformation, de la valeur  $\varepsilon_0$  à 0, on doit imposer à la contrainte un saut instantané inverse au saut initial et égal à celui correspondant à l'élasticité du matériau. La contrainte change alors de signe et diminue en valeur absolue, Figure I.2.4, pour s'annuler peu à peu.

## I.2.2. Formulations fonctionnelle et thermodynamique

Ces formulations permettent d'établir les lois de comportement, c'est-à-dire la relation mathématique qui lie une sollicitation à la réponse qui en découle. Ces paragraphes, qui ne rappellent que les principes fondamentaux, sont inspirés de Christensen [CHR 82], Salençon [SAL 83] et Dubois [DUB 97].

### I.2.2.1. Formulation fonctionnelle

La formulation fonctionnelle est utilisée en raison de sa présentation tensorielle de la loi de comportement.

#### Fonction de fluage

Considérons une sollicitation représentée par une fonction étagée définie par :

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^n \Delta\sigma_j \cdot H(t - t_j) \quad (\text{I.2.7})$$

La linéarité de la fonctionnelle, ou le principe de superposition de Boltzmann [BOL 78] (voir paragraphe suivant) permet d'écrire la réponse en déformation suivante :

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^n J(t - t_j) \cdot \Delta\sigma_j \quad (\text{I.2.8})$$

$J(t)$  désigne la fonction de fluage caractéristique de la viscoélasticité du matériau. Par hypothèse de non vieillissement, cette fonction est indépendante des instants  $t_j$  initiaux.  $\Delta\sigma_j$  est la discontinuité en contrainte à l'instant  $t_j$ . Dans le cas d'une variation continue de la contrainte, la somme discrète (I.2.8) se généralise par l'intégrale de Boltzmann suivante :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} d\tau + \sum_{j=1}^n J(t - t_j) \cdot \Delta\sigma_j \quad (\text{I.2.9})$$

En appliquant le principe de superposition au comportement linéaire, la loi de comportement (I.2.9) peut se généraliser à un comportement tridimensionnel. Si on considère une notation indicielle tridimensionnelle, la réponse  $\varepsilon_{ij}(t)$  peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de

Riemann à laquelle il faut ajouter les discontinuités éventuelles. Cette relation, appelée intégrale de Boltzmann, revêt la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \cdot \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau + \sum_{j=1}^n J_{ijkl}(t-t_j) \cdot \Delta(\sigma_{kl})_j \quad (\text{I.2.10})$$

Dans ce cas,  $J_{ijkl}(t)$  représente une composante du tenseur de fluage du quatrième ordre. Si on considère l'ensemble des composantes du tenseur de fluage, en utilisant le produit de convolution, avec  $D$  la dérivée au sens de distribution intégrant les discontinuités, l'expression (I.2.10) devient :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sum_{k,l} J_{ijkl} \otimes \frac{D\sigma_{kl}}{D\tau} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{J}} \otimes \underline{\underline{\frac{D\sigma}{D\tau}}} \quad (\text{I.2.11})$$

### Fonction de relaxation

Par dualité de l'équation (I.2.9), si nous considérons une fonction de relaxation  $R(t)$ , la loi de comportement uni axiale s'écrit :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau + \sum_{j=1}^n R(t-t_j) \cdot \Delta \varepsilon_j \quad (\text{I.2.12})$$

Dans le cas tridimensionnel, si la réponse  $\sigma_{kl}(t)$  est engendrée par une déformation quelconque  $\varepsilon_{ij}(t)$ , on écrit :

$$\sigma_{kl}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau + \sum_{j=1}^n R_{ijkl}(t-t_j) \cdot \Delta(\varepsilon_{ij})_j \quad (\text{I.2.13})$$

$\Delta(\varepsilon_{ij})_j$  est la discontinuité en déformation à l'instant  $t_j$ .  $R_{ijkl}(t)$  représente une composante du tenseur de relaxation du quatrième ordre. En usant du produit de convolution, identiquement à l'expression (I.2.11), la relation (I.2.13) s'exprime :

$$\sigma_{kl}(t) = \sum_{k,l} R_{ijkl} \otimes \frac{D\varepsilon_{ij}}{D\tau} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} \otimes \underline{\underline{\frac{D\varepsilon}{D\tau}}} \quad (\text{I.2.14})$$

#### *I.2.2.2. Formulation thermodynamique*

La formulation thermodynamique est basée sur les potentiels thermodynamiques indispensables à la présentation et à la modélisation des comportements viscoélastiques.

### Variables observables et internes

Dans le but d'étudier les matériaux viscoélastiques dans leur environnement, il est choisi de définir, comme variables observables, la température  $T$ , et la déformation totale  $\varepsilon$ .

Le comportement viscoélastique génère des phénomènes dissipatifs caractérisés par l'évolution d'une déformation anélastique  $\varepsilon^{(an)}$ . Celle-ci peut être due à des propriétés de viscosité du matériau et à des propriétés de dissipation par modification des caractéristiques mécaniques. Elle résulte de la déformation totale par décharge élastique instantanée  $\varepsilon^{(e)}$ , ce qui conduit à la partition suivante [DUB 04] :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(an)} \quad (\text{I.2.15})$$

### Potentiel thermodynamique

Les variables observables et internes obéissent à des lois d'états qui dérivent d'un potentiel thermodynamique. Dans notre cas, il est choisi le potentiel énergie libre spécifique d'Helmholtz noté  $\Psi$ . Si on prend en compte la définition de la température dans notre potentiel, seule la déformation élastique représente l'état de déformation tel que :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^{(e)}, T) \quad (\text{I.2.16})$$

Dans ce cas, la densité volumique de puissance restituable ou stockée  $P$  prend la forme suivante :

$$P = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^{(e)} \quad (\text{I.2.17})$$

Ainsi, on déduit la densité d'énergie libre restituable  $F$  de la manière qui suit :

$$F = \int_0^t P d\tau = \int_0^t \sigma \cdot \frac{\partial \varepsilon^{(e)}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.2.18})$$

### Second principe de thermodynamique

Dans l'hypothèse des petites perturbations, l'inégalité de Clausius Duhem s'écrit [DUB 04] :

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \cdot (\dot{\Psi} + s \cdot \dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0 \quad (\text{I.2.19})$$

$\rho$  est la densité de masse du milieu,  $\vec{q}$  le vecteur courant de chaleur et  $s$  l'entropie. L'égalité (I.2.14) nous permet d'écrire :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{(e)}} \cdot \dot{\varepsilon}^{(e)} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \cdot \dot{T} \quad (\text{I.2.20})$$

En introduisant la partition des déformations (I.2.15) dans l'expression (I.2.20), on obtient la forme générale de l'inégalité de Clausius :

$$\left( \sigma - \rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{(e)}} \right) \cdot \dot{\varepsilon}^{(e)} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^{(an)} + \rho \cdot \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} \right) - \bar{q} \cdot \frac{\overrightarrow{gradT}}{T} \geq 0 \quad (I.2.21)$$

Si on considère une transformation isotherme et uniforme, sans génération de déformation anélastique, nous avons :

$$\dot{T} = 0; \quad \overrightarrow{gradT} = \vec{0}; \quad \dot{\varepsilon}^{(an)} = 0 \quad (I.2.22)$$

Fort de la relation (I.2.22), l'expression (I.2.21) est vérifiée si et seulement si :

$$\sigma = \rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{(e)}} \quad (I.2.23)$$

Ainsi, une transformation pour laquelle la température évolue de manière homogène de telle sorte que les propriétés mécaniques restent inchangées, se traduit, en l'absence de toute évolution des déformations anélastiques, par :

$$\overrightarrow{gradT} = \vec{0}; \quad \dot{\varepsilon}^{(an)} = 0 \quad (I.2.24)$$

Dans ce cas, l'inégalité (I.2.21) est vérifiée si et seulement si :

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (I.2.25)$$

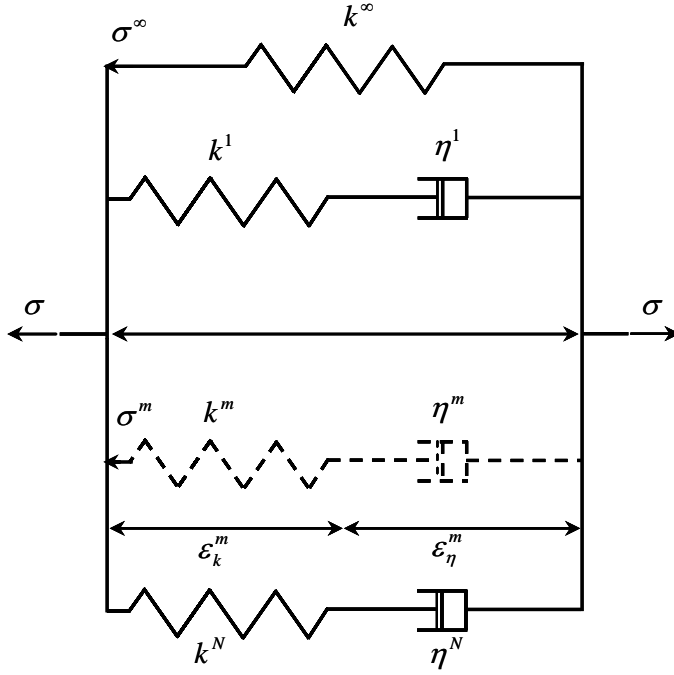
On observe finalement que la contrainte  $\sigma$  est associée à la déformation élastique  $\varepsilon^{(e)}$ , tandis que l'entropie  $s$  est associée à la température  $T$ .

### I.2.3. Thermodynamique des modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques sont adaptés à la description thermodynamique du comportement mécanique. Dans ce paragraphe, seules les généralisations aux modèles complexes [DUB 04] sont rappelées. Egalement, pour des raisons de simplicité d'écriture, on limite l'approche à un comportement uni axial.

#### I.2.3.1. Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de Maxwell généralisé est composé de  $N$  modèles de Maxwell associés à un ressort en parallèle qui permet la recouvrance de l'état relâché, Figure I.2.5.



**Figure I.2.5.** Modèle de Maxwell généralisé

Le comportement basique de ce modèle associe un ensemble des ressorts et d'amortisseurs. Dans ce cas, les partitions en contraintes et en déformations prennent les formes suivantes :

$$\sigma(t) = \sigma^{(\infty)}(t) + \sum_{m=1}^N \sigma^{(m)}(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_k^{(m)} + \varepsilon_{\eta}^{(m)}(t) \quad (\text{I.2.26})$$

$\sigma^{(\infty)}(t)$  désigne la contrainte dans le ressort de raideur  $k^{(\infty)}$ ,  $\sigma^{(m)}(t)$  est la contrainte dans le  $m^{\text{ième}}$  modèle de Maxwell caractérisé par sa raideur  $k^{(m)}$  et sa viscosité  $\eta^{(m)}$ .  $\varepsilon_k^{(m)}$  et  $\varepsilon_{\eta}^{(m)}$  représentent respectivement les déformations des  $m^{\text{ième}}$  ressorts et amortisseurs. Les comportements respectifs de ce modèle prennent les formes suivantes :

$$\dot{\sigma}^{(\infty)}(t) = k^{(\infty)} \cdot \dot{\varepsilon}(t) ; \quad \dot{\sigma}^{(m)}(t) = k^{(m)} \cdot \dot{\varepsilon}_k^{(m)}(t) \quad \text{et} \quad \sigma^{(m)}(t) = \eta^{(m)} \cdot \dot{\varepsilon}_{\eta}^{(m)}(t) \quad (\text{I.2.27})$$

En dérivant la partition des déformations (I.2.26), et en introduisant les expressions (I.2.27), on obtient l'équation différentielle qui suit :

$$\dot{\sigma}^{(m)}(t) + \lambda^{(m)} \cdot \sigma^{(m)}(t) = k^{(m)} \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{avec} \quad \lambda^{(m)} = \frac{k^{(m)}}{\eta^{(m)}} \quad (\text{I.2.28})$$

Le problème revient donc à résoudre l'équation différentielle du premier ordre avec second membre (I.2.28). En résolvant l'équation homogène sans second membre, et en utilisant la méthode de la variation de la constante, on obtient les lois de comportement suivantes :

$$\sigma^{(m)}(t) = \sum_{m=1}^N \left[ \int_0^t k^{(m)} \exp^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \text{ et } \sigma^{(\infty)}(t) = \int_0^t k^{(\infty)} \cdot \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.2.29})$$

Finalement la loi de comportement générale se traduit par l'expression suivante :

$$\sigma(t) = \sigma^{(\infty)}(t) + \sigma^{(m)}(t) = \int_0^t \left[ k^{(\infty)} + \sum_{m=1}^N \left( k^{(m)} \cdot \exp^{-\lambda^{(m)}(t-\tau)} \right) \right] \cdot \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.2.30})$$

### Densité d'énergie et de puissance restituable

Pour être conforme aux lois d'état définies dans le paragraphe I.2.2.2, nous choisissons le potentiel énergie libre sous la forme suivante [DUB 04] :

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} \cdot k \cdot (\varepsilon^{(e)})^2 \quad \text{avec } \varepsilon^{(e)} = \frac{\sigma}{k} = \varepsilon \text{ et } \varepsilon^{(an)} = 0 \quad (\text{I.2.31})$$

Afin de prendre en compte un éventuel effet de l'environnement (teneur en eau, température) sur les propriétés mécaniques, introduisons la variable interne  $b$  [DUB 04]. Ainsi, la densité volumique de puissance stockée  $P$  est égale, d'après (I.2.17) et (I.2.31), à :

$$P = \frac{\dot{\sigma} \cdot \sigma}{b \cdot k} - \frac{\dot{b} \cdot \sigma^2}{b^2 \cdot k} \quad (\text{I.2.32})$$

La densité de puissance restituée est déterminée par sommation de la puissance stockée dans chaque ressort du modèle rhéologique. On obtient par conséquent :

$$P = \frac{\dot{\sigma}^{(\infty)} \cdot \sigma^{(\infty)}}{b^{(\infty)} \cdot k^{(\infty)}} - \frac{\dot{b}^{(\infty)} \cdot (\sigma^{(\infty)})^2}{(b^{(\infty)})^2 \cdot k^{(\infty)}} + \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\dot{\sigma}^{(m)} \cdot \sigma^{(m)}}{b^{(m)} \cdot k^{(m)}} - \frac{\dot{b}^{(m)} \cdot (\sigma^{(m)})^2}{(b^{(m)})^2 \cdot k^{(m)}} \right] \quad (\text{I.2.33})$$

D'après (I.2.18) et (I.2.33) la densité d'énergie  $Y$  se définit par :

$$Y(t) = \int_0^t \left[ \frac{\dot{\sigma}^{(\infty)}(\tau) \cdot \sigma^{(\infty)}(\tau)}{b^{(\infty)}(\tau) \cdot k^{(\infty)}} - \frac{\dot{b}^{(\infty)}(\tau) \cdot (\sigma^{(\infty)}(\tau))^2}{(b^{(\infty)}(\tau))^2 \cdot k^{(\infty)}} \right] d\tau + \int_0^t \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\dot{\sigma}^{(m)}(\tau) \cdot \sigma^{(m)}(\tau)}{b^{(m)}(\tau) \cdot k^{(m)}} - \frac{\dot{b}^{(m)}(\tau) \cdot (\sigma^{(m)}(\tau))^2}{(b^{(m)}(\tau))^2 \cdot k^{(m)}} \right] d\tau \quad (\text{I.2.34})$$

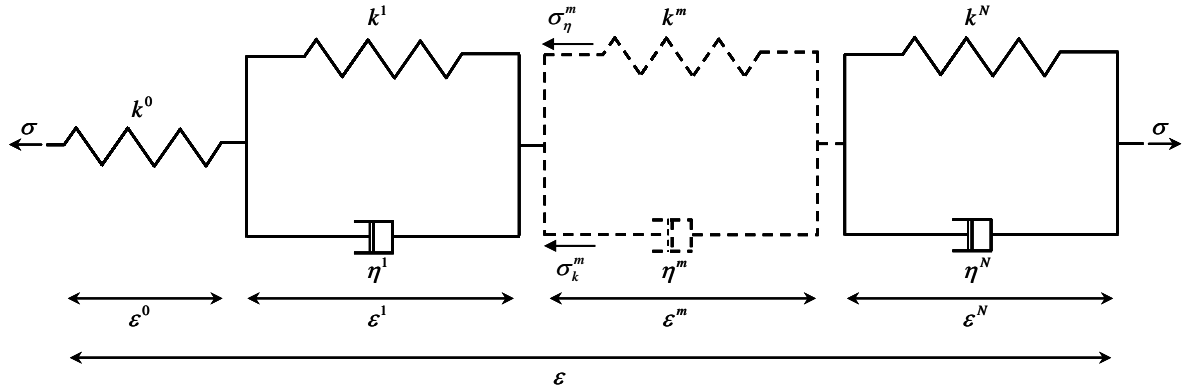
Si on considère un comportement viscoélastique non vieillissant ( $b^{(\infty)} = b^{(m)} = 1$ ) et ( $\dot{b}^{(\infty)} = \dot{b}^{(m)} = 0$ ) dans l'expression (I.2.34), on obtient, après simplification, la forme de  $Y$  donnée par Staverman [STA 52] et Mandel [MAN 66] :

$$Y(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^t R(2t - \tau - \beta) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} d\tau d\beta \quad \text{avec } R(t) = k^{(\infty)} + \sum_{m=1}^N k^{(m)} \cdot \exp^{-\lambda^{(m)}(t)} \quad (\text{I.2.35})$$

### *I.2.3.2. Modèle de Kelvin Voigt généralisé*

Le modèle de Kelvin Voigt généralisé est composé de  $N$  modèles de Kelvin Voigt associés à un ressort en série traduisant la réponse instantanée du comportement, Figure I.2.6.





**Figure I.2.6.** Modèle de Kelvin Voigt généralisé

Comme précédemment, les partitions en déformations et en contraintes sont les suivantes :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^N \varepsilon^{(m)}(t) \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \sigma_k^{(m)}(t) + \sigma_\eta^{(m)}(t) \quad (\text{I.2.36})$$

$\varepsilon^{(m)}(t)$  désigne la déformation du  $m^{\text{ième}}$  élément de Kelvin Voigt.  $\sigma_k^{(m)}(t)$  et  $\sigma_\eta^{(m)}(t)$  sont les contraintes respectives dans le ressort et l'amortisseur de l'élément.  $\varepsilon^{(0)}(t)$  est la déformation instantanée. Les comportements respectifs de chaque élément du modèle peuvent se définir ainsi :

$$\dot{\sigma}(t) = k^{(0)} \cdot \dot{\varepsilon}^{(0)} ; \quad \dot{\sigma}_k^{(m)}(t) = k^{(m)} \cdot \dot{\varepsilon}^{(m)} \quad \text{et} \quad \sigma_\eta^{(m)}(t) = \eta^{(m)} \cdot \dot{\varepsilon}^{(m)} \quad (\text{I.2.37})$$

On définit, de manière identique que précédemment, l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{(m)} + \lambda^{(m)} \cdot \varepsilon^{(m)} = \frac{\sigma(t)}{\eta^{(m)}} \quad \text{avec} \quad \lambda^{(m)} = \frac{k^{(m)}}{\eta^{(m)}} \quad (\text{I.2.38})$$

La résolution du système d'équation différentielle (I.2.38) nous permet d'obtenir :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_0^t \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left(1 - \exp^{-\lambda^{(m)} \cdot (t-\tau)}\right) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{et} \quad \varepsilon^{(0)}(t) = \int_0^t \frac{1}{k^{(0)}} \cdot \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.2.39})$$

Finalement, en sommant les expressions de l'équation (I.2.39), on obtient la déformation totale qui suit :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_0^t \frac{1}{k^{(0)}} \cdot \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left(1 - \exp^{-\lambda^{(m)} \cdot (t-\tau)}\right) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.2.40})$$

### Densité d'énergie et de puissance restituable

Comme précédemment, la densité de puissance restituable est évaluée en cumulant les puissances propres à chaque élément du modèle rhéologique. En s'appuyant sur les comportements (I.2.37), et identiquement aux expressions (I.2.32) et (I.2.33), la partition de puissance s'écrit :

$$P = \frac{\dot{\sigma} \cdot \sigma}{b^{(0)} \cdot k^{(0)}} - \frac{\dot{b}^{(0)} \cdot \sigma^2}{(b^{(0)})^2 \cdot k^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\dot{\sigma}_k^{(m)} \cdot \sigma_k^{(m)}}{b^{(m)} \cdot k^{(m)}} - \frac{\dot{b}^{(0)} \cdot (\sigma_k^{(m)})^2}{(b^{(m)})^2 \cdot k^{(m)}} \right] \quad (\text{I.2.41})$$

La densité d'énergie libre d'Helmholtz  $F$  est obtenue en intégrant l'expression (I.2.41) par rapport au temps, c'est-à-dire :

$$F(t) = \int_0^t \left[ \frac{\dot{\sigma}(\tau) \cdot \sigma(\tau)}{b^{(0)}(\tau) \cdot k^{(0)}} - \frac{\dot{b}^{(0)}(\tau) \cdot (\sigma(\tau))^2}{(b^{(0)}(\tau))^2 \cdot k^{(0)}} \right] d\tau + \int_0^t \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\dot{\sigma}_k^{(m)}(\tau) \cdot \sigma_k^{(m)}(\tau)}{b^{(m)}(\tau) \cdot k^{(m)}} - \frac{(\sigma_k^{(m)}(\tau))^2}{(b^{(m)}(\tau))^2 \cdot k^{(m)}} \right] d\tau \quad (\text{I.2.42})$$

Dans l'hypothèse d'un comportement non vieillissant, identiquement au paragraphe précédent, l'égalité (I.2.42) se simplifie par :

$$F(t) = \int_0^t \left[ \frac{\dot{\sigma}(\tau) \cdot \sigma(\tau)}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\dot{\sigma}_k^{(m)}(\tau) \cdot \sigma_k^{(m)}(\tau)}{k^{(m)}} \right] \right] d\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2(t)}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma_k^{(m)}(t))^2}{k^{(m)}} \quad (\text{I.2.43})$$

En introduisant les définitions (I.2.37) dans l'expression (I.2.43), nous obtenons :

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot k^{(0)} \cdot (\varepsilon^{(0)}(t))^2 + \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} \cdot k^{(m)} \cdot (\varepsilon^{(m)}(t))^2 \quad (\text{I.2.44})$$

En considérant les déformations par leurs définitions (I.2.39), l'expression (I.2.43) devient, après simplification [STA 52] [MAN 66]:

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^t 2 \cdot J(t-\tau) - J(2 \cdot t - \tau - \beta) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} d\tau d\beta \quad (\text{I.2.45})$$

$$\text{avec } J(t) = \frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{k^{(m)}} \cdot (1 - \exp^{-\lambda^{(m)}(t)})$$

#### I.2.4. Calcul des structures viscoélastiques

Dans les problèmes viscoélastiques, on procède à un changement de variable par des intégrales d'hérédité afin de transposer un problème temporel en un problème élastique équivalent. Ces transformations relient les paramètres physiques à des paramètres élastiques de référence : c'est le problème *équivalent*. La technique consiste, dans ce cas, à résoudre le problème équivalent et, par transformation inverse, à se ramener au problème réel.

##### I.2.4.1. Transformée de Laplace

Considérons une fonction causale  $f(t)$  de la variable  $t$ . Désignons par  $F(p)$  sa transformée de Laplace. On écrit :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \exp^{-pt} dt \quad (\text{I.2.46})$$

$L$  est l'opérateur de Laplace et  $p$  un nombre complexe. Cette équation traduit une correspondance entre la fonction  $f(t)$  du temps  $t$  et la fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$ . Parmi les propriétés de cette transformation, on peut citer :

- Transformation des dérivées

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot L(f(t)) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot L(f(t)) - p \cdot f(0) - \frac{df(0)}{dt}$$
(I.2.47)

- Transformation des intégrales

$$L\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right] = \frac{F(p)}{p}$$
(I.2.48)

- Le produit de convolution

$$L(f_1(t) \otimes f_2(t)) = L[f_1(t)](p) \cdot L[f_2(t)](p)$$
(I.2.49)

- La transformée de Laplace Carson  $f^*(p)$

$$f^*(p) = pF(p) = p \int_0^{+\infty} f(t) \exp^{-pt} dt$$
(I.2.50)

#### I.2.4.2. Le problème élastique équivalent

Le principe d'équivalence utilise la transformée de Laplace et ses propriétés pour aboutir à un problème élastique à partir du problème viscoélastique d'origine, Figure I.2.7.

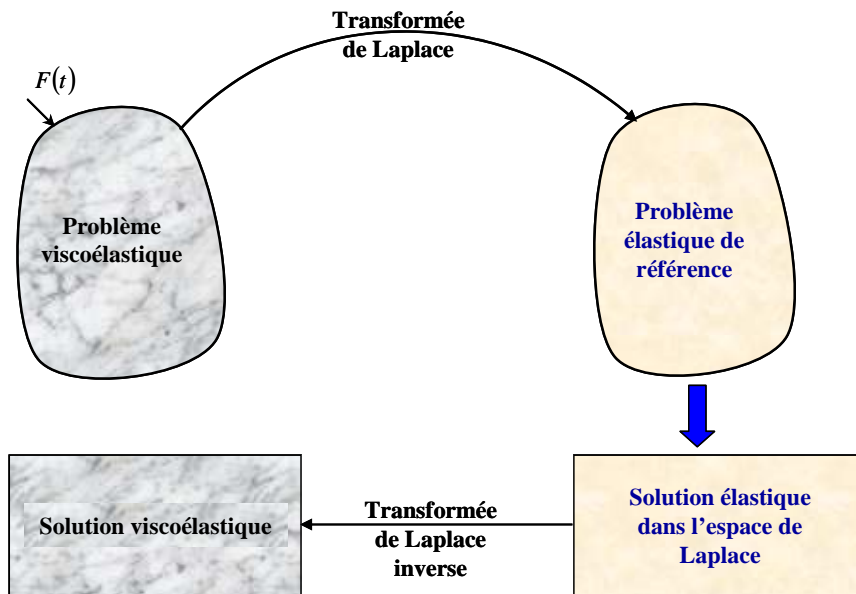


Figure I.2.7. Principe de correspondance.

L'introduction de la transformée de Laplace transforme par exemple, un produit de convolution en un produit ordinaire. En faisant un calcul des contraintes et des déformations en transformée de Laplace, on se ramène à la résolution d'un problème élastique classique. Seulement, la difficulté de cette équivalence réside dans le calcul de la transformation inverse.

### **I.2.5. Influence de la température et de l'humidité**

L'étude du comportement viscoélastique du bois est un problème difficile en raison de la complexité du matériau et de l'influence déterminante des paramètres environnementaux tels que la température et l'humidité.

#### *I.2.5.1. Principe d'équivalence temps-température*

Sous certaines conditions, dites de linéarité viscoélastique, il est possible de prévoir la réponse différée d'un matériau subissant un chargement quelconque au cours du temps, à partir de la seule donnée d'essais de fluage ou de relaxation, paragraphe I.1.

Il est en outre possible de se contenter d'une série d'essais réalisés sur une durée relativement courte, mais à des températures croissantes, en vertu du principe *d'équivalence temps-température*. Selon ce principe, un essai réalisé à haute température est l'équivalent d'un essai réalisé à basse température mais sur une durée plus longue. L'origine physique de cette équivalence réside dans le mouvement brownien des segments macromoléculaires, qui *sautent* d'autant plus vite d'une configuration à l'autre que la température est plus élevée [GRI 93]. En particulier, pour une échelle de temps donnée, il existe une série de températures seuils correspondant à la mobilité de segments moléculaires de taille croissante. Cela se traduit par des températures dites de *transition vitreuse*, dont le franchissement se caractérise par une chute marquée de la rigidité apparente du matériau.

#### *I.2.5.2. Influence de l'humidité*

A l'état sec, la température de transition vitreuse des différents constituants du bois pris isolément est assez élevée. Selon Back, cité par Pluinage [PLU 92], elle serait pour la cellulose d'environ 220°, pour les hémicelluloses d'environ 180° et 150° pour la lignine. Ces chiffres sont donnés comme des ordres de grandeur car il existe une grande dispersion sur les mesures. Toutefois, ces valeurs sont considérablement abaissées lorsque l'on augmente la teneur en eau du bois. Ce fait justifie que le facteur prépondérant dans la manifestation du comportement viscoélastique du bois est bien l'humidité.

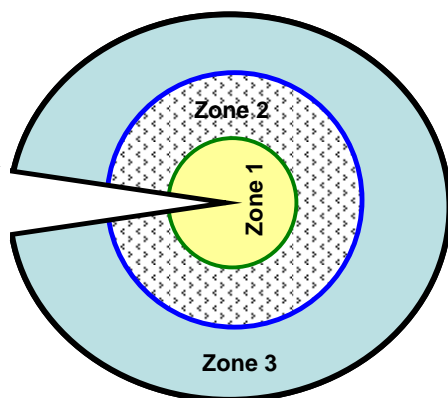
### I.3. Formulation en mécanique de la rupture

Cette partie propose les outils généralement utilisés pour évaluer les paramètres de rupture dans le cas des matériaux purement viscoélastiques. On suppose, pour cela, que les concepts utilisés sont appliqués dans le cas d'une rupture fragile, c'est-à-dire que celle-ci se produit sous déformations permanentes appréciables avec une zone plastique de taille réduite. Les différentes zones et les trois modes de fissuration seront, pour la circonstance, rappelés. Ensuite, les méthodes d'évaluation des champs mécaniques en pointe fissure seront introduites par l'analyse d'Irwin [IRW 57] pour les matériaux isotropes et les formes singulières de Sih [SIH 81] pour les matériaux orthotropes. De plus, les conditions d'amorçage et de propagation de fissure, via les méthodes énergétiques, sont rappelées et étendues pour l'ensemble des modes mixtes de sollicitation.

#### I.3.1. Zones et modes de fissuration

##### I.3.1.1. Zones de fissuration

En accord avec la théorie de la fissuration ductile, [RAD 95], nous distinguons trois zones dans un solide fissuré [DUB 97], Figure I.3.1:



**Figure I.3.1.** Zones de fissuration

*Zone 1 ou zone d'élaboration* : c'est la zone la plus proche de la fissure. Son étude est très complexe à cause des contraintes importantes qui provoquent un endommagement irréversible de la matière. Une taille importante de zone entraîne une fissuration ductile, l'inverse, une fissuration fragile. Nielsen [NIE 82] [NIE 85] suppose un comportement viscoélastique linéaire dans cette zone. Le modèle utilisé est celui de Dugdale [DUG 92] qui maximise le champ de contrainte en pointe de fissure par la limite élastique en traction perpendiculaire de la contrainte normale dans le cas du mode I. Récemment, dans le cas d'un chargement en mode mixte, certains auteurs [LUO 03] [ZHA 07] [BEN 07] ont évalué les champs mécaniques en modes I et II dans la zone de cohésion

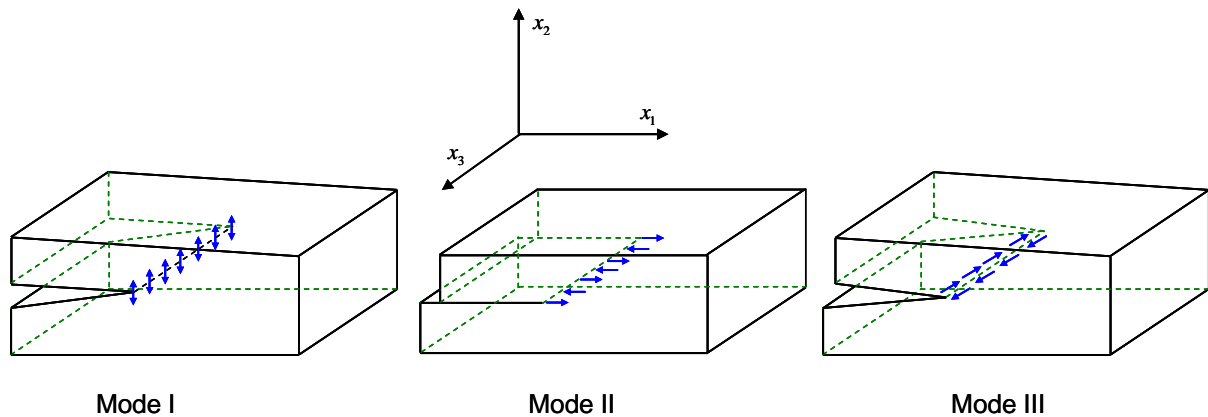
par la même méthode. Ce modèle, assimilable à une zone plastique localisée, traduit une cohésion des lèvres de la fissure. Par contre, l'approche de Schapery [SCH 75<sub>a</sub>] [SCH 75<sub>b</sub>], basée sur le modèle de Barenblatt [BAR 62] considère une zone d'élaboration dégradée pouvant induire un comportement mécanique non linéaire.

*Zone 2 ou zone singulière* : elle englobe la zone d'élaboration. Le matériau obéit à un comportement viscoélastique linéaire. La forme singulière des champs mécaniques est indépendante de la géométrie étudiée. L'interface, commune avec la zone d'élaboration, est supposée continue en contrainte et en déplacement.

*Zone 3 ou zone lointaine* : c'est la zone la plus éloignée de la fissure. Elle raccorde la zone singulière avec les conditions limites de chargement et de déplacement.

### I.3.1.2. Modes de sollicitation

Pour un solide fissuré, on distingue trois cinématiques distinctes de fissuration. Un mode d'ouverture de fissure ou mode I, pour lequel les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation ; un mode de cisaillement ou mode II, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation ; et un mode hors



**Figure I.3.2.** Mode de sollicitation dans le plan

plan ou mode III pour lequel les déplacements aux lèvres sont parallèles au fond de fissure, Figure I.3.2

Dans cette étude, nous allons nous intéresser essentiellement à des configurations planes représentées par les deux premiers types de sollicitations. Sur la Figure I.3.2, L'axe  $\vec{x}_1$  est orienté selon la direction longitudinale  $\vec{L}$  des fibres. Les observations expérimentales ont montré que la fissure se propage principalement dans cette direction qui se trouve être celle de forte orthotropie.

Le paragraphe suivant sert à préciser les conditions de propagation, ou non, d'une fissure soumise à ces différents modes de sollicitation.

### I.3.2. Equilibre thermodynamique

Dans une configuration quasi statique (Energie cinétique négligeable), si nous considérons un milieu viscoélastique fissuré, Figure I.3.3, l'équilibre thermodynamique s'exprime de manière suivante :

$$dW = dU_e + dW_{vis} + dW_s \quad (I.3.1)$$

$dW$  représente le travail des efforts extérieurs.  $dU_e$  la densité d'énergie de déformation,  $dW_{vis}$  l'énergie dissipée via les propriétés dissipatives du matériau,  $dW_s$  désigne la dissipation énergétique due au processus de propagation de fissure. La principale difficulté dans l'équilibre (I.3.1) réside dans le couplage de la propagation de fissure (Variation de la surface de fissure  $dS$ ) et la variation temporelle  $dt$  [MOU 07<sub>b</sub>]. Pour cela, Dubois [DUB 05] a établi que l'énergie dissipée  $dW_{vis}$  et l'énergie de fissuration sont respectivement uniquement fonction du temps et de la longueur de fissure  $a$  telle que :

$$dW_s = \frac{\partial W_s}{\partial a} da \quad \text{et} \quad dW_{vis} = \frac{\partial W_{vis}}{\partial t} dt \quad (I.3.2)$$

Avec l'équation (I.3.2), et en considérant les dérivées partielles spatiales et temporelles, l'équilibre (I.3.1) se subdivisent ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + \frac{\partial W_{vis}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial U_e}{\partial a} + \frac{\partial W_s}{\partial a} \quad (I.3.3)$$

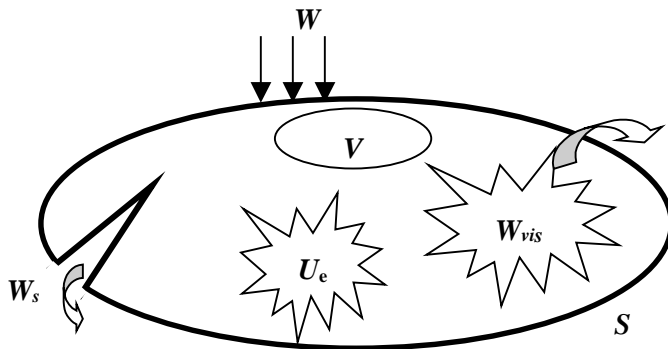


Figure I.3.3. Milieu viscoélastique fissuré [MOU 07<sub>b</sub>]

On notera par ailleurs que :

$$G = \frac{\partial W_s}{\partial a} = - \frac{\partial U_e}{\partial a} \quad (I.3.4)$$

La relation (I.3.4) est une conséquence du bilan thermodynamique précédent et traduit le fait que le taux de restitution d'énergie  $G$  représente l'énergie dissipée dans le processus de fissuration. Du reste, cette énergie dissipée ne peut être puisée que dans l'énergie libre  $U_e$  stockée temporairement au sein du matériau.

L'énergie libre restituable  $U_e$  est l'intégration, sur le volume  $V$  de l'élément considéré, de la densité d'énergie libre  $F$ , expression (I.2.45), définie par [MOU 07<sub>b</sub>] :

$$U_e = \int_V F \cdot dV \quad \text{avec} \quad F = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^t [2 \cdot J_{ijkl}(t - \tau) - J_{ijkl}(2 \cdot t - \tau - \beta)] \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \tau} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \beta} d\tau d\beta \quad (I.3.5)$$

### I.3.3. Energie dissipée et critères de fissuration

Etant donné que la fissure se propage dans la direction de forte orthotropie, les critères de bifurcation ne sont pas évoqués. Un critère sert généralement à définir la condition de prédiction de l'évolution de la fissure existante dans une structure donnée. Il s'agit souvent, au sens de Caumes [CAU 87], d'une relation de la forme  $F(P_i, E_i) = 0$ . Où les  $P_i$  sont des paramètres caractéristiques de l'état mécanique en pointe de fissure, et  $E_i$  les caractéristiques intrinsèques au matériau. Ces critères peuvent reposer sur deux approches différentes :

- Une approche dite statistique, analysant les champs de contraintes au voisinage du front de fissure avant rupture ;
- Une approche dite énergétique, responsable d'un bilan énergétique des énergies disponibles emmagasinées, dissipées, et restituées par le matériau.

L'énergie dissipée  $W_{vis}$  est, quant à elle, l'intégration sur le volume  $V$  de l'élément considéré, de la puissance dissipée  $Y$ , expression (I.2.35) telle que:

$$W_{vis} = \int_V Y \cdot dV \quad \text{avec} \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^t [R_{ijkl}(2t - \tau - \beta)] \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \beta} d\tau d\beta \quad (I.3.6)$$

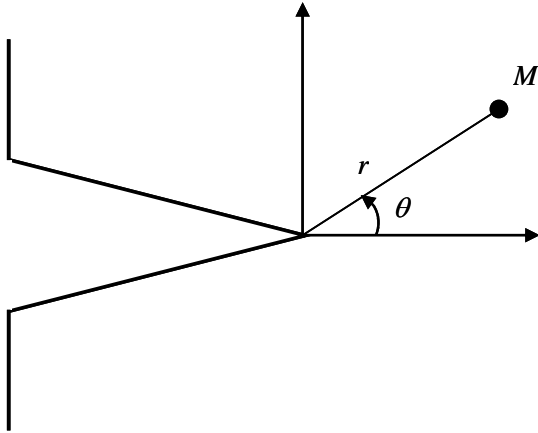
#### I.3.3.1. Approche locale

Dans un repère  $(r, \theta)$ , Irwin [IRW 57] a montré que le premier terme du développement donnant le champ des contraintes au voisinage du fond de fissure, pour des matériaux isotropes plans, est de la forme :



$$\sigma_{ij} = \frac{K_{\beta}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad \beta = \{1,2\} \quad (\text{I.3.7})$$

Le coefficient  $K_{\beta}$  est le facteur d'intensité de contrainte en mode  $\beta$  (mode I et mode II) et est indépendant du point  $M$ , Figure I.3.4.



**Figure I.3.4.** Notation en pointe de fissure

Le champ de déplacements s'écrit de manière suivante :

$$u_i = K_{\beta} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot f_i(\theta) \quad \beta = \{1,2\} \quad (\text{I.3.8})$$

On remarque que les contraintes présentent une singularité en  $1/\sqrt{r}$ , et sont, par conséquent, infinies en pointe de fissure. Les relations pour un matériau orthotrope, sont données dans le paragraphe suivant. Dans le cas des modes purs I ou II, on définit un seuil critique unique  $K_{\beta c}$  tel que :

$$K_{\beta} < K_{\beta c} \Rightarrow \text{pas de propagation} ; \quad K_{\beta} = K_{\beta c} \Rightarrow \text{propagation de fissure} \quad (\text{I.3.9})$$

$K_{\beta c}$  représente le facteur d'intensité de contrainte critique ou ténacité du matériau, qui est une caractéristique intrinsèque du matériau.

### 1.3.3.2. Approche globale

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith [GRI 21], l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Ainsi, l'équilibre thermodynamique (I.3.1) étant basé sur une approche énergétique, il apparaît évident que les critères utilisés dans ce travail repose sur une terminologie énergétique.

### Amorçage et propagation de la fissure

Considérons un milieu viscoélastique plan fissuré, Figure I.3.3, si nous précédons à l'extension de l'équilibre énergétique (I.3.1) à un processus d'avancé du front de fissure, on écrit :

$$\Delta W = \Delta U_e + \Delta W_{vis} + \Delta W_s + \Delta K \quad (I.3.10)$$

$\Delta K$  représente la variation d'énergie cinétique provoquée par le mouvement en pointe de fissure. En fonction de l'accroissement de fissure  $\Delta a$ , on peut redéfinir les énergies de l'équation (I.3.10) de la manière suivante [DUB 04] :

$$G_w - G_e = G_{vis} + G_s + \frac{\Delta K}{\Delta a} \quad (I.3.11)$$

$$\text{avec } G_w = \frac{\Delta W}{\Delta a}; G_{vis} = \frac{\Delta W_{vis}}{\Delta a}; G_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta a}; G_s = \frac{\Delta W_s}{\Delta a} \quad (I.3.12)$$

$G_w$  est le taux de travail extérieur,  $G_{vis}$  le taux de dissipation d'énergie par viscosité,  $G_e$  le taux de variation d'énergie par déformation élastique et  $G_s$  le taux de restitution d'énergie définie précédemment. L'équation (I.3.11) peut donner lieu à la forme qui suit :

$$G_v = R + \frac{\Delta K}{\Delta a} \quad (I.3.13)$$

$$\text{avec } G_v = G_w - G_e \text{ et } R = G_{vis} + G_s \quad (I.3.14)$$

$R$  est la résistance du matériau à la fissuration.

Dans la phase d'amorçage de la fissure, l'augmentation de  $G_v$  est conditionnée par la croissance du chargement extérieur et par le potentiel du matériau à stocker de l'énergie. Plus le matériau est dissipatif (visqueux), moins la croissance de  $G_v$  est rapide. Dans cette phase, nous avons l'égalité :

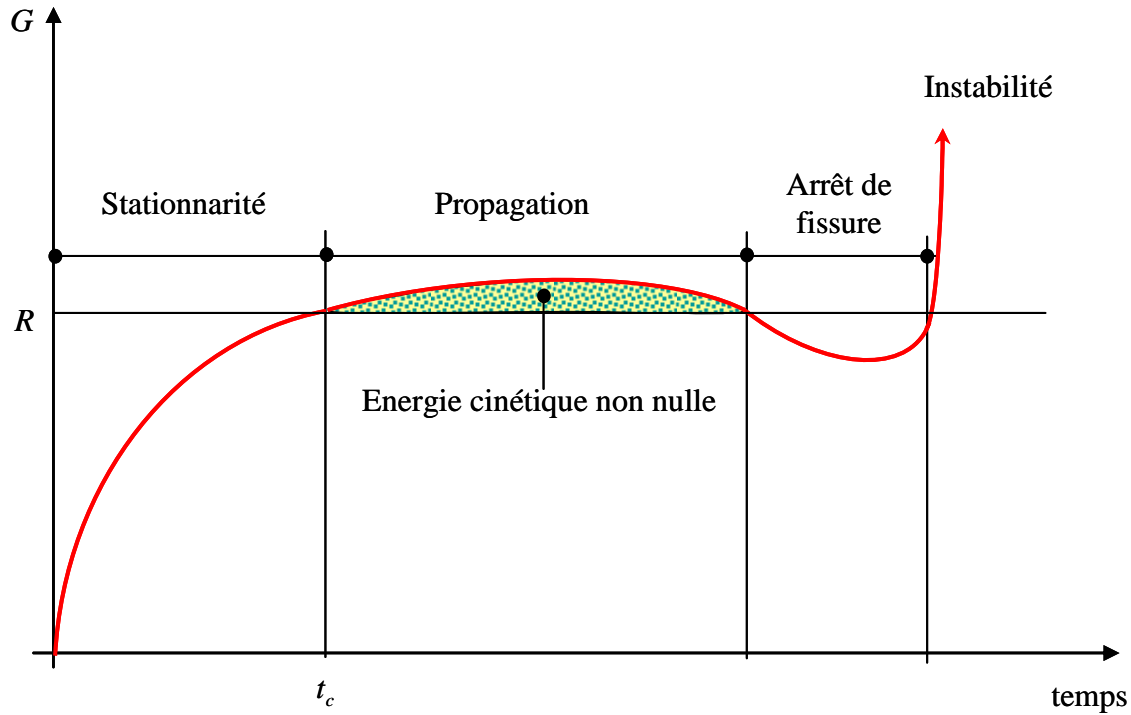
$$G_v < R \quad (I.3.15)$$

Juste à la limite de l'amorçage de fissuration, nous avons l'égalité :

$$G_v = R \quad (I.3.16)$$

Au delà du point critique d'amorçage de la propagation de fissure  $t_c$ , le surplus du taux de restitution d'énergie se traduit par l'apparition d'énergie cinétique générée par l'évolution de la pointe de fissure, Figure I.3.5 :

$$G_v > R \text{ avec } G_v - R = \frac{\Delta K}{\Delta a} \quad (I.3.17)$$



**Figure I.3.5.** Amorçage et propagation de la fissure [DUB 04]

#### Critères de fissuration en mode mixte

Les critères énergétiques, employés dans une cinématique de mode mixte, font intervenir une partition des modes de rupture en termes de  $G_I(t)$  (taux de restitution d'énergie en mode I),  $G_{II}(t)$  (taux de restitution d'énergie en mode II), et de leurs valeurs critiques respectives  $G_I^c$  et  $G_{II}^c$  [VAL 82] [DAU 01] de tel sorte que :

$$\text{Si } f\left(\frac{G_I(t)}{G_I^c} + \frac{G_{II}(t)}{G_{II}^c}\right) = 1 \Rightarrow \text{Propagation de fissure} \quad (\text{I.3.18})$$

$$\text{Si } f\left(\frac{G_I(t)}{G_I^c} + \frac{G_{II}(t)}{G_{II}^c}\right) < 1 \Rightarrow \text{Fissuration stationnaire} \quad (\text{I.3.19})$$

La fonctionnelle  $f$  peut être déterminée expérimentalement [VAL 84] [VAL 88] [BAO 92].

#### **I.3.4. Comportement viscoélastique en zone d'élaboration**

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous proposons de rappeler les différentes définitions des champs mécaniques viscoélastiques pour des symétries isotropes et orthotropes.

##### *I.3.4.1. Champs mécaniques isotropes*

#### Facteurs d'intensité de contrainte

Dans un matériau élastique ou viscoélastique isotrope, la singularité du champ de contrainte, au voisinage de la pointe de fissure, peut être exprimée via deux facteurs d'intensité de contrainte  $K_{\beta}^{(\sigma)}$  avec  $\beta \in \{1;2\}$ , équation (I.3.7), liés au mode de sollicitation [IRW 57].

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{22} &= \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (\text{I.3.20})$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

$r$  et  $\theta$  coordonnées polaires du point  $M$  centré sur la pointe de fissure, Figure I.3.4.

### Facteurs d'intensité de déformation

Pour un matériau élastique, le champ de déplacement se définit de la manière qui suit :

$$u_1 = \frac{K_1^{(\sigma)}}{4 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[ (2 \cdot k - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] - \frac{K_2^{(\sigma)}}{4 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[ (2 \cdot k + 3) \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right]\quad (\text{I.3.21})$$

$$u_2 = \frac{K_1^{(\sigma)}}{4 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[ (2 \cdot k + 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] + \frac{K_2^{(\sigma)}}{4 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[ (2 \cdot k + 3) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right]$$

$k$  est un coefficient défini tel que :

$$k = 3 - 4 \cdot \nu \text{ en déformations planes ; } k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \text{ en contraintes planes}\quad (\text{I.3.22})$$

Afin d'établir la relation qui lie le tenseur de contrainte au tenseur de déformation viscoélastique, Brinker [BRI 92] propose de modifier la relation (I.3.22) par :

$$u_{\alpha}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[ \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot g_{\alpha\beta} \cdot K_{\beta}^{(\sigma)} + \frac{k}{2 \cdot \mu} \cdot h_{\alpha\beta} \cdot K_{\beta}^{(\sigma)} \right] \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \{1;2\}\quad (\text{I.3.23})$$

$\mu$  représente le module de cisaillement défini part :

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}\quad (\text{I.3.24})$$

$E$  et  $\nu$  désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson.  $g_{\alpha\beta}$  et  $h_{\alpha\beta}$  sont des fonctions angulaires [DUB 97]. Par application du principe de correspondance, paragraphe

I.2.4.1, dans l'espace de Laplace Carson, équation (I.2.50), la relation (I.3.23) se généralise à un comportement viscoélastique linéaire :

$$u_{\alpha}^{*}(r, \theta, p) = \sqrt{\frac{r}{2.\pi}} \cdot \left[ g_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \left( \frac{1}{2.\mu} \right)^{*}(p) \cdot K_{\beta}^{(\sigma)*}(p) + h_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \left( \frac{k}{2.\mu} \right)^{*}(p) \cdot K_{\beta}^{(\sigma)*}(p) \right] \quad (\text{I.3.25})$$

Si on introduit les facteurs d'intensité de déformation  $C_{\beta}$  et  $D_{\beta}$  ( $\beta \in (1;2)$ ) dans l'expression (I.3.25), on a :

$$u_{\alpha}^{*}(r, \theta, p) = \sqrt{\frac{r}{2.\pi}} \cdot \left[ g_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \left( \frac{1}{2.\mu} \right)^{*}(p) \cdot C_{\beta}^{*}(p) + h_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \frac{k}{2.\mu} \cdot D_{\beta}^{*}(p) \right] \quad (\text{I.3.26})$$

$$\text{avec } C_{\beta}^{*}(p) = \left( \frac{1}{2.\mu} \right)^{*}(p) \cdot K_{\beta}^{(\sigma)*}(p) \text{ et } D_{\beta}^{*}(p) = \left( \frac{k}{2.\mu} \right)^{*}(p) \cdot K_{\beta}^{(\sigma)*}(p) \quad (\text{I.3.27})$$

Les champs de déplacement viscoélastiques sont obtenus par application à l'équation (I.3.26) de la transformation inverse de Laplace Carson :

$$u_{\alpha}(r, \theta, t) = \sqrt{\frac{r}{2.\pi}} \cdot [g_{\alpha\beta}(\theta) \cdot C_{\beta}(t) + h_{\alpha\beta}(\theta) \cdot D_{\beta}(t)] \quad (\text{I.3.28})$$

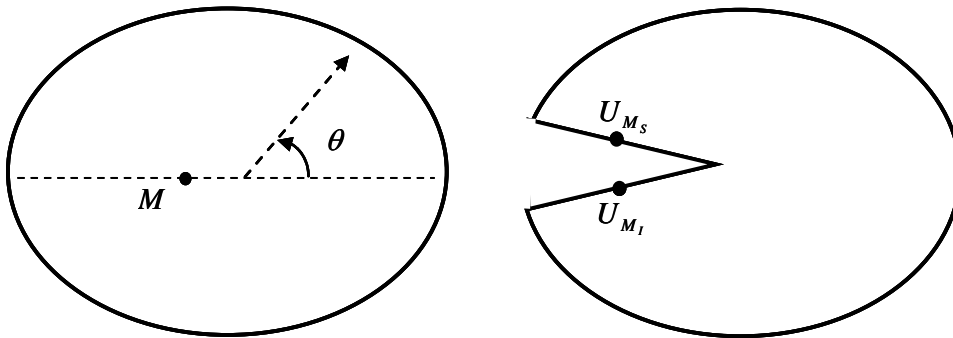
Enfin, exprimés dans l'espace temporel, les facteurs (I.3.27) se définissent ainsi :

$$C_{\beta}(t) = \int_{-\infty}^t \left( \frac{1}{2.\mu(t-\tau)} \right) \cdot \frac{\partial K_{\beta}^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \text{ et } D_{\beta}(t) = \int_{-\infty}^t \left( \frac{k(t-\tau)}{2.\mu(t-\tau)} \right) \cdot \frac{\partial K_{\beta}^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.3.29})$$

### Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

L'ouverture de fissure se définit comme le déplacement relatif de deux points symétriques placés conjointement sur les lèvres supérieures ( $U_{M_s}$ ) et inférieures ( $U_{M_i}$ ) de la fissure, Figure I.3.6, tel que :

$$[\bar{u}](r, t) = \bar{u}(r, t, \theta = +\pi) - \bar{u}(r, t, \theta = -\pi) \quad (\text{I.3.30})$$



**Figure I.3.6.** Ouverture des lèvres de la fissure

En introduisant (I.3.28) dans l'expression (I.3.30) l'ouverture de fissure dans chaque mode devient :

$$[u_1](r,t) = 2 \cdot [C_2(t) + D_2(t)] \cdot \left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad [u_2](r,t) = 2 \cdot [C_1(t) + D_1(t)] \cdot \left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.31})$$

En introduisant les facteurs d'intensité d'ouverture de fissure  $K_\beta^{(\varepsilon)}$  [DUB 97], la relation (I.3.31) devient :

$$[u_1](r,t) = \left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot K_2^{(\varepsilon)}(t) \quad \text{et} \quad [u_2](r,t) = \left(\frac{r}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot K_1^{(\varepsilon)}(t) \quad (\text{I.3.32})$$

avec  $K_\beta^{(\varepsilon)}(t) = 2 \cdot [C_\beta(t) + D_\beta(t)]$

La combinaison des équations (I.3.29) et (I.3.32) donnent, dans l'espace temporel, les facteurs d'intensité d'ouverture :

$$K_\beta^{(\varepsilon)}(t) = \int_{-\infty}^t C_\beta(t-\tau) \cdot \frac{\partial K_\beta^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad C_\beta(t) = \left(\frac{k+1}{\mu}\right)(t) \quad (\text{I.3.33})$$

Les fonctions  $C_\beta$  désignent les complaisances viscoélastiques réduites en mode I et mode II.

#### I.3.4.2. Champs mécaniques orthotropes

##### Facteurs d'intensité de contrainte

Le champ de contrainte élastique singulier, au voisinage de la fissure, s'exprime à l'aide des formes singulières de Sih [SIH 81]. Ce champ est dépendant des caractéristiques du matériau et s'exprime comme suit :

$$\sigma_{11} = \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{s_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{s_2}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{s_1}{\sqrt{\rho_1}} \right) \right] + \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{s_2^2}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{s_1^2}{\sqrt{\rho_1}} \right) \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{s_1}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{s_2}{\sqrt{\rho_1}} \right) \right] + \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \right) \right] \quad (\text{I.3.34})$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_1^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{s_1 \cdot s_2}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \right) \right] + \frac{K_2^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left( \frac{s_1}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{s_2}{\sqrt{\rho_1}} \right) \right]$$

Pour un comportement purement élastique, le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{aligned}
 u_1 = & 2 \cdot K_1^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{\rho_2} - p_1 \cdot s_2 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \\
 & + 2 \cdot K_2^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot \sqrt{\rho_2} - p_1 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right]
 \end{aligned} \tag{I.3.35}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 = & 2 \cdot K_1^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{\rho_2} - q_1 \cdot s_2 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \\
 & + 2 \cdot K_2^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot \sqrt{\rho_2} - q_1 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right]
 \end{aligned}$$

avec  $\rho_j = \cos(\theta) + i \cdot s_j \cdot \sin(\theta)$  avec  $j \in \{1;2\}$  (I.3.36)

et  $p_j = S_{11} \cdot s_j^2 + S_{12}$  et  $q_j = \frac{S_{22}}{s_j} + S_{12}$  (I.3.37)

$s_j$  désignent les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$S_{11} \cdot s_\beta^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{33}) \cdot s_\beta^2 + S_{22} = 0 \tag{I.3.38}$$

$S_{11}, S_{12}, S_{22}$ , et  $S_{33}$  indiquent les composantes du tenseur de rigidité pour une symétrie orthotrope.

### Facteurs d'intensité d'ouverture de fissure

Pour un comportement viscoélastique, l'ouverture de fissure s'exprime, dans l'espace de Laplace Carson, de la façon suivante [DUB 97] :

$$[u_1^*](r, p) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (p_2 - p_1)}{s_1 - s_2} \right]^* (p) \cdot K_2^{(\sigma)}(p) \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \tag{I.3.39}$$

$$[u_2^*](r, p) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2)}{s_1 - s_2} \right]^* (p) \cdot K_1^{(\sigma)}(p) \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}}$$

On peut introduire les facteurs d'intensité d'ouverture de fissures, [DUB 96.1] :

$$K_1^{(\varepsilon)*}(p) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2)}{s_1 - s_2} \right]^* (p) \cdot K_1^{(\sigma)*}(p) \tag{I.3.40}$$

$$K_2^{(\varepsilon)*}(p) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (p_2 - p_1)}{s_1 - s_2} \right]^* (p) \cdot K_2^{(\sigma)*}(p)$$

L'application de la transformé inverse de Laplace Carson (I.2.50) à l'équation (I.3.40), nous donne, dans l'espace temporel, la relation entre les facteurs d'intensité de contrainte et d'ouverture de fissure :

$$K_{\beta}^{(\varepsilon)} = \int_0^t C_{\beta}(t-\tau) \cdot \frac{\partial K_{\beta}^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{I.3.41})$$

$$\text{avec } C_1(t) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2)}{s_1 - s_2} \right] (t) \text{ et } C_2(t) = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (p_2 - p_1)}{s_1 - s_2} \right] (t) \quad (\text{I.3.42})$$

$C_1$  et  $C_2$  sont les complaisances viscoélastiques réduites orthotropes en mode I et II, [ALM 84], [VAL 84].

