

UNIVERSITE DE LIMOGES
ECOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé
FACULTE des Sciences et Techniques
Xlim – Département « Ondes et Systèmes Associés »

Année 2007

Thèse N° 70-2007

Thèse
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Electronique des Hautes Fréquences et Optoélectronique
Spécialité : Télécommunication

Présentée et soutenue publiquement

par

Julien GAZAVE

Le 5 décembre 2007

**Contribution à la mise en œuvre de moyens de simulation numérique
pour l'étude de la vulnérabilité des systèmes électriques soumis à
l'environnement radiatif et électromagnétique du Laser Mégajoule**

Thèse dirigée par **Alain REINEIX (Xlim-CNRS)** et **Jean-Paul SEAUX (CEA-CESTA)**

JURY :

Président

M. Bernard JECKO

Professeur

Université de Limoges

Rapporteurs

M. Jean PAILLOL

Professeur

Université de Pau

M. Lionel PICHON

Directeur de Recherche CNRS

SupElec – Gif sur Yvette

Examineurs

M. Jean-Pierre BERENGER

Ingénieur

Centre d'Analyse de Défense - Arcueil

M. Jean-Luc LERAY

Directeur de Recherche CEA

Cabinet du Haut Commissaire - Gif sur Yvette

M. Alain REINEIX

Directeur de Recherche CNRS

Xlim – Département « O.S.A. » - Limoges

M. Jean-Paul SEAUX

Ingénieur

CEA-CESTA – Le Barp

Remerciements

Ce travail est issu d'une collaboration entre l'institut de recherche Xlim de l'université de Limoges et le Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine (CEA-CESTA). Il a été effectué dans les locaux du CEA-CESTA. J'exprime toute ma gratitude à M. Franck Jousse et M. François Farail de m'avoir accueilli successivement dans leur service. Je remercie également M. Eric Merle de m'avoir si bien intégré à son laboratoire.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Alain Reineix, Directeur de Recherche au CNRS et responsable du projet CEM au sein de l'Xlim, qui a bien voulu assurer la direction de cette thèse. Son expérience et ses précieux conseils ont permis l'accomplissement de ce travail.

Le mots me manquent pour exprimer mes remerciements à M. Jean-Paul Seaux, ingénieur au CEA-CESTA, dont le dévouement et la persévérance ont permis à ces travaux de voir le jour. Non content de m'avoir initié aux joies de la physique des particules de hautes énergies et à l'électromagnétisme, Jean-Paul a accepté la responsabilité d'encadrer ce travail et d'en défendre corps et âme l'intérêt pour le Laser Mégajoules.

Je tiens également à remercier M. Jean-Claude Gommé, ingénieur «fonction» au CEA-CESTA, pour avoir obtenu le financement de cette thèse auprès du projet LMJ.

Je remercie M. Bernard Jecko, responsable du département Ondes et Systèmes Associés de l'Xlim, qui me fait l'honneur de présider le jury.

J'exprime ma profonde gratitude à M. Lionel Pichon, Directeur de Recherche au CNRS à SU-PELEC, ainsi qu'à M. Jean Paillol, Professeur à l'Université de Pau, qui ont accepté d'assurer la tâche délicate de rapporteur.

J'associe à mes remerciements M. Jean-Luc Leray, Conseiller Scientifique auprès du Haut Commissaire à l'Energie Atomique, et M. Jean-Pierre Bérenger, ingénieur à la Délégation Générale pour l'Armement et père fondateur des fameuses PML sans lesquelles la FDTD ne serait pas ce qu'elle est aujourd'hui, qui me font l'honneur de participer à ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à tous ceux avec qui j'ai collaboré pour ce travail, notamment Gil Souny pour sa réactivité et sa disponibilité dans la réalisation des calculs MCNP, mais aussi Olivier Cessenat, père de «Sophie», pour ces discussions très instructives sur les subtilités du développement en fortran 90, Christophe Guiffaut pour ses conseils éclairés sur le raffinement de maillage, et bien évidemment Jean-Luc Bourgade pour la réalisation des expériences d'irradiation de câbles sur le laser Omega.

Ensuite, je remercie tous les membres du laboratoire SRV, en particulier mes collègues exilés du bâtiment 204 : Pascal, Benoît et son successeur Jean-Christophe, Eric et Jean-Paul, qui m'ont supporté pendant cette période de thèse et qui en ont fait un moment très agréable. Je remercie aussi toutes les autres personnes du 204 et notamment Lulu, Matthieu, Pierre, Laurence et

Fabrice. J'exprime également une pensée très émue pour notre regretté Jacques Bardy.

Evidemment, je souhaite remercier tous les autres membres du laboratoire SRV domiciliés au bâtiment 211 : Bruno, Jacques, Thierry, Alain, Laurent, Patrick, Eric, Patrice et Luc. Je vous remercie tous pour votre bonne humeur, votre joie de vivre et bien évidemment pour les rendez-vous hebdomadaires du vendredi midi... auxquels je n'ai que trop rarement participé à cause de ces satanées séances de musculation !

J'en viens donc naturellement à remercier tous mes compagnons de la salle de muscu : Omar, Thomas, Papy, JPP, Grand et Marco qui m'ont tant de fois accompagné sous cette barre fatidique des 80 kg !

Par ailleurs, je voudrais remercier tout particulièrement mes camarades thésardes du service avec qui j'ai partagé mes doutes, mes joies et mes peines de doctorant : Aurore et Anne-Cécile auxquelles je souhaite le meilleur pour l'avenir et Lucile que je félicite pour sa réussite.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon camarade post-doc Olivier pour avoir traqué les fautes de grammaire et d'orthographe dans mon manuscrit ! Sans lui, je serais encore en train de rédiger ce rapport...

Je souhaite également remercier les secrétaires du service EMR, Jeanne, Sylvie, Christelle, Chantal, ainsi que Nadine secrétaire à l'Xlim pour m'avoir facilité les démarches administratives à de nombreuses reprises.

La suite de ces remerciements est dédiée à mes autres collègues et amis du CESTA (et leur enfants) : Ludivine et sa fille Meritxell, Marie, Mélanie, Cécile, sa fille Manon et le bébé à venir dont je ne connais pas encore le nom. Et bien sûr, j'exprime ma gratitude la plus sincère à mon ami Damien Bardy, qui m'a accompagné au CESTA depuis mes débuts en stage au mois de Juin 2002 ! Je le remercie pour sa joie et sa bonne humeur, pour son humour de répétition à la Franck Dubosc, pour toutes nos discussions des plus sérieuses aux plus farfelues, pour nos fou rires et bien sûr pour les quelques «berles» que nous avons partagées...

Je souhaite remercier ici ma famille, ma mère et ma soeur Christelle qui m'ont toujours soutenu et accompagné dans cette «épreuve» laborieuse, mais aussi mon père qui malgré l'opacité du sujet a toujours fait preuve d'intérêt pour mon travail.

Enfin, je ne sais comment remercier «ti coeur» qui a partagé ma vie pendant cette thèse et qui je l'espère la partagera encore bien longtemps. Je te remercie Sylvia de m'avoir constamment soutenu et encouragé, en particulier lors de mes périodes de doute, d'avoir supporté mon stress et mon humeur exécrationnelle de fin de thèse, d'avoir toi aussi chassé les fautes de français de mon mémoire, ce dernier t'est donc naturellement dédié. Je souhaite également dédier ce manuscrit à ton frère qui nous a si tragiquement quittés alors qu'il avait trouvé sa voie et que la vie lui tendait les bras...

Table des matières

Résumé	1
1 Contexte, position du problème et notions de bases	3
1.1 Le laser Mégajoule, motivations et principes	3
1.2 Compatibilité des systèmes à l’environnement radiatif LMJ	6
1.2.1 Définition	6
1.2.2 La vulnérabilité des câbles coaxiaux	8
1.3 Introduction à la modélisation des effets transitoires dans les câbles	9
1.3.1 Pourquoi vouloir recourir à la modélisation ?	9
1.3.2 Quelques notions d’interaction rayonnement–matière utiles	9
1.3.3 Interprétation physique	16
1.3.4 Cohérence entre interprétation physique et observations expérimentales .	20
1.4 Objectif et organisation des recherches	24
Bibliographie relative au chapitre 1	27
I Démarche de simulation des courants induits	29
2 Description du modèle	31
2.1 Introduction	31
2.1.1 Motivations	31
2.1.2 Etat de l’art	31
2.1.2.1 Historique	31
2.1.2.2 Problématique des câbles	32
2.2 Bref rappel des phénomènes physiques considérés	36
2.3 Présentation de la démarche globale de simulation	38
2.4 Description du modèle TLM avec sources de courants induits	41
2.4.1 Propagation d’un signal dans un câble	41
2.4.2 Prise en compte de la photo–conductivité induite	44
2.4.3 Prise en compte des photo–courants	45

2.4.4	Détermination du générateur de courant réparti i_{dd}	46
2.4.4.1	Surfaces de «comptage» des électrons	47
2.4.4.2	Adaptation des résultats MCNP pour le modèle TLM	47
2.4.5	Prise en compte du couplage avec le champ EM ambiant	50
2.4.5.1	Impédance et admittance de transfert d'un câble	50
2.4.5.2	Modèle de lignes couplées	53
2.4.6	Modèle global	55
2.4.7	Conditions aux limites	56
2.4.8	Méthode de résolution numérique	57
3	Validation expérimentale du modèle	61
3.1	Introduction	61
3.2	Validation en environnement radiatif gamma	62
3.2.1	Présentation de la machine Balzac III	62
3.2.2	Présentation des mesures	64
3.2.3	Comparaison calculs–mesures	66
3.2.4	Conclusion	69
3.3	Validité du modèle en ambiance neutronique	71
3.3.1	Présentation des mesures	71
3.3.1.1	Le laser de puissance Omega	71
3.3.1.2	Description de l'expérience	72
3.3.1.3	Résultats des mesures	73
3.3.1.4	Analyse du résultat	73
3.3.2	Comparaison calcul–mesure	75
3.3.3	Conclusion sur la validité du modèle en ambiance neutronique	80
3.4	Conclusion	82
3.4.1	Bilan sur la démarche de simulation de courants induits	82
3.4.2	Perspectives	82
	Bibliographie relative à la première partie	82
II	Etude des possibilités de modélisation numérique d'une chambre d'ex- périences laser en électromagnétisme par la méthode FDTD	85
	Introduction	87
4	Méthode des différences finies appliquée à l'électromagnétisme	89
4.1	Présentation de la méthode FDTD	89

4.1.1	Les équations de Maxwell dans le domaine temporel	89
4.1.2	L'algorithme de K. Yee	91
4.1.2.1	Les différences finies centrées	91
4.1.2.2	Discrétisation en temps et en espace	92
4.1.2.3	Algorithme de calcul des composantes de champ	94
4.2	Les contraintes numériques de la FDTD	95
4.2.1	Le critère de stabilité	95
4.2.2	La dispersion numérique	96
4.2.3	Taille mémoire et temps calcul	99
5	Le raffinement de maillage spatio-temporel	101
5.1	Introduction au sous maillage spatio-temporel	101
5.1.1	Intérêt et principe	101
5.1.2	Algorithme schématique général	103
5.1.3	Point dur du raffinement spatio-temporel	104
5.2	Etat de l'art des techniques de raffinement de maillage	105
5.2.1	Schémas de raffinement par interpolation	105
5.2.1.1	Choix de la stratégie	105
5.2.1.2	Différents types d'interpolations spatiales classiques	106
5.2.1.3	Les interpolations temporelles	113
5.2.2	Schémas conservatifs	115
5.2.2.1	Les équations de Maxwell : un système conservatif	115
5.2.2.2	Le schéma de Yee : un schéma conservatif	117
5.2.2.3	Principe de construction d'un schéma de raffinement conservatif	120
5.2.2.4	Quelques mots sur la formulation variationnelle	124
5.2.3	Schémas pour la méthode FIT	130
5.2.3.1	Présentation de la méthode FIT	130
5.2.3.2	Apport de la méthode FIT pour le raffinement de maillage . . .	133
5.3	Proposition d'une technique de raffinement	135
5.3.1	Choix de la méthode	135
5.3.2	Principes de la méthode AMR	136
5.3.3	Adaptation de l'AMR pour la FDTD	137
5.3.4	Développement de la méthode en 2 dimensions	138
5.3.4.1	Bref rappel sur le mode 2D TE	138
5.3.4.2	Description de l'algorithme de raffinement de maillage	139
5.3.4.3	Détails des interpolations et des corrections testées	142
5.3.5	Cas tests numériques	147
5.3.5.1	Analyse de la réflexion numérique	147

5.3.5.2	Etude de la stabilité en temps long	155
5.3.6	Proposition d'une méthode en 3 dimensions	170
5.3.6.1	Bilan sur la méthode de raffinement 2D	170
5.3.6.2	Généralisation de la méthode en 3D	171
5.3.6.3	Validation numérique	173
5.3.6.4	Application possible au Laser Mégajoule	180
5.4	Conclusion	184
5.4.1	Bilan sur la méthode de raffinement de maillage proposée	184
5.4.2	Perspectives	185
6	Evaluation des possibilités de calcul avec un code massivement parallèle	187
6.1	Le supercalculateur TERA 10	187
6.1.1	Présentation	187
6.1.2	Architecture	188
6.1.3	Puissance de calcul	188
6.2	Calculs FDTD massivement parallèles appliqués au LMJ	189
6.2.1	Intérêt	189
6.2.2	Le code massivement parallèle «Sophie»	189
6.2.3	Application à la modélisation numérique en FDTD d'une chambre d'ex- périences laser	190
6.2.3.1	Objectif	190
6.2.3.2	Réalisation de maillages FDTD 3D de grandes tailles	190
6.2.3.3	Calculs des modes de résonance des chambres Omega et LMJ	194
6.3	Conclusion et perspectives	201
	Bibliographie relative à la seconde partie	202
	Conclusion générale	207
	Annexes	213
A	Méthode Monte-Carlo pour les codes d'interaction	213
A.1	Principe d'un code d'interaction	213
A.2	La méthode Monte-Carlo	216
B	Principe d'un calcul Maxwell–Vlasov	219
B.1	Introduction	219
B.2	FDTD Approximation of Maxwell's Equations	219

B.3 Self-Consistent calculation of Spatial Current Density	220
C Conductivité photo-induite dans un isolant irradié	223
D Présentation du code FDTD Sophie	225
D.1 Implementation aspects	225
D.1.1 Maxwell continuous equations	225
D.1.2 The Yee scheme and the dual Yee scheme	226
D.2 Program architecture	228
D.2.1 A Yee Finite Differences solver	229
D.2.2 A multi-bloc FDTD solver	229
D.2.3 Parallel design pattern	230
E Fréquences propres d'une cavité métallique sphérique	233

Résumé des travaux

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire, contribuent à la mise en œuvre de moyens de modélisation numérique pour l'étude de la vulnérabilité des systèmes électriques qui seront soumis à l'environnement radiatif engendré lors d'un tir à gain sur le futur Laser Mégajoule (LMJ). En effet, les expériences de fusion par confinement inertiel qui seront réalisées au sein de la «chambre d'expériences» de cette installation engendreront une ambiance électromagnétique et radiative à laquelle seront sensibles tous les équipements électriques situés à proximité.

Le travail effectué lors de cette thèse a consisté, dans un premier temps, à s'intéresser à la problématique des câbles coaxiaux qui, soumis à cet environnement, vont réagir comme des capteurs. Des courants parasites y seront alors induits. Les signaux utiles rapatriés par ces câbles risquent d'être perturbés par ces courants. De plus, selon l'intensité de ces derniers, les appareils contenant de l'électronique reliés à ces câbles pourraient être endommagés.

La première partie du travail de cette thèse a été de mettre en œuvre une démarche de simulation numérique permettant d'évaluer l'intensité des signaux parasites qui seront induits dans les câbles. Cette démarche a ensuite été confrontée à l'expérience. Le principe de cette modélisation a fait l'objet d'une communication lors du «workshop LMJ-ITER-NIF» organisé à Aix-en-Provence du 27 au 29 juin 2007.

L'impulsion électromagnétique engendrée par un tir sur le LMJ sera de forte intensité et posera le problème plus global de la compatibilité électromagnétique des systèmes. La simulation numérique pour l'évaluation du champ électromagnétique est importante dans cette problématique. La seconde partie des travaux a consisté à évaluer la possibilité de modélisation numérique de la chambre d'expériences du Laser Mégajoule en électromagnétisme transitoire par la méthode FDTD.

La chambre d'expériences est une structure 3D de grande dimension (10 mètres de diamètre) dont la modélisation numérique nécessite des ressources informatiques trop importantes pour la méthode FDTD classique.

Le raffinement de maillage est une solution possible pour permettre d'alléger les ressources nécessaires aux modélisations de grosses structures. Un algorithme de raffinement de maillage spatio-temporel stable pour la FDTD en 3D, avec un taux de raffinement quelconque, a été développé. Cette technique de raffinement a fait l'objet de communications aux congrès IEEE APS Symposium organisé à Honolulu (Hawaï-USA) du 10 au 15 Juin 2007 et au congrès OHD 2007 organisé à Valence (France) du 5 au 7 Juillet 2007.

De plus, la puissance de calcul dont disposent les ordinateurs actuels, tel que le supercalculateur TERA du CEA et ses futures évolutions (devant atteindre une puissance de calcul de 100 Teraflops d'ici 2010), rend la perspective de modélisation précise de la chambre d'expériences du LMJ parfaitement crédible avec un code FDTD 3D massivement parallèle.

La dernière étape de ces travaux a été de réaliser des calculs FDTD 3D, avec le code massivement parallèle Sophie, en cours de développement au CEA-CESTA. Un maillage FDTD 3D, à 1 milliard de cellules, de la chambre d'expériences a été généré. Les calculs massivement parallèles réalisés avec 1024 processeurs du calculateur TERA, jusqu'à un temps physique de $3.5 \mu s$ (soit 165 000 itérations temporelles du schéma FDTD), ont nécessité un temps calcul inférieur à 40 000 secondes.

Chapitre 1

Contexte, position du problème et notions de bases

1.1 Le laser Mégajoule, motivations et principes

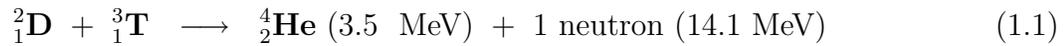
La Direction des Applications Militaires (DAM) du CEA, en tant que concepteur et fabricant des engins nucléaires des armées françaises, doit désormais garantir la fiabilité, la sécurité et la crédibilité de ces armes sans avoir recours aux essais nucléaires dont l'arrêt définitif est effectif depuis 1996. C'est pourquoi la DAM s'est lancée depuis 1995 dans un vaste programme «Simulation» qui lui permettra de tenir ses engagements sans l'habituel recours aux essais. Ce programme s'articule autour des trois axes essentiels à une démarche de simulation :

- la recherche en physique fondamentale permettant de mettre en place des modèles représentant finement les divers phénomènes physiques intervenant au cours des différentes étapes de fonctionnement d'un engin,
- la simulation numérique consistant à intégrer les modèles précédents dans des codes de calcul afin de reproduire numériquement ces différentes étapes,
- la validation expérimentale offrant une confrontation de résultats expérimentaux à ceux issus des logiciels de calculs numériques.

Le Laser Mégajoule¹ (LMJ) s'inscrit dans le troisième volet de ce programme puisqu'il permettra d'étudier le comportement de la matière dans des conditions de température et de pression proches de celles rencontrées dans un engin thermonucléaire. Le principe des expériences qui seront menées sur cette installation est celui de la Fusion par Confinement Inertielle (FCI). La FCI consiste à focaliser plusieurs faisceaux laser sur une cible composée d'un mélange de Déteu-

¹Le National Ignition Facility (NIF), équivalent américain du LMJ est aussi en cours de développement à Los Alamos-Californie. Sa mise en service est prévue pour 2009.

rium et de Tritium (D–T) afin de la porter à une température de quelques dizaines de millions de degrés. C’est l’ordre de grandeur de température à partir duquel l’agitation thermique des atomes composant la cible devient suffisante pour que certains d’entre eux puissent fusionner selon la réaction nucléaire suivante :



Les conditions de température et de pression nécessaires à cette réaction requièrent l’emploi de lasers impulsionnels de puissance. Dans le projet LMJ, le laser utilisé délivrera près de 1.8 MJ à une longueur d’onde de $0.35 \mu\text{m}$ en seulement une dizaine de nanosecondes et se composera de 240 faisceaux répartis sphériquement autour de la cible (voir figure 1.3). Ces faisceaux seront focalisés sur une cavité cylindrique en or dans laquelle sera placée la cible de D–T aussi appelée microballon. C’est ce que l’on appelle l’attaque indirecte par opposition à l’attaque directe pour laquelle les faisceaux impactent directement la cible. L’intérêt de cette méthode est de convertir le rayonnement laser UV en rayonnement X réémis par la cavité en or pour obtenir un chauffage plus isotrope de la cible (voir figure 1.1). En contrepartie, l’énergie supplémentaire à investir pour réaliser la conversion UV–X induit une diminution du taux de transmission de l’énergie laser à la cible. La partie externe de la cible sphérique d’un diamètre de l’ordre du millimètre est

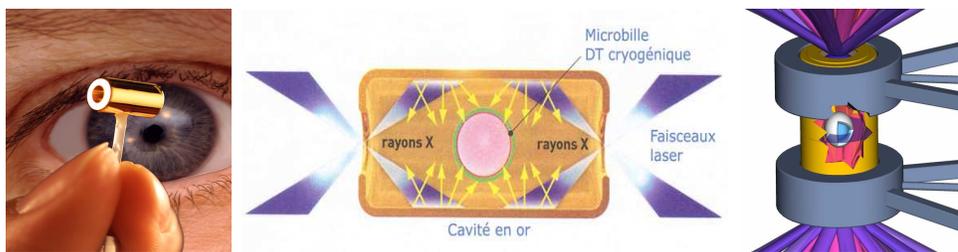


FIG. 1.1 – Principe de la FCI par laser en attaque indirecte

alors ablatée sous l’effet des X. Par principe d’action-réaction, la partie intérieure non vaporisée implose. La compression rapide continue jusqu’à former un point chaud au centre, satisfaisant les conditions de température et de densité nécessaires pour démarrer la fusion : c’est l’ignition.

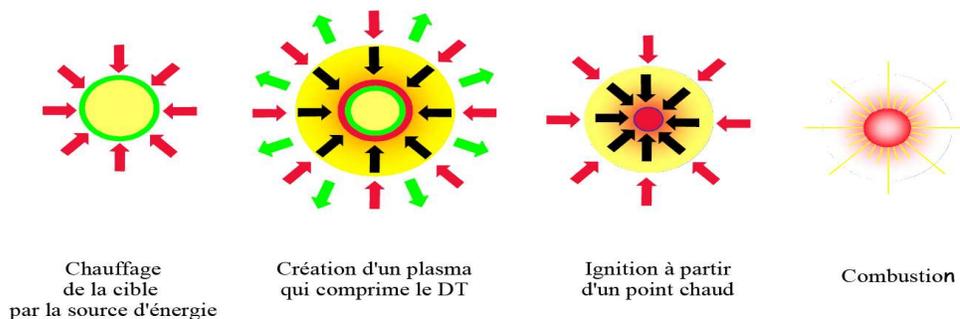


FIG. 1.2 – Les quatre étapes de la FCI

Enfin, la fusion se propage de proche en proche, grâce à l'hélium créé qui transmet son énergie cinétique au D-T voisin, jusqu'à combustion quasi-complète de la cible qui contient près de 0.3 mg de D-T. Dans son fonctionnement nominal, l'objectif du LMJ est de pouvoir initier des réactions de fusion avec un gain de 10, le gain représentant le rapport entre l'énergie dégagée par la réaction thermonucléaire et l'énergie laser apportée à la cible. Cet objectif impose l'utilisation de 240 faisceaux répartis dans 60 chaînes laser (voir figure 1.3), localisées de part et d'autre du «hall d'expériences» (appelé HE). Ce dernier, bâtiment cylindrique de 30 m de diamètre et 30 m de hauteur, contient la «chambre d'expériences» sphérique de 10 mètres de diamètre au centre de laquelle sera positionné le microballon.

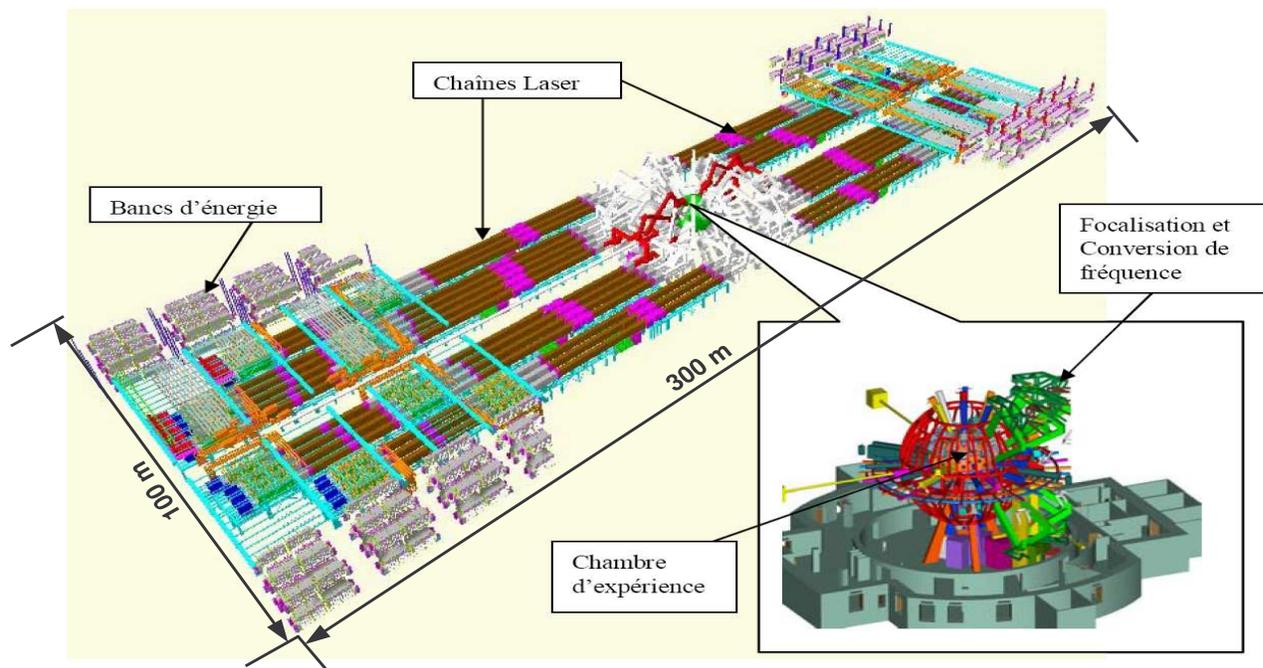


FIG. 1.3 – Installation LMJ dans son ensemble

Pour conclure sur cette rapide présentation, les performances espérées du LMJ devraient non seulement permettre d'étudier des processus thermonucléaires intervenant dans la physique des armes, mais aussi d'explorer bien d'autres domaines de la physique. En effet, destiné dans un premier temps à la maîtrise de l'énergie nucléaire pour des besoins militaires, il ouvrira les portes de l'astrophysique en laboratoire. Par exemple, il lui sera possible de reproduire les conditions de fusion existant au sein de supernovae et de confirmer ainsi les théories de l'évolution stellaire. L'achèvement du projet Mégajoule est prévu pour 2012.

1.2 Problématique de la compatibilité des systèmes à l'environnement radiatif LMJ

1.2.1 Définition

D'après le schéma de la figure 1.4, on remarque que la fusion des atomes contenus dans la microbille lors d'un tir sur le LMJ libèrera de l'énergie sous forme d'un rayonnement de type «particulaire²» composé essentiellement de neutrons de fusion (voir équation bilan de la réaction 1.1), mais aussi d'ions, de produits fusibles non consommés par la réaction, de photons de hautes énergies et d'éclats émis par la cavité en or. Cette ambiance générée lors d'une expérience de FCI représente ce que nous appellerons par la suite l'environnement radiatif LMJ.

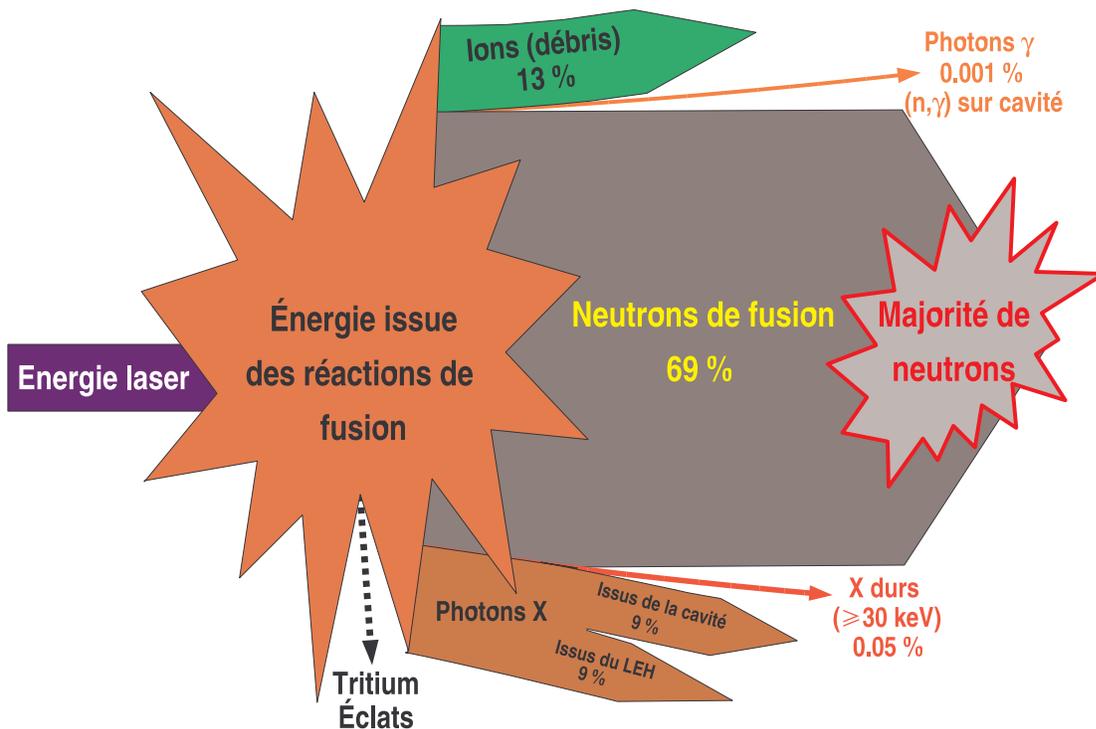


FIG. 1.4 – Environnement radiatif induit par un tir à gain sur le LMJ

L'originalité de cet environnement est triple. Il est à dominante neutronique d'une part. D'autre part, le nombre de neutrons générés dans les conditions d'un tir de puissance maximale sera de 6 ordres de grandeur supérieur à ce qui se fait de mieux à l'heure actuelle³. Enfin, malgré une faible dose⁴ déposée dans la matière contenue dans la chambre d'expérience, le débit de

²C'est-à-dire de particules émanant des noyaux des atomes contenus dans la cible.

³Laser américain Omega du laboratoire LLE de Rochester (voir paragraphe 3.3.1.1)

⁴La dose quantifie l'énergie cédée à la matière exposée au rayonnement par unité de masse.

dose⁵ sera quant à lui considérable du fait de la durée très brève (≤ 300 ps) pendant laquelle l'énergie sera déposée. Ces trois spécificités font que ce type d'ambiance radiative n'a jamais été rencontré jusqu'à maintenant pour la réalisation d'expériences en laboratoire.

En tant que futur moyen expérimental, l'objectif du LMJ est non seulement de réaliser des tirs mais aussi d'effectuer les mesures nécessaires aux études qui y seront menées. Cependant, chacun sait que la métrologie en environnement perturbé n'est pas aisée, d'autant plus lorsque cet environnement est radiatif avec des caractéristiques nouvelles encore jamais rencontrées en laboratoire, comme c'est le cas ici. Chaque élément nécessaire à la réalisation des mesures, présent à l'intérieur de la chambre d'expériences et du hall d'expériences⁶, sera vulnérable aux effets induits par l'environnement. Ainsi, la problématique de la compatibilité de fonctionnement de ces éléments dans cette ambiance radiative apparaît comme l'une des problématiques majeures de la future phase d'exploitation du LMJ.

Dans le domaine de l'électronique durcie, on distingue en général deux catégories de vulnérabilité selon les effets induits par le rayonnement [3] :

- **La vulnérabilité aux effets de dose cumulée** : ces effets sont plutôt de type «structurel». Par exemple dans le cas d'une irradiation neutronique, la collision d'un neutron avec la matière constitutive d'un composant électronique peut induire des défauts dans sa structure et par conséquent influencer sur son fonctionnement. Pour une exposition prolongée, l'accumulation des défauts peut aller jusqu'à la perte fonctionnelle du composant.
- **La vulnérabilité aux effets de débit de dose** : ces effets sont de type «transitoire». Pour de forts débits de dose, les équipements contenant de l'électronique peuvent être perturbés voire détruits par l'apparition de courants électriques transitoires. En général, ces courants parasites sont la cause de photo-courants induits par une irradiation X ou γ . Les effets transitoires dus à une irradiation neutronique ne sont pas répertoriés dans la littérature car il n'existe pas d'application avec flash intense de neutrons [3], excepté dans notre cas.

Connaissant l'ordre de grandeur de débit de dose attendu lors d'un tir à gain sur le LMJ, on s'attend surtout à voir apparaître des problèmes d'effets transitoires dans les systèmes électriques présents. Les effets de dose cumulée n'apparaîtront qu'au bout d'un certain nombre de tirs, au bout duquel la dose aura atteint un niveau suffisant. Nous nous intéresserons donc par la suite uniquement aux effets de débit de dose.

⁵Le débit de dose représente la dose déposée par unité de temps.

⁶On trouvera à l'intérieur de la chambre d'expériences des éléments type diagnostics, câbles et fibres optiques. C'est dans le HE que seront présents les équipements électroniques.

1.2.2 La vulnérabilité des câbles coaxiaux

D'après ce que nous venons de voir, l'étude de la compatibilité des systèmes associée à leur durcissement doit permettre de garantir le bon fonctionnement de toute chaîne d'acquisition de mesures dans cette ambiance peu habituelle. Avant de procéder au durcissement, il est donc nécessaire de bien identifier les effets de l'environnement, comme nous l'avons fait précédemment, mais également les différents éléments vulnérables.

Dans cette optique, nous nous proposons de décomposer une chaîne d'acquisition en trois «maillons» pouvant être étudiés séparément :

- **Le diagnostic** : capteur situé dans la chambre d'expériences, au plus proche de la cible dans le cas des diagnostics plasmas, permettant de mesurer une donnée spécifique (température, densité, neutrons émis...).
- **Le support de propagation** : permet d'acheminer le signal enregistré par le diagnostic jusqu'au système d'acquisition situé dans le HE. Ce support peut aussi bien être un câble qu'une fibre optique.
- **Le système d'acquisition** : appareil électronique, comme un oscilloscope par exemple, permettant l'acquisition de la donnée mesurée.

La vulnérabilité de chacun de ces trois éléments fait l'objet d'études et de développements spécifiques⁷ menés par différentes équipes du CEA.

Les travaux présentés dans la suite de ce mémoire ont été initiés dans le cadre de l'étude du comportement des câbles coaxiaux exposés à l'environnement radiatif LMJ. En effet, ils représentent un maillon important d'une chaîne d'acquisition, puisqu'ils permettent de rapatrier le signal issu d'un capteur vers un appareil d'acquisition sur plusieurs dizaines de mètres. Dans cet environnement, tous les câbles et autres lignes de transmission, soumis aux effets transitoires induits par le fort débit de dose, se comportent comme des capteurs sensibles aux rayonnements nucléaires. Le signal récupéré en bout de chaîne sera donc constitué d'une composante utile, captée au niveau du diagnostic, et d'une composante parasite, captée par les câbles.

De cette analyse, nous pouvons dégager une problématique spécifique aux câbles. Selon l'intensité des courants parasites, les mesures pourraient être plus ou moins bien exploitables en fonction du rapport signal à bruit résultant. En outre, si les dispositions nécessaires de protection ne sont pas prises, certains équipements connectés aux câbles risqueraient d'être endommagés. Ainsi, les câbles coaxiaux constituent un des points faibles majeurs d'une chaîne d'acquisition de mesures en terme de vulnérabilité électrique.

⁷Développement de nouveaux diagnostics plasma [1], études des courants transitoires induits dans les câbles, durcissement de composants, étude du comportement des fibres optiques sous irradiation [2], etc.

1.3 Introduction à la modélisation des effets transitoires dans les câbles

Comme indiqué en titre de ce document, le but des travaux que nous présentons est d’initier la mise en place d’une démarche de modélisation. Celle-ci s’applique dans un premier temps à la simulation des effets transitoires induits dans les câbles mais elle pourra par la suite être généralisée à l’étude de la vulnérabilité électrique du LMJ dans son ensemble.

1.3.1 Pourquoi vouloir recourir à la modélisation ?

Nous avons pu le constater dans ce qui précède, la source de l’environnement radiatif LMJ se montre très particulière en se caractérisant par un rayonnement constitué majoritairement de neutrons de fusion de 14 MeV, un fort débit de dose (le pulse neutron durant environ 300 ps) et une forte intensité avec 10^{18} à 10^{19} neutrons générés. Une rapide recherche sur les différents types de machines d’irradiation disponibles dans le monde montre qu’aucune d’entre elles ne permet de réunir ces trois critères à la fois, ce qui rend impossible la caractérisation des effets électriques transitoires par une approche purement expérimentale. Cette simple observation justifie parfaitement le désir de recourir à la modélisation. Cependant, elle soulève par la même occasion une difficulté importante. En effet, la communauté scientifique sensible à notre problématique ne peut être que très restreinte avec un degré peu avancé de recherches et par conséquent une bibliographie spécifique presque inexistante. Cette quasi absence de références bibliographiques dédiées fait que la modélisation numérique que nous désirons mettre en œuvre passe par la construction d’un modèle dans son ensemble, de l’interprétation physique jusqu’à la validation expérimentale.

1.3.2 Quelques notions d’interaction rayonnement–matière utiles

Nous présentons ici les principales notions de la physique d’interaction rayonnement–matière nécessaires à la compréhension de la suite de ce document. Après avoir introduit la notion de section efficace d’interaction d’une particule avec un noyau cible, nous décrivons les principaux mécanismes d’interactions susceptibles d’intervenir dans notre application.

- **Section efficace d’interaction**

En physique nucléaire, il existe deux types de réactions. Celles qui sont responsables de la radioactivité, comme la désintégration d’un noyau instable, sont désignées par le terme de «réactions nucléaires spontanées». Le terme de «réactions induites» est utilisé lorsque la réaction nucléaire est provoquée par un «projectile» (ion, photon, neutron, etc.) percutant un noyau

«cible». En désignant par \mathbf{a} le projectile et par \mathbf{A} la cible, et en supposant que deux produits \mathbf{b} et \mathbf{B} sont issus de la «collision» entre \mathbf{a} et \mathbf{A} , on écrit la réaction sous la forme :



C'est ce type de réaction qui intervient lors de l'interaction d'un rayonnement nucléaire avec la matière. La notion de section efficace devient nécessaire lorsqu'on veut quantifier le nombre d'interactions de type (1.2) observées quand un flux de particules \mathbf{a} traverse un volume constitué de cibles \mathbf{A} .

Pour introduire cette notion de section efficace, considérons un flux Φ_a de particules \mathbf{a} impactant une surface \mathcal{S}_A composée de noyaux cibles \mathbf{A} . Posons n_A le nombre de cibles par unité de surface. Le nombre de particules incidentes sur la surface \mathcal{S}_A est donc $\Phi_a \cdot \mathcal{S}_A$ tandis que le nombre de noyaux cibles est $n_A \cdot \mathcal{S}_A$. On en déduit le nombre total N_c^{tot} de collisions possibles pouvant induire la réaction (1.2) défini par le produit (1.3).

$$N_c^{tot} = (n_A \cdot \mathcal{S}_A) \cdot (\Phi_a \cdot \mathcal{S}_A) = n_A \cdot \Phi_a \cdot \mathcal{S}_A^2 \quad (1.3)$$

Notons maintenant le flux Φ_b de particules \mathbf{b} émises par les réactions (1.2) dans les 4π stéradians autour de la surface \mathcal{S}_A . Le nombre total de réactions (1.2) qui se sont réellement produites, noté N_{reac} , est défini par la relation (1.4).

$$N_{reac} = \Phi_b \cdot \mathcal{S}_u \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_u = 4\pi \quad (\text{aire de la sphère unité}) \quad (1.4)$$

D'après les égalités (1.3) et (1.4), on peut alors définir par le rapport (1.5) la probabilité \mathcal{P}_{reac} qu'une réaction de type (1.2) se produise dans la surface \mathcal{S}_A .

$$\mathcal{P}_{reac} = \frac{N_{reac}}{N_c^{tot}} = \left[\frac{\Phi_b}{n_A \cdot \Phi_a} \right] \cdot \frac{\mathcal{S}_u}{\mathcal{S}_A^2} \quad (1.5)$$

On peut ainsi introduire la section efficace σ de la réaction (1.2) définie par la relation (1.6).

$$\sigma = \frac{\Phi_b}{n_A \cdot \Phi_a} \quad (1.6)$$

Définie de cette manière, la section efficace d'une interaction est homogène à une aire et s'exprime en cm^2 . Les mesures de sections efficaces montrent que l'ordre de grandeur est d'environ 10^{-24} cm^2 . C'est pourquoi en physique nucléaire, on préfère exprimer les sections efficaces en barns⁸.

En conclusion, la quantité σ est donc directement liée à la probabilité d'interaction d'une particule incidente avec un noyau cible. Cette probabilité dépend grossièrement de la taille du noyau

⁸Noté b en abrégé et avec $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$

cible (donc du numéro atomique Z de la cible) et de l'énergie de la particule. C'est pourquoi en physique d'interaction rayonnement–matière, les abaques de sections efficaces sont données en fonction du matériau cible et de l'énergie du rayonnement. Pour comprendre ce qui suit, il n'est pas nécessaire de rentrer plus en détails dans la définition. Il suffit juste de retenir qu'une section efficace de réaction caractérise la probabilité que cette réaction se produise et qu'elle est homogène à une aire.

- **Interactions neutron–matière**

L'environnement radiatif LMJ se composant majoritairement de neutrons, il nous semble nécessaire de décrire brièvement les principaux processus d'interactions des neutrons⁹ avec la matière qui nous intéressent, c'est-à-dire ceux qui interviennent pour des énergies inférieures à 14 MeV. Avant de les recenser, remarquons qu'en physique neutronique deux types d'interactions sont considérés comme négligeables :

- les interactions neutron–électron car, d'une part la section efficace de cette interaction est infime, et d'autre part, le rapport de masse entre les deux particules est tel que même si une collision d'un neutron avec un électron avait lieu, la trajectoire du neutron ne serait pas modifiée. Ceci implique que le libre parcours moyen d'un neutron¹⁰ dans la matière est très long puisqu'il n'interagit pas avec le cortège électronique des atomes.
- les interactions neutron–neutron, non pas pour une question de section efficace, mais pour une raison de densité. En effet, en prenant l'exemple du LMJ, même si la réaction de fusion produit 10^{19} neutrons, la probabilité de collision de deux neutrons est infime devant la probabilité de collision d'un neutron avec un des noyaux de la matière qui l'entoure, ceux-ci étant présents en quantité beaucoup plus importante.

Comme indiqué dans le tableau 1.1, on distingue généralement deux familles d'interactions neutron–matière. La première rassemble les interactions de type diffusion, on y différencie la diffusion élastique de la diffusion inélastique. Quant à la seconde, elle réunit les interactions de type absorption.