### I.3.5. Comportement dégradé en zone d'élaboration

#### I.3.5.1. Zone d'élaboration viscoélastique

Si on suppose un matériau viscoélastique en pointe de fissure, la singularité des champs mécaniques engendre un milieu dans lequel les contraintes sont physiquement majorées [DUB 97]. Dans ce cas, Dugdale [DUG 60] propose une majoration des contraintes normales perpendiculaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}$ ) par une valeur correspondant à la limite élastique en traction  $\sigma_m^{(\beta)}$ , dans la zone d'élaboration dont la taille ou *process zone* est caractérisée par  $\alpha_{\beta}$  propre à chaque mode de sollicitation, Figure I.3.7.

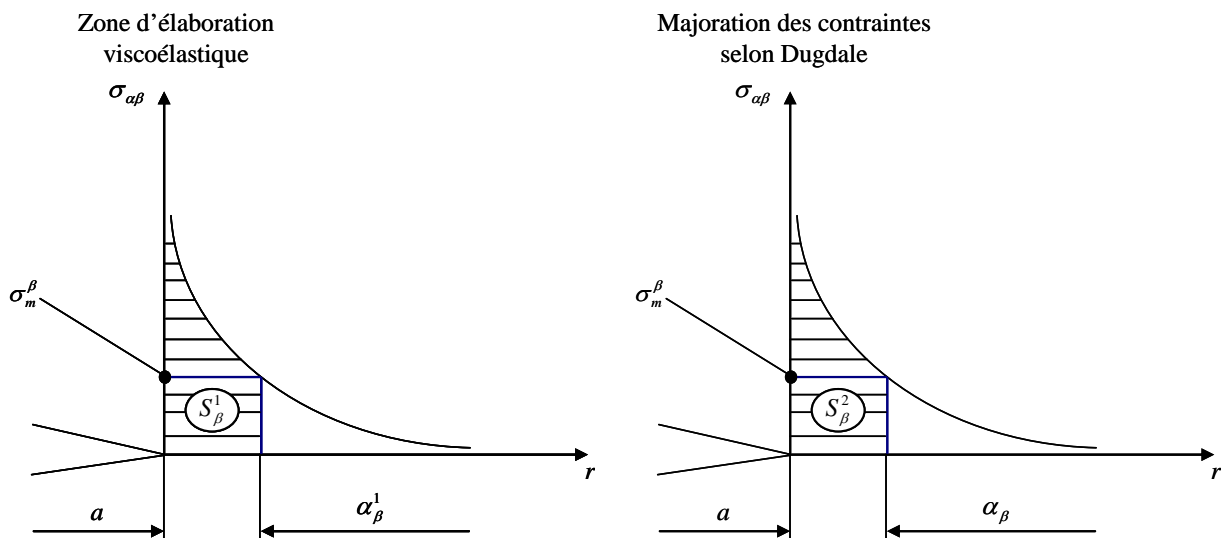


Figure I.3.7. Taille de la zone d'élaboration



Supposons que nous avons un mode I et un mode II de fissuration, dont la taille de la zone d'élaboration est  $\alpha_\beta$  ( $\beta \in (1;2)$ ), les contraintes normales perpendiculaires et de cisaillement peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma_{22}(\theta = 0, r \leq \alpha) = \sigma_m^{(1)} \quad (\text{I.3.43})$$

$$\sigma_{12}(\theta = 0, r \leq \alpha) = \sigma_m^{(2)} \quad (\text{I.3.44})$$

$\sigma_m^{(1)}$  et  $\sigma_m^{(2)}$  sont respectivement les limites élastiques en traction perpendiculaire et cisaillement. En accord avec la théorie d'Irwin [IRW 57], à l'extérieur de la zone d'élaboration les contraintes admettent, pour chaque mode de sollicitation, les valeurs suivantes :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta = 0, r) = \frac{K_\beta^{(\sigma)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) = \{1, 2\} \quad (\text{I.3.45})$$

Dans la zone viscoélastique nous pouvons écrire, entre  $r = 0$  et  $r = \alpha^1$  :

$$S_\beta^1 = \int_0^{\alpha_\beta^1} \sigma_{\alpha\beta}(\theta = 0, r) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot K_\beta^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\alpha_\beta^1} \quad (\text{I.3.46})$$

$\alpha_\beta^1$  est défini tel que :  $\sigma_{\alpha\beta}(\theta = 0, r) = \sigma_m^{(\beta)}$ , avec :

$$\alpha_\beta^1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{K_\beta^{(\sigma)}}{\sigma_m^{(\beta)}} \right)^2 \quad (\text{I.3.47})$$

En supposant que le modèle de Dugdale propose une majoration des contraintes à l'intérieur de la zone d'élaboration, nous obtenons :

$$S_\beta^2 = \sigma_m^{(\beta)} \cdot \alpha_\beta \quad \text{et} \quad S_\beta^1 = 2 \cdot \sigma_m^{(\beta)} \cdot \alpha_\beta^1 \quad (\text{I.3.48})$$

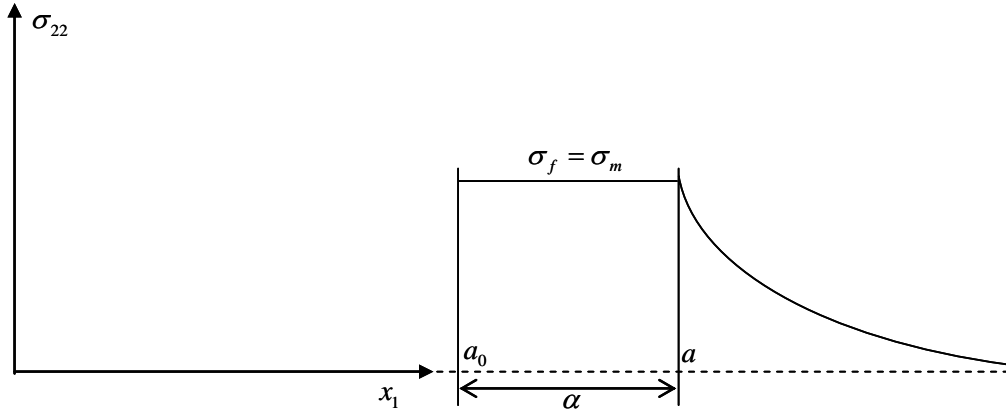
Afin d'éviter une majoration numérique des contraintes dans la zone d'élaboration, on se rapproche du cas réel en doublant la valeur de  $\alpha_\beta^1$ , avec  $S_\beta^1 = S_\beta^2$ . On définit ainsi la longueur de la zone d'élaboration suivante :

$$\alpha_\beta = \alpha_\beta^1 = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{K_\beta^{(\sigma)}}{\sigma_m^{(\beta)}} \right)^2 \quad (\text{I.3.49})$$

La majoration précédente définit un comportement plastique localisé. Or, l'ignorance de la forme réelle des champs mécaniques en pointe de fissure nous incite à proposer, selon Schapery, un modèle dégradé en pointe de fissure.

### I.3.5.2. Comportement viscoélastique en zone dégradée

Dans un matériau viscoélastique, Schapery [SCH 75<sub>a</sub>] [SCH 75<sub>b</sub>] propose une superposition d'un comportement viscoélastique et d'un champ de contrainte dit de cohésion limitant ainsi le niveau de contrainte transversale à la fissure à une valeur dite moyenne  $\sigma_m^{(\beta)}$ , sur une distance  $\alpha_\beta$  du front de fissure délimitant la *process zone*, Figure I.3.8.



**Figure I.3.8.** Champ de contrainte transversale en pointe de fissure

Si nous supposons que cette zone répond à un critère de plasticité [DUB 97], la représentation de Dugdale préconise que la contrainte  $\sigma_f$  soit constante sur  $\alpha_\beta$ , de telle sorte que :

$$K_\beta^{(\sigma)} = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_m^{(\beta)} \cdot (\alpha_\beta)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.50})$$

La taille de la zone d'élaboration augmente proportionnellement avec le carré du facteur d'intensité de contrainte propre à chaque mode de rupture :

$$\alpha_\beta = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{K_\beta^{(\sigma)}}{\sigma_m^{(\beta)}}\right)^2 \quad (\text{I.3.51})$$

### I.3.5.3. Généralisation à des configurations mixtes

Ce paragraphe propose une généralisation de l'équation (I.3.51) à des configurations mixtes. Le développement analytique repose sur la théorie de Schapery [SCH 75<sub>a</sub>] [SCH 75<sub>b</sub>] et de Dugdale [DUD 60].

Conformément aux équations (I.3.43) et (I.3.44), désignons par  $\sigma_{22}^{(m)}$  et  $\sigma_{12}^{(m)}$  les contraintes limites respectivement en mode I et en mode II. A partir de la relation (I.3.51), les relations suivantes sont déduites :

$$\sigma_{22}^{(m)} = A \cdot \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sqrt{\pi \cdot \alpha}}$$

$$\sigma_{12}^{(m)} = A \cdot \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sqrt{\pi \cdot \alpha}}$$
(I.3.52)

Le critère de plasticité en mode mixte est défini de la manière suivante :

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^{(m)}} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^{(m)}} = 1$$
(I.3.53)

En introduisant les expressions (I.3.52) dans (I.3.53), on obtient :

$$\frac{1}{A} \cdot \left( \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sigma_{22}^{(m)} \cdot \sqrt{\pi \cdot \alpha}} + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sigma_{12}^{(m)} \cdot \sqrt{\pi \cdot \alpha}} \right) = 1$$
(I.3.54)

Finalement, après développement de l'expression (I.3.54), on obtient la longueur de la zone d'élaboration en mode mixte suivante :

$$\alpha = A' \cdot \left( \frac{K_I^{(\sigma)}}{\sigma_{12}^{(m)}} + \frac{K_{II}^{(\sigma)}}{\sigma_{22}^{(m)}} \right)^2 \quad \text{avec } A' = \frac{\pi}{8}$$
(I.3.55)

### I.3.6. Découplage des modes de rupture

#### I.3.6.1. Intégrales de contour

Les intégrales de contours découlent de l'application des lois de conservation énergétiques [NOE 18] [BUI 07] et permettent de s'affranchir de la singularité en pointe de fissure même dans le cas d'un chargement en mode mixte [BON 97]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour choisi. Parmi les plus connues, on citera l'intégrale  $J$  de Rice [RIC 68], l'intégrale duale  $I$  de Bui [BUI 73], l'intégrale hybride s'appuyant sur le super élément de Tong et Pian [ZHA 92] ou encore les intégrales  $T$  et  $A$  proposées par Bui et Proix [BUI 85] étudiées et mises en œuvre par Zhang [ZHA 92] et Petit [PET 94].

#### I.3.6.2. Méthodes de découplage des modes

##### Méthode de maillage symétrique

La méthode de découplage consiste, dans ce cas, à séparer les paramètres énergétiques en deux termes, chacun d'eux étant reliés au facteur d'intensité de contrainte correspondant [BOU 00] :

$$\begin{cases} J = J_I + J_{II} \\ G = G_I + G_{II} \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} J_I = G_I = \frac{K_I^2}{k} \\ J_{II} = G_{II} = \frac{K_{II}^2}{k} \end{cases} \quad (\text{I.3.56})$$

Le coefficient  $k$  est donné par l'équation (I.3.22). Il convient alors d'effectuer la décomposition du champ de déplacement en une partie symétrique, et une partie antisymétrique, correspondant respectivement au mode I et au mode II, par rapport à l'axe de la fissure. On considère, pour la circonstance, deux points  $M_S$  et  $M_I$ , Figure I.3.6, symétriques par rapport à l'axe de la fissure, dont les déplacements sont obtenus par combinaison linéaire ; ce qui permet d'identifier la contribution des deux modes de rupture. Numériquement, la difficulté de cette méthode réside dans le fait que les deux points  $M_S$  et  $M_I$  soient géométriquement placés aux mêmes coordonnées mais sur chaque lèvres, ce qui exige un maillage et un contour symétrique de part et d'autre de l'axe de la fissure.

Bui et Proix [BUI 85] ont également proposé une méthode de découplage qui consiste à découpler les modes de rupture en introduisant des champs de déplacements symétriques et antisymétriques en présence des champs thermiques.

### Méthode de Chen

Dans une cinétique de mode mixte, Chen et Shield [CHE 77] ont développé une méthode de découplage basée sur la forme bilinéaire de l'énergie libre suivante :

$$F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k} \cdot v_{i,j} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \cdot v_{i,j} \quad (\text{I.3.57})$$

$\lambda$  et  $\mu$  désignent les coefficients de Lamé, alors que  $u_i$  et  $v_i$  sont respectivement les champs de déplacement réels et virtuels cinématiquement admissibles. Grâce à la loi de Hooke, on écrit, pour des petites déformations, la loi de comportement suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.3.58})$$

En introduisant l'équation (I.3.58) dans la relation (I.3.57), on obtient :

$$F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} + \mu \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \quad (\text{I.3.59})$$

Les différentes définitions des formes bilinéaires des tenseurs de déformation s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \cdot (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{I.3.60})$$

Le produit tensoriel des formes réelles et virtuelles, introduites par (I.3.60), conduit à :

$$\varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{4} \cdot [u_{i,j} \cdot v_{i,j} + u_{j,i} \cdot v_{i,j} + u_{i,j} \cdot v_{j,i} + u_{j,i} \cdot v_{j,i}] \quad (\text{I.3.61})$$

L'introduction des notations nous permettent d'écrire :

$$u_{i,j} \cdot v_{i,j} = u_{j,i} \cdot v_{j,i} \quad \text{et} \quad u_{i,j} \cdot v_{j,i} = u_{j,i} \cdot v_{i,j} \quad (\text{I.3.62})$$

L'introduction de la relation (I.3.62) dans l'expression (I.3.61) donne :

$$\varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \cdot v_{i,j} \quad (\text{I.3.63})$$

En considérant que  $\sigma_{ij}(u)$  désigne les composantes de la contrainte réelle, on démontre, en insérant la loi de comportement (I.3.58) dans la forme (I.3.63), que :

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k} \cdot v_{i,j} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \cdot v_{i,j} = F(u, v) \quad (\text{I.3.64})$$

On remarque finalement que le pseudo potentiel  $F$  peut être généralisé à des symétries anisotropes avec une bilinéarité, en termes de tenseur de déformation et de contrainte, résumée par la relation suivante :

$$F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(v) \cdot \varepsilon_{ij}(u) \quad (\text{I.3.65})$$

## I.4. Conclusion

Ce premier chapitre a consisté à résumer trois points essentiels : la structure viscoélastique du matériau bois, les méthodes de calcul en viscoélasticité, et certains concepts de la mécanique de la rupture appliqués aux matériaux obéissant à un comportement dépendant du temps. Les méthodes énergétiques, utiles pour l'évaluation des caractéristiques de rupture et viscoélastiques loin de la perturbation introduite par la singularité en fond de fissure, sont décrites. En outre, les outils rappelés et utilisés actuellement sont généralement propres aux modes simples de sollicitation, excluant une évolution du front de fissure dans le cas des chargements complexes induisant une combinaison d'un mode d'ouverture et de cisaillement. Le chapitre qui suit va consister, sur les bases des approches décrites ici et de la forme bilinéaire de l'énergie libre, à étendre la problématique du découplage des modes mixtes aux matériaux viscoélastiques orthotropes, tout en se préoccupant de la complexité d'une propagation de la fissure responsable, dans nombres de cas, de la ruine de la structure.

# CHAPITRE II. DECOUPLAGE DE MODES DE RUPTURE DANS UN MATERIAU VISCOELASTIQUE ORTHOTROPE

---

<b>II.1. Modélisation du comportement viscoélastique .....</b>	<b>41</b>
II.1.1. Formulation thermodynamique .....	41
II.1.1.1. Développement uni-axial .....	41
II.1.1.2. Formulation incrémentale tridimensionnelle.....	43
II.1.2. Principe des travaux virtuels .....	45
II.1.3. Méthode des éléments finis .....	46
<b>II.2. Généralisation à l'amorçage de propagation de fissure .....</b>	<b>47</b>
II.2.1. Méthodes énergétiques .....	48
II.2.1.1. Intégrale $J$ et $G\theta$ .....	48
II.2.1.2. Intégrale $M$ et $M\theta$ .....	49
II.2.1.3. Généralisation au comportement viscoélastique .....	51
II.2.2. Champs mécaniques en pointe de fissure.....	53
II.2.3. Algorithme de résolution sur Castem.....	54
II.2.3.1. Explication de l'algorithme .....	54
II.2.3.2. Explication des procédures annexes.....	56
II.2.4. Validation numérique de l'intégrale $M$ pour une fissure stationnaire.....	57
II.2.4.1. Eprouvette CTS (Compact Tension Shear).....	57
II.2.4.2. Modèle rhéologique.....	58
II.2.4.3. Résultats numériques.....	59
II.2.5. Conclusion.....	66
<b>II.3. Généralisation de <math>Mv</math> pour une propagation de fissure .....</b>	<b>66</b>
II.3.1. Développement analytique de l'intégrale $M$ .....	66
II.3.1.1. Les différents référentiels.....	66
II.3.1.2. Généralisation du théorème de Noether .....	68
II.3.1.3. Intégrale $M$ en propagation .....	71
II.3.1.4. Intégrale $M\theta$ .....	73
II.3.2. Généralisation au comportement viscoélastique .....	75
II.3.3. Généralisation des intégrales $T$ et $A$ au comportement viscoélastique .....	76

II.3.3.1. Forme quadrilinéaire du théorème de Noether.....	76
II.3.3.2. Intégrale $T_v$ .....	77
II.3.3.3. Intégrale $A_v$ .....	79
<b>II.4. Implémentation éléments finis et validation numérique de l'intégrale <math>M\theta_v</math> en propagation.....</b>	<b>80</b>
II.4.1. Préliminaires.....	80
II.4.1.1. Restrictions des intégrales $M\theta_v$ et $G_v$ .....	80
II.4.1.2. Formulation incrémentale et modélisation .....	81
II.4.2. Algorithme de propagation.....	81
II.4.3. Indépendance du domaine d'intégration .....	83
II.4.3.1. Taux de restitution d'énergie et vitesse de propagation .....	83
II.4.3.2. Taux de restitution d'énergie et couronnes d'intégration.....	85
II.4.4. Facteurs d'intensité de contrainte.....	87
II.4.5. Taux de restitution d'énergie.....	89
II.4.5.1. Taux de restitution d'énergie en fonction du temps et des couronnes .....	89
II.4.5.2. Taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure .....	92
<b>II.5. Conclusion .....</b>	<b>94</b>

---

## II.1. Modélisation du comportement viscoélastique

### II.1.1. Formulation thermodynamique

Elle est utilisée par plusieurs codes de calcul et met en jeu les différentes énergies prises en compte dans les approches globales. Dans la littérature, des méthodes comme la décomposition en parties sphérique et déviatorique des tenseurs de contrainte et de déformation [MAS 93], ou encore la méthode numérique de Zienkiewicz [ZIE 68], existent. Cependant, nous nous intéresserons au modèle basé sur la décomposition spectrale du tenseur de fluage proposé par Mandel [MAN 66] car nos structures seront principalement soumises à des charges permanentes. Dans ce paragraphe, nous présentons un développement uni-axial et une généralisation au comportement tridimensionnel.

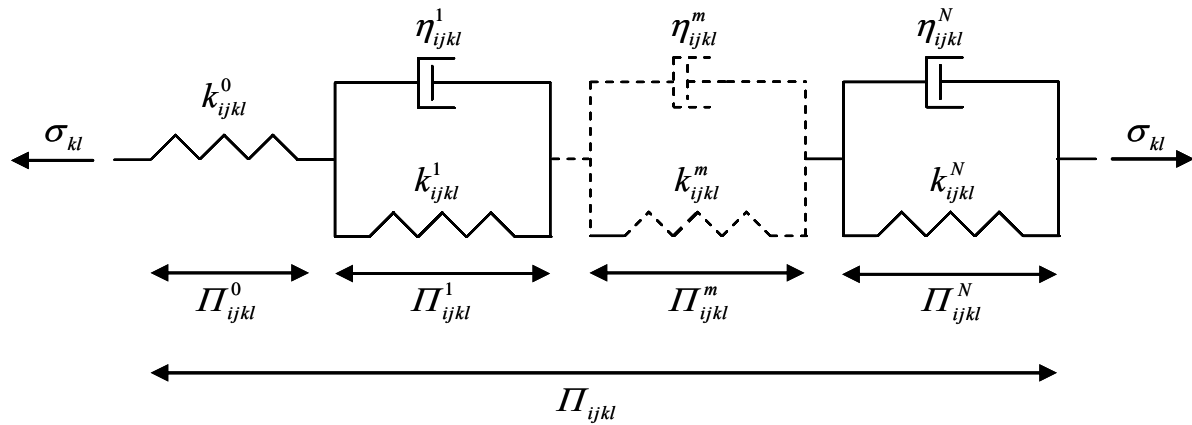
#### II.1.1.1. Développement uni-axial

Le tenseur de fluage  $J$  admet la décomposition spectrale suivante [MAN 66] [DUB 97] :

$$J(t) = J^{(0)} + \sum_{m=1}^N J^{(m)} \cdot (1 - e^{-\lambda^{(m)} \cdot t}) \quad (\text{II.1.1})$$

La réponse en déformation peut s'exprimer comme ce qui suit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)} + \sum_{m=1}^N \varepsilon^{(m)} \quad (\text{II.1.2})$$



**Figure II.1.1.** Décomposition du tenseur de déformation

On peut établir la relation suivante :

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{k^{(0)}} \cdot \sigma \quad (\text{II.1.3})$$



En dérivant par rapport au temps l'équation (II.1.2) et la relation (II.1.3), on obtient

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{k^{(0)}} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^N \varepsilon^{(m)} \quad (\text{II.1.4})$$

Pour le  $m^{\text{ième}}$  ressort du modèle rhéologique, la contrainte se traduit par :

$$\sigma = k^{(m)} \cdot \varepsilon^{(m)} + \eta^{(m)} \cdot \frac{\partial \varepsilon^{(m)}}{\partial t} \quad (\text{II.1.5})$$

Une résolution par différence finie des équations précédentes implique une discrétisation temporelle du système. Si  $I$  indique le nombre total d'incrément de temps considéré, avec  $n \in \{1; \dots; I\}$ , on obtient à l'instant  $t_n$  les notations qui suivent :

$$\Delta \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}, \Delta t_n = t_n - t_{n-1} \rightarrow \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \approx \frac{\Delta \alpha_n}{\Delta t} \text{ avec } \alpha \in (\sigma, \varepsilon) \text{ et } \alpha_n = \alpha(t_n) \quad (\text{II.1.6})$$

Munie des expressions précédentes, l'équation (II.1.2) devient :

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{1}{k^{(0)}} \cdot \Delta \sigma_n + \sum_{m=1}^N \Delta \varepsilon_n^{(m)} \quad (\text{II.1.7})$$

Le problème revient donc à calculer le terme  $\Delta \varepsilon_n^{(m)}$ . Pour cela, nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle avec second membre à coefficient constant (II.1.5) en s'appuyant sur la méthode de la variation de la constante. On obtient finalement :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = \left( e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} - 1 \right) \cdot \varepsilon_{n-1}^{(m)} + \frac{1}{\eta^{(m)}} \cdot e^{-\lambda^{(m)} \cdot t_n} \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma \cdot e^{-\lambda^{(m)} \cdot t} dt \quad (\text{II.1.8})$$

Or, en supposant une linéarité de  $\sigma$  entre les deux bornes de l'intégrale de droite, on a la relation suivante :

$$\forall t \in \{t_{n-1} \dots t_n\}, \sigma(t) = \sigma_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t_n} \cdot \Delta \sigma_n \quad (\text{II.1.9})$$

En introduisant la forme (II.1.9) dans l'expression (II.1.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_n^{(m)} = & \left( e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} - 1 \right) \cdot \varepsilon_{n-1}^{(m)} + \left( \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \cdot \sigma_{n-1} \right) \\ & + \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \right) \cdot \Delta \sigma_n \end{aligned} \quad (\text{II.1.10})$$

La prise en compte de l'équation (II.1.10) dans la forme différentielle (II.1.7) abouti à :

$$\Delta \varepsilon_n = \Psi_n \cdot \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_{n-1} \quad (\text{II.1.11})$$

Avec  $\Psi_n$  la de complaisance équivalente traduisant l'effet d'une variation de contrainte sur la déformation pendant l'incrément  $\Delta t_n$ , définie par :

$$\Psi_n = \frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \right) \quad (\text{II.1.12})$$

$\tilde{\varepsilon}_{n-1}$  traduit l'histoire du matériau remise à jour à chaque pas de calcul. Elle se définit par :

$$\tilde{\varepsilon}_{n-1} = \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{k^{(m)}} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \right) \cdot \sigma_{n-1} + \sum_{m=1}^M \left( e^{-\lambda^{(m)} \cdot \Delta t_n} - 1 \right) \cdot \varepsilon_{n-1}^{(m)} \quad (\text{II.1.13})$$

### II.1.1.2. Formulation incrémentale tridimensionnelle

Le comportement viscoélastique linéaire peut être exprimé via une formulation incrémentale afin d'éviter la saturation due à l'histoire des contraintes et des déformations [CHA 01]. Ainsi, on définit les composantes du tenseur de déformation  $\Pi_{ijkl}$  induit par les composantes du tenseur de contrainte  $\sigma_{kl}$  de la façon suivante [GHA 95] [DUB 97] [DUB 05] :

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{ijkl}^{(0)} + \sum_{m=1}^N \Pi_{ijkl}^{(m)} \quad \text{avec } m = (1; \dots; N) \quad (\text{II.1.14})$$

Le tenseur de déformation s'exprime, dans ce cas, de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} \Pi_{ijkl} \quad (\text{II.1.15})$$

Selon le modèle de Kelvin Voigt généralisé, la décomposition spectrale du tenseur de fluage  $J_{ijkl}$  peut être décrite par l'association d'un ensemble de ressorts  $k_{ijkl}^{(p)}$  ( $p \in \{0; 1; \dots; N\}$ ) et d'amortisseurs  $\eta_{ijkl}^{(p)}$  ( $m \in \{1; \dots; N\}$ ) tel que [MEN 66] [GHA 95] :

$$J_{ijkl}(t) = J_{ijkl}^{(0)} + \sum_{m=1}^N J_{ijkl}^{(m)} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot t} \right) = \left[ \frac{1}{k_{ijkl}^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot t} \right) \right] \quad (\text{II.1.16})$$

$$\text{avec } \lambda_{ijkl}^{(m)} = \frac{k_{ijkl}^{(m)}}{\eta_{ijkl}^{(m)}}$$

Dans l'incrément de temps  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  défini par l'équation (II.1.6) , et à partir de l'équation (II.1.11), la relation incrémentale constitutive prend la forme qui suit [GHA 95]:

$$\Delta \Pi_{ijkl}(t_n) = \Psi_{ijkl} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n) + \tilde{\Pi}_{ijkl}(t_{n-1}) \quad \text{sans sommation sur les indices } kl \quad (\text{II.1.17})$$

$\Delta \Pi_{ijkl}(t_n)$  et  $\Delta \sigma_{kl}(t_n)$  représentent respectivement les incréments de  $\Pi_{ijkl}$  et  $\sigma_{kl}$ .  $\tilde{\Pi}_{ijkl}(t_{n-1})$  est la pseudo contrainte au temps  $t_{n-1}$  témoin de l'influence de l'histoire des déformations dans les différentes cellules de Kelvin Voigt, et revêt la notation suivante :

$$\tilde{\Pi}_{ijkl}(t_{n-1}) = \sum_{m=1}^N \tilde{\Pi}_{ijkl}^{(m)}(t_{n-1}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\Pi}_{ijkl}^{(m)}(t_{n-1}) = \left( e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} - 1 \right) \cdot \left[ \frac{\sigma_{kl}(t_{n-1})}{k_{ijkl}^{(m)}} - \Pi_{ijkl}^{(m)}(t_{n-1}) \right] \quad (\text{II.1.18})$$

$\Psi_{ijkl}$  représente les composantes du tenseur viscoélastique du quatrième ordre  $\Psi$  calculées à partir de sa forme uni-axiale dans l'intervalle de temps  $\Delta t_n$ , et, identiquement à (II.1.12), se note :

$$\Psi_{ijkl} = \frac{1}{k_{ijkl}^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \right) \quad (\text{II.1.19})$$

Grâce à la linéarité du comportement et à l'application du principe de superposition, nous obtenons, sous forme indicielle, la loi incrémentale tridimensionnelle en déformation, avec sommation sur les indices  $kl$ , suivante :

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = \Psi_{ijkl} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_{n-1}) \quad (\text{II.1.20})$$

$$\text{avec } \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_{n-1}) = \sum_{k,l} \tilde{\Pi}_{ijkl}(t_{n-1}) \quad \text{et} \quad \Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = \sum_{k,l} \Delta \Pi_{ijkl}(t_n) \quad (\text{II.1.21})$$

En accord avec la fonction de fluage (II.1.16), paragraphe I.2.3.2, la définition d'énergie libre d'Helmholtz  $F$  peut être réécrite comme suite [DUB 05] [MOU 07<sub>b</sub>] :

$$F = \frac{1}{2} \cdot k_{ijkl}^{(0)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(0)} \cdot \varepsilon_{kl}^{(0)} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} \cdot k_{ijkl}^{(m)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(m)} \cdot \varepsilon_{kl}^{(m)} \quad (\text{II.1.22})$$

$$\text{avec } \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{k_{ijkl}^{(0)}} \cdot \sigma_{kl} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} = \int_0^t \frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}} \cdot \left( 1 - \exp^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot (t-\tau)} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{II.1.23})$$

L'évaluation de  $F$ , équation (II.1.22), pendant chaque pas de temps, requière la détermination des incréments de déformations  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$  et  $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ . Pour cela, en couplant les relations (II.1.23) avec les formes incrémentales (II.1.21), on obtient :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{(0)}(t_n) = \frac{1}{k_{ijkl}^{(0)}} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n) \quad \text{et} \quad \Delta \varepsilon_{ij}^{(m)}(t_n) = \sum_{k,l} \Delta \Pi_{ijkl}^{(m)}(t_n) \quad (\text{II.1.24})$$

$$\Delta \Pi_{ijkl}^{(m)}(t_n) = \left( e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} - 1 \right) \cdot \Pi_{ijkl}^{(m)}(t_{n-1}) + \left( \frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \cdot \sigma_{kl}(t_{n-1}) \right)$$

avec

$$+ \frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)} \cdot \Delta t_n} \right) \right) \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n)$$
(II.1.25)

Pour résoudre la formulation incrémentale (II.1.20), on s'appuie sur une formulation éléments finis issue du principe des travaux virtuels.

### II.1.2. Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuel repose sur un bilan énergétique mettant en jeu l'énergie libre de déformation élastique  $F$  et le travail des efforts extérieurs  $W_{ext}$ . Le théorème des travaux virtuels s'énonce de la manière suivante : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps déformable soit en équilibre est que la variation du travail des efforts extérieurs soit égale à la variation de l'énergie libre du système pour tous champs de déplacements cinématiquement admissibles.

Dans ce cas, en supposant un déplacement virtuel  $\delta(\Delta \bar{u})$  cinématiquement admissible et traduisant une perturbation du champ réel  $\bar{u}$  dans une configuration d'équilibre à la date  $t_{n-1}$ , le principe se traduit par l'équation qui suit [ZIE 68] :

$$\delta F = \delta W_{ext} \quad (II.1.26)$$

Etant donné que les champs de contraintes et de déformations sont connus à l'instant  $t_{n-1}$ , le problème revient à les déterminer à l'instant  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$  tout en se conformant à la relation (II.1.26). Le champ de déplacement virtuel  $\delta(\Delta \bar{u})$  de composantes  $\delta(\Delta u_i)$ , autour d'une configuration  $\Omega(t)$ , induit un taux de déformation virtuel  $\delta(\Delta \varepsilon_{ij})$  donné par le tenseur de déformation de Cauchy :

$$\delta(\Delta \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \delta(\nabla(\Delta u)) + \delta(\nabla(\Delta u))^T \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \delta(\Delta u_{i,j}) + \delta(\Delta u_{j,i}) \right], \text{ et } \delta(\Delta u_{i,j}) = \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (II.1.27)$$

L'énergie libre de déformation et la somme des travaux des efforts extérieurs sont données respectivement par :

$$\delta F(t_n) = \int_{\Omega(t_n)} \sigma_{ij}(t_n) \cdot \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) dV \quad (II.1.28)$$

$$\delta W_{ext}(t_n) = \int_{\Omega(t_n)} f_{vi}(t_n) \cdot \delta(\Delta u_i) dV + \int_{\Omega_{fs}(t_n)} f_{si}(t_n) \cdot \delta(\Delta u_i) dS \quad (II.1.29)$$

$f_{vi}$  sont les composantes des forces volumiques dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $t_n$ , et  $f_{si}$  les composantes des forces surfaciques imposées sur la frontière  $\Omega_f$  durant le même laps de temps.

Effectuons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t_n) = \sigma_{ij}(t_{n-1}) + \Delta\sigma_{ij}^n \\ f_{vi}(t_n) = f_{vi}(t_{n-1}) + \Delta f_{vi}^n \\ f_{si}(t_n) = f_{si}(t_{n-1}) + \Delta f_{si}^n \end{cases} \quad (\text{II.1.30})$$

S'aidant des équations (II.1.26), (II.1.28), (II.1.29) et les changements de variables (II.1.30), on a la relation qui suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t_n)} [\sigma_{ij}(t_{n-1}) + \Delta\sigma_{ij}] \cdot \delta(\Delta\varepsilon_{ij}) dV &= \int_{\Omega(t_n)} [f_{vi}(t_{n-1}) + \Delta f_{vi}] \cdot \delta(\Delta u_i) dV \\ &+ \int_{\Omega_{f_s}(t_n)} [f_{si}(t_{n-1}) + \Delta f_{si}] \cdot \delta(\Delta u_i) dS \end{aligned} \quad (\text{II.1.31})$$

Le principe étant vérifié à l'instant  $t_n$  et  $t_{n-1}$ , on obtient par récurrence, l'expression finale suivante :

$$\int_{\Omega(t_n)} \Delta\sigma_{ij} \cdot \delta(\Delta\varepsilon_{ij}) dV = \int_{\Omega(t_n)} \Delta f_{vi} \cdot \delta(\Delta u_i) dV + \int_{\Omega_{f_s}(t_n)} \Delta f_{si} \cdot \delta(\Delta u_i) dS \quad (\text{II.1.32})$$

### II.1.3. Méthode des éléments finis

La relation (II.1.32) est reconsidérée dans une discrétisation du domaine en éléments finis. Les inconnues nodales  $\{\Delta u\}(t_n)$  sont les valeurs de la variation du champ de déplacement aux nœuds de chaque sous domaine. Elles sont calculées, à partir des variations réelles du champ de déplacements  $\Delta u(t_n)$ , à l'aide des fonctions de forme  $N(x_1, x_2, x_3)$  caractérisant les éléments de discrétisation employés :

$$\Delta u(t_n)(x_1, x_2, x_3) = N(x_1, x_2, x_3) \cdot \{\Delta u\}(t_n) \quad (\text{II.1.33})$$

La variation du champ vectoriel de déformation  $\{\Delta\varepsilon\}(t_n)$ , calculée aux points d'intégration, est déterminée d'après la variation des déplacements nodaux grâce à la matrice jacobienne  $[B]$ :

$$\{\varepsilon\}(t_n) = [B] \cdot \{\Delta u\}(t_n) \quad (\text{II.1.34})$$

En introduisant les équations (II.1.33) et (II.1.34) dans l'expression (II.1.32), la formulation incrémentale (II.1.20) prend finalement la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t_n)} [B]^T \cdot A \cdot [B] \cdot \{\Delta u\}(t_n) dV + \int_{\Omega(t_n)} [B]^T \cdot \{\tilde{\sigma}\}(t_{n-1}) dV \\ = \int_{\Omega_{f_s}(t_n)} \{\Delta f_s\}(t_n) dS + \int_{\Omega(t_n)} \{\Delta f_v\}(t_n) dV \end{aligned} \quad (\text{II.1.35})$$

$$\text{avec } A = (\Psi_{ijkl})^{-1}(t_n) \text{ et } \tilde{\sigma}_{kl}(t_{n-1}) = -(\Psi_{ijkl})^{-1}(t_n) \cdot \tilde{\varepsilon}_{ijkl}(t_{n-1}) \quad (\text{II.1.36})$$

$\{\tilde{\sigma}\}(t_{n-1})$  est le vecteur contrainte défini aux points d'intégration de chaque élément calculé à partir du champ de contrainte de composantes  $\sigma_{kl}(t_{n-1})$ .  $\{\Delta f_v\}(t_n)$  et  $\{\Delta f_s\}(t_n)$  sont, respectivement, les forces nodales volumiques et surfaciques définies à partir des champs de forces de composantes  $\Delta f_{vi}(t_n)$  et  $\Delta f_{si}(t_n)$ .

En s'appuyant sur les deux changements de variables qui suivent et en insérant une notation viscoélastique due à l'effet de chaque ressort, on a [MOU 07<sub>b</sub>]:

$$K_r^p = \int_{\Omega} B^T \cdot [\Psi^p]^{-1} \cdot B d\Omega \quad (\text{II.1.37})$$

$$\{\tilde{F}^p\}(t_{n-1}) = - \int_{\Omega} B^T \cdot \Psi^p \cdot \{\tilde{\varepsilon}^p\}(t_{n-1}) d\Omega \quad (\text{II.1.38})$$

$$\{\Delta F_{ext}^p\}(t_n) = \int_{\Omega} \{\Delta f_s^p\}(t_n) dS + \int_{\Omega(t_n)} \{\Delta f_v^p\}(t_n) dV \quad (\text{II.1.39})$$

$K_r^p$  est la matrice tangente de rigidité apparente dans l'incrément de temps  $\Delta t_n$ .  $\{\tilde{F}^p\}(t_{n-1})$  représente le vecteur de force nodale mémorisant l'histoire mécanique du matériau jusqu'à l'instant  $t_{n-1}$ .  $\{\Delta F_{ext}^p\}(t_n)$  caractérise l'incrément de chargement nodal extérieur volumique et surfacique durant  $\Delta t_n$ .  $\{\tilde{\varepsilon}^p\}(t_{n-1})$  représente l'histoire des déformations. En fin de compte, l'introduction des équations (II.1.37), (II.1.38) et (II.1.39) dans l'égalité (II.1.35) conduit à l'équation d'équilibre éléments finis suivante :

$$K_r^p \cdot \{\Delta u^p\}(t_n) = \{\Delta F_{ext}^p\}(t_n) + \{\tilde{F}^p\}(t_{n-1}) \quad (\text{II.1.40})$$

$\{\Delta u^p\}(t_n)$  constitue l'incrément de déplacement.

## II.2. Généralisation à l'amorçage de propagation de fissure

Il s'agit dans cette partie, de généraliser l'intégrale  $M$  en statique développée par Chen [CHE 77], au comportement viscoélastique orthotrope, et de proposer une modélisation numérique de celle-ci. Pour cela, les intégrales de contour, issues des processus énergétiques et des approches locales vont être rappelées. L'algorithme de résolution est implanté dans le code aux éléments finis Castem. Celui-ci permet de coupler la formulation incrémentale du comportement viscoélastique et les procédures d'obtention des paramètres de découplage des modes de rupture. Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est utilisé pour introduire la sollicitation en fluage. Les résultats obtenus sont exprimés via l'évolution du taux de restitution d'énergie en fonction du temps, et ce, pour diverses cinétiques mixtes.

## II.2.1. Méthodes énergétiques

Elles permettent d'évaluer les paramètres de rupture loin du défaut introduit par la pointe de fissure où les champs mécaniques sont largement perturbés par une forte singularité. Le développement de ces outils est issu des lois de conservation énergétiques [NOE 18] [WAN 04] et des intégrales indépendantes [MOR 87] [BUI 07].

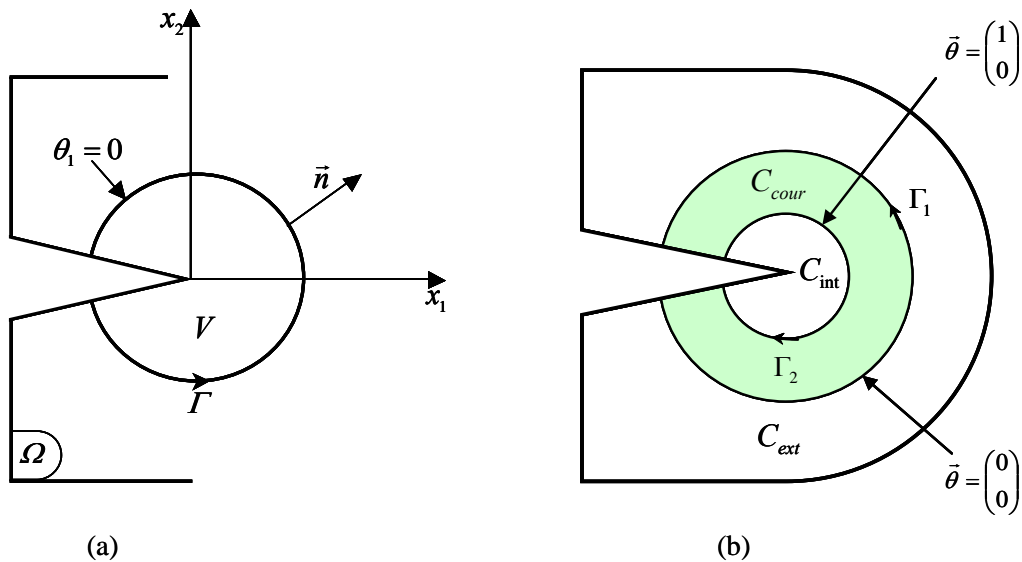
### II.2.1.1. Intégrale $J$ et $G\theta$

#### Intégrale $J$

En élasticité linéaire, pour des configurations planes et des fissures statiques, l'énergie susceptible de créer de nouvelles surfaces de fissures en fond de fissure est définie par l'intégrale de Rice [RIC 68] :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ F \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma \quad (\text{II.2.1})$$

$\Gamma$  est un contour curviligne incluant la pointe de fissure. Il est orienté par la normale  $\vec{n}$  de composante  $n_j$ , Figure II.2.1 (a).



**Figure II.2.1. a** : définition des paramètres autour de la pointe de fissure. **b** : définition du champ  $\theta$

#### Intégrale $G\theta$

L'intégrale  $J$ , équation (II.2.1), est définie sur un contour curviligne qui englobe la pointe de fissure. Or, pour les besoins d'implémentation dans un code de calcul et afin d'assurer la continuité

du domaine, il est préférable de définir cette expression sur un contour surfacique évitant ainsi des projections de champ, sources d'erreurs numériques. Destuynder et *al.* [DES 81] [DES 82] ont défini un champ  $\theta$ , continu et dérivable à l'intérieur du domaine considéré ( $\theta_1 = 1$  à l'intérieur du domaine, et  $\theta_2 = 1$  à l'extérieur de celui-ci), Figure II.2.1 (b). Ce champ doit respecter les propriétés suivantes :

- Le champ  $\bar{\theta}$  est dans le plan de la fissure,
- Le champ  $\bar{\theta}$  est normal au front de la fissure,
- Le support du champ  $\bar{\theta}$  est limité au voisinage de la fissure,
- Le champ  $\bar{\theta}$  est continûment dérivable et constant dans la zone entourant la pointe de fissure.

En pratique, on définit deux contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  entourant la pointe de fissure, divisant ainsi la pièce en trois parties, Figure II.2.1 b, [BOU 00] :

- Dans  $C_{int}$ , le champ  $\bar{\theta}$  est constant de norme unitaire (1,0) ;
- Dans  $C_{ext}$ , le champ  $\bar{\theta}$  est nul (0,0) ;
- Dans  $C_{cour}$ , le champ  $\bar{\theta}$  varie continûment de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ainsi, le taux de restitution d'énergie peut être exprimé de la manière suivante :

$$G\theta = \int_V [F \cdot \theta_{k,k} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \theta_k] dV \quad k \in \{1, 2\} \quad (\text{II.2.2})$$

Si les intégrales  $J$  et  $G\theta$  permettent de déterminer un invariant aboutissant à l'état mécanique au voisinage de la fissure, elles opèrent un calcul énergétique global indépendant de la mixité des modes de rupture. C'est pour cette raison que ces intégrales sont employées uniquement pour des cinétiques soit d'ouverture de fissure ou de cisaillement « pure ».

### II.2.1.2. Intégrale $M$ et $M\theta$

#### Intégrale $M$

Afin de séparer les modes mixtes de rupture, Chen et Shield [CHE 77] ont proposé une intégrale indépendante du domaine considéré appelée  $M$  :

$$M = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_i - \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma \quad (\text{II.2.3})$$



$\sigma_{ij}^{(u)}$  et  $\sigma_{ij}^{(v)}$  sont respectivement les champs de contraintes réels et virtuels définis par les relations (I.3.60) et (I.3.64). La particularité de l'intégrale  $M$  réside dans la combinaison conjointe des champs de déplacements réels  $u$  et virtuels  $v$  cinématiquement admissibles, paragraphe I.3.6. Cette méthode constitue une généralisation du principe des travaux virtuel défini précédemment.

### Intégrale $M\theta$

Comme pour l'intégrale  $J$ ,  $M$  est définie sur un contour curviligne, on lui préfère, comme au paragraphe précédent, l'intégrale  $M\theta$  [MOU 07<sub>b</sub>] sur un contour surfacique contenant la pointe de fissure. Pour des problèmes plans, cette intégrale se définit comme suite :

$$M\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_V [\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_i] \cdot \theta_{k,j} dV \quad (\text{II.2.4})$$

Pour des matériaux orthotropes, les champs de déplacements virtuels  $v$  sont donnés par les formes singulières de Sih [SIH 74], et ce, pour chaque mode de rupture :

$$\begin{aligned} v_1 = & 2 \cdot K_1^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{\rho_2} - p_1 \cdot s_2 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \\ & + 2 \cdot K_2^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (p_2 \cdot \sqrt{\rho_2} - p_1 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.5})$$

$$\begin{aligned} v_2 = & 2 \cdot K_1^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{\rho_2} - q_1 \cdot s_2 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \\ & + 2 \cdot K_2^{(\sigma)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (q_2 \cdot \sqrt{\rho_2} - q_1 \cdot \sqrt{\rho_1}) \right] \end{aligned}$$

Les définitions des paramètres du matériau présents dans cette équation sont rappelées par les équations (I.3.36), (I.3.37) et (I.3.38).

### Interprétation physique de l'intégrale $M\theta$

En élasticité linéaire, en considérant des champs de déplacements réels  $u$  et virtuels  $v$ , cinématiquement admissibles [DUB 99], on s'accorde sur l'interprétation suivante :

$$M(u, u) = J = G \quad (\text{II.2.6})$$

$M\theta$  représente le pseudo potentiel d'énergie dissipé lors du pas d'avancement de la pointe de fissure. Grâce au principe de superposition, on écrit la relation suivante [MOU 07<sub>b</sub>] :

$$M\theta(u, v) = C_1 \cdot \frac{{}^u K_I \cdot {}^v K_I}{8} + C_2 \cdot \frac{{}^u K_{II} \cdot {}^v K_{II}}{8} \quad (\text{II.2.7})$$

$C_1$  et  $C_2$  sont les complaisances élastiques réduites en mode I et en mode II [VAL 82]. Pour des symétries orthotropes, ils prennent les formes suivantes, équation (I.3.43) :

$$C_1 = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (q_2 \cdot s_1 - q_1 \cdot s_2)}{s_1 - s_2} \right] \text{ et } C_2 = 4 \cdot \Re e \left[ \frac{i \cdot (p_2 - p_1)}{s_1 - s_2} \right] \quad (\text{II.2.8})$$

Afin d'exprimer les facteurs d'intensité de contraintes réels  ${}^u K_I$  et  ${}^u K_{II}$ , le parfait découplage est obtenu en opérant deux calculs distincts de l'intégrale  $M\theta(u, v)$ . Dans ces conditions, on choisit judicieusement les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes virtuelles  ${}^v K_I$  et  ${}^v K_{II}$  telles que [MOU 07b] :

$${}^u K_I = 8 \cdot \frac{M({}^v K_I = 1, {}^v K_{II} = 0)}{C_I} \text{ et } {}^u K_{II} = 8 \cdot \frac{M({}^v K_I = 0, {}^v K_{II} = 1)}{C_{II}} \quad (\text{II.2.9})$$

### II.2.1.3. Généralisation au comportement viscoélastique

Pour la généralisation au comportement viscoélastique, on s'appuie sur un modèle de Kelvin Voigt généralisé composé de  $N$  cellules de Kelvin Voigt associées à un ressort en série, témoin du comportement élastique instantané du matériau, Figure II.1.1, paragraphe I.2.3.2. Ce modèle rhéologique est bien adapté pour représenter le comportement différé car il assure le couplage entre les propriétés élastiques (provenant de l'énergie libre) et les propriétés visqueuses (issues de l'énergie de dissipation). Dans ce cas de figure, l'expression (II.2.3) est généralisée de la façon suivante [MOU 07b]:

$$M_v^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} [\sigma_{ij,1}^{(k)}(v) \cdot u_i^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k)}(u) \cdot v_{i,1}^{(k)}] \cdot n_j d\Gamma \text{ avec } k = (0, 1, \dots, N) \quad (\text{II.2.10})$$

$\sigma_{ij}^{(k)}(u)$  et  $\sigma_{ij}^{(k)}(v)$  indiquent respectivement les contraintes réelles et virtuelles dans le  $k^{\text{ième}}$  ressort du modèle rhéologique.  $u_i^{(k)}$  et  $v_i^{(k)}$  sont les élongations réelles et virtuelles du  $k^{\text{ième}}$  ressort induites par leurs contraintes réelles et virtuelles respectives.

Identiquement à l'expression précédente, l'équation (II.2.4) revêt aussi la généralisation suivante :

$$M\theta_v^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \int_V [\sigma_{ij}^{(k)}(u) \cdot u_i^{(k)} - \sigma_{ij,k}^{(k)}(v) \cdot v_{i,k}^{(k)}] \cdot \theta_{k,j} dV \text{ avec } k = (0, 1, \dots, N) \quad (\text{II.2.11})$$

Consécutivement aux équations (II.2.7) et (II.2.9), on obtient successivement :

$$M\theta_v^{(k)} = C_1^{(k)} \cdot \frac{{}^u K_I^{(k)} \cdot {}^v K_I^{(k)}}{8} + C_2^{(k)} \cdot \frac{{}^u K_{II}^{(k)} \cdot {}^v K_{II}^{(k)}}{8} \quad (\text{II.2.12})$$

$$\begin{aligned}
 {}^u K_I^{(k)} &= 8 \cdot \frac{M\theta_v^{(k)} \left( {}^v K_I^{(k)} = 1, {}^v K_{II}^{(k)} = 0 \right)}{C_1^{(k)}} \quad \text{et} \\
 {}^u K_{II}^{(k)} &= 8 \cdot \frac{M\theta_v^{(k)} \left( {}^v K_I^{(k)} = 0, {}^v K_{II}^{(k)} = 1 \right)}{C_2^{(k)}}
 \end{aligned} \tag{II.2.13}$$

${}^v K_I^{(k)}$  et  ${}^v K_{II}^{(k)}$  sont les facteurs d'intensité de contraintes virtuels induits respectivement par les champs de déplacements virtuels  $v_1^{(k)}$  et  $v_2^{(k)}$  défini dans ce cas, par [SIH 74]:

$$\begin{aligned}
 v_1^{(k)} &= 2 \cdot {}^v K_I^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1^{(k)} - s_2^{(k)}} \cdot \left( p_2^{(k)} \cdot s_1^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_2^{(k)}} - p_1^{(k)} \cdot s_2^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_1^{(k)}} \right) \right] \\
 &+ 2 \cdot {}^v K_{II}^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1^{(k)} - s_2^{(k)}} \cdot \left( p_2^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_2^{(k)}} - p_1^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_1^{(k)}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{II.2.14}$$

$$\begin{aligned}
 v_2^{(k)} &= 2 \cdot {}^v K_I^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1^{(k)} - s_2^{(k)}} \cdot \left( q_2^{(k)} \cdot s_1^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_2^{(k)}} - q_1^{(k)} \cdot s_2^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_1^{(k)}} \right) \right] \\
 &+ 2 \cdot {}^v K_{II}^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re e \left[ \frac{1}{s_1^{(k)} - s_2^{(k)}} \cdot \left( q_2^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_2^{(k)}} - q_1^{(k)} \cdot \sqrt{\rho_1^{(k)}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \rho_j^{(k)} = \cos(\theta) + i \cdot s_j^{(k)} \cdot \sin(\theta) \quad \text{avec } j \in \{1;2\} \tag{II.2.15}$$

$$\text{et } p_j^{(k)} = S_{11}^{(k)} \cdot (s_j^{(k)})^2 + (S_{12}^{(k)})^2 \quad \text{et } q_j^{(k)} = \frac{S_{22}^{(k)}}{s_j^{(k)}} + S_{12}^{(k)} \cdot s_j^{(k)} \tag{II.2.16}$$

$s_j^{(k)}$  désignent les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$S_{11}^{(k)} \cdot (s_j^{(k)})^4 + (2 \cdot S_{12}^{(k)} + S_{33}^{(k)}) \cdot (s_j^{(k)})^2 + S_{22}^{(k)} = 0 \tag{II.2.17}$$

$S_{ij}$  sont les composantes du tenseur de complaisance de symétrie orthotrope lié aux propriétés élastiques du  $k^{\text{ième}}$  ressort « tridimensionnel ».

En combinant les expressions (II.2.12) et (II.2.13), on obtient le taux de restitution viscoélastique suivant :

$$G_v^{(k)} = {}^1 G_v^{(k)} + {}^2 G_v^{(k)} = C_1^{(k)} \cdot \frac{({}^u K_I^{(k)})}{8} + C_2^{(k)} \cdot \frac{({}^u K_{II}^{(k)})}{8} \tag{II.2.18}$$

${}^1 G_v^{(k)}$  et  ${}^2 G_v^{(k)}$  sont les taux de restitution d'énergie propre au  $k^{\text{ième}}$  ressort, définis respectivement en mode I et en mode II. Finalement, le taux de restitution d'énergie pour l'ensemble du modèle est donné par les sommations suivantes :

$${}^1 G_v = \sum_k {}^1 G_v^{(k)} \quad \text{et} \quad {}^2 G_v = \sum_k {}^2 G_v^{(k)} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, N\} \tag{II.2.19}$$

## II.2.2. Champs mécaniques en pointe de fissure

Dans le but de définir les champs mécaniques en fond de fissure, Chazal [CHA 01] et Dubois [DUB 02] ont proposé, pour des problèmes plans, deux facteurs d'intensité de contraintes viscoélastiques  ${}^u K_\alpha^{(\sigma)}$  ( $\alpha = \{1;2\}$ ) et deux facteurs d'intensité d'ouverture de fissure viscoélastiques  ${}^u K_\alpha^{(\varepsilon)}$ , correspondant à chaque mode de rupture, tels que :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot {}^u K_\alpha^{(\sigma)} \cdot f_{ij\alpha}(\theta) \quad (\text{II.2.20})$$

$$[u_\alpha] = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot {}^u K_\alpha^{(\varepsilon)} \quad (\text{II.2.21})$$

$f_{ij\alpha}(\theta)$  est une fonction qui dépend des propriétés locales du matériau, paragraphe I.3.3.1,  $[u_\alpha]$  désignent les composantes du champ de déplacement le long des lèvres de la fissure. Si on applique la notation de Boltzmann, équations (I.3.5) et (I.3.6), aux relations (II.2.20) (II.2.21), les relations entre les facteurs d'intensité de contraintes et d'ouverture de fissure prennent les formes suivantes [DUB 99]:

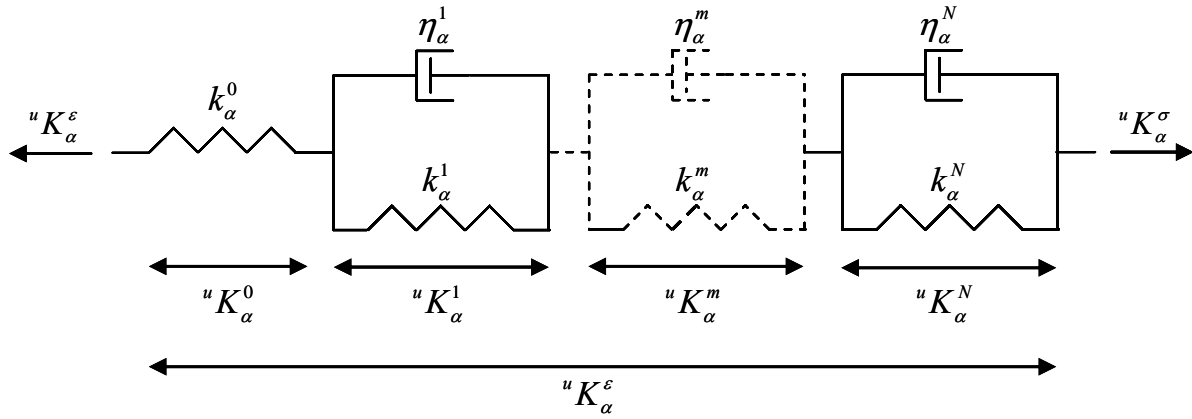
$${}^u K_\alpha^{(\varepsilon)} = \int_0^t C_\alpha(t-\tau) \cdot \frac{\partial {}^u K_\alpha^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{II.2.22})$$

$C_\alpha(t)$  sont les fonctions des complaisances viscoélastiques pour chaque mode de rupture  $\alpha$  et s'expriment ainsi :

$$C_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha^{(0)}} + \sum_{m=1}^N \frac{1}{k_\alpha^{(0)}} \cdot \left(1 - \exp^{-\lambda_\alpha^{(m)} \cdot t}\right) \text{ avec } \lambda_\alpha^{(m)} = \frac{k_\alpha^{(m)}}{\eta_\alpha^{(m)}} \quad (\text{II.2.23})$$

$k_\alpha^{(p)}$  ( $p \in \{0;1;\dots;N\}$ ) et  $\eta_\alpha^{(m)}$  ( $m \in \{1;\dots;N\}$ ) sont respectivement les contributions des tenseurs de composantes  $k_{ijkl}^{(p)}$  et  $\eta_{ijkl}^{(p)}$ , Figure II.2.2.  $\frac{1}{k_\alpha^{(0)}}$  sont les complaisances élastiques réduites définies à l'équation (II.2.8). Identiquement aux équations (II.1.22) (II.1.23), les partitions des facteurs d'intensité d'ouverture de fissure s'écrivent :

$${}^u K_\alpha^{(\varepsilon)} = {}^u K_\alpha^{(0)} + \sum_{m=1}^N {}^u K_\alpha^{(m)} \quad (\text{II.2.24})$$



**Figure II.2.2.** Modèle de Kelvin Voigt généralisé local [MOU 07<sub>b</sub>]

$$\text{avec } {}^u K_\alpha^{(0)} = \frac{1}{k_\alpha^{(0)}} \cdot {}^u K_\alpha^{(\sigma)} \text{ et } {}^u K_\alpha^{(p)} = \int_0^t \frac{1}{k_\alpha^{(p)}} \cdot \left(1 - \exp^{-\lambda_\alpha^{(p)} \cdot (t-\tau)}\right) \cdot \frac{\partial {}^u K_\alpha^{(\sigma)}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{II.2.25})$$

Si on prend en compte la définition de la densité d'énergie de déformation d'Helmholtz introduite par l'équation (I.3.5), le taux de restitution d'énergie viscoélastique, défini à partir des propriétés locales en pointe de fissure, devient [MOU 06<sub>b</sub>] [MOU 07<sub>b</sub>] :

$${}^\alpha G_v(t) = \frac{1}{8} \cdot \int_0^t \int_0^t [2 \cdot C_\alpha(t-\tau) - C_\alpha(2 \cdot t - \tau - \beta)] \cdot \frac{\partial {}^u K_\alpha^{(\sigma)}}{\partial \tau} \frac{\partial {}^u K_\alpha^{(\sigma)}}{\partial \beta} d\tau d\beta \quad (\text{II.2.26})$$

En combinant les équations (II.2.24) (II.2.25) et (II.2.26), on obtient la partition du taux de restitution  ${}^\alpha G_v$  pour chaque cellule du model de Kelvin Voigt, à savoir :

$${}^\alpha G_v = {}^\alpha G_v^{(0)} + \sum_{m=1}^N {}^\alpha G_v^{(m)} \quad (\text{II.2.27})$$

$$\text{avec } {}^\alpha G_v^{(p)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k_\alpha^{(p)}} \cdot [{}^u K_\alpha^{(p)}]^2 \text{ et } {}^\alpha G_v^{(0)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k_\alpha^{(0)}} \cdot [{}^u K_\alpha^{(0)}]^2 \quad (\text{II.2.28})$$

## II.2.3. Algorithme de résolution sur Castem

### II.2.3.1. Explication de l'algorithme

Ce paragraphe présente l'algorithme numérique implanté dans le code aux éléments finis Castem [CHA 86]. Le couplage entre le comportement viscoélastique incrémental (Procédure viscoélastique) et la méthode de séparation des modes de rupture est proposé. Dans cet algorithme, la procédure calculant les champs de déplacements et les contraintes virtuels est programmée, Figure II.2.3, [MOU 07<sub>b</sub>].

Pour expliquer cet algorithme, nous supposons que les différents champs mécaniques sont connus à l'instant  $t_{n-1}$ , tout comme l'incrément de temps  $\Delta t_n$ . Les propriétés viscoélastiques du matériau ont été préalablement définies expérimentalement [DUB 97], [DUB 01]. Les différentes étapes de l'algorithme sont définies de la manière suivante :

- Le tenseur  $\Psi$ , expression (II.1.19) est calculé, et la matrice tangente de rigidité globale  $K_T$ , équation (II.1.37), est déduite.
- Le champ de force viscoélastique supplémentaire  $\{F^p\}(t_{n-1})$  est déterminé à partir de l'expression (II.1.38).
- En introduisant l'incrément du vecteur force extérieur  $\{\Delta F_{ext}\}(t_n)$ , équation (II.1.39), dans la relation (II.1.20), les incréments des déplacements nodaux  $\{\Delta u\}(t_n)$  et les différents champs mécaniques  $\{u\}(t_n)$ ,  $\{\varepsilon\}(t_n)$  et  $\{\sigma\}(t_n)$  sont obtenus. Le tenseur de complaisance  $\Psi^p$  est introduit en s'appuyant sur les propriétés  $k_{ijkl}^p$  du matériau. Ensuite, on détermine le tenseur de déformation  $\{\varepsilon^p\}(t_n)$  et la matrice tangente viscoélastique  $K_T^p$  à partir de l'expression (II.1.40).
- Le tenseur des contraintes élastiques  $\{\sigma^{(p)}\}(t_n)$  et le vecteur de force nodal  $\{F^{(p)}\}(t_n)$  sont, par conséquent, calculés. Le déplacement  $\{u^{(p)}\}$ , pour chaque ressort du modèle, est obtenu par résolution de l'équation d'équilibre suivante :

$$K_T^p \cdot \{u^{(p)}\}(t_n) = \{F^{(p)}\}(t_n) \quad (\text{II.2.29})$$

- Afin d'évaluer les facteurs d'intensité de contrainte  ${}^u K_\alpha^{(p)}$  et les taux de restitution d'énergie  ${}^\alpha G\theta_v^{(p)}$ , on utilise conjointement, les déplacements virtuels  $v_\alpha^{(p)}$ , expression (II.2.14). Les complaisances viscoélastiques  $C_\alpha^{(p)}$ , et les tenseurs de contraintes virtuelles  ${}^\alpha \sigma_{virt}^{(p)} \cdot {}^u K_\alpha^{(p)}$  et  ${}^\alpha G\theta_v^{(p)}$  sont donnés par la procédure  $M\theta$ . Enfin, une sommation finale de  ${}^\alpha G\theta_v^{(p)}$  donne l'ensemble du taux de restitution pour chaque mode  ${}^\alpha G_v$  :

$${}^\alpha G_v = {}^\alpha G\theta_v^{(0)} + \sum_{m=1}^N {}^\alpha G\theta_v^{(m)} = \sum_{m=1}^N {}^\alpha G\theta_v^{(p)} \quad (\text{II.2.30})$$

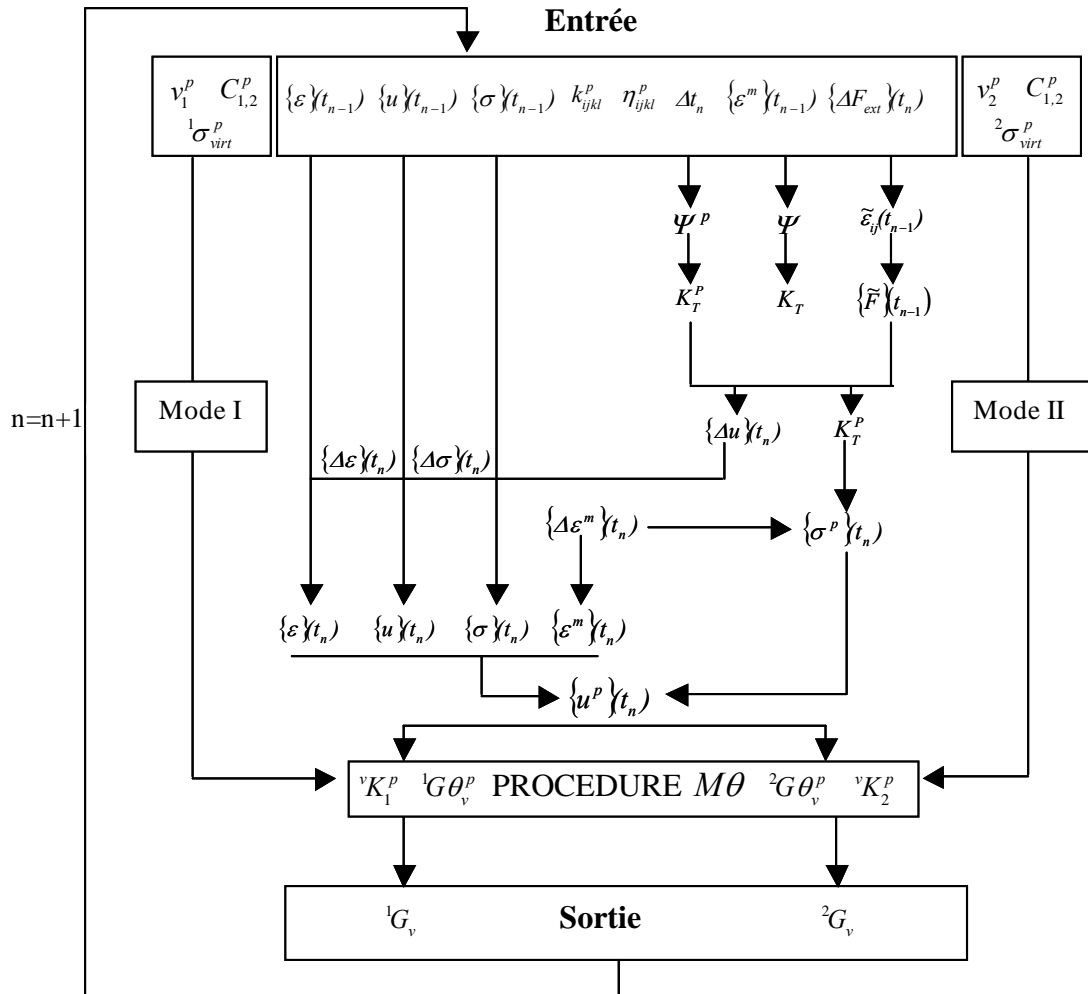


Figure II.2.3. Algorithme de fissuration viscoélastique [MOU 07<sub>b</sub>].

### II.2.3.2. Explication des procédures annexes

#### Procédure du champ $\theta$ : CH-THETA

Concernant le champ vectoriel  $\vec{\theta}$  intégré dans le modèle éléments finis, il a été utilisé la méthode de transmission thermique développée par Suo [SUO 92] et Brochard [BRO 94]. Ainsi, selon Brochard, cité par Attigui [ATT 97<sub>a</sub>], le champ  $\vec{\theta}$  est généré par une procédure CH-THETA qui peut traiter des fissures rectilignes soumises soit à une translation, soit à une rotation géométrique pour simuler la progression de la fissure. En bidimensionnel, le champ  $\theta$  correspond à des translations des nœuds du maillage parallèlement au plan de la fissure. Les opérateurs ELEM, POIN, et DEPL permettent de récupérer les éléments sur lesquels le champ  $\vec{\theta}$  sera non-nul. L'opérateur DEPL, appliqué aux couches d'éléments, ainsi que l'opérateur COOR, permettent de construire le champ  $\vec{\theta}$ . Pour les cas plans, il correspond à un accroissement d'aire de la fissure

unitaire  $\delta A = 1$ . Dans le cas où l'aire  $\delta A$  est différente de 1, la procédure effectue une normalisation du champ  $\bar{\theta}$  de telle sorte que l'accroissement d'aire de fissure soit unitaire. Finalement, la procédure CH-THETA construit (en 2D) un champ  $\bar{\theta}$  s'appuyant sur  $(n+1)$  couches d'éléments autour de la pointe de fissure.

### La procédure $M\theta$

Cette procédure permet de calculer les paramètres à la rupture ; c'est-à-dire les facteurs d'intensité de contrainte et les différents taux de restitution d'énergie donnés par les équations (II.2.13) et (II.2.18). En plus de la procédure du champ  $\bar{\theta}$  défini précédemment, elle utilise principalement deux types d'opérateurs :

- L'opérateur GRAD : nous permet de calculer aux points de Gauss de chaque élément, le gradient du vecteur déplacement, et du champ  $\bar{\theta}$ . On obtient ainsi les valeurs des termes  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$ , et  $\theta_{k,j}$ .
- L'opérateur INTG : Calcule l'intégrale de volume d'une composante d'un champ défini à chaque point d'intégration, et ce, sur un domaine discrétisé prédéfini.

Pour séparer l'ensemble des modes de rupture, la procédure  $M\theta$  est couplée avec une procédure de calcul des champs de déplacements et de contraintes virtuelles (Procédure VIRT) [MOU 07<sub>b</sub>].

## **II.2.4. Validation numérique de l'intégrale $M$ pour une fissure stationnaire**

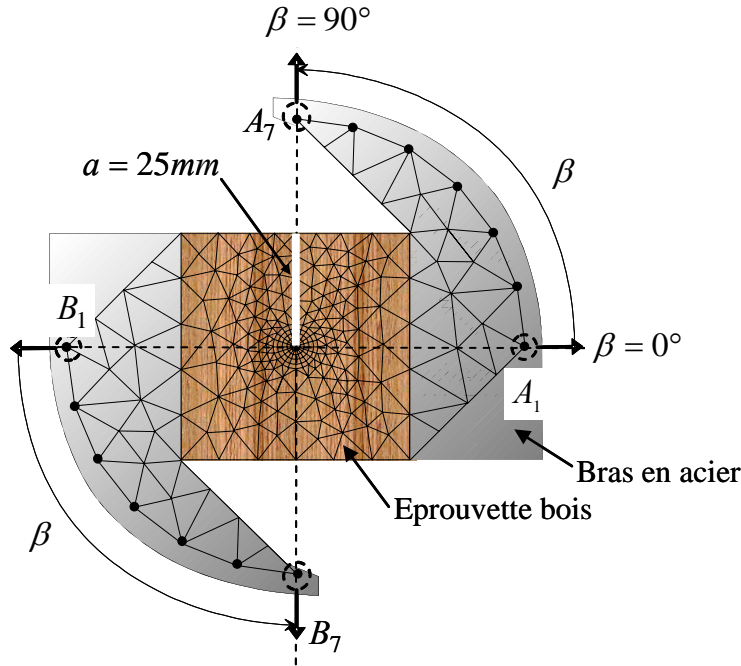
Le but de ce paragraphe est de comparer la solution donnée par la formulation éléments finis, équation (II.2.30), et la solution analytique du taux de restitution d'énergie établie par la relation (II.2.28). Pour cela, il est présenté l'éprouvette CTS (Compact Tension Shear) généralement utilisée pour simuler les modes mixtes de rupture.

### *II.2.4.1. Epreuve CTS (Compact Tension Shear)*

L'éprouvette CTS proposée a été utilisée par Zhang [ZHA 06] et Ma [Ma 06] pour évaluer expérimentalement les modes mixtes de rupture respectivement dans les matériaux métalliques et ductiles. Elle a été initialement développée par Richard [RIC 81] [RIC 83] dans le but de découpler les modes de rupture dans les matériaux isotropes. Valentin [VAL 88] [VAL 92] l'a adaptée au matériau bois. Sur la Figure II.2.4, on observe les points  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  avec  $\alpha \in \{1, \dots, 7\}$  correspondant à des points d'application des forces symétriquement opposées, et dirigées par les angles  $\beta \in \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$  orientées dans le sens trigonométrique selon l'axe de la



fissure. Par exemple, le mode I est obtenu par application des forces opposées aux points  $A_1$  et  $B_1$  avec un angle  $\beta = 0^\circ$ . Un chargement identique, selon un angle  $\beta = 90^\circ$ , aux points  $A_7$  et  $B_7$  correspond à un mode II. Tous les autres angles génèrent un taux de mixité variable. Dans la réalité, l'échantillon en bois est connecté à deux éléments métalliques dit « Arcan » sur lesquels sont percés les points d'application des différents chargements.



**Figure II.2.4.** Eprouvette CTS (Compact Tension Shear) [MOU 06<sub>b</sub>], [MOU 07<sub>b</sub>]

#### II.2.4.2. Modèle rhéologique

Dans le but de simplifier le développement analytique dans le domaine temporel, le tenseur de fluage est pris sous la forme suivante:

$$[J](t) = \frac{1}{E_L(t)} \cdot [C_0] \quad (\text{II.2.31})$$

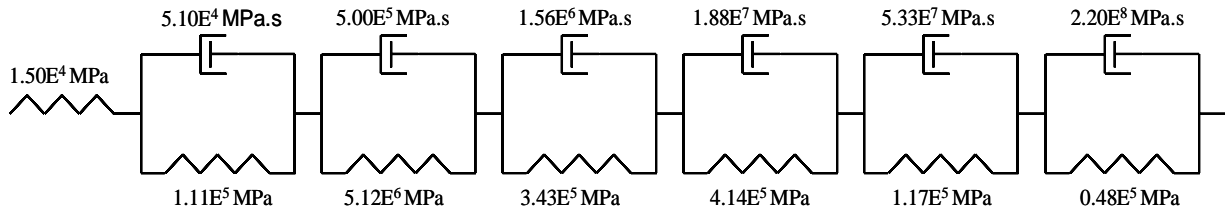
$[C_0]$  est un tenseur de complaisance orthotrope dont le module tangent  $E_L(t)$  dans la direction longitudinale est factorisé. Dans un repère plan,  $L, R$  par exemple,  $[C_0]$  prend la forme :

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & \frac{E_L(t)}{E_R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_L(t)}{G_{LR}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.32})$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson de valeur  $0,4$ . Dans ces conditions, on privilégie le fluage dans le sens longitudinal. Seul le module longitudinal est affecté par les effets de fluage, le tenseur  $[C_0]$  restant constant.  $1/E_L(t)$  prend la forme suivante :

$$\frac{1}{E_L(t)} = \frac{1}{E_L(0)} \cdot \left[ \begin{aligned} &1 + \frac{1}{74,3} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{74,3}{3,37}t\right) \right) + \frac{1}{74,4} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{74,4}{33,37}t\right) \right) \\ &+ \frac{1}{22,9} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{22,9}{104,09}t\right) \right) + \frac{1}{27,6} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{27,6}{1251}t\right) \right) \\ &+ \frac{1}{7,83} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{7,83}{3554}t\right) \right) + \frac{1}{3,23} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{3,23}{14660}t\right) \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.2.33})$$

Dans ce contexte, les propriétés de fluage sont obtenues via une fonction de fluage obtenue par interpolation  $1/E(t)$  avec six éléments de kelvin Voigt pour assurer la fiabilité des résultats en termes de réponse différée, Figure II.2.5.



**Figure II.2.5.** Décomposition spectrale du tenseur de fluage [MOU 07<sub>b</sub>]

$E_R$  et  $G_{LR}$  représentent respectivement les modules radial et de cisaillement. Nous leur donnons des ordres de grandeur empruntés à la littérature [GUI 87] (propriétés du Pin Sylvestre) :

$$E_R = 600 \text{ MPa} ; G_{LR} = 700 \text{ MPa}$$

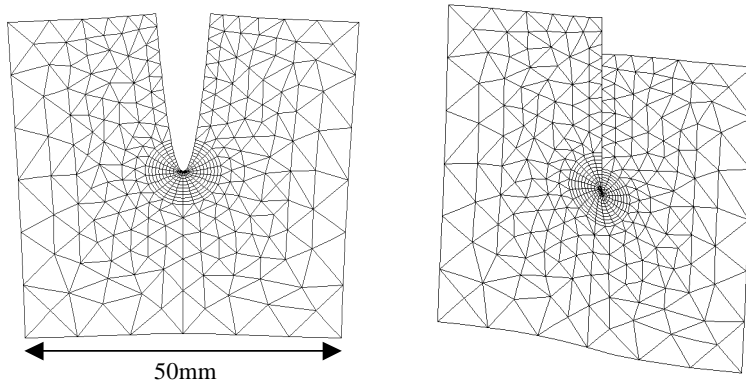
$E_L(0)$  représente le module instantané longitudinal. Sa valeur est fixée à  $15 \text{ GPa}$ .

### II.2.4.3. Résultats numériques

#### Champs de déplacement et maillage rayonnant

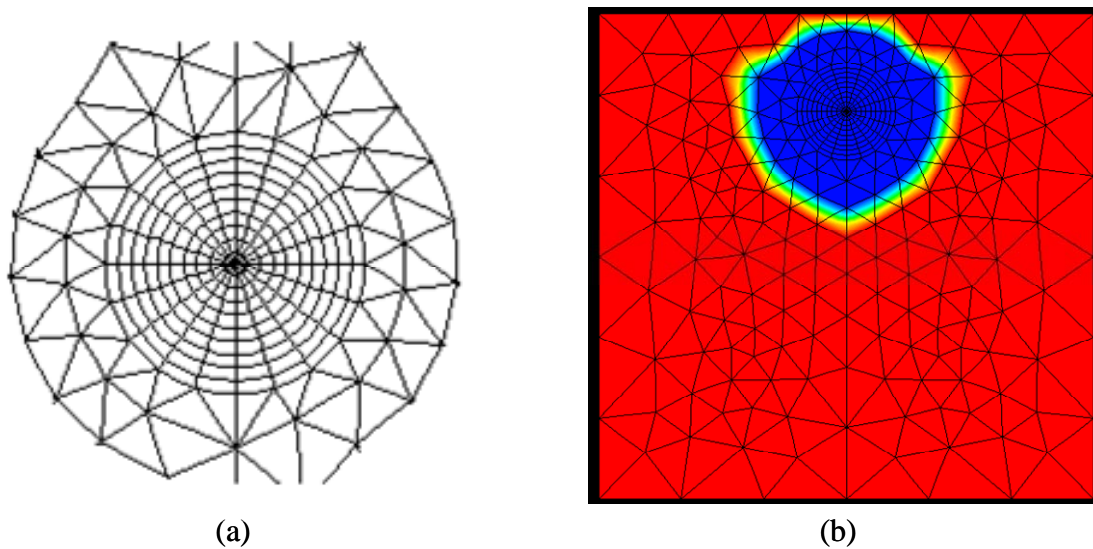
Les éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds ont été utilisés. Dans le cas où l'épaisseur des éprouvettes est très faible par rapport aux deux autres dimensions, nous employons une modélisation en plan sous l'hypothèse des contraintes planes. Comme conditions limites, le déplacement en pointe de la fissure est bloqué, il en est de même pour la partie inférieure de l'éprouvette bois. Sur la ligne de fissuration, les déplacements selon l'axe des  $x$  sont empêchés.

La longueur de fissure initiale, visible sur le maillage est de  $25\text{ mm}$ . Autour de la pointe de fissure, on observe un maillage rayonnant témoin d'une partie de la stabilité des résultats. La Figure II.2.6 illustre la visualisation du maillage déformé des champs de déplacements virtuels respectivement en mode I (ouverture de fissure) et en mode II (cisaillement).



**Figure II.2.6.** Visualisation des déplacements virtuels en modes I et II

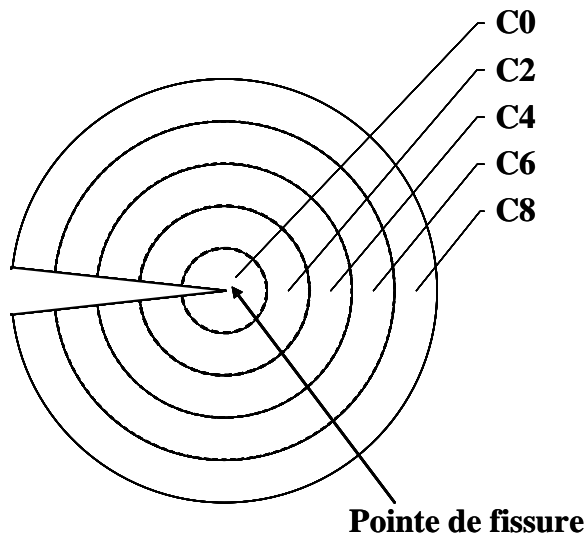
La Figure II.2.7 présente le détail du maillage rayonnant en pointe de fissure (a) sur lequel est visualisé la composante  $\theta_L$  du champ  $\bar{\theta}$  (b). La taille du domaine d'intégration est directement dictée par la forme mathématique de cette composante (ici représentée par un rayon engendré par 10 éléments).



**Figure II.2.7.** Maillage rayonnant (a) et champ  $\theta$  (b) autour de la pointe de fissure

### Indépendance du domaine d'intégration

L'indépendance du domaine d'intégration est vérifiée en représentant les différentes variations du taux de restitution d'énergie en fonction de chaque couronne illustrant la taille du champ  $\vec{\theta}$ . Cinq couronnes notées et numérotées  $C0$  à  $C8$ , Figure II.2.8, ont été utilisées :



**Figure II.2.8.** Couronnes d'intégration autour de la pointe de fissure

Les Figures II.2.9 et II.2.10 montrent les différentes évolutions des taux de restitution d'énergie  ${}^1G_v$  (mode I) et  ${}^2G_v$  (mode II) en fonction de l'orientation  $\beta$  du chargement et des différentes couronnes d'intégration, et ce, pour une charge d'amplitude unitaire. Les résultats ont été obtenus après un temps de fluage de 720 Secondes. On y remarque une constance du taux de restitution d'énergie (moins de 10% de fluctuation) en fonction des couronnes en mode I, mode II et en modes mixtes (respectivement part du mode I et part du mode II). Ces observations valident l'indépendance du domaine d'intégration et la stabilité des résultats assurés par le modèle. Toutefois, la singularité des champs mécaniques en pointe de fissure cause une perturbation du domaine d'intégration autour du front de fissure (couronne  $C_0$ ), et ce, pour les deux modes de rupture.

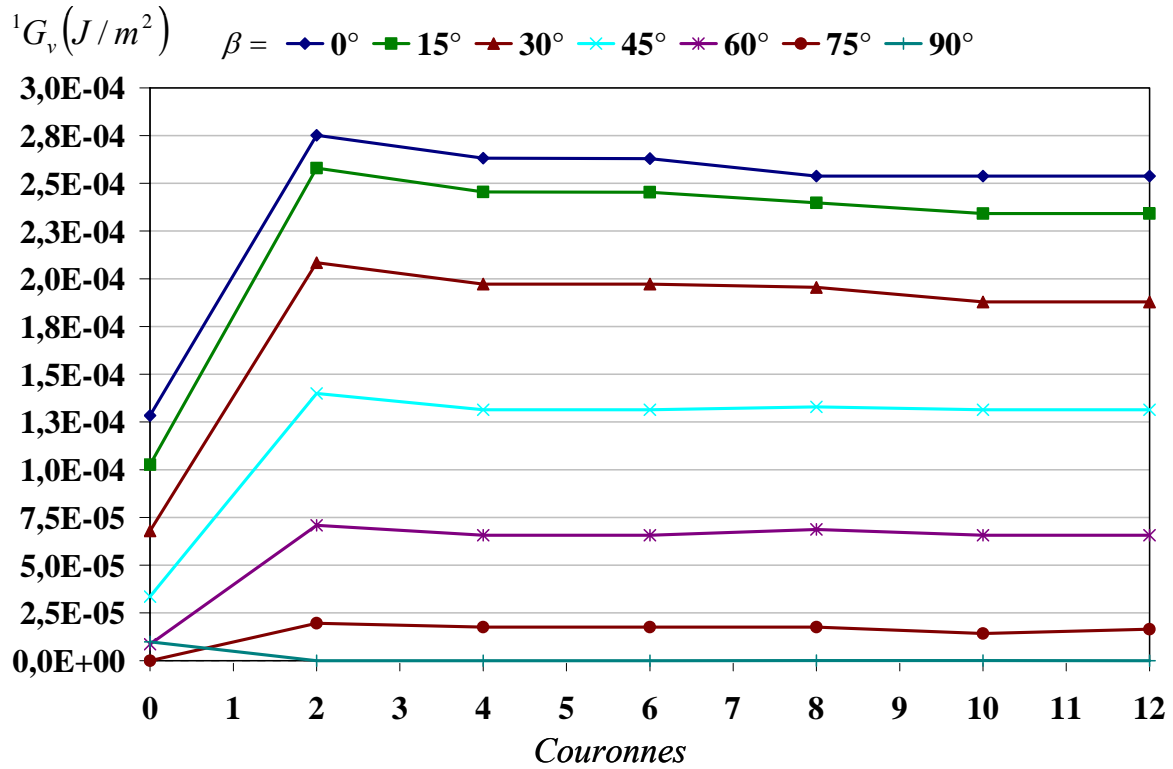


Figure II.2.9. Indépendance du domaine d'intégration  $^1G_v$  en fonction de l'angle  $\beta$

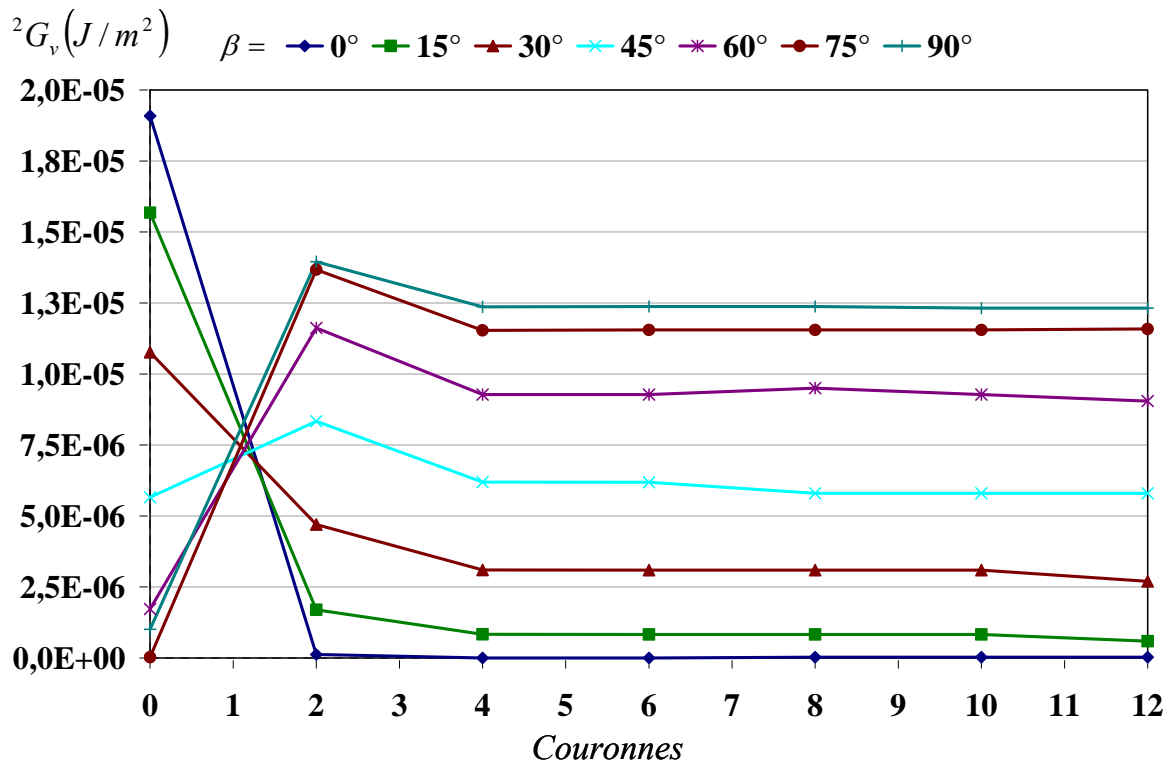


Figure II.2.10. Indépendance du domaine d'intégration  $^2G_v$  en fonction de l'angle  $\beta$

### Validation à partir de la solution analytique

Dans le but de valider la procédure viscoélastique, les résultats donnés par la solution numérique sont comparés aux résultats analytiques issus de la densité d'énergie libre isotherme d'Helmholtz, équations (II.2.26) et (II.2.28). A partir de la relation (II.2.23), le tenseur de fluage viscoélastique en mode I et en mode II revêt, respectivement, la forme suivante :

$$C_1(t) = C_1^{(0)} \cdot f(t) = 7,35 \cdot 10^{-3} \cdot f(t) \quad (\text{II.2.34})$$

$$C_2(t) = C_2^{(0)} \cdot f(t) = 1,47 \cdot 10^{-3} \cdot f(t) \quad (\text{II.2.35})$$

$C_1^{(0)}$  et  $C_2^{(0)}$  représentent les complaisances élastiques réduites du ressort instantané, équation (II.2.8). La fonction  $f(t)$  s'écrit :

$$f(t) = \left[ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{74,3} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-74,3}{3,37}t\right) \right) + \frac{1}{74,4} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-74,4}{33,37}t\right) \right) \\ + \frac{1}{22,9} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-22,9}{104,09}t\right) \right) + \frac{1}{27,6} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-27,6}{1251}t\right) \right) \\ + \frac{1}{7,83} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-7,83}{3554}t\right) \right) + \frac{1}{3,23} \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{-3,23}{14660}t\right) \right) \end{array} \right] \quad (\text{II.2.36})$$

Dans une configuration plane, le taux de restitution d'énergie dans chaque mode, est traduit analytiquement à partir de l'expression (II.2.28) :

$$G_1(t) = \frac{1}{8} \cdot [2 \cdot C_1(t) - C_1(2t)] \cdot ({}^u K_1^{(0)})^2 \quad (\text{II.2.37})$$

$$G_2(t) = \frac{1}{8} \cdot [2 \cdot C_2(t) - C_2(2t)] \cdot ({}^u K_2^{(0)})^2 \quad (\text{II.2.38})$$

${}^u K_1^{(0)}$  et  ${}^u K_2^{(0)}$  sont respectivement, les facteurs d'intensité de contrainte instantanés en mode I et en mode II, issus d'un calcul initial éléments finis.

Les Figures II.2.11 et II.2.12 présentent la comparaison des résultats numériques, en terme de taux de restitution d'énergie respectivement en mode I et II, donnés par la procédure  $M\theta$  et les données analytiques exprimées par les équations (II.2.37) et (II.2.38). Les Figures II.2.13 et II.2.14 traduisent les mêmes informations en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ) de la part du mode I et du mode II. La progression du taux de restitution d'énergie est donnée en fonction du temps. Les résultats sont calculés en utilisant la couronne C6 comme domaine d'intégration. On observe une parfaite concordance entre les résultats numériques et analytiques. On note au passage que dans le cas des modes I, II et mixte, l'erreur relevée est nettement inférieure à **1%**.

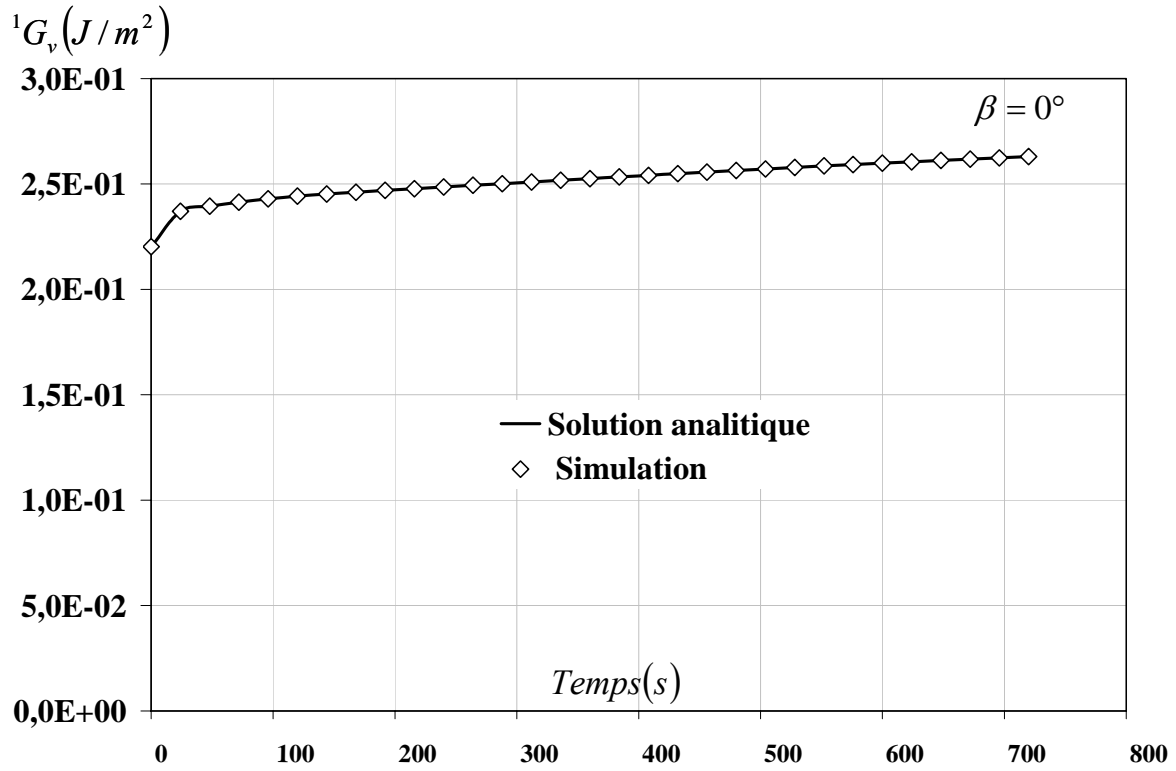


Figure II.2.11. Solution analytique et numérique en mode I pure  ${}^1G_v$

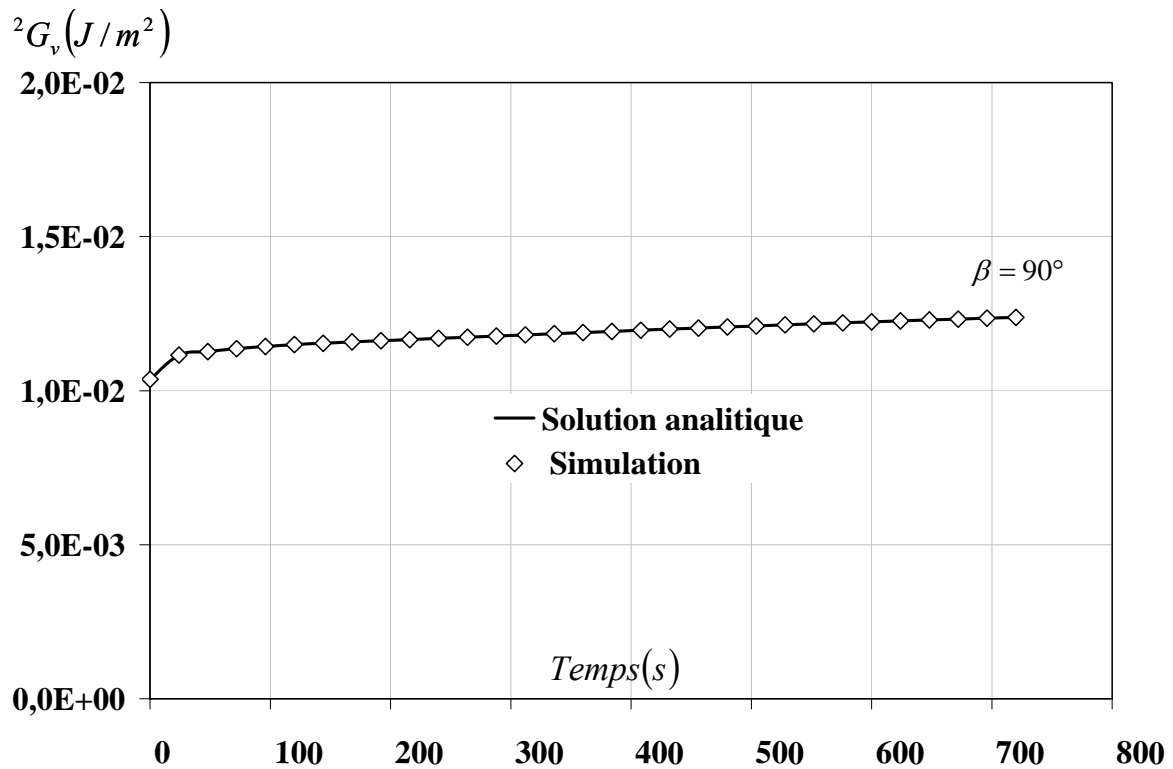


Figure II.2.12. Solution analytique et numérique en mode II pure  ${}^2G_v$

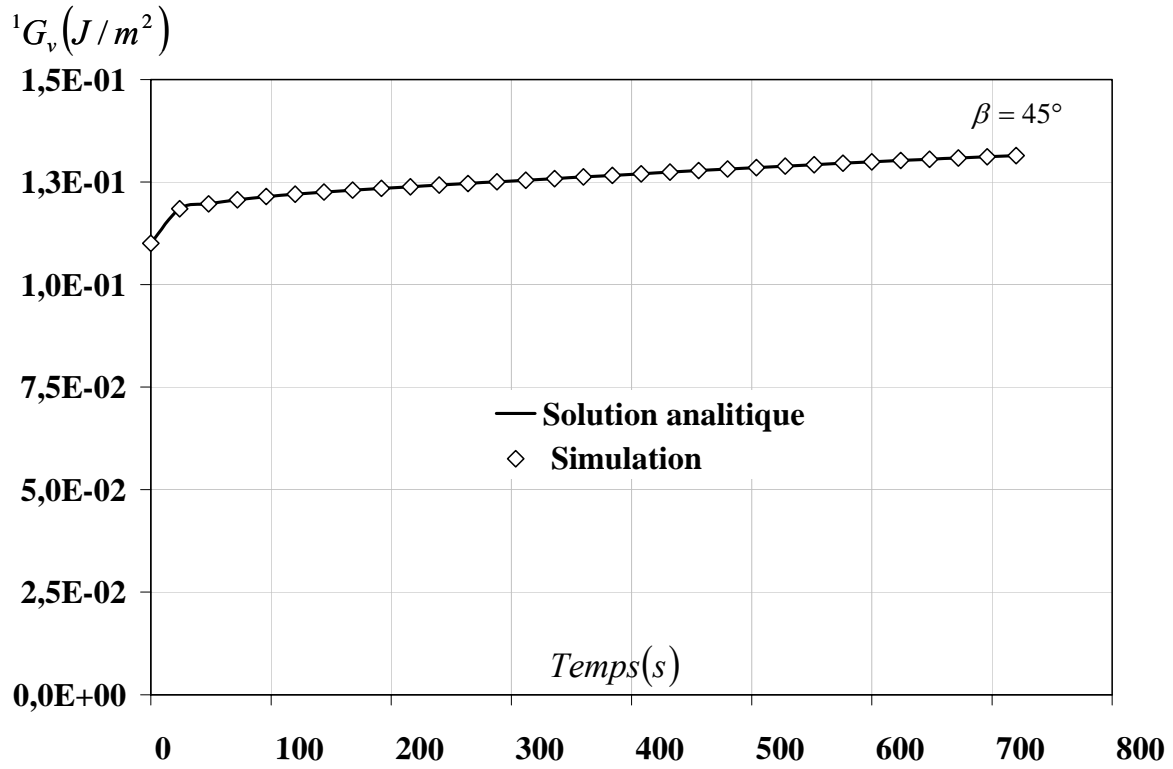


Figure II.2.13. Solution analytique et numérique en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ) par de  ${}^1G_v$

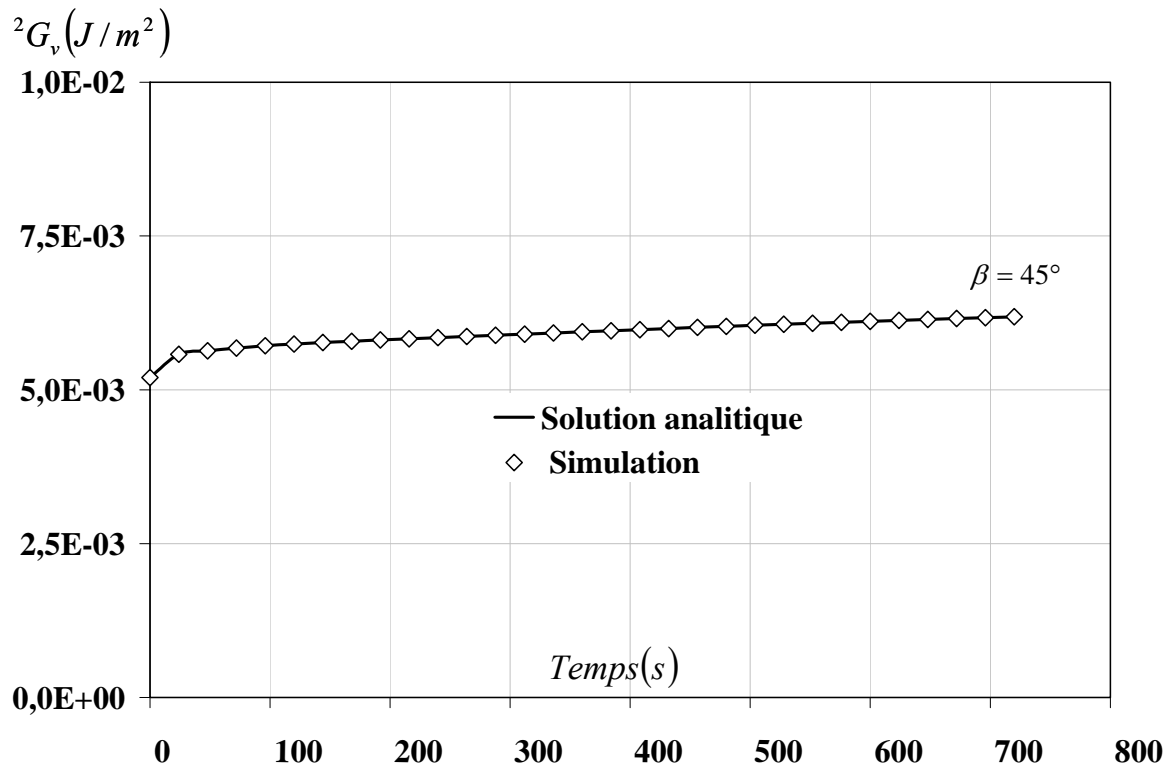


Figure II.2.14. Solution analytique et numérique en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ) par de  ${}^2G_v$



## II.2.5. Conclusion

Le but de cette partie était de valider l'intégrale  $M\theta$  pour le comportement viscoélastique orthotrope en fissuration fixe. La solution numérique, issue d'une formulation du comportement viscoélastique incrémentale, résolue par le code aux éléments finis Castem, a été comparée avec une solution analytique, donnée par une formulation issue de la densité d'énergie libre d'Helmholtz. Les résultats obtenus sont satisfaisants pour l'ensemble des modes de sollicitation. La procédure viscoélastique étant validée, nous allons dans le paragraphe qui suit, proposer une extension de l'intégrale  $M\theta$  à la propagation de fissure. Ensuite, elle sera généralisée au comportement viscoélastique, et suivie par une validation numérique.

## II.3. Généralisation de $Mv$ pour une propagation de fissure

Dans cette partie, il est procédé à une généralisation de l'intégrale  $M$  précédente à la propagation de fissure afin d'obtenir un découplage des modes durant le processus de propagation. Dans le cas de la propagation de fissure, certains auteurs [KIM 02] [YAN 06] ont présenté des travaux de découplage pour des milieux isotropes. D'autres [ATT 97] [QIA 07], se sont intéressés au découplage des modes de rupture pour des sollicitations dynamiques. Toutefois, les bases du développement de cette intégrale s'appuient, comme précédemment, sur les théorèmes de conservations énergétiques [NOE 18] [BUI 84] [BUI 07] et les intégrales invariantes [MOR 87] [RIC 68] [BUI 85<sub>b</sub>] [BUI 85<sub>a</sub>], associant une combinaison des champs de déplacements réels et virtuels [CHE 77] [DES 83]. Il sera ensuite proposé une généralisation au comportement viscoélastique [MOU 07<sub>a</sub>] [MOU 08<sub>b</sub>]. Afin de tenir compte, dans cet outil, de futures interactions dues aux conditions environnementales, les champs thermiques ou hydriques vont être intégrés dans le processus d'évolution du front de fissure [MOU 08<sub>a</sub>].

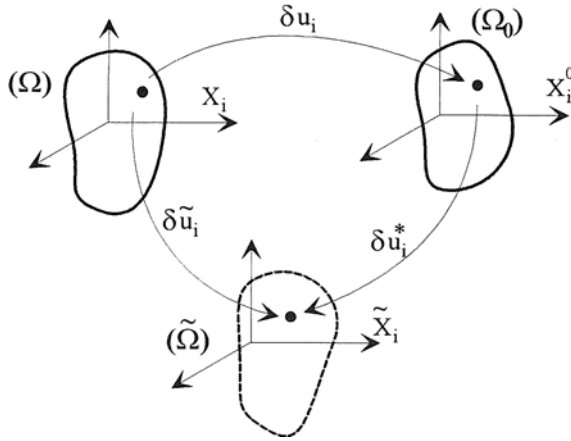
### II.3.1. Développement analytique de l'intégrale $M$

#### II.3.1.1. Les différents référentiels

Considérons une transformation continue infinitésimale des coordonnées  $x_i \rightarrow \tilde{x}_i$  et des déplacements  $u_i \rightarrow \tilde{u}_i$ . On définit une variation des déplacements  $\delta\tilde{u}$  selon une configuration arbitraire telle que [DON 82] [DON 83] [ATT<sub>b</sub> 97]:

$$\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i \quad \text{et} \quad \tilde{u}_i(\tilde{u}_j) + \delta u_i(u_j) \quad (\text{II.3.1})$$

Munie de cette notation, nous pouvons définir trois types de représentations, Figure II.3.1.



**Figure II.3.1.** Configuration Lagrangienne-Eulérienne-Arbitraire.

### Configuration Lagrangienne

Les variables de Lagrange sont la position initiale  $x_i^{(0)}$  de la particule et le temps  $t$ . La vision Lagrangienne est d'identifier une particule et d'en suivre son mouvement. C'est le point de vue essentiel en mécanique des solides. Un système de référentiel de Lagrange est lié au milieu continu et se déforme continuellement avec lui. Le repère est construit à partir de la position de référence à la date  $t = t_0$ . Cette description est schématisée par un domaine  $(\Omega_0)$  solidaire du mouvement et de variation :

$$\delta \tilde{u}_i = \delta u_i \quad \text{et} \quad \delta \tilde{v}_i = \delta v_i \quad (\text{II.3.2})$$

### Configuration Eulérienne

Les variables d'Euler désignent la position actuelle  $x_i^t$  et le temps  $t$ . La vision Eulérienne est de se placer en un point et d'observer les particules passant par ce point. C'est le point de vue essentiel en mécanique des fluides. Un système de référentiel d'Euler est fixé en un point et ne subit aucune déformation, dans ce cas, un repère peut être construit à une date quelconque. On note ainsi, en un point quelconque de l'espace, les vitesses et les accélérations correspondantes en ce point et à une date donnée. La description Eulérienne est schématisée par un repère et un domaine  $(\Omega)$  qui reste fixe telle que :

$$\delta \tilde{u}_i = 0 \quad \text{et} \quad \delta \tilde{v}_i = 0 \quad (\text{II.3.3})$$

### Configuration Lagrangienne –Eulérienne –Arbitraire (ALE)

Dans cette description, le repère et le domaine  $(\tilde{\Omega})$  subissent une variation virtuelle arbitraire  $\delta \tilde{u}_i$ . La Configuration (ALE) a été développée à l'origine pour les problèmes d'interaction fluide-

structure dans le but de combler les insuffisances des descriptions citées précédemment. En effets, les descriptions Lagrangiennes et Eulériennes ne permettent pas de décrire convenablement les problèmes qui font intervenir des localisations de déformations ou de contraintes. On introduit la relation suivante :

$$\tilde{\delta}u_i = \delta u_i + \delta u_i^* \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}v_i = \delta v_i + \delta v_i^* \quad (\text{II.3.4})$$

$\delta u_i$  représente le déplacement matériel virtuel et  $\tilde{\delta}u_i$  le déplacement arbitraire du référentiel.

### II.3.1.2. Généralisation du théorème de Noether

Pour un volume homogène  $V$ , on définit le Lagrangien  $L$  en fonction de l'énergie libre de déformation  $F$  disponible dans le système tel que :

$$L = \int_V \int_t F dV dt \quad (\text{II.3.5})$$

Le théorème de Noether [NOE 18] postule que la variation du Lagrangien  $L$  est nulle dans une simple translation des coordonnées et des déplacements liés aux mêmes paramètres de base. La condition nécessaire et suffisante de la validité de cet énoncé est de maintenir la quantité  $F \cdot dV$  constante tout au long de la transformation. Ceci se traduit par une variation nulle de  $L$ .

Ainsi, pour une variation de déplacement virtuel  $\delta u$  cinématiquement admissible, c'est-à-dire respectant les conditions limites et la continuité de la transformation, pour tout temps  $t$  choisi arbitrairement, la variation du Lagrangien est nulle :

$$\delta L = \int_V \int_t \delta F dV dt = 0 \quad (\text{II.3.6})$$

Afin de proposer une formulation analytique propre à découpler les modes de rupture, les méthodes énergétiques sont employées. Pour cela, la forme bilinéaire développée initialement par Chen et Shield [CHE 77] est introduite dans la variation Lagrangienne (II.3.6) :

$$\delta L = \int_V \int_t \delta F^* dV dt = 0 \quad \text{avec} \quad F^* = F(u, v) \quad (\text{II.3.7})$$

$F^* = F(u, v)$ , équation (I.3.65), représente la forme bilinéaire de l'énergie libre de déformation élastique.  $u$  et  $v$  sont, respectivement, les champs des déplacements réels et virtuels ou arbitraires cinématiquement admissibles [MOU 06<sub>a</sub>].

Pour simplifier les notations indicielles, considérons une fonction  $\alpha(x_1, x_2, t)$ , spatiale et temporelle [MOU 06<sub>b</sub>], définie dans une configuration plane. Munie de cette notation, et en considérant une notation virtuelle, l'équation (II.3.7), devient :

$$\delta L = \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta \tilde{u}_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta \tilde{v}_{i,\alpha} \right] dV dt \quad (\text{II.3.8})$$

L'introduction des formes Lagrangiennes et Eulériennes Arbitraires (II.3.2), (II.3.3) et (II.3.4) dans la forme (II.3.8) conduit à la relation suivante [MOU 08<sub>b</sub>]:

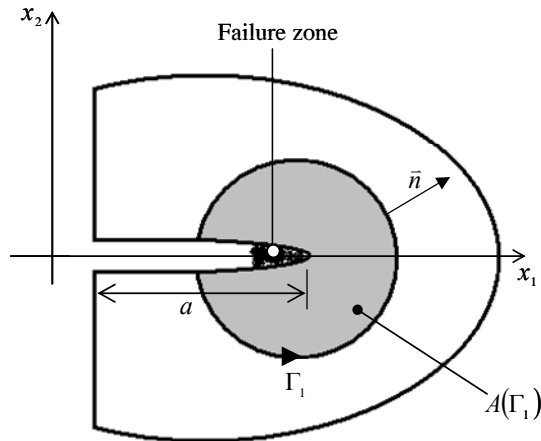
$$\delta L = \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta \tilde{v}_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* \right] dV dt \quad (\text{II.3.9})$$

Aidé par la condition de forte orthotropie du matériau considéré, supposons une fissure de longueur  $\delta a$  se propageant dans la direction  $x_1$ , Figure II.2.1 (a). On peut écrire :

$$\delta u_{i,\alpha} = \frac{\partial u_{i,\alpha}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad \text{et} \quad \delta v_{i,\alpha} = \frac{\partial v_{i,\alpha}}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (\text{II.3.10})$$

La combinaison des relations (II.3.9) et (II.3.10) donne :

$$\delta L = \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} \cdot \delta a + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* \right] dV dt \quad (\text{II.3.11})$$



**Figure II.3.2.** Contour d'intégration autour de la pointe de fissure

Les deux derniers termes de la relation précédente peuvent être dérivés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* &= \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* \right)_{,\alpha} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* \\ \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* &= \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* \right)_{,\alpha} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* \end{aligned} \quad (\text{II.3.12})$$

L'introduction de l'équation (II.3.12) dans la relation (II.3.11) conduit à :

$$\delta L = \int_V \int_t \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} \cdot \delta a + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,\alpha} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta u_i^* \\ & + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,\alpha} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta v_i^* \end{aligned} \right] dV dt \quad (\text{II.3.13})$$

Les descriptions (II.3.3) et (II.3.4) permettent d'introduire les notations suivantes :

$$\delta u_i^* = -\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad \text{et} \quad \delta v_i^* = -\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \cdot \delta a \quad (\text{II.3.14})$$

Si on prend soin de séparer partiellement les variables temporelles et spatiales, la prise en compte des notations (II.3.14) dans la forme Lagrangienne (II.3.13) entraîne :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} \right)_{,j} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right)_{,j} \right] \delta a dV dt \\ & - \int_V \int_t \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,t}} \cdot u_{i,1} \right)_{,t} + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,t}} \cdot v_{i,1} \right)_{,t} \right] \delta a dV dt \\ & + \int_V \int_t \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot u_{i,1} + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot v_{i,1} \right] \delta a dV dt \end{aligned} \quad (\text{II.3.15})$$

Par analogie à l'expression (II.3.12), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot u_{i,1} &= \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(u) \\ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot v_{i,1} &= \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot v_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(v) \end{aligned} \quad (\text{II.3.16})$$

En introduisant l'expression précédente dans la relation (II.3.15), on obtient, quelque soit le temps  $t$  :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} \right)_{,j} - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right)_{,j} \right] \delta a dV dt \\ & + \int_V \int_t \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(u) + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot v_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(v) \right] \delta a dV dt \end{aligned} \quad (\text{II.3.17})$$

Par application du théorème de Gauss-Ostrogradski au premier terme de l'équation (II.3.17) et en considérant la stationnarité du Lagrangien pour toute variation  $\delta a$  de fissure, on obtient le théorème de Noether généralisé au découplage des modes de rupture en propagation de fissure, et ce, indépendamment du temps  $t$  arbitrairement choisi :

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \int_{\partial V} \left[ F^\bullet \cdot n_1 - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right) \cdot n_j \right] d\Gamma_1 \\
 & + \int_V \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,1} \right)_{,\alpha} + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,1} \right)_{,\alpha} - (F_{,1}^\bullet(u) - F_{,1}^\bullet(v)) \right] dV dt
 \end{aligned} \tag{II.3.18}$$

pour lequel  $\partial V$  est un contour fermé englobant le volume  $V$ .