- **La diffusion élastique**

Le neutron entre en collision avec un noyau et lui transfère une partie de son énergie sous forme d'énergie cinétique, comme dans le cas d'un choc élastique en mécanique classique. La trajectoire du neutron est déviée, on parle alors de neutron diffusé. Les caractéristiques du choc (angle de diffusion, énergie communiquée à la cible, etc.) sont facilement calculables à partir

⁹Pour une présentation exhaustive se référer au cours de neutronique [4] de l'Instn de P. Reuss

¹⁰De l'ordre du cm ce qui est très grand à l'échelle du neutron.

des lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Interactions de type diffusion		
Diffusion élastique	$n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow {}^{Z+1}\mathbf{A}$ ${}^{Z+1}\mathbf{A} \longrightarrow {}^Z\mathbf{A} + n$	Réaction toujours possible
Diffusion inélastique (n,n'γ)	$n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow n' + {}^Z\mathbf{A}^*$ ${}^Z\mathbf{A}^* \longrightarrow {}^Z\mathbf{A} + \gamma$	Réaction à seuil
Interactions de type absorption		
Réaction (n,2n)	$n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow n' + n'' + {}^{Z-1}\mathbf{A}$	Réaction à seuil
Réactions de type (n,particule chargée)	$n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow p + \mathbf{B}$ $n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow \alpha + \mathbf{B}$ <p style="text-align: center;">etc.</p>	Réactions le plus souvent à seuil
Capture radiative (n,γ)	$n + {}^Z\mathbf{A} \longrightarrow {}^{Z+1}\mathbf{A} + \gamma$	Réaction toujours possible

TAB. 1.1 – Les différents types d'interactions neutron–matière

- La diffusion inélastique

Lors de la collision, le neutron peut céder une partie de son énergie sous forme d'excitation du noyau cible. On parle alors de diffusion inélastique puisque l'énergie du neutron n'est pas totalement transférée sous forme d'énergie cinétique au noyau cible. Pour revenir dans un état stable, ce dernier se désexcite en émettant un photon γ , on parle alors de réaction (n,n'γ). Ce mécanisme n'intervient qu'au-delà d'un seuil en énergie d'autant plus élevé que la masse atomique du noyau cible est faible.

- L'absorption :

Lors de la collision, le neutron peut ne pas être diffusé. En effet, dans ce cas, il peut être totalement absorbé par le noyau cible pour former avec ce dernier un «noyau composé» possédant un neutron supplémentaire. Ce noyau composé se trouve alors dans un état excité. Plusieurs «voies de sorties» sont possibles pour conduire à un état stable telles que les réactions (n,2n), (n,p), (n,α), etc. qui sont la plupart du temps des réactions à seuil. On classe en général à part la capture radiative notée (n,γ) pour laquelle le noyau composé se désexcite en émettant un photon γ . Cette réaction peut se produire à n'importe quelle énergie, mais elle est particulièrement efficace lorsque le neutron est thermique¹¹.

¹¹Neutron très lent d'une énergie de 0.0025 eV

- Interactions photon–matière

Il existe trois principaux mécanismes d'interactions photon–matière indiqués sur la figure 1.5. Chacun de ces types de réaction est prépondérant selon l'énergie du photon incident comme l'indique la courbe de la figure 1.6. Dans la suite, nous décrivons en détail ces interactions.

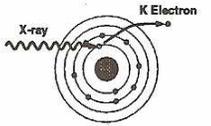
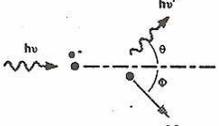
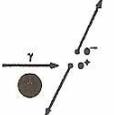
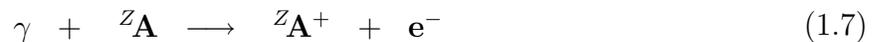
EFFET PHOTOELECTRIQUE		Prédominance (Si) 0 – 70 keV $\sigma \sim Z^4$
EFFET COMPTON		Prédominance (Si) 70 keV – 20 MeV $\sigma \sim Z$
EFFET DE PRODUCTION DE PAIRE		Prédominance (Si) > 20 MeV $\sigma \sim Z^2$

FIG. 1.5 – Les trois principaux mécanismes d'interactions photon–matière

- L'effet photoélectrique

A basse énergie, le processus prépondérant est l'effet photoélectrique. Le photon est absorbé et cède toute son énergie à un électron du cortège du noyau cible. Une partie de cette énergie sert à l'extraction de l'électron de l'atome, le reste étant emporté sous forme d'énergie cinétique par l'électron. On peut symboliser cette réaction par la relation (1.7).



Le photon incident est représenté par le symbole γ , ${}^Z\mathbf{A}$ représente la cible, ${}^Z\mathbf{A}^+$ est le même atome ionisé et \mathbf{e}^- l'électron libre éjecté appelé «photoélectron». L'énergie cinétique de cet électron est donc égale à l'énergie du photon incident moins l'énergie de liaison de l'électron au noyau. L'énergie de recul de l'atome est négligeable, car sa masse est beaucoup plus grande que celle de l'électron. Notons que l'émission du photoélectron s'accompagne de l'émission d'un photon X ou d'un autre électron¹² lors du réarrangement de l'atome.

La probabilité de cette interaction est d'autant plus élevée que l'énergie du photon est proche de l'énergie de liaison d'un électron du cortège du noyau cible. De plus, la section efficace de l'effet photoélectrique augmente très rapidement avec le numéro atomique Z du matériau cible puisqu'elle suit une loi en Z^4 .

¹²Dit électron AUGER

- o L'effet Compton

Aux énergies intermédiaires, le processus prépondérant est l'effet Compton. Dans ce cas, un photon interagit avec un électron suivant une diffusion inélastique. Au cours de l'interaction, une partie de l'énergie du photon est transmise à l'électron, qui recule avec un angle ϕ par rapport à la direction du photon incident (voir figure 1.5). Cet électron mis en mouvement est appelé électron Compton. Le reste de l'énergie apparaît sous la forme d'un photon diffusé avec un angle θ . Ces angles, ainsi que les énergies emportées par le photon diffusé et l'électron Compton sont simples à calculer en écrivant la loi de conservation de l'énergie d'une part et celle de la conservation de la quantité de mouvement d'autre part. Cette réaction peut s'écrire sous la forme de la relation (1.8). Un photon peut subir plusieurs diffusions Compton successives, en perdant progressivement de l'énergie. Il est néanmoins généralement absorbé lors d'une interaction photoélectrique quand son énergie devient trop faible.



Ce processus est prépondérant aux énergies de photons très supérieures à l'énergie de liaison de l'électron. La section efficace de cette interaction varie en $\frac{Z}{A}$ du noyau cible¹³. Comme ce rapport est très peu dépendant de l'élément considéré (environ 0.45 sauf pour l'hydrogène pour lequel ce rapport vaut 1), l'absorption d'un photon interagissant par effet Compton ne dépend que de la densité du milieu et non de sa nature et de sa composition.

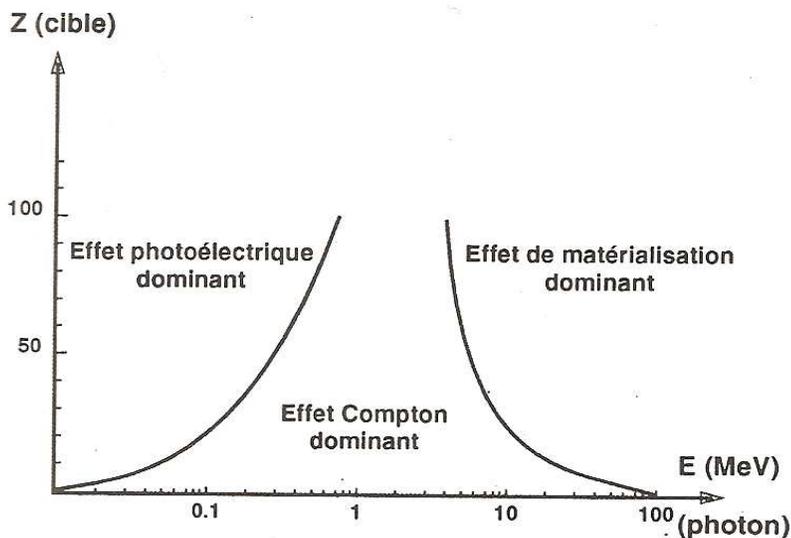


FIG. 1.6 – Zones de prédominance des différents types d'interactions photon-matière

¹³A désigne la masse atomique c'est-à-dire le nombre de nucléons, neutrons + protons, contenus dans le noyau.

- Création de paire

La création de paire consiste en la matérialisation d'une paire électron–positon lorsqu'un photon disparaît au voisinage d'un noyau ou d'un électron atomique. On peut formaliser ce phénomène sous la forme de la relation (1.9). Le positon et l'électron créés ont la même énergie cinétique.

$$\gamma + \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{e}^+ + \mathbf{e}^- \quad (1.9)$$

Le positon provenant de cette interaction est rapidement freiné par collisions successives. Finalement, ce dernier s'annihile avec un électron du milieu et il en résulte l'émission de deux photons. Comme le positon possède une très faible énergie lors de cette annihilation, les deux photons sont émis dans des directions opposées avec chacun une énergie cinétique égale à l'énergie de masse¹⁴ d'un des deux constituants soit 511 keV. L'électron généré par création de paire ionise la matière par des interactions classiques électron–matière jusqu'à la perte totale de son énergie.

Cette réaction de matérialisation ne peut se produire que si l'énergie du photon incident est suffisante pour créer une paire électron–positon. Cette énergie doit donc être supérieure à deux fois l'énergie de masse de l'électron soit 1.02 MeV. Enfin, la section efficace de ce processus augmente avec l'énergie du photon et surtout est approximativement proportionnelle à Z^2 .

¹⁴Correspond à l'équivalence masse–énergie : $E = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$.

1.3.3 Interprétation physique

Dans ce paragraphe, nous décrivons la première étape de la mise en place d'un modèle en apportant des éléments de réponse à la question suivante : *quels différents types de phénomènes physiques susceptibles d'engendrer des effets électriques transitoires doit-on prendre en compte dans une modélisation afin de représenter fidèlement la réalité ?*

Malgré les apparences, cette question sur l'interprétation physique n'est pas du tout anodine, surtout dans le cadre de cette problématique «nouvelle» soulevée par la question de vulnérabilité électrique du LMJ. En effet, comme nous l'avons dit précédemment, la littérature sur l'impact d'un rayonnement type LMJ sur les systèmes électriques est inexistante.

En revanche, la littérature est abondante dans le domaine de la modélisation des effets transitoires induits par une exposition à des rayonnements photoniques de type X ou à des impulsions électromagnétiques. De plus le CEA a acquis une grande expertise sur ce sujet depuis des décennies. C'est pour ces deux raisons que la démarche de modélisation présentée ici se fonde sur les interprétations physiques suivantes.

Pour illustrer notre propos, imaginons que la figure 1.7 représente une vue en coupe simplifiée de la chambre d'expériences du Laser Mégajoule dont les éléments essentiels à la compréhension de notre interprétation du couplage du rayonnement aux câbles sont les suivants :

- une paroi sphérique de 10 mètres de diamètre qui se compose d'une épaisseur de 10 cm d'aluminium surmontée d'une couche de 40 cm de béton. Cette paroi constitue une première barrière au rayonnement neutronique engendré par un tir ;
- des Systèmes d'Insertion de Diagnostic (SID) qui permettent d'insérer des capteurs au plus proche de la cible ;
- des hublots de verre permettant le passage des faisceaux laser apportant l'énergie nécessaire à la fusion des atomes de la cible.

Une cible, bille d'environ 2 mm de diamètre contenant un mélange cryogénique de D-T, est placée au centre de cette chambre à l'aide d'un porte cible. La chambre d'expériences est mise sous vide avant chaque tir. Sur la figure 1.7, on a représenté des câbles dans les S.I.D permettant le rapatriement des mesures. Comme l'illustre la figure 1.8, les phénomènes physiques que nous désirons prendre en compte dans notre modélisation peuvent se décomposer en 6 phases :

- **Phase 1** : Elle correspond au moment où les atomes de la cible fusionnent en libérant de 10^{18} à 10^{19} neutrons de 14 MeV selon le taux de combustion atteint.
- **Phase 2** : Elle représente le temps pendant lequel les neutrons sont transportés du centre jusqu'aux parois internes de la chambre. Etant donnée la vitesse des neutrons émis, cela équivaut à un temps d'une centaine de nanosecondes.

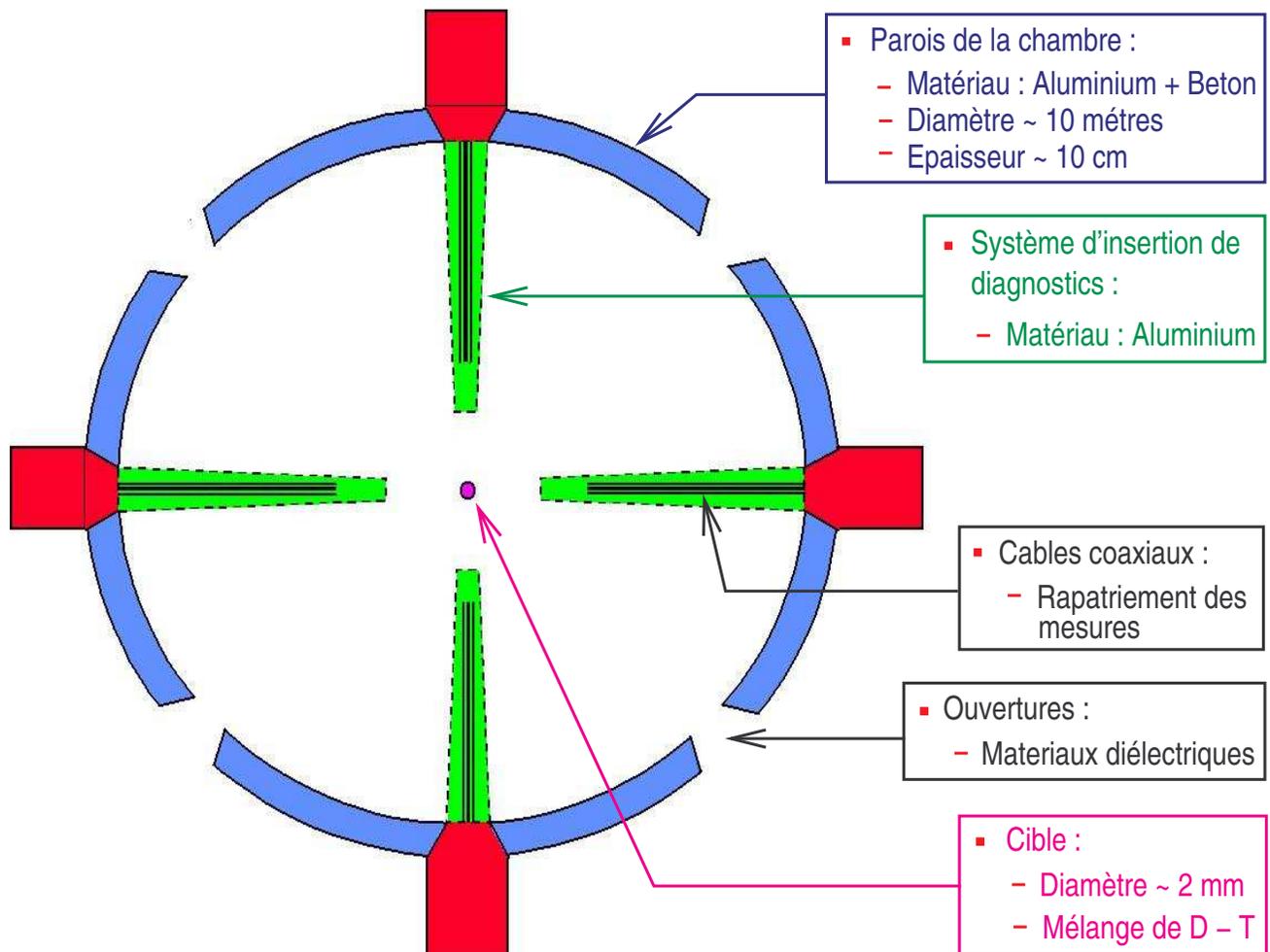


FIG. 1.7 – Vue schématique de la chambre d'expériences du Laser Mégajoule

- **Phase 3** : Pendant leur transport, les neutrons entrent en collision avec les atomes de la matière environnante lui cédant ainsi une partie de leur énergie. Cette énergie déposée induit une excitation des noyaux qui se traduit par une émission de photons γ (voir «interactions neutrons–matière» du paragraphe 1.3.2).
- **Phase 4** : Ce rayonnement γ , d’une énergie moyenne de l’ordre du MeV, interagit à son tour avec la matière en lui arrachant des électrons principalement par effet Compton (voir «interactions photons–matière» du paragraphe 1.3.2).
- **Phase 5** : Les photons, percutant les câbles, mettent en mouvement des électrons entre l’âme centrale et le conducteur externe des câbles. Ceci crée une première composante du courant parasite capté par ces derniers. Nous l’appellerons par la suite la composante «direct drive».
- **Phase 6** : Enfin, la dynamique des électrons arrachés engendre un champ électromagnétique qui se couple aux câbles et induit une seconde composante au courant parasite, de type CEM. L’intensité de cette composante dépend de la qualité de blindage du câble.

Cette première interprétation consiste donc à supposer d’une part que l’irradiation neutronique peut se ramener, par l’intermédiaire de conversions neutrons→gammas de type (n, n', γ) ou (n, γ) , à un rayonnement γ dont les effets ont été la source de nombreuses études et développements (voir section 2.1 du chapitre suivant). D’autre part, elle suppose que l’environnement neutronique initialement induit par la réaction de fusion engendrera une impulsion électromagnétique secondaire (EMP) probablement intense qui sera en partie responsable des effets transitoires induits dans les câbles.

Pour conclure, d’après cette première analyse physique, on distingue clairement deux origines aux termes sources des courants parasites induits :

- Une origine nucléaire, ou «direct drive», avec la mise en mouvement par les photons d’électrons Compton au sein du diélectrique du câble. Ce déplacement de charge crée alors une source locale de courant qui se propage ensuite le long du câble. Remarquons que dans cette interprétation, les seuls porteurs de charges considérés sont les électrons.
- Une origine électromagnétique traduisant le couplage d’un câble au champ par l’intermédiaire de son impédance de transfert caractérisant elle-même la qualité de blindage ou de faradisation du câble (voir paragraphe 2.4.5 du chapitre suivant) .

De plus, l’EMP générée dans la chambre d’expériences ne restera pas confinée dans celle-ci. Elle se propagera aussi dans le HE en «fuyant» à travers les hublots laser (voir phase 6 sur la figure 1.8). Outre la question des câbles coaxiaux, qui est un problème qu’on pourrait qualifier de «local», l’EMP soulève la problématique plus «globale» de la CEM des équipements qui seront présents dans le HE et la chambre.

1.

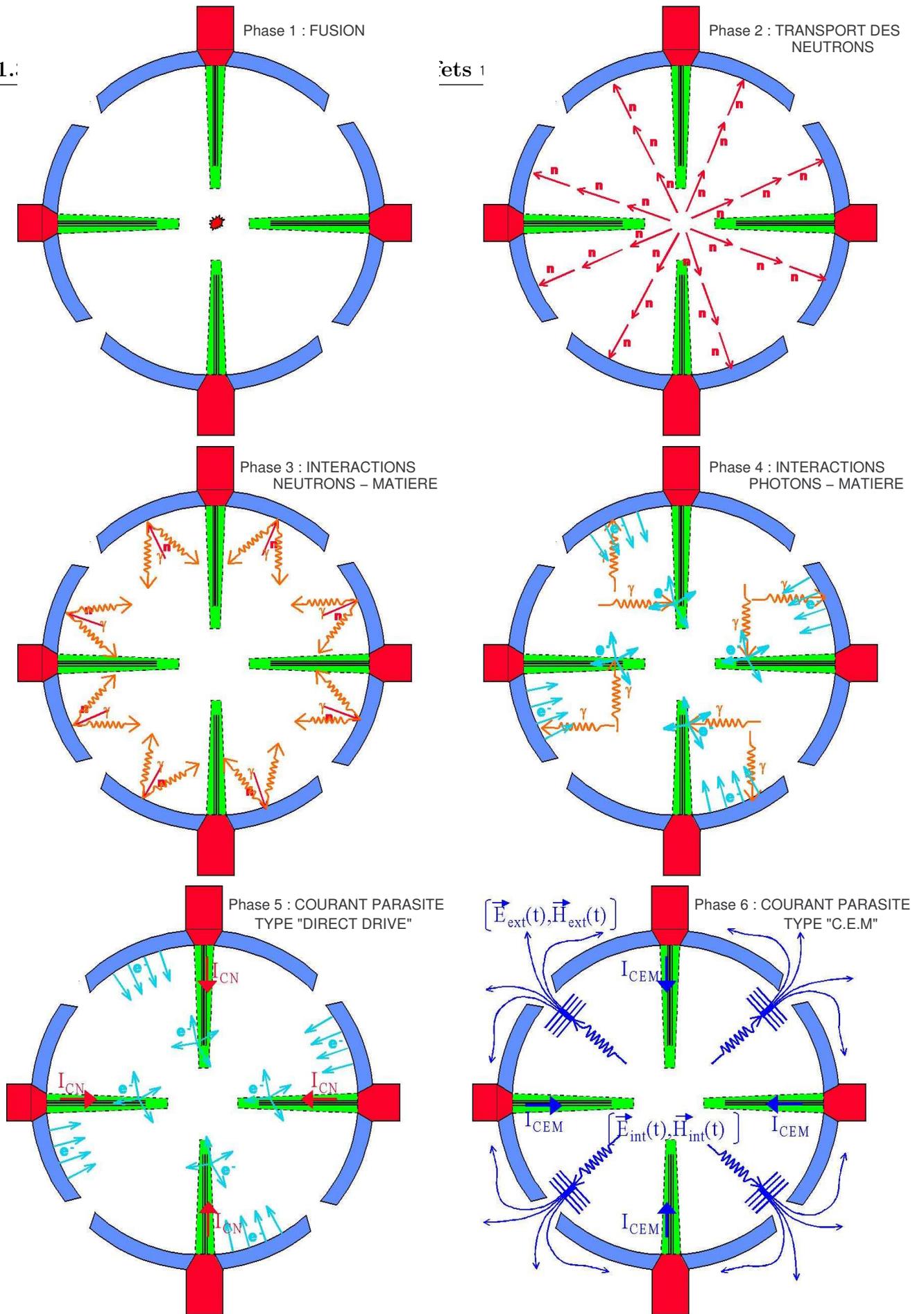


FIG. 1.8 – Les différentes phases du phénomène physique considéré

1.3.4 Cohérence entre interprétation physique et observations expérimentales

Depuis 2003, une campagne annuelle de mesures est réalisée sur les installations du laser de puissance américain Omega, par des équipes du CEA. Le laser Omega, présenté au paragraphe 3.3.1.1, est pour le moment le plus puissant disponible dans le monde et constitue le moyen expérimental le plus adapté pour étudier la vulnérabilité du LMJ. En effet, l'environnement radiatif qu'il engendre est celui qui se rapproche le plus de celui qui nous intéresse. Un tir sur Omega peut initier une réaction de fusion engendrant 10^{13} à 10^{14} neutrons soit six ordres de grandeur inférieurs par rapport au LMJ. Les expériences effectuées consistent en général à exposer un tronçon de câble à l'environnement radiatif d'Omega et à mesurer le courant parasite qui en découle.

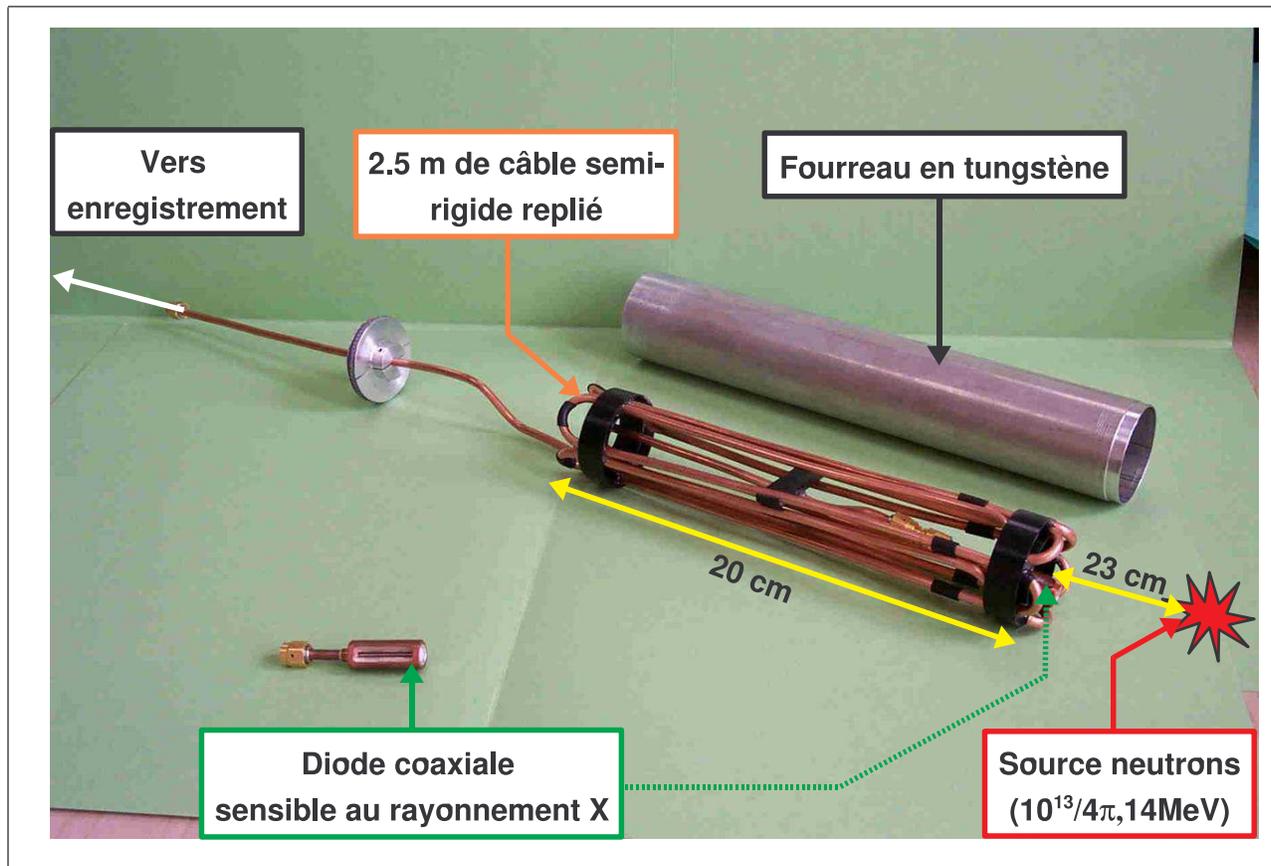
- **Mise en évidence du contributeur d'origine nucléaire**

Comme l'environnement radiatif nucléaire LMJ est caractérisé par un rayonnement très pénétrant, il est impossible de s'affranchir de la composante d'origine nucléaire des courants induits. Cependant il est simple de réduire au minimum voire d'annuler la composante CEM en utilisant des câbles parfaitement blindés au champ EM tel que le câble dit «semi-rigide» de la figure a-1.9. Ce type de câble se compose d'une âme centrale, d'un diélectrique et d'un conducteur externe de cuivre plein de $300 \mu\text{m}$ d'épaisseur pour lequel l'efficacité du blindage peut être considérée comme parfaite pour des fréquences supérieures au MHz¹⁵. C'est pour cette raison que la maquette présentée sur la photo de la figure a-1.9, irradiée à Omega, a permis d'isoler le contributeur d'origine nucléaire. Le résultat du signal induit lors de cette expérience est présenté sur la courbe b de la figure 1.9. Une analyse plus poussée de cette expérience est présentée dans le chapitre 3 de ce document, notre intention étant pour le moment simplement de montrer expérimentalement l'existence du contributeur nucléaire.

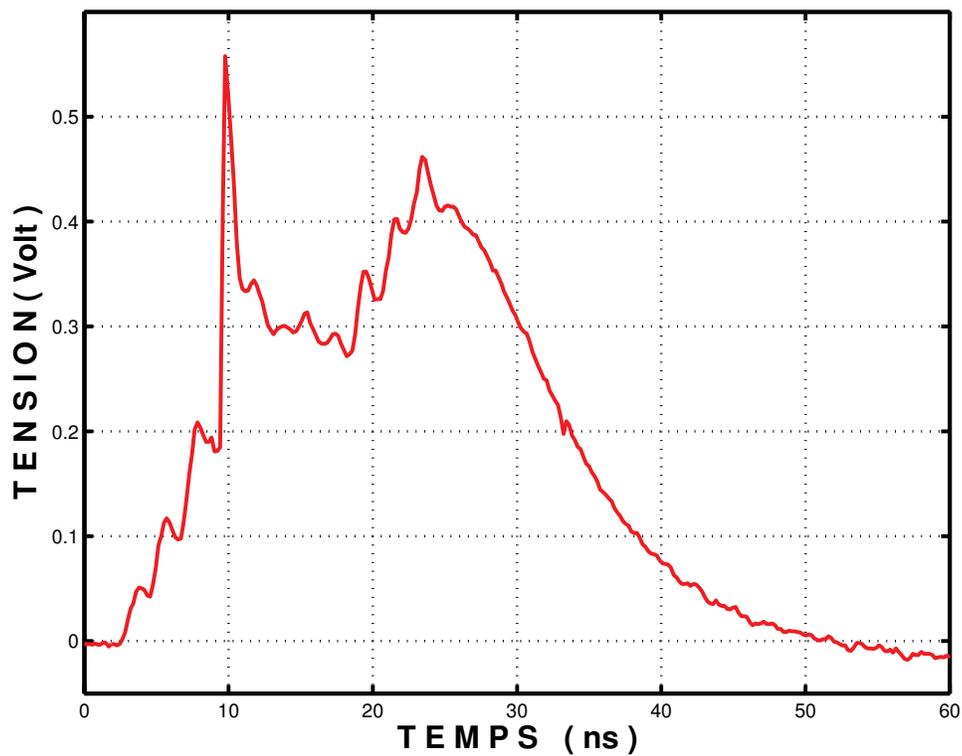
- **Mise en évidence du contributeur d'origine électromagnétique**

Malgré leur performance en terme de blindage, les câbles semi-rigides sont très peu utilisés car trop lourds à mettre en œuvre du fait de leur rigidité. C'est pourquoi des câbles à blindage tressé standards, plus flexibles et largement utilisés, ont aussi été testés à Omega (voir figure a-1.10). Etant donné que la qualité de blindage de ce type de câble est très inférieure à celle des semi-rigides, le signal mesuré présenté sur la courbe de la figure b-1.10 est constitué de la superposition de la composante d'origine nucléaire et de la composante d'origine électromagnétique. Les oscillations visibles sur le signal mesuré, n'apparaissant pas dans le cas du semi-rigide, peuvent être attribuées au couplage du champ EM au câble par son impédance de

¹⁵Voir chapitre 2 paragraphe 2.4.5.1 Impédance et admittance de transfert d'un câble

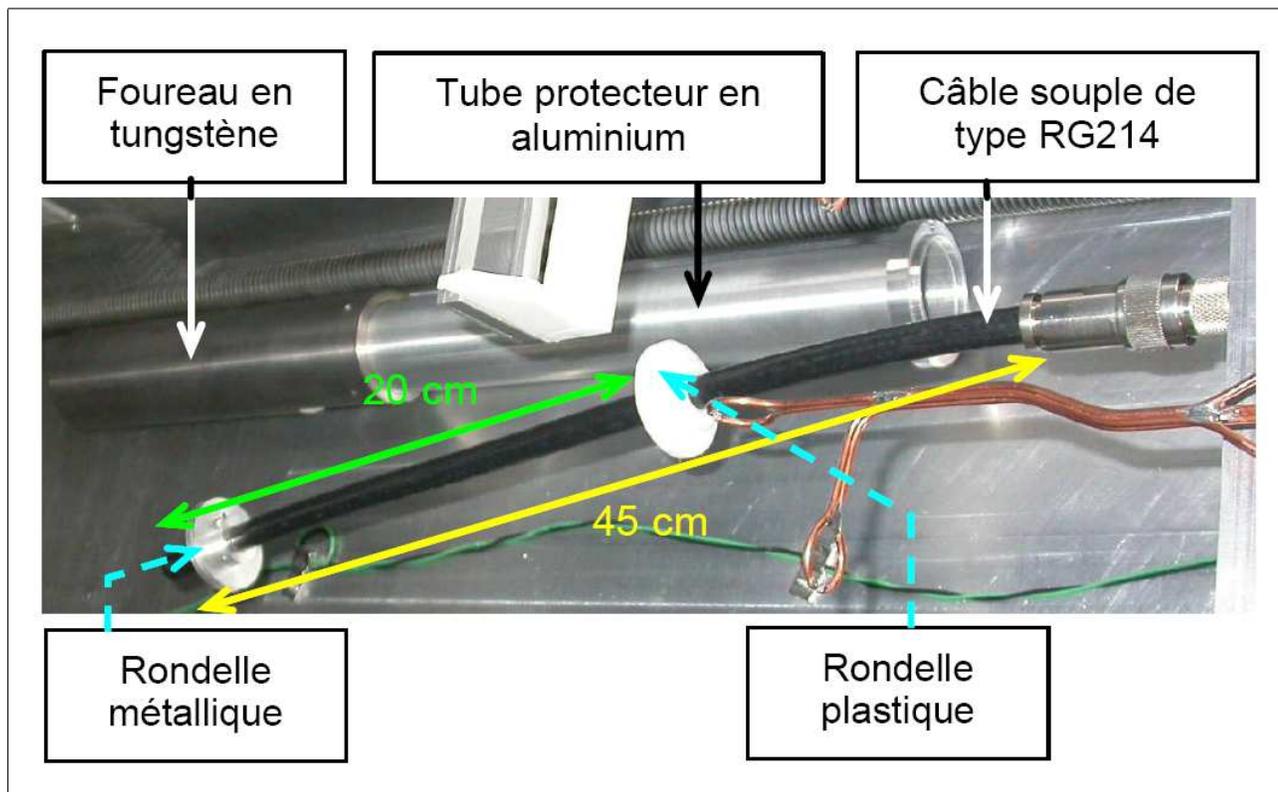


a – Câble semi-rigide parfaitement blindé au champ électromagnétique

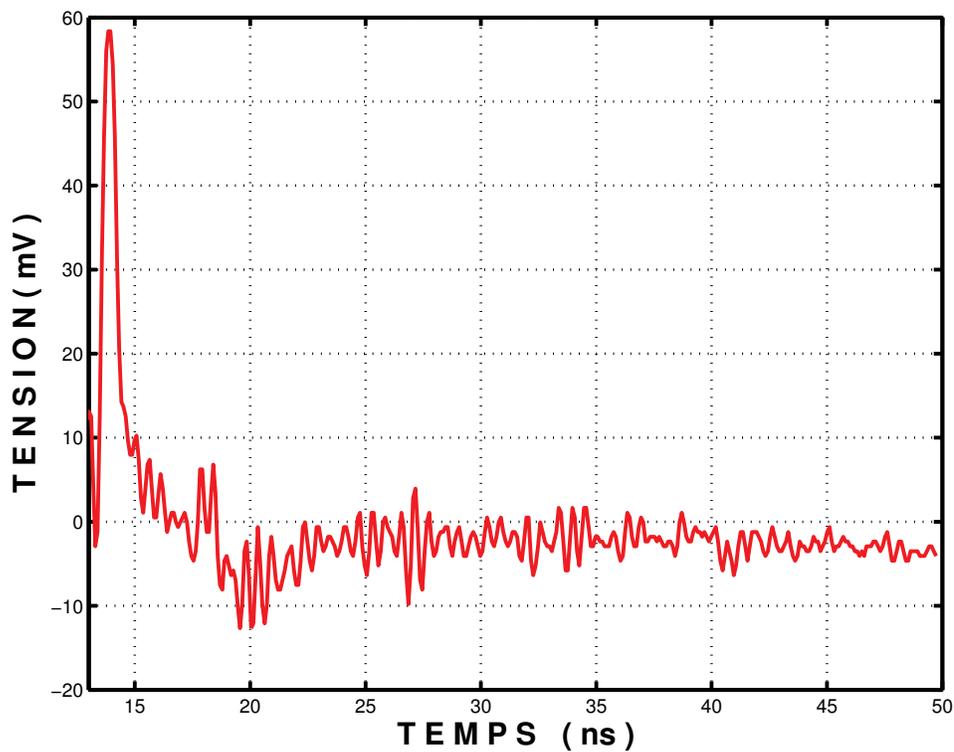


b – Réponse du câble semi-rigide : composante d'origine nucléaire uniquement

FIG. 1.9 – Câble semi-rigide (RG 402) exposé à l'environnement radiatif d'Omega



a – Câble souple standard type RG214 avec blindage à tresse standard



b – Réponse du câble RG214 : composante nucléaire et électromagnétique

FIG. 1.10 – Câble standard (RG 214) exposé à l'environnement radiatif d'Omega

transfert. Ceci se vérifie en traçant la transformée de Fourier de ce signal qui met en évidence des modes identiques à ceux de la cavité électromagnétique dans laquelle est inséré le câble.

De la même manière que dans l'interprétation physique exposée au paragraphe précédent, il apparaît expérimentalement que les câbles en utilisation opérationnelle seront perturbés à la fois par le champ électromagnétique et l'ambiance nucléaire induits dans la chambre d'expériences.

- **Mise en évidence de l'impulsion électromagnétique générée**

Au-delà de la problématique «locale» des câbles, illustrée par les résultats des expériences précédentes, l'impulsion électromagnétique soulève la question plus «globale» de la compatibilité électromagnétique des équipements électroniques présents.

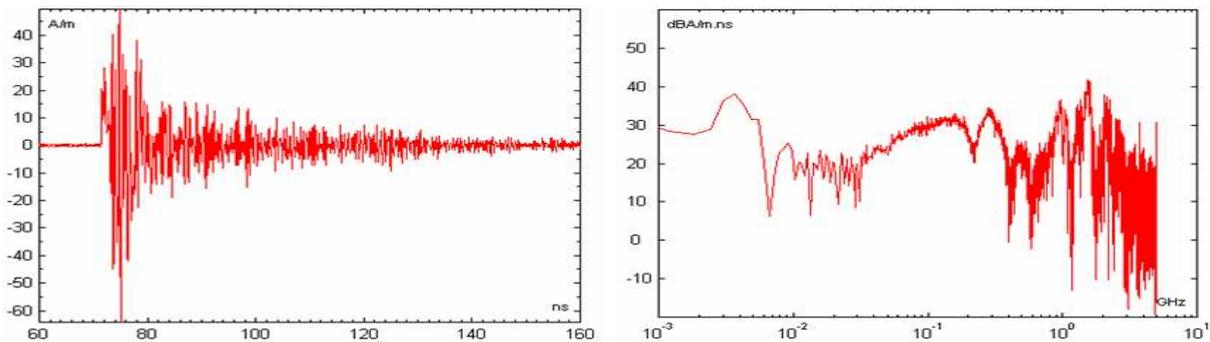


FIG. 1.11 – Résultats d'une mesure de champ réalisée lors d'un tir Omega

C'est-pourquoi des mesures de champ électromagnétique sont effectuées lors de chaque campagne menée sur le laser Omega. Les courbes de la figure 1.11 présentent le résultat d'une de ces mesures. La courbe de gauche montre l'évolution temporelle de la composante radiale du champ magnétique à 1 mètre de la source neutronique. La chambre d'expériences étant une structure résonante, le champ oscille sur une durée d'environ 200 ns avant de revenir à zéro. L'amplitude maximale de cette composante de champ radiale mesurée, de l'ordre de 100 A.m^{-1} , est relativement élevée. En outre, la courbe de droite montre que le champ est généré sur une bande de fréquences assez large allant de 0 à au moins 3 GHz.

1.4 Objectif et organisation des recherches

Etant donné que l'intensité de l'environnement radiatif du L.M.J ne peut pas être atteint à Omega, ni nulle part ailleurs, la caractérisation des effets transitoires induits se fera nécessairement par la simulation numérique. Cependant, il n'existait pas jusqu'à maintenant de moyen de modélisation numérique spécifique à cette application. Notre but a donc été d'initier la mise en œuvre d'une démarche de simulation fondée sur les interprétations physiques décrites dans ce qui précède. Ceci se traduit, comme nous le verrons dans la suite de ce mémoire, par la mise à profit de logiciels de calculs ou de modèles déjà utilisés pour d'autres applications ainsi que par le développement de nouveaux modèles.

Les expériences actuelles menées à Omega, ainsi que l'interprétation physique que nous suggérons pour évaluer les courants transitoires induits dans les câbles, convergent sur le fait que ces parasites seront la somme des contributions de deux effets distincts : un effet d'origine nucléaire et un effet d'origine électromagnétique. En terme de modélisation, la représentation de ces deux contributeurs fera appel à des notions totalement différentes. Le premier dépend de la physique nucléaire d'interaction rayonnement–matière et en particulier de la chaîne d'interactions neutrons→photons→électrons. Le second contributeur dépend quand à lui du domaine de l'électromagnétisme et de la Compatibilité Electromagnétique (CEM), puisqu'il nécessite la connaissance du champ électromagnétique et des phénomènes de couplage de ce champ aux câbles. C'est pourquoi nous avons articulé nos recherches selon les deux parties suivantes.

- **Modélisation «physico-numérique» de courants induits dans un câble**

Cette partie des recherches a consisté dans un premier temps à définir les bases d'une méthode de simulation globale permettant de modéliser la génération de courants induits dans les câbles. Nous utilisons un modèle de ligne de transmission (TLM) classique dans le domaine temporel pour représenter la propagation d'un signal électrique dans un câble. Les contributeurs CEM et «direct drive» y sont représentés par des générateurs de tension et de courant répartis. La difficulté majeure du travail réside ensuite dans la manière de déterminer ces sources.

Dans la première partie de ce mémoire, nous décrivons tout d'abord la démarche de simulation globale que nous venons d'évoquer. Ensuite, nous nous attachons à mettre en œuvre une façon de déterminer des termes sources de courants d'origine nucléaire dans le modèle TLM développé. L'interprétation physique présentée précédemment suppose que le contributeur nucléaire est dû à l'apparition de photo-courants induits par un rayonnement γ lui-même issu des interactions neutrons–matière dans la chambre d'expériences. Un code de transport de particules 3D (MCNP), utilisant une méthode de type Monte-Carlo (Voir annexe A), est utilisé pour modéliser cette chaîne d'interactions.

Nous présentons ensuite une validation de cette démarche en présentant des comparaisons calculs–mesures de courants induits dans un câble semi-rigide exposé à un rayonnement purement photonique. A travers une comparaison du modèle aux résultats de l’expérience Oméga de la figure a–1.9, nous montrons par la suite les limites de ce modèle. Enfin, nous discutons d’une amélioration possible du modèle, ainsi que d’une possible extrapolation des résultats au cas du LMJ.

- **Simulation numérique appliquée à la problématique CEM**

La problématique des câbles, ainsi que la question plus générale de la CEM, requièrent toutes deux l’évaluation des caractéristiques de l’ambiance électromagnétique qui sera générée dans la chambre et à l’extérieur de celle-ci. Cette évaluation, relevant du domaine du calcul numérique en électromagnétisme transitoire, nécessite la capacité de modéliser des structures 3D de grande taille, telle que la chambre d’expériences, dans leur globalité en prenant en compte un environnement le plus complet possible.

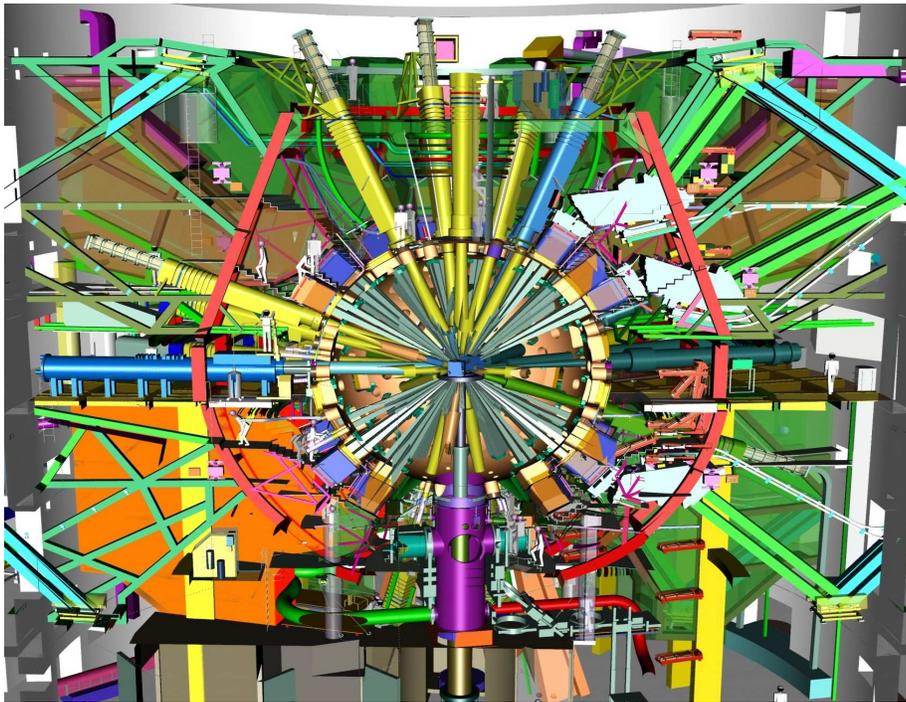


FIG. 1.12 – Vue CAO 3D de la chambre d’expériences du Laser Mégajoule

Etant donné le volume de l’objet et son taux de remplissage avec des éléments plus ou moins petits (voir la vue CAO 3D sur la figure 1.12), cette approche aurait été inenvisageable il y a quelques années, pour des raisons de taille mémoire et de temps CPU nécessaires à la simulation.