### II.3.1.3. Intégrale $M$ en propagation

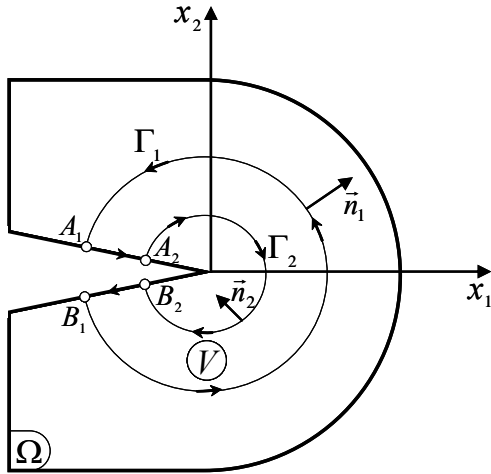
Pour des raisons de simplifications, Moutou et *al.* [MOU 07<sub>a</sub>] ont introduit les invariants intégraux suivants :

$$\begin{aligned}
 I_1^\bullet = I_1(u, v) &= \left[ F^\bullet \cdot n_1 - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right) \right] \text{ et} \\
 I_2^\bullet = I_2(u, v) &= \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,1} \right)_{,\alpha} + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,1} \right)_{,\alpha} - (F_{,1}^\bullet(u) - F_{,1}^\bullet(v)) \right]
 \end{aligned} \tag{II.3.19}$$

En définissant les contours linéiques et surfaciques, on écrit successivement, Figure II.3.3 et Figure II.3.2 :

$$\partial V = \Gamma_1 + B_1 B_2 + \Gamma_2 + A_1 A_2 \quad \text{et} \quad V = A(\Gamma_1) - A(\Gamma_2) \tag{II.3.20}$$

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les contours ouverts délimitant le domaine  $V$ .  $A(\Gamma_1)$  et  $A(\Gamma_2)$  représentent respectivement, les aires définies à l'intérieur de ces contours.



**Figure II.3.3.** Contour d'intégration

En considérant les notations (II.3.19) et (II.3.20) dans l'égalité (II.3.18), nous obtenons l'expression suivante [MOU 07<sub>a</sub>]:

$$\int_{\Gamma_1} I_1^* d\Gamma + \int_{A(\Gamma_1)} I_2^* dV + \int_{A_2 A_1} I_1^* d\Gamma + \int_{B_2 B_1} I_1^* d\Gamma = - \int_{\Gamma_2} I_1^* d\Gamma + \int_{A(\Gamma_2)} I_2^* dV \quad (\text{II.3.21})$$

En prenant en compte les différentes orientations des domaines imposées par leur normale sortante respective, nous pouvons également écrire, Figure II.3.3 :

$$M = \int_{\Gamma_1} I_1^* d\Gamma + \int_{A(\Gamma_1)} I_2^* dV + \int_{A_2 A_1} I_1^* d\Gamma + \int_{B_2 B_1} I_1^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} I_1^* d\Gamma + \int_{A(\Gamma_2)} I_2^* dV \quad (\text{II.3.22})$$

Finalement, l'égalité (II.3.22) montre l'indépendance de l'intégrale  $M$  vis-à-vis du domaine d'intégration choisi, dès lors qu'on opère la correction induite par la pression sur les lèvres de la fissure. En faisant tendre  $A(\Gamma_2)$  vers 0, cela correspond à prendre  $L$  comme longueur cumulée pour les segments  $A_2 A_1$  et  $B_2 B_1$  ;  $A_2$  et  $B_2$  étant confondus avec la pointe de fissure, Figure II.3.3.

Or, en élasticité linéaire, l'expression analytique de la forme bilinéaire de l'énergie libre de déformation élastique  $F^*$  est la suivante :

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F^*}{\partial v_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(u)} \quad (\text{II.3.23})$$

$\sigma_{ij}^{(v)}$  et  $\sigma_{ij}^{(u)}$  représentent respectivement les contraintes virtuelles et réelles. Ainsi, en introduisant les formes invariantes (II.3.19), et la forme bilinéaire (II.3.23) dans l'expression (II.3.22), on obtient :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} \cdot n_1 - (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}) \cdot n_j] d\Gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} [(\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,1}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,1})] dV \\ &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{II.3.24})$$

$L$  est la surface des lèvres de la fissure pour une épaisseur unitaire du matériau. Or, le premier terme de la première intégrale de l'expression (II.3.24) donne, d'après le théorème de Gauss-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} \cdot n_1] d\Gamma_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_V [\sigma_{ij,1}^{(v)} \cdot u_{i,j} \cdot n_1 - \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j,1}] dV \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij,1}^{(v)} \cdot u_i) \cdot n_j d\Gamma_1 - \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma_{ij,j}^{(v)} \cdot u_i) dV \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,1}) \cdot n_j d\Gamma_1 - \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma_{ij,j}^{(v)} \cdot u_{i,1}) dV \end{aligned} \quad (\text{II.3.25})$$

En l'absence des forces de volume, pour des variations du domaine quasi-statiques, les équations d'équilibres bilinéaires s'écrivent de la façon suivante :

$$\sigma_{ij,j}^{(u)} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{ij,j}^{(v)} = 0 \quad (\text{II.3.26})$$

La prise en compte des équations d'équilibres (II.3.26) et de l'expression (II.3.25), dans la relation (II.3.24), donne la forme générale de l'intégrale  $M$  qui suit :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} [\sigma_{ij,1}^{(v)} \cdot u_i - \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,1}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,1}) \right] dV \\ &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{II.3.27})$$

Le premier terme de l'expression (II.3.27) a été défini par Chen et Shield [CHE 77] pour une fissure fixe. Le second terme permet de garder l'indépendance du domaine d'intégration lors d'une propagation de fissure [MOU 07<sub>a</sub>]. Enfin, le dernier terme prend en compte une éventuelle pression sur les lèvres de la fissure [MOU 06<sub>a</sub>], [MOU 06<sub>b</sub>] [MOU 08<sub>b</sub>].

#### II.3.1.4. Intégrale $M\theta$

L'intégrale (II.3.27) est définie sur un contour curviligne. L'intégrale  $M\theta$  est son équivalent mais s'appuyant sur un domaine d'intégration surfacique. Son développement s'inspire de celui de l'intégrale  $G\theta$  initialement développée par Destuynder [DES 83]. Il est basé sur le changement de variable suivant :

$$\dot{p}_{j,k} \theta_k = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{ij,k}^{(v)} \cdot u_i - \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k}) \cdot \theta_k \quad (\text{II.3.28})$$

En réalisant le passage entre un contour ouvert  $\Gamma_1$  et une couronne fermée  $\partial V$ , formée par les deux contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , et munie de l'expression (II.3.28), la relation (II.3.27) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} M &= - \int_{\Gamma_1} [\dot{p}_{j,k} \cdot \theta_k] \cdot n_j d\Gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,1}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,1}) \right] dV \\ &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{II.3.29})$$

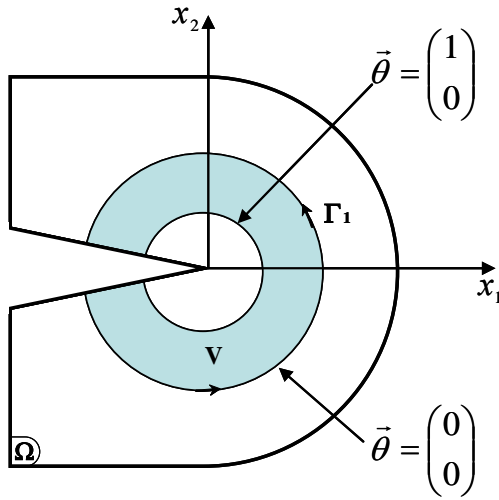
Par application du théorème de Gauss Ostrogradski au premier terme de l'équation (II.3.29), nous obtenons :



$$\begin{aligned}
 M &= - \int_{\partial V} [\dot{p}_{j,kj} \cdot \theta_k + \dot{p}_{j,k} \cdot n_j \cdot \theta_{k,j}] dV \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} [(\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k})] \cdot \theta_k dV \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k}] \cdot n_j \cdot \theta_k d\Gamma_1
 \end{aligned} \tag{II.3.30}$$

Si  $V$  représente le domaine délimité par le contour  $\Gamma_2$ , Figure II.3.4, nous avons l'égalité suivante :

$$\Omega = A(\Gamma_2) + V \tag{II.3.31}$$



**Figure II.3.4.** Contour d'intégration et champ  $\vec{\theta}$

En considérant l'égalité (II.3.31), le deuxième terme de l'équation (II.3.30) prend la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} [(\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k})] \cdot \theta_k dV \\
 &= + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} [(\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k})] \cdot \theta_k dV \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \int_V [(\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k})] \cdot \theta_k dV
 \end{aligned} \tag{II.3.32}$$

En prenant en compte l'équation (II.3.32), dans la forme (II.3.30), et en considérant les équations d'équilibres (II.3.26), on obtient la forme générale de l'intégrale  $M\theta$  suivante :

$$\begin{aligned}
 M\theta &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^{(v)} \cdot u_i] \cdot \theta_{k,j} dV \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k}) \right] \cdot \theta_k dV \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k}] \cdot n_j \cdot \theta_k d\Gamma_1
 \end{aligned} \tag{II.3.33}$$

Le premier terme de l'expression (II.3.33) représente le découplage de mode mixte pour une fissure fixe. Le second terme justifie la séparation des modes mixtes pendant le processus de propagation de la fissure. Le dernier introduit une pression, justifiée par l'action d'un fluide quelconque, sur les lèvres de la fissure [MOU 06<sub>b</sub>], [MOU 06<sub>d</sub>] [MOU 07<sub>a</sub>] ou des contraintes internes d'origine thermique ou hydrique.

### II.3.2. Généralisation au comportement viscoélastique

La généralisation au comportement viscoélastique se fait identiquement au paragraphe II.2.1.3. On s'appuie donc sur un modèle généralisé de Kelvin Voigt associant un ressort et un ensemble de modèles simples de Kelvin Voigt. L'équation (II.3.27) prend donc la forme qui suit [MOU 06<sub>d</sub>] [MOU 07<sub>a</sub>] [MOU 08<sub>b</sub>] :

$$\begin{aligned}
 M_v^{(p)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} [\sigma_{ij,1}^{(p)}(v) \cdot u_i^{(p)} - \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,1}^{(p)}] \cdot n_j d\Gamma_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ (\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot (v_{i,j})_{,1}) \right. \\
 &\quad \left. - ((\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,j})_{,1}) \right] dV \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot u_{i,1}^{(p)} + \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,1}^{(p)}] \cdot n_j d\Gamma_1
 \end{aligned} \tag{II.3.34}$$

avec  $p = (0; 1; \dots; N)$

En s'accordant sur le même principe que l'équation (II.2.11), on adopte aisément la généralisation de l'intégrale  $M\theta v$  suivante :

$$\begin{aligned}
 M\theta_v^{(p)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^{(p)}(v) \cdot u_i] \cdot \theta_{k,j} d\Gamma_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot (v_{i,j})_{,k}) \right. \\
 &\quad \left. - ((\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,j})_{,k}) \right] \cdot \theta_k dV \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \int_L [\sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot u_{i,k} + \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,k}] \cdot n_j \theta_k d\Gamma_1
 \end{aligned} \tag{II.3.35}$$

avec  $p = (0; 1; \dots; N)$

$\sigma_{ij}^{(p)}(u)$  et  $\sigma_{ij}^{(p)}(v)$  désignent respectivement les contraintes réelles et virtuelles induites par les élongations réelles  $u^{(p)}$  et virtuelles  $v^{(p)}$  du  $p^{i\text{ème}}$  ressort.

### II.3.3. Généralisation des intégrales T et A au comportement viscoélastique

Les outils développés précédemment sont généralement applicables à des ambiances stables, sans variations importantes des facteurs hydriques et thermiques propres au milieu considéré. Or les importantes variations thermiques [FER 00<sub>a</sub>] [FER 00<sub>b</sub>] et hygrométriques [DUB 05] au cours de l'avancée du front de fissure, nécessitent de prendre en compte ces deux derniers paramètres environnementaux dans nos différentes formulations. Pour y parvenir, les différentes formulations des intégrales  $T$  et  $A$  développées initialement par Bui [BUI 79] [BUI 84] [BUI 85<sub>a</sub>] [BUI 86] [BUI 90] ont été généralisées au comportement viscoélastique [MOU 08<sub>a</sub>].

#### II.3.3.1. Forme quadrilinéaire du théorème de Noether

Pour intégrer le champ thermique dans la définition de l'équilibre énergétique pour un milieu volumique fissuré  $V$ , Figure II.3.5 a, le théorème de Noether [NOE 18] postule, identiquement à l'équation (II.3.6), que la variation du Lagrangien  $L$  est nulle pour tous champs de déplacements réels  $\delta u$ , virtuels  $\delta v$  et tous champs thermiques réels  $\delta \tau^{(u)}$  et virtuels  $\delta \tau^{(v)}$  cinématiquement admissibles [MOU 08<sub>a</sub>].

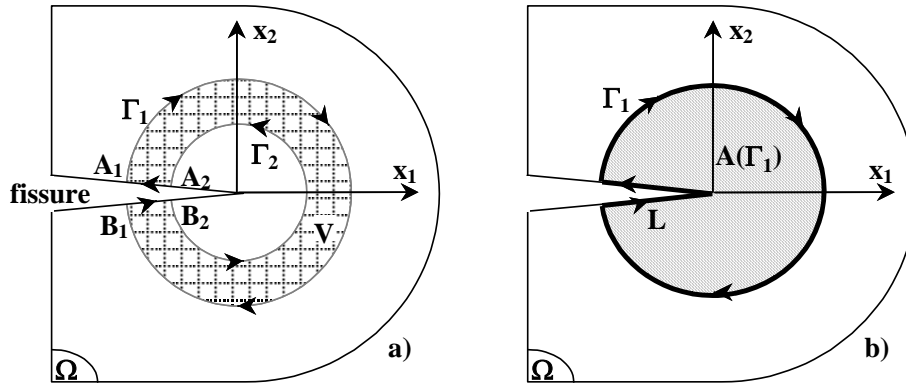


Figure II.3.5. Milieu volumique fissuré

Ainsi, en présence d'un champ thermique, l'énergie libre de déformation prend une forme quadrilinéaire  $F^* = F(u, v, \tau^{(u)}, \tau^{(v)})$ . Par conséquent, identiquement aux descriptions ALE (II.3.2), (II.3.3) et (II.3.4), s'ajoutent les configurations thermiques suivantes :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\tau}^{(u)} &= \delta \tau^{(u)}; & \delta \tilde{\tau}^{(u)} &= 0; & \delta \tilde{\tau}^{(u)} &= \delta \tau^{(u)} + \delta \tau^{(u)*} \\ \delta \tilde{\tau}^{(v)} &= \delta \tau^{(v)}; & \delta \tilde{\tau}^{(v)} &= 0; & \delta \tilde{\tau}^{(v)} &= \delta \tau^{(v)} + \delta \tau^{(v)*} \end{aligned} \quad (\text{II.3.36})$$

Muni de ces nouvelles définitions, le Lagrangien (II.3.9) se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* \right] dV dt \\ & + \int_V \int_t \left[ \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(u)}} \cdot \delta \tau_{i,\alpha}^{(u)} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(u)}} \cdot \delta \tau_{i,\alpha}^{(u)*} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(v)}} \cdot \delta \tau_{i,\alpha}^{(v)} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(v)}} \cdot \delta \tau_{i,\alpha}^{(v)*} \right] dV dt \end{aligned} \quad (\text{II.3.37})$$

### II.3.3.2. Intégrale $T_v$

Soit  $T_v$  la généralisation de l'intégrale  $T$ , développée initialement par Bui et Proix [BUI 84] [BUI 85<sub>a</sub>] à la propagation de fissure. En définissant, comme précédemment, les contours linéiques et surfaciques et l'implication du sens des normales sortantes [MOU 07<sub>a</sub>], nous obtenons l'expression suivante [MOU 06<sub>d</sub>] [MOU 08<sub>a</sub>] :

$$\begin{aligned} T_v = & \int_{\Gamma_1} \left[ F^\bullet \cdot n_k - \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,k} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,j} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{j}^{(u)}} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{j}^{(v)}} \cdot \tau_{,k}^{(v)} \right) \cdot n_j \right] d\Gamma \\ & + \int_V \int_t \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,k} \right)_\alpha + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot v_{i,k} \right)_\alpha + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(u)}} \cdot \tau_{,k}^{(u)} \right)_\alpha + \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau_{i,\alpha}^{(v)}} \cdot \tau_{,k}^{(v)} \right)_\alpha \right] dV dt \\ & - \int_L \left[ \left( \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,k} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,j} \right) \right] \cdot n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.3.38})$$

Considérons un comportement élastique isotherme, la forme bilinéaire  $F^\bullet(u, v)$  peut prendre la forme suivante [PET 94], et ce, pour un matériau isotrope :

$$F^\bullet(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k} \cdot v_{i,j} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \cdot v_{i,j} \quad (\text{II.3.39})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé supposés être indépendants de la température. Afin de prendre en compte une variation thermique, l'expression (II.3.39) peut être généralisée par :

$$F^\bullet(u, v, \tau^u, \tau^v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \quad (\text{II.3.40})$$

avec  $\beta = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \alpha$

$\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique pouvant dépendre des directions d'orthotropie dans le cas d'un matériau ayant des plans de symétrie orthogonaux. Les différentes dérivées partielles issues de la relation (II.3.40), s'écrivent de la manière suivante [MOU 08<sub>a</sub>] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij}); & \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij}) \\ \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^{(u)}} &= -\frac{1}{2} \cdot (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j}); & \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^{(v)}} &= -\frac{1}{2} \cdot (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j}) \end{aligned} \quad (\text{II.3.41})$$

En introduisant la relation (II.3.41) dans la forme (II.3.38), on obtient :

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} - \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} - \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \right) \cdot n_k \right. \\ &\quad \left. - \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k} - \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} - \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \right) \cdot n_j \right] d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_V \left[ \sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k} - (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(v)}) \right. \\ &\quad \left. - \left( (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k} - (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)})_{,k} - (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)})_{,k} \right) \right] dV \quad (\text{II.3.42}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \int_L \left[ \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} - \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} - \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \right] \cdot n_j d\Gamma \end{aligned}$$

En régime permanent, on a l'expression  $\left( \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \right)$ , l'équation de la chaleur implique alors

$\Delta \tau = 0$ . Dans ce cas, si nous appliquons successivement le théorème de Gauss-Ostrogradski au premier terme de l'équation (II.3.42), et en prenant en compte les équations d'équilibre (II.3.26), on obtient après simplification l'intégrale suivante [MOU 08<sub>a</sub>] :

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} \left[ (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_i - \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k}) - (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,jk} \cdot \tau_{,j}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,j}^{(v)}) \cdot n_j \right] d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ \sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k} - (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(v)}) \right. \\ &\quad \left. - \left( (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j})_{,k} + ((\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)})_{,k} + (\beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)})_{,k}) \right) \right] dV \quad (\text{II.3.43}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \int_L \left[ (\sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j}) - (\beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} + \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j}) \right] \cdot n_j d\Gamma \end{aligned}$$

L'intégrale (II.3.43) se distingue par l'indépendance du contour d'intégration. Le cas de la fissure fixe est concentré sur le premier terme de l'expression (II.3.43). Le second terme concerne la propagation de fissure. L'existence de pressions externes sur les lèvres est assurée par le troisième terme. En annulant les champs thermiques réels et arbitraires  $\tau^{(u)}$  et  $\tau^{(v)}$ , on retrouve aisément l'intégrale  $M$  traduite par l'équation (II.3.27) [MOU 07<sub>a</sub>]. Cette généralisation de l'intégrale  $T_v$  est une première étape car les hypothèses se restreignent à un régime permanent en température ou humidité en supposant que les propriétés mécaniques ne sont pas affectées par leur valeur et leurs amplitudes.

### II.3.3.3. Intégrale $A_v$

Notons  $A_v$ , la généralisation de l'intégrale  $A$  [BUI 84] [BUI 85<sub>a</sub>] à la propagation de fissure, dans le but d'intégrer par la méthode des éléments finis l'expression (II.3.43). Zhang [ZHA 92] a validé numériquement l'intégrale  $A$  sur une surface. Identiquement à l'expression (II.3.28), on définit la relation qui suit [MOU 08<sub>a</sub>] :

$$\dot{p}_{j,k}^\tau = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_i - \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k} \right) - \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,jk} \cdot \tau_{,j}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,j}^{(v)} \right) \right] \quad (\text{II.3.44})$$

En considérant comme précédemment un champ  $\theta$ , continu et dérivable sur le domaine considéré, l'expression (II.3.43) devient :

$$\begin{aligned} A\theta_v &= \int_{\partial V} \left[ -\dot{p}_{j,k}^\tau \cdot \theta_k \right] \cdot n_j d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k} - 2 \cdot \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(v)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} \right)_{,k} + \left( \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right)_{,k} - \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)} \right)_{,k} + \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)} \right)_{,k} \right) \right] \cdot \theta_k dV \quad (\text{II.3.45}) \\ &- \frac{1}{2} \cdot \int_L \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right) - \left( \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} + \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \right) \right] \cdot \theta_k \cdot n_j d\Gamma \end{aligned}$$

Par application du théorème de Gauss-Ostrogradski au premier terme de la relation (II.3.45), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} A\theta_v &= \int_V \left[ \dot{p}_{j,kj}^\tau \cdot \theta_k + \dot{p}_{j,k}^\tau \cdot \theta_{k,j} \right] \cdot d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot (v_{i,j})_{,k} - 2 \cdot \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(v)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} \right)_{,k} + \left( \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right)_{,k} - \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)} \right)_{,k} + \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau^{(u)} \right)_{,k} \right) \right] \cdot \theta_k d\Omega \quad (\text{II.3.46}) \\ &- \frac{1}{2} \cdot \int_L \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right) - \left( \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} + \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \right) \right] \cdot \theta_k \cdot n_j d\Gamma \end{aligned}$$

Supposons que les variations du champ de température n'influent pas sur les propriétés viscoélastiques du matériau. Ainsi, avec les équations d'équilibres, la première expression de la première intégrale de l'expression (II.3.46) est nulle. Si on considère une indépendance du domaine d'intégration  $\Omega$ , Figure II.3.5 b, on a en définitive [MOU 08<sub>a</sub>] :

$$\begin{aligned}
 A_v = & \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ \left( \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^{(v)} \cdot u_i \right) + \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,jk} \cdot \tau_{,j}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,j}^{(v)} \right) \right] \cdot \theta_{,kj} d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij}^{(v)} \cdot \left( u_{i,j} \right)_{,k} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot \left( v_{i,j} \right)_{,k} - 2 \cdot \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} + \beta \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(v)} \right) \right. \\
 & \left. - \left( \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} \right)_{,k} + \left( \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right)_{,k} - \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} \right)_{,k} + \left( \beta \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} \cdot \tau_{,k}^{(u)} \right)_{,k} \right) \right] \cdot \theta_{,k} d\Omega \quad (\text{II.3.47}) \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \int_L \left[ \left( \sigma_{ij}^{(v)} \cdot u_{i,j} + \sigma_{ij}^{(u)} \cdot v_{i,j} \right) - \left( \beta \cdot \tau^{(u)} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{i,j} + \beta \cdot \tau^{(v)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,j} \right) \right] \cdot \theta_{,k} \cdot n_j d\Gamma
 \end{aligned}$$

La généralisation au comportement viscoélastique est assurée, en définitive, par l'introduction d'un modèle de Kelvin Voigt généralisé (Figure II.2.2) en associant ce comportement aux contraintes et aux allongements réels et virtuels propres au  $p^{\text{ième}}$  ressort du modèle rhéologique [MOU 08a].

## II.4. Implémentation éléments finis et validation numérique de l'intégrale $M\theta_v$ en propagation

### II.4.1. Préliminaires

#### II.4.1.1. Restrictions des intégrales $M\theta_v$ et $G_v$

Cette partie est consacrée à la validation numérique de l'intégrale  $M\theta_v$  définie par la relation (II.3.35). Toutefois, dans la modélisation numérique à venir, il ne sera pas pris en compte la pression sur les lèvres de la fissure [MOU 07d] [MOU 08b]. Dans ce cas, l'équation soumise à notre étude se définit par la restriction suivante :

$$\begin{aligned}
 M\theta_v^{(p)} = & \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,k}^{(p)} - \sigma_{ij,k}^{(p)}(v) \cdot u_i^{(p)} \right] \cdot \theta_{,kj} d\Gamma_1 \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ \left( \sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot \left( u_{i,j} \right)_{,k} + \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot \left( v_{i,j} \right)_{,k} \right) \right. \\
 & \left. - \left( \left( \sigma_{ij}^{(p)}(v) \cdot u_{i,j} \right)_{,k} + \left( \sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot v_{i,j} \right)_{,k} \right) \right] \cdot \theta_{,k} dV \quad (\text{II.4.1}) \\
 & \text{avec } p = (0; 1; \dots; N)
 \end{aligned}$$

Grâce au principe de superposition, et en se référant aux expressions (II.4.2) et (II.4.3), on écrit également :

$$M\theta_v^{(p)} = C_1^{(k)} \cdot \frac{{}^u K_I^{(p)} \cdot {}^v K_I^{(p)}}{8} + C_2^{(k)} \cdot \frac{{}^u K_{II}^{(p)} \cdot {}^v K_{II}^{(p)}}{8} \quad (\text{II.4.2})$$

$${}^u K_I^{(p)} = 8 \cdot \frac{M\theta_v^{(p)} \left( {}^v K_I^{(p)} = 1, {}^v K_{II}^{(p)} = 0 \right)}{C_1^{(p)}} \quad \text{et} \quad {}^u K_{II}^{(p)} = 8 \cdot \frac{M\theta_v^{(p)} \left( {}^v K_I^{(p)} = 0, {}^v K_{II}^{(p)} = 1 \right)}{C_2^{(p)}} \quad (\text{II.4.3})$$

Identiquement aux relations (II.2.18) (II.2.19), on a les différentes partitions du taux de restitution d'énergie pour chaque mode :

$$G_v^{(p)} = {}^1G_v^{(p)} + {}^2G_v^{(p)} = C_1^{(p)} \cdot \frac{{}^uK_I^{(p)}}{8} + C_2^{(p)} \cdot \frac{{}^uK_{II}^{(p)}}{8} \quad (\text{II.4.4})$$

${}^1G_v^{(p)}$  et  ${}^2G_v^{(p)}$  sont les taux de restitution d'énergie propres au  $p^{\text{ième}}$  ressort et définis respectivement en mode I et II.  $C_1^{(p)}$  et  $C_2^{(p)}$  sont les complaisances viscoélastiques associées. Ainsi, le taux de restitution d'énergie, pour l'ensemble du modèle, est donné par les sommations suivantes :

$${}^1G_v = \sum_k {}^1G_v^{(p)} \quad \text{et} \quad {}^2G_v = \sum_k {}^2G_v^{(p)} \quad \text{avec} \quad p \in \{0, 1, \dots, N\} \quad (\text{II.4.5})$$

#### II.4.1.2. Formulation incrémentale et modélisation

L'ensemble de la procédure incrémentale, exposée dans le paragraphe II.1.1, a été utilisé pour résoudre par éléments finis les expressions (II.4.4) et (II.4.5).

Pour simuler les modes mixtes de rupture, l'éprouvette CTS, paragraphe II.2.4.1 a été identiquement utilisée. Le modèle rhéologique, garantissant la précision des résultats viscoélastiques, est composé de six éléments de Kelvin Voigt comme détaillés au paragraphe II.2.4.2.

En pointe de fissure, un maillage rayonnant, assurant la stabilité des résultats, est retenu comme indiqué au paragraphe II.2.4.3.

### II.4.2. Algorithme de propagation

L'algorithme de propagation permet le couplage de toutes les procédures afin de les résoudre sur Castem [CHA 86]. Cet algorithme, Figure II.4.1, exige un remaillage partiel de la géométrie précédente car, pour une sollicitation en mode mixte, le domaine considéré est loin d'être identique à chaque pas de propagation [MOU 08<sub>b</sub>]. Pour répondre à cette exigence, on effectue alors une projection systématique de tous les champs mécaniques à chaque pas d'avancement de la fissure. L'algorithme proposé opère un découplage entre les différentes variations géométriques et temporelles. Pour cela, on suppose les différents champs mécaniques connus à l'instant  $t_n$ . Le champ de contrainte  $\sigma_i(t_n)$  et le chargement extérieur  $F_i(t_n)$  sont définis sur le maillage initial  $W_i$  avec une longueur de fissure  $a$  (étape 0).

Premièrement, nous évaluons le champ de contrainte induit par l'état initial :



- Etape 1 : Considérons une propagation instantanée  $\Delta a$  de la fissure. La géométrie  $W_{i+1}$  est définie par remaillage de la configuration antérieure. Avec le même chargement extérieur, le champ de contrainte  $\sigma_{i+1}(t_n)$  est calculé. On note  $\sigma_{i+1}^p(t_n)$  la projection de  $\sigma_i(t_n)$  sur le nouveau maillage  $W_{i+1}$ .
- Etape 2 : Entre ces deux configurations géométriques, l'incrément de contrainte  $\Delta\sigma_{i+1}(t_n)$  ( $\Delta\sigma_{i+1}(t_n) = \sigma_{i+1}(t_n) - \sigma_{i+1}^p(t_n)$ ) est calculé.
- Etape 3 : Grâce au principe de superposition, la contrainte de cohésion supplémentaire  $-\Delta\sigma_{i+1}$  (Chargement extérieur équivalent) est utilisée pour refermer la nouvelle ouverture de fissure  $\Delta a$ . On obtient ainsi une configuration géométrique équivalente entre les étapes 0 et l'étape 3 (même état mécanique) mais avec deux supports géométriques distincts.
- Etape 4 : On fixe le pas de propagation et on débloque la variable temporelle . L'incrément de force  $\Delta\sigma_{i+1}$ , calculé précédemment, est utilisé dans la procédure viscoélastique incrémentale comme chargement supplémentaire pendant l'incrément de temps  $\Delta t$  selon l'équation (II.1.38). La projection des différents champs mécaniques sur le maillage précédent est assurée par l'opérateur PROIX. On a ainsi une évolution de la fissure simulant la décohésion progressive du front de fissure sur une longueur  $\Delta a$ .

En définitive, les paramètres à la rupture peuvent être aisément évalués et l'algorithme peut être infiniment répété jusqu'à la ruine du matériau.

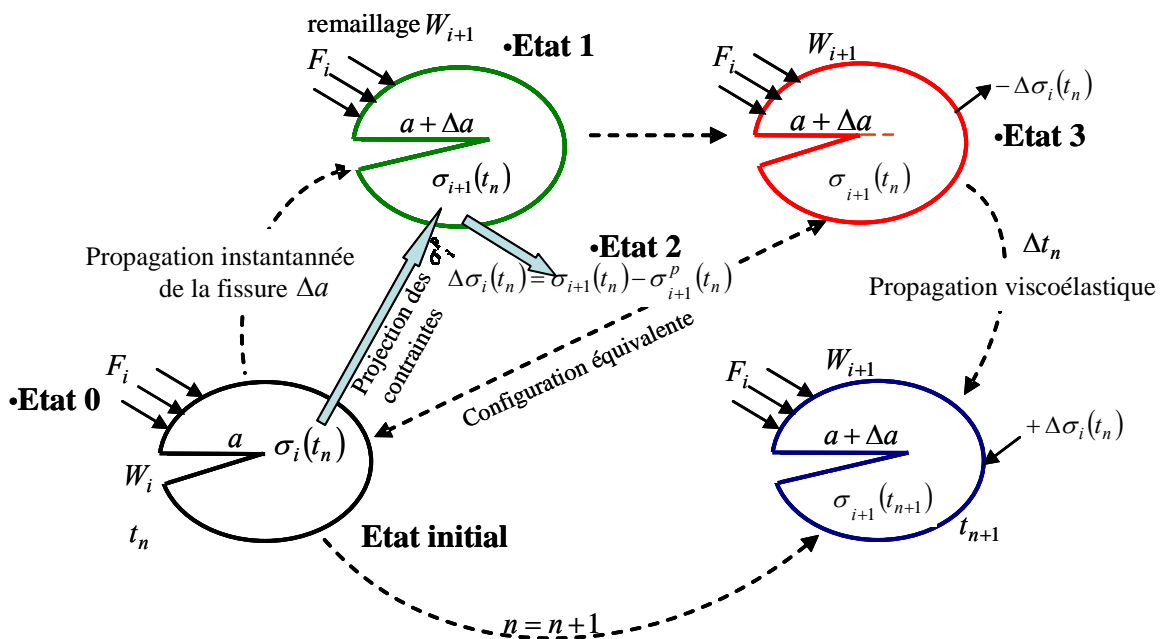
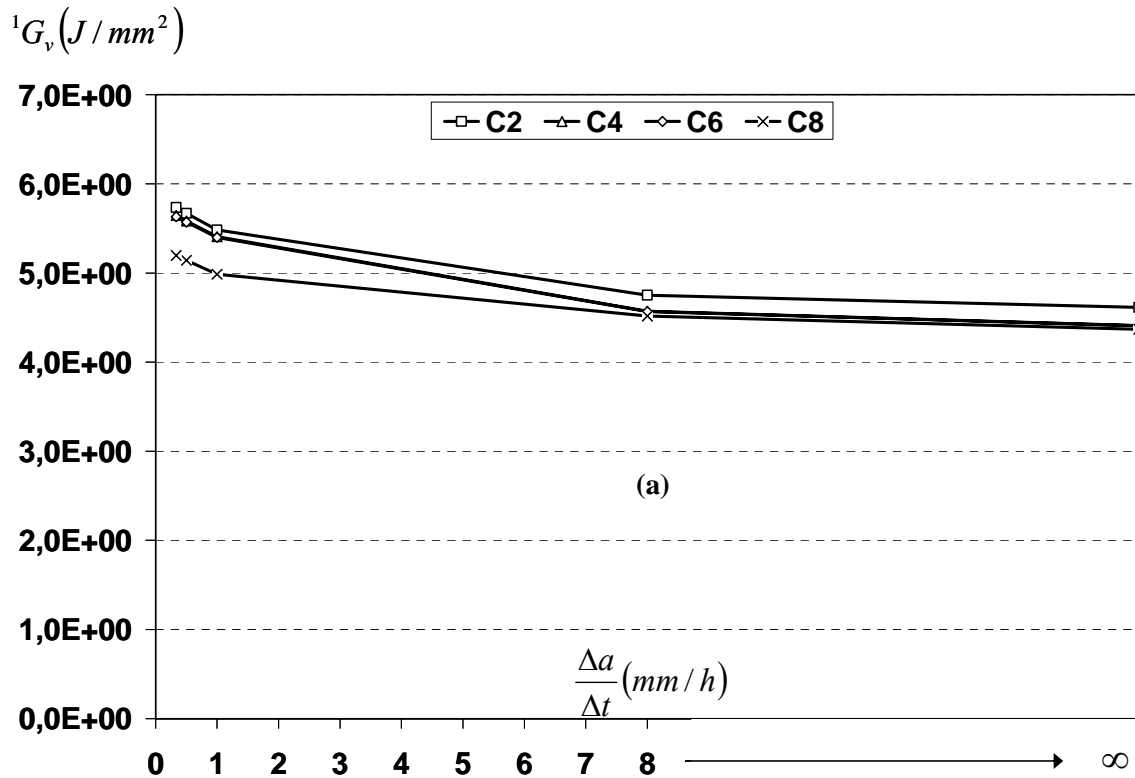


Figure II.4.1. Algorithme de propagation viscoélastique [MOU 08<sub>b</sub>]

### II.4.3. Indépendance du domaine d'intégration

#### II.4.3.1. Taux de restitution d'énergie et vitesse de propagation

Les Figures II.4.2 (a) et (b), affichent les variations du taux de restitution en mode I pure  ${}^1G_v$  et en mode II pure  ${}^2G_v$  en fonction des vitesses de propagation pour différentes couronnes. Les Figures II.4.3 (a) et (b), présentent respectivement les mêmes définitions mais en mode mixte  $45^\circ$ . Notons que le pas de propagation est fixé à  $\Delta a = 8\text{mm}$ , et les résultats sont obtenus pour une longueur de fissure finale de  $a = 65\text{mm}$ . Sur ces graphiques, on observe une augmentation graduelle du taux de restitution d'énergie pour des temps de propagation faibles correspondant à de faibles vitesses de propagation. Par contre, ce taux diminue proportionnellement pour des vitesses infiniment élevées, correspondant à un comportement du matériau se rapprochant des conditions instantanées élastique.



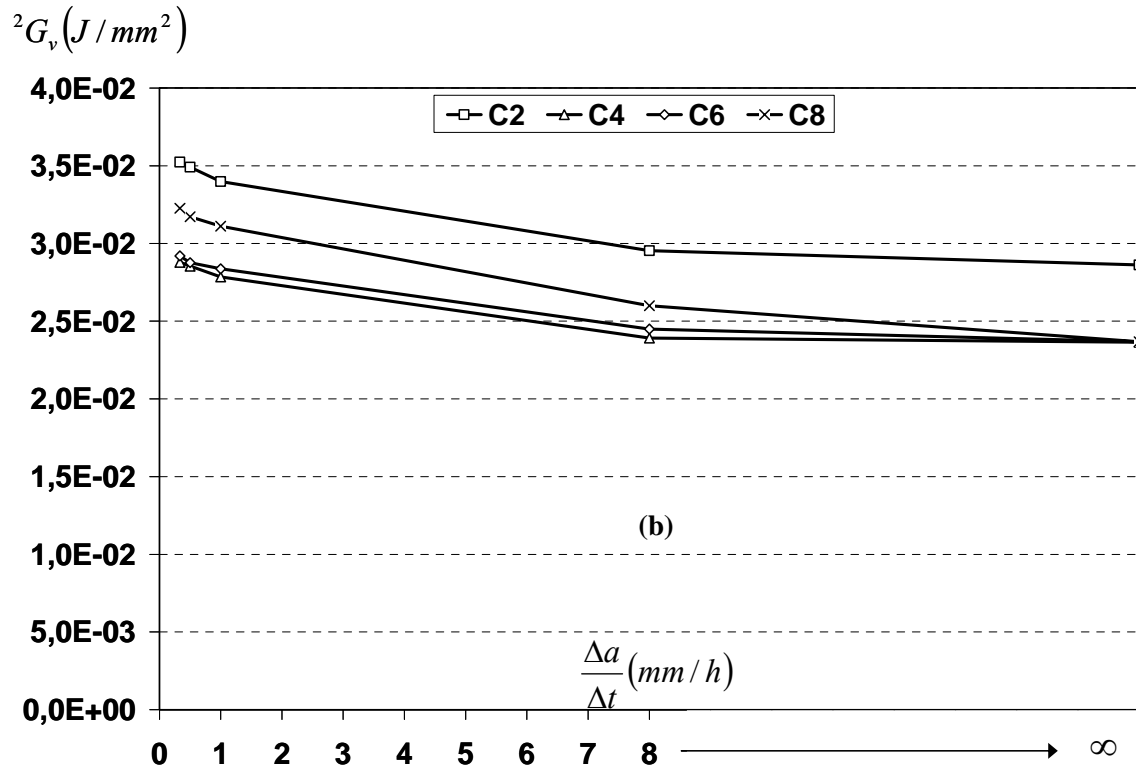
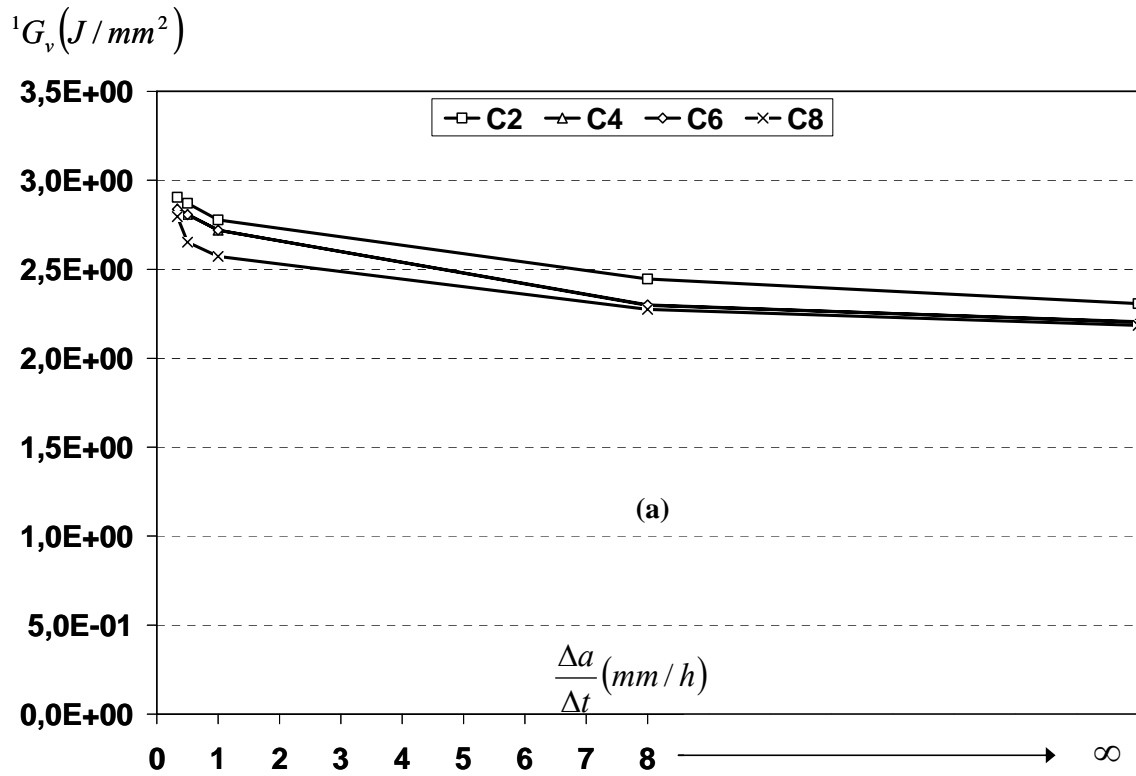
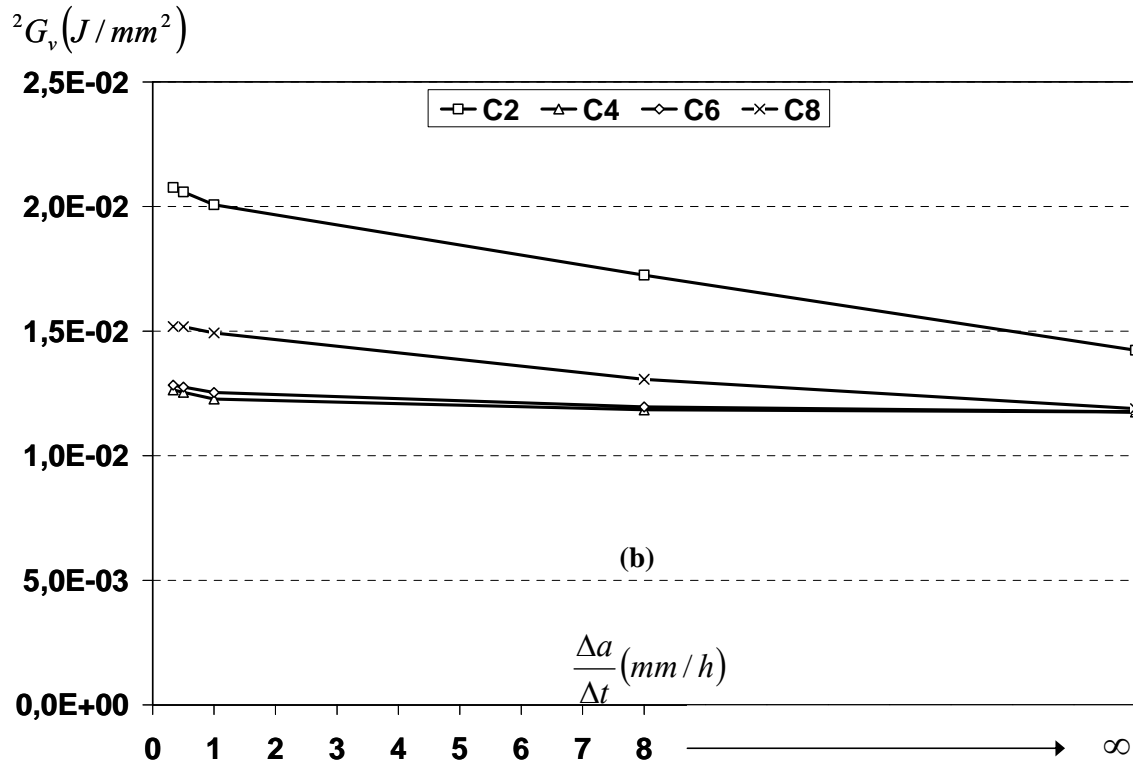


Figure II.4.2. Taux de restitution d'énergie en fonction de la vitesse de propagation (a : mode I ; b : mode II).





**Figure II.4.3.** Taux de restitution d'énergie en fonction de la vitesse de propagation en mode mixte  $45^\circ$  (a : part du mode I ; b : part du mode II).

Ces analyses mettent en évidence les effets différés du matériau, et par conséquent, le comportement viscoélastique du matériau exprimé par les équations (II.4.4) et (II.4.5). En outre, le faible écart entre les différentes couronnes (C2 à C8), Figure II.2.8, valide également l'indépendance du domaine d'intégration considéré [MOU 08<sub>b</sub>].

#### II.4.3.2. Taux de restitution d'énergie et couronnes d'intégration

Les Figures II.4.4 et II.4.5 présentent les évolutions du taux de restitution d'énergie viscoélastique  $^1G_v$  (respectivement  $^2G_v$ ) en mode I et en mode II pour des angles de sollicitations de  $0^\circ$  (mode I pure),  $45^\circ$  (mode mixte) et  $90^\circ$  (mode II pure) en fonction des couronnes représentées à la Figure II.2.8. Pour ces résultats, le pas de propagation est  $\Delta a = 1\text{mm}$ . Nous observons une stabilité du taux de restitution d'énergie pour l'ensemble des trois modes de sollicitation. Ce constat garantit l'indépendance de l'intégrale  $M\theta v$  introduite par l'équation (II.4.1) et la validité du taux de restitution d'énergie, équation (II.4.5), quelque soit le domaine ou la couronne utilisée. Aussi, les faibles valeurs de  $^1G_v$  à  $90^\circ$ , respectivement  $^2G_v$  à  $0^\circ$ , justifient la capacité des équations (II.4.1) (II.4.4) et (II.4.5), et donc du modèle, à découpler les modes de rupture en propagation.

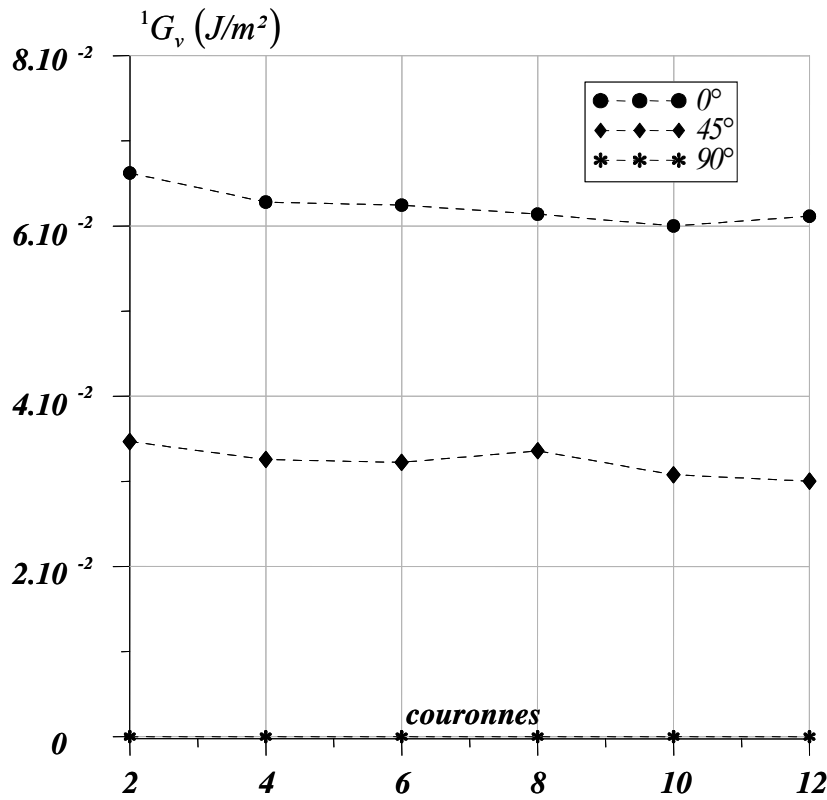


Figure II.4.4. Indépendance du domaine en mode I.

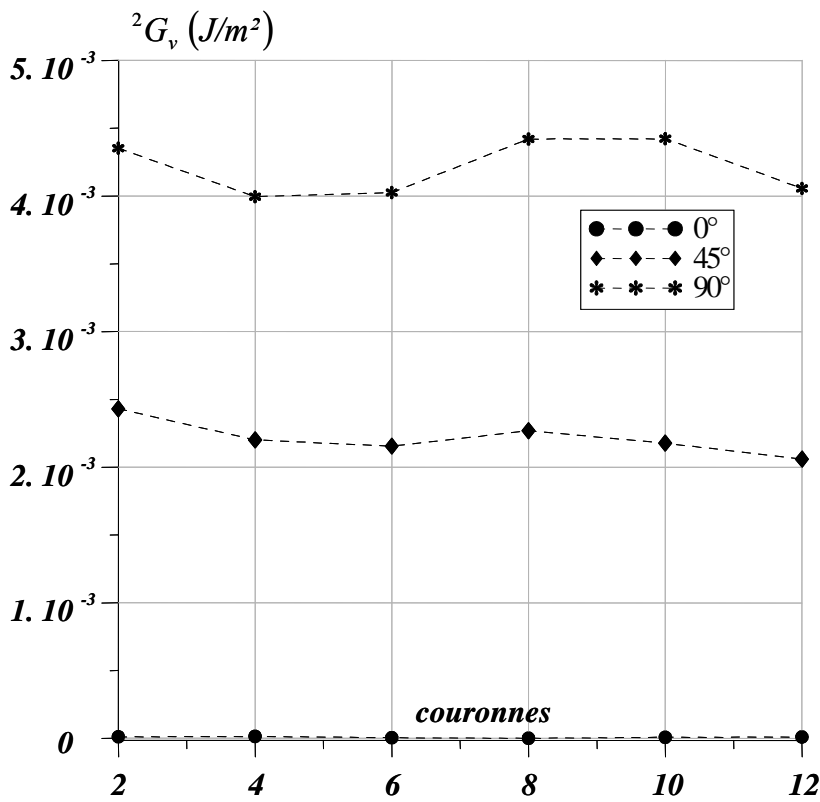


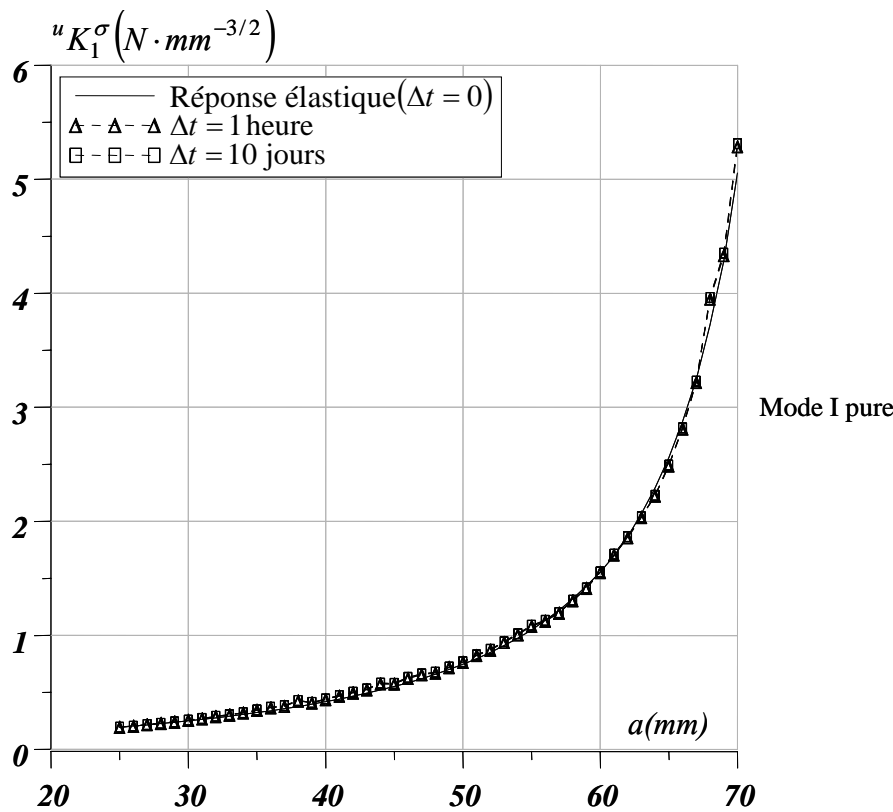
Figure II.4.5. Indépendance du domaine en mode II.

**II.4.4. Facteurs d'intensité de contrainte**

Dans le paragraphe qui suit, le pas de propagation est  $\Delta a = 1mm$ . Les temps affichés représentent les temps nécessaires pour propager la fissure de  $1mm$ . La couronne C8 a été retenue pour effectuer les différents calculs numériques.

Les Figures II.4.6 et II.4.7, représentent les évolutions du facteur d'intensité de contrainte élastique  ${}^1K_e^{(\sigma)}$ , viscoélastiques pour 1 heure  ${}^u K_1^{(\sigma)}(1h)$  et dix jours  ${}^u K_1^{(\sigma)}(10j)$ , en mode I pure et respectivement,  ${}^2K_e^{(\sigma)}$ ,  ${}^2K_v^{(\sigma)}(1h)$ ,  ${}^2K_v^{(\sigma)}(10j)$  en mode II pure en fonction de la longueur de la fissure. Les Figures II.4.8 et II.4.9 traduisent respectivement les mêmes évolutions, mais en mode mixte  $45^\circ$  (respectivement part de mode I et part de mode II). On remarque que quelque soit le temps considéré, les facteurs d'intensité de contrainte, équation (II.4.3), du ressort instantané sont quasiment identiques. En l'occurrence, le comportement élastique, traduit par le ressort initial, reste inchangé. Ce constat traduit une fois encore l'efficacité du model utilisé. Pourquoi ?

En effet, le processus de propagation sous une charge constante se traduit par un état de fluage à contrainte constante. Ainsi, le facteur d'intensité de contrainte dépend de la longueur de fissure mais est insensible à la grandeur temporelle.



**Figure II.4.6.** Facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure en mode I.

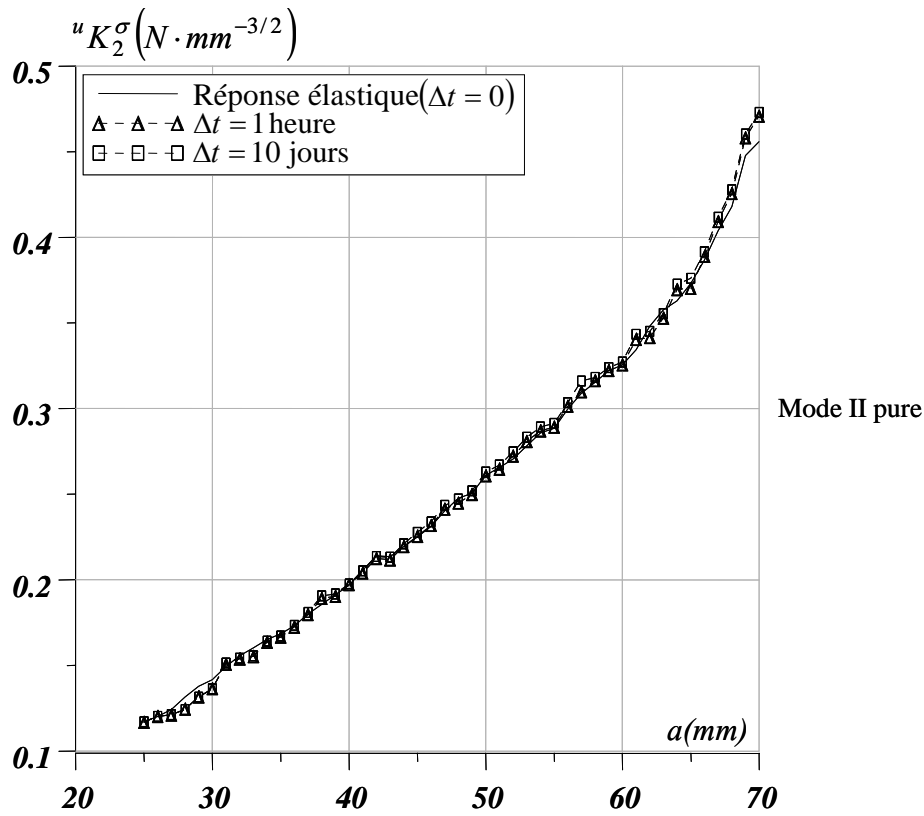


Figure II.4.7. Facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure en mode II.