Cependant, la puissance de calcul croissante dont disposent les machines actuelles, tel que le supercalculateur TERA 10 du CEA et ses futures évolutions¹⁶, rend cette perspective parfaitement crédible. Associés à cet accroissement de la puissance machine, de nombreux développements physico-numériques novateurs augmentent encore les possibilités d'une approche globale.

Ainsi, la seconde partie des recherches a consisté à évaluer la possibilité de modélisation numérique de la chambre d'expériences du Laser Mégajoule en électromagnétisme transitoire sur la base de la méthode numérique FDTD¹⁷. En effet, l'utilisation des techniques récentes de raffinement de maillage spatio-temporel ainsi que la possibilité d'effectuer des calculs massivement parallèles permettent raisonnablement d'envisager l'évaluation de l'évolution temporelle du champ électromagnétique créé à l'intérieur et à l'extérieur de la chambre.

Dans la seconde partie de ce mémoire, la méthode FDTD ainsi que ses principales contraintes tout d'abord sont exposées. Après une présentation du principe et de l'intérêt du raffinement de maillage pour la FDTD et un état de l'art sur les différentes techniques de raffinement, un algorithme, développé en 2 D puis en 3D, est proposé.

Nous évaluons ensuite la possibilité de traitement de structures de grande taille, telle qu'une chambre d'expérience laser, en mettant à profit, pour une application LMJ, le code massivement parallèle Maxwell-Vlasov «Sophie», en cours de développement au CEA-CESTA dans un autre contexte. Des maillages FDTD 3D de grande taille des chambre d'expériences d'Omega et du LMJ ont été réalisés. Des calculs qualitatifs, massivement parallèles, sur un grand nombre d'itérations temporelles sont présentés.

¹⁶TERA devrait atteindre des performances d'environ 100 Téraflopes soutenus à l'horizon 2010.

¹⁷Finite Difference in Time and Domain : schéma numérique aux différences finies de résolution des équations de Maxwell «instationnaires».

Bibliographie

- [1] J.L. BOURGADE ET AL., «*New Constraints for Plasma Diagnostics Development due to the harsh environment of MJ class lasers*», Review of Scientific Instrument, Vol. 75, No. 3, Octobre 2004
- [2] S. GIRARD, J. BAGGIO, J.-L. LERAY, J.-P. MEUNIER, A. BOUKENTER, Y. OUERDANE, «*Vulnerability Analysis of Optical Fibers for Laser Megajoule Facility : Preliminary Studies*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 52, No. 5, Octobre 2005
- [3] J.C. BOUDENOT, G. LABAUNE, «*La compatibilité électromagnétique et nucléaire*», Chapitre 9 : *Les différents effets radiatifs et le durcissement technologique associé*, Ellipses, Thomson-CSF 1998
- [4] P. REUSS, «*Précis de neutronique*», Cours de neutronique de l'Instn, Collection Génie Atomique, Edition EDP Sciences, 2003

Première partie

Proposition d'une démarche de
simulation pour la détermination des
courants induits dans les câbles
coaxiaux

Chapitre 2

Description du modèle

2.1 Introduction

2.1.1 Motivations

Le développement de la méthode de modélisation présentée dans ce chapitre a été motivé par les campagnes de mesures de courants induits dans des câbles exposés à l'environnement radiatif du laser américain Omega (voir chapitre 3). En effet, l'objectif du développement d'un modèle «physico-numérique» est double.

Le premier, relevant du domaine de la recherche, est de bien identifier et comprendre les processus physiques responsables des effets transitoires observés. Ceci n'est possible qu'avec une relation étroite entre expérience et simulation. Des comparaisons calcul-mesure doivent permettre de valider et d'étoffer progressivement la physique du modèle.

Le second objectif, plus pragmatique, est d'être à terme capable de donner des spécifications de niveaux de courants induits qui circuleront dans les câbles présents dans le LMJ. La restitution des «expériences Omega» par la simulation permettrait d'extrapoler les résultats de ces mesures au niveau de l'environnement LMJ et ainsi de fournir les spécifications nécessaires.

2.1.2 Etat de l'art

2.1.2.1 Historique

C'est dans les années soixante que la recherche sur les effets des rayonnements radiatifs nucléaires sur les systèmes électriques ou électroniques a pris son essor [I-1]. Dans le contexte géopolitique tendu de la guerre froide, la menace des forces de frappes nucléaires stratégiques a été plus que jamais d'actualité. La communauté scientifique du nucléaire militaire s'est très

vite rendue compte que tout système contenant de l'électronique¹ est très perturbé voire inopérant lorsqu'il est soumis à un rayonnement d'origine nucléaire. Ainsi, l'Union Soviétique et les Etats Unis ont financé de nombreux travaux de recherche pour résoudre ce fâcheux problème de vulnérabilité de leurs armes, aussi bien tactiques que stratégiques, face à un environnement radiatif généré par une explosion nucléaire.

Ce type de travaux se développe d'autant plus que les années soixante marquent aussi le début de la conquête spatiale avec la mise en orbite du premier satellite «Spoutnik 1» par l'Union Soviétique en 1957 et le lancement du programme «Apollo» par la NASA en 1961. Tout comme les rayonnements d'origine nucléaire, l'environnement spatial est constitué de particules de hautes énergies auxquelles est vulnérable toute l'électronique contenue dans les satellites. Même si l'intensité du rayonnement auquel est soumis le matériel spatial n'est pas du même ordre que celle d'un environnement d'origine nucléaire, les satellites doivent pouvoir fonctionner des dizaines d'années sans intervention de dépannage possible. Cette électronique doit donc rester opérationnelle le plus longtemps possible malgré la forte dose cumulée de rayonnements qu'elle reçoit [I-2].

Ces deux problématiques ont donné naissance à une activité nommée «durcissement» ou bien «hardening» en anglais. L'objectif est de durcir un système donné à un environnement perturbateur de type nucléaire ou spatial, de façon à y garantir son fonctionnement. Cette activité englobe l'identification des vulnérabilités, la modélisation des effets, les tests expérimentaux et enfin la définition de la solution de durcissement. Dans l'article [I-1], on recense un grand nombre de vulnérabilités ou d'effets tels que : Transient Effects in Electronics (TREE), Electromagnetic Pulse (EMP), System Generated Electromagnetic Pulse (SGEMP), Effets thermomécaniques, etc.

2.1.2.2 Problématique des câbles

La réponse des câbles coaxiaux à de tels environnements est une problématique type SGEMP qui a donné lieu à de nombreuses études et à une littérature abondante entre 1960 et 1980. Le sujet est d'importance car, que ce soit dans un système d'arme ou bien au cœur d'un dispositif expérimental, le rôle d'un câble est toujours de faire transiter des informations. La sensibilité d'un câble aux rayonnements peut fortement aliéner les signaux utiles conduits par ce dernier et donc perturber le fonctionnement du système jusqu'à l'endommager ou même le détruire.

L'environnement pris en compte dans les modèles de réponse de câbles développés dans la littérature est celui engendré par une explosion nucléaire haute altitude². Le câble est supposé suffisamment éloigné du point d'origine de la réaction thermonucléaire pour que l'environne-

¹Système de mise à feu d'une arme par exemple

²Autrement dit une explosion nucléaire exoatmosphérique, soit à une altitude supérieure à la centaine de km

ment agresseur se compose uniquement d'un rayonnement X ou γ ionisant [I-2] et d'une impulsion électromagnétique de forte intensité³. Ceci constitue une première différence majeure par rapport à la problématique des câbles LMJ puisque ces derniers seront situés à une distance proche du point d'origine de la réaction de fusion nucléaire. Par conséquent, comme cela a été précisé en début de document sur la figure 1.4, l'environnement des câbles LMJ sera composé majoritairement de neutrons de 14 MeV. Ce type d'exposition n'est pas du tout traité dans la littérature de l'époque. Cependant, nous verrons par la suite que le modèle mis en place s'appuie sur cette théorie adaptée à une agression de type X ou γ . En effet, nous considérons que l'irradiation neutronique n'est pas directement responsable du signal. Selon notre «hypothèse de travail», c'est le rayonnement γ secondaire, induit par conversions (n,γ) et diffusions $(n,n'\gamma)$ dans la matière, qui génère le signal.

Le principe physique de la réponse d'un câble soumis à un rayonnement X est bien décrit dans la littérature [I-4, I-5, I-6]. Des électrons Compton sont émis depuis la surface des conducteurs en majeure partie et au sein même du diélectrique en plus faible quantité⁴. Ce déplacement de charges entre les deux conducteurs génère une composante de courant appelée courant «direct drive» [I-4] ou bien courant d'«injection de charges». Bien que le principe physique soit relativement simple, la simulation complète de cet effet est assez difficile car en général, plusieurs autres processus complexes interviennent. Ce n'est qu'au cours des années soixante-dix, avec l'article précurseur [I-5] de Vic van Lint et al., que tous ces processus ont été identifiés et répertoriés. Nous décrivons dans ce qui suit les différents phénomènes que la littérature conseille de prendre en compte [I-6, I-8] pour simuler convenablement les effets transitoires induits dans un câble soumis à un rayonnement X.

L'injection de charges : c'est le processus le plus important qui est à l'origine de la réponse du câble. Dans tout modèle de réponse de câble, il est nécessaire de calculer le déplacement des charges (électrons-Compton) au sein du diélectrique du câble. L'ensemble de ces déplacements est ensuite traduit en source de courant électrique dans le câble. Nous développerons au paragraphe 2.4.4 de ce chapitre une méthode de calcul de l'injection de charges dans le câble à l'aide d'un code d'interaction.

Les «Gaps» d'air : comme l'illustre la figure 2.1, l'isolant séparant les deux conducteurs constituant un câble coaxial peut ne pas être complètement homogène. En effet, le diélectrique peut contenir un certain nombre d'imperfections de type «micro-bulles» d'air. Ou alors, la jonction entre métal et isolant peut ne pas être parfaite et laisser apparaître une fine épaisseur d'air entre les deux. Aux endroits où sont localisés les gaps d'air, les électrons arrachés circulent

³Autrement dit Impulsion Electromagnétique d'origine Nucléaire (IEMN)

⁴Le taux d'électrons Compton arrachés est plus important à la surface du métal que dans le diélectrique.

plus facilement et le courant induit est alors supérieur. Dans certains modèles développés dans la littérature [I-7], on attribue aux gaps d'air une source particulière de courant qui s'ajoute à la source de courant direct drive. Lorsque les hétérogénéités sont nombreuses et la taille des épaisseurs d'air entre isolant et conducteurs sont suffisamment grandes, la contribution au courant qu'ils induisent peut être largement prépondérante.

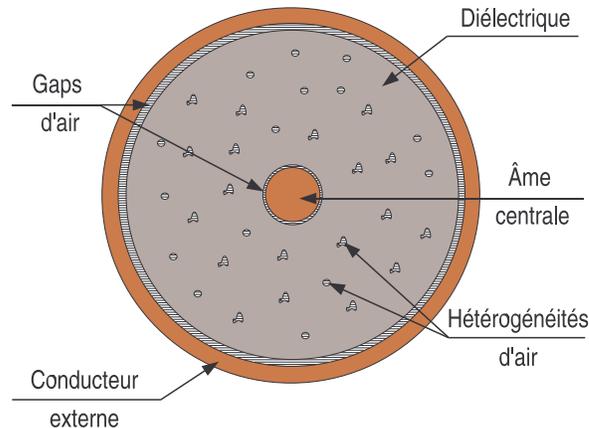


FIG. 2.1 – Gaps d'air au sein du diélectrique d'un câble coaxial

Cependant, la prise en compte de ce processus dans un modèle est assez complexe, car le phénomène est non linéaire [I-8] et nécessite de connaître la répartition volumique et la taille moyenne des hétérogénéités.

Conductivité induite dans l'isolant : en plus du courant électrique qu'ils génèrent dans le câble, les électrons arrachés au sein de l'isolant deviennent «libres» et rendent de ce fait le diélectrique momentanément conducteur jusqu'à la recombinaison totale des paires électrons-trous créées par l'irradiation. Ce processus, étudié et modélisé en particulier dans les articles [I-10, I-11], est connu sous le nom de «conductivité photo-induite» ou RIC⁵. Cette conductivité dépend du débit de dose déposée dans l'isolant. Nous décrivons dans l'annexe C le modèle analytique classiquement utilisé dans la littérature pour décrire l'évolution dans le temps de la conductivité induite. Ce phénomène induit des pertes pour le signal se propageant le long du câble et tend alors à s'opposer au signal induit par les injections de charges dans le diélectrique.

La polarisation du câble : il est fréquent que les câbles soient préalablement polarisés par un processus quelconque avant leur utilisation. Ceci signifie qu'une des deux électrodes du câble est en déficit de charges par rapport à l'autre ce qui se traduit par l'établissement d'un champ électrostatique entre les deux conducteurs. Lorsque l'isolant devient conducteur sous l'effet de la RIC, ce déséquilibre artificiel de charges tend à se combler. Selon l'article [I-6],

⁵Radiation Induced Conductivity en anglais

ce rééquilibrage des charges entre les deux électrodes pourrait induire un signal prépondérant par rapport au signal direct drive, en particulier pour des environnements de faibles fluences. Cet effet s'avère relativement problématique pour la modélisation. En effet, le courant induit dans un câble dépendant de la polarisation, tout calcul de prédiction et toute interprétation de signaux induits sont soumis à l'incertitude sur l'état de polarisation du câble.

L'aspect propagatif : une fois les sources de courants induits et la conductivité induite déterminées, il est nécessaire de calculer le signal se propageant jusqu'aux charges connectées aux extrémités du câble. Dans la littérature, on prend en général en compte cet aspect propagatif par un modèle de ligne de transmission (TLM) en représentant une longueur infinitésimale de câble par un circuit de Norton équivalent⁶ (voir paragraphe 2.4.1). La détermination de ce circuit équivalent est plus ou moins complexe selon la nature du câble, surtout dans le cas de câbles multiconducteurs [I–13]. Nous verrons par la suite que la propagation du signal dans le câble joue un rôle prépondérant dans l'interprétation de l'allure temporelle des signaux mesurés lors des expériences Omega.

Problème des câbles multiconducteurs : dans la littérature, de nombreuses études se sont cantonnées à des géométries de câbles canoniques (câbles coaxiaux, stripe-line). Cependant, dans la pratique, la géométrie des câbles peut être beaucoup plus complexe, notamment pour les câbles à plusieurs conducteurs (voir figure 2.2). Les calculs des sources de courants induits et des caractéristiques de la ligne sont moins évidents. De plus, les problèmes de gaps d'air ne peuvent pas être négligés.

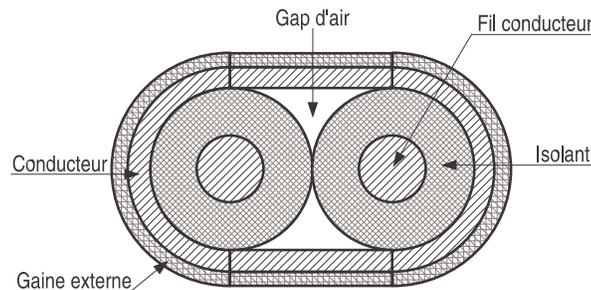


FIG. 2.2 – Vue en coupe d'un câble multiconducteurs typique

Signature des connecteurs : les connexions des câbles aux charges situées à leurs extrémités, ou bien les jonctions entre câbles de types différents, se font toujours par l'intermédiaire d'un «connecteur». L'inconvénient du connecteur est qu'il contient une masse importante de

⁶Capacité, self, résistance, générateur de tension et de courant, etc.

métal générant plus d'électrons Compton sous irradiation. Ainsi, lorsqu'il est soumis à un rayonnement X, le connecteur génère sa propre signature qui peut, à elle seule, être supérieure à la réponse du câble qui lui est relié [I-12]. Dans la pratique, s'il s'avère que le connecteur induit une signature non négligeable, on peut le modéliser par une longueur équivalente de câble.

Dans la suite de ce chapitre, nous mettons à profit les enseignements tirés de cette littérature des années 60–80 afin de les appliquer à la vulnérabilité électrique des câbles dans le LMJ. Nous nous restreignons ici à une géométrie canonique de câble coaxial puisque le câble en test à Omega est un semi-rigide de géométrie purement coaxiale. Après un bref rappel des phénomènes physiques considérés pour le développement du modèle, nous présentons la démarche globale de simulation des courants induits dans un câble soumis à un environnement radiatif de type LMJ. Ensuite, nous détaillons le modèle de ligne à sources de courant réparties. Puis nous présentons une validation du modèle d'abord en ambiance purement photonique, puis en ambiance neutronique type LMJ. Enfin, nous discutons de la validité de ce modèle.

2.2 Bref rappel des phénomènes physiques considérés

La démarche de simulation mise en œuvre se fonde sur les nombreux développements effectués depuis les années soixante [I-1] sur les effets de rayonnements X et γ sur les systèmes, ainsi que sur l'expertise acquise par le CEA dans ce domaine. La différence majeure dans l'application vulnérabilité LMJ est que l'agression engendrée par la FCI se compose majoritairement de neutrons. Cette irradiation neutronique est supposée ne pas être directement ionisante⁷. Cependant, elle peut se ramener à une irradiation photonique ionisante responsable du signal parasite capté par les câbles. La figure 2.3 représente la configuration typique utilisée lors des expériences de Rochester. Le câble en test d'une longueur de 20 cm, situé à 23 cm de la source, est inséré dans un boîtier en métal de préférence de masse atomique élevée comme le tungstène. Ceci permet de renforcer les conversions neutrons \rightarrow gammas⁸ au niveau du câble et par conséquent le courant induit. Cette représentation est aussi valable pour les câbles du futur LMJ qui seront localisés dans les SID.

On suppose que le courant parasite circulant dans un câble est dû à l'enchaînement de plusieurs phénomènes (voir figure 2.3). Les neutrons émis entrent en collision avec les atomes de la matière environnante lui cédant ainsi de l'énergie. Cette énergie déposée induit une excitation des noyaux se traduisant par une émission de photons γ . Ces derniers, ayant une énergie moyenne de l'ordre du MeV, interagissent ensuite avec la matière en lui arrachant des électrons par effet Compton. La mise en mouvement des charges crée alors une impulsion électromagnétique.

⁷C'est-à-dire que le rayonnement n'interagit pas avec le cortège électronique des atomes.

⁸La section efficace de diffusion inélastique ($n, n'\gamma$) croît avec le numéro atomique du matériau cible.

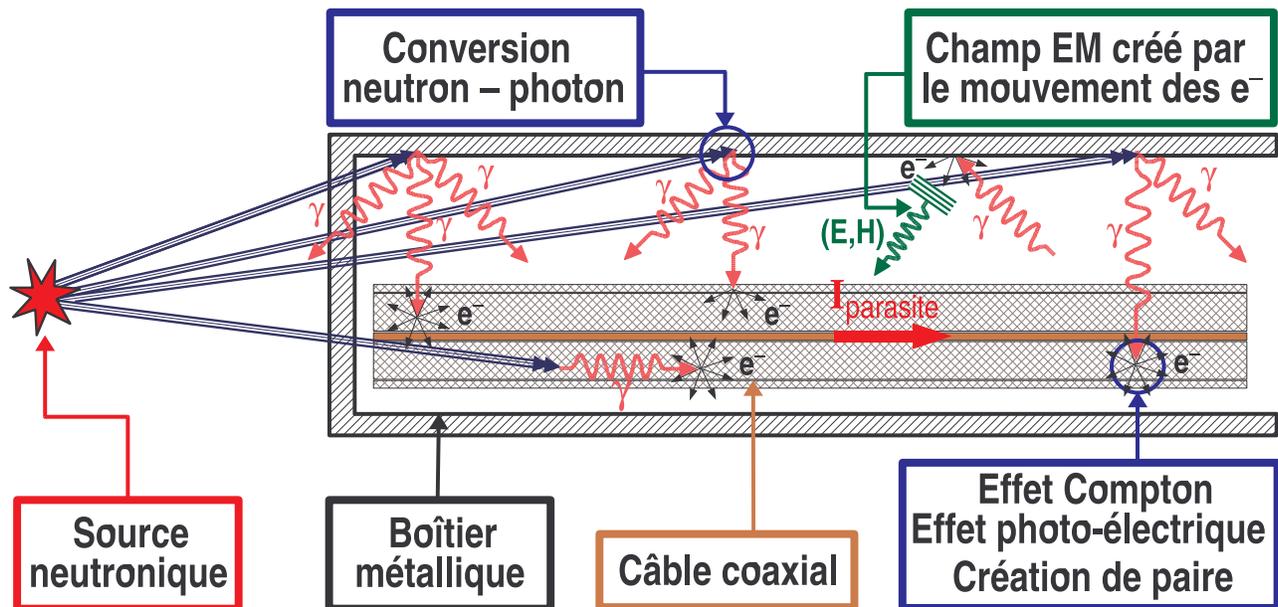


FIG. 2.3 – Illustration des effets supposés responsables du signal parasite

Finalement, le courant parasite induit dans les câbles est la résultante de deux composantes :

- une composante direct drive, directement due à la mise en mouvement d'électrons au sein même du câble,
- une composante CEM, due au couplage du câble avec le champ électromagnétique ambiant. L'intensité de cette composante dépend de la qualité du blindage du câble.

La modélisation des phénomènes se fonde donc sur l'hypothèse fondamentale suivante :

« Dans le cadre des études de vulnérabilité des câbles, l'irradiation neutronique induite par un tir sur le laser Omega ou sur le futur LMJ se ramène à une irradiation photonique γ par l'intermédiaire de conversions neutrons \rightarrow gammas dans la matière ».

Cette hypothèse permet ainsi de se ramener au problème plus connu de la vulnérabilité d'un équipement à une agression de type photonique.

2.3 Présentation de la démarche globale de simulation

Avant d'entrer dans les détails du modèle, nous décrivons dans ce paragraphe les grandes lignes de la démarche complète de simulation. Le schéma de la figure 2.4 montre le cheminement à suivre pour obtenir en sortie un courant induit dans un câble à partir des caractéristiques de l'agression fournies en données d'entrée. Pour chacune des étapes de cette démarche, nous avons identifié quels sont les moyens numériques à notre disposition. Dans la suite de ce paragraphe, nous décrivons succinctement les principales étapes mentionnées dans la figure 2.4.

- **Première étape : caractérisation de l'agression**

- Type de rayonnement : X , γ , neutrons
- Répartition spatiale de la source : ponctuelle, uniformément répartie
- Forme temporelle de l'agression : temps de montée, temps de relaxation, etc.
- Répartition en énergie des particules composant la source
- Intensité de la source : détermination de la fluence

- **Deuxième étape : évaluation de la répartition des électrons arrachés**

Les caractéristiques du rayonnement définies dans la première étape sont utilisées en tant que conditions initiales dans un code d'interaction rayonnement–matière (voir annexe A paragraphe : «Principe d'un code d'interaction»). Ce type de logiciel gère la propagation du rayonnement dans l'espace ainsi que ses interactions avec la matière en résolvant l'équation de Boltzmann par une méthode statistique dite Monte-Carlo (voir annexe A paragraphe : «La méthode Monte-Carlo»). Ainsi, dans le cas de la FCI, un calcul couplant le transport neutrons–photons–électrons permet d'obtenir la répartition en espace, temps et vitesse des électrons arrachés à la matière. Pour notre application, nous avons choisi d'utiliser un code d'interaction 3D nommé MCNP⁹ afin de représenter fidèlement les interactions du câble avec le rayonnement.

- **Troisième étape : évaluation du champ électromagnétique ambiant**

Une particule de charge q animée d'une vitesse \mathbf{v} dans le vide induit une densité de courant $\mathbf{j} = q \cdot \mathbf{v}$ générant alors une variation dans le temps du champ électrique (loi d'Ampère) et par conséquent une apparition d'un champ magnétique (loi de Faraday). Ainsi, une particule chargée en mouvement induit un champ électromagnétique, d'autant plus lorsque c'est toute une population de charges qui est en mouvement comme c'est le cas ici.

L'évolution d'une population de particules chargées dans le vide, soumise à son propre champ,

⁹Monte-Carlo N–particles transport code

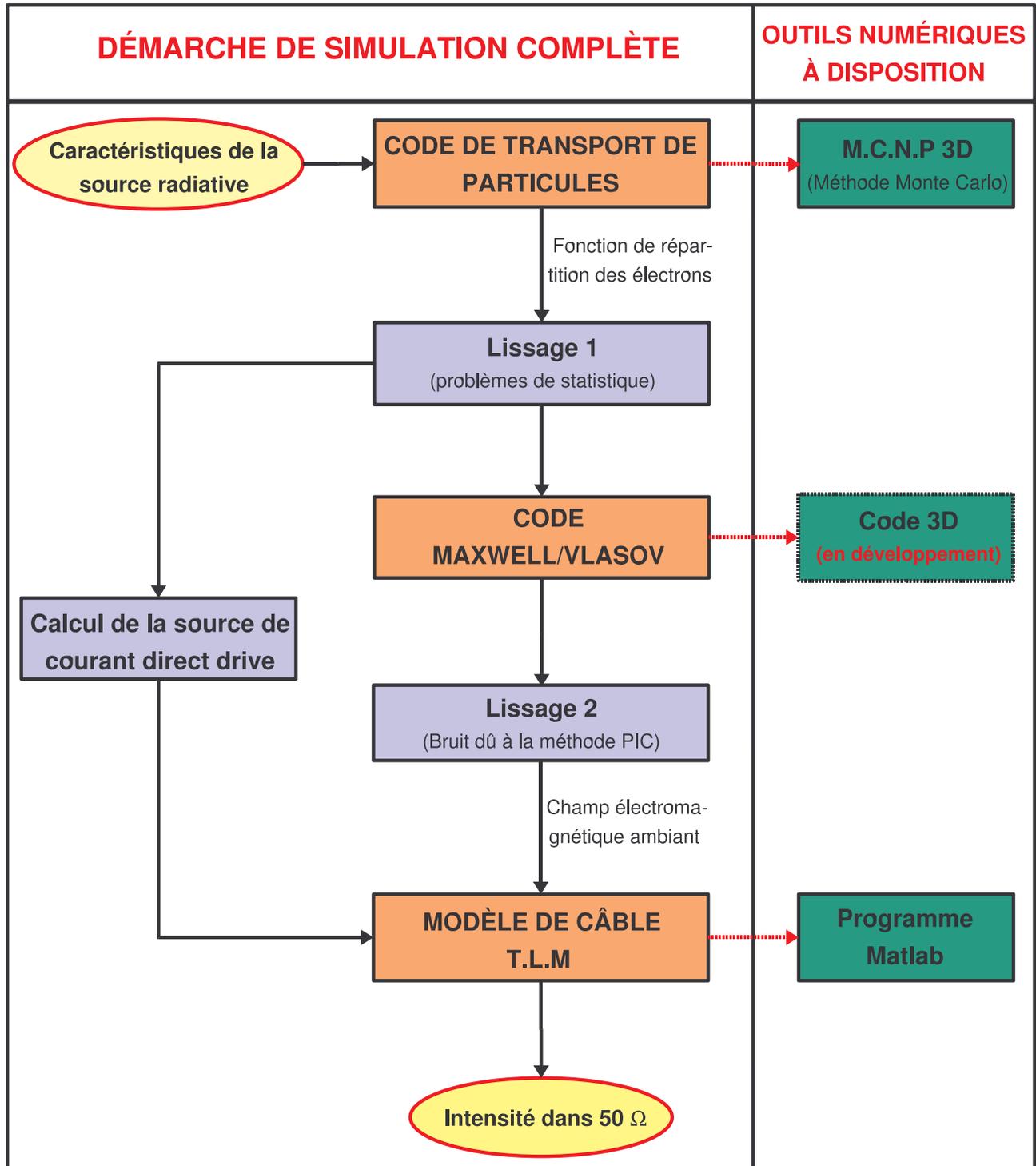


FIG. 2.4 – Démarche de simulation proposée

se modélise par le système d'équations couplées de Maxwell–Vlasov. Les équations de Maxwell gèrent l'évolution du champ électromagnétique dans le temps tandis que l'équation de Vlasov gère la dynamique des particules. Le couplage entre les deux équations se fait par la force de Lorentz à laquelle sont soumises les charges, pour Vlasov, et par la densité de courant créé par le mouvement des charges, pour Maxwell.

Ainsi, la répartition électronique calculée dans l'étape précédente est à son tour utilisée en tant que condition initiale dans un code dit Maxwell–Vlasov (voir annexe B) qui permet d'évaluer l'ambiance électromagnétique générée par les électrons arrachés. L'idéal dans notre cas est d'utiliser une version 3D de ce type de logiciel. Il n'existe pas pour le moment de version 3D disponible en France. Cependant, elle est en cours de développement au CEA dans une version massivement parallèle.

Remarquons que le bruit numérique induit par la «statistique» dans le calcul d'interaction de l'étape précédente nécessite un traitement de «lissage» des résultats. En effet, il est préférable, pour des raisons numériques, de fournir des conditions initiales régulières c'est-à-dire «non bruitées» au code Maxwell–Vlasov¹⁰.

- **Quatrième étape : évaluation du courant induit**

La dernière étape de cette démarche est l'évaluation des courants transitoires induits dans le câble en utilisant un modèle TLM avec des termes sources de courants répartis. Ce modèle est détaillé dans le paragraphe 2.4. La contribution direct drive est calculée directement à partir des résultats MCNP donnant la répartition des électrons arrachés dans l'isolant du câble. Le contributeur électromagnétique est calculé à partir du champ ambiant évalué dans l'étape précédente.

Pour conclure sur cette démarche de simulation, nous constatons qu'elle consiste en une utilisation chaînée de trois moyens de simulation différents. Ces logiciels étant utilisés par des communautés différentes ne sont donc pas prévus pour ce type d'enchaînement. Ainsi, les sources d'erreurs sont multiples, en particulier «aux interfaces» entre chaque code, où les résultats donnés par l'un doivent être transformés en données utilisables par l'autre.

Les étapes intermédiaires de calcul d'interaction et d'évaluation des champs consistent uniquement en l'utilisation de codes «industriels» ne nécessitant pas la mise en place de nouveaux modèles. C'est pourquoi, dans la suite de ce chapitre, nous détaillons uniquement la dernière étape de la démarche qui a nécessité le développement d'un modèle TLM pour l'évaluation des courants induits.

¹⁰Ce code, du nom de «Sophie», est présenté dans l'annexe D et utilisé au chapitre 6.

2.4 Description du modèle TLM avec sources de courants induits

2.4.1 Propagation d'un signal dans un câble

Un câble coaxial composé d'une âme centrale, ou conducteur interne, et d'un conducteur externe séparés par un isolant (figure 2.5), peut être considéré comme un guide d'ondes [I-15]. En effet, le signal mesurable se propageant dans un câble est le résultat du guidage d'une onde électromagnétique dans la direction du câble. Contrairement à ce que l'on pourrait penser à première vue, le signal porté par un câble coaxial se propage non pas dans la partie métallique de l'âme centrale mais dans le milieu diélectrique. Pour un guide d'ondes à deux conducteurs, comme dans le cas du câble coaxial, le mode de propagation privilégié des ondes est le mode Transverse Electrique et Magnétique (mode TEM).

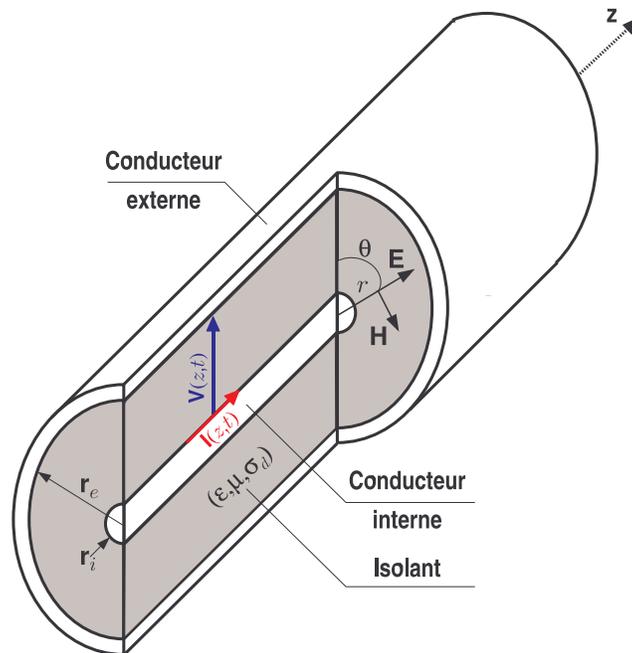


FIG. 2.5 – Vue en coupe d'un câble coaxial

Dans ce qui suit nous montrons, dans le cas d'un câble coaxial, comment remonter au système d'équations reliant l'intensité \mathbf{I} circulant dans les conducteurs à la différence de potentiel \mathbf{V} les séparant, à partir des équations de Maxwell écrites dans le diélectrique. Pour cela, considérons le guide d'ondes coaxial de la figure 2.5. Supposons que le câble est suffisamment long dans la direction z (soit $L \gg r_e$) afin de négliger les effets de bords. Ainsi on peut considérer que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} se propagent selon le mode TEM dans la direction z . Ceci signifie que les composantes de champ \mathbf{H}_z et \mathbf{E}_z sont nulles. De plus la symétrie cylindrique du problème

implique que les variables ne dépendent pas de θ . Nous faisons l'hypothèse que les conducteurs sont parfaits¹¹. Nous négligeons pour l'instant d'éventuelles pertes dans le diélectrique¹². En se plaçant dans un repère cylindrique on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \mathbf{E}_r(r, z, t) \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{E}_\theta(r, z, t) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{H}(r, \theta, z, t) = \mathbf{H}_r(r, z, t) \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{H}_\theta(r, z, t) \cdot \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans ces conditions, les équations de Maxwell en coordonnées cylindriques s'écrivent dans le diélectrique :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_r = -\partial_z \mathbf{H}_\theta \\ \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_\theta = -\partial_z \mathbf{H}_r \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \mathbf{H}_\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu \partial_t \mathbf{H}_r = \partial_z \mathbf{E}_\theta \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_\theta = -\partial_z \mathbf{E}_r \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \mathbf{E}_\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

De la dernière équation on déduit que \mathbf{E}_θ est de la forme $\frac{c(z,t)}{r}$. D'après l'hypothèse de conducteurs parfaits, pour toute valeur de z et de t , \mathbf{E}_θ s'annule en r_i et r_e , ce qui implique que la composante \mathbf{E}_θ est nulle. Ainsi, on déduit de la deuxième et de la quatrième équation que la composante \mathbf{H}_r est constante. Toujours d'après l'hypothèse de conducteurs parfaits, \mathbf{H}_r s'annule sur les bords donc cette composante est nulle. Ainsi, dans ce guide d'ondes, les équations de Maxwell se réduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_r = -\partial_z \mathbf{H}_\theta \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_\theta = -\partial_z \mathbf{E}_r \end{cases} \quad (2.3)$$

Ces simplifications faites, le but est désormais de faire le lien avec les variables \mathbf{V} et \mathbf{I} . Sachant que \mathbf{E} dérive d'un potentiel Φ , $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, la différence de potentiels $\mathbf{V}(z, t)$ entre les deux armatures conductrices du câble s'écrit :

$$\mathbf{V}(z, t) = \Phi(r_i, t) - \Phi(r_e, t) = \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{E}_r(r, z, t) dz$$

En intégrant la deuxième équation de (2.3) entre r_i et r_e , on obtient la relation :

$$\mu \partial_t \left[\int_{r_i}^{r_e} \mathbf{H}_\theta(r, z, t) dr \right] = -\partial_z \mathbf{V} \quad (2.4)$$

En vertu du théorème d'Ampère, le courant $\mathbf{I}(z, t)$ circulant dans le câble est relié à \mathbf{H}_θ par l'égalité :

$$\mathbf{I}(z, t) = \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_\theta r \theta d\theta = 2\pi r \mathbf{H}_\theta(r, z, t)$$

¹¹Ceci signifie que $E_\theta = 0$ sur la surface des conducteurs.

¹²On suppose que la conductivité σ_d de l'isolant est nulle.

Ainsi, en réinjectant cette expression dans (2.4) on obtient la première équation des télégraphistes :

$$\partial_z \mathbf{V}(z, t) = -\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \cdot \partial_t \mathbf{I}(z, t) \quad (2.5)$$

De la même façon, en intégrant la première équation de (2.3) entre r_i et r_e , on obtient la deuxième équation des télégraphistes :

$$-\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \cdot \partial_z \mathbf{I}(z, t) = \partial_t \mathbf{V}(z, t) \quad (2.6)$$

En introduisant les constantes L , homogène à une inductance par unité de longueur, et C , homogène à une capacité par unité de longueur :

$$\begin{cases} L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) & [\text{H.m}^{-1}] \\ C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} & [\text{F.m}^{-1}] \end{cases} \quad (2.7)$$

On retrouve le système d'équations (2.8) bien connu modélisant la propagation d'un signal le long d'une ligne de transmission sans perte.

$$\begin{cases} \partial_z \mathbf{V}(z, t) + L \cdot \partial_t \mathbf{I}(z, t) = 0 \\ \partial_z \mathbf{I}(z, t) + C \cdot \partial_t \mathbf{V}(z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

En théorie des lignes, on exprime ce système sous forme d'un circuit électrique (L, C) équivalent à une longueur infinitésimale dz de la ligne (voir figure 2.6).

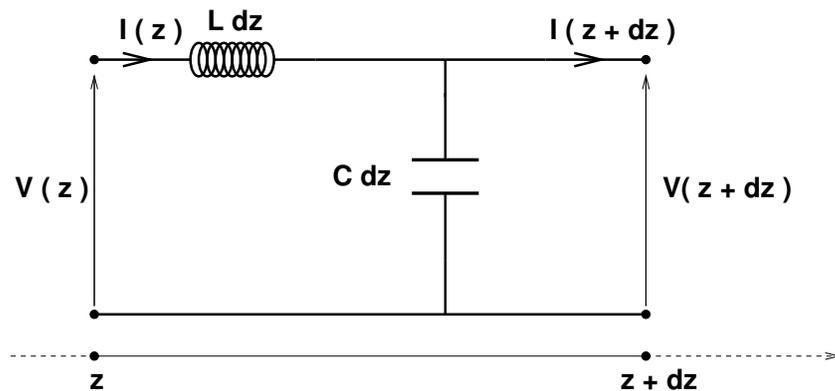


FIG. 2.6 – Circuit équivalent infinitésimal

Remarquons que le système (2.8) obtenu ici dans le cas d'un câble coaxial peut se généraliser à tout type de câble. Les expressions (2.7) donnant l'inductance et la capacité par unité de longueur ne sont évidemment plus valables. Néanmoins, les valeurs de L et de C sont en général fournies par les constructeurs de câbles.

Deux autres paramètres utiles caractérisant une ligne sont la vitesse de propagation v_p et l'impédance caractéristique Z_c . Ces caractéristiques s'expriment facilement en fonction de L et C . En effet, on peut combiner les deux équations du système (2.8) pour obtenir l'équation d'onde suivante vérifiée par \mathbf{V} et \mathbf{I} :

$$\partial_z^2 \Phi - LC \cdot \partial_t^2 \Phi = 0$$

On en déduit que dans un câble de caractéristiques L et C , un signal se propage à la vitesse v_p reliée à L et C par la relation (2.9). Cette vitesse est égale à la vitesse de propagation des ondes dans le diélectrique.

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (2.9)$$

De plus, en écrivant \mathbf{I} et \mathbf{V} sous la forme $\Phi(\omega, t) = \Phi_0 \cdot \exp[j(\omega t - kz)]$ dans (2.8), l'impédance caractéristique Z_c d'un câble telle que $\mathbf{V}(\omega) = Z_c \cdot \mathbf{I}(\omega)$ est donnée par la relation :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.10)$$

En général, cette impédance caractéristique est égale à 50Ω pour les câbles standards vendus dans le commerce.

2.4.2 Prise en compte de la photo-conductivité induite

Imaginons maintenant que le câble de la figure 2.5 est soumis à une irradiation γ comme nous le supposons dans notre application. Un isolant très faiblement conducteur devient momentanément conducteur sous irradiation, c'est le phénomène de «photo-conductivité induite». Pour prendre en compte ce phénomène dans le modèle précédent, nous devons considérer des pertes $\sigma_d(t, \dot{D})$ non nulles¹³, dans le diélectrique. Cette conductivité dépend directement du débit de dose \dot{D} déposée dans l'isolant par le rayonnement.

Nous supposons que le rayonnement est suffisamment symétrique pour ne pas dépendre de la variable θ , et identique sur toute la longueur du câble pour négliger la dépendance en z . Le mode TEM reste ainsi le mode de propagation dominant. Enfin, on suppose l'épaisseur de diélectrique suffisamment faible pour considérer le débit de dose uniforme dans cette épaisseur. Ces hypothèses nous permettent de considérer une conductivité induite indépendante de (r, θ, z) . Ainsi, le terme $-\sigma_d(t, \dot{D}) \cdot \mathbf{E}_r$ s'ajoute au second membre de l'équation (2.3).

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_r &= -\partial_z \mathbf{H}_\theta - \sigma_d(t, \dot{D}) \cdot \mathbf{E}_r \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_\theta &= -\partial_z \mathbf{E}_r \end{cases} \quad (2.11)$$

¹³Une expression de σ_d en fonction du débit de dose est donnée dans l'annexe C.

L'expression de la première équation des télégraphistes, issue de l'intégration de la deuxième équation de (2.11) reste inchangée. L'intégration de la première équation modifie la deuxième équation des télégraphistes de la façon suivante :

$$\partial_z \mathbf{I}(z, t) + C \cdot \partial_t \mathbf{V}(z, t) + \sigma_d(t) \cdot \frac{C}{\varepsilon} \cdot \mathbf{V}(z, t) = 0 \quad (2.12)$$

On notera par la suite G la conductance de la ligne par unité de longueur définie par :

$$G(t) = \sigma_d(t) \cdot \frac{C}{\varepsilon} \quad [\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Le terme $G(t) \cdot \mathbf{V}$ relatif aux pertes induites dans le diélectrique dans l'équation (2.12), se traduit par l'apparition d'un terme résistif $G \cdot dz$ en dérivation par rapport au terme capacitif $C \cdot dz$ dans le schéma équivalent infinitésimal (voir composant bleu de la figure 2.7).

L'impact de ce terme résistif sur le signal transmis par la ligne est double. D'une part, il engendre l'atténuation de ce signal, c'est-à-dire la diminution de son amplitude en fonction de la distance parcourue. D'autre part, il induit la dispersion du signal transmis. En effet, dans le cas d'une ligne avec pertes, l'équation de dispersion ne permet plus d'écrire une vitesse de propagation indépendante de la fréquence. Par conséquent, la dispersion est susceptible d'entraîner une distorsion et un élargissement du signal transmis [I-15].

2.4.3 Prise en compte des photo-courants

Les photo-électrons¹⁴ générés par le rayonnement dans le diélectrique du câble y induisent une densité de courant \mathbf{J} . En supposant les mêmes conditions d'irradiation que précédemment, on peut considérer que cette densité de courant est dirigée selon la direction radiale et indépendante des coordonnées θ et z .

$$\mathbf{J}(r, \theta, z, t) = \mathbf{J}_r(r, t) \cdot \mathbf{e}_r$$

Ainsi, le terme source $-\mathbf{J}_r(r, t)$ s'ajoute au second membre de l'équation (2.11).

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_r = -\partial_z \mathbf{H}_\theta - \sigma_d(t) \cdot \mathbf{E}_r - \mathbf{J}_r(r, t) \\ \mu \partial_t \mathbf{H}_\theta = -\partial_z \mathbf{E}_r \end{cases} \quad (2.13)$$

Par conséquent, un courant source proportionnel à l'intégrale de la densité de courant dans l'épaisseur de l'isolant apparaît dans la seconde équation des télégraphistes.

$$\partial_z \mathbf{I}(z, t) + C \cdot \partial_t \mathbf{V}(z, t) + G \cdot \mathbf{V}(z, t) = -\frac{C}{\varepsilon} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{J}_r(r, t) dr \quad (2.14)$$

¹⁴Electrons mis en mouvement par les photons γ . On les appelle aussi électrons Compton, puisque dans notre cas l'interaction photon-électron dominante est l'effet Compton.