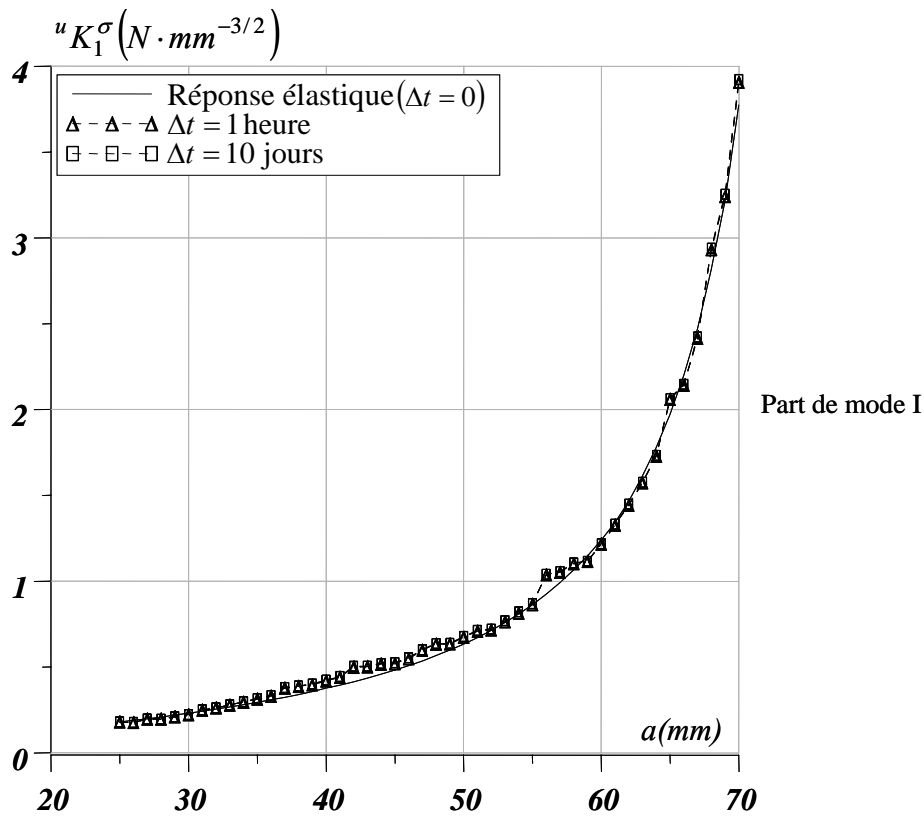


Figure II.4.8. Facteur d'intensité de contrainte vs. longueur de fissure en mode mixte  $45^\circ$ .

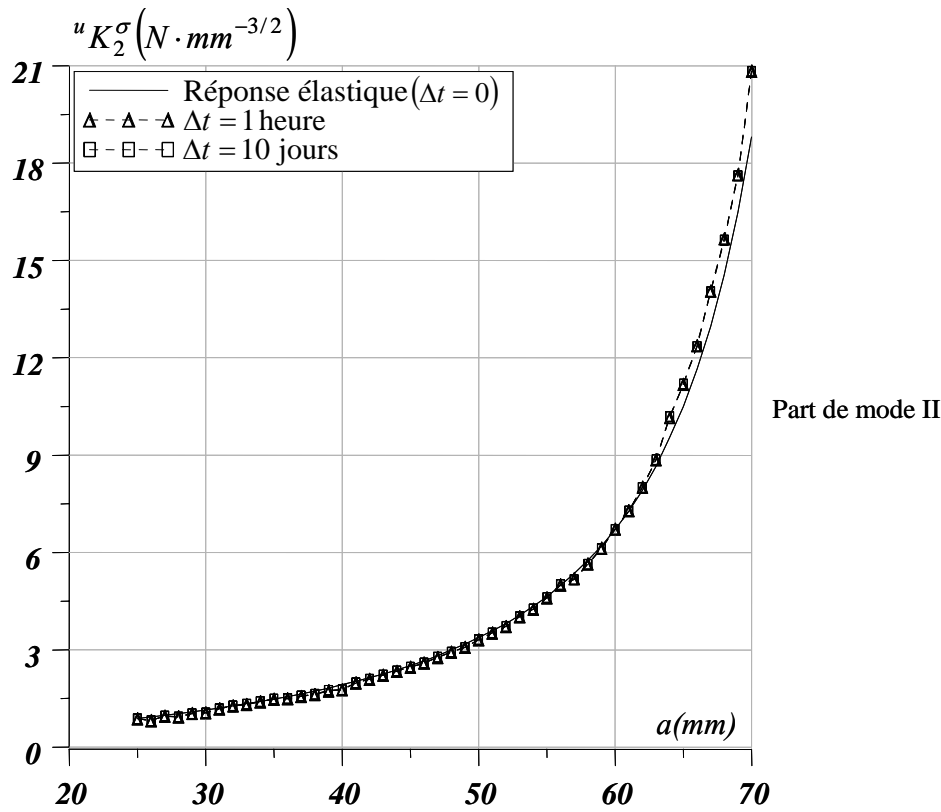


Figure II.4.9. Facteur d'intensité de contrainte vs. longueur de fissure en mode mixte 45°.

## II.4.5. Taux de restitution d'énergie

### II.4.5.1. Taux de restitution d'énergie en fonction du temps et des couronnes

Comme précédemment, le pas de propagation est fixé à  $\Delta a = 8mm$ . Les résultats sont obtenus pour une longueur de fissure finale de  $a = 65mm$ .

Sur ces différents graphiques, 0 heure correspond à un calcul purement élastique ; les autres temps, aux réponses différées du matériau. On y remarque clairement une évolution du taux de restitution d'énergie en fonction du temps, traduisant les différents effets viscoélastiques propres à la structure [MOU 08<sub>k</sub>].



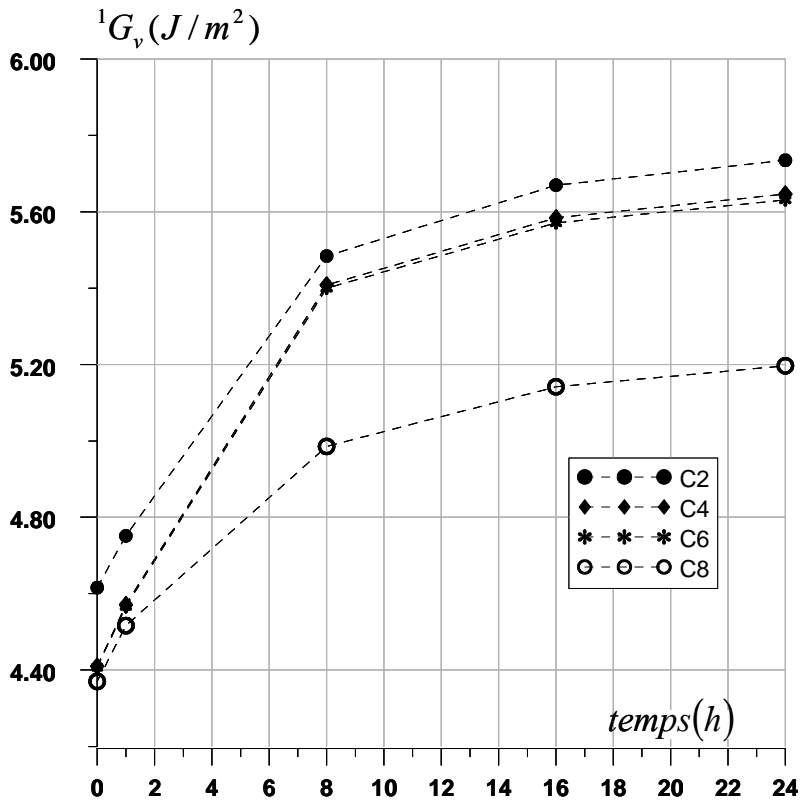


Figure II.4.10. Evolution de  ${}^1G_v$  en fonction du temps et des couronnes en mode I pure.

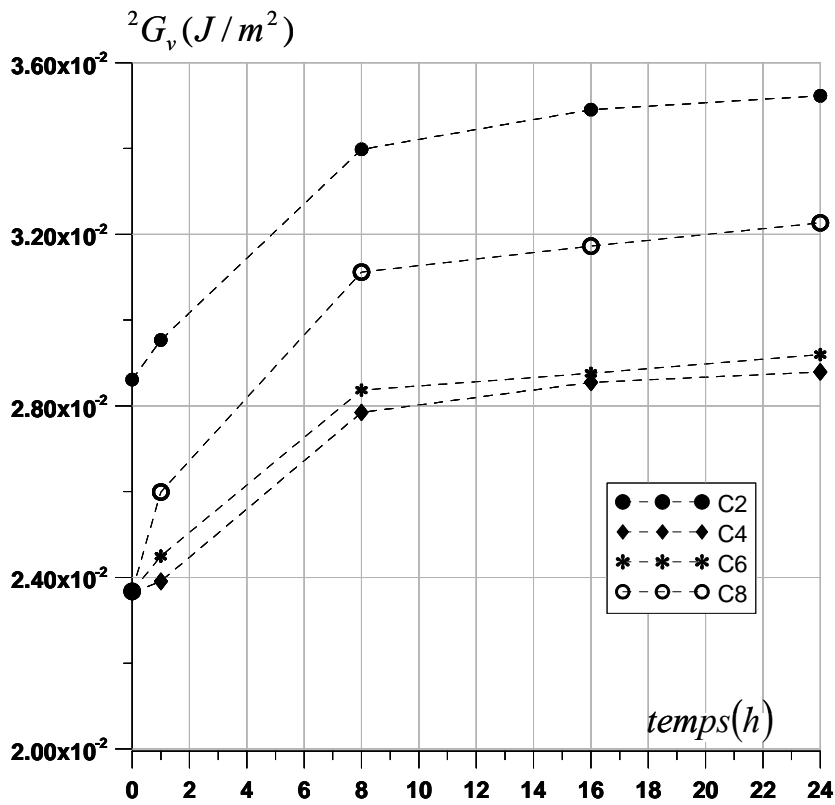


Figure II.4.11. Evolution de  ${}^2G_v$  en fonction du temps et des couronnes en mode II pure.

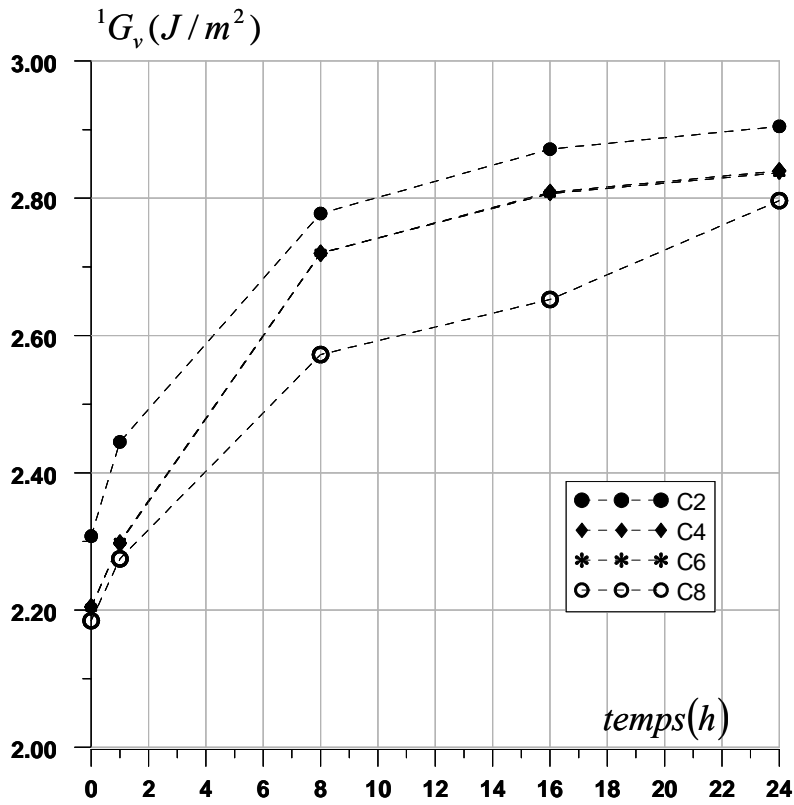


Figure II.4.12. Evolution de  ${}^1G_v$  en fonction du temps et des couronnes en mode mixte 45°.

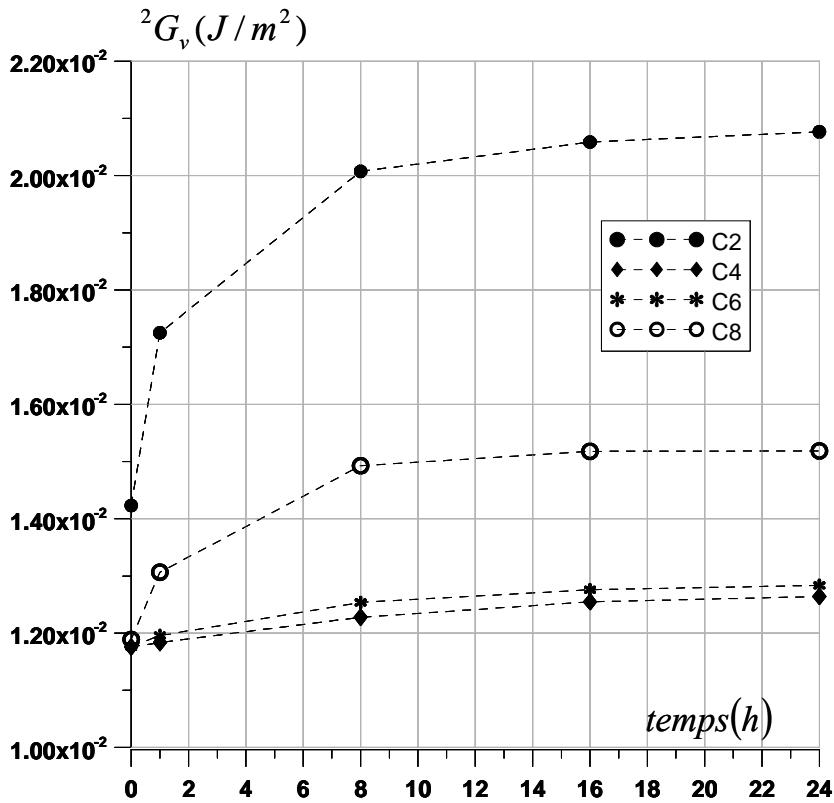


Figure II.4.13. Evolution de  ${}^2G_v$  en fonction du temps et des couronnes en mode mixte 45°.

II.4.5.2. Taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure

Dans le paragraphe qui suit, le pas de propagation est  $\Delta a = 1mm$ . Les temps affichés représentent les temps nécessaires pour propager la fissure de  $1mm$ . La couronne C8 a été retenue pour effectuer les différents calculs numériques [MOU 08<sub>b</sub>].

Ainsi, Les Figures II.4.14 et II.4.15, présentent les évolutions du taux de restitution d'énergie, élastique  $G1$ , viscoélastiques pour 1 heure  ${}^1G_v(1h)$  et dix jours  ${}^1G_v(10j)$ , en mode I pure et respectivement,  $G2$ ,  ${}^2G_v(1h)$ ,  ${}^2G_v(10j)$  en mode II pure en fonction de la longueur de la fissure. Les Figures II.4.17 et II.4.16 présentent respectivement les mêmes évolutions ; mais en mode mixte  $45^\circ$ . Le calcul élastique de référence et les différents calculs viscoélastiques sont définis par les termes de l'équation (II.4.5). Dans l'ensemble, on y remarque, d'une part, que  $G$  évolue d'une manière croissante proportionnellement à la cinétique de fissuration et, d'autre part, que les valeurs de  $G$  restent toujours plus importantes quand ces vitesses augmentent. Ces constats traduisent simultanément les effets différés du milieu étudié, et en outre, la pertinence du modèle dans la caractérisation du comportement viscoélastique.

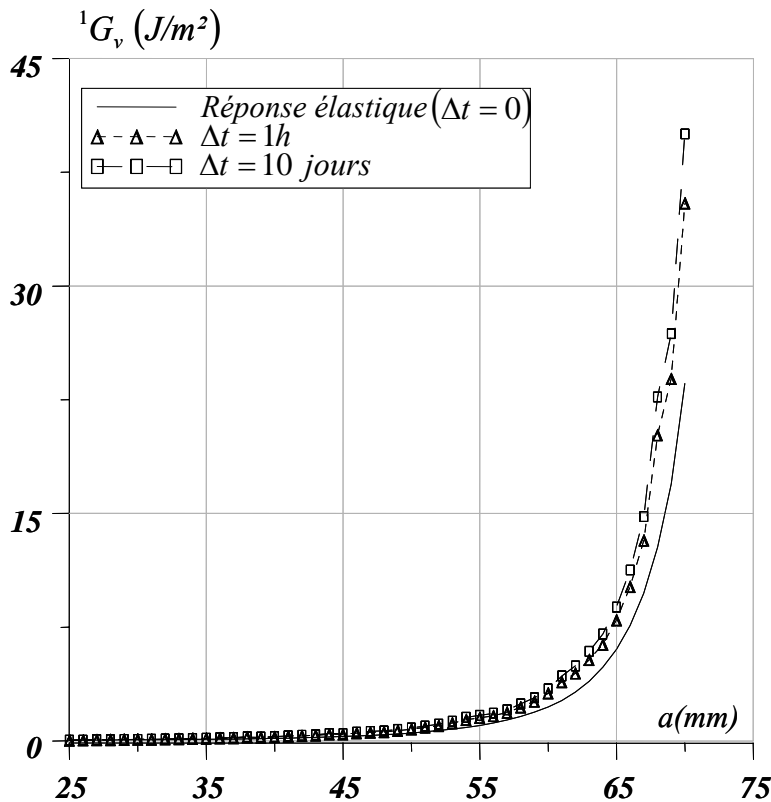


Figure II.4.14. Taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de la fissure en mode I.

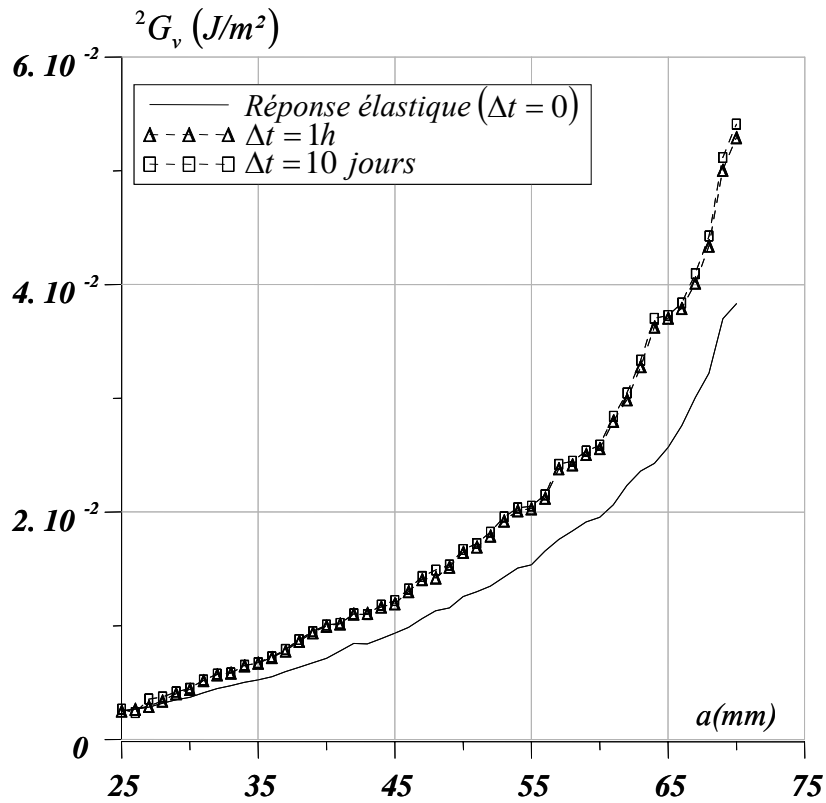


Figure II.4.15. Taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de la fissure en mode II.

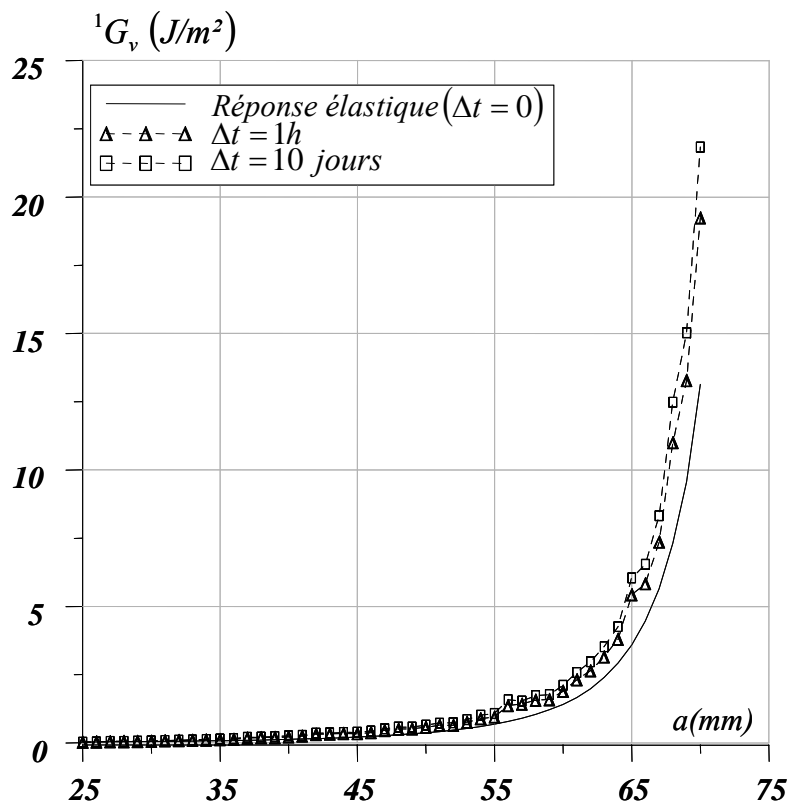
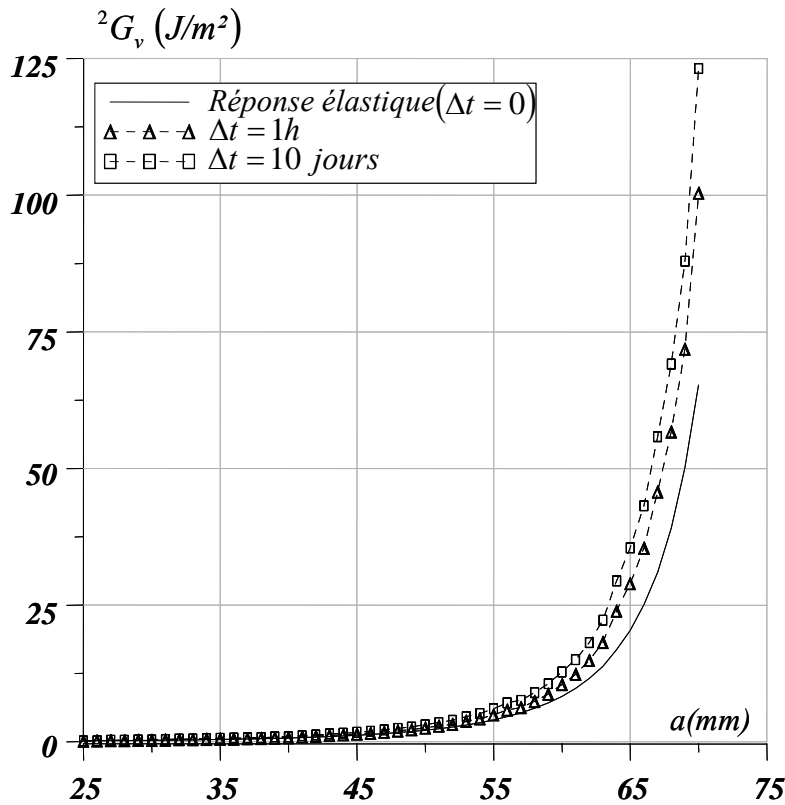


Figure II.4.16.  ${}^1G_v$  en mode mixte ( $45^\circ$ ) en fonction de la longueur de la fissure (part du mode I).



**Figure II.4.17.**  ${}^2G_v$  en mode mixte ( $45^\circ$ ) en fonction de la longueur de la fissure (part du mode II).

## II.5. Conclusion

Nous avons développé une intégrale permettant le découplage des modes de rupture pendant le processus de propagation de fissure dans un matériau viscoélastique orthotrope soumis à un chargement en fluage. Cette intégrale a été couplée avec une formulation incrémentale du comportement viscoélastique. L'algorithme reliant l'ensemble a été résolu par le code aux éléments finis Castem. Les résultats obtenus montrent l'indépendance du domaine d'intégration en mode I, mode II et mode mixte. En outre, les différentes évolutions du taux de restitution d'énergie en fonction des cinétiques de fissuration et du temps mettent en évidence le comportement différé du matériau et, par conséquent, l'efficacité du modèle proposé dans la caractérisation du comportement viscoélastique et le découplage des modes de rupture dans les circonstances précisées. Il reste à développer une stratégie expérimentale, sur la base de l'éprouvette CTS, permettant de déterminer les différents critères de rupture en modes mixtes tout en garantissant la stabilité de la fissure pendant son évolution durant un chargement en fluage. L'objectif étant de pouvoir obtenir, sur le même support géométrique, les caractéristiques viscoélastiques réduites du matériau, et les paramètres de fissuration propres à celui-ci.

# CHAPITRE III. STRATEGIE EXPERIMENTALE

---

<b>III.1. Introduction : objectifs de l'essai.....</b>	<b>97</b>
<b>III.2. Conception de l'éprouvette de propagation stable en mode mixte.....</b>	<b>97</b>
III.2.1. Epreuves existantes.....	97
III.2.1.1. Epreuve DCB à inertie variable.....	97
III.2.1.2. Epreuve CTS.....	99
III.2.2. Epreuve à propagation stabilisée en mode mixte.....	100
III.2.2.1. Concept de l'éprouvette 2MGC.....	100
III.2.2.2. Optimisation.....	101
III.2.2.3. Epreuve définitive.....	103
III.2.3. Résultats numériques.....	105
III.2.3.1. Maillage rayonnant.....	105
III.2.3.2. Stabilité de G en mode I et en mode II.....	106
III.2.3.3. Stabilité de G en mode mixte.....	107
<b>III.3. Validation expérimentale de la géométrie.....</b>	<b>108</b>
III.3.1. Principe et dispositif expérimental.....	108
III.3.1.1. Principe.....	108
III.3.1.2. Dispositif.....	110
III.3.2. Protocole expérimental.....	111
III.3.2.1. Préparation et montage de l'éprouvette.....	111
III.3.2.2. Analyse d'images.....	112
III.3.3. Pilotage acquisition et traitement des résultats.....	113
III.3.3.1. Pilotage de la presse et de la camera.....	113
III.3.3.2. Corrélation d'images numériques.....	113
<b>III.4. Résultats expérimentaux.....</b>	<b>114</b>
III.4.1. Courbes force-déplacement.....	114
III.4.2. Courbes force-longueur de fissure.....	116
III.4.3. Taux de restitution d'énergie.....	117
III.4.3.1. Résistance à la fissuration.....	117
III.4.3.2. Taux de restitution d'énergie découplé.....	119
<b>III.5. Modélisation numérique de l'essai de propagation viscoélastique.....</b>	<b>125</b>

III.5.1. Préliminaires .....	125
III.5.1.1. Critère de propagation.....	125
III.5.1.2. Amorçage de fissure.....	125
III.5.1.3. Longueur de la zone d'élaboration en mode mixte.....	126
III.5.2. Algorithme de propagation .....	127
III.5.2.1. Détermination du temps critique $t_c$ (dichotomie) .....	127
III.5.2.2. Algorithme de propagation .....	128
III.5.3. Résultats numériques .....	130
III.5.3.1. Taux de restitution d'énergie : densité faible.....	130
III.5.3.2. Taux de restitution d'énergie : densité élevée.....	132
<b>III.6. Conclusion.....</b>	<b>133</b>

---

### III.1. Introduction : objectifs de l'essai

L'objectif principal visé est de chercher à déterminer les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie  $G$  afin de procéder à une propagation viscoélastique numérique et expérimentale réelle intégrant les phases d'amorçages de fissure. Egalement, l'essai expérimental doit mettre en évidence les plages de stabilité garantissant une fissuration stable en fluage. Pour cela, deux étapes restent fondamentales.

Dans un premier temps, il convient de proposer une nouvelle géométrie pouvant nous garantir une décroissance de  $G$  afin de s'assurer que, lors des essais en fluage, seuls les effets temporels vont engendrer l'avancée de la fissure tout en limitant la quantité de matière utilisée augmentant les risques d'hétérogénéité.

Dans un second temps, des essais de fissuration instantanée seront menés en faisant varier le taux de mixité. Les forces de sollicitation seront exercées par une presse munie d'un système d'acquisition classique (capteur de déplacement et de force). Consécutivement, des images seront relevées par une caméra CCD, en s'assurant d'une synchronisation de l'ensemble. Une première méthode de découplage du taux de restitution d'énergie expérimental et numérique sera proposée.

Enfin, les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie  $G$  dans chaque mode seront considérés afin d'effectuer, dans une première phase, une propagation viscoélastique intégrant les phases d'amorçage et de propagation de fissure en y intégrant un critère de propagation prenant en compte des cinétiques de mode mixte. Ces différentes étapes seront pilotées simultanément par la prise en compte d'un temps critique  $t_c$  et l'introduction de la taille de la zone endommagée en pointe de fissure  $\alpha$ .

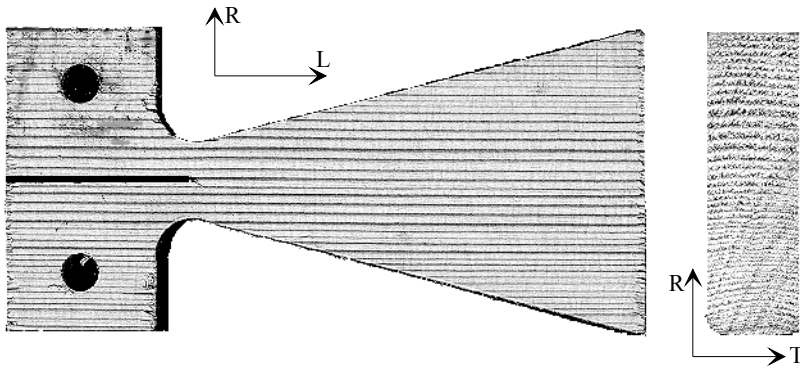
### III.2. Conception de l'éprouvette de propagation stable en mode mixte

#### III.2.1. Eprouvtes existantes

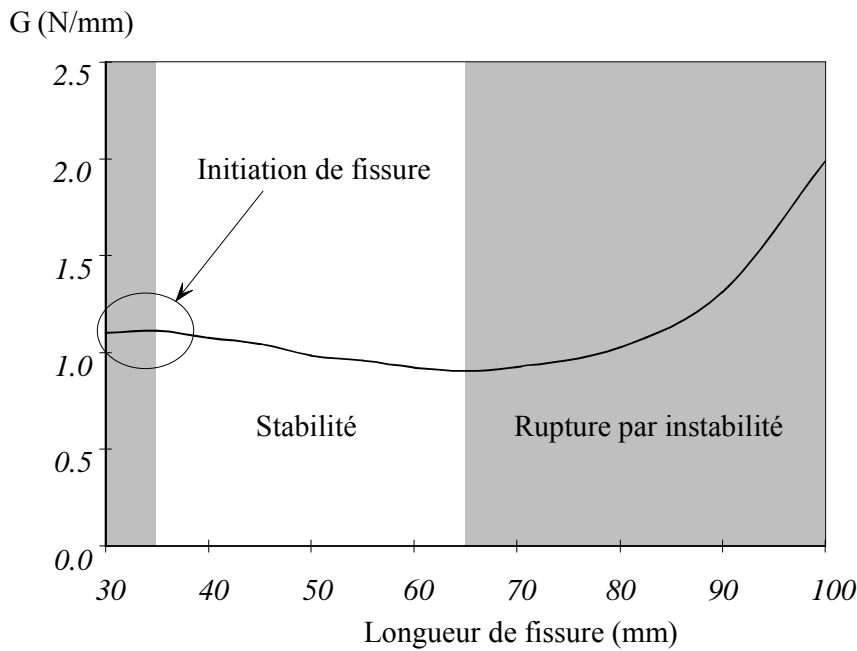
##### III.2.1.1. Eprouvte DCB à inertie variable

L'éprouvette DCB (Double Cantilever Beam) a initialement été proposée par Chow [CHO 79] afin de déterminer le mode d'ouverture de fissure.





(a) : éprouvette DCB



(b) : Taux de restitution d'énergie

**Figure III.2.1.** Stabilité de l'éprouvette DCB [DUB 97] [DUB 02]

Cependant, cette éprouvette présente une fissuration instable induisant une rupture instantanée dès l'amorçage de fissure, dès lors que l'essai est piloté en force. S'aidant des travaux précités, Dubois [DUB 97] [DUB 02] a proposé l'éprouvette DCB à inertie variable, Figure III.2.1 (a). L'objectif visé était d'observer et d'évaluer simultanément, sur le même support géométrique, les propriétés viscoélastiques réduites et les paramètres de rupture lors d'une propagation de fissure en mode d'ouverture due à un chargement en fluage. De ce fait, la stabilité du taux de restitution d'énergie  $G$  est justifiée par l'observation d'une plage de diminution de celui-ci en fonction de la longueur de fissure.

Dans une configuration en contrainte plane, Dubois [DUB 02] a montré que lors de la progression du front de fissure, l'évolution élastique de  $G$  pouvait être décrite par trois zones [ALM 84] distinctes Figure III.2.1 (b):

- Zone 1 : instabilité initiale ; correspondant à l'initiation de la propagation de la fissure. Une légère augmentation du taux de restitution d'énergie élastique est observée. Cette partie permet de déterminer la valeur critique de  $G$ .
- Zone 2 : stabilité de la fissure ; une diminution du taux de restitution d'énergie élastique est notée. Cette phase correspond à la stabilité de  $G$  durant le processus de propagation. Dans ce cas, on note l'inéquation suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial a} < 0 \quad \text{(III.2.1)}$$

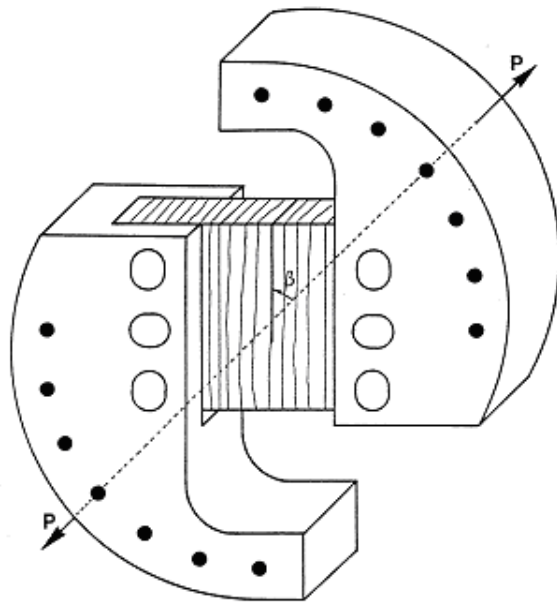
Pendant cette phase, seuls les effets viscoélastiques vont participer à la progression du front de fissure lorsque l'éprouvette sera sollicitée en fluage. Les caractéristiques viscoélastiques seront ainsi clairement découplées des paramètres de fissuration. Sur la Figure III.2.1 (b), la plage de stabilité est située entre les longueurs de fissure  $a = 35 \text{ mm}$  et  $a = 65 \text{ mm}$ .

- Zone 3 : instabilité de la propagation de fissure ; on assiste à une augmentation importante de  $G$  conduisant à la ruine du matériau.

Par la suite, Valentin [VAL 82] l'a étendue à l'évaluation du mode mixte. Toutefois, pour des raisons géométriques, ce type d'éprouvette n'est pas adapté pour l'étude du mode de cisaillement

### III.2.1.2. Eprouvette CTS

L'éprouvette CTS (Compact Tension Shear) a initialement été développée par Richard [RIC 81] [RIC 83] dans le but d'obtenir une configuration polymodale dans les matériaux isotropes. Luo [LUO 03] l'a utilisée pour déterminer l'évolution du front de fissure en mode mixte dans les polymères (polyméthyl méthacrylate). Récemment, Ma [MA 06] et Zhang [ZHA 06] ont utilisé cette géométrie pour l'évaluation du mode mixte, respectivement dans les matériaux métalliques et ductiles. Caumes [CAU 87] et Valentin [VAL 89] ont adapté cette géométrie aux matériaux à symétrie orthogonale comme le bois, afin de générer une sollicitation en mode d'ouverture de fissure, en mode de cisaillement, ou une combinaison des deux (mode mixte), Figure III.2.2. L'éprouvette est contrainte par deux bras en acier munis des trous de sollicitation où s'appliquent des forces symétriques opposées  $P$ . La fissure est orientée dans le plan (R, L) et le taux de mixité est engendré par l'angle  $\beta$ .



**Figure III.2.2.** Epreuve CTS [VAL 89] [CAU 87]

### III.2.2. Epreuve à propagation stabilisée en mode mixte

En s'inspirant des géométries précédentes, l'objectif de ce paragraphe est de proposer une nouvelle éprouvette appelée Mixed Mode Crack Growth (2MCG) garantissant la stabilité de la fissure, donc une diminution de  ${}^1G$  et  ${}^2G$  pour une plage de propagation donnée, dans une configuration de mode mixte [MOU 08<sub>c</sub>] [MOU 08<sub>d</sub>] [MOU 08<sub>h</sub>].

#### III.2.2.1. Concept de l'éprouvette 2MGC

Afin de fixer les bras, cette fois-ci en PVC, un talon inférieur a été ajouté à l'éprouvette DCB initiale, Figure III.2.3. En effectuant un calcul éléments finis en mode simple d'ouverture de fissure, les contraintes en traction perpendiculaire aux fibres (ou à l'axe d'orientation de la fissure) ont été représentées à la Figure III.2.4. L'optimisation consiste, d'une part, à définir l'inertie variable du corps de l'éprouvette et à renforcer son raccordement avec les talons afin de concentrer les contraintes de rupture, tant en mode I qu'en mode II, en pointe de fissure. La conception géométrique est donc réalisée par éléments finis. Dans le processus élément finis, l'hypothèse des contraintes planes a été retenue, avec une force unitaire de  $1\text{ N}$ . Les constantes élastiques du pin du nord suivantes ont été utilisées :  $E_L = 15000\text{ MPa}$  ;  $E_R = 600\text{ MPa}$  ;  $G_{LR} = 700\text{ MPa}$ . On remarque nettement que la concentration des contraintes varie entre  $0,44\text{ MPa}$  et  $0,55\text{ MPa}$ .

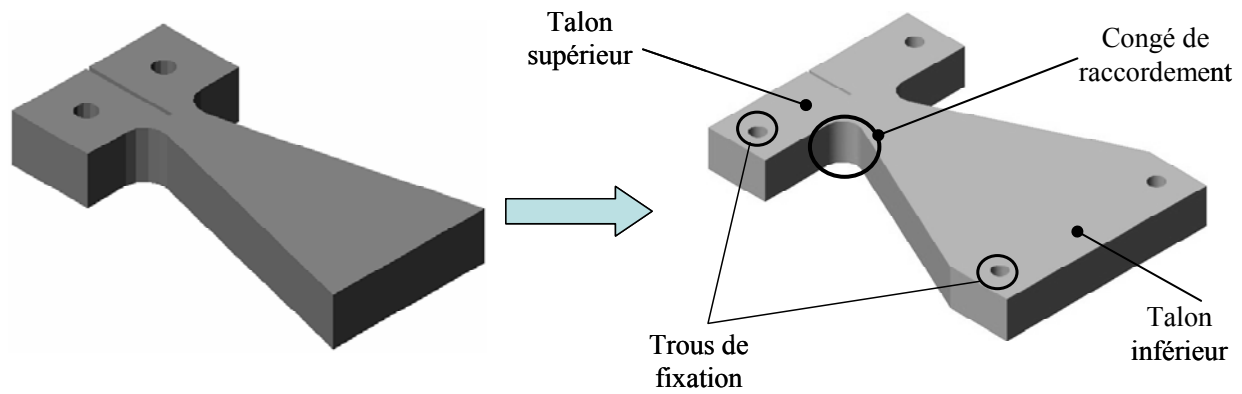


Figure III.2.3. Epreuve 2MCG [MOU 08<sub>h</sub>].

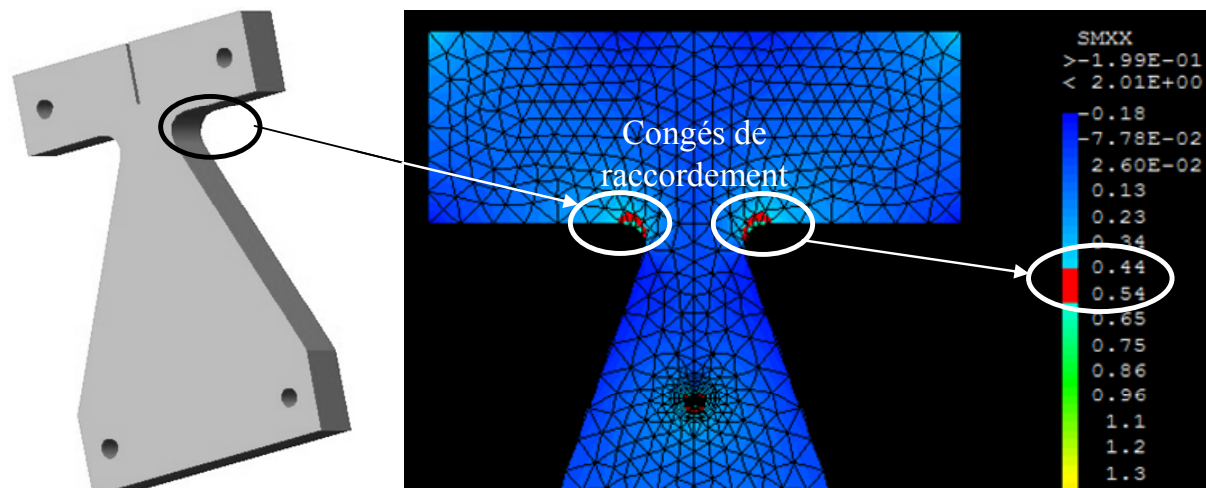
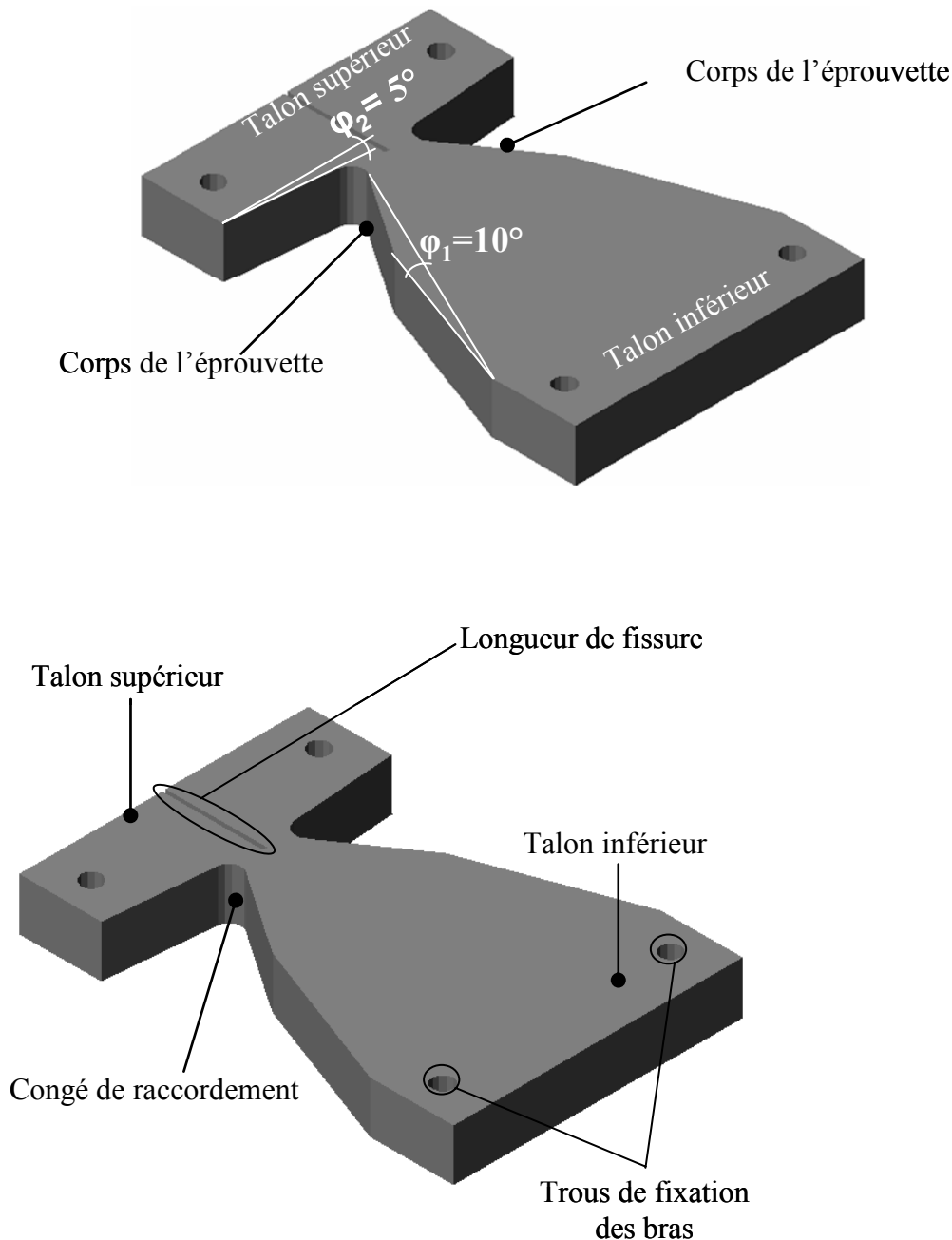


Figure III.2.4. Concentration des contraintes perpendiculaires en mode I [MOU 08<sub>h</sub>].

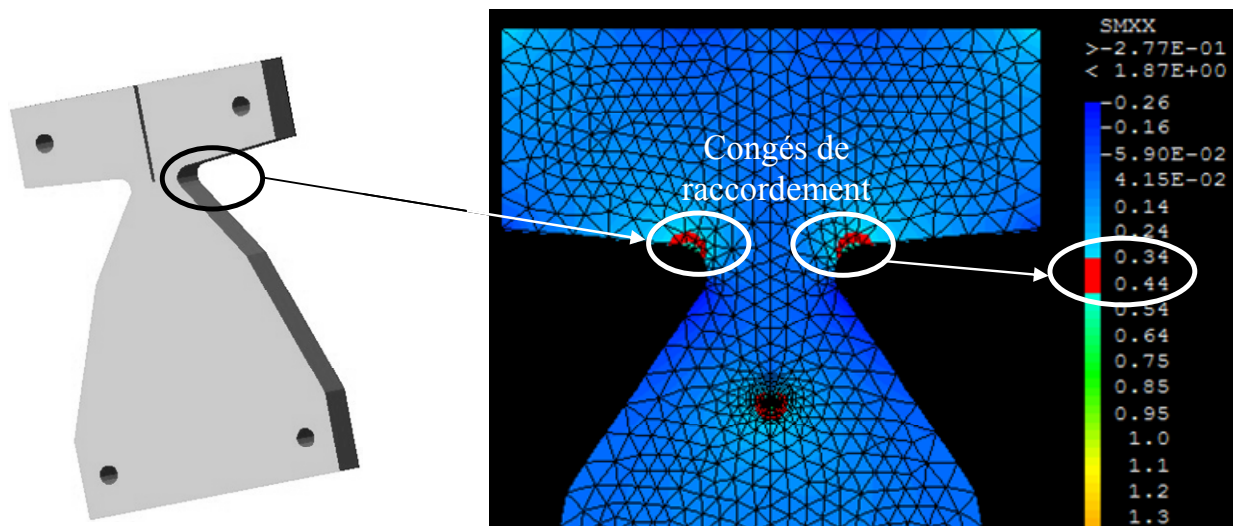
### III.2.2.2. Optimisation

Dans un premier temps, pour augmenter la stabilité du taux de restitution d'énergie instantané pendant la propagation de la fissure, le corps de l'éprouvette a subi une inclinaison d'un angle  $\varphi_2 = 10^\circ$  par rapport à la configuration initiale. Cette inertie à deux pentes permet de limiter la surface de l'éprouvette diminuant les risques d'hétérogénéité et facilitant son usinage.



**Figure III.2.5.** Optimisation géométrique [MOU 08<sub>h</sub>]

Une première campagne expérimentale a mis en évidence des ruptures prématurées au niveau des deux talons supérieurs. Dans le but d'accroître la résistance au voisinage des congés de raccordement, l'éprouvette 2MCG a été modifiée conformément aux images de la Figure III.2.5. Ainsi, le talon supérieur a subi une modification d'angle  $\varphi_1 = 5^\circ$  par rapport à la géométrie initiale. Identiquement au paragraphe précédent, un calcul éléments finis visualisant les contraintes en traction perpendiculaires aux fibres en mode I est effectué, Figure III.2.6. On y observe une baisse appréciable de la concentration des contraintes au niveau des congés de raccordement d'environ  $0,10 \text{ MPa}$ .

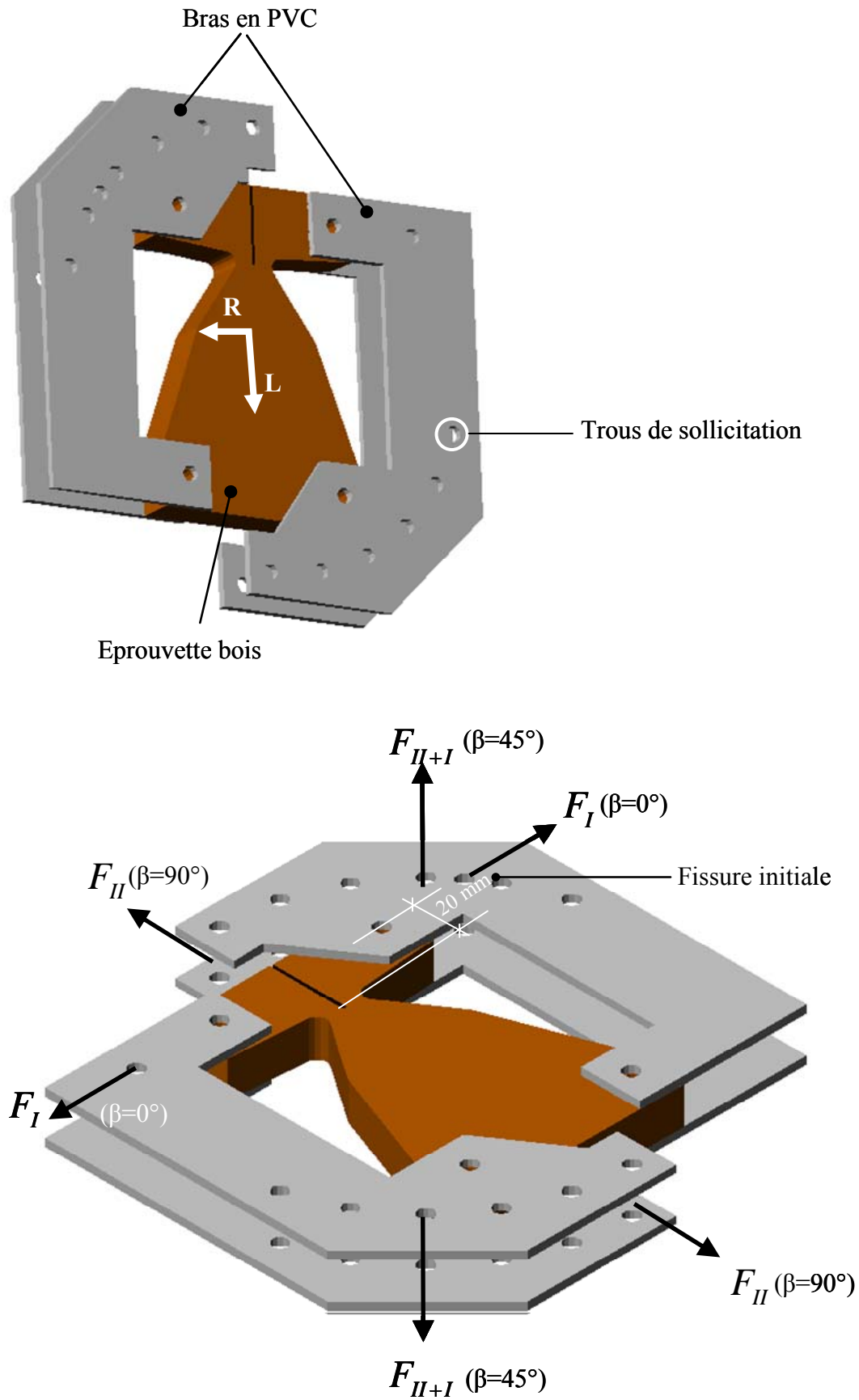


**Figure III.2.6.** Concentration des contraintes perpendiculaires modifiées en mode I [MOU 08<sub>h</sub>].

### III.2.2.3. Epreuve définitive

La forme finale de l'éprouvette 2MCG est présentée en Figure III.2.7. Des bras en PVC, empruntés à l'éprouvette CTS, complètent le dispositif expérimental. Ils permettent d'imposer une configuration de chargement pour différents modes mixtes.

Le chargement se fait au niveau des trous, lieux des points d'application des efforts reproduisant les différents taux de mixité. Par exemple, l'application des forces symétriques  $F_I$  avec un angle  $\beta = 0^\circ$  correspond au mode d'ouverture de fissure. Une application  $F_{II}$  avec  $\beta = 90^\circ$  reproduit le mode de cisaillement. Enfin, les différents taux de mixité ( $\beta = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ$ ) sont obtenus en appliquant les sollicitations  $F_{I+II}$ .



**Figure III.2.7.** Eprouvette 2MCG (Mixed mode Crack Growth) définitive [MOU 08<sub>d</sub>] [MOU 08<sub>h</sub>].

### III.2.3. Résultats numériques

#### III.2.3.1. Maillage rayonnant

Afin de représenter numériquement les différentes variations des taux de restitution d'énergie élastique  ${}^1G$  et  ${}^2G$  en fonction de la longueur de fissure, l'éprouvette 2MCG a été modélisée suivant l'hypothèse des contraintes planes, et en appliquant une force unitaire, Figures III.2.8 et III.2.9.

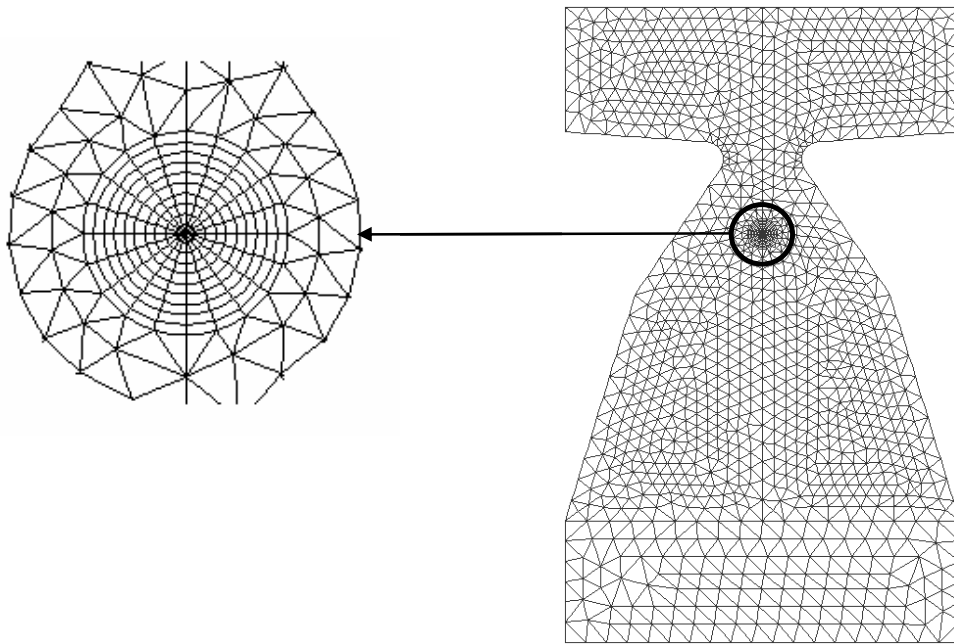
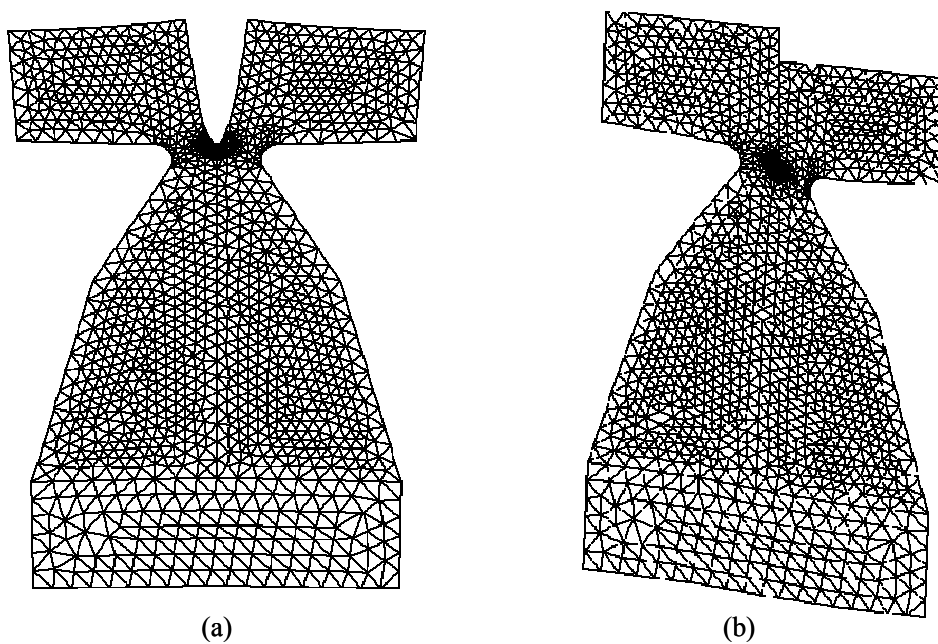


Figure III.2.8. Maillage rayonnant autour de la pointe [MOU 08<sub>h</sub>].