On notera par la suite \mathbf{i}_{dd} ce terme source direct drive. Le système d'équations considéré pour modéliser la propagation d'un signal dans un câble soumis à une irradiation générant des sources de courant et une conductivité induite s'écrit alors de la façon suivante [I-13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z \mathbf{V}(z, t) + L \cdot \partial_t \mathbf{I}(z, t) = 0 \\ \partial_z \mathbf{I}(z, t) + C \cdot \partial_t \mathbf{V}(z, t) + G \cdot \mathbf{V}(z, t) = \mathbf{i}_{dd} \\ G = \frac{C}{\varepsilon} \cdot \sigma_d(t) \quad : \text{ pertes par unité de longueur} \\ \mathbf{i}_{dd} = -\frac{C}{\varepsilon} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{J}_r(r, t), dr \quad : \text{ sources de courant réparties} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

La figure 2.7 représente le circuit infinitésimal équivalent au système précédent. Le terme source \mathbf{i}_{dd} est représenté par un générateur de courant réparti $\mathbf{i}_{dd} \cdot dz$.

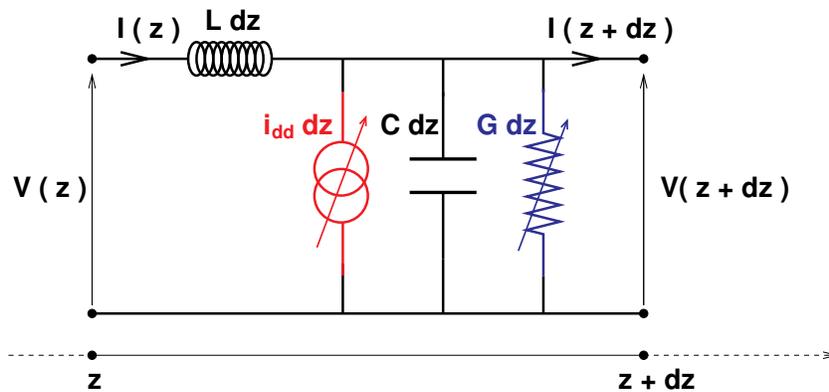


FIG. 2.7 – Circuit équivalent infinitésimal pour une ligne irradiée

2.4.4 Détermination du générateur de courant réparti \mathbf{i}_{dd}

La difficulté majeure du modèle TLM proposé est le calcul du terme source \mathbf{i}_{dd} . En effet, ce terme modélise la source de courant induit par le mouvement d'une population d'électrons. Il est donc naturel de procéder à un calcul d'interaction rayonnement-matière traitant le transport des électrons pour évaluer ce terme. Cette simulation est réalisée avec le code 3D de transport de particules MCNP. Ce logiciel est largement utilisé dans le domaine de la physique nucléaire, en particulier en sûreté, pour calculer des dépôts d'énergie dans la matière. Les sorties proposées dans MCNP sont donc relativement peu adaptées à notre modèle nécessitant le calcul d'une densité de courant. Après une rapide description du formalisme des résultats fournis par MCNP, nous proposons une démarche de traitement de ces résultats afin de faire le lien entre mouvement d'électrons et densité de courant radiale utile au calcul de la source de courant \mathbf{i}_{dd} .

2.4.4.1 Surfaces de «comptage» des électrons

La fonction de sortie MCNP la plus proche de nos besoins permet d'enregistrer le nombre de particules ayant traversé une surface donnée pendant un temps donné. Pour les électrons, cette quantité représente, à une constante multiplicative près¹⁵, la charge électrique totale ayant traversé la surface pendant la durée considérée. Une option du code permet de différencier les électrons selon le signe du produit scalaire de leur vecteur d'incidence avec la normale sortante de la surface. Ainsi, il est possible d'obtenir le nombre d'électrons «entrants» (produit scalaire négatif) et «sortants» (produit scalaire positif) de la surface. La différence de ces deux quantités permet de déterminer le bilan net des charges ayant traversé la surface. L'utilisation de ce bilan net semble naturel pour la détermination d'une densité de courant qui est une quantité signée.

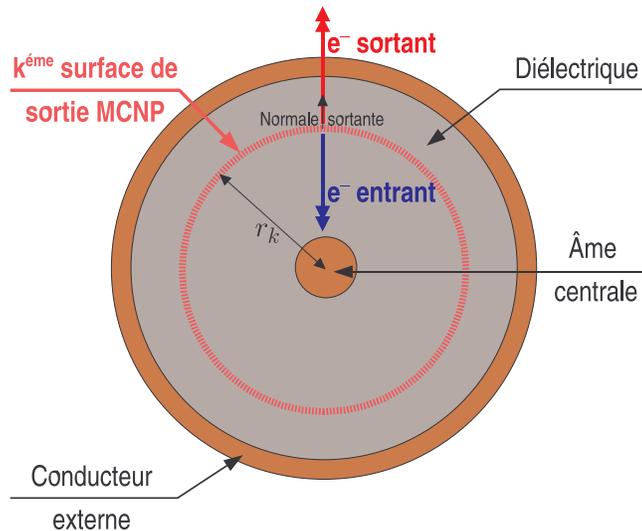


FIG. 2.8 – Surface MCNP de «comptage» des électrons Compton

Dans le cas d'un câble coaxial, cette densité $\mathbf{J}_r(r, t)$ générée dans le diélectrique est radiale. Ainsi, comme indiqué sur la figure 2.8, le décompte des électrons se fait à travers des surfaces cylindriques localisées entre les deux conducteurs. Pour obtenir la dépendance selon la direction radiale de \mathbf{J}_r , un nombre N_s ¹⁶ de surfaces concentriques uniformément réparties dans l'isolant est choisi.

2.4.4.2 Adaptation des résultats MCNP pour le modèle TLM

Considérons maintenant la surface cylindrique S_j de rayon r_j avec $1 \leq j \leq N_s$. Pour obtenir une dépendance temporelle des résultats, le temps est échantillonné en effectuant des bilans électroniques entrant et sortant à travers cette surface à intervalles réguliers avec un pas de

¹⁵ $q_{e^-} = 1.6022 \times 10^{-19}$ C, soit la charge électrique d'un électron

¹⁶En général entre 10 et 15 surfaces

temps noté Δt_{MCNP} . Dans la suite nous notons respectivement $N_{e^-}^+(r_j, t_k)$ le nombre d'électrons entrants et $N_{e^-}^-(r_j, t_k)$ le nombre d'électrons sortants de la surface S_j durant la période $[t_{k-1}, t_k]$ avec $t_k - t_{k-1} = \Delta t_{MCNP}$. En notant $Q_{tot}^\pm(t)$ la charge électrique cumulée ayant traversé la surface dans un sens ou dans l'autre entre 0 et t , on peut écrire la relation (2.16).

$$q_{e^-} \cdot N_{e^-}^\pm(r_j, t_k) = Q_{tot}^\pm(t_k) - Q_{tot}^\pm(t_{k-1}) \sim \Delta t_{MCNP} \cdot \left. \frac{\partial Q_{tot}^\pm}{\partial t} \right|_{t=t_k} \quad (2.16)$$

Les bilans électroniques donnés par MCNP, dont un exemple est donné figure 2.9, permettent donc d'évaluer la dérivée de la charge électrique par rapport au temps, qui n'est autre que le courant électrique radial traversant la surface.

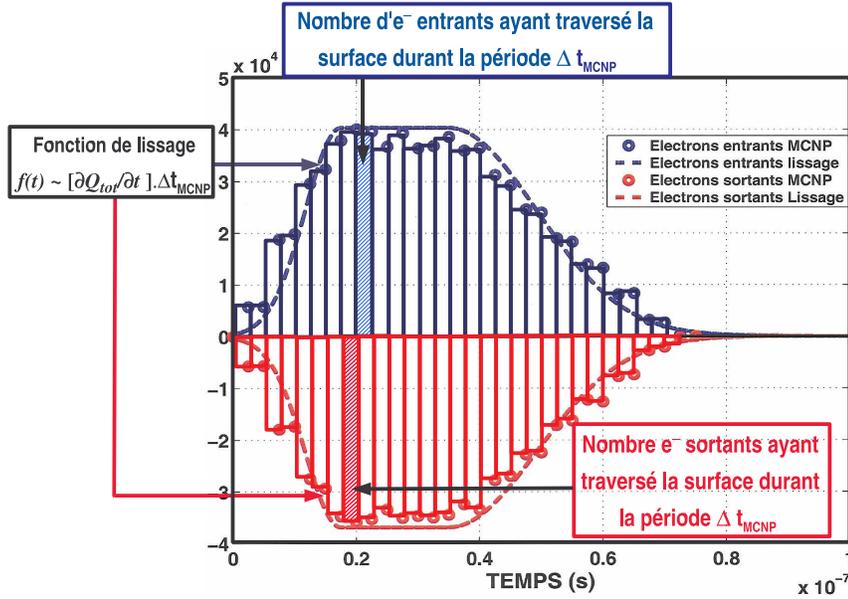


FIG. 2.9 – Courants d'électrons entrants et sortants à travers une surface donnée

En notant \mathcal{A}_j^{lat} l'aire latérale de la surface S_j , on évalue la densité de courant radiale désirée en écrivant la relation suivante :

$$\mathbf{J}_r(r_j, t_k) = \frac{1}{\mathcal{A}_j^{lat}} \cdot \left. \frac{\partial (Q_{tot}^- - Q_{tot}^+)}{\partial t} \right|_{t=t_k} \sim \frac{q_{e^-}}{\mathcal{A}_j^{lat}} \cdot \frac{N_{e^-}^-(r_j, t_k) - N_{e^-}^+(r_j, t_k)}{\Delta t_{MCNP}} \quad (2.17)$$

Nous choisissons en général un pas Δt_{MCNP} assez faible pour avoir un échantillonnage en temps relativement précis de la densité \mathbf{J}_r . Cependant, le code MCNP utilisant une méthode de résolution statistique, cet échantillonnage induit une précision insuffisante sur le calcul de chaque $N_{e^-}^\pm(r_j, t_k)$ pour évaluer le bilan net d'électrons de façon satisfaisante. En effet, on se rend compte sur la figure 2.9 que les valeurs à soustraire sont très proches. Ce qui implique en général que la valeur de la quantité $\|N_{e^-}^-(r_j, t_k) - N_{e^-}^+(r_j, t_k)\|$ est inférieure à la précision avec

laquelle sont calculés les deux termes de la différence. C'est pourquoi le résultat de la somme brute des deux courbes de la figure 2.9 est très bruité (voir figure 2.10) et n'a en fait pas de sens. Il n'est donc pas possible d'exploiter les résultats MCNP de cette façon pour l'estimation des sources de courant du modèle TLM.

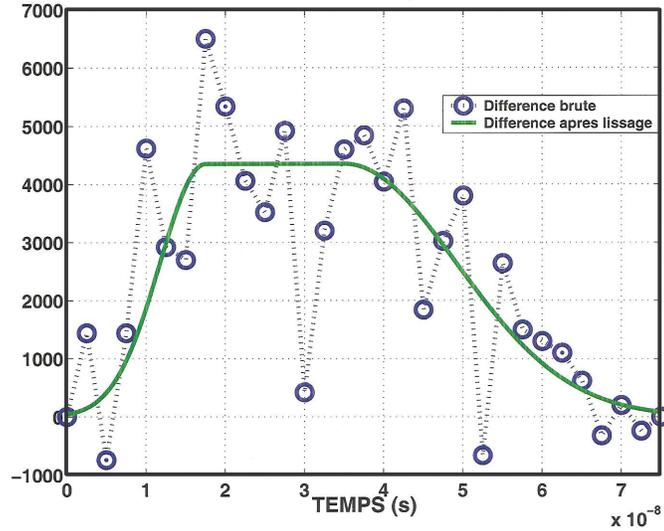


FIG. 2.10 – Courant net d'électrons : intérêt du lissage

Pour contourner ce problème, nous proposons de faire un lissage a priori des flux d'électrons entrants et sortants par des fonctions continues $f_j^\pm(t)$ avant d'en faire la différence. Ce lissage permet d'obtenir une fonction différence régulière bien adaptée à la méthode de résolution numérique utilisée pour traiter le modèle TLM¹⁷. Cependant, sans contrainte d'ajustement, cette différence n'a pas plus de sens que la différence brute en terme de précision. La variable d'ajustement utilisée est le nombre cumulé d'électrons, noté $N_{tot}^+(r_j)$ ou $N_{tot}^-(r_j)$, ayant traversé la surface S_j pendant l'intervalle de temps total $[0, T]$ considéré. La précision de ces valeurs calculées par MCNP est très supérieure à celle des $N_{e^-}(r_j, t_k)$ car elles sont estimées sur un intervalle de temps beaucoup plus long. Pour que la différence entre les fonctions de lissage ait un sens, on impose alors aux fonctions f_j^\pm la contrainte définie par l'égalité (2.18).

$$\|f_j^\pm(t)\|_1 = \int_0^T f_j^\pm(t) dt = \Delta t_{MCNP} \cdot N_{tot}^\pm(r_j) \quad (2.18)$$

Finalement, la densité de courant est estimée par la relation suivante :

$$\mathbf{J}_r(r_j, t) = \frac{q_{e^-}}{\mathcal{A}_j^{lat}} \cdot \left[N_{tot}^-(r_j) \cdot \frac{f_j^-(t)}{\|f_j^-(t)\|_1} - N_{tot}^+(r_j) \cdot \frac{f_j^+(t)}{\|f_j^+(t)\|_1} \right] \quad (2.19)$$

¹⁷Voir paragraphe 2.4.8 Méthode de résolution numérique

Cette approximation faite pour les N_s surfaces de «comptage», la valeur de \mathbf{i}_{dd} est évaluée selon la formule (2.20). L'intégrale de \mathbf{J}_r dans l'épaisseur de l'isolant, intervenant dans l'expression de \mathbf{i}_{dd} , est approchée par la méthode des trapèzes.

$$\mathbf{i}_{dd} = -\frac{C}{\varepsilon} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{J}_r(r, t) dr \sim -\frac{C}{\varepsilon} \cdot \sum_{j=1}^{N_s} \left[\frac{\mathbf{J}_r(r_j, t) + \mathbf{J}_r(r_{j-1}, t)}{2} \cdot (r_j - r_{j-1}) \right] \quad (2.20)$$

2.4.5 Prise en compte du couplage avec le champ EM ambiant

2.4.5.1 Impédance et admittance de transfert d'un câble

Parmi les problèmes soulevés par la compatibilité électromagnétique, une place particulière est occupée par les perturbations induites dans les câbles coaxiaux par des champs extérieurs. En effet, un câble n'est en général pas parfaitement opaque au champ électromagnétique qui l'entoure. Un champ incident peut donc pénétrer partiellement à l'intérieur du câble à travers son blindage et y induire des sources de courant et de tension parasites. Le but du blindage d'un câble est de minimiser ces perturbations.

L'efficacité d'un blindage se définit traditionnellement par l'atténuation en dB du champ à l'intérieur du blindage vis-à-vis du champ agresseur. Dans le cas d'un câble, ce champ n'est pas directement accessible à la mesure. On en rend compte par ses effets, c'est-à-dire le signal reçu sur les fils en présence de blindage par rapport à celui capté en l'absence de blindage. Cependant cette façon de procéder n'est pas aisée car il est nécessaire d'avoir un dispositif expérimental conséquent permettant de générer des champs assez puissants. D'autre part, le résultat trouvé dépend de nombreux paramètres non associés au câble (charges aux extrémités, impédance d'onde¹⁸ du champ incident, distance du câble à la source, etc.).

A la notion d'efficacité de blindage, on préfère celle d'impédance de transfert Z_t , introduite par Schelkunoff en 1934 [I-18], beaucoup plus simple à mesurer et dont la valeur ne dépend que de caractéristiques intrinsèques au blindage. En effet, elle rend compte non pas des perturbations induites dans un câble en fonction d'un champ agresseur, mais de celles induites par un courant circulant sur le blindage. L'impédance de transfert permet donc de caractériser l'efficacité du blindage vis-à-vis du courant perturbateur généré sur celui-ci par le champ agresseur.

Le principe de mesure de Z_t est de faire circuler un courant \mathbf{I}_s sur le blindage d'un câble de longueur l . L'impédance de transfert induit alors une différence de potentiel longitudinale \mathbf{V}_i répartie entre les deux charges d'extrémités reliées au câble. On définit alors l'impédance de transfert par :

$$Z_t(\omega) = \frac{1}{l} \cdot \frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{\mathbf{I}_s(\omega)}$$

¹⁸On définit l'impédance d'une onde par la relation $Z_{onde} = \left\| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right\|$.

Cette impédance étant ramenée à l'unité de longueur de câble, son module s'exprime donc en $\Omega \cdot m^{-1}$. Les différentes techniques de détermination de Z_t sont détaillées dans [I-16, I-17]. La figure 2.11 montre l'évolution, en fonction de la fréquence, du module de Z_t de quelques câbles typiques vendus dans le commerce. A très basse fréquence, Z_t reste constante, à peu près égale à la résistance ohmique R_0 du blindage. Ceci traduit un couplage par «diffusion» : le champ pénètre à l'intérieur du câble car l'épaisseur de peau¹⁹ n'est pas négligeable devant celle du blindage. Lorsque la fréquence augmente, l'effet de peau devient négligeable et l'impédance de transfert diminue. Pour des câbles à blindage plein tels que les semi-rigides, Z_t décroît avec la fréquence jusqu'à devenir non mesurable. Le blindage de ce type de câble peut être considéré comme parfait au-delà de 10 MHz.

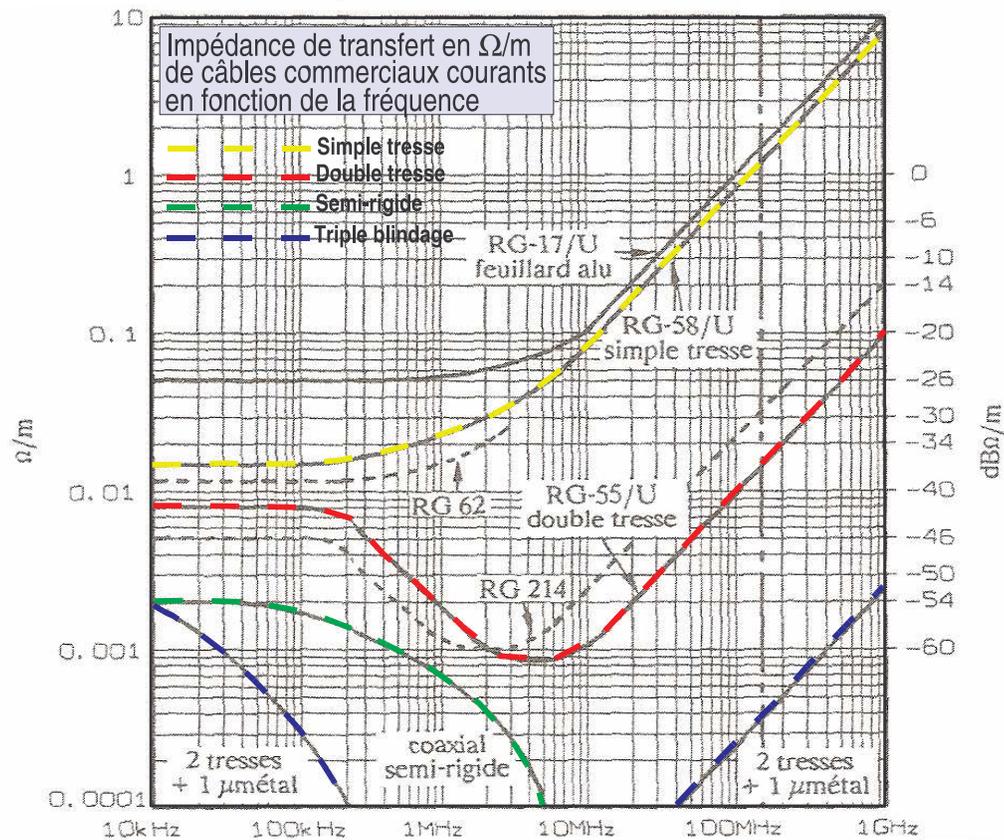


FIG. 2.11 – Impédance de transfert de quelques câbles typiques

Pour des câbles à blindage tressé, en particulier les « doubles tresses », la pente s'inverse à partir d'une certaine fréquence et Z_t augmente linéairement avec la fréquence. Ce phénomène traduit un couplage par «diffraction», le champ électromagnétique perturbateur pénètre dans le câble à

¹⁹Epaisseur caractéristique δ de pénétration d'une onde dans un métal, elle dépend de la conductivité σ du métal et de la fréquence f de l'onde : $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}$.

travers des ouvertures de petites dimensions dues à l'imperfection du recouvrement optique du tressage. Sur l'expression de Z_t , ce phénomène s'apparente à une inductance de fuite L_t entre les nappes de la tresse et le fil intérieur. Une impédance de transfert de câble peut donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} Z_t = R_0 + j\omega \cdot L_t \\ R_0 = \text{Résistance ohmique en } \Omega \cdot \text{m}^{-1} \\ L_t = \text{Inductance de transfert en } \text{H} \cdot \text{m}^{-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

Des formules analytiques de calcul de R_0 et L_t selon la nature du blindage (plein, tresse, hélicoïdal, etc.) sont données dans [I-17]. Le tableau suivant donne des ordres de grandeur des quantités R_0 et L_t en fonction du type de câble.

Type	Z caract. (Ω)	Nombre de couches	R_0 ($\Omega \cdot \text{m}^{-1}$)	L_t ($\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
RG 8	50	1	4.5×10^{-3}	1×10^{-9}
RG 58	50	1	14×10^{-3}	0.9×10^{-9}
RG 59	75	1	8×10^{-3}	0.3×10^{-9}
RG 62	50	1	12×10^{-3}	0.9×10^{-9}
RG 213	50	1	4×10^{-3}	0.25×10^{-9}
RG 55/U	50	2	8×10^{-3}	0.016×10^{-9}
RG 214	50	2	5×10^{-3}	0.03×10^{-9}
RG 223	50	2	13×10^{-3}	0.015×10^{-9}

TAB. 2.1 – Ordre de grandeur de résistances et inductances de transfert

De la même façon, on peut définir une admittance de transfert Y_t caractérisant l'efficacité du blindage vis-à-vis d'une contrainte de tension entre le blindage et une référence de potentiel (plan de masse par exemple). Cette admittance de transfert s'exprime en général comme une capacité de fuite directe C_t (équation (2.22)) entre la source extérieure et l'âme.

$$\begin{cases} Y_t = j\omega \cdot C_t \\ C_t = \text{Capacité de transfert en } \text{F} \cdot \text{m}^{-1} \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour les câbles correctement blindés²⁰, la capacité de transfert C_t peut en général être considérée comme négligeable [I-16] car elle reste inférieure au centième de $\text{pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

²⁰Câbles semi-rigides ou câbles à blindage tressé avec un bon taux de recouvrement

2.4.5.2 Modèle de lignes couplées

L'approche qualitative que nous venons de faire du couplage électromagnétique à travers le blindage d'un câble coaxial montre que la tension parasite qui apparaît entre le conducteur interne et le blindage est proportionnelle au courant perturbateur et qu'elle caractérise d'une certaine façon l'efficacité du blindage.

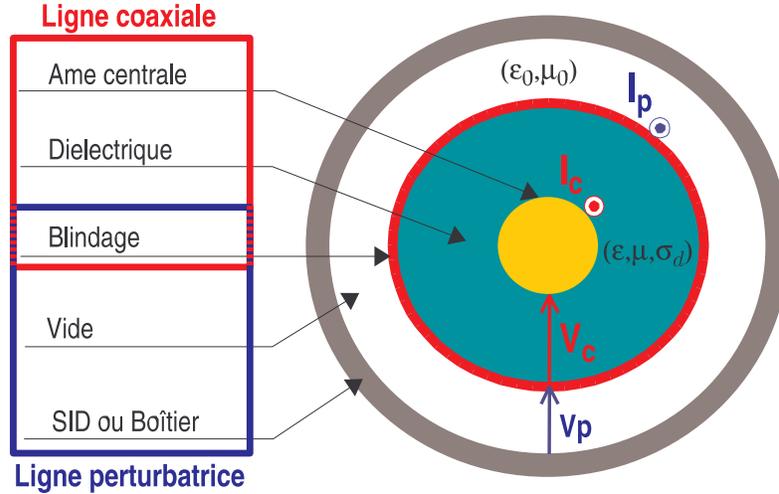


FIG. 2.12 – Coupe montrant la ligne perturbatrice (P) et la ligne coaxiale (C)

En considérant un câble coaxial inséré dans un boîtier comme lors des expériences Omega, ou dans un SID dans le cas du LMJ, il est facile d'assimiler le câble et le boîtier qui l'entoure à un système de deux lignes couplées (figure 2.12). Nous noterons $(\mathbf{V}_c, \mathbf{I}_c)$ la tension et l'intensité se propageant dans le câble et $(\mathbf{V}_p, \mathbf{I}_p)$ la tension et l'intensité de la ligne perturbatrice. \mathbf{I}_p représente le courant circulant sur le blindage tandis que \mathbf{V}_p représente la différence de potentiel entre le boîtier externe et le blindage du câble. Ces quantités sont reliées par les équations différentielles (2.23) qui sont le résultat d'une formulation particulière de la théorie des lignes couplées [I-18, I-19, I-20].

$$\begin{aligned}
 a - \text{Ligne interne} & \begin{cases} \partial_z \mathbf{V}_c + Z_c \cdot \mathbf{I}_c = Z_{p \rightarrow c} \cdot \mathbf{I}_p \\ \partial_z \mathbf{I}_c + Y_c \cdot \mathbf{V}_c = -Y_{p \rightarrow c} \cdot \mathbf{V}_p \end{cases} \\
 b - \text{Ligne perturbatrice} & \begin{cases} \partial_z \mathbf{V}_p + Z_p \cdot \mathbf{I}_p = Z_{c \rightarrow p} \cdot \mathbf{I}_c + \mathbf{V}_{ext \rightarrow p} \\ \partial_z \mathbf{I}_p + Y_p \cdot \mathbf{V}_p = -Y_{c \rightarrow p} \cdot \mathbf{V}_c + \mathbf{I}_{ext \rightarrow p} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Les systèmes d'équations (a-2.23) et (b-2.23) écrits dans le domaine fréquentiel contiennent les paramètres linéiques qui définissent complètement le couplage s'exerçant entre le câble et son environnement. En effet, (Z_c, Y_c) et (Z_p, Y_p) représentent respectivement les impédances et admittances caractéristiques de la ligne coaxiale et de la ligne perturbatrice. Les paramètres

propres au couplage entre les deux lignes sont ce que nous avons appelé au paragraphe précédent les impédance et admittance de transfert (Z_t, Y_t) définies telles que :

$$\begin{cases} Z_t = Z_{p \rightarrow c} = -Z_{c \rightarrow p} \\ Y_t = Y_{p \rightarrow c} = -Y_{c \rightarrow p} \end{cases}$$

Les quantités $\mathbf{V}_{ext \rightarrow p}$ et $\mathbf{I}_{ext \rightarrow p}$ représentent les termes sources de tension et de courant répartis sur la ligne perturbatrice et induits par le champ électromagnétique extérieur. $\mathbf{V}_{ext \rightarrow p}$ est l'effet du couplage avec le champ \mathbf{H}_{ext} , tandis que $\mathbf{V}_{ext \rightarrow p}$ est causée par le champ \mathbf{E}_{ext} . En pratique, on peut négliger l'effet du champ rayonné par la ligne coaxiale sur la ligne perturbatrice par rapport à l'effet du champ agresseur, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \|Z_{c \rightarrow p} \cdot \mathbf{I}_c\| \ll \|\mathbf{V}_{ext \rightarrow p}\| \\ \|Y_{c \rightarrow p} \cdot \mathbf{V}_c\| \ll \|\mathbf{I}_{ext \rightarrow p}\| \end{cases}$$

Cette approximation permet d'éliminer du système d'équations (b-2.23) les termes dépendants de \mathbf{I}_c et \mathbf{V}_c . Dans notre application, nous étudions des phénomènes transitoires, il est donc nécessaire d'écrire les équations (2.23) sous forme temporelle. D'après les expressions de Z_t et Y_t données en (2.21) et (2.22), on peut écrire les équations²¹ (2.24) modélisant le couplage entre la ligne coaxiale et la ligne perturbatrice, dans le cas sans perte, dans le domaine temporel [I-21].

$$\begin{aligned} a - \text{Ligne interne} & \begin{cases} \partial_z \mathbf{V}_c + L_c \cdot \partial_t \mathbf{I}_c = \mathbf{V}_{in} \\ \partial_z \mathbf{I}_c + C_c \cdot \partial_t \mathbf{V}_c = \mathbf{I}_{in} \end{cases} \\ \text{avec} & \begin{cases} \mathbf{V}_{in} = R_0 \cdot \mathbf{I}_p + L_t \cdot \partial_t \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_{in} = C_t \cdot \partial_t \mathbf{V}_p \end{cases} \quad (2.24) \\ b - \text{Ligne externe} & \begin{cases} \partial_z \mathbf{V}_p + L_p \cdot \partial_t \mathbf{I}_p = \mathbf{V}_{ext} \\ \partial_z \mathbf{I}_p + C_p \cdot \partial_t \mathbf{V}_p = \mathbf{I}_{ext} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme nous le verrons dans le paragraphe 2.4.7, $\mathbf{I}_p(z, t)$ et $\mathbf{V}_p(z, t)$ sont reliées par les impédances connectées aux extrémités de la ligne perturbatrice. Si ces impédances sont faibles, comme c'est le cas lorsque le blindage est relié à la masse, c'est majoritairement l'effet du courant perturbateur \mathbf{I}_p qui intervient. Dans ce cas les parasites électriques se propageant dans la ligne coaxiale sont essentiellement dus à l'impédance de transfert soit $\mathbf{I}_{in} \ll \mathbf{V}_{in}$ dans les équations (2.24). Si au contraire, ces impédances sont très grandes voire infinies comme cela peut être le cas pour un blindage «en l'air», c'est la contrainte de tension \mathbf{V}_p qui provoque

²¹En supposant bien sûr que L_c , C_c et R_0 sont indépendants de la fréquence. Sinon, il faudrait écrire des produits de convolution.

majoritairement le signal parasite. L'amplitude de ce signal dépend alors de la valeur de l'admittance de transfert. Remarquons que, dans la plupart des situations pratiques, le blindage du câble est connecté à la masse aux deux extrémités de la ligne de propagation au moyen de connexions de faible impédance (court-circuit). C'est donc l'impédance de transfert qui joue en général un rôle important.

2.4.6 Modèle global

Le schéma de la figure 2.13 résume le modèle TLM global de détermination de courants transitoires induits dans un câble coaxial. Ce dernier regroupe les deux modèles de lignes de transmission irradiées et de lignes couplées décrits dans les paragraphes 2.4.3 et 2.4.5.

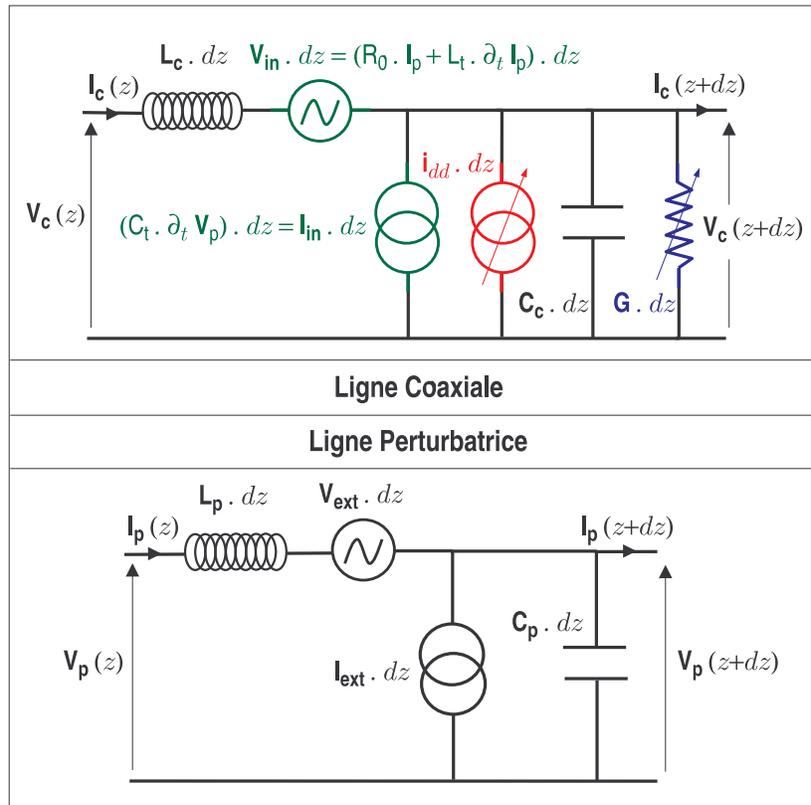


FIG. 2.13 – Circuit équivalent infinitésimal pour un système de lignes couplées irradiées

Les termes sources d'entrée de cette modélisation sont les générateurs de courant et tension répartis. Il sont définis par \mathbf{i}_{dd} sur la ligne coaxiale et par $(\mathbf{V}_{ext}, \mathbf{I}_{ext})$ sur la ligne externe. La méthode de détermination de \mathbf{i}_{dd} par l'intermédiaire d'un calcul de transport de particules a été détaillée dans le paragraphe 2.4.4. L'évaluation des sources \mathbf{V}_{ext} et \mathbf{I}_{ext} se fait par l'intermédiaire d'un calcul Maxwell-Vlasov²² permettant d'estimer le champ électromagnétique généré par les

²²3^{ème} étape de la démarche de simulation globale présentée dans la section 2.3

extractions d'électrons par le rayonnement ionisant. Le principe consiste à calculer, dans un premier temps, le champ électromagnétique incident ($\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$) dans l'espace où est placé le câble (boîtier ou SID dans notre cas) mais en l'absence de ce dernier. Ensuite, les quantités \mathbf{V}_{ext} et \mathbf{I}_{ext} sont calculées par les formules (2.25).

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{ext} &= \frac{\mu_0}{L_p} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \partial_t \mathbf{H}_\theta^i(r, z) dr \\ \mathbf{V}_{ext} &= \frac{\varepsilon_0}{C_p} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \partial_t \mathbf{E}_r^i(r, z) dr - \frac{\varepsilon_0}{C_p} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{J}_r^i(r, z) dr \end{cases} \quad (2.25)$$

2.4.7 Conditions aux limites

Le système d'équations relatif au schéma infinitésimal de la figure 2.13 suffit à caractériser la génération et la propagation de signaux parasites dans un câble coaxial. Cependant, la formulation complète du problème nécessite la connaissance des conditions aux limites aux extrémités ($z = 0$ et $z = l$) des lignes coaxiale et perturbatrice [I-22].

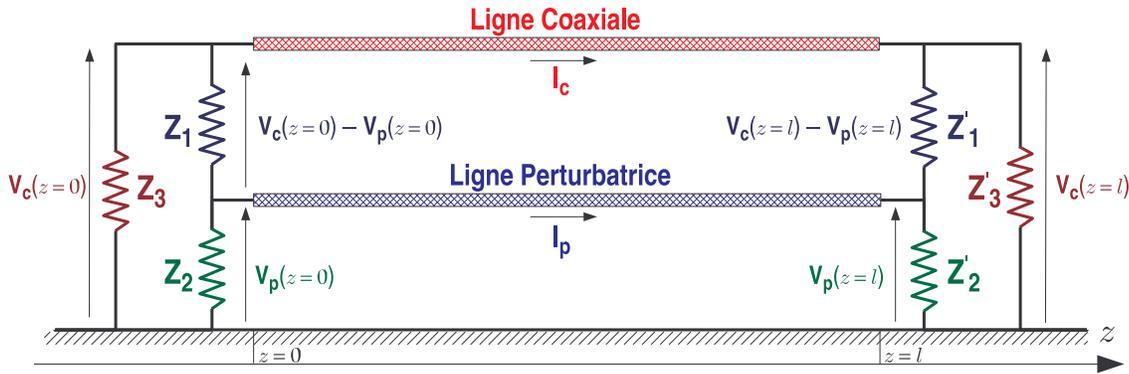


FIG. 2.14 – Conditions aux limites dans le cas général

Les conditions aux limites définissent les relations existant entre $\mathbf{V}_p, \mathbf{I}_p, \mathbf{V}_c$ et \mathbf{I}_c aux extrémités des lignes et dépendent des impédances qui y sont connectées. Dans le cas général, on peut imaginer les connexions présentées sur la figure 2.14. Les lignes coaxiale et perturbatrice sont reliées à la masse respectivement par les impédances (Z_2, Z'_2) et (Z_3, Z'_3). On peut envisager le cas où elles sont connectées entre elles par des impédances (Z_1, Z'_1). Dans cette configuration, les conditions aux limites sont données par les relations (2.26) et (2.27).

$$\text{En } z = 0 : \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_p \\ \mathbf{V}_c \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$\text{En } z = l : \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z'_1} + \frac{1}{Z'_2} & -\frac{1}{Z'_1} \\ -\frac{1}{Z'_1} & \frac{1}{Z'_3} + \frac{1}{Z'_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_p \\ \mathbf{V}_c \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Ces conditions aux limites définies dans un cas général peuvent être simplifiées dans la majorité des cas pratiques. Par exemple les deux lignes ne sont en général pas connectées entre elles, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z'_1} = 0 \quad (2.28)$$

De plus, au moins une des deux extrémités²³ du câble coaxial est reliée à une instrumentation dont l'impédance est adaptée à celle du câble. C'est-à-dire que Z'_3 est égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne coaxiale qui vaut en général 50Ω . L'autre extrémité peut être reliée à une charge quelconque définie par une relation fonctionnelle f (2.29) entre la tension \mathbf{V}_c et l'intensité \mathbf{I}_c .

$$\forall t, \mathbf{I}_c(0, t) = f[\mathbf{V}_c(0, t)] \quad (2.29)$$

Dans le cas de la figure 2.12, on peut considérer le boîtier ou le SID comme une référence de masse. Dans la pratique, le blindage est souvent relié à la masse en court circuit ce qui implique :

$$Z_2 = Z'_2 = 0 \quad (2.30)$$

Dans le cas contraire, moins probable, où le blindage serait laissé «en l'air», on aurait :

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z'_2} = 0 \quad (2.31)$$

Les relations (2.28), (2.29), (2.30) et (2.31) permettent d'écrire les conditions aux limites découplées (2.32) pour chacune des deux lignes.

$$\begin{aligned} a - \text{Ligne interne} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_c(0, t) = f[\mathbf{V}_c(0, t)] \\ \mathbf{V}_c(l, t) = Z_c \cdot \mathbf{I}_c(l, t) \end{array} \right. \\ b - \text{Ligne perturbatrice} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_p(0, t) = 0 \\ \mathbf{V}_p(l, t) = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_p(0, t) = 0 \\ \mathbf{I}_p(l, t) = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.4.8 Méthode de résolution numérique

Dans la mesure où tous les paramètres²⁴, les termes sources²⁵ et les conditions aux limites nécessaires au modèle TLM présenté précédemment sont connus, le problème admet une solution unique qui peut être calculée numériquement [I-21]. L'évolution temporelle des degrés de liberté $(\mathbf{V}_p, \mathbf{I}_p)$ et $(\mathbf{V}_c, \mathbf{I}_c)$ est évaluée par une méthode de différences finies centrées en une dimension. Cette méthode de résolution largement utilisée dans les codes de calcul d'électromagnétisme

²³On choisit ici l'extrémité $z = l$.

²⁴Caractéristiques du câble, caractéristiques de la ligne perturbatrice, impédance et admittance de transfert

²⁵Générateurs de courant et de tension répartis \mathbf{I}_{ext} , \mathbf{V}_{ext} et \mathbf{i}_{dd}

transitoire, plus connue sous le nom de méthode FDTD, est présentée en détails dans le chapitre 4 de ce document. Le principe de cette résolution numérique consiste à écrire les équations relatives au problème à traiter dans un espace discret cartésien.

Considérons une ligne de transmission dans la direction z de longueur l . On découpe la ligne selon z en N_z intervalles de longueur $\Delta z = \frac{l}{N_z}$ appelée «pas d'espace». La position de chacun des $N_z + 1$ nœuds de cette discrétisation ou maillage est repérée par son abscisse $(z_k)_{0 \leq k \leq N_z}$. De même, le milieu de chaque arête est repéré selon son abscisse $(z_{k+\frac{1}{2}})_{0 \leq k \leq N_z-1}$.

$$\forall k \in [0, N_z], \begin{cases} z_k & = & k \cdot \Delta z \\ z_{k+\frac{1}{2}} & = & (k + \frac{1}{2}) \cdot \Delta z \end{cases} \quad (2.33)$$

Le temps est quant à lui discrétisé avec un pas de temps noté Δt et on note t^n l'instant défini par $t^n = n \cdot \Delta t$. Pour la résolution numérique, on passe alors d'une écriture dans l'espace continu (t, z) à une écriture dans l'espace discret (t^n, z_k) pour la tension \mathbf{V} et de (t, z) à $(t^{n+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$ pour l'intensité \mathbf{I} . Ceci signifie que la tension est évaluée numériquement aux nœuds tous les $n \cdot \Delta t$, tandis que l'intensité est évaluée aux centres des arêtes tous les $(n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$. Cette localisation décalée dans le temps et l'espace des composantes \mathbf{I} et \mathbf{V} permet d'écrire naturellement des différences centrées²⁶ précises au second ordre pour l'évaluation des dérivées partielles intervenant dans les équations.

En considérant que \mathbf{F} représente une composante de tension ou d'intensité, on adoptera par la suite la notation suivante :

$$\forall (k, n), \mathbf{F}(z_k, t^n) = \mathbf{F}_k^n$$

L'approximation des dérivées partielles par des différences centrées d'ordre 2 permet d'écrire un schéma numérique²⁷ de résolution (2.34) explicite, précis à l'ordre 2 en temps et en espace, se déroulant en deux étapes.

- **Etape 1 : Mise à jour de la composante d'intensité $\mathbf{I}_{k+\frac{1}{2}}$ au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$**

$$\frac{\mathbf{V}_{k+1}^n - \mathbf{V}_k^n}{\Delta z} + L \frac{\mathbf{I}_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_{k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mathbf{V}_{\text{source}}^n \quad (2.34)$$

- **Etape 2 : Mise à jour de la composante de tension \mathbf{V}_k au temps t^{n+1}**

$$\frac{\mathbf{I}_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + C \frac{\mathbf{V}_k^{n+1} - \mathbf{V}_k^n}{\Delta t} + \frac{G^{n+1} \mathbf{V}_k^{n+1} + G^n \mathbf{V}_k^n}{2} = \mathbf{I}_{\text{source}}^{n+\frac{1}{2}}$$

Comme nous le verrons au paragraphe 4.2 du chapitre 4, cette méthode de résolution numérique est soumise à un critère de stabilité, ou condition CFL, reliant le pas de temps au pas d'espace.

²⁶Pour plus de détails, se référer au paragraphe 4.1.2 du chapitre 4

²⁷Pour la première fois introduit par K. S. Yee en 1966 [II-1]

Dans le cadre de la propagation d'un signal dans une ligne de transmission, cette condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_p} \cdot \Delta z = \sqrt{LC} \cdot \Delta z \quad (2.35)$$

Enfin, ce type de schéma numérique génère des erreurs de dispersions puisque l'équation de dispersion discrète donnée en (2.36) montre que la vitesse de phase numérique $\frac{\omega}{\tilde{k}_z}$, égale à la vitesse de propagation d'un signal dans la ligne de transmission, dépend de la fréquence et de la discrétisation.

$$\left[\frac{1}{v_p \Delta t} \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta z} \sin \left(\frac{\tilde{k}_z \Delta z}{2} \right) \right]^2 \quad (2.36)$$

Comme nous l'indiquerons dans la section 4.2 du chapitre 4, il faut choisir une discrétisation suffisamment fine par rapport à la fréquence pour rendre ces erreurs de dispersions numériques négligeables. Pour s'en assurer, on utilise en général un critère sur le pas d'espace Δz du type (2.37), où λ_{\min} est la longueur d'onde significative minimale présente dans le signal transmis par la ligne.

$$\Delta z \leq \frac{\lambda_{\min}}{N} \quad \text{avec} \quad 10 \leq N \leq 20 \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Validation expérimentale du modèle

3.1 Introduction

Après avoir mis en place dans le chapitre précédent une méthode de modélisation de courants induits dans un câble soumis à un environnement radiatif de type LMJ, la seconde étape de notre démarche consiste à procéder à la validation expérimentale de ce modèle. La partie couplage d'un câble, via son impédance de transfert, avec le champ électromagnétique ambiant est un problème connu et étudié en CEM. Une fois le champ connu à proximité du câble, il est simple, même avec des calculs empiriques [I-16, I-17], d'avoir un ordre de grandeur du courant qui sera induit dans le câble. La difficulté majeure de la simulation de ce couplage est la possibilité d'évaluer les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} numériquement. On discutera de cette question particulière dans la seconde partie de ce mémoire. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la validation du couplage du câble à la partie nucléaire de l'environnement radiatif LMJ.

Rappelons dans un premier temps que le modèle développé à cet effet est fondé sur l'hypothèse fondamentale que le rayonnement neutronique induit par un tir à gain sur le LMJ n'engendre pas directement de courants induits. C'est le rayonnement γ secondaire, provoqué par les interactions neutron-matière, qui en est supposé responsable. Il est donc naturel que la première étape de la validation expérimentale consiste à vérifier tout le domaine «non neutronique» du modèle. Nous appelons problème du domaine non neutronique tout problème ne faisant intervenir que les interactions (γ, e^-) dans le calcul d'interaction rayonnement-matière utile à la détermination des générateurs de courant répartis \mathbf{i}_{dd} .

Ainsi, dans la première partie de ce chapitre, nous présentons des comparaisons calculs-mesures de courants induits dans un câble exposé à une ambiance purement photonique permettant la validation de la partie non neutronique du modèle. Dans une seconde partie, nous discutons de la validité de la modélisation en ambiance neutronique par comparaison de calculs avec les mesures d'irradiation de câbles effectuées par les équipes du CEA sur le laser américain Omega.

3.2 Validation en environnement radiatif gamma

3.2.1 Présentation de la machine Balzac III

Les expériences d'exposition de câbles à un environnement purement photonique ont été réalisées en octobre 2005, par une équipe du CEA, sur le générateur d'impulsions X, Balzac III (voir photographie de la figure a-3.2), de la société Nuclétudes (groupe EADS). Cette installation fonctionne sur le modèle des machines de «Hautes Puissances Pulsées» (HPP) dont le principe général est grossièrement décrit dans ce qui suit.

On appelle hautes puissances pulsées les technologies permettant la génération de très fortes puissances électriques instantanées, sous forme d'impulsions extrêmement denses et brèves créées à partir d'une énergie préalablement accumulée. Le principe de fonctionnement se divise en deux étapes distinctes. La première permet de stocker l'énergie produite par une source lente, pendant une durée allant généralement d'une fraction de seconde à quelques secondes. La deuxième permet de libérer cette énergie, sous la forme d'une impulsion très brève de haute puissance, cette phase est souvent qualifiée de «compression temporelle».

La machine Balzac III utilise un stockage «capacitif» de l'énergie en chargeant en parallèle plusieurs dizaines de gros condensateurs (générateur de Marx). L'énergie est libérée en déchargeant ces condensateurs en série, ce qui permet d'obtenir une impulsion de tension de l'ordre de 10 MégaVolts en sortie du générateur de Marx. Cette impulsion est ensuite mise en forme¹ dans une ligne coaxiale de faible impédance de façon à obtenir un fort courant. En face de la «cathode», connectée à l'extrémité de la ligne, est disposée l'«anode» constituée d'une plaque d'un matériau à numéro atomique élevé. Le très fort champ électrostatique créé entre l'anode et la cathode arrache des électrons à celle-ci. Ces électrons de hautes énergies sont ensuite fortement ralentis en «percutant» l'anode et sont alors convertis en un rayonnement X. C'est le principe de l'effet Bremsstrahlung ou rayonnement de freinage.

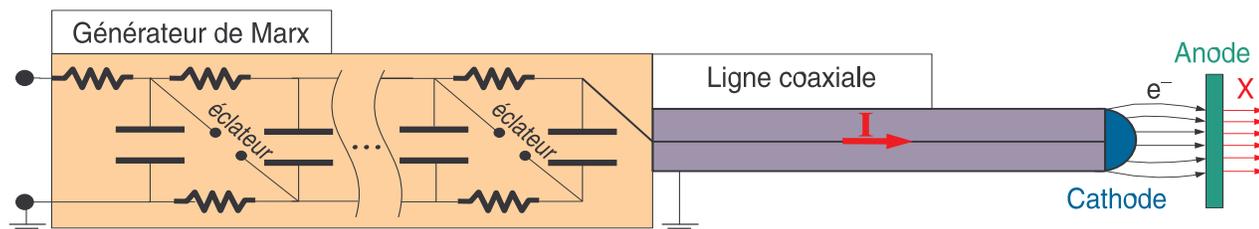


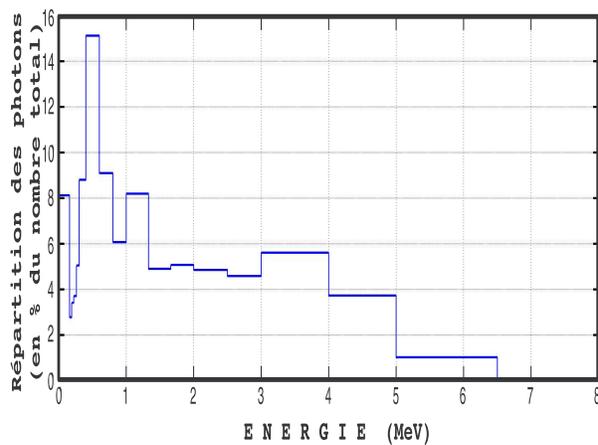
FIG. 3.1 – Principe de fonctionnement de Balzac III

Les caractéristiques du rayonnement généré sur Balzac III, en terme de répartition énergétique des photons et de forme temporelle, sont données sur les courbes a et c-figure 3.2. La fluence obtenue est de l'ordre de 0.85 cal.cm^2 pour une énergie moyenne des photons de 1.19 MeV.

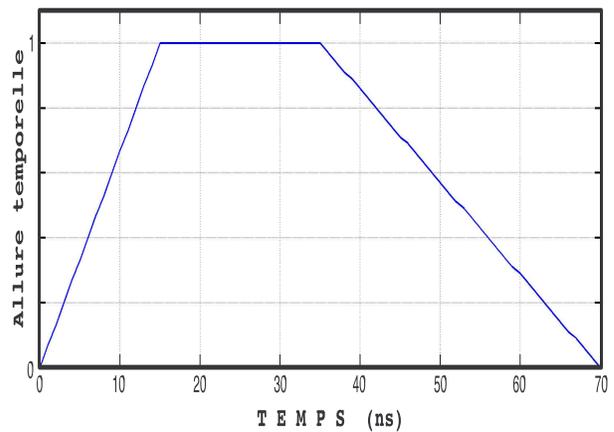
¹Raccourcissement du temps de montée de l'impulsion pour augmenter la puissance



a – Balzac III : générateur d'impulsion γ de la société Nuclétudes



b – Répartition énergétique des γ



c – Forme temporelle de la source γ

FIG. 3.2 – Présentation des caractéristiques du générateur Balzac III

3.2.2 Présentation des mesures

La maquette exposée à l'environnement γ produit par la machine Balzac III est un câble semi-rigide replié identique à celui soumis à l'environnement radiatif du laser Omega. Cette maquette est présentée dans le chapitre 1 sur la figure 1.9. L'émission de la source γ pouvant être considérée comme directionnelle, deux configurations de positionnement du dispositif par rapport à l'axe de cette source ont été testées (voir schémas de la figure a-3.3) :

- configuration 1 : source normale à l'axe de la maquette,
- configuration 2 : source dans l'axe de la maquette.

Pour chaque configuration, plusieurs types de conditions aux limites à l'extrémité libre du câble ont été testées :

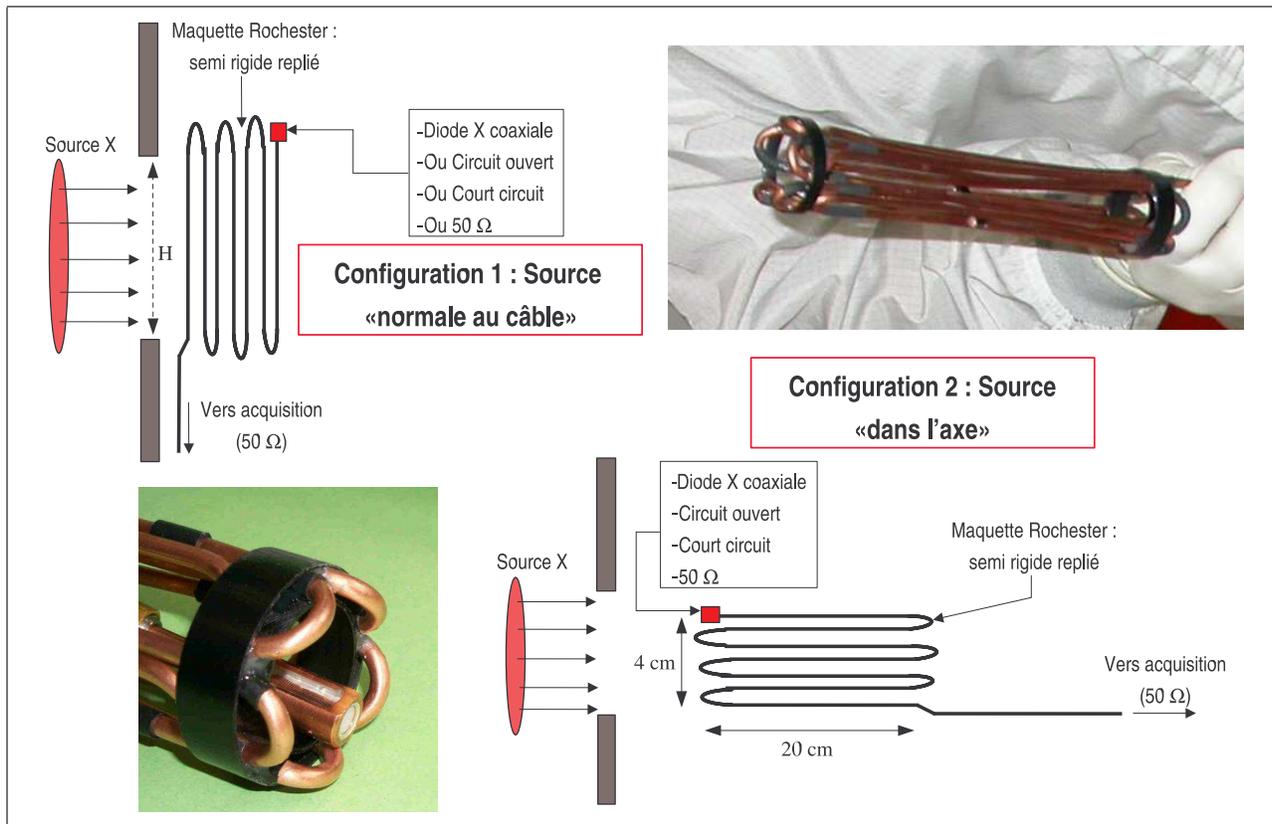
- condition aux limites de circuit ouvert (notée CO),
- condition aux limites de court circuit (notée CC),
- condition aux limites adaptée (notée 50Ω).

L'autre extrémité du câble est reliée à un système d'acquisition dont l'impédance (50Ω) est adaptée à celle du câble.

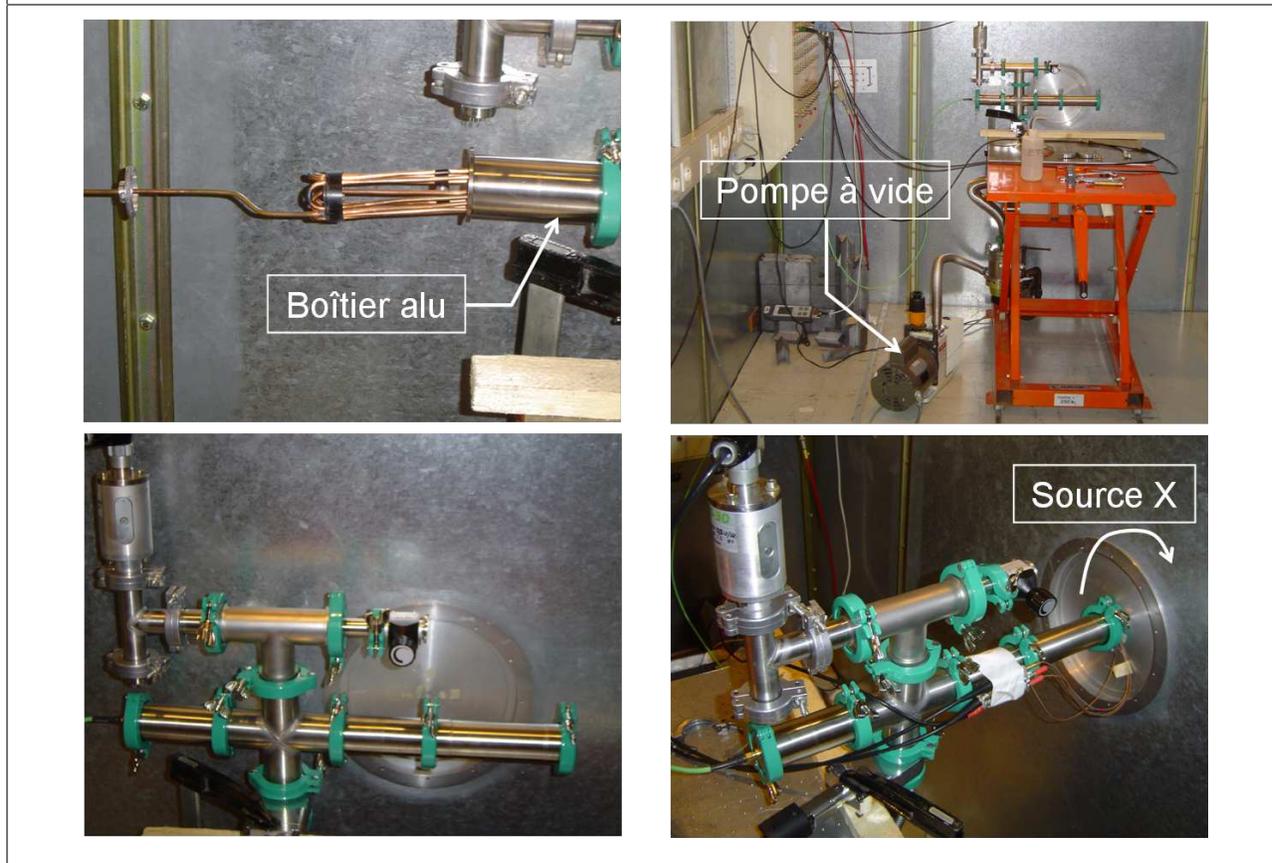
Comme le montrent les photographies de la figure b-3.3, la maquette est préalablement insérée dans un boîtier en aluminium étanche de façon à pouvoir y faire le vide. Cette condition expérimentale est importante car le but de ces expériences est d'observer des photo-courants induits par effet Compton dans le diélectrique. Si le vide n'était pas fait, le signal induit par l'ionisation de l'air viendrait polluer les résultats de manière significative.

Une quinzaine de tirs a été effectuée lors de la campagne de mesures qui a duré une journée. Les caractéristiques de l'environnement généré par la machine peuvent être considérées comme reproductibles d'un tir à l'autre. Ceci permet de pouvoir comparer entre eux les différents résultats obtenus. Les résultats de signaux induits dans le câble sont représentés par les courbes rouges de la figure 3.7 page 70. La largeur temporelle des signaux obtenus est de l'ordre de celle de la source, soit environ 70 à 80 ns. Un changement de signe de la tension est observé pour la condition aux limites de court circuit. En effet, d'après la théorie des lignes, la tension se réfléchit en changeant de signe sur ce type de condition aux limites.

L'amplitude des signaux varie de 5 à 10 V pour la configuration 1, et de 10 à 20 V pour la configuration 2, ce qui représente une différence d'un facteur deux. Sachant que la source peut être représentée par un disque de 5 cm^2 , cette différence s'explique par le fait que le câble n'est que partiellement irradié dans le premier cas, sur une longueur $H = 2.5 \text{ cm}$ (voir figure a-3.3), tandis que tout le câble est irradié dans le second.



a – Deux types de configurations expérimentales testées



b – Photographies du dispositif expérimental

FIG. 3.3 – Expérience d'irradiation γ d'un câble semi-rigide sur Balzac III

3.2.3 Comparaison calculs–mesures

La géométrie spécifique de la maquette a été modélisée dans le code MCNP comme indiqué sur l'image de la figure 3.4. Les bagues en CH maintenant mécaniquement le câble ont aussi été modélisées dans ce calcul. Cette géométrie à 9 tronçons de câble et 9 coudes est la représentation la plus proche de la réalité pouvant être modélisée dans MCNP.

Le câble utilisé est un semi-rigide de type RG 402 modélisé par un fil de cuivre de $450\ \mu\text{m}$ de rayon (âme centrale), entouré d'une épaisseur de $1.04\ \text{mm}$ de téflon (diélectrique). Ce dernier est recouvert d'une couche de cuivre de $300\ \mu\text{m}$ (blindage plein). Les dimensions et les matériaux utilisés dans ce modèle sont ceux indiqués par le constructeur. Le câble de la figure 3.4 est inséré dans un cylindre en aluminium fermé de $4\ \text{cm}$ de diamètre, de $20\ \text{cm}$ de longueur et $1\ \text{mm}$ d'épaisseur.

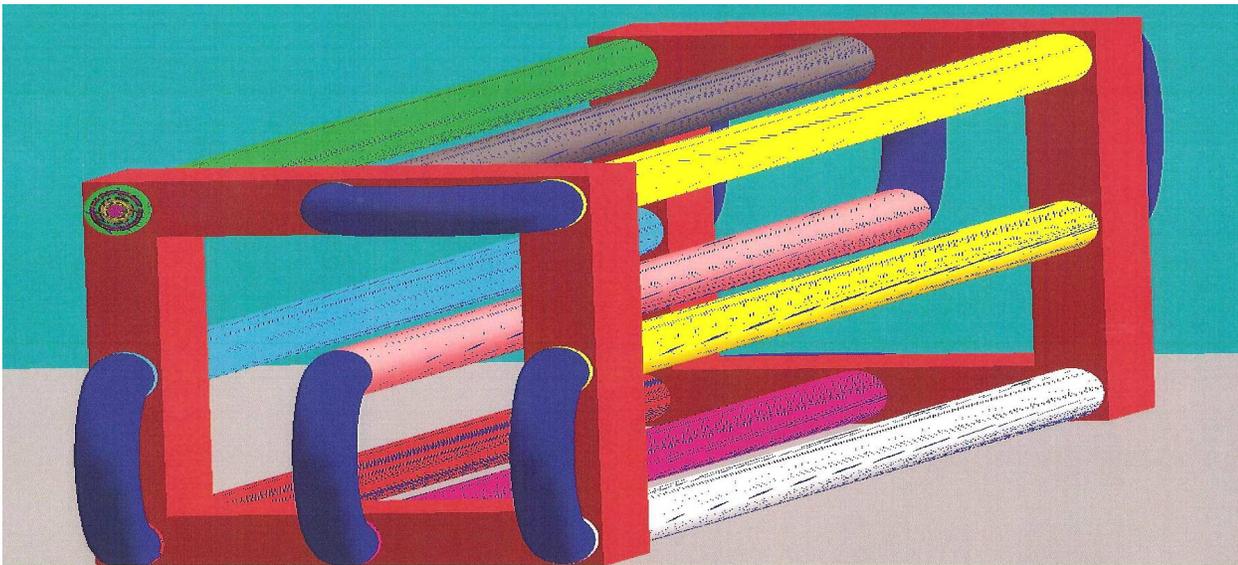


FIG. 3.4 – Modélisation du câble dans MCNP

L'émission X est modélisée par une source répartie plane. Les caractéristiques énergétique et temporelle de cette source sont fidèles au spectre de répartition en énergie des photons et à la forme temporelle présentés sur les courbes b et c de la figure 3.2. La source est normalisée à 1 photon émis par cm^2 .

Le terme source de courant induit i_{dd} nécessaire au modèle TLM est calculé selon la méthode présentée au paragraphe 2.4.4. Dans cette optique, 13 surfaces concentriques de «comptage» des électrons sont définies dans l'épaisseur du diélectrique pour chacun des 9 tronçons de câbles. De façon à obtenir la meilleure précision statistique, sur les résultats des courants d'électrons entrants et sortants de ces surfaces, les calculs sont réalisés avec 50 millions de «particules²».

²Ce qui signifie que 50 millions de tirages aléatoires sont effectués dans la méthode Monte-Carlo.

Les courbes de la figure 3.5 présentent les résultats des bilans d'électrons à travers trois surfaces de comptage. La surface correspondant au rayon $r = 0.046$ mm est la plus proche de l'âme centrale. La surface $r = 1.49$ mm correspond à la surface interne du blindage. La surface $r = 1.00$ mm est située au centre du diélectrique. On remarque sur ces courbes que plus la surface est proche du blindage, plus le nombre d'électrons la traversant est important. Ceci s'explique par le fait que le blindage métallique est fortement émetteur en électrons d'une part, et que l'aire de la surface est croissante avec le rayon de celle-ci d'autre part. En revanche, le bilan électronique reste à peu près constant au travers des différentes surfaces.

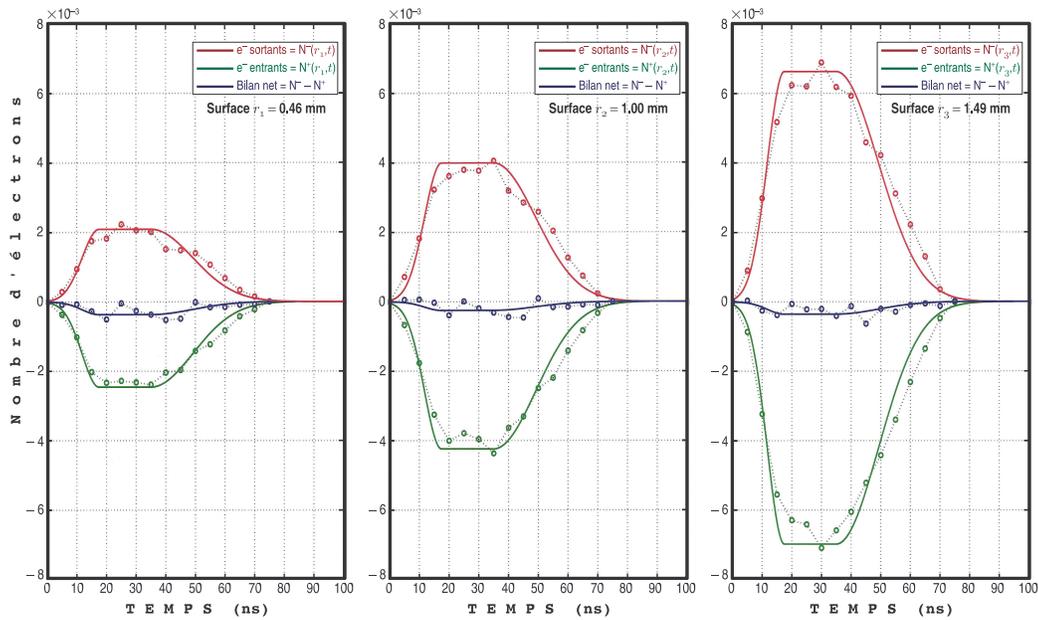


FIG. 3.5 – Bilan électronique à travers différentes surfaces de comptage MCNP

Ces résultats sont donnés en nombre d'électrons pour une source émettant 1 photon par cm^2 . Pour obtenir les ordres de grandeur réels, il est nécessaire de multiplier ces résultats par la fluence réelle de la source, soit 1.85×10^{13} photons. cm^{-2} .

Le lissage nécessaire à l'exploitation de ces résultats est réalisé à l'aide de la fonction f définie par morceaux par la relation (3.1). Les paramètres T_{m1} et T_{m2} sont respectivement imposés égaux à 15 ns et 35 ns. Ces valeurs définissent le temps de montée et le temps de relaxation de l'impulsion. La différence $\tau_2 - \tau_1$, définissant un «plateau», est imposée égale à 15 ns.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \exp \left[- \left(\frac{t - \tau_1}{\phi_1} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad \phi_1 = \frac{T_{m1}}{\sqrt{\ln(100)}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < \tau_1 \\ f(t) = 1 \quad \text{pour} \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ f(t) = \exp \left[- \left(\frac{t - \tau_2}{\phi_2} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad \phi_2 = \frac{T_{m2}}{\sqrt{\ln(100)}} \quad \text{pour} \quad t > \tau_2 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Remarquons que cette forme temporelle possède les mêmes caractéristiques que celles de la source présentée sur la courbe c-figure 3.2.

Sur la figure 3.6 sont tracées les valeurs du générateur de courant $i_{dd}(t)$, calculé pour le tronçon de câble central, dans les deux configurations de positionnement de la source par rapport à la maquette. L'intensité du terme source calculé est 2.5 fois supérieure dans la configuration normale à l'axe de la source. Dans les deux cas, le générateur de courant déterminé pour chacun des brins est sensiblement le même. Ceci signifie que la position du tronçon de câble dans le cylindre en aluminium n'a pas une grande importance dans la simulation MCNP. En outre, les calculs avec ou sans bague de CH n'ont pas montré de différence significative.

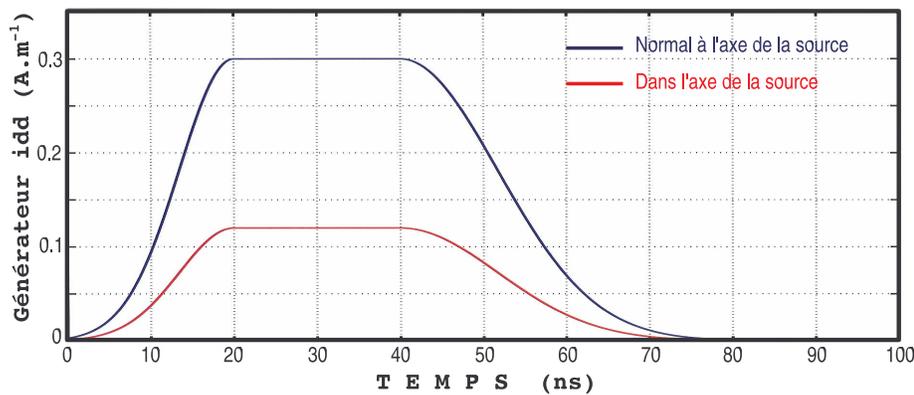


FIG. 3.6 – Générateur de courant réparti i_{dd}

Ce résultat est ensuite injecté dans un code TLM 1D aux différences finies. Le câble ayant un blindage plein d'une épaisseur de $300 \mu\text{m}$, l'impédance de transfert Z_t est supposée nulle. Malgré des courbures importantes du câble au niveau des coudes, ce dernier est supposé équivalent à un câble rectiligne en terme de propagation de signal. En effet, d'après ce qui peut être lu dans les manuels de CEM tels que [I-3], des courbures abruptes d'une ligne de transmission peuvent entraîner des discontinuités locales d'impédance. Cependant, des mesures d'impédance du câble replié n'ont pas mis en évidence de modifications majeures des propriétés de propagation de ce câble. Les calculs ont été effectués avant les mesures pour donner un ordre de grandeur des courants induits attendus. Afin d'obtenir des valeurs majorantes, la conductivité induite n'a pas été prise en compte dans le calcul TLM 1D.

Les résultats des signaux induits calculés sont représentés par les courbes bleues sur la figure 3.7. Bien que le terme source calculé dans la configuration 1 soit largement supérieur à celui de la seconde, l'intensité du signal est plus faible. Cette observation est normale car dans un cas (maquette dans l'axe), l'ensemble du câble est éclairé, tandis que dans l'autre cas, seule une portion de la maquette, de longueur $H = 2.5 \text{ cm}$, est exposée au rayonnement. Les ordres de grandeur ainsi que la largeur temporelle des signaux évalués numériquement sont satisfaisants.

Rappelons cependant que la conductivité induite n'a pas été prise en compte dans ces calculs. Il serait intéressant, pour la suite de ce travail, d'évaluer cette conductivité. Celle-ci dépend, d'après l'annexe C, du débit de dose déposée dans le diélectrique et des paramètres \mathcal{K}_p et \mathcal{K}_d intrinsèques à celui-ci. Même si le débit de dose peut être évalué à l'aide du code MCNP, la détermination des paramètres \mathcal{K}_p et \mathcal{K}_d n'est pas aisée.

3.2.4 Conclusion

Les mesures de courants photo-induits réalisées avec le générateur d'impulsions X Balzac III (EADS/Nuclétudes) ont permis d'évaluer la validité de la démarche de simulation de ces courants, présentée dans le chapitre précédent. Le câble étant parfaitement blindé, cette validation porte essentiellement sur la technique de calcul des termes sources de courant répartis \mathbf{i}_{dd} à l'aide du code 3D d'interaction rayonnement–matière MCNP. La bonne concordance entre calculs et mesures permet de valider cette démarche pour une irradiation purement photonique du câble. En revanche, il reste encore à évaluer la conductivité induite par le rayonnement dans le diélectrique et son impact sur les résultats.

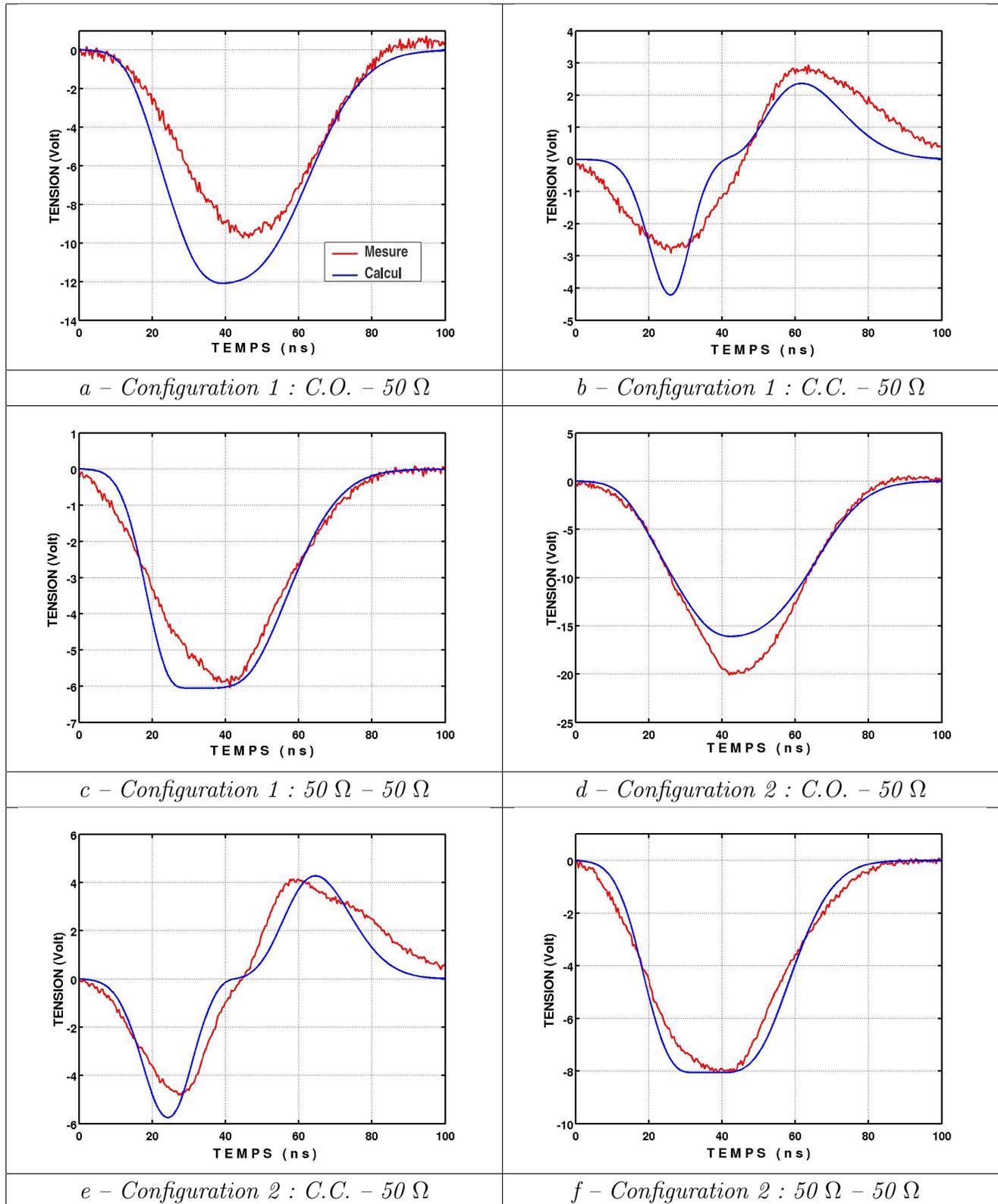


FIG. 3.7 – Résultats des simulations avec le modèle TLM à sources de courant réparties

3.3 Validité du modèle en ambiance neutronique

3.3.1 Présentation des mesures

3.3.1.1 Le laser de puissance Omega

Au titre de l'étude des effets électriques transitoires induits dans un câble coaxial soumis à un environnement radiatif de type LMJ, une campagne annuelle de mesures est réalisée, depuis l'année 2003, sur le laser Omega du laboratoire LLE³ de Rochester (voir figure 3.8). Cette installation américaine est pour l'instant la plus appropriée pour mener ce genre d'expérience puisque le laser Omega est actuellement le laser le plus énergétique disponible sur la planète.



FIG. 3.8 – Le laser Omega du LLE

Ce dernier peut être considéré comme une version «à échelle réduite» des futurs LMJ et NIF, d'une part en taille, puisque la chambre d'expérience d'Omega fait environ 3 m de diamètre contre 10 m pour celle du LMJ. D'autre part, bien que le principe de fonctionnement soit le même que celui du LMJ décrit dans le chapitre 1, les performances sont plusieurs ordres de grandeur inférieures à celles attendues sur le futur laser français. En effet, environ 30 kJ d'énergie laser sont focalisés sur la cible par attaque directe à l'aide de 60 faisceaux, ce qui représente une énergie 50 fois plus faible que celle qu'apportera le LMJ⁴. Le taux de combustion de la cible est donc beaucoup moins important et ne permet pas d'atteindre un gain supérieur à 1. L'environnement radiatif engendré par Omega est néanmoins du même type que l'environnement LMJ, c'est-à-dire de composition identique en proportions mais avec 10^6 fois moins de neutrons, soit de l'ordre de 10^{13} à 10^{14} neutrons émis dans les 4π stéradians.

³Laboratory of Laser Energetics – Rochester University – USA

⁴1.8 MJ d'énergie focalisée sur la cible par attaque indirecte à l'aide de 240 faisceaux dans le cas du LMJ

3.3.1.2 Description de l'expérience

L'expérience décrite dans ce paragraphe a été mise au point en 2003 pour la première campagne de mesures d'irradiation de câbles effectuée à Rochester. L'objectif initial de cet essai était de se faire une idée de l'effet d'une irradiation neutronique sur un câble coaxial en terme de génération de courants électriques parasites. Le principe consiste à exposer un câble aux rayonnements générés par l'implosion par FCI d'un microballon contenant un mélange de D-T et de mesurer le courant électrique qui en découle. Dans cette optique, le dispositif expérimental, présenté au premier chapitre de ce document sur la photographie a-1.9 page 21, a été exposé à des tirs à haut flux de neutrons de 14 MeV pulsés⁵ sur Omega.

En 2003, aucune simulation n'ayant pu être réalisée avant l'essai, l'ordre de grandeur du courant parasite attendu était inconnu. Le dispositif expérimental a alors été dimensionné, selon les principes de l'hypothèse fondamentale présentée dans la section 2.2, de façon à maximiser l'effet de l'irradiation et de manière à ce que seule la contribution électrique due à l'effet des neutrons soit mesurée. Ainsi, le dispositif se compose (voir photographie a-1.9 page 21) :

- D'un câble coaxial semi-rigide d'une longueur de 250 cm replié sur lui-même dans un volume minimal de façon à ce qu'une longueur maximale de câble soit irradiée. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2.4.5.1 du chapitre précédent, le blindage d'un câble semi-rigide peut être considéré comme parfait dans la gamme de fréquences qui nous intéresse (> 10 MHz). L'utilisation de ce type de câble lors de cette expérience permet de s'affranchir de la contribution électromagnétique des courants transitoires induits.
- D'un détecteur sensible aux rayonnements X. Le signal généré par cet élément du dispositif sert de repère temporel de façon à bien appréhender par la suite la chronométrie des phénomènes.
- D'un tube en aluminium fermé de 1 mm d'épaisseur et de 40 mm de diamètre entourant le câble. L'aluminium sert de filtre au rayonnement X⁶ émis par l'implosion de manière à ce que l'effet mesuré soit bien celui dû aux neutrons. Une fenêtre de 1 cm de long et de 5 mm de large a été aménagée à l'extrémité de ce tube, en regard de la diode X afin que cette dernière puisse être atteinte par les X.
- D'un fourreau en tungstène ($Z=74$) de 5 mm d'épaisseur disposé autour du tube en aluminium. Il permet de renforcer la dose de rayonnement γ déposée au niveau du câble. En effet, les interactions neutron-matière de type diffusion inélastique ($n, n'\gamma$), convertissant le flux incident de neutrons de 14 MeV en photons γ , sont d'autant plus efficaces que le numéro atomique du noyau cible est élevé.

⁵Environ 10^{13} n/ 4π sur une durée inférieure à 300 ps

⁶Une épaisseur de 1 mm d'aluminium permet de filtrer les X jusqu'à une énergie d'une centaine de keV.

Chaque extrémité du câble est respectivement connectée à la diode X (circuit ouvert) et à un appareil d'acquisition des mesures : un oscilloscope rapide IN7100 d'impédance 50Ω adaptée à celle du câble. L'ensemble du dispositif est disposé horizontalement le plus près possible de la source de façon à ce que la fluence neutronique au niveau du câble soit maximale.

3.3.1.3 Résultats des mesures

La courbe a-figure 3.9 représente le signal enregistré par l'oscilloscope pour le tir n° 31750 ayant généré 1.15×10^{13} neutrons. La tension, mesurée en fonction du temps, présente la forme générale d'une gaussienne d'une quarantaine de nanosecondes de largeur pour une durée d'impulsion de la source neutrons d'à peine quelques centaines de picosecondes. Par dessus cette forme générale viennent s'ajouter 11 pics locaux régulièrement espacés d'exactement 2 ns. Le quatrième, plus important, correspond à la référence temporelle émise par la diode X. Lorsque celle-ci est polarisée, ce pic est positif comme c'est le cas sur la courbe a-figure 3.9. Cependant, lorsque la diode n'est soumise à aucune tension de polarisation préalable, le pic devient négatif. Enfin, la tension maximale de ce signal, hors marquage temporel, est d'environ 450 mV. Remarquons que chaque mesure réalisée sur ce dispositif lors d'un tir à Omega montre exactement les mêmes caractéristiques d'allure temporelle (durée et pics). Cette expérience est donc parfaitement reproductible.

3.3.1.4 Analyse du résultat

L'analyse du signal obtenu réside essentiellement dans la compréhension de la chronométrie des phénomènes mis en jeu lors de l'expérience (voir schéma b-figure 3.9). Lorsque la tension de polarisation de la diode est annulée, le quatrième pic du signal mesuré devient négatif, ce qui confirme qu'il correspond au signal émis par la diode. Il est synchrone avec l'arrivée des X sur l'extrémité du câble et sert donc de référence temporelle.

Les neutrons, ayant une vitesse de $5 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ ou encore 20 ns.m^{-1} , irradient l'ensemble des extrémités coudées les plus proches de la source, 4 ns après l'arrivée des X. Supposons que les autres pics correspondent à l'arrivée des neutrons sur ces extrémités repliées du câble les plus proches de la source. Cette hypothèse peut se vérifier par des considérations chronométriques. En effet, sachant que la vitesse de propagation d'un signal dans le câble en test est de 5 ns.m^{-1} , l'intervalle de temps de 2 ns séparant chaque pic correspond au temps mis par le signal pour se propager sur 40 cm, soit un aller-retour de câble. Cette longueur correspond bien à la distance séparant deux extrémités repliées disposées en face de la source. De plus, les 3 «pics neutrons» précédant l'impulsion X proviennent de toutes les extrémités du câble proches de la source que le signal produit par les X n'a pas encore atteint lorsque les neutrons commencent à irradier le câble (voir schéma b-figure 3.9).

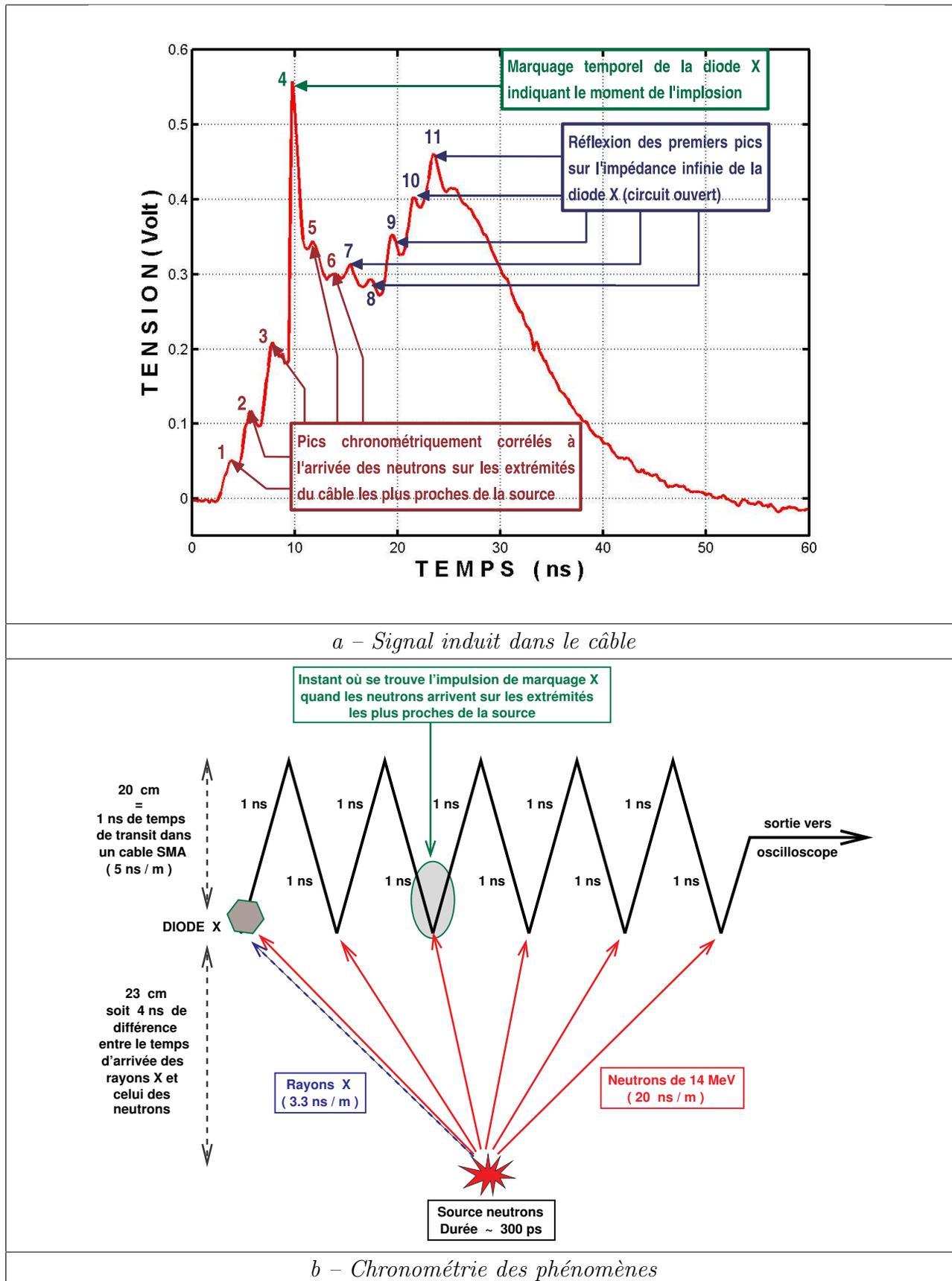


FIG. 3.9 – Analyse du résultat de l'expérience

Ainsi, les 6 premiers pics sont temporellement parfaitement corrélés à l'interaction des neutrons avec les extrémités du câble les plus proches de la source ainsi qu'à l'interaction de la diode avec les rayonnements X. Les 5 suivants, quant à eux, correspondent aux réflexions des 5 premiers sur la diode X placée en début de câble. Comme elle constitue un circuit ouvert, le signal se réfléchit sur son impédance infinie. Rien n'est réfléchi à l'autre extrémité du câble puisque l'impédance du système d'acquisition est adaptée à celle du câble.

3.3.2 Comparaison calcul–mesure

Après avoir estimé la validité du modèle de câble en ambiance γ pure (voir § 3.2.3), la validité du calcul des courants transitoires induits en ambiance neutronique est appréciée dans ce paragraphe. Pour cela, le résultat de l'expérience précédente est comparé à une évaluation numérique du signal induit. La méthode de simulation est similaire à celle du paragraphe 3.2.3. La géométrie du câble définie dans le code MCNP est identique à celle de la figure 3.4 page 66. Les seules différences entre la simulation menée précédemment et celle-ci sont les caractéristiques de la source. En effet, l'émission est principalement neutronique dans le cas Omega.