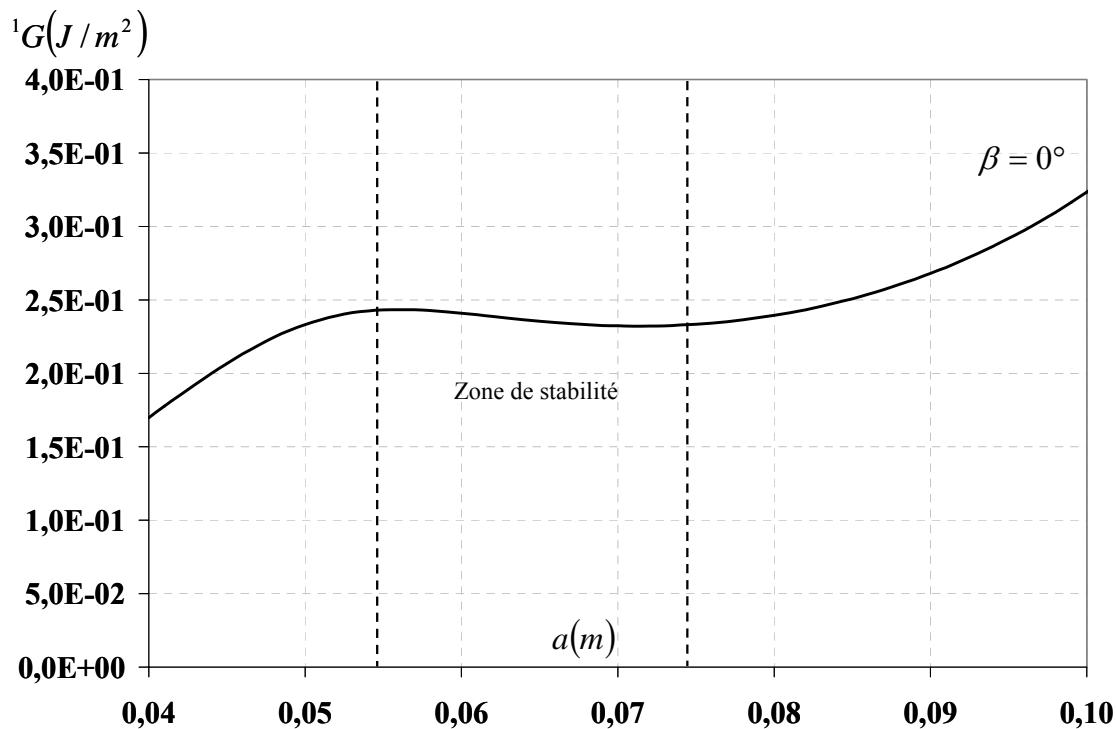




**Figure III.2.9.** Maillage déformé virtuel. (a) : mode I ; (b) : mode II

Afin de simplifier la représentation géométrique au voisinage de la pointe de fissure, dans la zone d'élaboration [VAS 02] [VAS 05], un maillage circulaire a été utilisé, Figure III.2.8 [MOU 07<sub>b</sub>] [MOU 08<sub>h</sub>]. Ce maillage nous permet de définir le champ  $\vec{\theta}$  et de spécifier le domaine d'intégration introduit par ce dernier, voir le paragraphe II.2.3 du Chapitre II. Dans ces conditions, on notera que  ${}^1G$  et  ${}^2G$  sont calculés à partir des équations (II.2.18) et (II.2.19).

### III.2.3.2. Stabilité de $G$ en mode I et en mode II

**Figure III.2.10.** Stabilité de  ${}^1G$  en mode I pure [MOU 08<sub>h</sub>].

Les Figures III.2.10 et III.2.11 montrent les évolutions des taux de restitution d'énergie élastique  ${}^1G$  et  ${}^2G$ , donnés par les équations (II.2.18) et (II.2.19), en fonction de la longueur de fissure, respectivement en mode I ( $\beta = 0^\circ$ ) et en mode II ( $\beta = 90^\circ$ ). La longueur de fissure  $a = 40$  mm inclue la longueur de fissure initiale. On remarque que dans le cas du mode I, la zone de stabilité est située entre les longueurs de fissure  $a = 55$  mm et  $a = 75$  mm. En mode II, la plage de stabilité est située entre  $a = 85$  mm et  $a = 115$  mm.

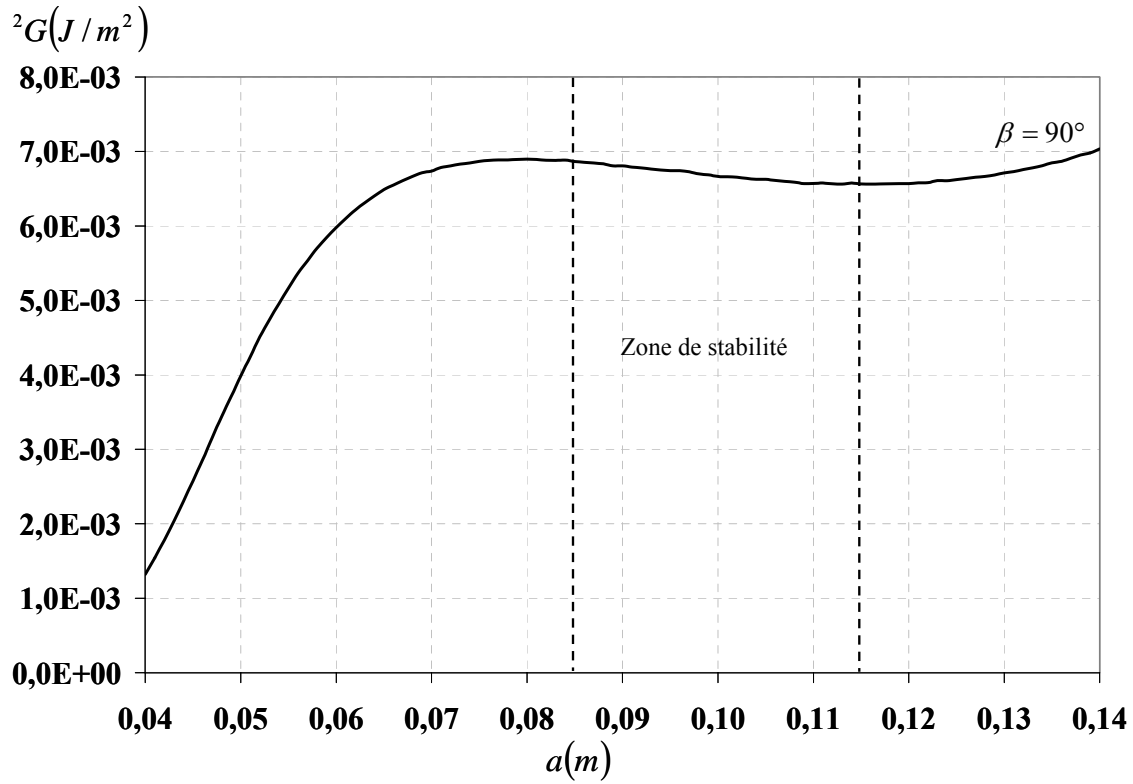


Figure III.2.11. Stabilité de  ${}^2G$  en mode II pure [MOU 08<sub>h</sub>].

III.2.3.3. Stabilité de  $G$  en mode mixte

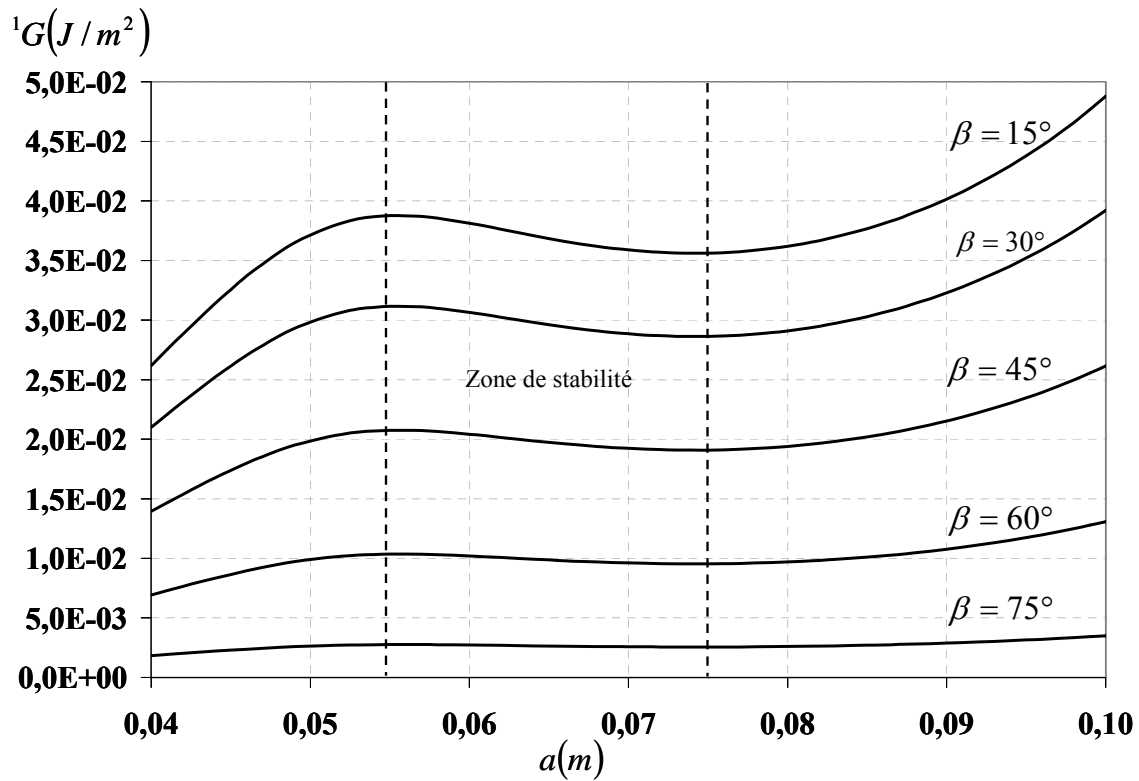
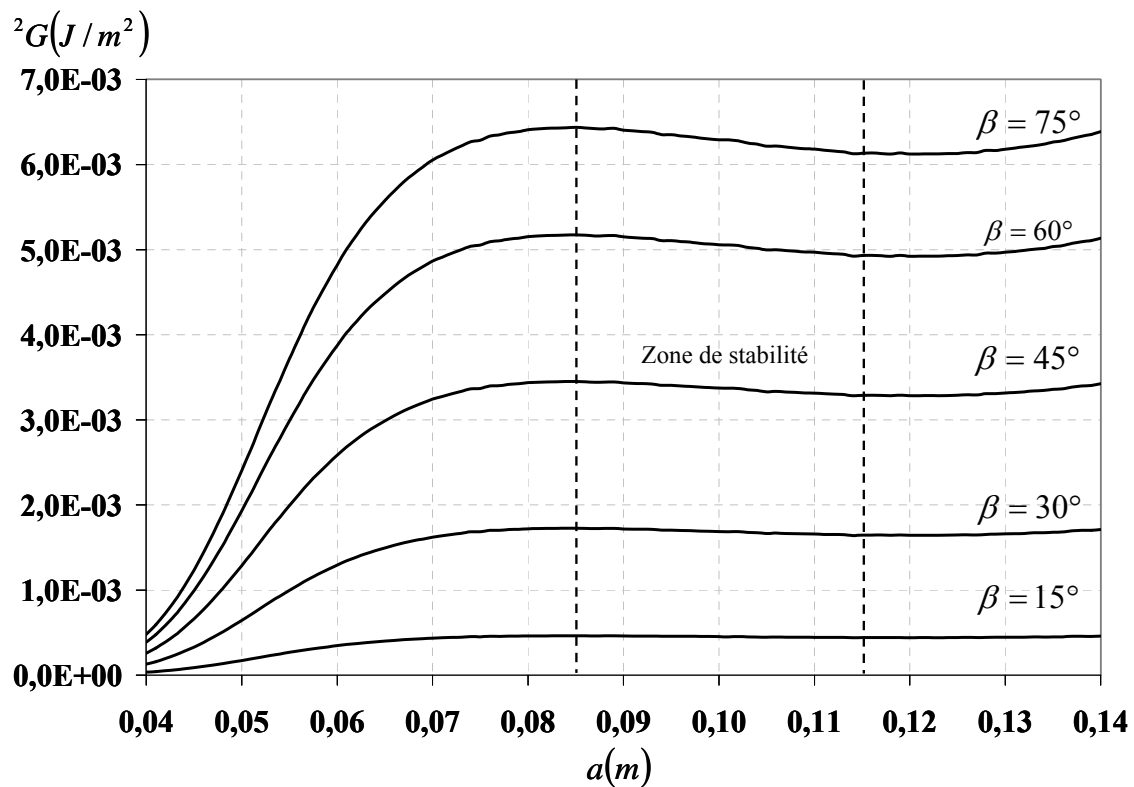


Figure III.2.12. Stabilité de  ${}^1G$  en mode mixte (part du mode I) [MOU 08<sub>h</sub>] [MOU 08<sub>j</sub>].



**Figure III.2.13.** Stabilité de  ${}^2G$  en mode mixte (part du mode II) [MOU 08<sub>h</sub>] [MOU 08<sub>j</sub>].

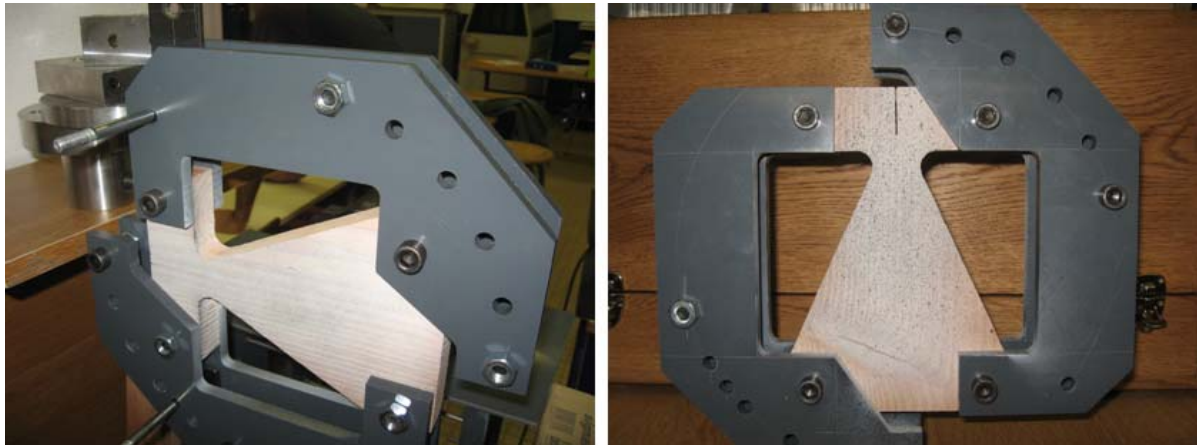
Les Figures III.2.12 et III.2.13 présentent aussi, les différentes évolutions du taux de restitution élastique  ${}^1G$  et  ${}^2G$  en fonction de la longueur de fissure, mais pour différents taux de mixité  $\beta$  ( $\beta = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ$ ), respectivement en de I et en mode II. La capacité du modèle à séparer les modes de rupture est clairement prouvée par l'observation des valeurs différentes de  ${}^1G$  et  ${}^2G$  en fonction du taux de mixité. Parallèlement, la stabilité de  ${}^1G$  et  ${}^2G$  est justifiée par l'observation d'une plage de décroissance appréciable selon que l'on considère la part du mode I ou celle du mode II dans le processus mixte de propagation de fissure.

### III.3. Validation expérimentale de la géométrie

#### III.3.1. Principe et dispositif expérimental

##### III.3.1.1. Principe

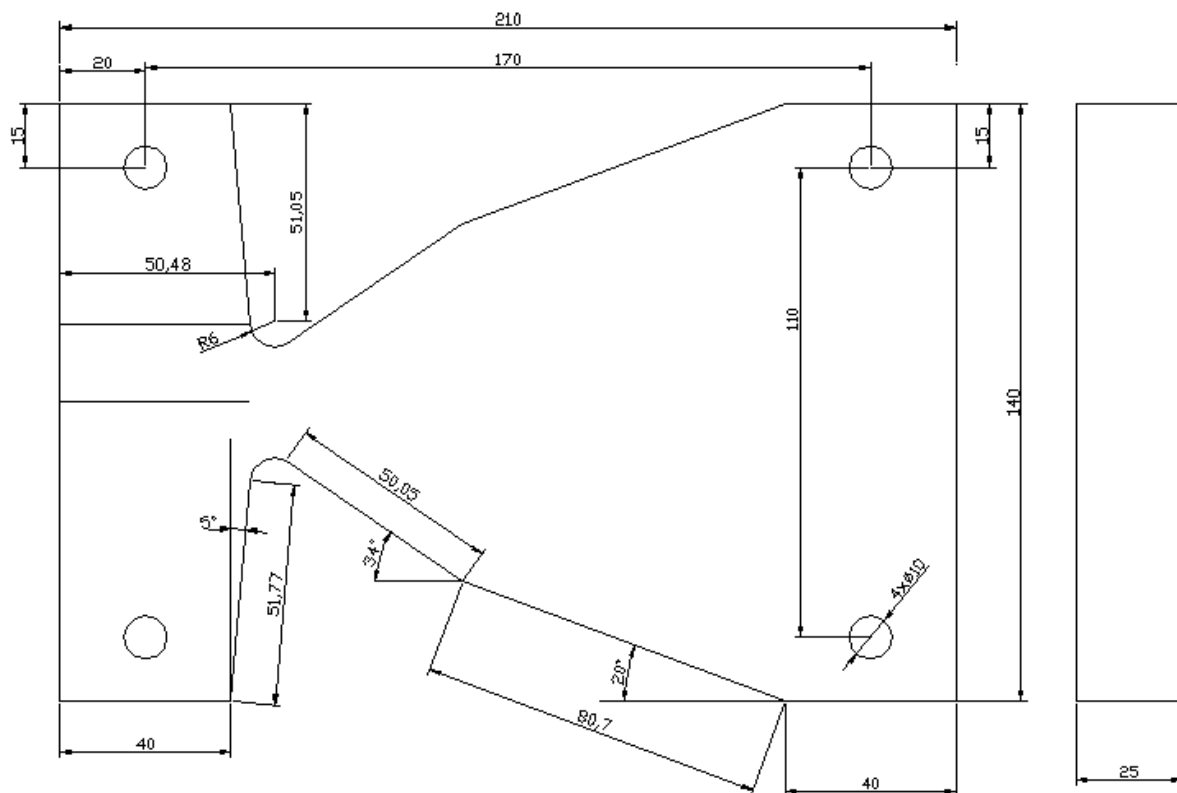
Les bras en PVC (Figure III.3.1) solidaires de l'éprouvette en bois (Figure III.3.3) sont soigneusement montés sur la presse par un système d'axes métalliques. Les dimensions réelles de l'éprouvette bois, d'épaisseur 25 mm sont présentées à la Figure III.3.2. Les efforts sont exercés via une presse électromécanique pilotée en déplacement.



**Figure III.3.1.** Bras en PVC

Le mode mixte voulu est choisi en positionnant simplement les bras en PVC selon l'angle formé avec les axes de sollicitation. Le système de sollicitation est unique, il doit par conséquent être soigneusement démonté et remonté après chaque essai.

Les éprouvettes proviennent de bois conservé à l'extérieur, donc soumises pendant longtemps aux variations climatiques. Mais les éprouvettes usinées sont conservées dans une ambiance constante (salle de laboratoire).



**Figure III.3.2.** Dimensions de l'éprouvette 2MCG.



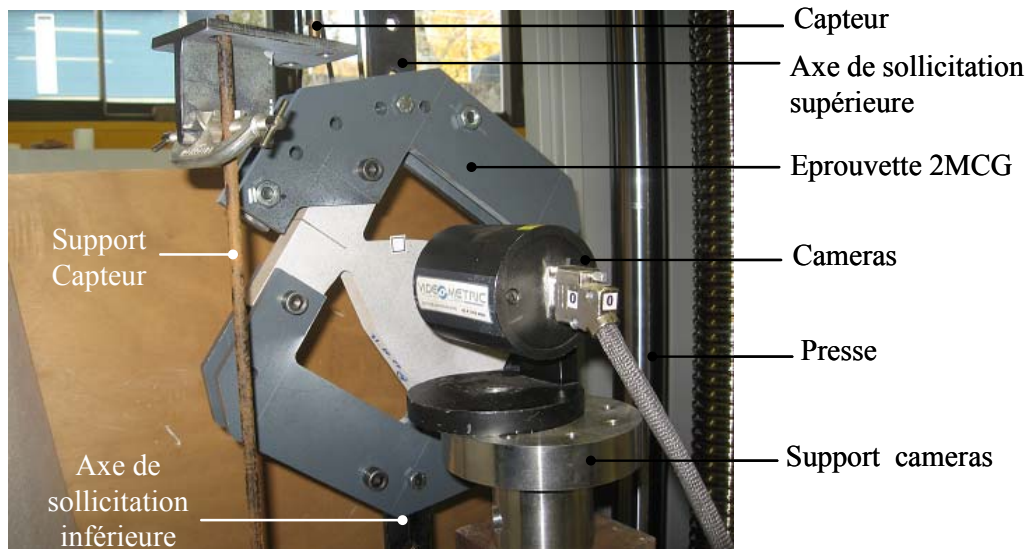
**Figure III.3.3.** Epreuve bois réelle (Hêtre).

*III.3.1.2. Dispositif*

Les Figures III.3.4 et III.3.5 présentent respectivement les dispositifs expérimentaux en mode I ( $\beta = 0^\circ$ ) et en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ).



**Figure III.3.4.** Dispositif expérimental en mode I



**Figure III.3.5.** Dispositif expérimental en mode mixte 45°

L'éprouvette 2MCG est fixée au vérin de la presse par l'intermédiaire de deux axes métalliques de sollicitation supérieure et inférieure munies de trois niveaux de trous servant de lieu de fixation de l'éprouvette. Ces axes de sollicitation sont fixés à une partie fixe et mobile de la presse [MOU 08<sub>e</sub>]. L'essence utilisée pour l'essai est le Hêtre, dont les caractéristiques mécaniques sont relativement homogènes. Pour des raisons d'approvisionnement en matériaux, le Douglass, moins homogène, a été également utilisé.

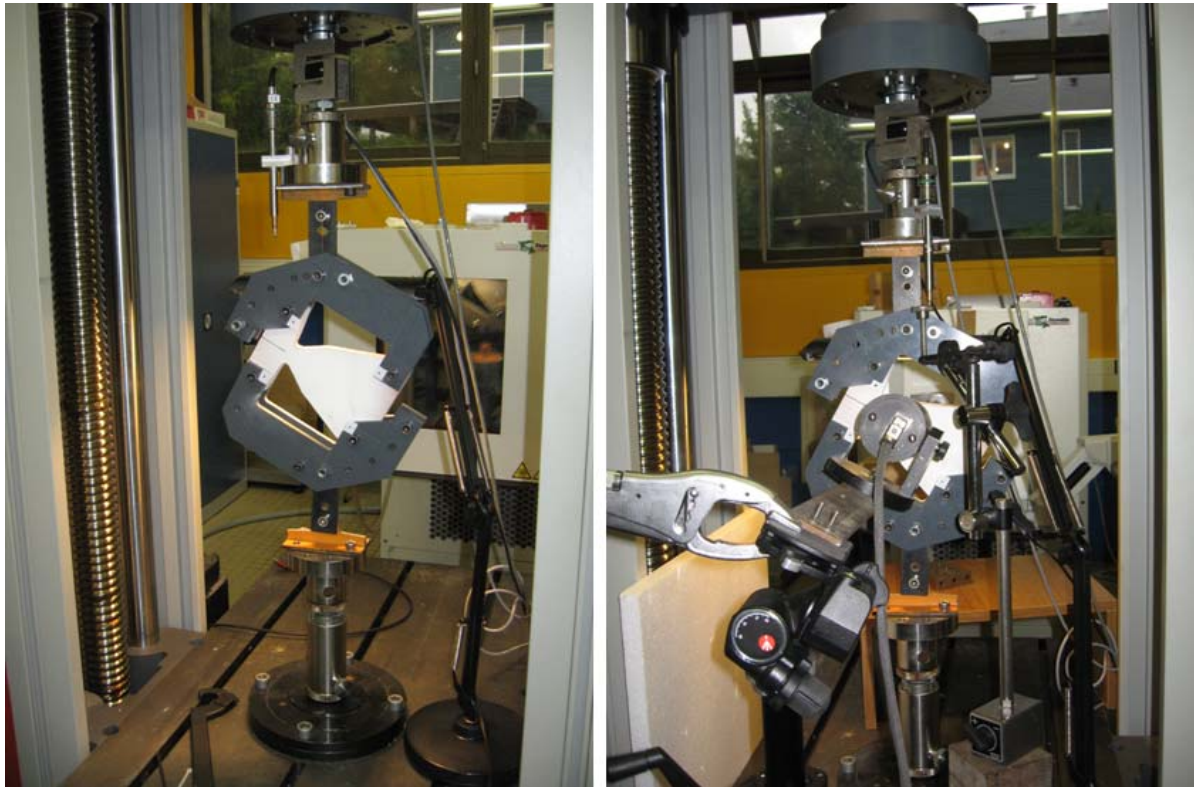
L'entaille initiale, orientée selon l'axe des fibres, est de 20 mm comme spécifiée sur les images de la Figure III.2.7. Un capteur LVDT, relevant le déplacement des point d'application des efforts est placé sur un support fixe de hauteur suffisante pour assurer sa course. Une caméra CCD [MOU 04] placée dans l'axe de la fissure relève les images propres à chaque instant de l'essai. Afin de synchroniser avec certitude les images prélevées par la camera et les forces données par la presse, une camera CCD supplémentaire est placées devant l'écran du système d'acquisition de la presse, le tout étant synchronisé par la carte d'acquisition vidéo.

### III.3.2. Protocole expérimental

#### III.3.2.1. Préparation et montage de l'éprouvette

Deux techniques ont été utilisées pour préparer la surface de l'éprouvette 2MCG. Premièrement, un fond blanc avec nuance de gris a été appliqué sur l'éprouvette comme présenté par les Figures III.3.4 et III.3.5. Malheureusement, lors du dépouillement des images, la perception de l'avancée du front de fissure s'avérait très fastidieuse. Pour remédier à ce défaut de surfacage, un fond blanc, Figure III.3.6, a donc été appliqué sur l'éprouvette, la perception de la pointe de fissure lors de

l'analyse d'image a par conséquent été améliorée. Une entaille initiale finie au cutter est effectuée sur chaque éprouvette soumise à l'essai.

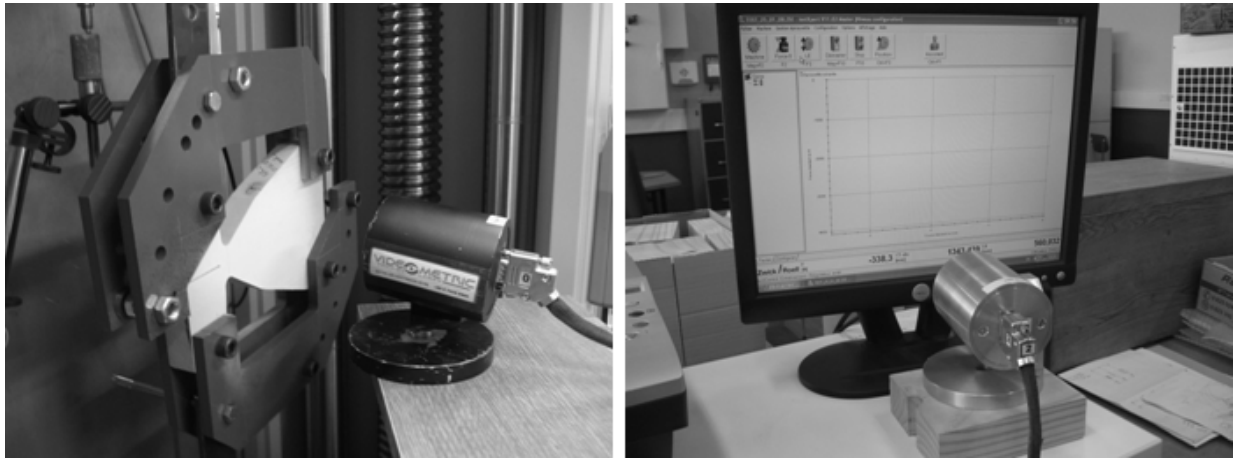


**Figure III.3.6.** Montage de l'ensemble du dispositif sur presse.

Le système de fixation correspondant aux bras en PVC est monté sur l'éprouvette par un ensemble de vis et d'écrous. Deux plaques minces en aciers munies d'un ensemble de trous relient le système de fixation aux bâtis fixe et mobile de la presse. Toutefois, on s'assure de pré charger l'éprouvette afin d'assurer l'alignement du dispositif. Une plaque de protection en carton est disposée derrière l'éprouvette afin de ne pas perturber l'acquisition vidéo. L'ambiance de la salle et l'éclairage ont été soigneusement contrôlés.

### *III.3.2.2. Analyse d'images*

Les images sont récupérées durant l'essai par une camera CCD, Figure III.3.7, de distance de résolution 10 cm. Elle est placée de telle sorte que la pointe de fissure et une partie de l'éprouvette, sensée englobée la plage de propagation stabilisée, soient visibles. Sur l'éprouvette bois, un petit rectangle est placé sur chaque éprouvette afin d'évaluer le grandissement comme spécifié aux Figures III.3.4 et III.3.5. Une autre caméra, de résolution identique, est située devant l'écran d'acquisition des efforts donnés par la presse, Figure III.3.7.



**Figure III.3.7.** Camera CCD

### III.3.3. Pilotage acquisition et traitement des résultats

#### III.3.3.1. Pilotage de la presse et de la camera

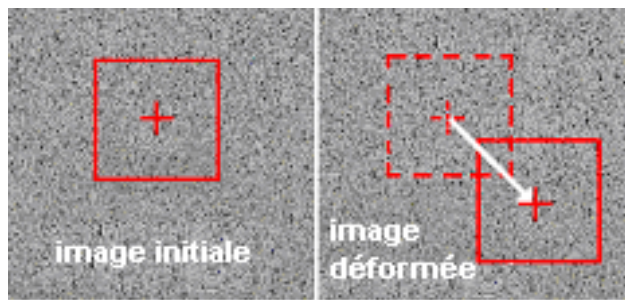
La presse, Figure III.3.6, munie d'un système d'acquisition proposé à la Figure III.3.7, est pilotée en déplacements imposés. La presse est composée d'un bâti inférieur fixe et d'une partie supérieure mobile qui permet de solliciter l'éprouvette en traction. La vitesse d'acquisition est fixée à  $0,1 \text{ mm} / \text{s}$  avec  $5 \text{ acquisitions} / \text{s}$ .

La fréquence d'acquisition des deux cameras est de  $5 \text{ images} / \text{s}$ . Le déclenchement des deux acquisitions doit être synchronisé afin d'obtenir une quasi correspondance entre les temps d'acquisition sur presse et sur camera. Cet exercice efficace et nécessaire, nous permet d'identifier, lors du dépouillement, la force qui aura initié une avancée nette du front de fissure.

#### III.3.3.2. Corrélation d'images numériques

Le traitement et l'analyse des images par corrélation sont réalisés à l'aide du logiciel «CORRELA» développé par l'équipe Photomécanique et Rhéologie du LMS de Poitiers. Dans la littérature, des auteurs comme Samarasungha [SAM 97] ont utilisé des méthodes similaires pour étudier la propagation de fissure en mode mixte sur des éprouvettes TS (Tension Shear). La méthode de la corrélation d'images, développée depuis les années 80 [SUT 83] [BUR 82], est basée sur la comparaison de deux images à niveau de gris aléatoires enregistrées avant et après déformation, Figure III.3.8. La première image est dite de «référence» et la deuxième «déformée» [BRE 95].





**Figure III.3.8.** Zone d'étude sur une image de référence et une image déformée

La corrélation consiste donc à rechercher le degré de ressemblance entre les deux images. La mesure du déplacement consiste à retrouver « le déplacement » nécessaire pour que le motif de l'image de référence se superpose avec celui de l'image déformée [HIL 03].

### III.4. Résultats expérimentaux

#### III.4.1. Courbes force-déplacement

Les Figures III.4.1 et III.4.2 illustrent respectivement les courbes force-déplacement en mode I ( $\beta = 0^\circ$ ) et en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ). Quatre parties distinctes sont observées sur ce graphique [MOU 08<sub>e</sub>] [MOU 08<sub>f</sub>]:

- Une petite zone visible en début de courbe qui correspond à la mise en place de l'éprouvette chargée.
- Une zone pratiquement linéaire, terminée par la force critique  $F_C$ , due à la partie élastique du chargement avec un front de fissure statique.
- Une troisième partie caractérisée par l'observation d'un ensemble de pics de forces critiques  $F_C$  responsables d'une initiation assez nette de la fissure. Les pics croissants valident la zone de stabilité de la fissuration.
- Enfin, une dernière partie où la rupture du matériau survient suite à l'application d'une force de rupture  $F_R$  (840 N en mode I et 2975 N en mode II) traduisant l'instabilité finale de la fissure.

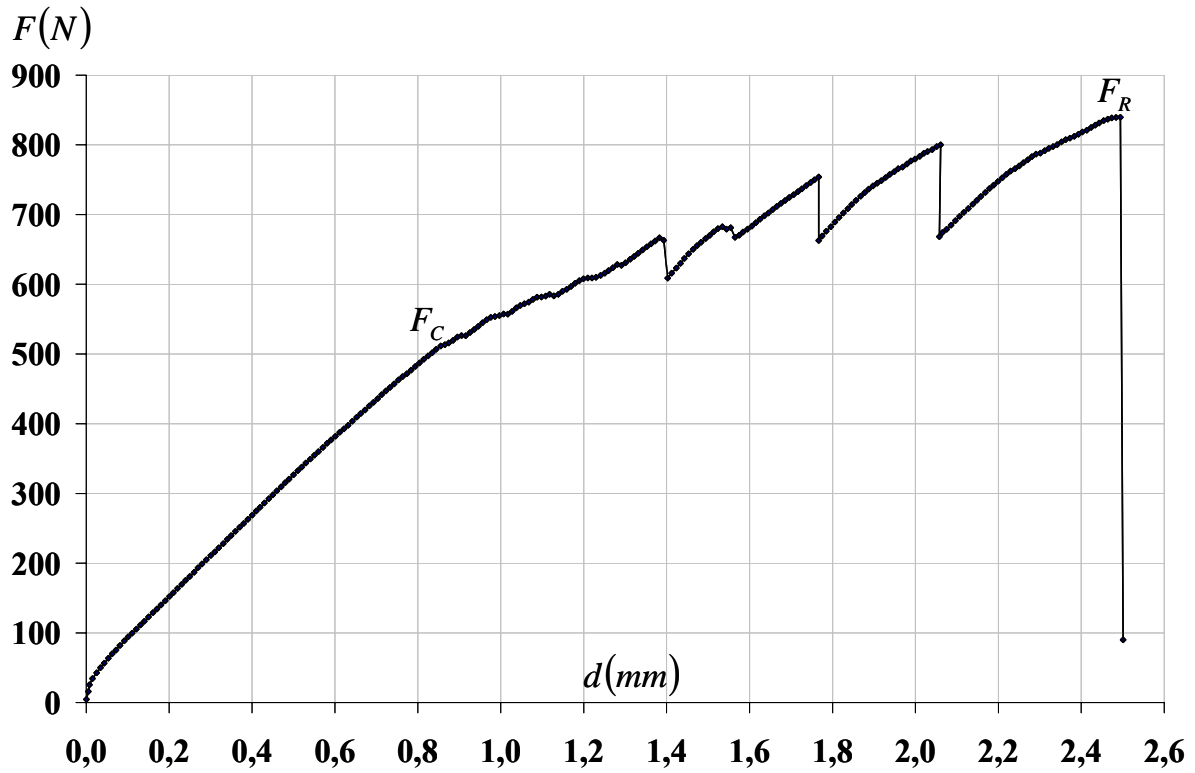


Figure III.4.1. Courbe force-déplacement en mode I  $\beta = 0^\circ$ .

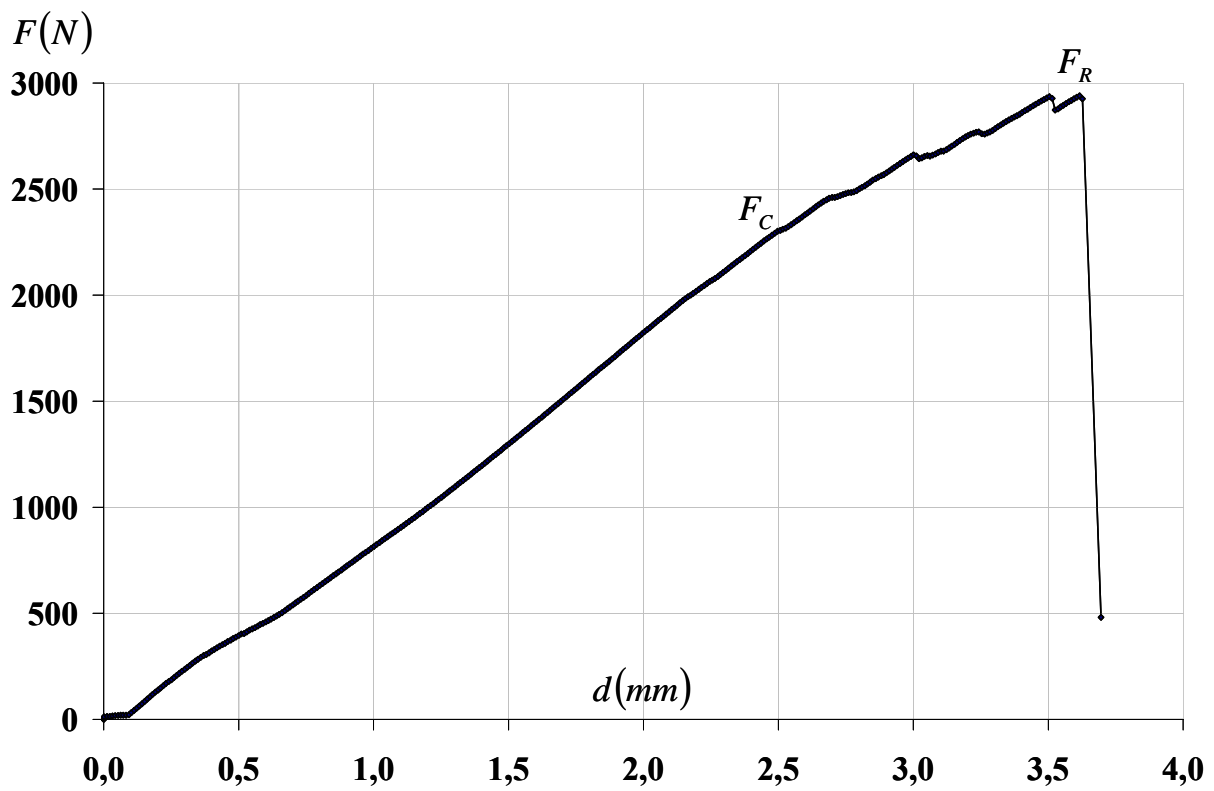


Figure III.4.2. Courbe force-déplacements en mode mixte  $\beta = 45^\circ$ .

### III.4.2. Courbes force-longueur de fissure

Les Figures III.4.3 et III.4.4 traduisent l'évolution instantanée de la force en fonction de la longueur de fissure respectivement en mode I et en mode mixte  $45^\circ$ . La longueur de fissure est détectée par analyse d'images et synchronisée avec les valeurs en forces données par le système d'acquisition de la presse. Ainsi, les points affichés sur ces deux graphiques sont obtenus par synchronisation en identifiant les forces critiques  $F_C$  induisant une avancée du front de fissure correspondant. On observe en outre que la force de rupture  $F_R$  en mode I, est quatre fois inférieure à celle en mode mixte, avec une plage de propagation plus importante (plus de 40 mm en mode I). Ce fait est justifié par la prépondérance des pics observés sur les courbes force-déplacement en mode I par rapport au mode mixte, Figures III.4.1 et III.4.2.

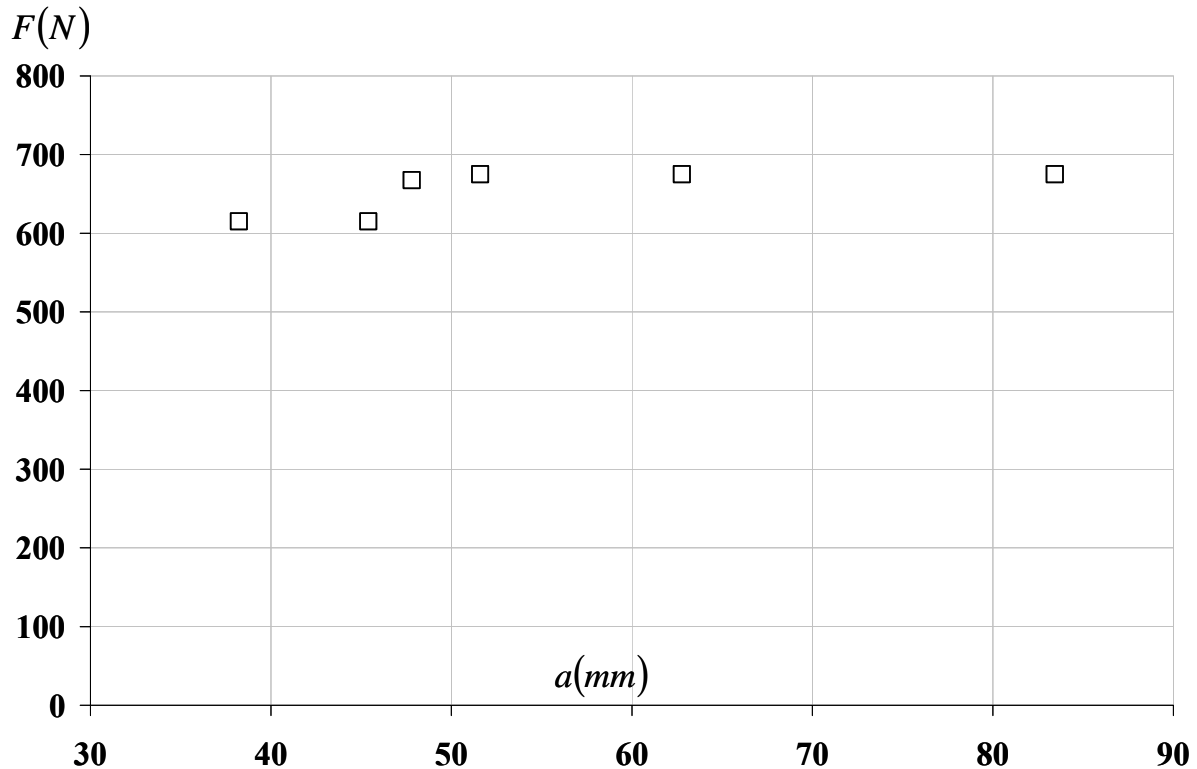


Figure III.4.3. Courbe force-longueur de fissure en mode I  $\beta = 0^\circ$ .

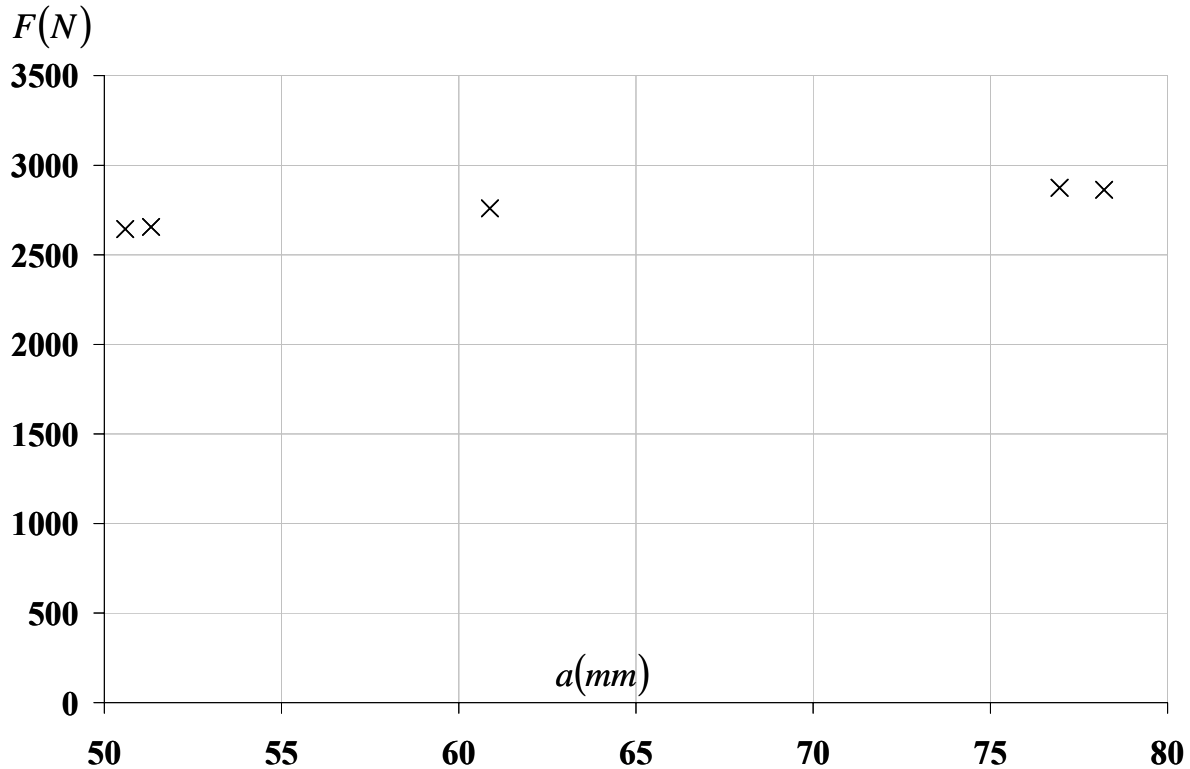


Figure III.4.4. Courbe force-longueur de fissure en mode mixte  $\beta = 45^\circ$ .

### III.4.3. Taux de restitution d'énergie

Dans ce paragraphe, les essais en mode I pure ( $\beta = 0^\circ$ ) et en mode mixte ( $\beta = 45^\circ$ ) ont été effectués avec du Hêtre. Pour les modes mixtes  $\beta = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 60^\circ$ , le Douglas, moins homogène, a été retenu. Les constantes élastiques sont empreintées au manuel de Guitard [GUI 87]. Toutefois, à cause de l'hétérogénéité du matériau, une vérification de ces constantes est effectuée en comparant les valeurs des déplacements numériques et expérimentaux. Ainsi, les constantes élastiques suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} E_L = 14100 \text{ MPa} ; E_R = 2040 \text{ MPa} ; G_{LR} = 1850 \text{ MPa} &\Rightarrow \text{Hêtre} \\ E_L = 15000 \text{ MPa} ; E_R = 1220 \text{ MPa} ; G_{LR} = 1100 \text{ MPa} &\Rightarrow \text{Douglas} \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

Avec un coefficient de Poisson  $\nu_{LR} = 0,4$  pris en compte dans le tenseur de rigidité orthotrope [MOU 08].

#### III.4.3.1. Résistance à la fissuration

Les Figures III.4.5 et III.4.6 représentent les variations comparées des taux de restitution d'énergie critiques expérimentaux et numériques  $G_c$  respectivement en mode I et en mode mixte  $45^\circ$ . En mode mixte, les valeurs expérimentales de  $G_c$  constituent une réponse englobant une

combinaison des modes I et II. Par contre, les valeurs numériques de  $G_c$  sont obtenues en opérant une superposition des deux modes précités. Pour la modélisation numérique, les constantes élastiques du hêtre ont été retenues.

$G_c$  est obtenu par la méthode de la complaisance en déplacement imposé de la manière suivante :

$$G_c = \frac{F_c^2}{2 \cdot b} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial a} \right)_d \quad (\text{III.4.2})$$

Avec  $F_c$  la force critique induisant la longueur de fissure  $a$ ,  $b$  ( $b = 25 \text{ mm}$ ) l'épaisseur de l'éprouvette,  $C$  la complaisance obtenue en déplacement imposé. On observe une concordance entre les données numériques et expérimentales.

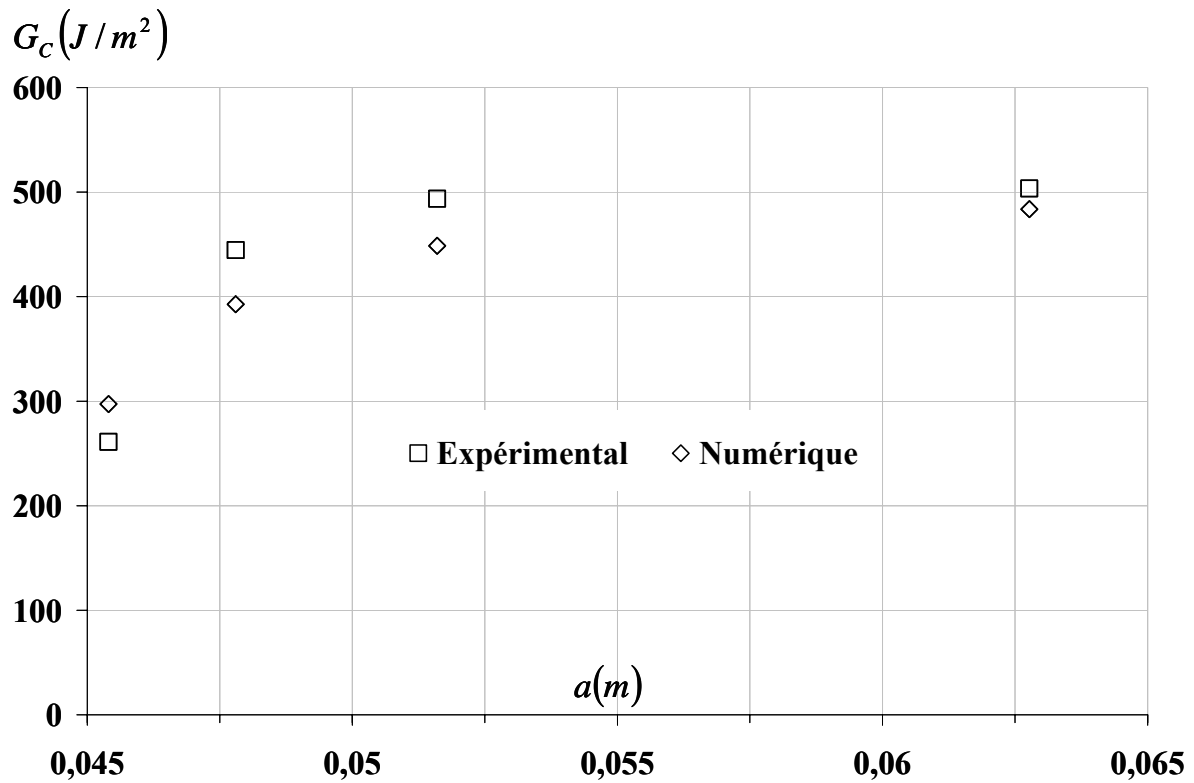


Figure III.4.5. Taux de restitution d'énergie expérimental et numérique en mode I  $\beta = 0^\circ$

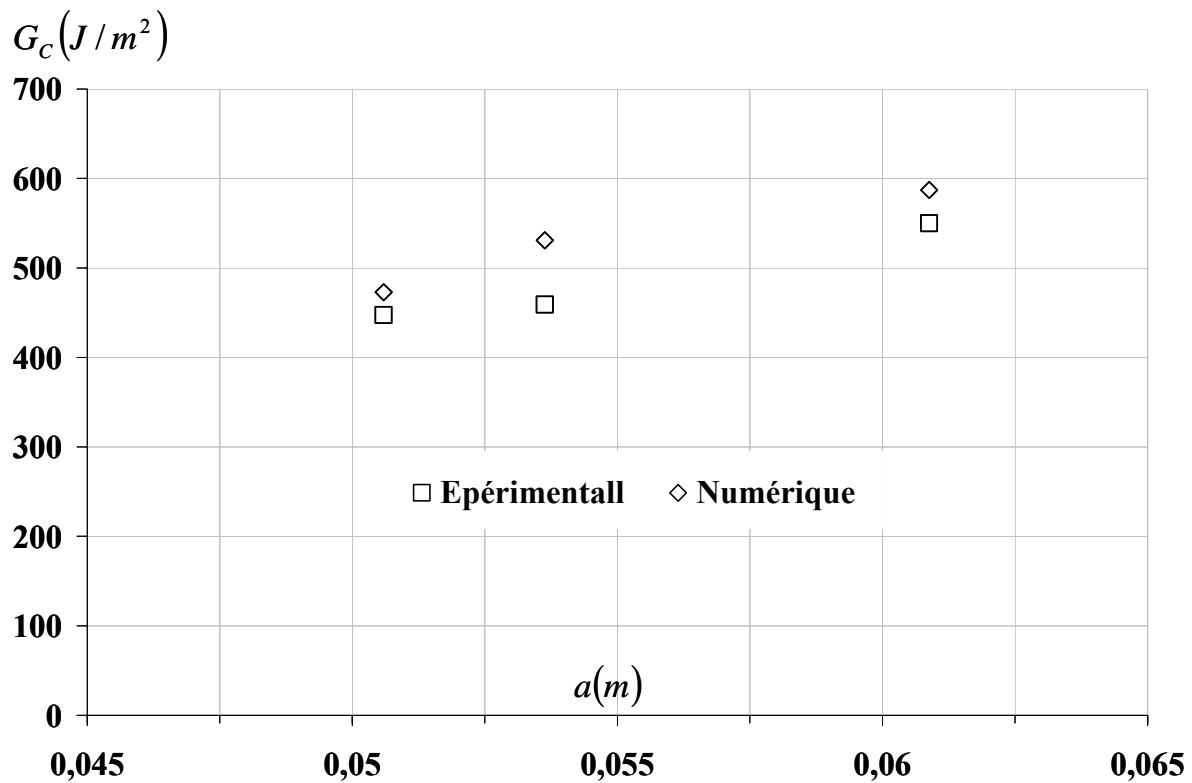


Figure III.4.6. Taux de restitution d'énergie expérimental et numérique en mode mixte  $\beta = 45^\circ$

### III.4.3.2. Taux de restitution d'énergie découplé

#### Courbes force-déplacement

Dans ce paragraphe, le Douglas, moins homogène, a été utilisé pour effectuer les sollicitations dans les modes mixtes cités.

L'absence des pics nets de propagation observée sur les Figures III.4.1 et III.4.2 nous incite à proposer les différentes évolutions du taux de restitution d'énergie (et non du taux de restitution d'énergie critique) en fonction de la longueur de fissure pour les modes mixtes  $\beta = 15^\circ$  (présences de certains pics),  $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 60^\circ$ . A noter que les plus significatifs des trois séries d'essais effectués dans ces trois modes mixtes sont présentés. Un des objectifs visés est de montrer la capacité de l'éprouvette 2MCG à séparer les modes mixtes étudiés.

Grâce à l'acquisition d'un trépied orientable et d'une nouvelle camera, l'inclinaison du matériel optique peut être synchronisée avec celle de l'éprouvette comme l'indique la Figure III.3.6.

Ainsi, les Figures III.4.7, III.4.8, et III.4.9 présentent les courbes force-déplacement obtenues respectivement en mode mixte  $\beta = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 60^\circ$ . Sur les deux dernières courbes, on observe l'absence évidente des pics de force susceptibles d'initier une propagation nette de la

fissure. Toutefois, on note des forces de rupture  $F_R = 1370N$ ,  $F_R = 1700N$  et  $F_R = 1000N$  respectivement pour  $\beta = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 60^\circ$ .