Dans la modélisation MCNP, la source est supposée purement neutronique, ponctuelle en espace et représentée temporellement par un Dirac. Le nombre de neutrons produits par la fusion des atomes de la cible est fixé à 1.2×10^{13} . Les neutrons issus de la source sont émis uniformément dans les 4π stéradians et sont supposés monocinétiques, c'est-à-dire ayant tous la même énergie égale à 14 MeV.

Pour un gain de précision statistique, on préfère imposer, dans le code d'interaction, une source émettant dans un angle solide de 10° . Cette valeur est la valeur minimale de l'angle solide pour lequel tout le dispositif est irradié. De plus, les résultats des bilans d'électrons présentés par la suite ont été obtenus par des calculs à «100 millions de particules».

Les résultats de deux simulations différentes sont présentées dans ce qui suit. Dans la première, la maquette est simplement entourée d'un boîtier en aluminium de 1 mm d'épaisseur. Dans la seconde, a été rajouté le fourreau de tungstène de 5 mm d'épaisseur.

Les courbes de la figure a–3.13 présentent les résultats des bilans d'électrons à travers trois surfaces de comptage dans le cas sans tungstène. La surface correspondant au rayon $r = 0.046$ mm est la plus proche de l'âme centrale. La surface $r = 1.49$ mm correspond la surface interne du blindage. La surface $r = 1.00$ mm est située au centre du diélectrique. La même remarque qu'au paragraphe 3.2.3 peut être faite sur ces bilans électroniques. Plus la surface est proche du blindage, plus le nombre d'électrons la traversant est important. Le bilan net de charges reste cependant du même ordre de grandeur quelle que soit la position de la surface. Les courbes de la figure b–3.13 présentent le spectre de répartition énergétique des électrons Compton produits. Ce spectre s'étale de 0 à 6 MeV, avec une énergie moyenne de 1.3 MeV.

Comme on peut le voir sur la courbe c-figure 3.13, la fonction de lissage utilisée est définie par morceaux par trois gaussiennes de temps de montée différents. La première définit le temps de montée du pic observable sur les résultats (environ 0.5 ns). La seconde définit le temps de descente de ce pic (environ 1.5 ns). La troisième permet d'approcher la relaxation des résultats obtenus jusqu'à leur retour à zéro (environ 5 ns).

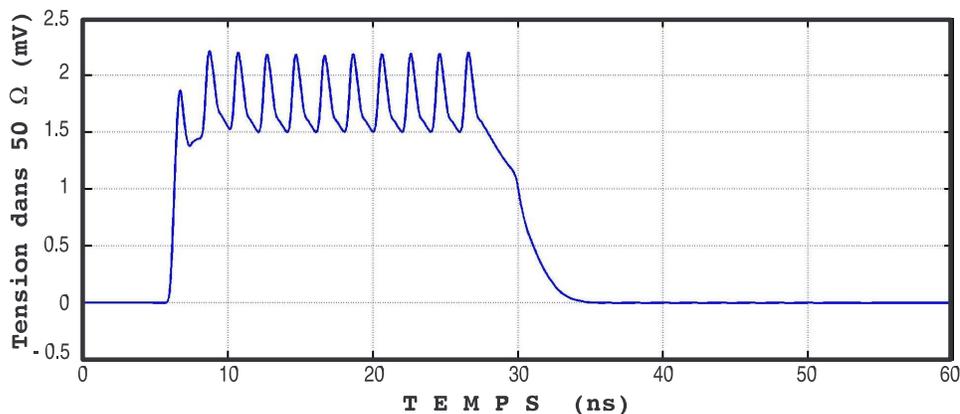


FIG. 3.10 – Tension dans 50 Ω en bout de câble – cas sans tungstène

La courbe c-figure 3.13 représente aussi la valeur du générateur de courant i_{dd} à répartir le long du câble dans le code TLM 1D. La largeur temporelle de ce terme source est d'environ 6 ns et son maximum de l'ordre de $0.2 \text{ mA}\cdot\text{m}^{-1}$. Le câble replié est toujours supposé équivalent à un câble rectiligne en terme de propagation du signal. L'impédance de transfert du câble est bien sûr encore supposée négligeable.

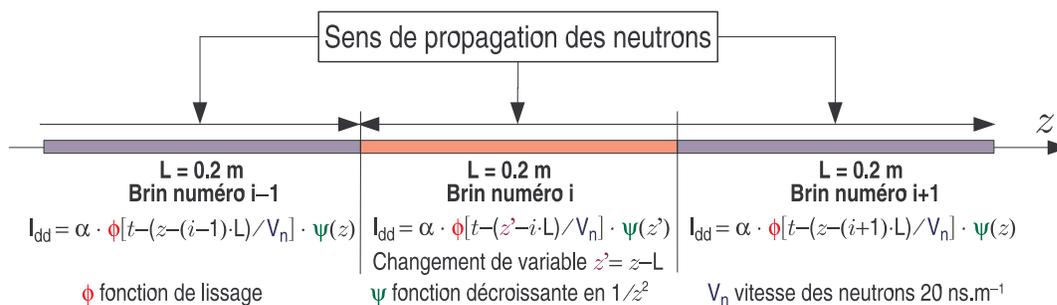


FIG. 3.11 – Prise en compte de la forme du câble dans le terme source

Sachant que la vitesse des neutrons est plus de 6 fois inférieure à celle de la lumière, on ne néglige plus la vitesse V_n de propagation du rayonnement. En effet, dans la configuration expérimentale, l'axe de la maquette est confondu avec un rayon de la chambre d'expériences, on ne peut donc pas considérer que tout le câble est irradié instantanément. C'est pourquoi on impose une dépendance en z (abscisse du câble rectiligne équivalent) du terme source dans le modèle TLM. Comme l'illustre le schéma de la figure 3.11, cette dépendance se fait en introduisant

des retards en fonction de l'abscisse z , du type $t - \frac{z}{V_n}$, dans la fonction ϕ définie sur la courbe c-figure 3.13. La forme en plusieurs allers-retours du câble complexifie légèrement la définition de ces retards. Ces derniers dépendent alors du brin de câble considéré (aller ou retour du câble) et du sens de propagation des neutrons par rapport à ce brin, comme indiqué figure 3.11.

Enfin, en considérant une source neutronique ponctuelle, la fluence neutronique décroît en $\frac{1}{4\pi r^2}$ avec r la distance à la source. Cette diminution de la fluence peut être prise en compte dans le modèle TLM en ajoutant une dépendance en $\frac{1}{z^2}$ du terme source (voir schéma figure 3.11).

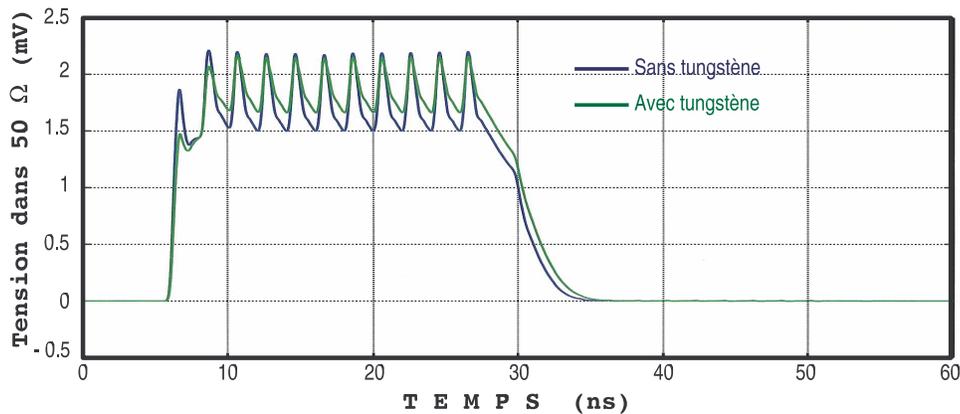


FIG. 3.12 – Tension dans 50 Ω en bout de câble – comparaison avec et sans tungstène

Sur la courbe de la figure 3.10 est tracé le résultat du signal induit calculé dans le cas sans tungstène. Toujours dans le but d'obtenir des résultats majorants, ce résultat a été calculé sans prendre en compte la conductivité induite par le rayonnement au sein du diélectrique du câble. Le courant obtenu présente bien les mêmes caractéristiques d'allure que le résultat de l'expérience⁷, avec cependant une largeur temporelle plus faible (30 ns contre 45 ns pour le résultat expérimental). De plus, l'intensité du signal calculé est plus faible d'un facteur 100.

La prise en compte du fourreau en tungstène dans la simulation ne permet pas d'expliquer cette différence. Le tube de tungstène joue bien son rôle de renforceur γ puisque le nombre d'électrons Compton créés dans le diélectrique est un ordre de grandeur supérieur à celui de la simulation sans tungstène (voir courbes de la figure a-3.14). En revanche, le rayonnement γ devenant plus isotrope n'induit pas un bilan net de charges plus important que dans le cas précédent. Le terme source calculé (courbe verte figure c-3.14) est même d'une intensité plus faible, mais avec une durée légèrement supérieure. Le résultat en terme de courant induit, présenté sur la courbe de la figure 3.12, est tout à fait similaire à celui précédemment calculé sans le boîtier de tungstène.

⁷C'est-à-dire les 11 pics régulièrement espacés de 2 ns. Cette allure est uniquement due à la forme spécifique repliée du câble.

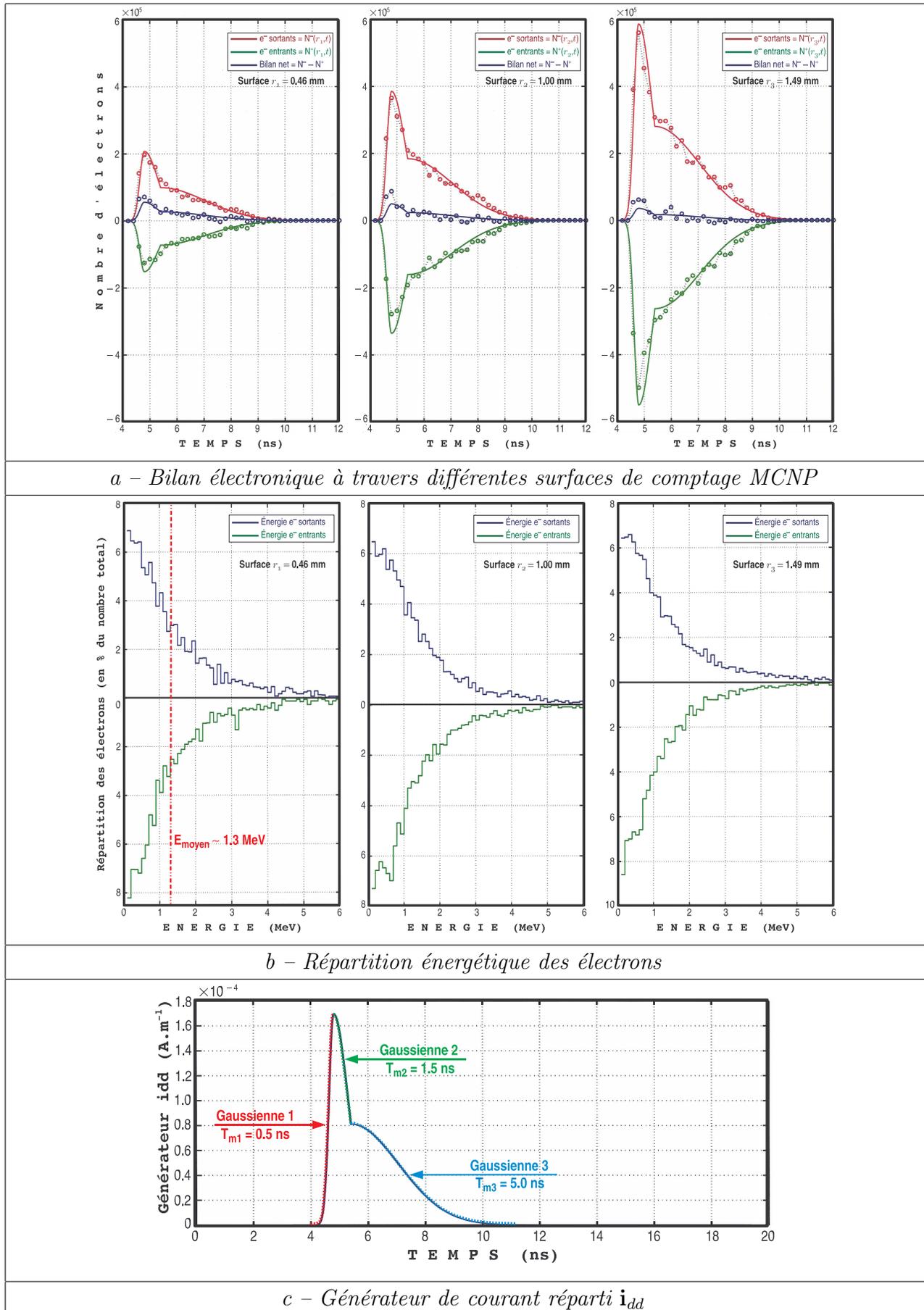
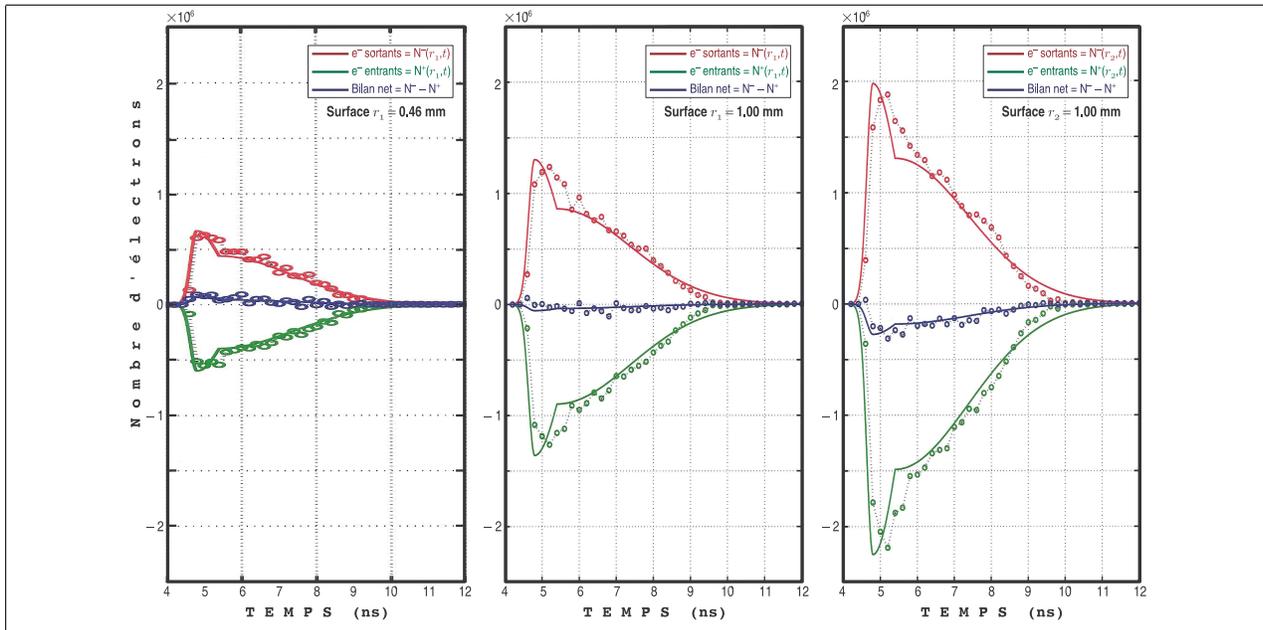
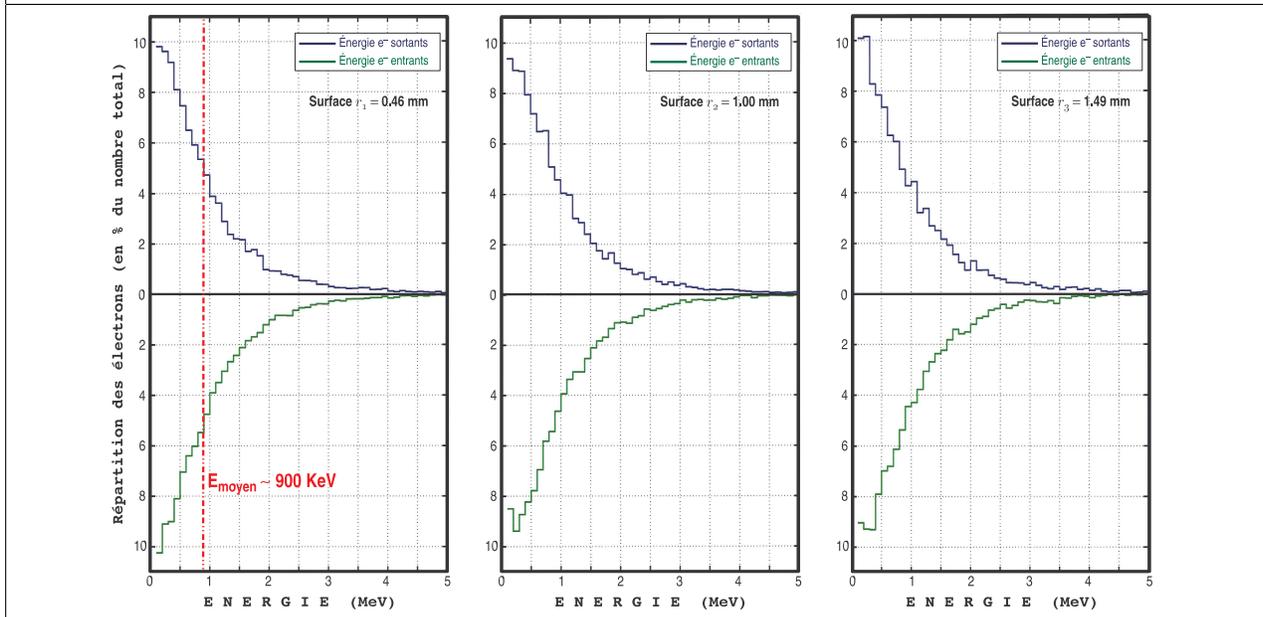


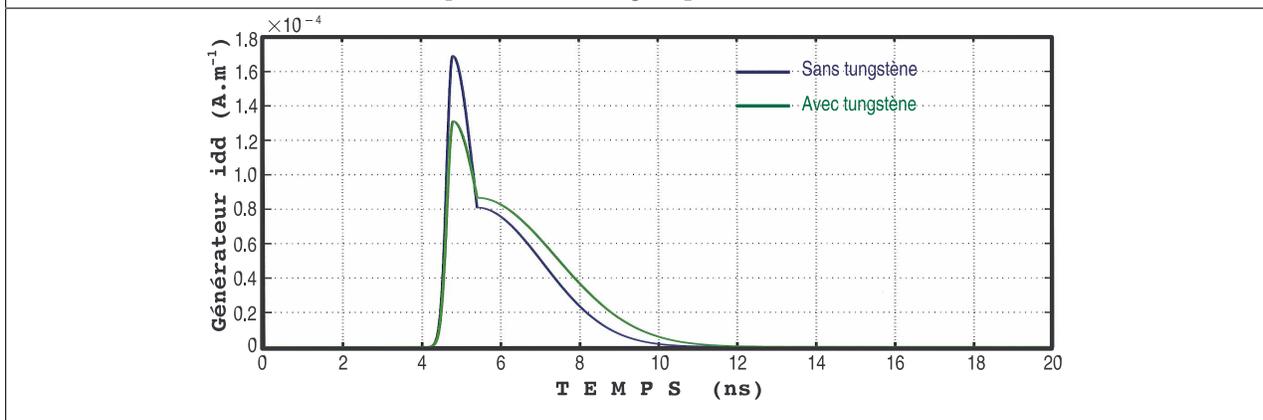
FIG. 3.13 – Résultats de la simulation MCNP dans le cas sans tungstène



a – Bilan électronique à travers différentes surfaces de comptage MCNP



b – Répartition énergétique des électrons



c – Générateur de courant réparti i_{dd}

FIG. 3.14 – Résultats de la simulation MCNP dans le cas avec tube en tungstène

3.3.3 Conclusion sur la validité du modèle en ambiance neutronique

L'utilisation d'un code d'interaction rayonnement-matière 3D a permis de modéliser de façon précise la maquette exposée à l'environnement Omega. Le résultat du signal induit dans ce câble, obtenu par la simulation, présente une allure temporelle similaire à celle du signal mesuré. En outre, le signal évalué numériquement ne présente pas de différence d'intensité en présence ou non du boîtier en tungstène dont le rôle était justement d'intensifier ce signal. Le calcul MCNP montre bien une augmentation d'un ordre de grandeur du nombre d'électrons Compton créés dans le diélectrique du câble. Cependant, le bilan net de charges reste du même ordre de grandeur. Cette observation est confirmée par l'expérience. Le signal mesuré en présence ou non de l'enveloppe de tungstène ne présente quasiment aucune différence (voir figure 3.15).

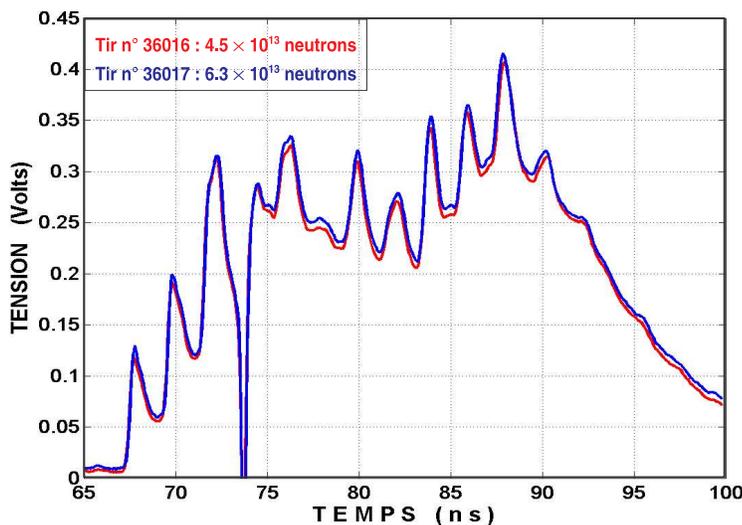


FIG. 3.15 – Comparaison de mesures avec et sans fourreau en tungstène

En revanche, l'intensité du courant parasite calculée est deux ordres de grandeur inférieure à celle du signal expérimental. Une première explication possible de cette différence est qu'il existe, dans l'environnement du câble, d'autres contributeurs γ , non pris en compte dans le calcul MCNP présenté ici. Ces contributeurs génèreraient un rayonnement photonique très supérieur et suffisamment dissymétrique pour faire croître de manière importante l'intensité du terme source calculé. Cependant, la prise en compte d'une géométrie élargie dans le code MCNP n'a pas montré de différence significative par rapport aux résultats présentés précédemment.

Les résultats obtenus avec le code MCNP sont linéairement dépendants du nombre de neutrons émis par la source. En effet, le calcul est fait pour un unique neutron incident, puis les résultats obtenus sont multipliés par le nombre réel de neutrons. Il apparaît ainsi clairement que l'intensité du terme source de courant induit, calculé par l'intermédiaire de ce code, dépend linéairement du nombre de particules sources.

Cependant cette dépendance est remise en cause par une simple analyse des différentes mesures réalisées sur le laser Omega. En effet, sur les courbes de la figure 3.16, on ne distingue pas de relations claires entre le nombre de neutrons émis et le niveau de signal mesuré. Par exemple, un tir à 4.5×10^{13} neutrons (tir 31752) induit un signal parasite dans le câble de 1300 mV maximum tandis qu'un tir plus dense en neutrons (tir 36016 : 5.9×10^{13} neutrons) induit un signal trois fois plus faible.

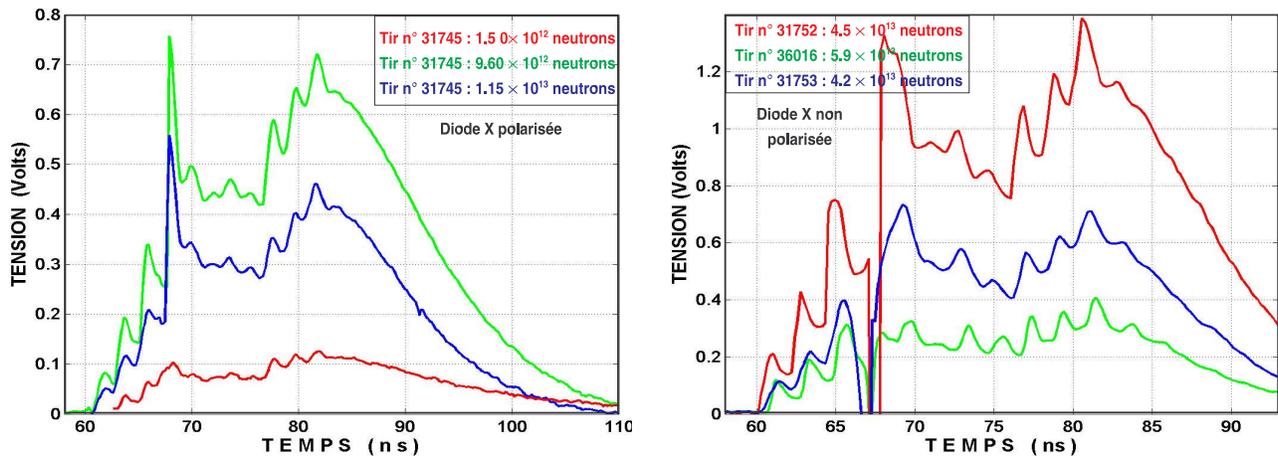


FIG. 3.16 – Comparaison des résultats des mesures en fonction du nombre de neutrons émis

Ces différentes observations tendent à remettre en cause l'interprétation physique des effets responsables du signal induit dans le câble. Cela signifie que la théorie considérée est incomplète et mériterait d'être étoffée. Il existerait d'autres mécanismes entrant en jeu dans la génération de courants parasites.

Les réflexions sur la problématique de signaux parasites dans les câbles du LMJ s'orientent désormais vers d'autres interprétations physiques. En effet, il est probable que ces signaux proviennent de la mise en mouvement d'autres porteurs de charge que les électrons. Des expériences «dédiées» sont mises en œuvre pour mettre en évidence le courant induit par la mise en mouvement de protons. Ces derniers, appelés «protons de recul», seraient créés lors d'interactions de type (n,p)⁸ dans le diélectrique. Les premiers résultats de ces expériences, réalisées sur le laser Omega, sont exposés dans [I-23].

⁸Voir tableau 1.1 page 12, récapitulant les interactions neutron-matière possibles

3.4 Conclusion

3.4.1 Bilan sur la démarche de simulation de courants induits

Dans cette partie, une démarche de modélisation de courants transitoires induits dans un câble coaxial a été présentée. Cette modélisation est fondée sur les théories développées entre 1960 et 1980 pour évaluer les courants parasites provoqués par un rayonnement photonique de haute énergie.

L'objectif de cette démarche a été d'appliquer cette technique à l'évaluation des courants parasites induits dans un câble coaxial plongé dans une ambiance nucléaire radiative de type LMJ. L'hypothèse fondamentale, pour cette application, a été de supposer que les courants parasites sont provoqués par le rayonnement γ secondaire créé par les interactions neutrons-matière. En effet, les neutrons n'interagissant pas avec les électrons, le déplacement de charges électroniques responsables des courants ne peut se faire que par l'intermédiaire de photons de haute énergie (X ou γ) dont l'effet ionisant est bien connu. Cette hypothèse permet de se ramener à un rayonnement photonique.

La tentative de restitution des signaux induits dans le câble soumis à l'environnement radiatif du laser Omega a permis d'évaluer la validité de cette démarche dans le cas d'une ambiance à dominante neutronique type LMJ. Le fait d'utiliser un câble semi-rigide pour cette expérience permet de s'affranchir du couplage du câble au champ électromagnétique ambiant dans la modélisation. La validation porte donc sur la démarche de calcul du terme source de courant à répartir le long du câble pour calculer le signal induit total. L'originalité de ce travail réside dans la technique de calcul de ces sources avec un code d'interaction 3D tel que MCNP.

Bien que les simulations effectuées donnent de bons ordres de grandeur pour un environnement purement photonique (voir § 3.2.3), les résultats obtenus en ambiance neutronique sont peu satisfaisants. En effet, l'intensité calculée est 2 ordres de grandeur en dessous de celle mesurée. Ces résultats peu concluants montrent que la théorie sur laquelle est fondée la démarche de modélisation est incomplète. Celle-ci ne permet donc pas une extrapolation fiable des résultats à l'environnement radiatif du LMJ.

3.4.2 Perspectives

Les réflexions sur la problématique de signaux parasites dans les câbles du LMJ s'orientent désormais vers d'autres interprétations physiques. En effet, ces signaux pourraient provenir de la mise en mouvement de protons au sein du diélectrique lors d'interactions de type (n,p). Des expériences «dédiées» sont mises en œuvre pour mettre en évidence ce phénomène. Les premiers résultats de ces expériences, réalisées sur le laser Omega, sont exposés dans [I-23].

Bibliographie

- [I-1] E. E. CONRAD, «*Radiation Effects Researchs in the 60's*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 41, No. 6, pp. 2648–2659, Décembre 1994
- [I-2] J.C. BOUDENOT, G. LABAUNE, «*La compatibilité électromagnétique et nucléaire*», Chapitre 8 : *Environnements radiatifs*, Ellipses, Thomson-CSF 1998
- [I-3] J.C. BOUDENOT, G. LABAUNE, «*La compatibilité électromagnétique et nucléaire*», Chapitre 4 : *L'interconnexion des systèmes*, Ellipses, Thomson-CSF 1998
- [I-4] K. G. KERRIS, C. C. BERGGREN, D. B. CARTER, G. G. SPEHAR, «*Radiation Effect in Coaxial Cables*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 17, No. 6, pp. 264–270, Décembre 1969
- [I-5] V. A. J. VAN LINT, «*Radiation Induced Current in Coaxial Cables*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 16, No. 6, pp. 210–216, Décembre 1970
- [I-6] W. L. CHADSEY, B. L. BEERS, V. W. PINE, C. W. WILSON, «*Radiation-Induced Signals in Cables*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 23, No. 6, pp. 1933–1941, Décembre 1976
- [I-7] D. L. SHAEFFER, «*A Phenomenological Approach to Cable SGEMP Modelling*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 30, No. 6, pp. 4427–4433, Décembre 1983
- [I-8] D. L. SHAEFFER, «*Coupling of Nonlinear Cable SGEMP Processes*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 30, No. 6, pp. 4444–4449, Décembre 1983
- [I-9] J. CHERVENAK, V. A. J. VAN LINT, M. L. PRICE, «*Photon-Induced Anomalous Cable Currents*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 26, No. 6, pp. 4927–4935, Décembre 1979
- [I-10] D. L. SHAEFFER, J. M. SIEGEL, «*Analysis of Time-Dependent Radiation-Induced Conductivity in Dielectrics and Effect on Cables SGEMP*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 29, No. 6, pp. 1746–1753, Décembre 1982
- [I-11] R. S. LEE, G. A. FULK, R. H. BARLETT, D. J. MEEKER, R. C. WEINGART, «*X-ray Induced Photo-Conductivity in Dielectric Materials*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 22, No. 3, pp. 1958–1963, Juin 1975

- [I-12] C. A. EKLUD, D. C. OSBORN, W. F. RICH, T. A. STRINGER, «*Connector Contributions to the SGEMP Response of Hardened Cable Systems*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 27, No. 27, pp. 1552–1559, Décembre 1980
- [I-13] K. D. MARX, «*Multiple Dielectric Relaxation Time in an Irradiated Transmission Line*» IEEE Transaction on Nuclear Science
- [I-14] L. C. NIELSEN, C. R. CRAIN, «*SGEMP-Induced Transfert Admittance Coupling in Cable Bundles*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 27, No. 29, pp. 1170–1174, Décembre 1982
- [I-15] A. VANDER VORST, «*Electromagnétisme : transmission, propagation et rayonnement*», Chapitres 1 et 3, Université catholique de Louvain, Laboratoire de télécommunications et hyperfréquences, Edition Cabay, 1985
- [I-16] P. DEGAUQUE, J. HAMELIN, «*Compatibilité électromagnétique – bruits et perturbations radioélectriques*», Chapitre 6 : *Caractérisation des câbles blindés*, Edition Dunod, 1990
- [I-17] M. MARDIGUIAN, «*Manuel pratique de la compatibilité électromagnétique*», 2^{ème} édition, Chapitre 10 : *Récapitulation sur le blindage des câbles*, Edition Lavoisier, 2003
- [I-18] S. A. SCHELKUNOFF, «*The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shields*», Bell Syst. Tech. Journal, Vol. 13, pp. 532–579, Octobre 1934
- [I-19] D. E. MEREWETHER, F. EZELL, «*The Effect of Mutual Inductance and Mutual capacitance on the transient response of braided shield coaxial cables*», IEEE Transaction on EMC, Vol. 18, No. 1, pp. 15–20, Février 1976
- [I-20] B. DEMOULIN, P. DEGAUQUE, M. CAUTERMAN, R. GABILLARD, «*Shielding Performance of Triply Shielded coaxial cable*», IEEE Transaction on EMC, Vol. 22, No. 3, pp. 173–180, Août 1980
- [I-21] D. F. HIGGINS, «*Time-Domain Calculation of the Leakage of SGEMP Transients through Braided Cables Shields*», IEEE Transaction on Nuclear Science, Vol. 36, No. 6, pp. 2042–2048, Décembre 1989
- [I-22] D. E. MEREWETHER «*A Numerical Solution for the Response of a Strip Transmission Line Over a Ground Plane Excited by Ionizing Radiation*», IEEE Transaction on Nuclear Science
- [I-23] J. L. LERAY *et al.*, «*First Observation and Modelling of Neutron-Induced Displacement Currents in Dielectrics at High Neutrons Fluxes and Application to Coaxial Cables*», Communication au colloque RADECS 2007, Deauville, 10–14 Septembre 2007

Deuxième partie

Etude des possibilités de modélisation
numérique d'une chambre
d'expériences laser en
électromagnétisme transitoire par la
méthode FDTD

Introduction

Dans la problématique des câbles, présentée précédemment, deux contributeurs aux signaux parasites induits ont été mis en évidence lors des expériences Omega (voir chapitre 1) : un contributeur d'origine nucléaire et un autre d'origine électromagnétique. Comme nous l'avons écrit au début de ce document, le recours à la simulation est un passage obligé pour l'évaluation de ces courants.

Dans les chapitres précédents, une démarche de simulation des interactions entre un câble coaxial et un environnement radiatif de type LMJ a été proposée. Le calcul des termes sources du modèle est une étape fondamentale de la simulation. Nous avons proposé une évaluation du terme source d'origine nucléaire à l'aide d'un code 3D d'interactions rayonnement-matière. Le terme source d'origine électromagnétique, quant à lui, nécessite l'évaluation du champ électromagnétique à proximité du câble.

En outre, l'impulsion électromagnétique de forte intensité qui sera générée dans la chambre d'expériences pose le problème plus global de la compatibilité électromagnétique des systèmes contenant de l'électronique, situés à l'intérieur du hall d'expériences (HE). Cette problématique nécessite non seulement une évaluation des niveaux de champ dans la chambre, mais aussi à l'extérieur de celle-ci. En effet, nous avons vu au chapitre 1 que le champ électromagnétique ne restera pas confiné dans la chambre, mais qu'il se propagera à l'intérieur du HE par fuite à travers les hublots laser.

En bref, les problématiques câble et CEM nécessitent une évaluation numérique des niveaux de champ qui pourront être rencontrés dans la chambre et dans le HE lors d'un tir sur le LMJ. Le calcul de cette ambiance électromagnétique est un problème du domaine de l'électromagnétisme transitoire. Plusieurs méthodes numériques de résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel existent. Quelle que soit la méthode utilisée, une modélisation précise de structures 3D de taille aussi importante que la chambre d'expériences LMJ ou le HE était inenvisageable il y a quelques années, pour des raisons évidentes de ressources informatiques et de temps calcul.

Cependant, la puissance de calcul croissante dont disposent les machines actuelles, par exemple le supercalculateur TERA du CEA et ses futures évolutions, rend cette perspective parfaitement crédible. Associés à cet accroissement de la puissance machine, de nombreux développements physico-numériques novateurs augmentent encore les possibilités d'une approche globale.

Ainsi, sur la base de la méthode numérique FDTD⁹, l'utilisation des techniques récentes de raffinement de maillage spatio-temporel ainsi que la possibilité d'effectuer des calculs massive-

⁹Finite Difference in Time and Domain : méthode des différences finies appliquée à l'électromagnétisme dans le domaine temporel

ment parallèles permettent raisonnablement d'envisager l'évaluation de l'évolution temporelle du champ électromagnétique créé à l'intérieur et à l'extérieur de la chambre.

Dans un premier temps, la méthode FDTD ainsi que ses principales contraintes¹⁰ sont exposées. Après une présentation du principe et de l'intérêt du raffinement de maillage pour la FDTD et un état de l'art sur les différentes techniques de raffinement, un algorithme, fondé sur la méthode AMR, développé en 2 D puis en 3D, est proposé.

Dans un dernier chapitre est évaluée la possibilité de traitement en FDTD de structures 3D de grande taille en mettant à profit, pour une application LMJ, le code massivement parallèle Maxwell–Vlasov «Sophie», en cours de développement au CEA–CESTA dans un autre contexte. Des maillages FDTD 3D de grande taille des chambres d'expériences d'Omega (27 millions de cellules) et du LMJ (1 milliard de cellules) ont été réalisés. Des calculs qualitatifs, massivement parallèles (128 à 1024 processeurs), sur un grand nombre d'itérations temporelles, sont présentés. Les temps CPU relativement courts obtenus, par rapport à la taille des cas, démontrent les possibilités de calcul et l'intérêt offert par un code massivement parallèle pour le calcul des champs dans le LMJ.

¹⁰Stabilité, dispersion, taille mémoire et temps calcul

Chapitre 4

Méthode des différences finies appliquée à l'électromagnétisme

4.1 Présentation de la méthode FDTD

Nous présentons ici le fondement de la méthode des différences finies, ou **F**inite **D**ifference in **T**ime and **D**omain (FDTD), appliquée à la résolution d'un problème électromagnétique dans le domaine temporel. La propagation d'ondes électromagnétiques dans l'espace est un problème bien connu parfaitement modélisé par les équations de Maxwell (voir § 4.1.1). En 1966, K. Yee proposa une technique de résolution numérique de ces équations [II-1]. Le schéma numérique utilisé, désormais appelé schéma de Yee (voir § 4.1.2), fondé sur la discrétisation en temps et en espace des équations de Maxwell par des différences finies centrées, permet de calculer à chaque instant discret du temps la solution du problème électromagnétique en chaque point d'un espace discret. Cette technique est aujourd'hui très largement utilisée dans tous les domaines d'application de l'électromagnétisme.

4.1.1 Les équations de Maxwell dans le domaine temporel

Les équations de Maxwell décrivent la propagation d'ondes électromagnétiques dans tout type de milieu. On considère par la suite un milieu homogène, anisotrope, dépourvu de sources, non dispersif et pouvant présenter des pertes électriques et magnétiques. Ainsi, dans un tel milieu les équations de Maxwell sous forme différentielle s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \boldsymbol{\Sigma}^* \cdot \mathbf{H} \end{cases} \quad (4.1)$$

Les phénomènes électromagnétiques sont représentés à l'aide des deux grandeurs physiques vectorielles \mathbf{E} et \mathbf{H} , respectivement appelées champ électrique et champ magnétique. Les propriétés intrinsèques du milieu sont quant à elles représentées par les grandeurs \mathcal{E} , Σ , \mathcal{M} et Σ^* . Ces paramètres constitutifs sont définis, dans le type de milieu considéré, par des tenseurs d'ordre 2 symétriques. Dans la base de l'espace constituée des trois directions orthogonales principales du milieu, notées (Ox, Oy, Oz) , ces tenseurs sont diagonaux.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} & \text{Permittivité} & \Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} & \text{Conductivité} \\ & \text{électrique} & & & \text{électrique} \\ \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} & \text{Perméabilité} & \Sigma^* &= \begin{bmatrix} \sigma_x^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^* \end{bmatrix} & \text{Tenseur de pertes} \\ & \text{magnétique} & & & \text{magnétiques} \end{aligned}$$

• Remarques

- La conductivité électrique et le tenseur de perte magnétique caractérisent la capacité d'un milieu à absorber l'énergie électrique et magnétique d'une onde se propageant dans ce milieu.
- Pour un milieu isotrope les tenseurs précédents se réduisent à des grandeurs scalaires $(\varepsilon, \mu, \sigma, \sigma^*)$ puisque les propriétés d'un tel milieu sont identiques dans toutes les directions.
- Dans un milieu isotrope, la vitesse de propagation d'une onde, ou vitesse de phase, notée c , est reliée à la permittivité et la perméabilité comme suit :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}} \quad (4.2)$$

- Le système d'équations (4.1) peut s'écrire sous forme intégrale de la manière suivante :

$$\begin{cases} \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[\mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \Sigma \cdot \mathbf{E} \right] \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \left[\mathcal{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \Sigma^* \cdot \mathbf{H} \right] \cdot d\mathbf{s} \end{cases} \quad (4.3)$$

- Ces équations sont renforcées par le théorème de Gauss électrique pour le vecteur induction électrique \mathbf{D} , et la condition de flux conservatif pour le vecteur induction magnétique \mathbf{B} . En considérant ρ la densité de charge électrique, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho & \text{avec } \mathbf{D} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{E} \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 & \text{avec } \mathbf{B} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{H} \end{cases} \quad (4.4)$$

Après projection des équations (4.1) sur les axes d'un repère cartésien correspondant aux directions principales (Ox, Oy, Oz) du milieu, on obtient le système (4.5) de 6 équations dont les inconnues sont les 6 composantes du champ électromagnétique $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z, \mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y \mathbf{H}_z - \partial_z \mathbf{H}_y = \varepsilon_x \partial_t \mathbf{E}_x + \sigma_x \mathbf{E}_x \\ \partial_z \mathbf{H}_x - \partial_x \mathbf{H}_z = \varepsilon_y \partial_t \mathbf{E}_y + \sigma_y \mathbf{E}_y \\ \partial_x \mathbf{H}_y - \partial_y \mathbf{H}_x = \varepsilon_z \partial_t \mathbf{E}_z + \sigma_z \mathbf{E}_z \\ \\ \partial_y \mathbf{E}_z - \partial_z \mathbf{E}_y = -\mu_x \partial_t \mathbf{H}_x - \sigma_x^* \mathbf{H}_x \\ \partial_z \mathbf{E}_x - \partial_x \mathbf{E}_z = -\mu_y \partial_t \mathbf{H}_y - \sigma_y^* \mathbf{H}_y \\ \partial_x \mathbf{E}_y - \partial_y \mathbf{E}_x = -\mu_z \partial_t \mathbf{H}_z - \sigma_z^* \mathbf{H}_z \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Dans le paragraphe suivant nous exposons la démarche de K. Yee permettant de résoudre numériquement le système (4.5). Les discrétisations des dérivées en temps et espace présentes dans ces équations se font par différences finies centrées d'ordre 2.

4.1.2 L'algorithme de K. Yee

4.1.2.1 Les différences finies centrées

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable u suffisamment régulière de façon à pouvoir écrire des développements de Taylor. La technique des différences finies repose sur des combinaisons linéaires bien choisies de développements de Taylor permettant l'évaluation des dérivées de f d'ordre quelconque en un point. L'ordre de précision de ces évaluations dépend des combinaisons linéaires choisies. On dit qu'une différence est centrée lorsque la formule d'évaluation d'une dérivée de f en un point u_0 est centrée sur u_0 . Dans le cas du système (4.5), les dérivées partielles à évaluer sont du premier ordre. Pour en obtenir une approximation à l'ordre 2, on écrit les développements de Taylor suivants.