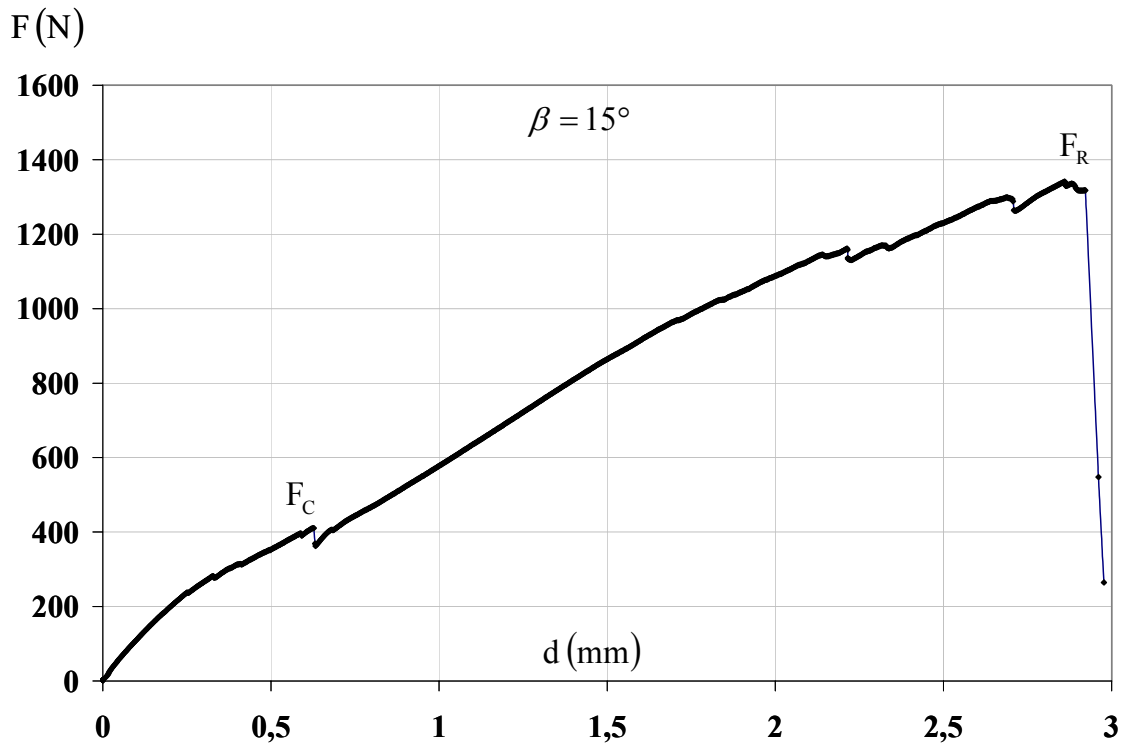


Figure III.4.7. Courbe force-déplacement en mode mixte  $\beta = 15^\circ$

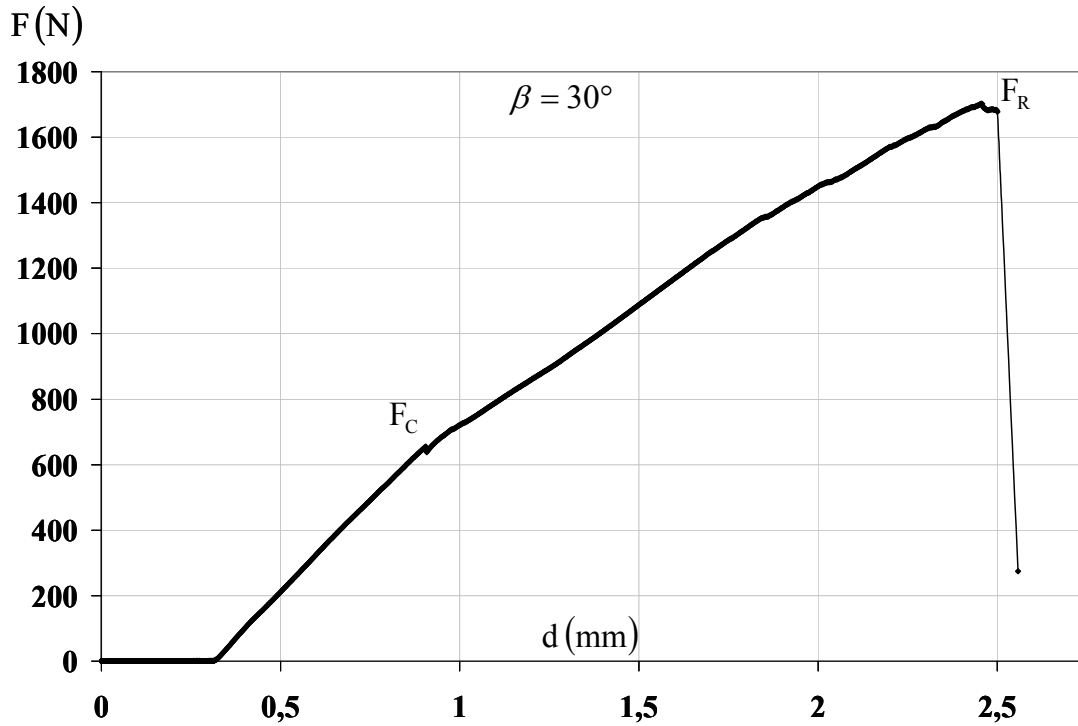
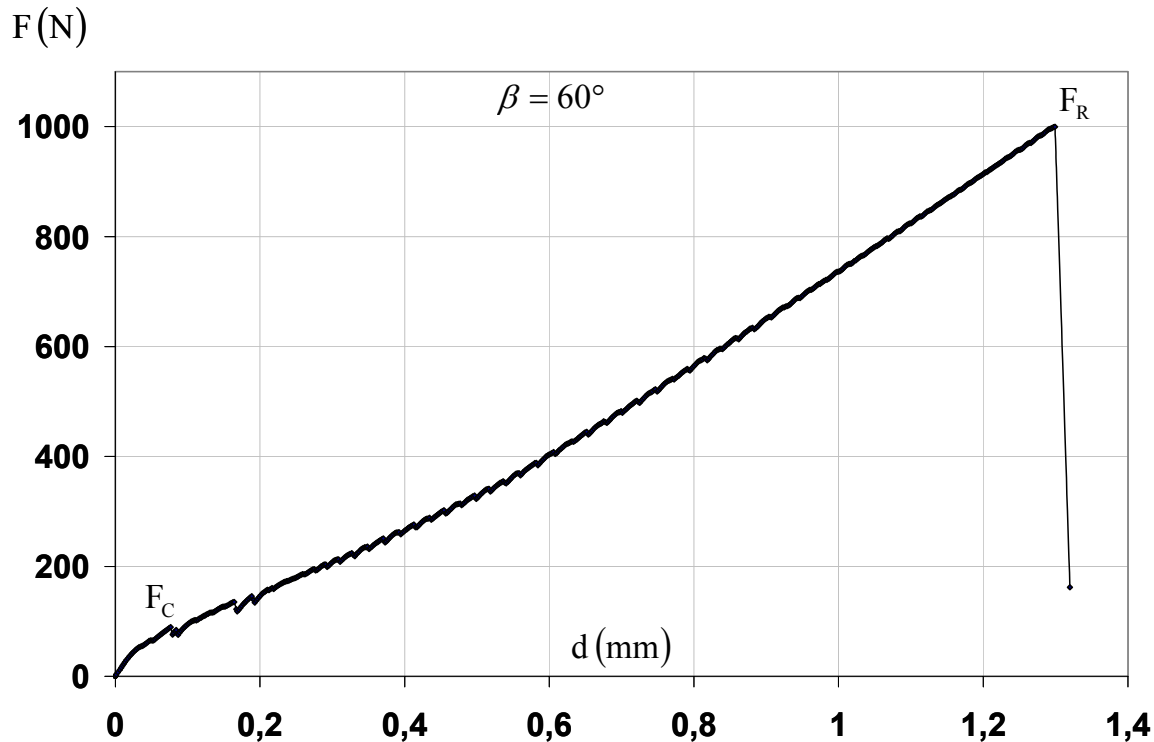


Figure III.4.8. Courbe force-déplacement en mode mixte  $\beta = 30^\circ$



**Figure III.4.9.** Courbe force-déplacement en mode mixte  $\beta = 60^\circ$ .

#### Taux de restitution d'énergie découplé

Les Figures III.4.10, III.4.11, III.4.12 et III.4.13 proposent les taux de restitutions d'énergie expérimentaux et numériques découplés pour les modes mixtes  $\beta = 15^\circ$  et  $\beta = 30^\circ$ .  ${}^1G$  et  ${}^2G$  représentent respectivement la part du mode I et du mode II dans le processus de propagation. Les valeurs expérimentales de  $G$  sont obtenues par la méthode de la complaisance, équation (III.4.2). Les résultats numériques sont obtenus grâce à un calcul élastique, identiquement au paragraphe III.4.3.

Sur les quatre graphiques, on remarque que les valeurs de  ${}^1G$  et  ${}^2G$  expérimentales et numériques découplées sont du même ordre de grandeur et ont la même tendance. Toutefois, on observe que  ${}^2G$  est beaucoup plus faible ( $< 0.05 \text{ N/mm}$ ) dans les deux cas. Cela pourrait être dû à la forte orientation de la fissure dans le sens des fibres ( $R/L$ ) ou des cernes de croissance. Sur certaines courbes, les écarts observés entre les valeurs numériques et expérimentales, au cours de la propagation, peuvent être dus à la difficulté d'identifier avec précision le front de fissure par l'analyse d'images.



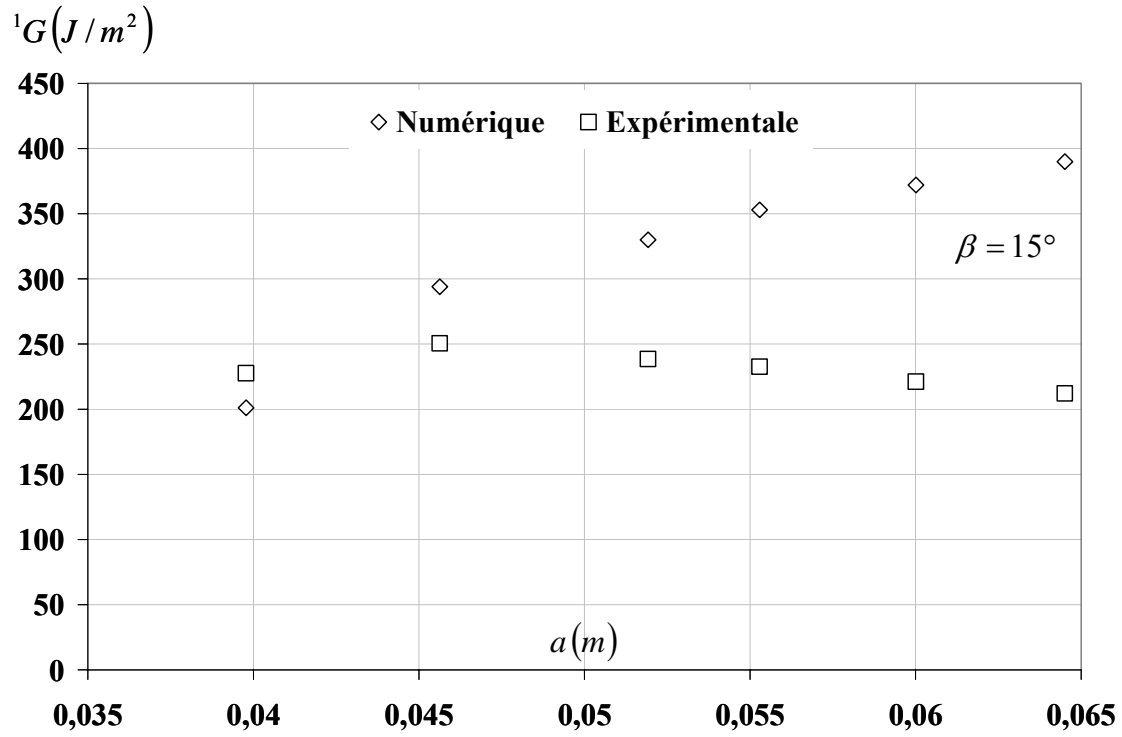


Figure III.4.10.  ${}^1G$  numérique et expérimental en mode mixte  $\beta = 15^\circ$ .

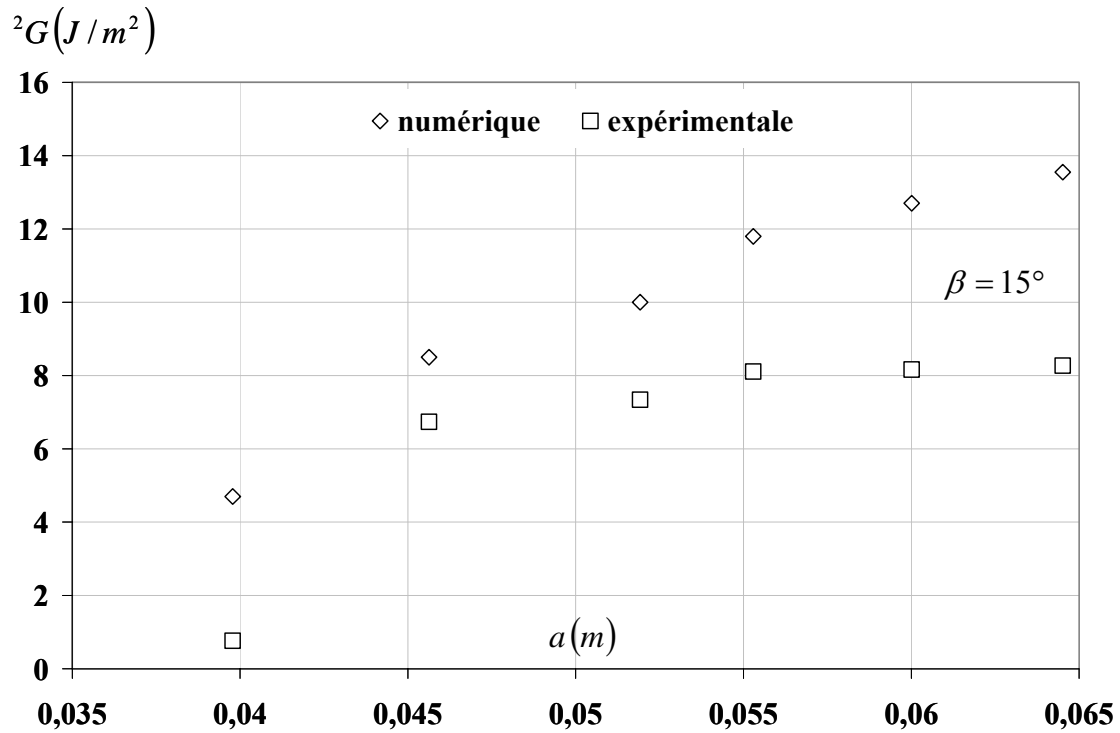


Figure III.4.11.  ${}^2G$  numérique et expérimentale en mode mixte  $\beta = 15^\circ$ .

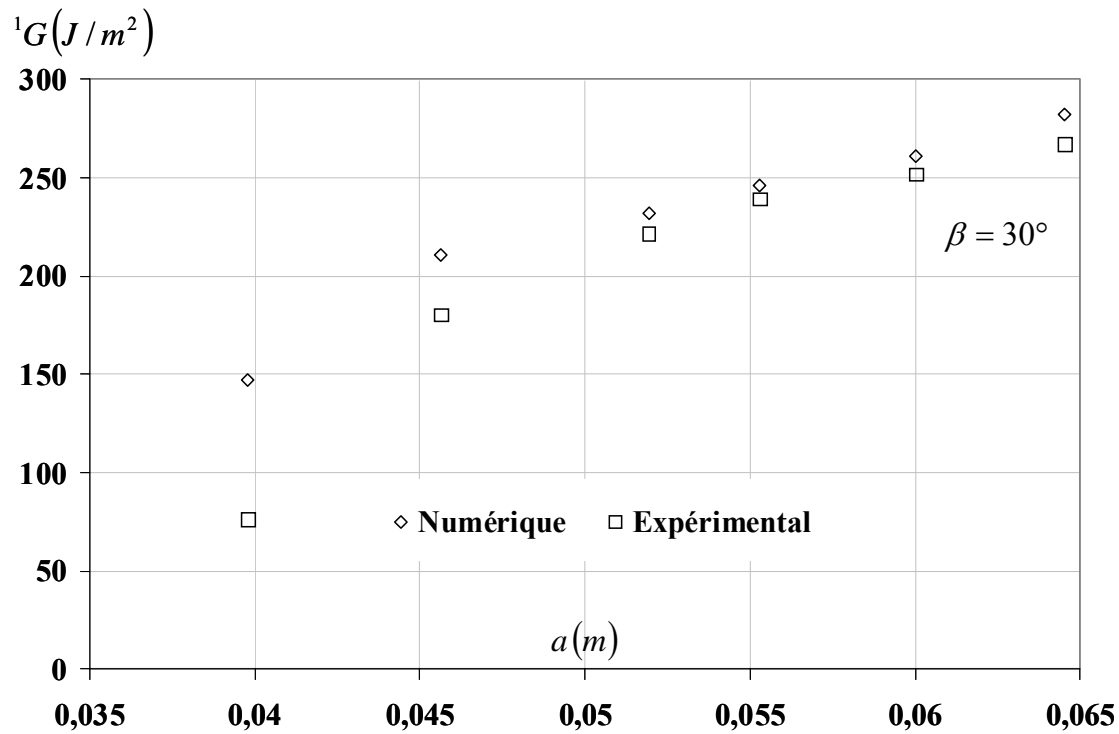


Figure III.4.12.  ${}^1G$  numérique et expérimental en mode mixte  $\beta = 30^\circ$ .

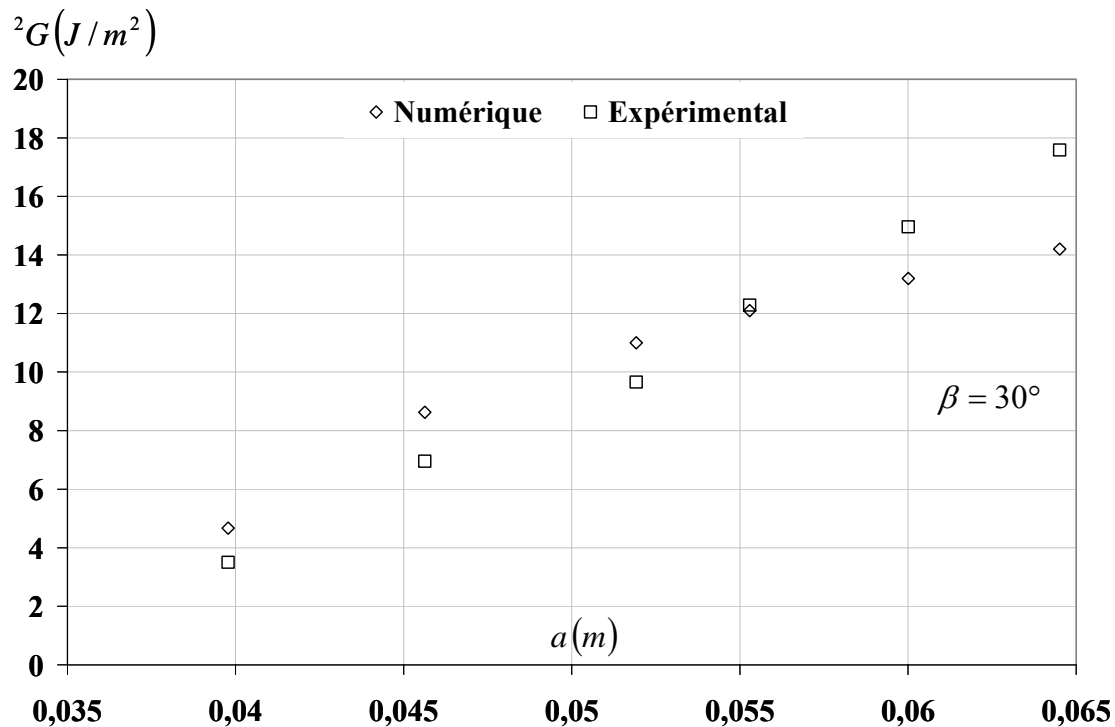


Figure III.4.13.  ${}^2G$  numérique et expérimental en mode mixte  $\beta = 30^\circ$ .

Les Figures III.4.14 et III.4.15 représentent les taux de restitution d'énergie expérimentaux et numériques découplés, mais pour le mode mixte  $\beta = 60^\circ$ .

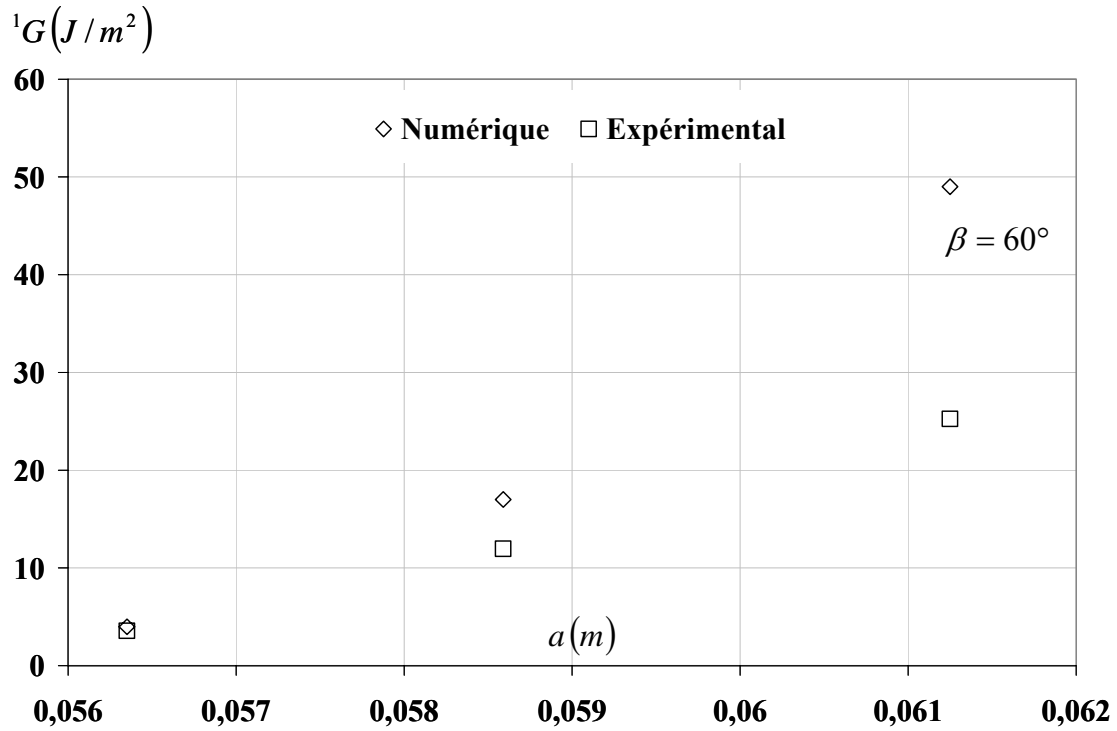


Figure III.4.14.  ${}^1G$  numérique et expérimental en mode mixte  $\beta = 60^\circ$ .

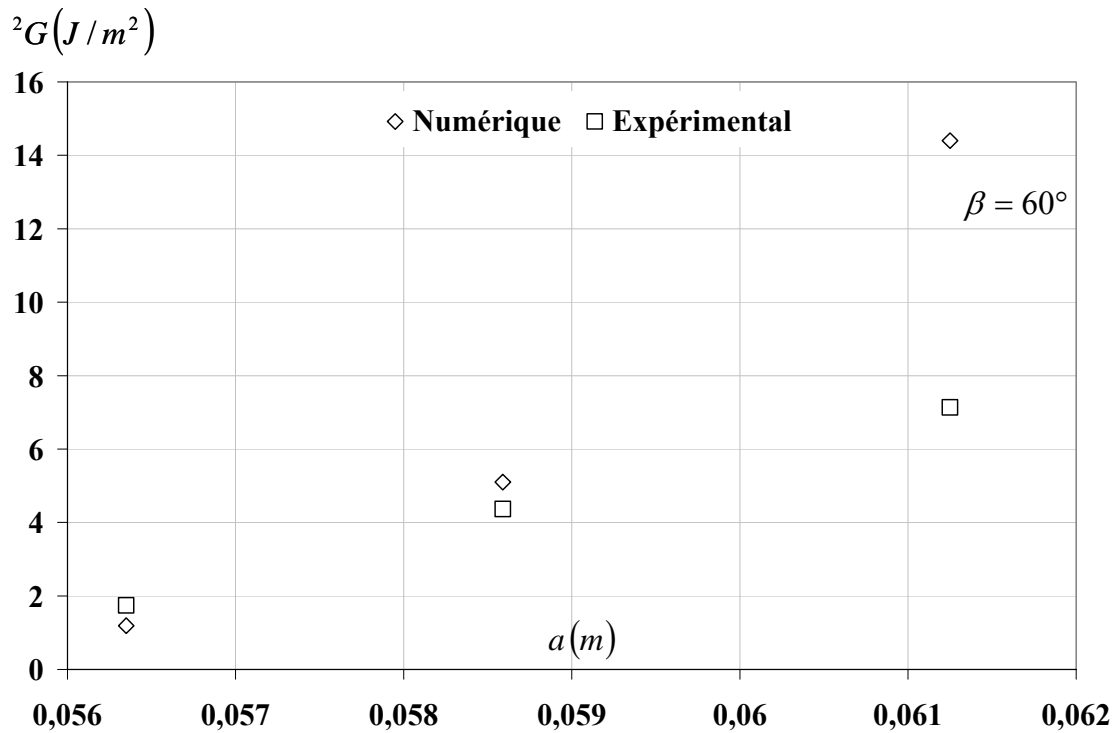


Figure III.4.15.  ${}^2G$  numérique et expérimental en mode mixte  $\beta = 60^\circ$ .

Les Figures III.4.14 et III.4.15 représentent les taux de restitution d'énergie expérimentaux et numériques découplés, mais pour le mode mixte  $\beta = 60^\circ$ . On constate globalement que les valeurs

de  ${}^2G$  restent faibles et que le nombre de points de mesure se réduit à cause de la difficulté de la fissure à se propager lorsqu'on se rapproche du mode de cisaillement pure, se concluant souvent par la rupture brutale du matériau au voisinage des talons.

### III.5. Modélisation numérique de l'essai de propagation viscoélastique

A la différence du chapitre II, il est proposé ici, une propagation numérique viscoélastique réelle. A cet effet, les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie obtenues précédemment seront utilisées pour introduire les critères d'amorçage dans les différents modes. La propagation automatique de la fissure sera par conséquent opérée de deux manières: en opérant tout d'abord une dichotomie temporelle afin de déterminer les temps critiques d'amorçage de propagation, et ensuite en calculant la plage de propagation de la fissure dans la zone d'élaboration. Pour cela, une nouvelle méthode de calcul de la longueur de la zone d'élaboration  $\alpha$  est proposée en s'inspirant des travaux de Schapery [SCH 84], paragraphe I.3.5.3.

#### III.5.1. Préliminaires

##### III.5.1.1. Critère de propagation

Dans ce paragraphe, le taux de restitution d'énergie viscoélastique est calculé via les équations (II.4.4) et (II.4.5). En s'inspirant des équations (I.3.18) et (I.3.19), les critères de fissuration, introduits par la fonctionnelle  $f$ , dans un milieu viscoélastique prennent les formes suivantes [MOU 08<sub>g</sub>]:

$$f\left(\frac{{}^1G_v(t)}{{}^1G_c} + \beta \cdot \frac{{}^2G_v(t)}{{}^2G_c}\right) = 1 \Rightarrow \text{Propagation de fissure} \quad (\text{III.5.1})$$

$$f\left(\frac{{}^1G_v(t)}{{}^1G_c} + \beta \cdot \frac{{}^2G_v(t)}{{}^2G_c}\right) < 1 \Rightarrow \text{Fissure stationnaire} \quad (\text{III.5.2})$$

Avec  ${}^1G_v(t)$  et  ${}^2G_v(t)$  les partitions du taux de restitution d'énergie propres au mode I et au mode II,  ${}^1G_c$  et  ${}^2G_c$  désignent leurs valeurs critiques respectives. On supposera dans un premier temps que le facteur  $\beta = 1$ .

##### III.5.1.2. Amorçage de fissure

La fonctionnelle  $f$  traduite par les équations (III.5.1) et (III.5.2) est une fonction à deux variables. Pour amorcer la fissure, il est donc indispensable de connaître toutes les inconnues de la fonction tout en suivant les étapes décrites au paragraphe III.2.1.1. La méthode qui suit nous évite

d'utiliser systématiquement les valeurs globales du taux de restitution d'énergie critique expérimental données par la méthode de la complaisance.

Ainsi, pour amorcer la fissure (obtention d'une fonctionnelle égale 1), les étapes suivantes ont été suivies :

- Etape 1 : On détermine la force critique en mode I pure pour une longueur de fissure initiale de  $50 \text{ mm}$  grâce à la Figure III.4.3. On trouve  $F_c = 700 \text{ N}$ .
- Etape 2 : Grâce à la procédure décrite au paragraphe II.2, appliquée à l'éprouvette 2MCG présentée à la Figure III.3.4, un calcul élastique est effectué afin d'évaluer la valeur numérique du taux de restitution d'énergie induite par la force critique citée à l'Etape 1. On trouve ainsi  ${}^1G_e = 0.149 \text{ N/mm}$ .
- Etape 3 : On se met dans une configuration en mode mixte  $45^\circ$ , comme indiquée à la Figure III.3.5, avec une force  $F_c = 2975 \text{ N}$ . On cherche cette fois-ci à déterminer la valeur critique en mode II  ${}^2G_c$ , en supposant que la valeur critique en mode I pure est connue :  ${}^1G_c = {}^1G_e$ . En opérant un calcul purement élastique, comme expliqué à l'Etape 2, on détermine la valeur de  ${}^2G_c$  grâce à la fonctionnelle décrite par l'équation (III.5.1) de la façon suivante :

$${}^2G_c = \frac{{}^2G_v(t) \cdot {}^1G_c}{{}^1G_c - {}^1G_v(t)} \quad (\text{III.5.3})$$

On trouve ainsi  ${}^2G_c = 0.42 \text{ N/mm}$ .

- Finalement, tous les paramètres étant déterminés, on peut les utiliser dans la procédure viscoélastique qui sera décrite au paragraphe suivant. Toutefois, pour amorcer la fissure, la fonction doit être unitaire avec ces valeurs.

### Remarque

On constatera tout de même que la valeur de  ${}^2G_c$  obtenue est supérieur à  ${}^1G_c$ . Cela se justifie bien par le fait qu'on a besoin de plus d'énergie pour propager la fissure lorsqu'on se rapproche de plus en plus du mode de cisaillement.

#### *III.5.1.3. Longueur de la zone d'élaboration en mode mixte*

La formulation de la longueur de la zone d'élaboration en mode mixte est exposée au paragraphe I.3.5.2 et traduite par l'équation (I.3.55) qui peut être réécrite de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \cdot \left( \frac{{}^u K_I}{\sigma_1^{(m)}} + \frac{{}^u K_{II}}{\sigma_2^{(m)}} \right) \quad (\text{III.5.4})$$

Avec  $\sigma_1^{(m)} = \sigma_{RR}^{(m)}$  et  $\sigma_2^{(m)} = \sigma_{LR}^{(m)}$  les contraintes limites en traction en mode I (ouverture de fissure) et en mode II (cisaillement). Expérimentalement,  $\sigma_1^{(m)} = 4,7 \text{ MPa}$  [DUB 97] et, selon l'Eurocode 5, la valeur en mode I équivaut environ au sixième de la valeur en cisaillement soit :  $\sigma_2^{(m)} = 27 \text{ MPa}$ . En pointe de fissure, la signification physique des différents termes de l'équation (III.5.3) est donnée par la Figure III.5.1. Les facteurs d'intensité de contrainte réelle  ${}^u K_I$  et  ${}^u K_{II}$  correspondant à chaque mode sont donnés par la procédure de calcul viscoélastique.

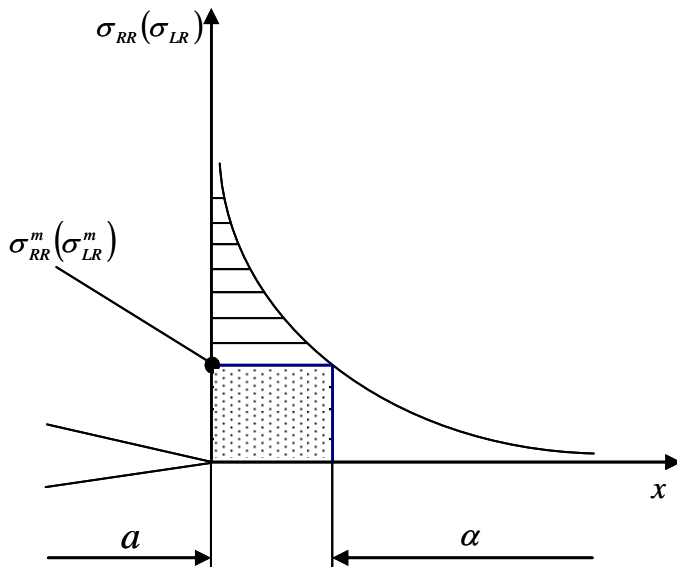
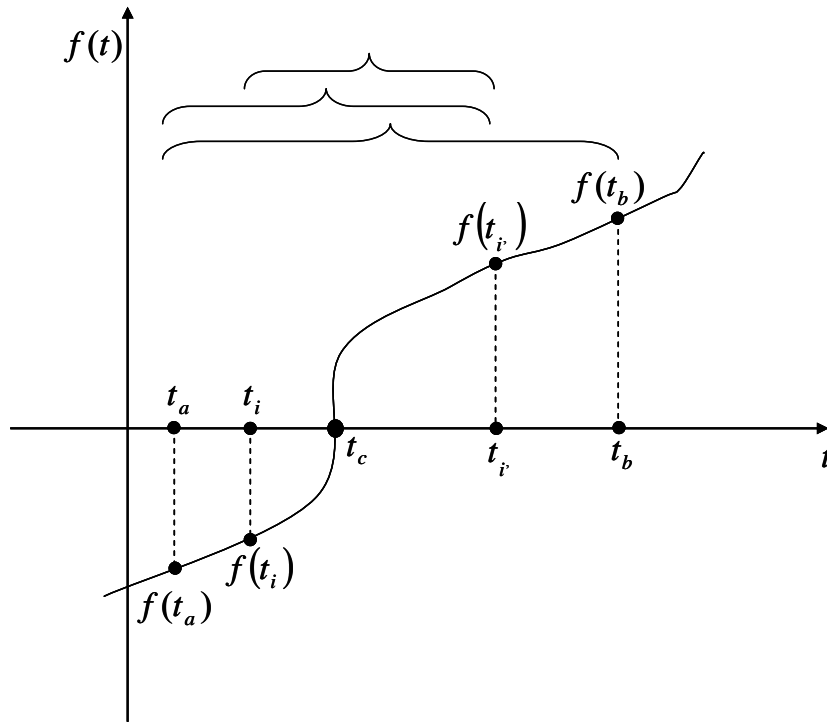


Figure III.5.1. Longueur de la zone d'élaboration en mode mixte [MOU 08<sub>g</sub>]

### III.5.2. Algorithme de propagation

#### III.5.2.1. Détermination du temps critique $t_c$ (dichotomie)

En mathématique, la méthode de la « dichotomie » ou méthode de la « bisection » est un « algorithme de la recherche d'un zéro d'une fonction » qui consiste à répéter les partages d'un « intervalle » en deux parties puis à sélectionner le sous intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction, Figure III.5.2.



**Figure III.5.2.** Etapes successives de la méthode de dichotomie.

Le principe de la méthode est simple : supposons que la fonctionnelle  $f(t)$  est continue et monotone sur l'intervalle de temps  $[t_a, t_b]$  telle que  $f(t_a) \cdot f(t_b) < 0$ . Supposons que nous souhaitons résoudre l'équation (III.5.1), résumée à la forme  $f(t_c) = 1$ , avec  $t_c$  la solution ou le temps critique recherché. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on conçoit que  $f$  a un zéro dans l'intervalle  $[t_a, t_b]$ . La méthode de la dichotomie divise par conséquent l'intervalle en deux, en calculant le temps  $t_i = \frac{t_b - t_a}{2}$ . Dans ce cas, deux possibilités subsistent : soit  $f(t_a) \cdot f(t_i) < 0$ , soit  $f(t_i) \cdot f(t_b) < 0$ . L'algorithme de dichotomie est alors appliqué au sous intervalle dans lequel le changement de signe se produit jusqu'à approcher  $t_c$ . Après  $n$  étapes de calculs, l'erreur absolue de la méthode de dichotomie est au plus  $\frac{t_b - t_a}{2^{n+1}}$ . Compte tenu de la marge d'erreur effectuée lors du calcul numérique, l'intervalle suivant peut être considéré  $f(t_c) \in [0.99; 1.01]$ .

### III.5.2.2. Algorithme de propagation

Dans ce paragraphe, on suppose que les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie, ainsi que les valeurs limites des contraintes en traction propres à chaque mode sont connus. On supposera, dans un premier temps, que le facteur  $\beta = 1$  dans la fonctionnelle  $f$ .

Toutes les étapes de l'algorithme de la Figure III.5.3 sont résumées au paragraphe II.4.2 du Chapitre II. Toutefois deux étapes fondamentales s'ajoutent: l'étape due à la dichotomie sur un intervalle de temps  $\Delta t_n$  (afin de déterminer le temps critique  $t_c$ ) et l'étape correspondant au calcul de la zone d'élaboration  $\alpha$  (process zone) en mode mixte.

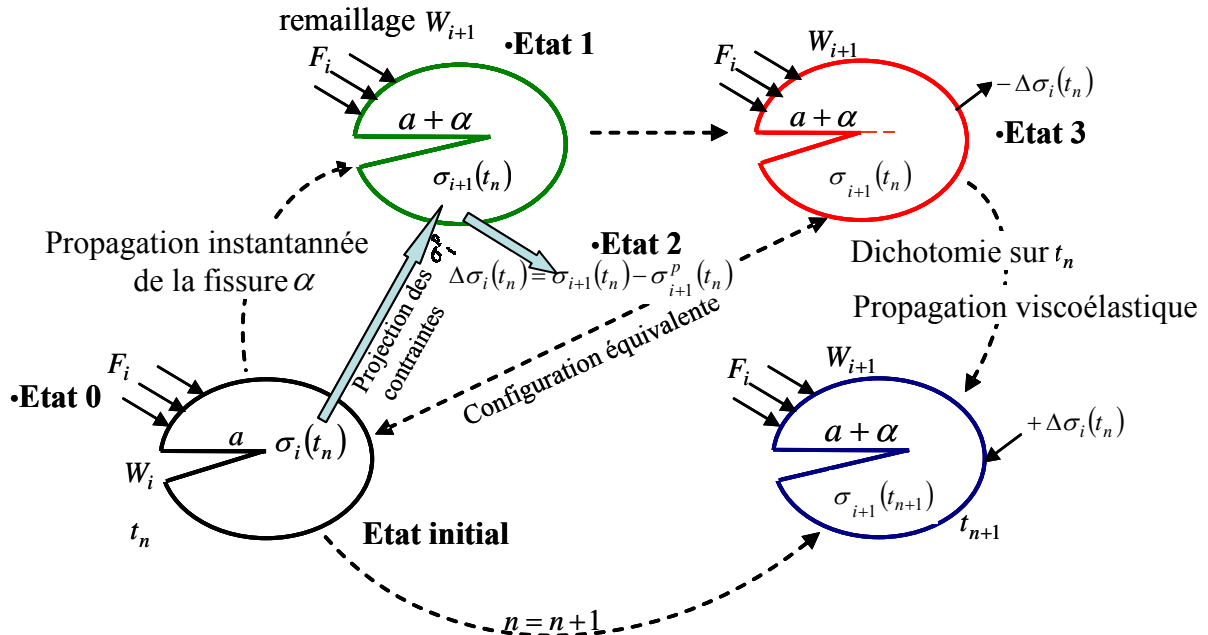


Figure III.5.3. Algorithme de propagation viscoélastique réelle [MOU 08<sub>g</sub>]

La Figure III.5.4 détaille, de façon simplifiée, l'initiation de la propagation de fissure due à la dichotomie et à l'évaluation de  $\alpha$  dans la zone endommagée :

- Le premier test sur  $f$  initie le critère de propagation en mode mixte en introduisant les valeurs critiques des taux de restitution d'énergie propres à chaque mode, et ceci, grâce à l'équation (III.5.1). Les valeurs de  ${}^1G_v$  et  ${}^2G_v$  sont issues de la procédure  $M\theta_v$  exposée au paragraphe II.4.
- Si  $f = 1$ , on effectue deux calculs simultanés : la longueur de la zone d'élaboration  $\alpha$  via l'équation (III.5.4), et ensuite l'incrément de temps  $\Delta t$ .
- Dans ce cas précis, si  $f(a + \alpha; t + \Delta t) = 1$ , on amorce la propagation de fissure. Dans le cas contraire, on donne des valeurs à  $\Delta t$  de manière à trouver le temps critique qui va déclencher la propagation : c'est la méthode de la dichotomie exposé au paragraphe III.5.2.1.
- Ainsi, à chaque longueur de fissure  $a_i = a + \alpha$  et à chaque temps  $t + \Delta t$ , les paramètres de fissuration sont continuellement calculés jusqu'à la ruine du matériau.



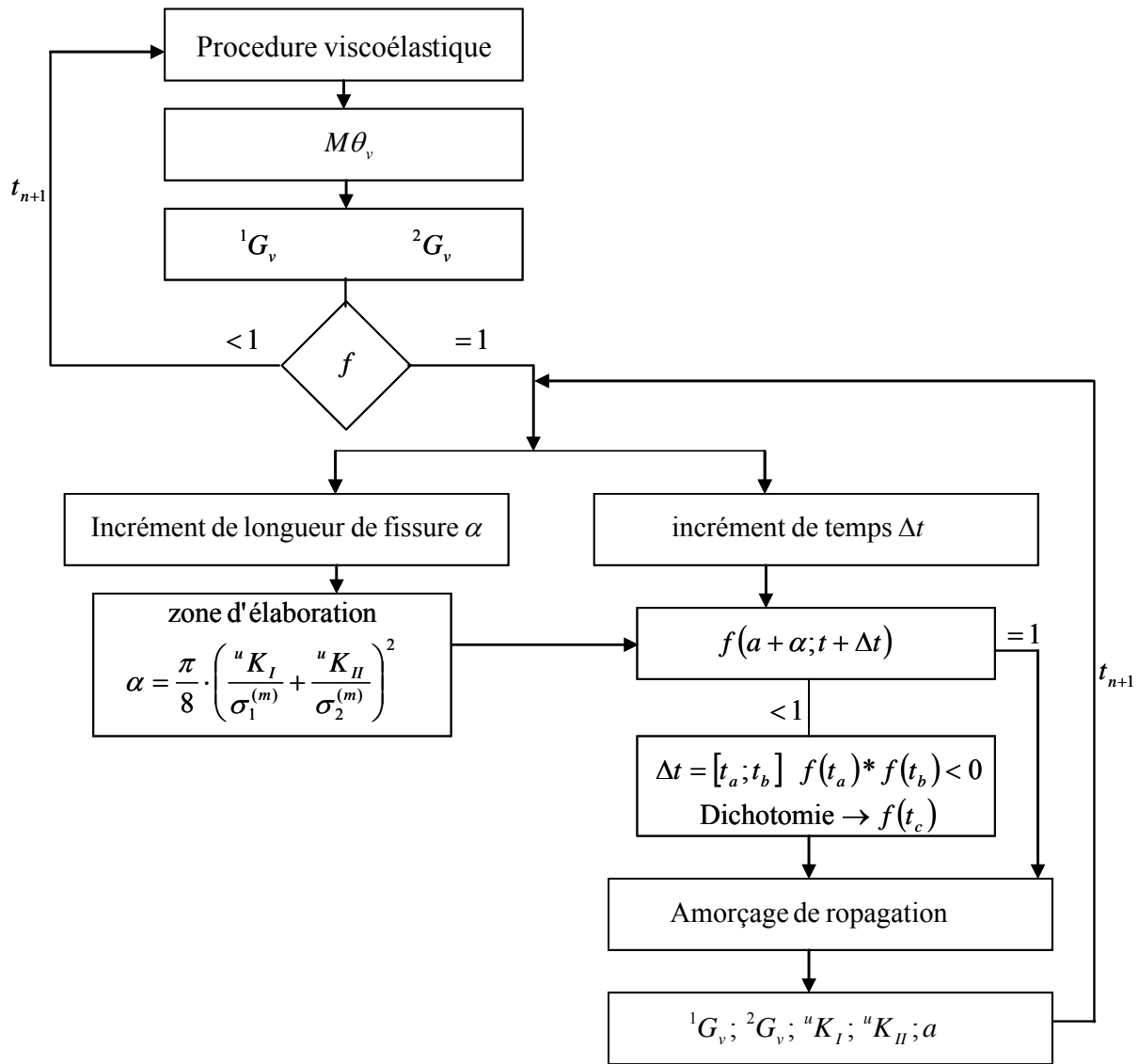


Figure III.5.4. Algorithme viscoélastique : calcul de  $\alpha$  et dichotomie sur  $\Delta t$ .

### III.5.3. Résultats numériques

Dans ce paragraphe, seules seront présentés les différentes évolutions du taux de restitution d'énergie en mode I et en mode II pour  $\beta = 45^\circ$ . A cause de la durée du calcul numérique, l'importance de la densité du maillage sera vérifiée afin d'affiner ultérieurement les résultats. Les conditions du maillage autour de la pointe de fissure restent identiques à ceux détaillées au paragraphe III.2.3.

#### III.5.3.1. Taux de restitution d'énergie : densité faible

Les Figures III.5.5 et III.5.6 présentent les évolutions de  ${}^1G_v$  (part du mode I) et  ${}^2G_v$  (part du mode II) en fonction de la longueur de fissure  $a$  pour  $\beta = 45^\circ$ , avec une densité grossière ou

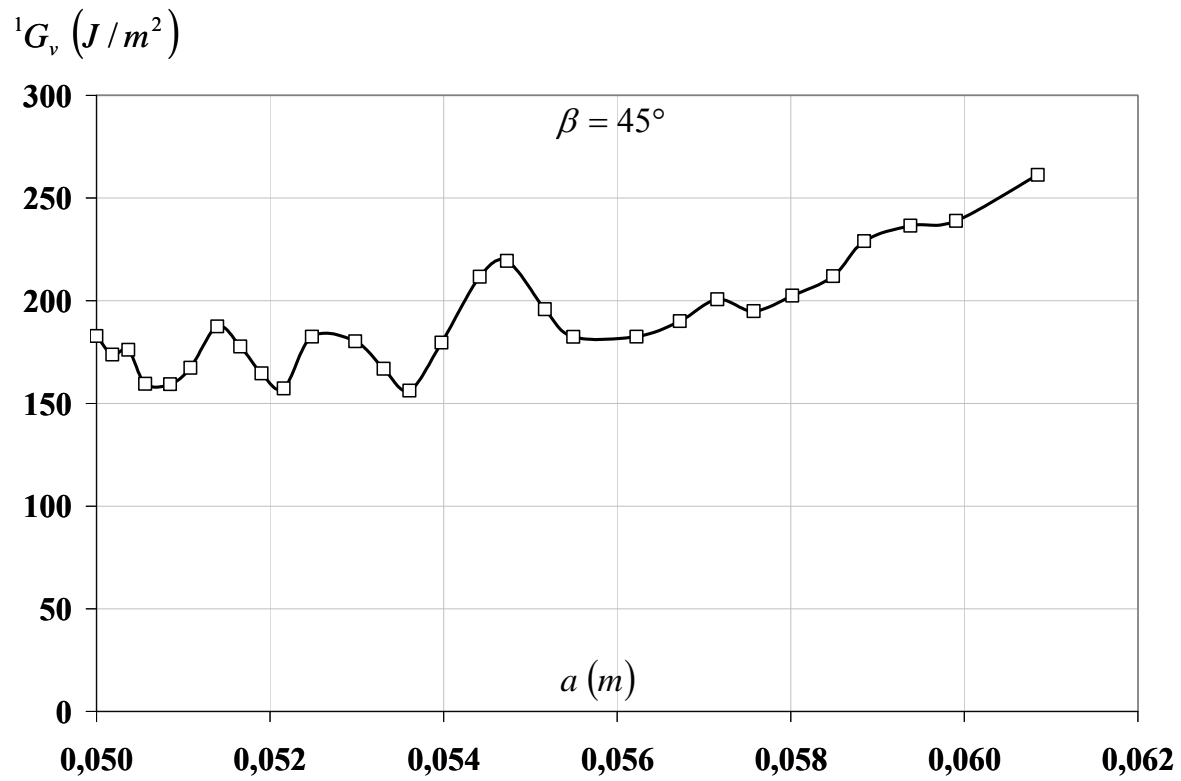


Figure III.5.5. Evolution da la part du mode I  ${}^1G_v$  en mode mixte  $\beta = 45^\circ$  : densité 1 faible.

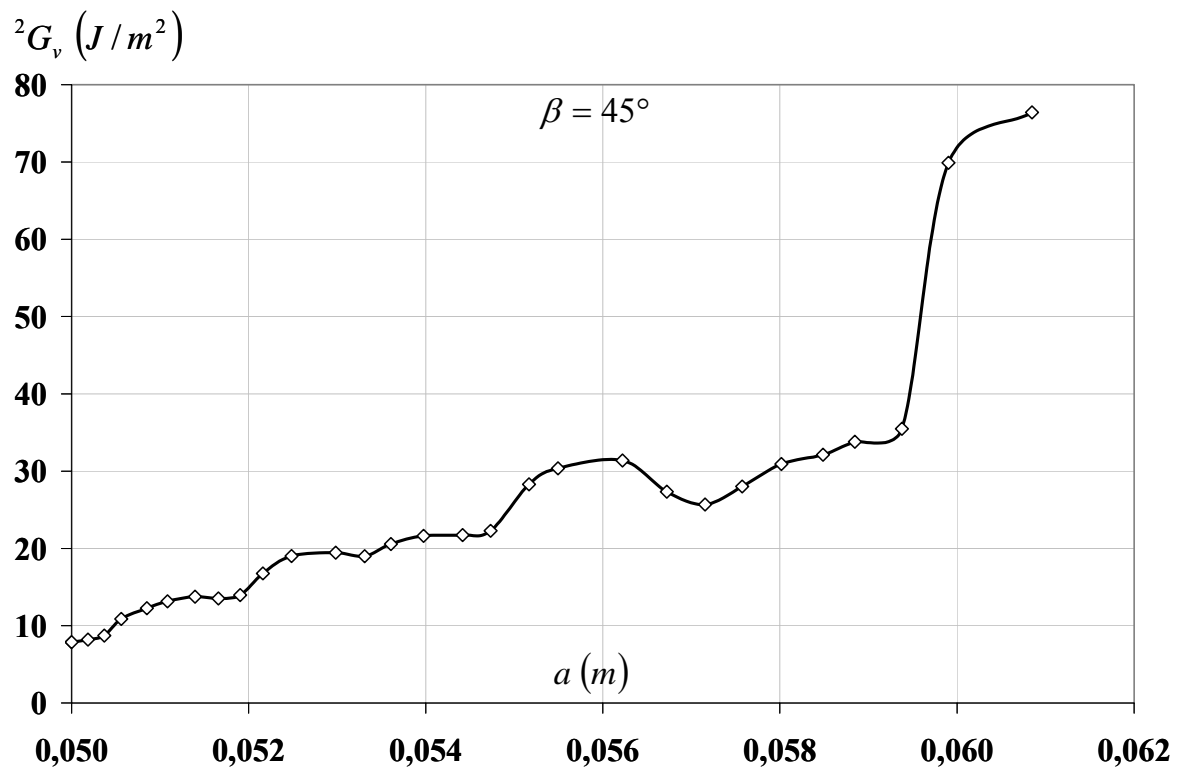
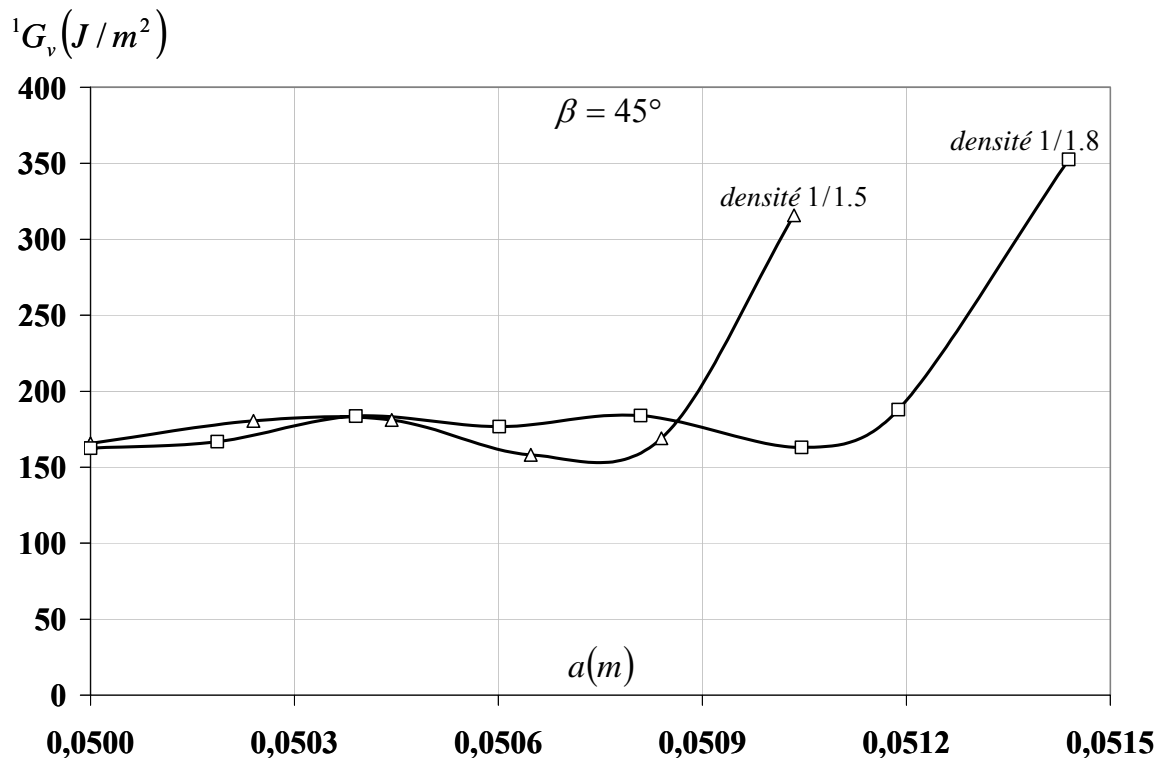


Figure III.5.6. Evolution da la part du mode II  ${}^2G_v$  en mode mixte  $\beta = 45^\circ$  : densité 1 faible.

*densité 1* (indispensable pour accélérer le processus de calcul numérique très long). Dans les deux cas, on note une plage de propagation importante (environ 11 mm), avec des valeurs de  $\alpha \in [0.1; 0.8 \text{ mm}]$  très faibles. Toutefois,  ${}^1G_v$  trahit une alternance justifiée, sans doute, par la faiblesse du maillage utilisé.

### III.5.3.2. Taux de restitution d'énergie : densité élevée

Sur les Figures III.5.7 et III.5.8 les parts de  ${}^1G_v$  et de  ${}^2G_v$  pour  $\beta = 45^\circ$  sont représentés en fonction de la longueur de fissure, mais avec deux densités de plus en plus élevées. C'est-à-dire que la densité précédente a été divisée successivement par 1.5 et 1.8, l'objectif étant d'affiner les résultats numériques. Globalement, on constate que les deux graphiques présentent une stabilité plus appréciable des valeurs de  $G$  au détriment des plages de propagation qui deviennent de moins en moins importantes proportionnellement au temps de calcul qui s'alourdi. On observe simultanément une densification importante du maillage lors de la projection des champs mécaniques sur la géométrie suivante, ce qui a pour conséquence d'engendrer un arrêt brusque de la propagation de fissure.



**Figure III.5.7.** Evolution de la part du mode I  ${}^1G_v$  en mode mixte  $\beta = 45^\circ$  : densité élevée.

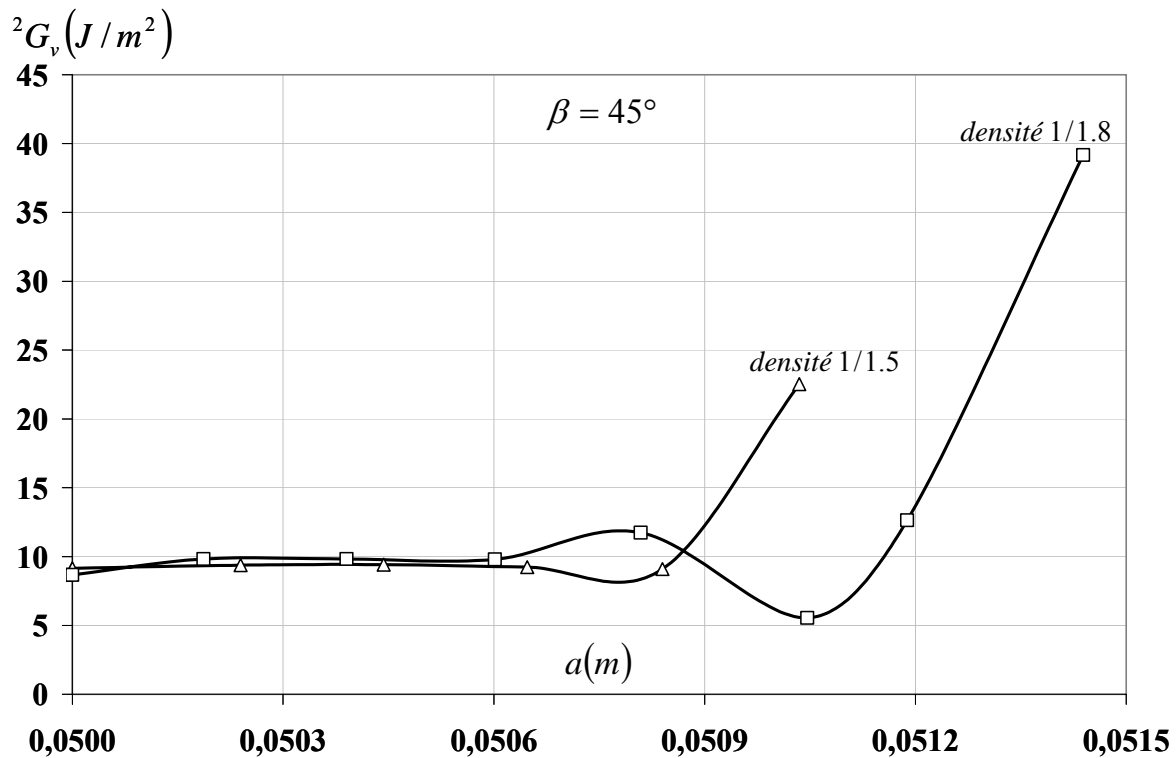


Figure III.5.8. Evolution de la part du mode II  $2G_v$  en mode mixte  $\beta = 45^\circ$  : densité élevée.