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + h \cdot \partial_u f(u_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \partial_u^2 f(u_0) + \frac{h^3}{6} \cdot \partial_u^3 f(u_0) + o(h^3) \quad (4.6)$$

$$f(u_0 - h) = f(u_0) - h \cdot \partial_u f(u_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \partial_u^2 f(u_0) - \frac{h^3}{6} \cdot \partial_u^3 f(u_0) + o(h^3) \quad (4.7)$$

En faisant la différence des relations (4.6) et (4.7), on obtient la formule d'évaluation des dérivées premières en u_0 , centrée sur u_0 et à l'ordre 2, utilisée dans le schéma de Yee.

$$\partial_u f(u_0) = \frac{f(u_0 + h) - f(u_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.8)$$

En outre, en faisant la somme des développements de Taylor (4.6) et (4.7), on obtient une évaluation de $f(u_0)$ également à l'ordre 2.

$$f(u_0) = \frac{f(u_0 + h) + f(u_0 - h)}{2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.9)$$

4.1.2.2 Discrétisation en temps et en espace

L'utilisation de la méthode FDTD implique un découpage cartésien de l'espace. En effet, le volume de calcul, représenté figure 4.1, est un parallélépipède rectangle découpé en $N_x \cdot N_y \cdot N_z$ mailles élémentaires (figure 4.2) de volume $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, produit des pas de discrétisation spatiale respectivement dans les directions Ox , Oy et Oz .

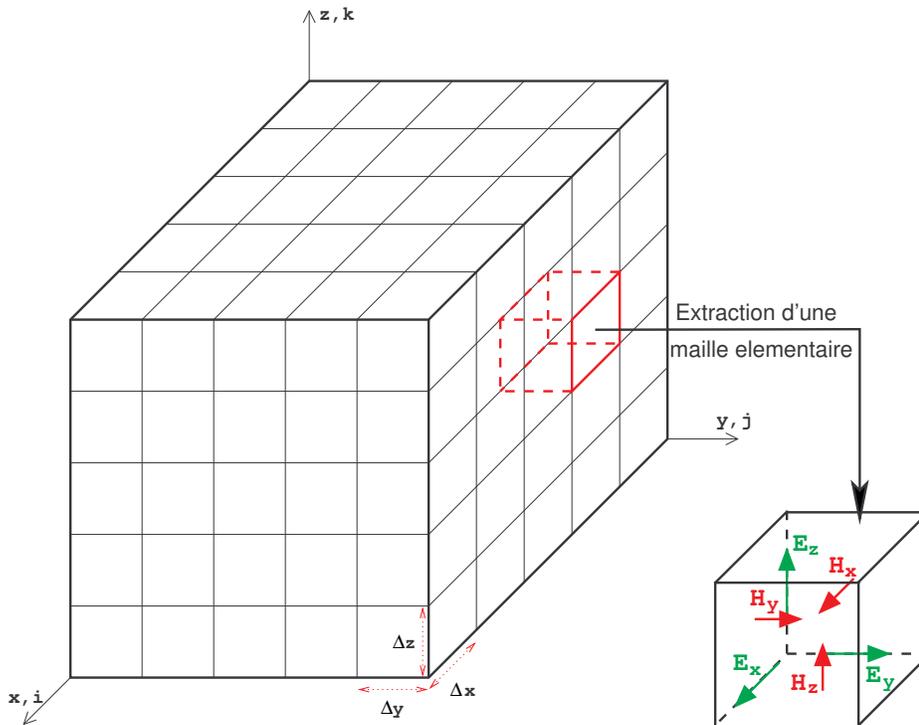


FIG. 4.1 – Volume de calcul

A chaque nœud du maillage ainsi défini, on peut associer un triplet d'entiers (i, j, k) tel que les coordonnées (x_i, y_j, z_k) du nœud vérifient la relation suivante :

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad ; \quad y_j = j \cdot \Delta y \quad ; \quad z_k = k \cdot \Delta z$$

Ainsi, si \mathbf{F} représente une des composantes de champ, on adoptera par la suite la notation suivante :

$$\mathbf{F}(x_i, y_j, z_k, t) = \mathbf{F}_{i,j,k}(t)$$

Les composantes du champ électromagnétique sont situées en des points différents dans une maille élémentaire (figure 4.2). En effet, les composantes électriques sont calculées suivant les arêtes et les composantes magnétiques normalement aux faces.

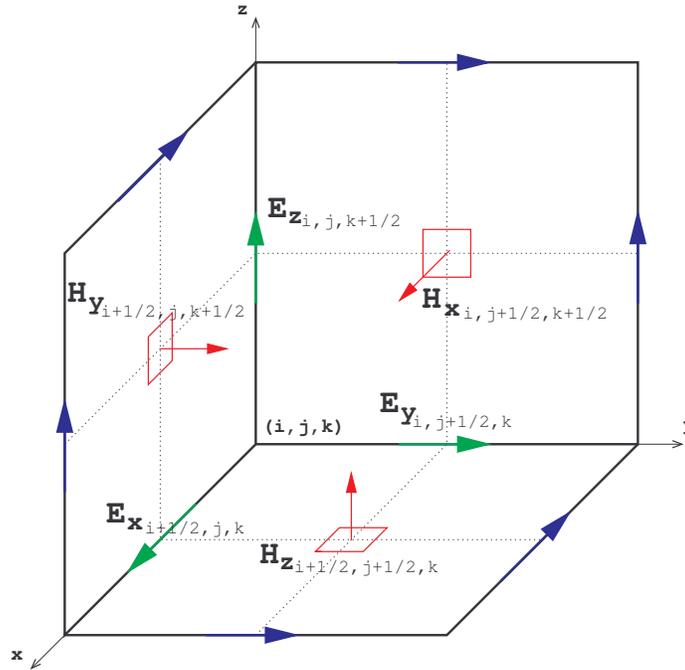


FIG. 4.2 – Maille élémentaire de Yee

Cette localisation des composantes de champ induit des propriétés intrinsèques intéressantes :

- Toutes les dérivées spatiales peuvent naturellement être évaluées par des différences finies centrées ce qui permet une discrétisation à l'ordre 2 en espace des équations de Maxwell sous forme différentielle.
- Chaque composante du champ \mathbf{E} est entourée de 4 composantes du champ \mathbf{H} et vice versa. Ainsi, le schéma de Yee peut être interprété comme une discrétisation naturelle des équations de Maxwell sous forme intégrale.
- Enfin, les propriétés de flux conservatifs des équations (4.4) sont naturellement vérifiées.

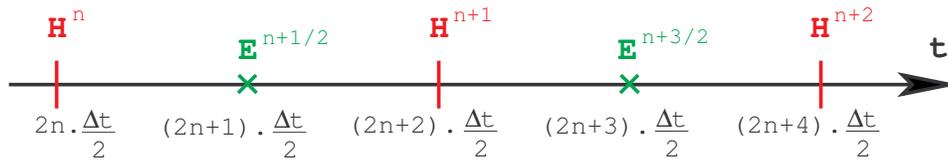


FIG. 4.3 – Discrétisation temporelle

L'incrémentation temporelle se fait par une formulation «saute-mouton», c'est-à-dire que les composantes du champ \mathbf{E} sont calculées aux instants multiples impairs du demi pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$, tandis que les composantes du champ \mathbf{H} sont mises à jour aux instants multiples pairs (voir figure 4.3). Une telle formulation permet d'évaluer les dérivées temporelles de façon centrée et d'obtenir un schéma explicite.

4.1.2.3 Algorithme de calcul des composantes de champ

Par convention, l'indice correspondant à la discrétisation temporelle est mis en exposant de la composante de champ \mathbf{F} . Ainsi on obtient l'écriture suivante en notant t^n l'instant $n \cdot \Delta t$:

$$\mathbf{F}(x_i, y_j, z_k, t^n) = \mathbf{F}_{i,j,k}^n$$

Les relations permettant de calculer les composantes de \mathbf{E} et de \mathbf{H} successivement aux temps $t^{n+\frac{1}{2}}$ et t^{n+1} s'obtiennent en appliquant les formules centrées (4.8) et (4.9). Par exemple, en se plaçant dans la maille de la figure 4.2, pour la première équation du système (4.5), on écrit :

$$\begin{aligned} [\partial_t \mathbf{E}_x]_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^n &= \frac{\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ [\partial_y \mathbf{H}_z]_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n - \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta y} & [\partial_z \mathbf{H}_y]_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{\mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^n}{\Delta z} \end{aligned}$$

On obtient alors une expression des $\mathbf{E}_x^{n+\frac{1}{2}}$ en fonction des $\mathbf{E}_x^{n-\frac{1}{2}}$, \mathbf{H}_z^n , et \mathbf{H}_y^n . En réitérant cette démarche sur les autres équations du système (4.5), on obtient le schéma numérique de Yee, schéma de base de la méthode FDTD. Comme nous l'avons remarqué plus haut, les composantes des champs électrique et magnétique n'étant pas calculées aux mêmes instants, l'algorithme de calcul se déroule en deux étapes.

• Etape 1 : mise à jour des composantes de \mathbf{E} au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}} \cdot \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}} + \beta_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}} \cdot \left[\frac{\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n - \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta y} - \frac{\mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^n}{\Delta z} \right] \\ \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}} \cdot \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} + \beta_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}} \cdot \left[\frac{\mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}^n}{\Delta z} - \frac{\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n - \mathbf{H}_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta x} \right] \\ \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \beta_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{y_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta x} - \frac{\mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{x_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

• Etape 2 : mise à jour des composantes de \mathbf{H} au temps t^{n+1}

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= \gamma_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n + \delta_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{\mathbf{E}_{z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \\ \mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= \gamma_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n + \delta_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\mathbf{E}_{z_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k+1}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \\ \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+1} &= \gamma_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} \cdot \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n + \delta_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} \cdot \left[\frac{\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j+1,k}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{\mathbf{E}_{y_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

Les expressions des coefficients α_u , β_u , γ_u et δ_u avec $u = x, y$ ou z , sont :

$$\alpha_{u_{i,j,k}} = \frac{1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}}{2 \cdot \varepsilon_{u_{i,j,k}}}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}}{2 \cdot \varepsilon_{u_{i,j,k}}}} \quad \beta_{u_{i,j,k}} = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{u_{i,j,k}}}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}}{2 \cdot \varepsilon_{u_{i,j,k}}}} \quad \gamma_{u_{i,j,k}} = \frac{1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}^*}{2 \cdot \mu_{u_{i,j,k}}}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}^*}{2 \cdot \mu_{u_{i,j,k}}}} \quad \delta_{u_{i,j,k}} = \frac{\frac{\Delta t}{\mu_{u_{i,j,k}}}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \sigma_{u_{i,j,k}}^*}{2 \cdot \mu_{u_{i,j,k}}}}$$

4.2 Les contraintes numériques de la FDTD

4.2.1 Le critère de stabilité

La stabilité d'un schéma numérique peut se définir ainsi : « *Un schéma numérique est stable si et seulement si à toute condition initiale bornée, la solution calculée par le schéma reste bornée à tout instant. Dans le cas contraire, on dit que le schéma est instable.* ». La courbe de la figure 4.4 montre un exemple d'instabilité, dans le cas de la propagation d'une onde plane de profil gaussien dans le vide, qui se traduit par l'apparition d'oscillations dont l'amplitude augmente exponentiellement.

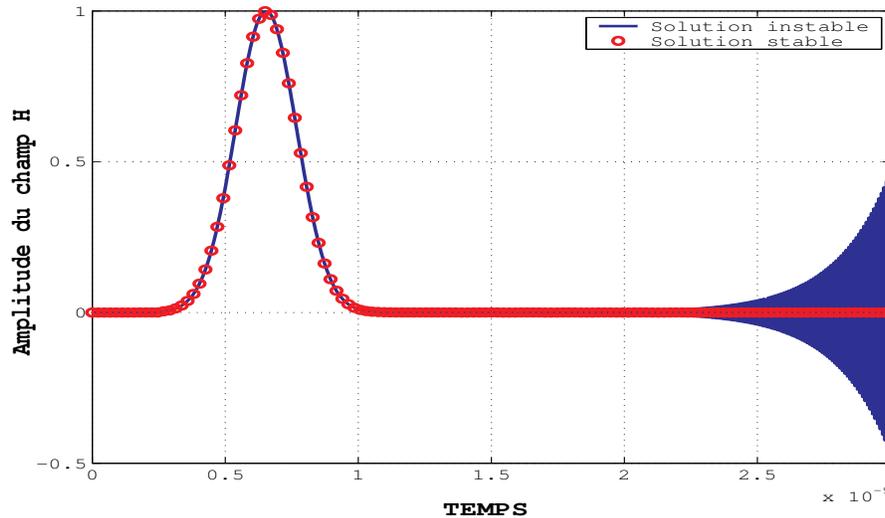


FIG. 4.4 – Exemple d'une instabilité de type CFL

Comme nous l'avons indiqué plus haut, le schéma de Yee est explicite, c'est-à-dire que les mises à jour des composantes de \mathbf{E} et \mathbf{H} font intervenir uniquement des valeurs de champs obtenues à des instants antérieurs. L'analyse des problèmes de stabilité des schémas numériques en temps par Courant, Freidrich et Levy [II-2], montre que les schémas explicites sont stables sous une condition dite CFL, du nom des auteurs, reliant le pas d'échantillonnage temporel au pas de discrétisation spatiale. En utilisant une décomposition en série de Fourier des solutions des équations de Maxwell, A. Taflove [II-3] démontre rigoureusement le critère de stabilité de type CFL (relation (4.10)) à utiliser en FDTD dans le cas d'un maillage régulier dans un milieu

homogène sans perte en espace ouvert.

$$\Delta t \leq \left[c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

Le détail de la démonstration de ce résultat est proposé dans [II-3]. Il est possible de s'affranchir des hypothèses restrictives de maillage régulier et d'espace ouvert en particulier, qui permettent d'obtenir le résultat précédent. En effet, en utilisant une méthode de démonstration par l'énergie [II-4], on obtient le critère généralisé de la relation (4.11).

$$\Delta t \leq \min_m \left[c_m \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x_m^2} + \frac{1}{\Delta y_m^2} + \frac{1}{\Delta z_m^2}} \right]^{-1} \quad \text{avec} \quad c_m = \sqrt{\frac{1}{\mu_m \varepsilon_m}} \quad (4.11)$$

La minimisation sur le paramètre m représente une minimisation sur toute les mailles élémentaires contenues dans le volume de calcul. Le pas de temps est donc imposé par les dimensions de la cellule la plus petite du maillage.

4.2.2 La dispersion numérique

La dispersion numérique de la méthode FDTD est un phénomène non physique dû au passage d'un espace continu à un espace discret, qui se traduit principalement par une vitesse de phase $V_{p_{\text{num}}}$ des ondes numériques inférieure à la vitesse réelle c .

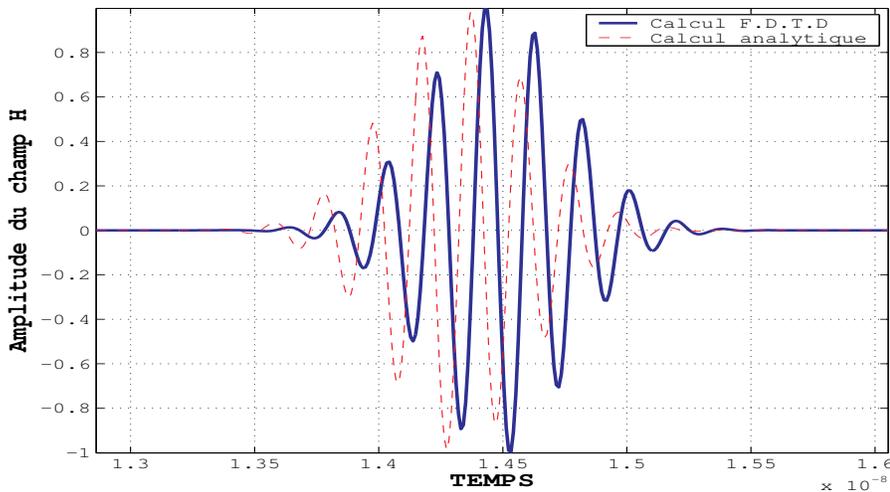


FIG. 4.5 – Illustration du phénomène de dispersion numérique

Ce phénomène est bien représenté sur l'exemple de la figure 4.5. Au bout d'un certain temps de propagation, l'onde numérique accumule un retard de phase par rapport à l'onde réelle. En fait, l'espace discret se comporte comme un milieu physique ayant des caractéristiques légèrement différentes du milieu réel. Dans le cas d'un milieu homogène sans perte, l'équation

de dispersion dans le domaine continu, reliant le vecteur d'onde \mathbf{k} à la pulsation ω et la vitesse c de propagation d'une onde électromagnétique, est simplement :

$$\|\mathbf{k}\|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (4.12)$$

La relation (4.13) représente l'équation de dispersion dans le domaine discret. Dans cette égalité, on a noté $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)^T$ le vecteur d'onde numérique. On remarque que cette équation n'est pas indépendante des pas de discrétisation spatiale et temporelle. La dispersion numérique est donc étroitement liée au maillage.

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]^2 \quad (4.13)$$

Cette égalité est physiquement cohérente puisqu'en faisant tendre les pas spatiaux vers zéro on obtient l'équation de dispersion dans le cas continu. Ainsi, on peut rendre les erreurs de dispersion aussi petites que l'on veut moyennant une finesse de maillage adéquate. En effet, d'après la courbe a-figure 4.6, pour une longueur d'onde λ_0 donnée, l'erreur sur la vitesse de phase est inférieure à 0.5 % pour une finesse de maillage contenant au moins 20 points par longueur d'onde dans chaque direction de l'espace.

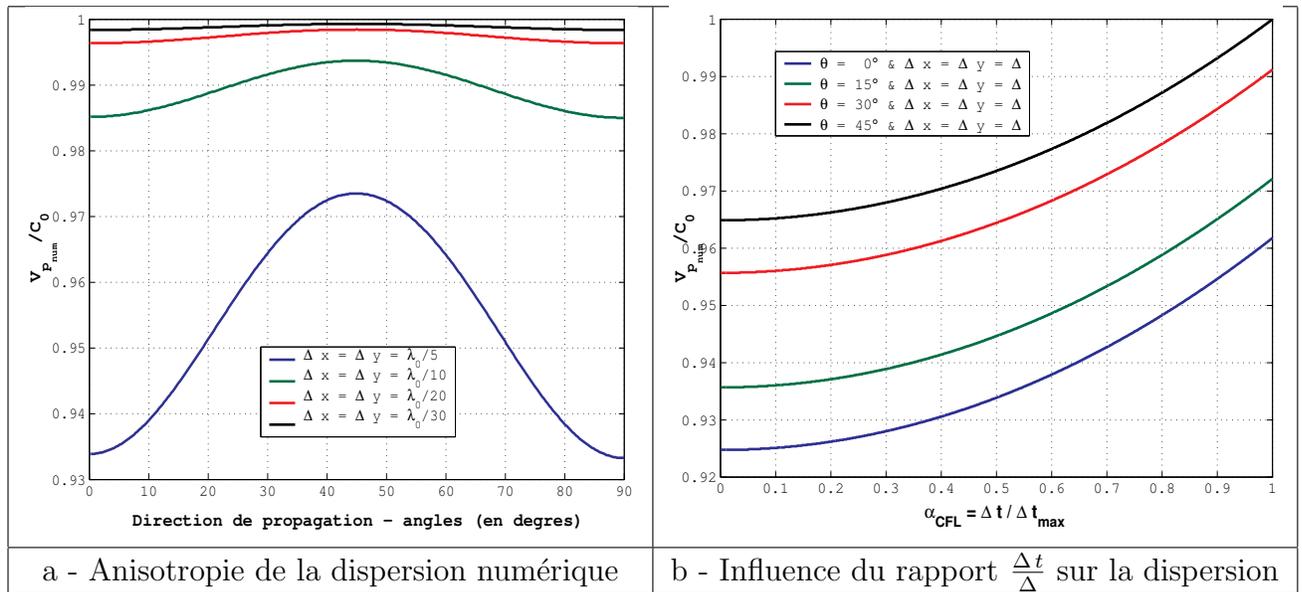


FIG. 4.6 – Les principales caractéristiques de la dispersion numérique de la FDTD

Comme nous venons de le remarquer, la dispersion numérique est sensible à la finesse du maillage, mais elle dépend aussi, pour un maillage donné, de la direction de propagation de l'onde et du rapport entre le pas de temps et le pas spatial. Nous avons tracé figure 4.6, l'évolution du rapport $\frac{V_{p,num}}{c}$ en fonction de ces deux paramètres dans un espace restreint à

deux dimensions. Dans ce cas, la direction de propagation est définie par un unique paramètre angulaire θ tel que :

$$\begin{cases} \tilde{k}_x = \cos \theta \cdot \|\tilde{\mathbf{k}}\| \\ \tilde{k}_y = \sin \theta \cdot \|\tilde{\mathbf{k}}\| \end{cases}$$

Pour un maillage et une direction de propagation fixés, le pas de temps étant imposé par le critère de stabilité (4.10), la seule inconnue restante dans l'équation (4.13) est la norme du vecteur d'onde numérique. On peut alors en trouver une valeur approchée en utilisant un algorithme de Newton par exemple et en extraire la vitesse de phase numérique donnée par la relation suivante :

$$V_{p_{\text{num}}} = \frac{\omega}{\|\tilde{\mathbf{k}}\|}$$

Ainsi, en faisant varier l'angle θ on obtient la courbe a—figure 4.6 qui représente l'évolution de la vitesse de phase en fonction de la direction de propagation. Cette vitesse n'étant pas constante, on peut conclure que le domaine discrétisé par différences centrées se comporte comme un milieu anisotrope. Sur la courbe b—figure 4.6, nous avons fixé le maillage et le vecteur d'onde numérique, puis nous avons fait varier le paramètre α_{CFL} tel que :

$$\Delta t = \alpha_{CFL} \cdot \Delta t_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \Delta t_{\text{max}} = \left[c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right]^{-1}$$

On remarque que les erreurs de dispersion sont minimales lorsque $\alpha_{CFL} = 1$, c'est-à-dire lorsqu'on fixe le pas de temps égal au pas de temps maximal autorisé par le critère de stabilité.

En conclusion, les erreurs de dispersion peuvent être minimisées de la manière suivante :

- En choisissant un taux d'échantillonnage spatial $\frac{\lambda_{\text{min}}}{N}$ suffisamment petit, λ_{min} étant la longueur d'onde minimale correspondant à la fréquence maximale utile. En espace libre, l'échantillonnage doit être choisi proportionnellement à la taille du problème. Plus celle-ci est grande, plus la distance de parcours des ondes sera importante et plus les erreurs de dispersion vont perturber le résultat. Pour des structures résonantes, il est nécessaire de tenir compte des allers-retours des ondes dans la structure.
- En fixant le pas d'échantillonnage temporel égal au pas de temps maximal permis par l'inégalité (4.10).
- En utilisant des méthodes FDTD d'ordre supérieur [II-5], avec par exemple, des schémas d'ordre 2 en temps et 4 en espace [II-6], ou bien d'ordre 4 en temps et 4 en espace [II-7]. En effet, ces types de schémas permettent de réduire considérablement les erreurs de dispersion par rapport au schéma de Yee classique.

4.2.3 Taille mémoire et temps calcul

D'après ce que nous venons de voir, un échantillonnage spatial minimum de 10 points par longueur d'onde est nécessaire pour «maîtriser» le problème de la dispersion numérique pour un cas de propagation d'onde en espace ouvert et sans obstacle. Cependant, le comportement des champs aux abords des discontinuités spatiales, telles que des surfaces métalliques ou des interfaces entre matériaux, peut induire de forts gradients spatiaux ce qui nécessite un maillage plus fin.

De plus, les structures complexes généralement étudiées comportent des coins et des surfaces courbes qui ne peuvent être approchées qu'en marches d'escalier par la FDTD. Ce type d'approximation induit des erreurs supplémentaires qui peuvent néanmoins être réduites en utilisant un maillage encore plus fin. Finalement, les erreurs dues à la dispersion ou bien à l'approximation des surfaces en marche d'escalier peuvent être rendues aussi petites que l'on veut moyennant une augmentation suffisante de la finesse du maillage.

Les facteurs limitants de cette solution sont l'espace mémoire et le temps calcul, surtout lorsqu'il s'agit d'étudier des structures de grande taille. Imaginons une structure d'une dizaine de mètres telle que la chambre d'expérience du Laser Mégajoule par exemple. La fréquence maximale utile, pour cette application, est estimée à environ 2 à 3 Ghz. Etant donné la taille du problème, les ondes vont se propager sur plusieurs dizaines de longueurs d'onde. Il faut donc mailler l'espace en $\frac{\lambda_{\min}}{15}$ pour rendre les erreurs de dispersion négligeables. Dans le cadre de ces hypothèses, la taille du maillage est de l'ordre de 1000 cellules par direction soit un total de 10^9 mailles !

En supposant un calcul dans le vide, un minimum de 6 tableaux est stocké en mémoire (un tableau par composante de champ). Un calcul en simple précision, c'est-à-dire avec des flottants codés sur 32 bits (4 octets), demanderait au minimum $6 \cdot 10^9 \cdot 4$ octets soit 24 Go de mémoire vive. Pour se donner une idée, les PC standards sont livrés en général avec une RAM de 512 Mo à 1 Go ce qui permet de passer un cas contenant au maximum 40 millions de mailles.

Cependant, sur des machines de calcul très puissantes destinées aux calculs massivement parallèles, telle que Tera 10 disponible au CEA, il existe des noeuds de 16 processeurs à mémoire partagée de 48 à 128 Go. Ainsi, le cas à 10^9 mailles est envisageable sur ce type de machine pour ce qui est de l'espace mémoire disponible.

Il s'agit ensuite d'estimer le temps cpu de calcul nécessaire. Dans le cas du Laser Mégajoule, des simulations jusqu'à un temps «physique» de l'ordre de la microseconde seront nécessaires, ce qui correspond environ à 100 000 itérations en temps. En effectuant le calcul sur un seul processeur d'un noeud de Tera 10, avec une performance moyenne de 500 Mflop (500 millions d'opérations par seconde) et sachant que le schéma de Yee nécessite 36 opérations par maille,

soit $36 \cdot 10^9$ opérations par pas de temps, le temps cpu total nécessaire à la simulation serait d'environ 50 jours. Remarquons cependant que l'exemple que nous donnons ici est un cas minorant, puisque par exemple, nous n'avons pas envisagé la prise en compte de matériaux, qui demande un stockage de 2 fois plus de tableaux ce qui doublerait l'espace mémoire nécessaire. Enfin, un calcul double précision avec des flottants codés sur 64 bits doublerait encore la mémoire.

Chapitre 5

Le raffinement de maillage spatio-temporel

5.1 Introduction au sous maillage spatio-temporel

5.1.1 Intérêt et principe

Comme nous venons de l'illustrer précédemment, le coût mémoire et le temps CPU d'un calcul FDTD peuvent rapidement devenir prohibitifs lorsqu'on étudie une structure de grande taille. Par exemple, la représentation d'un objet de taille centimétrique dans un domaine FDTD de 10 mètres de côté avec une grille régulière, requiert une finesse de maillage inférieure au centimètre dans tout ce domaine. De plus, le pas de temps, lié aux pas spatiaux par la condition de stabilité, s'en trouve considérablement diminué. Ainsi, le simple fait de vouloir représenter plus finement une géométrie, indépendamment des autres critères de maillage (fréquence max, dispersion, etc.), a un coût très important.

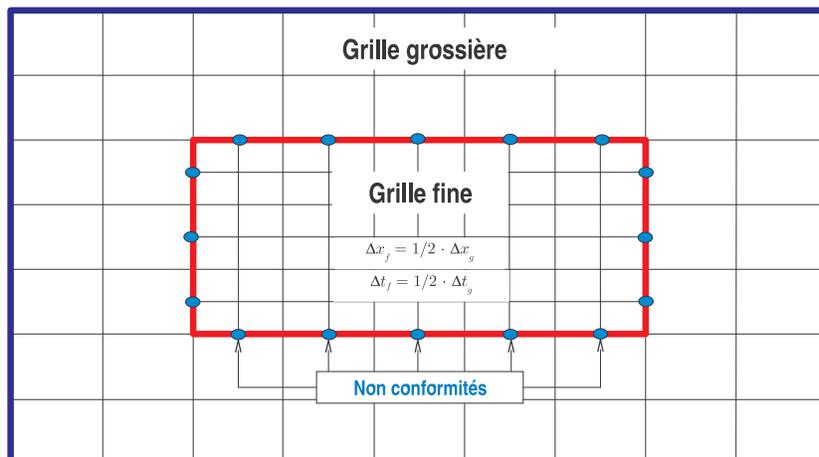


FIG. 5.1 – Exemple de raffinement de maillage [1 : 2] non conforme

Afin de réduire significativement ce coût, une idée intéressante, avancée pour la première fois au début des années 90 dans [II-8], consiste à distinguer deux zones pour le calcul. Une zone (la plus importante) où le calcul se fait sur une grille principale, qu'on appelle aussi grille grossière (figure 5.1), et une ou plusieurs zones au sein desquelles les grilles sont «raffinées», c'est-à-dire que les pas de discrétisation y sont égaux à une fraction des pas spatiaux de la grille principale. Ainsi, on peut choisir localement des zones, englobant des objets de petite taille, ou des interfaces courbes que l'on veut représenter plus finement, dans lesquelles le maillage est plus fin. Il est clair que cette façon de procéder permet d'améliorer la précision du calcul sans pour autant augmenter de manière considérable la mémoire requise. Le temps CPU, quant à lui, n'est pas optimal puisque le pas de temps est directement lié à la taille de la plus petite maille. On peut appeler cette méthode «raffinement de maillage local non conforme». Le maillage est dit non conforme car certains nœuds de la grille raffinée, situés à l'interface avec la grille grossière, ne sont pas confondus avec les nœuds de celle-ci, comme le montre l'exemple de la figure 5.1 en deux dimensions d'espace.

En outre, garder le même pas de temps dans les différentes zones induit un accroissement des erreurs de dispersion dans les zones maillées le plus grossièrement. On a donc intérêt à garder le paramètre α_{CFL} constant, et si possible égal à 1 dans les différentes grilles pour minimiser la dispersion, en particulier dans les zones les plus grossièrement maillées. D'autre part, cela permet de garder un pas de temps plus grand dans ces zones. Cette nouvelle contrainte implique de coupler au raffinement de maillage local non conforme un raffinement de maillage temporel. Cette façon de procéder, permettant d'alléger à la fois taille mémoire et temps calcul sans pour autant favoriser la dispersion, est appelée «raffinement de maillage spatio-temporel».

Afin d'illustrer ces propos, imaginons un cas 2D avec deux grilles, une grille principale et une grille, incluse dans la première, avec un raffinement de 1 par N_{raf} . On indice par g tout ce qui se réfère à la grille grossière et par f tout ce qui se réfère à la grille fine. Les pas spatiaux dans les deux grilles sont reliés par les égalités (5.1).

$$\Delta x_f = \frac{1}{N_{raf}} \cdot \Delta x_g \quad \text{et} \quad \Delta y_f = \frac{1}{N_{raf}} \cdot \Delta y_g \quad (5.1)$$

Par la suite on utilisera l'expression «raffinement [1 : N_{raf}]» pour parler d'un raffinement 1 par N_{raf} . D'autre part, puisqu'on garde α_{CFL} constant dans tout le domaine, les pas d'échantillonnages temporels sont reliés par la même relation que les pas spatiaux.

$$\Delta t_g = \alpha_{CFL} \cdot \left[c \sqrt{\frac{1}{\Delta x_g^2} + \frac{1}{\Delta y_g^2}} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta t_f = \alpha_{CFL} \cdot \left[c \sqrt{\frac{1}{\frac{\Delta x_g^2}{N_{raf}^2}} + \frac{1}{\frac{\Delta y_g^2}{N_{raf}^2}}} \right]^{-1} = \frac{\Delta t_g}{N_{raf}}$$

Ainsi, dans un algorithme de sous maillage spatio-temporel en FDTD, pour passer de la solution du problème au temps t à la solution au temps $t + \Delta t_g$, il est nécessaire de faire une itération du schéma de Yee dans la grille principale contre N_{raf} itérations dans la grille fine.

5.1.2 Algorithme schématique général

Le diagramme de la figure 5.2 présente un algorithme générique pour la gestion du sous maillage non conforme spatio-temporel que nous utiliserons par la suite pour tester différentes méthodes par interpolations (voir § 5.2). Cet algorithme n'est sûrement pas unique, mais les différentes méthodes rencontrées dans la littérature peuvent être gérées de cette façon.

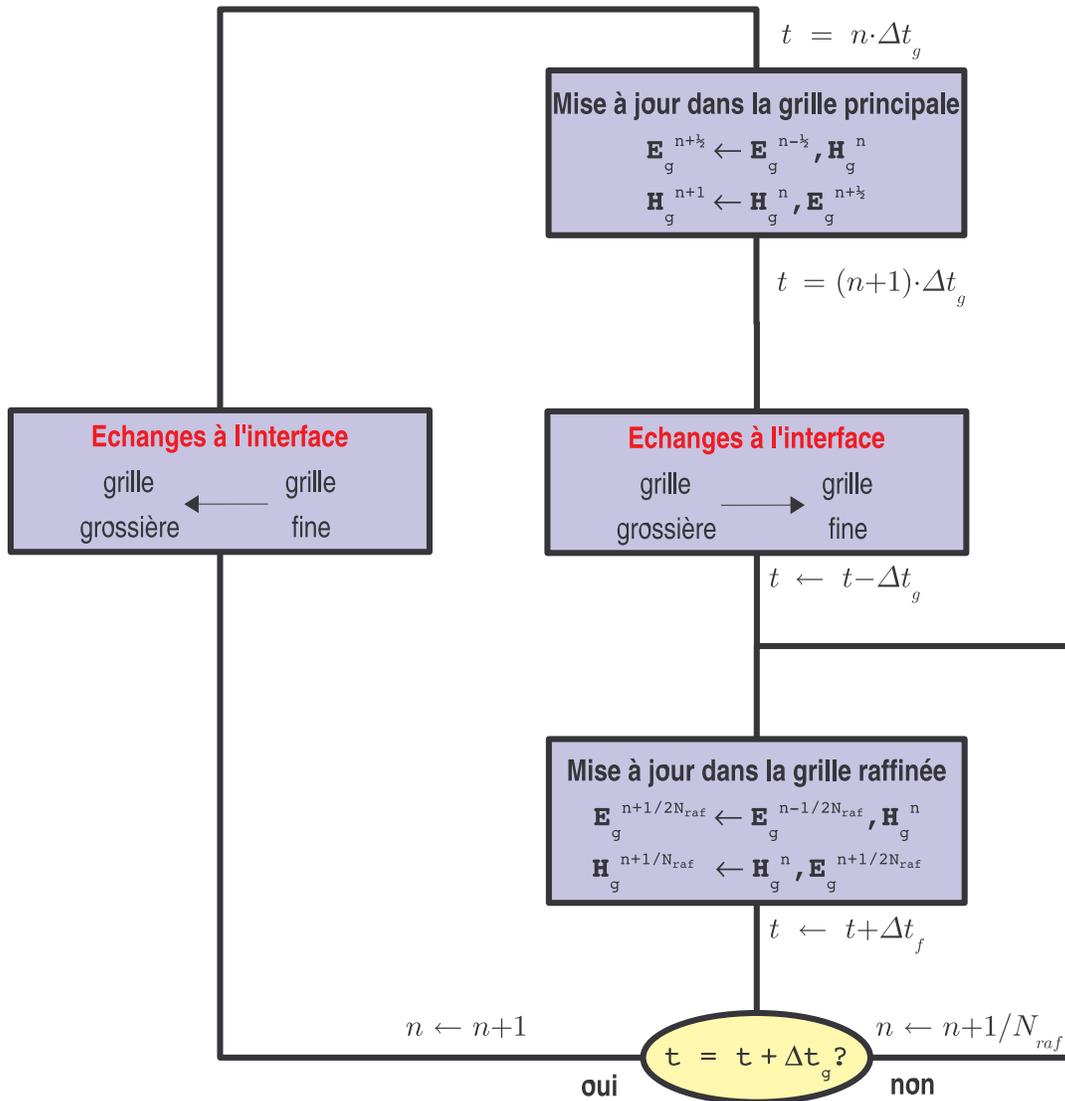


FIG. 5.2 – Algorithme général de sous maillage spatio-temporel

L'intérêt de cette façon de faire est de complètement dissocier les calculs dans chacune des deux grilles. En effet, il n'est pas nécessaire de suivre un ordre chronologique pour faire les calculs. Ainsi, une routine unique sert à la mise à jour des composantes de champ à l'intérieur des différentes grilles. Le lien entre ces deux calculs se fait par des échanges d'informations au niveau de l'interface, de la grille grossière vers la grille fine dans un premier temps, puis de la

grille fine vers la grille grossière dans un second temps. L'interface représente en fait pour les deux grilles uniquement des conditions aux limites remises à jour à chaque pas de temps.

5.1.3 Point dur du raffinement spatio-temporel

Le point délicat de la méthode de raffinement de maillage spatio-temporel est le traitement de la frontière entre les deux grilles. Etant donnée la non conformité du maillage, les champs tangents de la grille raffinée ne sont pas connus au niveau de l'interface, après le calcul dans la grille principale, puisqu'ils ne coïncident pas avec ceux de la grille grossière. Ainsi, le premier échange entre les deux grilles permet de calculer les conditions aux limites pour la grille raffinée sur l'interface, représentées par les champs tangents, de façon à pouvoir y débiter la mise à jour des champs à l'intérieur.

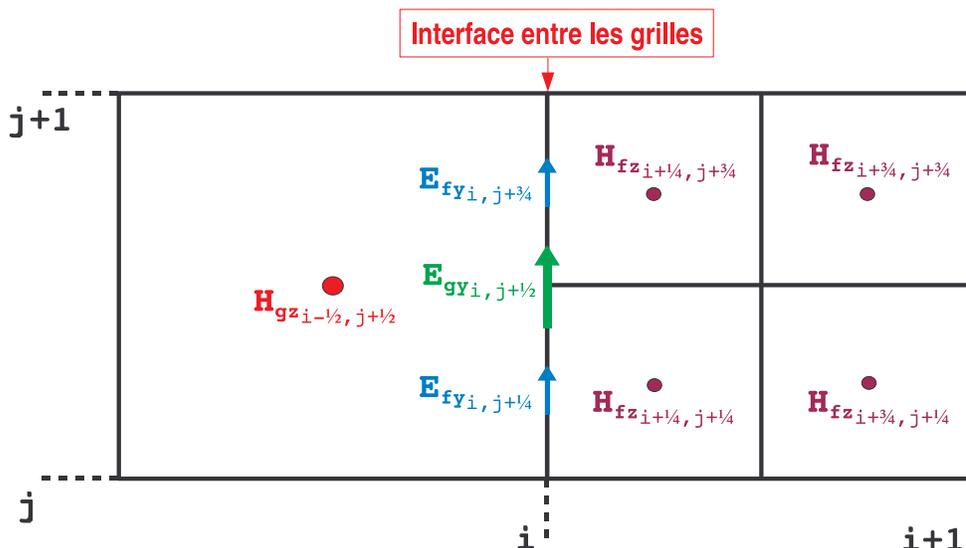


FIG. 5.3 – Non conformité du maillage à la frontière entre deux zones

Une fois le calcul terminé dans la zone raffinée, les approximations des champs obtenues sont plus précises que celles de la grille principale. Il apparaît donc naturel d'en faire «profiter» cette grille. Le deuxième échange permet ainsi de transférer les informations issues du calcul dans la grille raffinée vers la grille grossière. On peut par exemple effectuer une série de corrections des champs de cette zone sur l'interface à l'aide de ceux calculés dans la grille fine.

Toute la difficulté réside dans la façon de réaliser ces échanges. En effet, les calculs à l'interface entre les grilles doivent être faits de façon à vérifier des critères de consistance et de stabilité. En particulier, l'expérience de la mise en œuvre de méthodes de sous maillage spatio-temporel montre des problèmes récurrents de stabilité en temps long, c'est-à-dire pour des calculs nécessitant un grand nombre d'itérations, ce qui sera le cas pour notre application au LMJ.

5.2 Etat de l'art des techniques de raffinement de maillage

Dans cette section, nous donnons un rapide aperçu des méthodes de raffinement rencontrées dans la littérature. Il apparaît, après lecture d'un nombre conséquent d'articles, que les schémas qui y sont présentés peuvent être classés selon trois grandes catégories :

– Les schémas de raffinements par interpolations

Il existe une bibliographie abondante sur cette classe de méthodes. Le principe est de construire un schéma consistant en interpolant les champs inconnus à l'interface grille fine-grille grossière. La stabilité de ces méthodes n'est en général pas démontrée rigoureusement.

– Les schémas conservatifs

Le type de schémas précédent présentant des signes de faiblesse au niveau de la stabilité, Fouquet et Joly [II-9] adoptent une stratégie de construction de schéma radicalement différente. Au lieu d'assurer la consistance de leur méthode par des interpolations, ils construisent un schéma garantissant la conservation d'une énergie discrète et par conséquent la stabilité. Puis seulement ensuite, ils choisissent parmi les candidats un schéma consistant.

– Les schémas pour la méthode Finite Integration Technique

La méthode FIT est fondée sur un schéma de discrétisation des équations de Maxwell sous forme intégrale. Le résultat de cette discrétisation est mis sous forme matricielle faisant apparaître des opérateurs dont les propriétés algébriques assurent la stabilité de l'algorithme. Ainsi, une méthode de sous maillage pour la méthode FIT, doit impérativement conserver ces mêmes propriétés sur ses opérateurs matriciels pour être stable.

5.2.1 Schémas de raffinement par interpolation

5.2.1.1 Choix de la stratégie

Il existe deux stratégies pour le choix des champs qui seront interpolés. Dans la configuration de la figure 5.4 (mode 2D TE, voir § 5.3.4.1 page 138, et raffinement [1 : 2]), on peut choisir d'interpoler soit directement les champs tangents à l'interface entre les deux grilles, soit les champs situés à une demie maille fine à l'extérieur de la grille raffinée. Dans ce cas, les champs sur l'interface sont ensuite calculés par la formule classique de mise à jour.

Le choix du ratio entre grille grossière et grille fine peut aussi entrer en jeu dans la stratégie de construction de l'algorithme de sous maillage. En effet, un ratio impair permet d'avoir naturellement des champs tangents à l'interface appartenant à la grille fine confondus spatialement et temporellement avec les champs de la grille grossière, tandis qu'un ratio pair ne le permet pas. L'intérêt d'avoir certaines composantes des deux grilles confondues sur l'interface est que la correction des composantes de champs de la grille principale sur l'interface se fait directement

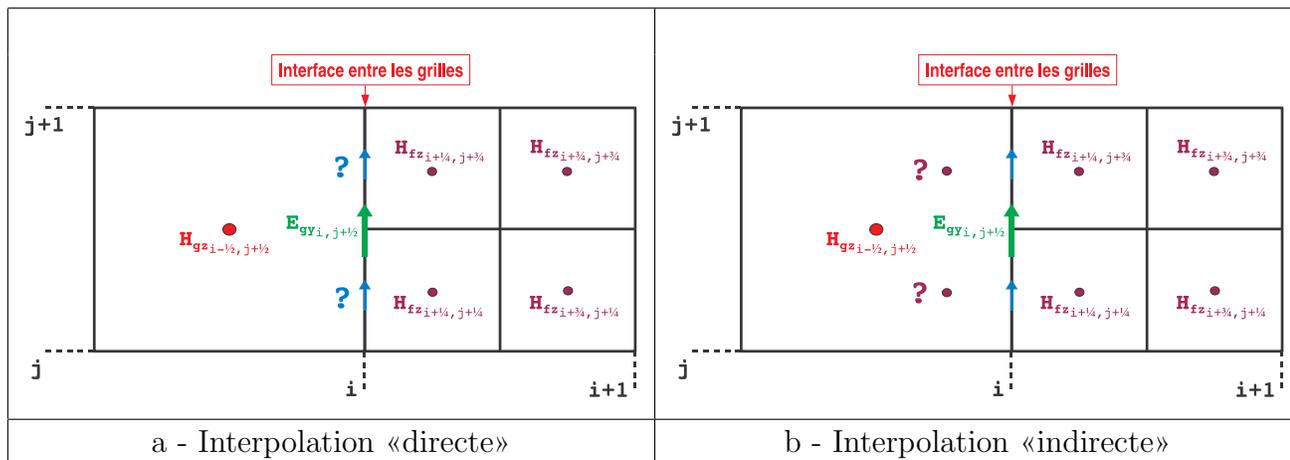


FIG. 5.4 – Choix des champs à interpoler

en prenant la valeur de la composante de champ de la grille fine située au même endroit. Dans le cas de raffinements pairs, certains [II–12] préfèrent translater le maillage fin par rapport au maillage principal de façon à ce que certaines composantes de champs fines et grossières soient spatialement confondues. Cependant, cet artifice ne permet pas de les confondre temporellement.

En fait, il ne semble pas exister de règles au choix des stratégies précédentes. Ces choix sont faits de façon plus ou moins arbitraire, la justification ne se faisant en général qu’a posteriori sur des critères de précisions et de stabilité lors de cas tests pratiques. Après avoir déterminé les champs qui seront interpolés, le ratio utilisé et la disposition de la grille fine par rapport à la grille principale, il reste à choisir les types d’interpolations spatiales et temporelles qui seront mises en œuvre.