### III.6. Conclusion

Dans cette partie expérimentale, une nouvelle géométrie, reproduisant l'ensemble des modes mixtes de rupture tout en garantissant une stabilité de la fissure durant sa propagation, a été développée. L'objectif recherché est de pouvoir découpler les effets viscoélastiques des caractéristiques propres à la fissuration lors des essais à long terme. Avec l'éprouvette 2MCG, des essais instantanés de propagation de fissure ont été effectués en employant une presse, munie d'un système d'acquisition, et des moyens optiques afin d'identifier la longueur de fissure et la force correspondante. Ainsi, les courbes force-déplacement et les longueurs de fissures obtenues ont été exploitées pour déterminer le taux de restitution d'énergie. Parallèlement, des calculs numériques et expérimentaux, permettant de séparer les modes mixtes de rupture, ont été présentés. Il en ressort que la géométrie présentée permet de découpler efficacement les modes I et II durant le processus de propagation. En s'aidant des valeurs critiques de  $G$ , calculer dans chaque mode, une propagation viscoélastique réelle a été proposée. L'amorçage et la propagation de fissure sont pilotés conjointement via le calcul de la longueur de la zone d'élaboration mixte  $\alpha$  et par dichotomie sur le temps. Bien que satisfaisant, les résultats obtenus exigent d'affiner le maillage afin d'obtenir une plage de propagation plus importante.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce mémoire propose une nouvelle approche analytique, numérique et expérimentale permettant de séparer les modes mixtes de rupture dans des matériaux obéissant à un comportement viscoélastique orthotrope comme le bois, et soumis à un chargement permanent. Les bases analytiques du découplage reposent sur l'intégrale  $M$  initialement développée par Chen mais adaptée, seulement, aux milieux isotropes habités par des fissures statiques.

La première originalité de la thèse est donc d'avoir généraliser  $M$  à des milieux viscoélastiques orthotropes [MOU 07<sub>b</sub>]. Le comportement viscoélastique est introduit par une décomposition spectrale du tenseur de fluage. Le modèle de Kelvin Voigt généralisé nous permet d'exploiter l'énergie stockée dans chaque ressort du model afin de reproduire le comportement différé du matériau. Pour la précision des résultats, un modèle composé de six cellules a été retenu. Afin de résoudre la complexité numérique due au stockage des histoires des contraintes et de déformations, la formulation incrémentale du comportement viscoélastique a été utilisée. L'algorithme proposé dans la partie II.2 du Chapitre II explique la technique de résolution utilisée.

Afin de résoudre numérique l'intégrale  $M$ , un champ  $\theta$ , continu et dérivable sur le domaine considéré, à été retenu. Il permet d'assurer la continuité des champs mécaniques loin de la perturbation introduite par la pointe de fissure où règne une forte singularité. L'éprouvette CTS a servi de support géométrique pour la reproduction des différents taux de mixités. Les résultats numériques obtenus nous permettent de justifier l'indépendance du domaine d'intégration numérique représenté par le champ  $\theta$ . La validation numérique à aussi consister à comparer les valeurs de  $G$  issues de la procédure  $M\theta$ , avec celles données par la densité d'énergie libre d'Helmholtz proposée par Staverman. La concordance des résultats obtenus justifie l'efficacité du modèle.

La seconde originalité repose sur la généralisation de l'intégrale  $M$  à la propagation de fissure dans les matériaux viscoélastiques orthotropes, partie II.3 du Chapitre II [MOU 07<sub>a</sub>] [MOU 08<sub>b</sub>]. Parallèlement, les généralisations des intégrales  $A$  notée  $A_v$  et  $T$  notée  $T_v$  ont aussi été développées [MOU 08<sub>a</sub>]. Le support analytique s'appuie sur les théorèmes de conservation énergétiques, les intégrales invariantes, et une combinaison des champs de déplacements réels et virtuels. Munis du même support géométrique et des mêmes outils numériques que précédemment, la résolution de cette intégrale a été proposée. De même, l'indépendance du domaine d'intégration a été démontrée

pour chaque mode de rupture. Les différentes évolutions de  $G$  ont été exprimées en fonction de la vitesse de propagation, du temps, des couronnes d'intégration, de la longueur de fissures et du taux de mixité  $\beta$ . Les évolutions des facteurs d'intensité de contrainte instantané ont aussi été montrées. Tous ces résultats prouvent la capacité du modèle à traduire les effets viscoélastiques et à découpler les modes mixtes de rupture.

Enfin, la troisième originalité repose sur la proposition d'une nouvelle géométrie pouvant garantir la reproduction des différents modes mixtes tout en proposant une stabilité de la fissure durant sa propagation [MOU 08<sub>h</sub>] [MOU 08<sub>j</sub>]. Son design résulte à la fois, d'une combinaison des éprouvettes DCB et CTS, mais aussi de l'observation d'une plage de stabilité de  $G$  calculée numériquement via l'intégrale  $M\theta$ . L'objectif est de s'assurer que, seuls les effets temporels vont participer à la progression du front de fissure lorsque l'éprouvette sera soumise à des essais de fluage à long terme. Grâce à l'utilisation combinée d'une presse et des outils d'analyse d'images, des essais instantanés ont été effectués avec l'éprouvette 2MCG.

L'obtention de la force et de la longueur de fissure résultante ont permis de calculer et de comparer efficacement les taux de restitution d'énergie critiques numériques et expérimentaux (par la méthode de la complaisance) pour  $\beta = 45^\circ$ . A l'aide d'une caméra, armée d'un trépied inclinable, les valeurs globales de  $G$  ont pu être découplées pour  $\beta = 15^\circ, 30^\circ$  et  $60^\circ$ . Enfin, les valeurs critiques de  $G$  ont été utilisées afin d'opérer une propagation viscoélastique intégrant les temps d'amorçage et le calcul de la longueur du front de fissure dans la zone endommagée.

En perspectives, l'intégrale  $M$  proposée doit pouvoir intégrer les phénomènes mécanosorptifs, de transfert de masse et de chaleur, afin de reproduire le découplage des modes dans des ambiances variables (chambre climatique). Pour cela, l'intégrale  $A_v$  doit pouvoir être intégrée numériquement. L'éprouvette 2MCG mérite encore d'être optimisée afin de garantir des plages de propagation proches du mode de cisaillement ( $\beta = 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ). Parallèlement, il apparaît nécessaire de proposer, sur la base de l'intégrale  $M$  et de l'éprouvette décrite, une procédure efficace d'identification des champs mécaniques découplés par analyse d'images. Aussi, la procédure de calcul viscoélastique doit être affinée en termes de densité de maillage dans le but de proposer des plages de propagations beaucoup plus importantes. Enfin, des essais de fluage à long terme doivent être menés afin de les confronter avec les outils numériques dans le but de mieux garantir la validité des outils analytiques, numériques et expérimentaux développés dans ce mémoire.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AHM 94] **Ahmiedi El Hadj** « Etude de la propagation de fissures en milieu viscoélastique : applications aux enrobés bitumineux », Thèse de doctorat de l'Université de Limoges, 1994, 120 p. 121.
- [ALM 84] **D'Almeida A. G.** « Durée de vie en fissuration d'un matériau viscoélastique linéaire orthotrope : le bois », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1984, 77 p.
- [ATT 97<sub>a</sub>] **Attigui M.** « Modélisation du comportement dynamique des structures fissures par la mécanique de la rupture », Thèse de doctorat de l'Université de Limoges, 1997, 157 p.
- [ATT 97<sub>b</sub>] **Attigui M., Petit C.** « Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics : New path independent integrals », *International Journal of Fracture*, Vol **84**, 1997, pp. 19-36.
- [BAO 92] **Bao G. Ho S. Suo Z. Fan B.** « The role of material orthotropy in fracture specimens for composites », *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, 1992, pp. 1105-1116.
- [BAR 62] **Barenblatt G.I** « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture », *Advances in Applied Mechanics, Academic Press*, Vol. 7, 1962, pp. 55-129.
- [BEN 07] **Benrahou K.H., Benguediab M., Belhouari M., Nait-Abdelaziz M., Imad A.** « Estimation of the plastic zone by the finite element method under mixed mode (I and II) loading », *Computational Materials Science*, Vol. 38, 2007, pp. 595-601.
- [BRE 95] **Bremand F., Dupré J.C., Lagarde A.** « Mesure des déformations sans contact par analyse d'images », *Photomécanique 95 – Etude du comportement des matériaux et des structures, Edition Eyrolles*, 1995, pp. 171-177.
- [BRI 92] **Brinker R.** « Crack tip parameters for growing crack in linear viscoelastic materials », *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Conf. On localized Damage, Springer*, Berlin, 1992, pp. 85-98.
- [BRO 94] **Brochard J., Suo X.Z.** « Le taux de restitution de l'énergie  $G$  en mécanique de la rupture non-linéaire, formulation de la méthode  $G\theta$  et description de la programmation dans CASTEM2000 », Rapport DTM/94-640 du C.E.A. Novembre 1994.
- [BOL 78] **Boltzman L.**, « Zur Theorie der elastischen Nachwirkung Sitzungsber », *Mat Naturwiss. Kl. Kaiser. Akad. Wiss.*, Vol. 70, 1874, pp. 275.
- [BON 97] **Boniface V., Simha K.R.Y.** « Invariant points on energy contours around a crack tip under mixed mode loading », *International Journal of Fracture*, Vol. 86, 1997, pp. 301-325.

- [BOU 00] **Bouchard P.O.** « Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux », Thèse doctorale de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000, 177 p.
- [BUI 73] **Bui H.D.** « Dualité entre les intégrales de contour », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1973, T. 276.
- [BUI 79] **Bui H.D., Ehrlacher A., Nguyen Q.S.** « Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série II*, Paris, Vol. 289, 1979, pp. 211-214.
- [BUI 84] **Bui H.D., Proix J.M.** « Lois de conservation en thermoélasticité linéaire », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, Vol. 298, 1984, pp. 325.
- [BUI 85<sub>a</sub>] **Bui H.D., Proix J.M.** « Découplage des modes mixtes de rupture en thermoélectricité linéaire par les intégrales indépendantes du contour », Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structure, Bastia, 1985, pp. 631-643.
- [BUI 85<sub>b</sub>] **Bui H.D. et Collegue.** « Mécanique de la rupture- Méthodes numériques pour l'ingénieur », Cours I.P.S.I. actes du colloque, Novembre 1986.
- [BUI 90] **Bui H.D., Inglebert G.** « Thermoplasticity and fracture mechanics », *International Journal of Fatigue*, Vol. 12 (6), 1990, pp. 458-536.
- [BUI 07] **Bui H.D.** « Conservation laws, duality and symmetry loss in solid mechanics », *International Journal of Fracture*, Vol. 147, 2007, pp. 163-172.
- [BUR 82] **Burt P.J., Yen C., Xu X.** « Local correlation measures for motion analysis: a comparative study », *Proceedings Conf. On Pattern Recognition and Image Processing*, 1982, pp. 269.
- [CAU 87] **Caumes P.** « Rupture d'un matériau anisotrope en conditions polymodales (le bois) », Thèse de l'Université Bordeaux I, 1987, 128 p.
- [CHA 86] **Charvet-Quemin F., Combescure A., Ebersol L., Charras T., Millard A.** « Méthode de calcul du taux de restitution de l'énergie en élastique et en non linéaire matériau », Report DENT, 86/438, 1986.
- [CHA 01] **Chazal C., Dubois F.** « A new incremental formulation in the time domain of crack initiation in an orthotropic linearly viscoelastic solid », *Mech Time-Dependent Mater.*, Vol. 5, 2001, pp. 3-21.



- [CHA 05] Chazal C. « Comportement des matériaux dépendants du temps », Cours de Master Recherche Génie Civil, Université de Limoges, 2005.
- [CHA 07] Chang J.H., Wu D.J. « Computation of mixed-mode stress intensity factors for curved cracks in anisotropic elastic solids », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 2007, pp. 1360-1372.
- [CHE 77] Chen F.H.K., Shield R.T. « Conservation laws in elasticity of the J-integral type », *Journal of Applied Mechanics and Physics*, Vol. 28, No 1, 1977, pp.1-22.
- [CHR 82] Christensen R.M. Theory of viscoelasticity : an introduction », *Academic Press, New York*, 1982.
- [CHO 79] Chow C.L., Woo C.W. Orthotropic and mixed mode fracture in wood. In: Proceed. 1<sup>st</sup> International Conference of Wood Fracture, Vancouver: 39-52, 1979.
- [DAU 99] Daudeville L., Davenne L., Yasumura M. « Prediction of the load carrying capacity of bolted timber joints », *Wood Science and Technology*, Vol 33, 1999, pp. 15-29.
- [DAU 01] Daudeville L. « Sur la validité de la mécanique linéaire élastique de la rupture en mode I », Laboratoire Sols, Solides, Structures, Grenoble, 2001.
- [DE 98] De D., Narasimhan R. « Analysis of an interface fracture specimen for adhesively bonded joints », *International Journal of Fracture*, Vol. 92, 1998, pp. L35-L40.
- [DEN 06] Denarié E. Cécot C., Huet C. « Characterization of creep and crack growth interactions in the fracture behaviour of concrete », *Cement and Concrete Research*, Vol. 36, 2006, pp. 571-575.
- [DES 81] Destuynder PH., Djaoua M. « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 3, 1981, pp 70-87.
- [DES 82] Destuynder PH. « Sur la propagation de fissure dans les plaques minces en flexion », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 1, 1982, pp. 579-594.
- [DES 83] Destuynder PH., Djaoua M., Lescure S. « Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 2, No 1, 1983, pp. 113-135.
- [DUG 60] Dugdale D.F. « Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics and Solids*, Vol. 8, 1960, pp. 100-104.

- [DUB 97] **Dubois F.** « Modélisation du comportement mécanique des milieux viscoélastiques fissurés : Application au matériau bois », Thèse doctorale de l'Université de Limoges, 1997, 149 p.
- [DUB 99] **Dubois F., Chazal C., Petit C.** « Modelling of crack growth initiation in a linear viscoelastic material », *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 37, No 2, 1999., pp. 207-222.
- [DUB 02] **Dubois F., Chazal C., Petit C.** « Viscoelastic crack growth process in wood timbers: An approach by the finite element method for mode I fracture », *International Journal of Fracture*, Vol. 113, No 4, 2002, pp. 367-388.
- [DUB 04] **Dubois F.** « Modélisation numérique des comportements viscoélastiques vieillissants des matériaux du génie civil », Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Limoges, Septembre 2004, 117 p.
- [DUB 05] **Dubois F., Randriambololona H., Petit C.** « Creep in wood under variable climate conditions : numerical modelling and experimental validation », *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 9, No 2, 2005, pp. 173-202.
- [DUB 05] **Dubois F. Petit C.** « Modelling of the crack growth initiation in viscoelastic media by the  $G\theta_v$ -integral », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, 2005, pp. 2821-2836.
- [DUB 07] **Dubois F., Pop O., Moutou Pitti R., Sauvat N., Petit C., Mario C.** « An experimental investigation of mixed-mode crack growth process in orthotropic viscoelastic material », *Proceedings, 10<sup>th</sup> World Conference of Timber Engineering, WCTE*, Osaka, Japan, June 2-5, 2008.
- [DUL 98] **Dulbecco P., Luro D.** « L'essentiel sur le bois » Edition Centre Technique du Bois et de l'Ameublement (CTBA),1998.
- [D0N 82] **Donea J., Giuliani S., Halleux J.P.** « An Arbitrary – Lagrangian - Euleurian finite element methods for transient dynamic fluid – structure – interactions », *Composites Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, 1982, pp. 689-723.
- [D0N 83] **Donea J.** « Arbitrary – Lagrangian - Euleurian finite element methods », Chapter 10 in : T. Belytschko and T.J.R. Hughes, eds, *Computational Methods for Transient Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [FER 00<sub>a</sub>] **Feraille-Fresnet A., Ehrlacher A.** « Behaviour of a wet crack submitted to heating up to high temperature », *Mechanics of Materials*, Vol. 32, 2000, pp. 471-484.

- [FER 00<sub>b</sub>] Feraille-Fresnet A., Ehrlacher A. « Étude du comportement d'une fissure humide soumise à une élévation de température », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Séries IIB – Mechanics*, Vol. 328 (5), 2000, pp. 387-392.
- [GAU 80] Gautherin M.T. « Critère de contrainte limite du bois massif », Thèse doctorale de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1980, 113 p.
- [GHA 95] Ghazlan G., Caperaa S., Petit C. « An Incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables », *International Journal of Numeric Methods Engineering*, Vol. 38, 1995, pp. 3315-33.
- [GRI 93] Gril J. « Cours DEA, Mécanique des matériaux et des milieux complexes, des structures et des systèmes Option I+II », Université de Montpellier II, 2003.
- [GRI 21] Griffith A.A. « The phenomena of rupture and flow in solids », *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Vol. 221, 1921, pp. 163-197.
- [GUI 87] Guitard D. « Mécanique du matériau bois et composites », *Edition Cépaudes*, 1987.
- [HIL 03] Hild F. « Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images et application en mécanique des solides », *Notes de cours IPSI*, septembre 2003.
- [IRW 57] Irwin G.R. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *Journal Applied Mechanics*, Vol. 24, 1957, pp. 361-385.
- [JUL 95] Julienne D. « Analyse expérimentale et numérique des contraintes résiduelles dans un matériau élastique orthotrope élaboré par couches successives. Cas d'un disque de bois vers. », Thèse doctorale de l'Université Montpellier II, 1995, 149 p.
- [KEN 97] Kenane M., Benzeggagh M.L. « Mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites under fatigue loading », *Composites Science and Technology*, Vol. 57, 1997, pp. 597-605.
- [KIM 02] Kim J.H., Paulino G.H. « Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, 2002, pp. 1557-1586.
- [LAR 92] Larricq P. « Une méthode d'estimation des caractéristiques de rupture différée d'un matériau viscoélastique orthotrope : application au bois », Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I 1992.
- [LEE 94] Lee L.J., Wang C.H. « Stress intensity factors by weight function method for cracked composite laminates », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48(2), 1994, pp. 267-279.

- [LUO 03] Luo P-F., Huang FC. « An experimental study on the mixed-mode crack tip deformation fields in polymethyl methacrylate », *J. Strain Analysis*, Vol. 38, No. 4, 2003.
- [MA 06] Ma S., Zhang X.B., Recho N., Li J. « The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen », *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, 2006, pp. 1780-1790.
- [MAC 05] Mackerle J. « Finite element analysis in wood research: a bibliography », *Wood Science and Technology*, Vol. 39, 2005, pp. 579-600.
- [MAI 90] Maigre H. « Contribution théorique à l'identification des grandeurs caractéristiques en mécanique de la rupture dynamique », Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, 1990, 150 p.
- [MAN 66] Mandel J. « Cours de mécanique des milieux continus », Paris ; 1966.
- [MAS 93] Masuero J.R., Creus G.J. « Finite elements analysis of viscoelastic fracture », *International Journal of Fatigue*, Vol. 60, 1993, pp. 267-282.
- [MIN 86] Mindess S., Bentur A. « Crack propagation in notched wood specimens with different grain orientations », *Wood Science and Technology*, Vol. 20, 1986, pp. 145-155.
- [MOR 87] Moran B., Shih C.F. « Crack tip associated domain integrals from momentum and energy balance », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, 1988, pp. 615-642.
- [MOU 04] Moutou Pitti R. « Comportement des ouvrages en bois placés en extérieurs : application aux ponts routiers », Mémoire de stage ingénieur, Laboratoire 3MSGC, Egletons, 2004, 77 p.
- [MOU 05] Moutou Pitti R. « Mesure des déplacements par analyse d'images : déformations lors du séchage d'une rondelle de bois vert », Master Recherche 2, Université de Limoges, 2005, 115 p.
- [MOU 06<sub>a</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N. « Découplage des modes de rupture dans un matériau viscoélastique orthotrope : application au matériau bois », *XXIV<sup>ème</sup> Rencontres Universitaires de Génie Civil, AUGC, Montpellier*, 01-02, Juin, 2006.
- [MOU 06<sub>b</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N. « Fracture of wood under mixed mode loading: numerical approach by the  $M\theta$ -integral », *Proceedings, 9<sup>th</sup> World Conference of Timber Engineering*, Portland OR, USA, August 6-10, 2007.
- [MOU 06<sub>c</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N. « Long term fracture of wood under mixed mode loading: numerical approach by the  $M\theta$ -integral », *Proceedings, International Conference on Integrated Approach To Wood Structure, Behaviour And Applications, ESWM*, Florence, Italy, May 15-17, 2006.

- [MOU 06<sub>d</sub>] Moutou Pitti R. « Fissuration du bois dans un environnement variable: modélisation et expérimentation », Rapport interne de Laboratoire, 3MSGC, Egletons, 26 Juin 2006, 30 p.
- [MOU 07<sub>a</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O., Sauvat N., Petit C. « Intégrale  $M\theta v$  pour la propagation de fissure dans un milieu viscoélastique », *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 335, No 11, 2007, pp. 727-731.
- [MOU 07<sub>b</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Sauvat N., Petit C., « Mixed mode fracture separation in viscoelastic orthotropic media: numerical and analytical approach by the  $M\theta v$ -integral », *International Journal of Fracture*, Vol. 125, No 3, 2007, pp. 181-193.
- [MOU 07<sub>c</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N. « Propagation de fissure en mode mixte dans un matériau viscoélastique orthotrope : approche numérique et analytique par l'intégrale  $M\theta v$  », *XXV<sup>ème</sup> Rencontres Universitaires de Génie Civil, AUGC*, Bordeaux, 23-25, Mai, 2007.
- [MOU 07<sub>d</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N. « Découplage des modes de rupture au cours du processus de propagation dans un matériau viscoélastique orthotrope par l'intégrale  $M\theta v$  », *18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 27-31, Août, 2007, pp. 189, <http://hdl.handle.net/2042/16325>.
- [MOU 08<sub>a</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C. « Généralisation des intégrales T et A à la viscoélasticité », *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 336, No 6, 2008, pp. 545-551.
- [MOU 08<sub>b</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C., Sauvat N., Pop O. « A new integral parameter for mixed-mode crack growth in viscoelastic orthotropic media », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No 15, 2008, pp. 4450-4465.
- [MOU 08<sub>c</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O. « Nouvelle approche expérimentale et numérique pour le découplage des modes de rupture dans le bois », *Variations dimensionnelles des Géomatériaux, GEODIM'08*, Saint-Nazaire, 2-4, Avril 2008.
- [MOU 08<sub>d</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Petit C. « A new specimen for mixed mode crack growth in wood », *Proceedings, 10<sup>th</sup> World Conference of Timber Engineering, WCTE*, Osaka, Japan, June 2-5, 2008.
- [MOU 08<sub>e</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O. « Une nouvelle éprouvette pour la propagation de fissure en mode mixte dans le bois », *XXVI<sup>ème</sup> Rencontres Universitaires de Génie Civil, AUGC*, Nancy, 04-06, Juin, 2008.

- [MOU 08<sub>f</sub>] Moutou Pitti R. « Découplage des modes mixtes de rupture dans des matériaux viscoélastiques orthotropes : modélisation et expérimentation », *XXVI<sup>ème</sup> Prix Jeune Chercheur, Rencontres Universitaires de Génie Civil, AUGC*, Nancy, 04-06, Juin, 2008.
- [MOU 08<sub>g</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O. « Mixed-mode fracture in viscoelastic material », *Proceedings, XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM)*, Adelaide, Australia, August 24-30, 2008.
- [MOU 08<sub>h</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O. « Design of a new wood specimen for mixed mode crack growth (2MCG) », *Wood Science and Technology*, 2008, accepté avec corrections.
- [MOU 08<sub>i</sub>] Moutou Pitti R. « Modélisation de la propagation de fissure dans le matériau bois », *Séminaire de la pluridisciplinarité, Faculté des Sciences*, Limoges, 12, Juin, 2008.
- [MOU 08<sub>j</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O. « On a specimen providing stable mixed mode crack growth in wood material », *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 336, No 6, 2008, pp. 744-749.
- [MOU 08<sub>k</sub>] Moutou Pitti R., Dubois F., Pop O., Absi J. « Fracture analysis in viscoelastic orthotropic material using CTS specimen », *soumis à International Journal of Solids and Structures*, 2008.
- [NIE 82] Nielsen L.F. « A lifetime analysis of cracked linear-viscoelastic materials, with special reference to wood », *Proc. IUFRO S5.02*, Sweden, 1982.
- [NIE 85] Nielsen L.F. « Wood as a cracked viscoelastic material », *Technical Report 153/85*, the technical university of Danmark, Department of civil engineering, building materials laboratory, 1985.
- [NIE 04] Nobile L., Piva A., Viola E. « On the inclined crack problem in an orthotropic medium under biaxial loading », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, 2004, pp. 529-546.
- [NOE 71] Noether E. « Invariants variations problem », *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 1, No 3, 1971, pp. 183-207.
- [RAD 95] Radaj D., Zhang S. « Process zone fracture criteria for crack types », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, N° 1, 1995, pp. 111-120.
- [RIC 68] Rice J.R. « A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks », *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, 1968, pp. 379-385.

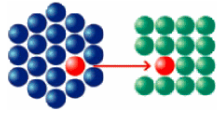
- [RIC 81] **Richard HA.** « A new compact shear specimen », *International Journal of Fracture*, Vol. 17, No 5, 1981, pp. R105-R107.
- [RIC 83] **Richard HA., Benitz K.** « A loading device for the creation of mixed mode in fracture mechanics », *International Journal of Fracture*, Vol. 22, No 2, 1983, pp. R55.
- [OLI 07] **Oliveira J.M.Q., De Moura M.F.S.F., Silva M.A.L., Morais J.J.L.** « Numerical analysis of the MMB test for mixed-mode I/II wood fracture », *Compos Scis Technol*, DOI 10.1016/j.compscitech.2006.11.007, 2007.
- [ORM 98] **Ormarson S. Dahlblom O., Peterson H.** « Numerical study of sawn timber subjected to moisture variations, Part 1: theory », *Wood Science and Technology*, Vol. 32, 1998, pp. 325-334.
- [ORM 99] **Ormarson S. Dahlblom O., Peterson H.** « Numerical study of shape stability of sawn timber subjected to moisture variations, Part 2: simulation of drying board. », *Wood Science and Technology*, Vol. 33, 1999, pp. 407-423.
- [ORM 00] **Ormarson S. Dahlblom O., Peterson H.** « Numerical study of shape stability of sawn timber subjected to moisture variations, Part 3: influence of annual ring variation. », *Wood Science and Technology*, Vol. 34, 2000, pp. 207-219.
- [SAL 83] **Salençon J.** « Viscoélasticité », Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [SAM 97] **Samarasunghé S., Kulasiri D., Nicolle K.** « Study of Mode-I and mixed-mode fracture in wood using Digital image correlation method », *Proceedings of International Wood Engineering Conference*, Louisiana, USA, 1997.
- [SCH 75<sub>a</sub>] **Schapery R.A.** « A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media I. Theoretical development », *International Journal of Fracture*, Vol. 11, N°1, 1975, pp. 141-159.
- [SCH 75<sub>b</sub>] **Schapery R.A.** « A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media II Approximate methods of analysis », *International Journal of Fracture*, 1975, pp 369-388.
- [SCH 84] **Schapery R.A.** « Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media », *International Journal of Fracture*, Vol. 25, 1984, pp. 195-223.
- [SIH 74] **Sih G.C.** « Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, Vol. 10, 1974, pp. 305-321.

- [SIL 07] Silva M.A.L., Morais J.J.L., Moura M.F.S.F., Lousada J.L. « Mode II wood fracture characterization using the ELS test », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 2007, pp 2133-2147.
- [SIH 81] Sih G.C., Chen E.P. « Cracks in composite materials », *Mech. of Fract.*, Martinus Nijhoff Publishers. 1981.
- [SUT 83] Sutton M.A., Wolters W.J., Peters W.H. « Determination of displacement using an improved digital correlation method », *Image Vision Comput.*, Vol. 1, 1983, pp. 133-139.
- [SUO 92] Suo X.G., Combescure A. « On the application of the  $G\theta$  method and its comparison with the Lorenzi's approach », *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 135, 1992, pp. 207-224.
- [STA 52] Staverman A. J., Schwarzl P. « Thermodynamics of viscoelastic behaviour », *Proceeding Academic Science*, Vol. 55, 1952, pp. 474-492.
- [STE 06] Stefanie E. Stanzl-Tschegg « Microstructure and fracture mechanical response of wood », *International Journal of Fracture*, Vol. 139, 2006, pp. 495-508.
- [TEN 07] Tenchev R.T., Falzon B.G. « A correction to the analytical solution of the mixed-mode bending (MMB) problem. *Composites Science and Technology* », Vol. 67, 2007, pp. 662-668.
- [VAL 82] Valentin G., Morlier P. « A criterion of crack propagation in timber. *Matériaux et constructions* », Vol. 88, 1982, pp. 291-298.
- [VAL 84] Valentin G., D'Almeida A. « Durée de vie en fissuration du Pin Maritime », Réunion arbolor, Metz, 1984.
- [VAL 88] Valentin G., Caumes P. « Crack propagation in mixed mode in wood: a new specimen », *Wood Science and Technology*, Vol. 23, No 1, 1989, pp. 43-53.
- [VAL 92] Valentin G., Adjanohoun. « Applicability of classical isotropic fracture mechanics specimens to wood crack propagation studies », *Materials and Structures*, Vol. 25, 1992, pp. 3-13.
- [VAN 07] Van der Put T.A.C.M. « A new fracture mechanics theory for orthotropic materials like wood », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 2007, pp. 771-781.
- [VAS 02] Vasic S., Smith I., Landis E. « Fracture zone characterization-micromechanical study », *Wood Fiber Science*, Vol. 32, 2002, pp. 42-56.
- [VAS 05] Vasic S., Smith I., Landis E. « Finite element techniques for models for wood fracture mechanics », *Wood Science and Technology*, Vol. 39, 2005, pp. 3-17.



- [PET 94] **Petit C.** « Généralisation et application des lois de mécanique de la rupture à l'étude de structures et matériaux fissurés », Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Limoge, 1994, pp. 79.
- [PLU 92] **Pluinage G.** « La rupture du bois et de ses composites », Cépaduès - Editions, 1992.
- [QIA 07] **Qian Q., Xie D.** « Analysis of mixed-mode dynamic crack propagation by interface element based on virtual crack closure technique », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **74**, 2007, pp. 807-814.
- [WAN 04] **Wand S.S., Yau J.F., Corten H.T.** « A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity », *International Journal of Fracture*, Vol. **16**, 2004, pp. 247-259.
- [YAN 06] **Yan X.** « Stress intensives and propagation of mixed-mode cracks », *Engineering Failure Analysis*, Vol. 13, 2006, pp. 1022-1027.
- [ZHA 92] **Zhang X.** « Etude numérique de la propagation des fissures par la mécanique de la rupture », Thèse de l'université Blaise Pascal, Clermont-Fd, 1992, DU. 447.
- [ZHA 06] **Zhang X.B., Ma S., Recho N., Li J.** « Bifurcation and propagation of a mixed-mode crack in a ductile material », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **73**, 2006, pp.1925-1939.
- [ZHA 07] **Zhang W., Deng X.** « Mixed-mode I/II fields around a crack tip with a cohesive zone ahead of the crack tip », *Mechanics Research Communications*, Vol. 34. 2007, pp. 172-180.
- [ZIE 68] **Zienkiewicz O.C., Watson M., King I.P.** « A numerical method of viscoelastic stress analysis », *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, 1968, pp. 807-827.

ANNEXE : Valorisation des compétences des docteurs : un  
nouveau chapitre de thèse (NTC)



Association Bernard Gregory  
www.abg.asso.fr



*Valorisation des compétences des docteurs  
«un nouveau chapitre de la thèse ®»*

## **Rostand, Moutou Pitti**

**Ecole doctorale : n°258 Science Technologie et Santé**

### **Formations:**

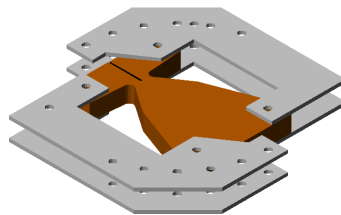
Sensibilisation à l'économie d'entreprise (INECO); Management de groupe  
Animation de groupe de travail et des réunions; Déontologie de l'enseignement supérieur;  
Plan d'expérience; Pratique de la pédagogie interactive; Stage résidentiel pédagogique;  
Formation anglais; Séminaire de la pluridisciplinarité.

**Université de Limoges**

**IPAM**

**Mentor : Jacques Christen**

# **Fissuration du bois dans les environnements variables: modélisation et expérimentation**



**Date de présentation orale du « NCT » : 7 Novembre 2008**

Découplage des modes mixtes de rupture dans les matériaux viscoélastiques orthotropes :  
modélisation et expérimentation

**Directeur de thèse : Frédéric Dubois**

**Date de soutenance de la thèse : 15 Octobre 2008**

Aujourd'hui, et durant les siècles à venir, les problèmes environnementaux comme l'effet de serre, la fonte des calottes glacières ou l'augmentation du coût énergétique devrait entraîner une progression des parts de marché de la construction en bois et de ses dérivés. Afin de privilégier le matériau bois comme matériau de structure, il est nécessaire de mieux appréhender le comportement en service des éléments bois dont les sollicitations sont, à la fois, d'ordre environnementales (humidité et température) et mécanique (chargement de longue durée). L'ensemble de cet effort scientifique doit déboucher sur des solutions technologiques durables et économiquement réalistes.

Ces structures en bois, comme les poutres entaillées et les assemblages sont généralement sujettes à des **fissurations de cinétiques complexes dues principalement aux différents modes de sollicitation et au caractère viscoélastique orthotrope propre au matériau**. Afin de prédire les phases d'amorçage et de propagation de la fissure, de nombreux outils numériques et expérimentaux ont été développés dans le but de caractériser les champs mécaniques dans de tels milieux. Parmi eux, les méthodes énergétiques sont basées sur la prise en compte d'intégrales invariantes dans l'évaluation de l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces de fissure. Cependant, certains de ces outils sont limités mathématiquement à des modes simples de sollicitations.

L'objectif de la thèse est, dans un premier temps, **de proposer une nouvelle intégrale invariante séparant l'ensemble des modes de rupture (combinaison du mode d'ouverture et de cisaillement) dans des matériaux caractérisés par un comportement dépendant du temps** (cela permettra de connaître la part de chaque mode dans la propagation de la fissure). Dans un second temps, nous proposons une **nouvelle éprouvette permettant la stabilité de la fissure tout au long du processus de propagation**. Ainsi, il sera plus aisé d'appréhender la part des effets temporels dans la progression du front de fissure et d'en mesurer leur impact dans la ruine de la structure. Enfin, des **modélisations numériques de l'ensemble des formulations proposées** sont établies. Cela permet de confronter les outils analytiques, numériques et expérimentaux afin de traduire la justesse du modèle proposé.

La démarche consiste finalement à proposer l'écriture de l'intégrale à partir des propriétés de symétries, de conservation d'énergie et des champs mécaniques réels et virtuels. Ensuite, cette formulation est généralisée au comportement viscoélastique via l'introduction **d'un modèle rhéologique composé d'un ensemble de ressorts et d'amortisseurs (type Kelvin Voigt)** reproduisant le comportement viscoélastique. Un algorithme de propagation est chargé de mettre en œuvre dans un code aux **Eléments Finis** l'ensemble des procédures intégrées. S'inspirant des éprouvettes DCB (Double Cantilever Beam) à inertie variable et CTS (Constant Tension Shear) pour des sollicitations polymodales, la nouvelle éprouvette **2MCG (Mixed Mode Crack Growth)** est proposée. Elle a pour but de générer un taux de mixité préétabli, tout en garantissant la stabilité de la fissure durant sa propagation. La validation de cette géométrie est justifiée en effectuant des essais de fissuration instantanés afin de vérifier, par les **méthodes d'analyse d'images**, les plages de propagation prédites numériquement.

## Mots clés

Bois  
Modes mixtes  
Viscoélasticité  
Modélisation  
Expérimentation  
Eléments finis  
Analyse d'images

# 1. Cadre général, enjeux et présentation de votre projet de recherche

- Choix du sujet de thèse

A l'issue de ma formation d'ingénieur Génie Civil (Gabon), j'ai été accueilli à l'Université de Limoges pour effectuer un stage de fin de cycle dans le domaine du bois. Suite à ce stage, j'ai été admis en Master Recherche IMRO de la faculté des sciences et techniques de Limoges. Le stage recherche a été réalisé au laboratoire 3MSCG, devenu GEMH-GCD (Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes – Axe Génie Civil et Durabilité) d'Egletons. Parallèlement, le Gabon, situé au cœur du bassin du Congo, est muni d'un couvert végétal dense qui fait de lui l'un des leaders mondiaux dans la production de bois tropicaux. Malheureusement, l'ensemble de la production est destinée à l'exportation au détriment de la transformation et de la consommation locale. **La thèse a donc été choisie dans le but de mieux comprendre le comportement des structures bois en environnement variable et ensuite de vulgariser ce matériau dans mon pays.** Parallèlement, la Corrèze est réputée être, au sein de la région du Limousin, un département à forte productivité sylvicole. La présence d'un Laboratoire bois et des sujets de thèse qui y sont développés ne justifient, entre autres, que la forte dimension forestière de celui-ci.

- Contexte de la thèse

Ma thèse résulte d'une coopération étroite entre l'Université de Limoges, le LMS (Laboratoire de Mécanique des Solides) de Poitiers, l'Université des Sciences et Techniques de Masuku (Gabon) et la Coopération Française qui assure mon financement. Le travail proposé entre dans le cadre de l'aide au développement octroyée par la France au Gabon via les programmes d'actions culturelles. Au final, cette thèse vise aussi à **renforcer les capacités d'enseignement de haut niveau dans les universités gabonaises**, et ce, pour développer les formations par la recherche au sein des Masters mis en place aujourd'hui. Le sujet initial proposé, qui concerne la **fissuration du bois en environnements variables : modélisation et expérimentation**, est une continuité de mon sujet de Master Recherche qui s'articule autour du **séchage de rondelles de bois vert**.

Le développement du sujet repose sur une partie analytique, numérique, et expérimentale. Le but est donc de proposer de nouveaux outils mathématiques en mécanique de la rupture dans le bois, d'effectuer une modélisation de ceux-ci, et enfin de mener des essais dans des conditions réelles des structures en service.

- Situation face à la concurrence

Le financement de la thèse est assuré par une coopération (Bourse de Coopération) entre la France et le Gabon. Cette coopération se justifie par des thématiques qui visent à promouvoir la valorisation des matériaux locaux et le renforcement des capacités d'enseignements dans les pays en voie de développement. Au niveau national, il n'y a donc pas de concurrence financière sur ce type de thématique. Cependant, en France, trois universités (Montpellier, Bordeaux, Nancy), avec lesquels nous avons des collaborations, s'intéressent à la problématique du comportement du bois, mais seule une minorité s'investi dans la conception des éprouvettes polymodales et au comportement viscoélastique couplé au processus de fissuration.

En Europe, les pays nordiques ont pris une avance considérable dans l'étude des structures bois. Mais au niveau du comportement mécanique du matériau fissuré, les difficultés demeurent, d'où la nécessité de proposer des nouveaux outils analytiques, numériques et expérimentaux. A l'échelle mondiale, le Japon et les Etats-Unis par exemple, s'intéressent énormément au comportement du bois. Seulement, l'une des difficultés se situe au niveau **de la conception des géométries et de l'identification des champs mécaniques responsables de la rupture du matériau.**

- Compétences mises à la disposition du projet

Au regard des résultats obtenus et attendus, la thèse est primordiale dans le projet de recherche globale de l'équipe. Elle est dirigée par le **professeur Frédéric Dubois, responsable de la Plateforme Bois-Construction, spécialiste en mécanique de la rupture et en comportement des éléments de structure bois**. Concernant la partie expérimentale, notamment l'analyse d'images, je me suis fait encadrer par plusieurs équipes compétentes dans le domaine, composées de : Octavian Pop (Maitre de Conférences à l'Université de Limoges), Valéry Valle (Professeur au LMS de Poitiers). La confection des éprouvettes (éprouvette en bois et le système de fixation en PVC), a été assurée par trois techniciens de l'atelier de l'IUT du Limousin (département Génie Civil) à Egletons. La partie numérique a nécessité un ordinateur fixe de capacité de calcul élevée (processeur 3 GHz, Core Duo), et un ordinateur portable personnel octroyé par la Coopération Française dans le cadre des fonds alloués à la rédaction du mémoire de thèse. Le financement des matériaux utilisés (bois, peinture, matière plastique, vis...) a été assuré conjointement par le laboratoire GEMH. La recherche bibliographique a été effectuée sur la base des ouvrages (thèses, publications scientifiques anciennes, rapports de recherche, ouvrages quelconques...) dont dispose le laboratoire, mais aussi via internet (Science Direct, Springer...).

## 2. Gestion de votre projet

- Préparation et cadrage du projet

A ce jour, et grâce à la formation plan d'expérience de l'Ecole Doctorale, le programme fixé conjointement par le directeur de thèse et moi-même est respecté. **La première année consistait à faire une recherche bibliographique et à développer les outils analytiques**. Ce travail a donné lieu à une publication et à la participation dans des congrès (nationaux et internationaux). Pendant la deuxième année, les **outils analytiques ont été implantés dans un code aux Eléments Finis**. L'année actuelle est consacrée à **finalisation de la partie expérimentale et à la rédaction du mémoire**.

Afin de respecter le cahier de charge que l'on s'est imposé, nous avons, à chaque fois, proposé des résumés dans des congrès nationaux et internationaux, ce qui nous a contraint à progresser dans l'obtention des résultats numériques et expérimentaux. Le choix des partenaires nationaux, en l'occurrence le LMS de Poitiers, s'est fait en raison de leur expérience avérée dans le domaine de l'évaluation des champs mécaniques par les méthodes sans contacts (analyse d'images). Comme partenaire international, nous comptons l'Université des sciences et techniques de Masuku (Gabon) avec qui, quelques expériences sont échangées.

Toutefois, la majorité des travaux générés par ma thèse est publiée. Il n'y a donc pas de résultats confidentiels ou de financements extérieurs. Ce travail a nécessité la prise en compte de plusieurs disciplines scientifiques transversales, et surtout l'apprentissage et la conception des outils expérimentaux.

- Conduite de projet

Le projet a consisté à établir, dans un premier temps, les **outils analytiques de la mécanique de la rupture en propagation de fissure dans les matériaux viscoélastiques**. Pour cela, nous (directeur de thèse et moi) avons eu deux rencontres par semaine au cours des trois premiers mois de la thèse (entre octobre 2005 et décembre 2005). Ces rencontres consistaient essentiellement, à vérifier l'avancement du développement analytique, l'exactitude des calculs mathématiques. Toutefois, aucune difficulté majeure n'a été rencontrée durant cette phase.

Ensuite il a été procédé à la **modélisation viscoélastique de ces outils dans le but de simuler le comportement du matériau**. A ce propos, le directeur de thèse était présent quand j'avais quelques difficultés de programmation numérique. Mais un des objectifs visé était d'acquiescer une certaine

autonomie dans la maîtrise du logiciel (Castem 2000) et de la conception des algorithmes. Cependant, certaines complexités, inhérentes à la programmation et à la durée du traitement numérique, étaient à déplorer.

Enfin, **des essais expérimentaux ont été réalisés sur une presse munie d'un système d'acquisition et d'identifier la propagation de fissure par les moyens optiques.** Ces essais ont été effectués avec l'aide d'Octavian Pop (Maître de Conférences). Les difficultés rencontrées étaient d'ordre logistiques et techniques: disponibilité de la presse, des moyens optiques, retard dans la confection des éprouvettes, difficultés dans l'approvisionnement en matériaux. Il est aussi à noter que, en marge de tous ces travaux, il y a la participation aux congrès et aux formations, la rédaction des articles et des publications, des rapports et des séminaires internes.

- Estimation du coût de la thèse

Le financement de ma thèse est assuré par la **Coopération française, via l'organisme EGIDE (centre Français pour l'accueil et les échanges internationaux), à auteur de 28 k€ pendant 3 ans.** A cela, s'ajoutent deux voyages vacances entre la France et le Gabon (**3 k€**), un billet de rapatriement à l'issue de ma formation (**1,5 k€**) l'achat des ouvrages (**0,52 k€**) les frais informatiques pour la rédaction du mémoire (**1,64 k€**) Soit un total cumulé avoisinant **35 k€**, excluant les cotisations sociales, et avec la possibilité de compléter mes revenus par une activité rémunérée.

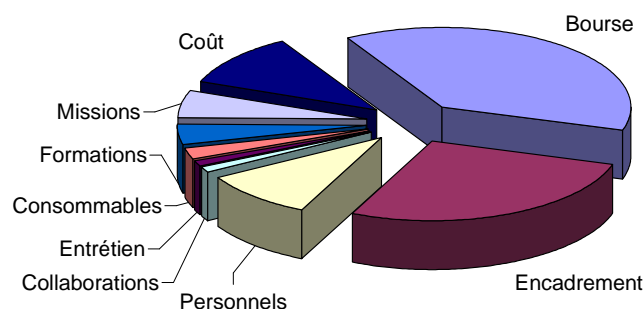
Il est difficile de caractériser avec exactitude la totalité des personnes et le temps mis à la disposition du projet, d'autant plus qu'il reste quelques essais à réaliser. Toutefois, je peux citer mon **directeur de thèse (Frédéric Dubois), un maître de conférence (Octavian Pop), trois techniciens et deux secrétaires de l'IUT d'Egletons, et aussi la secrétaire de l'Ecole Doctorale STS (Gaëlle Peyrat).**

Les frais de mission, qui concernent un congrès national par an (hébergement, repas, inscription) peuvent être évalués à **2 k€**, et environ **3 k€** pour un congrès international (Australie). Il apparaît aussi complexe de quantifier les coûts des consommables, ainsi que ceux des formations (y compris le NTC) et séminaires de l'Ecole doctorale (y compris les formations du CIES). On estimera le coût des infrastructures et des consommables à environ le dixième du coût total de la thèse. Cependant, nous pouvons donner une estimation globale du coût total de la thèse, et toutes les formations suivies (environ **200 €** par jour). Ainsi, le coût total de la thèse peut être estimé dans le **Tableau 1** qui suit :

<b>Origine des dépenses</b>	<b>Coût</b>
Bourse de coopération	35 k€
Encadrement	25 k€
Personnel IATOS (Ingénieurs et secrétaires techniciens)	9 k€
Collaborations	1 k€
Entretien de matériel	1 k€
Consommables, matériaux de manip	2 k€
Formations doctorales y compris CIES	5 k€
Frais de mission, congrès, transport	5 k€
Coûts d'infrastructures	10 k€
<b>TOTAL</b>	<b>93 k€</b>

**Tableau 1 : Estimation globale du cout de la thèse**

La Figure 1 montre la répartition du coût global de la thèse, on y remarque que l'allocation de bourse et l'encadrement constituent les parts les plus importantes.



**Figure 1 : Répartition du coût globale de la thèse**

### **3. Identification, hiérarchisation et illustration des diverses compétences mises en œuvre**

- Compétences acquises

Ces trois années de thèses m'ont permis d'acquérir des connaissances dans des domaines divers et variés. Scientifiquement, je me suis familiarisé avec les logiciels de calculs de structures par éléments finis (Castem) et la programmation numérique. L'ensemble des étapes de la thèse a été rigoureusement respecté, et en partie, grâce à la formation **Plan d'expérience**. Lors des essais expérimentaux, j'ai appris l'utilisation des machines de construction mécanique (fraiseuse, tours, perceuse...). Je me suis adapté harmonieusement à l'humeur des techniciens qui m'étaient, le plus souvent, disponibles. L'utilisation conjointe d'une presse (munie d'un système d'acquisition) et d'une camera m'a permis d'appréhender le traitement des données par analyse d'images.

Les essais effectués ont nécessité l'acquisition de consommable et surtout des essences en bois supposées être homogènes (moins de nœud possible) avec des cernes de croissance orientés dans le sens de propagation. Pour cela, j'ai dû me rendre dans plusieurs scieries afin de choisir les dimensions et le type des bois requis. J'ai ensuite établi un ensemble de devis et de bons de commande signés par le laboratoire et je me suis assuré de la livraison de l'ensemble.

Les travaux de thèse doivent être diffusés le plus possible afin d'assurer, non seulement, la visibilité du travail, mais aussi, celle du laboratoire d'accueil et de l'Ecole Doctorale. A ce titre, j'ai participé à plus d'une dizaine de congrès (nationaux et internationaux), plusieurs séminaires (**séminaire de la pluridisciplinarité** organisé par l'Ecole Doctorale), à des réunions de groupes de travail (merci à la formation **animation de groupe de travail et des réunions**), et à l'encadrement des stagiaires.

J'ajouterais aussi la maîtrise de la rédaction des articles dans des revues internationales, la **formation doctorale en Anglais pour la communication internationale** m'a, pour cela, été d'un secours non négligeable. Tous ces travaux ont favorisé la facilité à communiquer à un large public tout en vulgarisant mon travail, et à contrôler le stress. Parallèlement, l'utilisation des logiciels de traitement de texte (Word, Latex) de présentation (PowerPoint), tout comme la rédaction et la mise en page des posters, ont encore renforcé mes connaissances en la matière.

Durant mes **stages d'ingénieur Génie Civil**, j'ai été responsable d'un bureau d'étude spécialisé dans la construction des poteaux électrique en béton armé. J'ai aussi assuré des responsabilités de conducteur des travaux dans une entreprise de construction routière. Ces diverses expériences m'ont permis de diriger des équipes et de conduire des projets, la formation **Management de groupe** m'a permis ainsi, de consolider ces acquis.



- Savoir-faire et qualités personnelles

Outre la maîtrise des outils de traitement de texte (rédaction des articles et des posters, participation aux congrès), j'ai acquis un savoir faire dans la fabrication des pièces mécaniques et l'usinage du bois. Parallèlement, mon allocation de bourse étant limitée, j'ai dû trouver des sources de financements parallèles. Cela m'a obligé à travailler les week-ends (puisque mon financement me le permettait) dans une usine de plasturgie. On y fabrique des dossiers de lit, des sièges en plastique, des poubelles publiques etc... Grâce à ce travail, j'ai, non seulement, eu la possibilité d'améliorer mes revenus, de renforcer mes connaissances d'usinage sur machine, mais aussi, obtenu une formation en **secourisme et en incendie** indispensable à la communauté.

Il n'est pas toujours aisé de parler de soi-même, de surcroît lorsqu'il s'agit d'énumérer ses qualités personnelles. Entre autres, je peux citer mon abnégation au travail (cela peut se justifier par le nombre de communications scientifiques parues), ma capacité à s'adapter à une équipe, et ma disposition à faire ce qui m'est demandé dans le cadre de mes attributions. Durant la thèse, j'ai imaginé et proposé une nouvelle éprouvette (2MCG) générant les différents modes mixtes. Le respect rigoureux du plan de travail fixé a conduit à boucler la thèse en trois ans.

Académiquement, j'ai assuré des cours et des travaux dirigés en troisième année de l'Ecole d'Ingénieur, d'où l'importance des formations **Déontologie de l'enseignement supérieur**, et **Pratique de la pédagogie interactive**. Le service incorporait aussi la composition des examens et leur correction. Administrativement, je suis représentant des doctorants au conseil du laboratoire GEMH de l'université de Limoges. Cette fonction me permet de participer à l'animation de la structure et aux grandes politiques d'orientations internes.

- Transfert de compétences

Mon domaine de recherche est plus ciblé **Mécanique des matériaux** (études à l'échelle du matériau), pourtant, j'ai adapté les outils étudiés à des structures réelles du génie civil comme le bois. Ce passage de la modélisation à l'ouvrage s'est fait en s'appuyant sur plusieurs domaines scientifiques transversaux (mathématiques, physiques, informatiques...).

Les cours magistraux effectués en troisième année du cycle ingénieur de l'Ecole Polytechnique de Masuku (Gabon), m'ont amené à parler de mon domaine de compétence. Par exemple, j'ai noté des nombreuses questions sur la résistance du bois en service, comment prendre en compte les facteurs humidité et température dans le dimensionnement des structures.

Parallèlement, dans le domaine de la chaussée, nous avons reçu un thésard canadien en stage de trois mois au laboratoire. Son sujet portait sur la remontée dans fissure dans les chaussées. Je lui ai apporté mes connaissances en mécanique de la rupture afin de résoudre concrètement les possibilités d'amorçage et de propagation de fissure dans les milieux bitumineux.

#### 4. Retombées, notamment en termes de pistes professionnelles identifiées

- Retombées pour le laboratoire et la recherche

Outre une thèse supplémentaire qui sera soutenue dans les délais acceptables, le laboratoire et l'équipe de recherche ont gagné en communications scientifiques. Il serait très encombrant ici, de donner une liste exhaustive de mes travaux de recherche, mais je peux en citer quelques uns :

- Quatre publications acceptées dans des revues de rang A, avec deux actuellement en soumission (International Journal of Fracture ; Engineering Fracture Mechanics; International Journal of Solids and Structures; Wood Science and Technology).
- Trois publications acceptées dans les revues nationales (Comptes Rendus Mécanique de l'Académie des Sciences).

En termes de congrès nationaux et séminaires, on peut citer :

- Quatre communications dans les congrès internationaux (WCTE 06 USA ; WCTE 08 Japon ; ESWT 06 Italy ; ICTAM 08 Australie).
- Cinq congrès nationaux (AUGC 06 ; AUGC 07 ; AUGC 08 ; CFM 07 ; GEODIM 08)
- Séminaire de la pluridisciplinarité (Limoges 2008) ; Rencontres du RGCU (Paris 2007)

Parallèlement, tous ces travaux ont suscité des collaborations diverses dans le domaine de la mécanique de la rupture et du génie civil. Par exemple, l'analyse par images est faite en collaboration avec le LMS de Poitiers, la mécanique de la rupture en relation avec Bordeaux, et des essais sur des essences différentes seront effectués en collaboration avec l'USTM (Gabon).

- Retombées pour l'économie et la société

Les défis environnementaux actuels, comme l'effet de serre, le réchauffement climatique ou la fonte des glaciers, incitent à pérenniser les matériaux participant à la fixation du CO<sub>2</sub>. A ce titre, l'utilisation des structures à base de bois reste une solution alternative à ce problème capital. Ce travail de thèse permet donc de mieux appréhender le comportement viscoélastique du bois lorsqu'il est soumis à des sollicitations de cinétiques complexes. Par exemple, on pourra mieux prédire la fissuration due au séchage dans les structures des poutres ou les béquilles des ponts en bois. Comprendre les problèmes de délamination (fissure dans le plan de collage) dans les poutres lamellées collées utilisées, pour beaucoup, dans les ouvrages d'art.

Finalement, le fait de proposer une géométrie propre à l'identification des paramètres viscoélastiques durant le processus de fissuration, permet d'apprécier la part des effets du temps dans la ruine des structures. Cela permettra, non seulement, de participer à la résorption des problèmes environnementaux actuels (en pérennisant les structures à base de bois), mais aussi, d'amoinrir le coût de la réparation des ouvrages existants.

Enfin, ces travaux de thèse ont un impact prépondérant sur le développement et la vulgarisation de la filière bois au Gabon et dans le Limousin qui reste un département forestier.

- Retombées personnelles

Au regard du travail effectué et des résultats obtenus, deux pistes se dégagent en terme de projet professionnel :

Le profil chercheur porté par les travaux de recherche est très accentué. A titre d'exemple, le travail effectué a engendré sept publications et près de dix communications dans des congrès nationaux et internationaux. Présentement, des nombreux travaux sont en cours et doivent déboucher sur des communications scientifiques notables en termes d'évaluation par les organismes habilités.

Ensuite, le profil enseignement mérite d'être cité. Cela se justifie, non seulement par les nombreuses formations du CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur) que j'ai suivies, mais aussi par les activités d'enseignement que j'ai effectuées. C'est pourquoi, j'ai postulé et obtenu, pour l'année académique à venir, un poste d'ATER (Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche) afin de renforcer mon profil enseignant, et de continuer parallèlement mes activités de recherche et d'encadrement.

En marge de ces deux pistes clairement identifiées, la création d'entreprise ne me semble pas une option à écarter. Par le passé, j'avais déjà été opérateur économique dans le domaine de l'agroalimentaire (ouverture d'un restaurant, et un élevage des poules pondeuses). La perspective de rester dans le domaine du bois, par exemples, le dimensionnement des structures bois dans les bureaux d'études, acteur dans les usines de déroulage ou la construction (ponts, ouvrages d'art, habitation) me paraît donc un projet réaliste à court moyen ou long terme.