5.2.1.2 Différents types d’interpolations spatiales classiques

La bibliographie sur le sujet montre une grande diversité de façons d’interpoler les champs. En fait, il existe un champ tellement large d’interpolations possibles que chaque article propose des interpolations différentes allant de la plus simple à la plus sophistiquée. Nous avons néanmoins tenté dans ce paragraphe de présenter les grandes familles de méthodes d’interpolation les plus souvent rencontrées.

- **Interpolations linéaires**

La façon la plus simple d’interpoler un champ reste l’interpolation linéaire. Dans la configuration de la figure 5.5, si les valeurs de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 sont connues, on tire facilement l’expression suivante de \mathbf{E}_{inc} en fonction de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}_{inc} = (1 - \alpha) \cdot \mathbf{E}_1 + \alpha \cdot \mathbf{E}_2 \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, ceci n'est en fait qu'un cas particulier d'une interpolation obtenue à partir de la formule de Taylor prise à l'ordre 1.

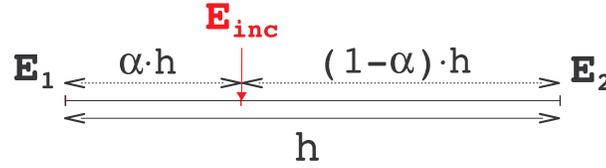


FIG. 5.5 – Interpolation linéaire

- Interpolations par développements de Taylor

- Développement de «Taylor 1 D»

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la variable x , p fois dérivable. Pour tout couple (a, b) , dans \mathbb{R}^2 tel que $a \leq b$ la formule de Taylor à l'ordre p (5.2) donne une expression de la valeur de f en a en fonction de la valeur de f en b et des valeurs des p dérivées successives de f au même point.

$$f(a) = f(b) + \sum_{k=1}^p \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot \partial_x^k f(b) + \mathcal{O}(|b-a|^{p+1}) \quad (5.2)$$

Cette relation peut être appliquée à une composante Φ du champ électromagnétique. Le schéma de Yee étant d'ordre 2 il n'est pas nécessaire de dépasser l'ordre 2 pour la formule de Taylor. Par exemple, en deux dimensions d'espace, on peut écrire la relation suivante en utilisant les notations décrites dans au paragraphe 4.1.2.2 page 92 :

$$\Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j) = \Phi_{i,j} + \alpha \Delta x \cdot (\partial_x \Phi)_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

En utilisant une approximation d'ordre 1 décentrée à droite de $(\partial_x \Phi)_{i,j}$, on peut exprimer l'inconnue $\Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j)$ en fonction de $\Phi_{i,j}$ et $\Phi_{i+1,j}$.

$$\begin{aligned} \Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j) &= \Phi_{i,j} + \alpha \Delta x \cdot \underbrace{\left[\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \right]}_{\text{approximation de } (\partial_x \Phi)_{i,j}} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= (1 - \alpha) \cdot \Phi_{i,j} + \alpha \cdot \Phi_{i+1,j} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Remarquons que nous retrouvons l'interpolation linéaire. Le reste étant en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, la précision de cette interpolation est donc du second ordre.

$$\begin{aligned} \Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j) &= \Phi_{i,j} + \alpha \Delta x \cdot (\partial_x \Phi)_{i,j} + \frac{(\alpha \Delta x)^2}{2} \cdot (\partial_x^2 \Phi)_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ (\partial_x \Phi)_{i,j} &= \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2 \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ (\partial_x^2 \Phi)_{i,j} &= \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

En poussant la formule de Taylor au second ordre (5.3) et en utilisant des différences centrées précises à l'ordre 2 pour estimer les dérivées $(\partial_x \Phi)_{i,j}$ et $(\partial_x^2 \Phi)_{i,j}$, on obtient une interpolation de $\Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j)$ précise au troisième ordre.

$$\Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j) = \Phi_{i,j} + \frac{\alpha}{2} [\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}] + \frac{\alpha^2}{2} [\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}] + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

- Développement de «Taylor 2 D»

La formule de Taylor peut se généraliser à une fonction de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R} . Par conséquent, toujours en deux dimensions, lorsque la composante de champ à interpoler est décalée du vecteur $\mathbf{h} = (\alpha \Delta x, \beta \Delta y)^T$ par rapport au point de référence (x_i, y_j) , on peut l'exprimer en fonction de la valeur de la composante de champ au point de référence et de ses dérivées successives au même point. Ce qui se traduit, à l'ordre 2, par la relation (5.4).

$$\Phi(x_i + \alpha \Delta x, y_j + \beta \Delta y) = \Phi_{i,j} + \nabla \Phi_{i,j} \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot \nabla^2 \Phi_{i,j} \cdot \mathbf{h} + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^3) \quad (5.4)$$

$$\text{avec } \nabla \Phi_{i,j} = \begin{bmatrix} \partial_x \Phi_{i,j} \\ \partial_y \Phi_{i,j} \end{bmatrix} \quad \text{gradient de } \Phi \text{ pris en } (x_i, y_j)$$

$$\text{et } \nabla^2 \Phi_{i,j} = \begin{bmatrix} \partial_x^2 \Phi_{i,j} & \partial_{xy} \Phi_{i,j} \\ \partial_{yx} \Phi_{i,j} & \partial_y^2 \Phi_{i,j} \end{bmatrix} \quad \text{matrice hétéienne de } \Phi \text{ prise en } (x_i, y_j)$$

De la même façon que précédemment, en écrivant des approximations des dérivées partielles de Φ , on obtient des formules d'interpolation.

- **Interpolation de type Lagrange**

- Principe de l'interpolation de Lagrange

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la variable x connue en $n + 1$ points $[x_p, f(x_p)]_{0 \leq p \leq n}$. Il existe un unique polynôme \mathbf{P} de degré n tel que :

$$\forall p, \mathbf{P}(x_p) = f(x_p)$$

Ce polynôme est parfaitement défini comme une combinaison linéaire (5.5) des $n + 1$ polynômes de Lagrange $[\mathbf{L}_p]_{0 \leq p \leq n}$ associés aux x_p .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(x) = \sum_{p=0}^n f(x_p) \cdot \mathbf{L}_p(x) \quad (5.5)$$

$$\text{avec } \mathbf{L}_p(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n \left[\frac{x - x_k}{x_p - x_k} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_p \\ 0 & \text{si } x = x_k \end{cases}$$

La valeur $\mathbf{P}(x)$ représente une approximation de la valeur $f(x)$ plus ou moins bonne selon la distance de x par rapport aux x_k .

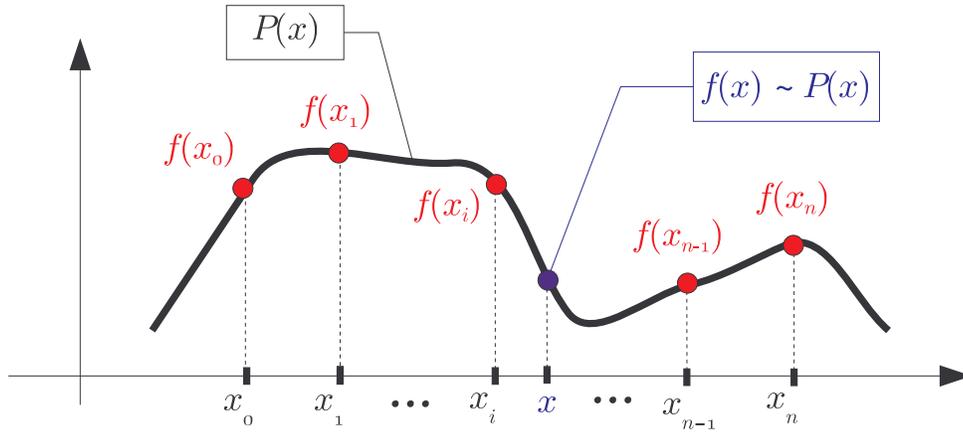


FIG. 5.6 – Polynôme de Lagrange

En effet, l'erreur faite par cette approximation peut être estimée par l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbf{I} \text{ tel que } [x_0, x_n] \subset \mathbf{I}, |f(x) - \mathbf{P}(x)| \leq \frac{\mathcal{C}_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{p=0}^n (x - x_p) \right|$$

avec $\mathcal{C}_{n+1} = \max_{x \in \mathbf{I}} |f^{(n+1)}(x)|$

$\mathbf{P}(x)$ représente une bonne approximation de $f(x)$ sur \mathbf{I} lorsque $\left| \prod_{p=0}^n (x - x_p) \right|$ est petit, donc lorsque les x_i sont bien répartis autour de x .

○ Exemple d'application au sous maillage

Appliquons désormais cette théorie aux interpolations spatiales des composantes de champ dans le cadre du sous maillage. Considérons la configuration de la figure 5.7 :

- Limitation au cas 2 D
- Mode Transverse Electrique ($\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{H}_z$)
- Raffinement [1 : 3]

Dans cet exemple, on cherche à calculer la composante \mathbf{E}_y du champ sur l'interface entre les grilles de façon indirecte, c'est-à-dire en interpolant les valeurs de la composante \mathbf{H}_z aux points $(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{6}})$, $(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ et $(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{5}{6}})$ notés en bleu sur la figure.

Remarquons qu'une interpolation de type Lagrange telle que nous l'avons présentée précédemment n'est que « monovariante ». Par conséquent, pour des fonctions de deux variables telles que les composantes du champ électromagnétique, ce procédé ne peut s'utiliser que dans une direction, x ou y , à la fois. Il est donc nécessaire de procéder en deux étapes pour le calcul des $\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{6}})$, $\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ et $\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{5}{6}})$.

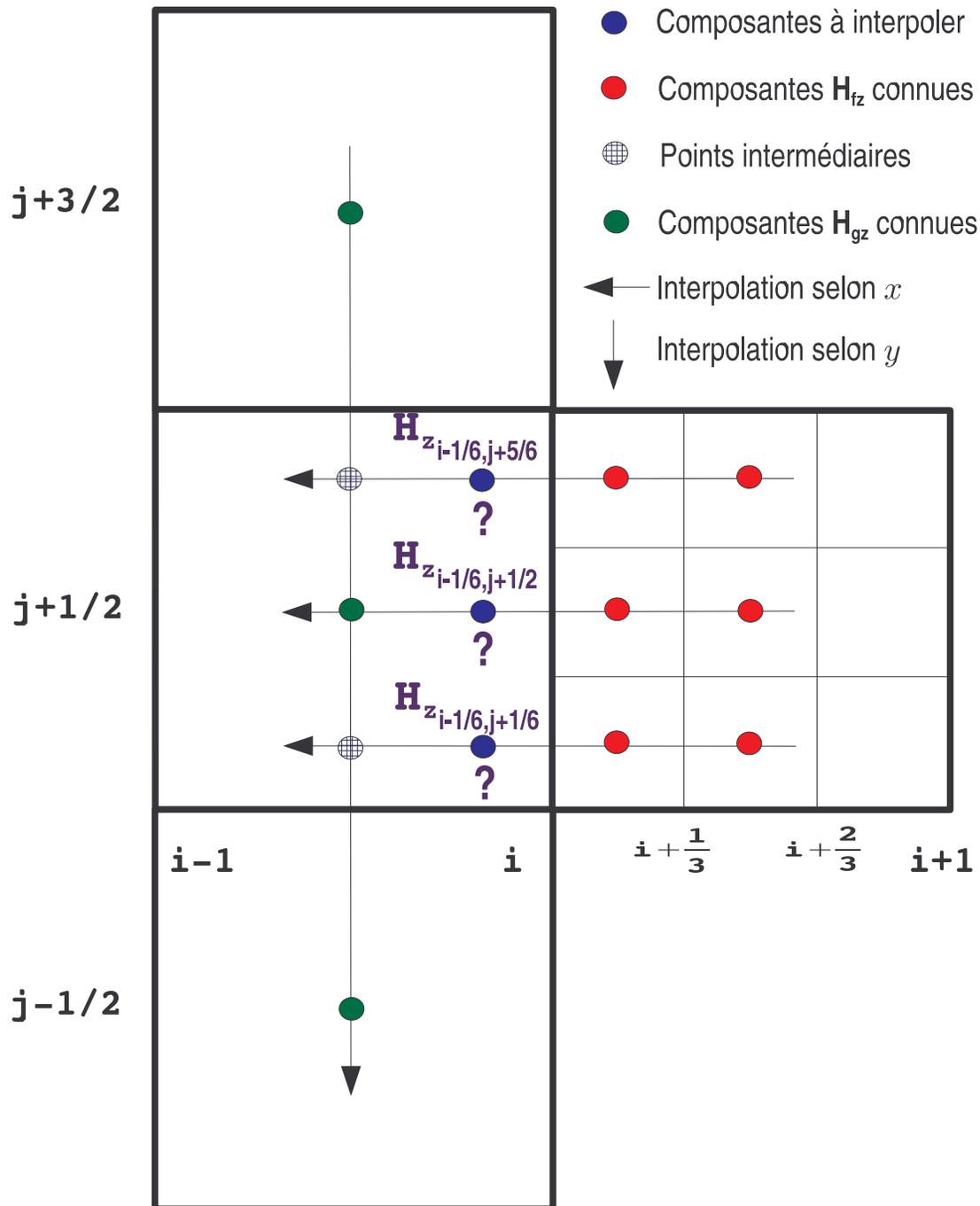


FIG. 5.7 – Application de l'interpolation type Lagrange

En effet, on calcule d'abord des estimations de \mathbf{H}_z aux points intermédiaires (voir figure 5.7) par des interpolations de Lagrange dans la direction y . Ces estimations servent au calcul de la composante \mathbf{H}_z aux points désirés par le même type d'interpolation mais dans la direction x .

– **Étape 1** : Interpolation selon y de \mathbf{H}_z aux points intermédiaires

On choisit par exemple 3 points répartis de part et d'autre des points intermédiaires, sur la même abscisse, où les valeurs de \mathbf{H}_z sont connues (points en vert sur la figure 5.7). Notons que ces points sont forcément dans la grille grossière. On recherche alors le polynôme \mathbf{P} de la variable y de degré 2 tel que :

$$\mathbf{P}(y_{j-\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \mathbf{P}(y_{j+\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \mathbf{P}(y_{j+\frac{3}{2}}) = \mathbf{H}_{fz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}$$

La méthode de Lagrange nous donne le résultat suivant :

$$\mathbf{P}(y) = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{L}_{j-\frac{1}{2}}(y) + \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{L}_{j+\frac{1}{2}}(y) + \mathbf{H}_{fz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}} \cdot \mathbf{L}_{j+\frac{3}{2}}(y)$$

On obtient alors une approximation de \mathbf{H}_z aux points intermédiaires en écrivant simplement :

$$\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{6}}) \simeq \mathbf{P}(y_{j+\frac{1}{6}})$$

$$\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{5}{6}}) \simeq \mathbf{P}(y_{j+\frac{5}{6}})$$

Remarquons que l'interpolation intermédiaire de \mathbf{H}_z en $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ n'est pas nécessaire puisque la composante \mathbf{H}_{gz} est déjà connue en ce point.

– **Étape 2** : Interpolation selon x de \mathbf{H}_z aux points voulus

De la même façon que dans la première étape, on procède à 3 interpolations de Lagrange pour estimer \mathbf{H}_z aux 3 points désirés (points bleus figure 5.7). Pour l'interpolation, on utilise 3 points de bases incluant à chaque fois un des 3 points intermédiaires et 2 autres points situés sur la même ordonnée, pour lesquels la valeur de la composante \mathbf{H}_z est connue (points rouges figure 5.7). Notons que ces points sont forcément à choisir dans la grille fine. Ceci revient donc à chercher les 3 trinômes \mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{T} tels que :

$$\mathbf{Q}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{P}(y_{j+\frac{1}{6}}) \quad ; \quad \mathbf{Q}(x_{i+\frac{1}{6}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{6},j+\frac{1}{6}}} \quad ; \quad \mathbf{Q}(x_{i+\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{6}}}$$

$$\mathbf{R}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \mathbf{R}(x_{i+\frac{1}{6}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{6},j+\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \mathbf{R}(x_{i+\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{T}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{P}(y_{j+\frac{5}{6}}) \quad ; \quad \mathbf{T}(x_{i+\frac{1}{6}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{6},j+\frac{5}{6}}} \quad ; \quad \mathbf{T}(x_{i+\frac{1}{2}}) = \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{5}{6}}}$$

La méthode de Lagrange permet d'exprimer \mathbf{Q} , \mathbf{P} et \mathbf{T} comme des combinaisons linéaires des polynômes de Lagrange associés aux points $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{6}}, x_{i+\frac{1}{2}})$. On obtient une approximation de \mathbf{H}_z aux points désirés en écrivant :

$$\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{6}}) \simeq \mathbf{Q}(x_{i-\frac{1}{6}})$$

$$\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{1}{2}}) \simeq \mathbf{R}(x_{i-\frac{1}{6}})$$

$$\mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{6}}, y_{j+\frac{5}{6}}) \simeq \mathbf{T}(x_{i-\frac{1}{6}})$$

Ces interpolations sont ensuite utilisées pour le calcul de la composante \mathbf{E}_y sur l'interface par la première étape du schéma de Yee.

○ Remarque pour le passage au 3 D

Comme nous l'avons remarqué plus haut, une interpolation «purement 2D» requiert deux interpolations de Lagrange successives. Dans un cas 3D, il sera probablement nécessaire de recourir à trois interpolations successives selon les trois directions de l'espace. La section 5.3 de ce chapitre est consacrée à la présentation d'un algorithme 2D, puis sa généralisation en 3D, utilisant ce type d'interpolations.

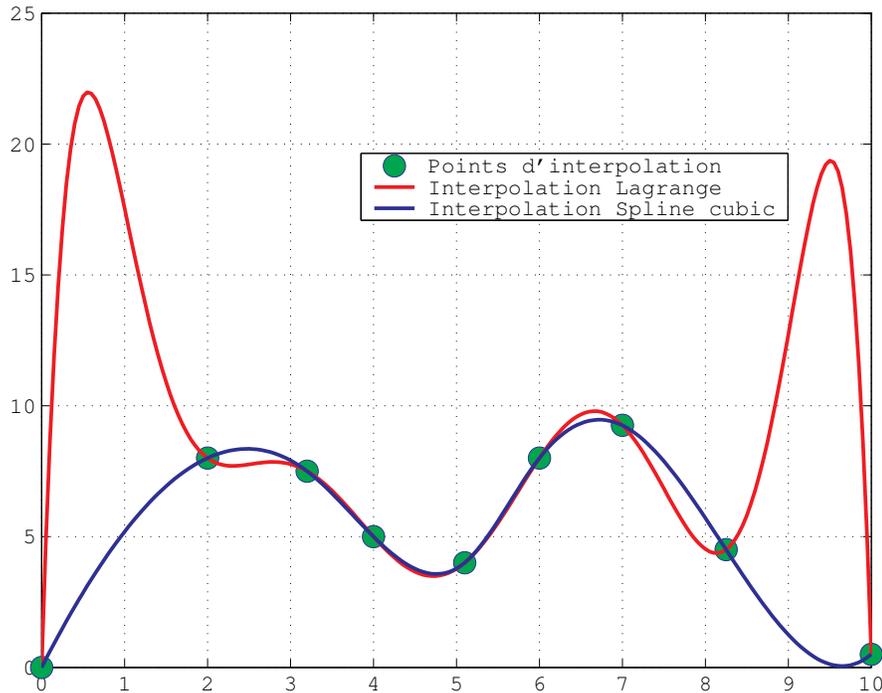


FIG. 5.8 – Comparaison entre interpolations de Lagrange et Splines

• Fonctions splines cubiques

Le principe d'interpolation par une fonction Spline cubique est similaire à la méthode de Lagrange à laquelle on ajoute des contraintes de régularité. Considérons une fonction f , \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la variable x dont on connaît la valeur en n points $[x_p, f(x_p)]_{1 \leq p \leq n}$. Comme pour la méthode d'interpolation de Lagrange, on cherche une fonction \mathbf{S} qui coïncide avec f en ces points. Cependant \mathbf{S} n'est plus un polynôme mais une fonction par morceaux définie de la

manière suivante. On note $\mathcal{P}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 3 :

$$\mathbf{S}(x) = \begin{cases} \mathbf{P}_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \mathbf{P}_2(x) & \text{si } x \in [x_2, x_3] \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{P}_k \in \mathcal{P}_3[X]$$

De plus, on impose que la fonction \mathbf{S} soit deux fois dérivable sur l'intervalle $[x_1, x_n]$. L'intérêt de cette contrainte de régularité est d'obtenir une fonction interpolante «moins perturbée» ou «plus lisse» qu'un polynôme de Lagrange. Comme l'illustrent les courbes de la figures 5.8, dans certains cas, il peut être plus judicieux d'utiliser une interpolation par une fonction spline cubique.

5.2.1.3 Les interpolations temporelles

Considérons un domaine FDTD comportant une zone sous maillée avec un raffinement de $[1 : N_{raf}]$. Dans la boucle temporelle de mise à jour des composantes de champ dans la grille fine (voir figure 5.2 page 103), il est nécessaire de faire N_{raf} itérations du schéma de Yee pour passer du temps $n \cdot \Delta t_g$ au temps $(n+1) \cdot \Delta t_g$ puisque $\Delta t_f = \frac{1}{N_{raf}} \cdot \Delta t_g$. A chaque itération dans la zone raffinée, les composantes de champ à l'interface entre les grilles doivent être déterminées de façon à pouvoir faire le calcul à l'intérieur de cette zone. Cependant, les interpolations spatiales utilisées pour déterminer ces composantes font nécessairement intervenir des composantes de la grille principale qui ne sont pas connues aux étapes intermédiaires, tous les $\frac{1}{N_{raf}} \cdot \Delta t_g$, effectuées dans la grille fine. Il apparaît donc nécessaire de faire des interpolations temporelles de façon à pouvoir estimer les champs à l'interface aux temps désirés. Dans la littérature, on utilise en général le terme «d'extrapolations temporelles» plutôt que celui «d'interpolations».

Ces extrapolations sont assez peu décrites dans la littérature ou ne font pas l'objet d'études approfondies comme pour les interpolations spatiales. Cependant, les différents tests numériques réalisés dans la section 5.3 montrent une certaine influence du choix des interpolations temporelles sur la stabilité.

Soit Φ_{bord} une composante spatialement interpolée sur l'interface grille fine-grille grossière. La valeur de Φ_{bord} s'écrit comme une fonction des Φ_g et Φ_f voisins :

$$\Phi_{bord} = \Psi(\Phi_g, \Phi_f) \quad (5.6)$$

La fonction Ψ représente la formule d'interpolation spatiale pouvant faire intervenir des composantes de champs de la grille grossière Φ_g et des composantes de la grille raffinée Φ_f . Lors de la boucle de mise à jour du champ électromagnétique dans la grille fine, on est amené à estimer des inconnues à l'interface à des temps $t^p = p \cdot \Delta t_g$ avec p rationnel. Lorsque t^p correspond à

un instant connu dans la grille grossière, on applique directement la formule (5.6) au temps t^p . Sinon, les composantes de champ de la grille grossière ne sont pas déterminées à cet instant et la relation (5.6) prise au temps t^p n'est plus valable. Nous présentons dans les paragraphes suivant trois voies différentes d'extrapolations temporelles pour estimer la valeur de Φ_{bord}^p .

- **Extrapolation des champs dans la formule d'interpolation spatiale**

La première solution est d'extrapoler temporellement les valeurs des Φ_g au temps $p \cdot \Delta t_g$ dans la formule d'interpolation spatiale. Celle-ci devient alors :

$$\Phi_{bord}^p = \Psi(\tilde{\Phi}_g^p, \Phi_f^p) \quad (5.7)$$

Avec $\tilde{\Phi}_g^p$ une extrapolation temporelle de $\Phi_g(p \cdot \Delta t_g)$ faisant intervenir Φ_g à des temps antérieurs à t^p connus de la grille grossière que nous avons notés (t^k, \dots, t^{k-m}) . On peut alors écrire une relation du type :

$$\tilde{\Phi}_g^p = \Gamma_1(\Phi_g^k, \dots, \Phi_g^{k-m})$$

- **Extrapolation directe du champ issu de l'interpolation spatiale**

Contrairement à la solution précédente, celle-ci propose d'extrapoler directement la valeur de Φ_{bord} au temps $p \cdot \Delta t_g$ en l'exprimant en fonction des valeurs Φ_{bord} calculées à des temps antérieurs. On écrit alors une relation du type :

$$\Phi_{bord}^p = \Gamma_2(\Phi_{bord}^k, \dots, \Phi_{bord}^{k-m})$$

- **Utilisation de l'équation des ondes**

Une des propriétés issue des équations de Maxwell est que chaque composante scalaire Φ du champ électromagnétique vérifie l'équation de propagation (5.8) dite équation des ondes ou équation de d'Alembert.

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \partial_t^2 \Phi = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \Phi = \sum_{u=x,y,z} \partial_u^2 \Phi \quad (5.8)$$

Certains articles proposent d'utiliser une forme discrétisée (5.9) avec des différences centrées de cette équation afin de pouvoir mettre à jour les inconnues de la zone raffinée nécessaires sur l'interface grille fine-grille grossière ([II-13] à [II-17]).

$$\Phi_{f,i,j,k}^{m+\frac{1}{N_{raf}}} = 2\Phi_{f,i,j,k}^m - \Phi_{f,i,j,k}^{m-\frac{1}{N_{raf}}} + c^2 \Delta t_f^2 \cdot (\Delta \Phi_f)_{i,j,k}^m \quad \text{avec} \quad (\Delta \Phi_f)_{i,j,k}^m = \sum (\partial_u^2 \Phi_f)_{i,j,k}^m \quad (5.9)$$

D'après la relation (5.10), remarquons qu'une discrétisation aux différences centrées $(\Delta \Phi_f)_{i,j,k}^m$ fait intervenir 7 points dont au moins un est situé à l'extérieur de la grille fine.

$$(\partial_x^2 \Phi_f)_{i,j,k}^m = \frac{\Phi_{f,i+1,j,k}^m - 2\Phi_{f,i,j,k}^m + \Phi_{f,i-1,j,k}^m}{\Delta x_f^2} + \mathcal{O}(\Delta x_f^2) \quad (5.10)$$

Ce procédé nécessite donc tout de même des interpolations spatiales. La méthode «Variable Step Size Method» (VSSM) présentée dans [II-13] interpole les composantes de champ manquantes dans la relation (5.9), tandis que la méthode «Mesh Refinement Algorithm» (MRA) de [II-14] interpole directement $\Delta\Phi_f^m$ à partir de discrétisations centrées de $\Delta\Phi_g^m$ sur le maillage grossier.

Pour un raffinement de maillage [1 : 2] il n'est pas nécessaire de recourir à une interpolation temporelle. C'est en fait la relation discrète de l'équation des ondes qui tient ce rôle. Cependant, pour des raffinements plus importants ($N_{raf} > 2$), le problème des interpolations temporelles n'est pas réglé puisqu'à partir de la deuxième itération de (5.9), les inconnues du maillage principal, intervenant dans l'interpolation spatiale utilisée pour le calcul de $\Delta\Phi_f^m$, ne sont pas estimées au bon instant.

$$\Phi_{f,i,j,k}^{n_g + \frac{l}{N_{raf}}} = 2\Phi_{f,i,j,k}^{n_g} - \Phi_{f,i,j,k}^{n_g - \frac{l}{N_{raf}}} + c^2(l\Delta t_f)^2 \cdot (\Delta\Phi_f)_{i,j,k}^{n_g} \quad \text{avec } l \in \{1 \dots N_{raf}\} \quad (5.11)$$

On pourrait penser utiliser la relation (5.9) avec des pas de temps plus grands, multiples de Δt_f comme l'illustre la relation (5.11). Ainsi, l'instant représenté par n_g correspond toujours à un instant connu dans le maillage principal. Malheureusement le schéma (5.9) est assujéti à la même condition de stabilité que le schéma de Yee. Cependant, ce point délicat n'est pas abordé dans les articles [II-13] et [II-14].

5.2.2 Schémas conservatifs

5.2.2.1 Les équations de Maxwell : un système conservatif

Considérons une surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V} de l'espace. Comme tout système d'équations modélisant un phénomène physique, le système de Maxwell doit vérifier le principe de conservation de l'énergie. La variation dans le temps de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume ($\partial_t \mathbf{W}_{tot}$), est égale à la somme de l'énergie reçue par le volume (\mathbf{W}_e), de l'énergie rayonnée hors du volume ($-\mathbf{W}_r$) et de l'énergie cédée à la matière contenue dans ce volume ($-\mathbf{W}_c$), soit :

$$\partial_t \mathbf{W}_{tot} = \mathbf{W}_e - \mathbf{W}_r - \mathbf{W}_c$$

Nous cherchons à déterminer par la suite les expressions de \mathbf{W}_e , \mathbf{W}_r et \mathbf{W}_c en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{H} . L'énergie totale contenue dans \mathcal{V} , définie par la relation (5.12), est égale à l'intégrale sur le volume de la densité volumique d'énergie électromagnétique (\mathbf{w}).

$$\mathbf{W}_{tot} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{w} \, d\tau \quad \text{avec } \mathbf{w} = \frac{1}{2} [\varepsilon \cdot \mathbf{E}^2 + \mu \cdot \mathbf{H}^2] \quad (5.12)$$

Considérons que le volume \mathcal{V} est constitué d'un milieu avec des matériaux non dispersifs et pouvant contenir des pertes électriques. Dans ce cas, le système de Maxwell s'écrit de la façon

suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (5.13)$$

En faisant le produit scalaire de la première équation avec le champ \mathbf{H} et de la deuxième avec le champ \mathbf{E} puis en retranchant les deux équations résultantes, on trouve la relation suivante :

$$\underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{E})}_{= \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{E})} = \underbrace{\varepsilon \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}}_{= \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{E}^2 + \mu \cdot \partial_t \mathbf{H}^2 = \partial_t \mathbf{w}} + \sigma \cdot \mathbf{E}^2$$

En intégrant sur tout le volume \mathcal{V} , on trouve la relation de conservation ci-dessous :

$$\partial_t \mathbf{W}_{tot} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \, d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \sigma \cdot \mathbf{E}^2 \, d\tau \quad (5.14)$$

En notant $\mathbf{\Pi}$ le vecteur de Poynting défini par $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, d'après le théorème de la divergence, la relation (5.14) s'écrit finalement sous la forme de l'égalité (5.15).

$$-\partial_t \mathbf{W}_{tot} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{ds}}_{-(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_r)} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \sigma \cdot \mathbf{E}^2 \, d\tau}_{\mathbf{w}_c} \quad (5.15)$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée \mathcal{S} représente la résultante de la somme de l'énergie reçue et de l'énergie rayonnée par le système. Le deuxième terme de la relation (5.15) représente l'énergie cédée à la matière dans le volume \mathcal{V} . Dans le cas considéré, cette énergie est cédée sous forme de chaleur par effet joule.

Dans le cas particulier d'un milieu sans perte ($\sigma = 0$) avec des conditions aux limites de conducteur parfait sur le bord de \mathcal{V} , c'est-à-dire $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur \mathcal{S} , l'énergie totale contenue dans le volume se conserve (relation (5.16)). Ceci signifie que l'énergie électromagnétique engendrée dans le volume \mathcal{V} reste confinée dans ce volume puisqu'elle ne peut pas être rayonnée à l'extérieur à cause du conducteur parfait au bord et qu'elle ne se dissipe pas par effet joule car le milieu est sans perte.

$$-\partial_t \mathbf{W}_{tot} = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}_{= 0} \cdot \mathbf{H} \, ds = 0 \quad (5.16)$$

Dans la suite, nous considérons un volume \mathcal{V} contenant un milieu sans perte avec des conditions aux bords de conducteur parfait. Le principe de conservation de l'énergie sera vérifié par la conservation de l'énergie électromagnétique totale contenue dans le volume. Remarquons que la relation précédente est aussi vraie en espace ouvert puisque les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont nuls à l'infini.

5.2.2.2 Le schéma de Yee : un schéma conservatif

Considérons le schéma numérique de Yee présenté dans la section 4.1. Ce schéma est dit conservatif si et seulement s'il existe un équivalent discret de \mathbf{W}_{tot} , que nous noterons \mathcal{W}_{tot} , conservé par le schéma de Yee dans les conditions que nous avons fixées précédemment (milieu sans perte et conditions PEC aux bords). Ce qui revient à dire qu'à tout instant discret $n \cdot \Delta t$, l'équivalent discret de l'énergie contenue dans le volume FDTD doit vérifier la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathcal{W}_{tot}^{n+1} - \mathcal{W}_{tot}^n}{\Delta t} = 0 \quad (5.17)$$

On peut montrer dans le cas 3D que le candidat \mathcal{W}_{tot} de la relation (5.18) est conservé par le schéma de Yee.

$$\mathcal{W}_{tot}^n = \sum_i \sum_j \sum_k w_{i,j,k}^n \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.18)$$

Avec $w_{i,j,k}^n$ équivalent discret de la densité volumique d'énergie électromagnétique contenue dans la maille (i, j, k) à l'instant $n \cdot \Delta t$.

$$\begin{aligned} w_{i,j,k}^n &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left[\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \\ &\quad \frac{\mu}{2} \cdot \left[(\mathbf{H}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n)^2 + (\mathbf{H}_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^n)^2 + (\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n)^2 \right] \end{aligned}$$

- **Preuve dans le cas 1D**

Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous nous limitons à la démonstration de ce résultat dans un cas à une dimension d'espace. Le principe de démonstration reste identique pour le cas 3D. Dans le cas de la propagation d'ondes planes dans la direction (Ox) avec une polarisation selon (Oy) pour le champ \mathbf{E} et selon (Oz) pour le champ \mathbf{H} , il n'existe que deux composantes de champ non nulles $\mathbf{e}(x, t)$ et $\mathbf{h}(x, t)$ telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}(x, t) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{h}(x, t) \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Considérons que l'onde se propage entre deux plaques infinies de conducteurs parfaits normales à l'axe (Ox) , en appelant \mathcal{V} le volume entre les plaques, constitué d'un matériau supposé sans perte, le système de Maxwell s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{e}(x, t) + \partial_x \mathbf{h}(x, t) = 0 \\ \mu \cdot \partial_t \mathbf{h}(x, t) + \partial_x \mathbf{e}(x, t) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}(x, \cdot) = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{V} \quad (5.19)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, le problème de Cauchy correspondant au système (5.19) est associé à la conservation de l'énergie électromagnétique totale \mathbf{W}_{tot} contenue dans \mathcal{V} .

$$\mathbf{W}_{tot}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} [\varepsilon \cdot \mathbf{e}(x, t)^2 + \mu \cdot \mathbf{h}(x, t)^2] dx$$

Pour appliquer le schéma de Yee à ce problème, on discrétise en temps et espace \mathbf{e} et \mathbf{h} comme indiqué sur la figure 5.9. La composante \mathbf{e} est donc estimée aux points $(i \cdot \Delta x, (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t)$ et \mathbf{h} en $((i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$. Le schéma de Yee s'écrit alors comme suit.

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ \frac{\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mathbf{e}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n, \mathbf{e}_N^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{e}_0^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (5.20)$$

Un équivalent discret de \mathbf{W}_{tot} associée à ce schéma s'écrit :

$$\mathcal{W}_{tot}^n = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon \cdot \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_i^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{N-1} \mu \cdot (\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n)^2 \right] \quad (5.21)$$

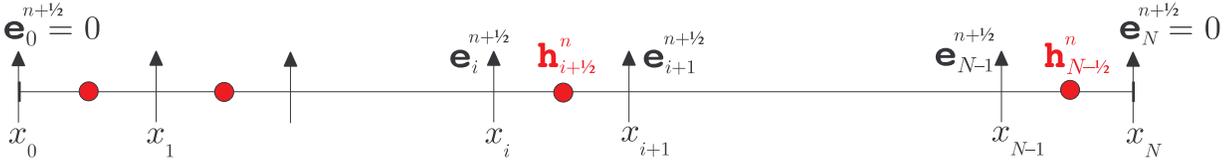


FIG. 5.9 – Schéma de Yee 1D

L'objectif est de démontrer que le schéma que nous venons d'écrire conserve cette énergie, c'est-à-dire que \mathcal{W}_{tot} vérifie la relation (5.17). Pour calculer la variation de l'énergie discrète, effectuons dans un premier temps la demie somme de la première équation de (5.20) aux temps n et $n + 1$. On obtient alors le système (5.22).

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{e}_i^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{e}_i^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mathbf{e}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{h}^{n+1} + \mathbf{h}^n}{2} \quad (5.22)$$

Afin de faire apparaître les produits $\varepsilon \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{e}_i^{n-\frac{1}{2}}$ et $\mu (\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n)^2$ intervenant dans l'expression de \mathcal{W}_{tot} , on multiplie la première équation de (5.22) par $\varepsilon \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta x$ et la deuxième équation par $\mu \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta x$, on obtient alors le système (5.23).

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon \Delta x}{2} \cdot \frac{\mathbf{e}_i^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{e}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \\ \frac{\mu \Delta x}{2} \cdot \frac{(\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n)^2}{\Delta t} + \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

La combinaison linéaire des équations du système précédent : $\sum_{i=1}^{N-1}$ équation 1 + $\sum_{i=0}^{N-1}$ équation 2, nous permet d'écrire l'égalité (5.24).

$$\frac{\mathcal{W}_{tot}^{n+1} - \mathcal{W}_{tot}^n}{\Delta t} = - \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (5.24)$$

Pour clore la démonstration, il reste à montrer que le second terme ($-T_2^n$) de l'égalité précédente est nul.

$$\begin{aligned} T_2^n &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} \right] \right\} + \mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_N^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_{N-1}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left[\mathbf{e}_N^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_{N-1}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \underbrace{\mathbf{e}_{N-1}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_0^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{h}_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{e}_N^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{N-1}^{n+\frac{1}{2}}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

La relation de conservation de \mathcal{W}_{tot} au cours du temps est donc vérifiée. Nous aurions obtenu le même résultat en utilisant un autre équivalent discret de \mathbf{W}_{tot} :

$$\mathcal{W}_{tot}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon \cdot (\mathbf{e}_i^{n+\frac{1}{2}})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \mu \cdot \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{h}_{i+\frac{1}{2}}^n \right]$$

Remarquons cependant que ce résultat semble être indépendant du pas de temps. Or, lorsqu'on choisit un pas de temps ne vérifiant pas la condition de stabilité CFL ($\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$), la solution obtenue est instable ce qui induit une croissance exponentielle de l'énergie avec le temps. Ceci semble être en contradiction avec le résultat précédemment démontré. Cependant, en considérant les suites $(\mathbf{e}^n)_{n \geq 0}$ et $(\mathbf{h}^{n+\frac{1}{2}})_{n \geq 0}$ définies par $\mathbf{e}^n = (\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_{N-1}^n)$ et $\mathbf{h}^{n+\frac{1}{2}} = (\mathbf{h}_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \dots, \mathbf{h}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$, on peut montrer la relation suivante [II-9] :

$$\text{Si } \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \text{ alors, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{e}^n\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\mathbf{h}^n\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \mathcal{C} \cdot \mathcal{W}_{tot}^n \text{ avec } \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_i |\mathbf{x}_i|^2$$

Comme \mathcal{W}_{tot} se conserve on en déduit facilement que si Δt vérifie le critère CFL, alors les suites (\mathbf{e}^n) et $(\mathbf{h}^{n+\frac{1}{2}})$ restent bornées, ce qui prouve la stabilité du schéma.

5.2.2.3 Principe de construction d'un schéma de raffinement conservatif en 1D

Nous avons constaté, dans ce qui précède, que la conservation d'une énergie discrète par le schéma de Yee joue un rôle clé dans sa stabilité. C'est pourquoi Fouquet et Joly [II-9] ont cherché à développer des schémas de raffinement conservant une énergie discrète par construction, de façon à pouvoir en assurer la stabilité. Plusieurs candidats de schémas de raccordement à l'interface peuvent vérifier ce critère de conservation. Le meilleur schéma est alors choisi après analyse de la consistance de chacun des candidats. Cette démarche est totalement différente de celles utilisées pour la construction de schémas de raffinement par interpolations, puisqu'on cherche à assurer la stabilité avant la consistance et non l'inverse. Nous présentons ici la méthode utilisée dans [II-9] pour construire un schéma de ce type dans le cas 1D.

- **Le «problème modèle» continu**

Considérons un domaine \mathcal{V} décomposé en deux sous domaines \mathcal{V}_g et \mathcal{V}_f tels que $\mathcal{V}_g \cap \mathcal{V}_f = \{x_{int}\}$. Ceci signifie que \mathcal{V}_f et \mathcal{V}_g sont séparés par une interface située au point x_{int} (voir figure 5.10). Pour le passage au domaine discret, le domaine \mathcal{V}_g sera discrétisé grossièrement tandis que le domaine \mathcal{V}_f sera discrétisé plus finement. Si l'interface n'est pas un obstacle et que les deux sous domaines sont constitués du même milieu, le problème couplé à l'interface, défini par les systèmes (5.25) et la condition de raccord (5.26), est équivalent au problème (5.19).

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{e}_g + \partial_x \mathbf{h}_g = 0 \\ \mu \cdot \partial_t \mathbf{h}_g + \partial_x \mathbf{e}_g = 0 \\ \mathbf{e}_g(0, t) = 0 \end{cases} \text{ sur } \mathcal{V}_g \quad \begin{cases} \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{e}_f + \partial_x \mathbf{h}_f = 0 \\ \mu \cdot \partial_t \mathbf{h}_f + \partial_x \mathbf{e}_f = 0 \\ \mathbf{e}_f(x_N, t) = 0 \end{cases} \text{ sur } \mathcal{V}_f \quad (5.25)$$

Avec la condition de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_g(x_{int}, t) = \mathbf{e}_f(x_{int}, t) \\ \mathbf{h}_g(x_{int}, t) = \mathbf{h}_f(x_{int}, t) \end{cases} \quad (5.26)$$

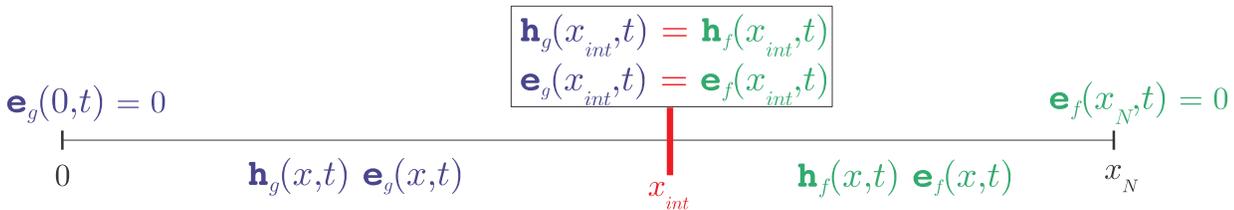


FIG. 5.10 – Le problème modèle

La relation de continuité (5.26) assure aussi la conservation de l'énergie contenue dans \mathcal{V} . En effet, l'énergie \mathbf{W}_{tot} est égale à la somme de l'énergie contenue dans \mathcal{V}_g , notée \mathbf{W}_g , et de celle

contenue dans \mathcal{V}_f , notée \mathbf{W}_f . En appliquant sur les deux systèmes (5.25) la même démarche qu'au paragraphe 5.2.2.1, on trouve des expressions de $\partial_t \mathbf{W}_g$ et $\partial_t \mathbf{W}_f$ opposées.

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{W}_g &= \frac{1}{2} \partial_t \int_0^{x_{int}} [\varepsilon \cdot \mathbf{e}_g^2 + \mu \cdot \mathbf{h}_g^2] dx = - \int_0^{x_{int}} \partial_x (\mathbf{e}_g \cdot \mathbf{h}_g) dx = -\mathbf{e}_g(x_{int}, t) \cdot \mathbf{h}_g(x_{int}, t) \\ \partial_t \mathbf{W}_f &= \frac{1}{2} \partial_t \int_0^{x_{int}} [\varepsilon \cdot \mathbf{e}_f^2 + \mu \cdot \mathbf{h}_f^2] dx = \int_0^{x_{int}} \partial_x (\mathbf{e}_f \cdot \mathbf{h}_f) dx = \mathbf{e}_f(x_{int}, t) \cdot \mathbf{h}_f(x_{int}, t)\end{aligned}$$

- **Le problème discret avec sous maillage**

La discrétisation du problème précédent est faite selon le dessin de la figure 5.11. L'interface entre \mathcal{V}_g et \mathcal{V}_f est située au point discret $x_{I_0} = I_0 \cdot \Delta x$ correspondant à l'emplacement d'une composante du champ \mathbf{e} . Le sous domaine \mathcal{V}_f , à droite de x_{I_0} , est maillé en espace et en temps deux fois plus finement que le sous domaine \mathcal{V}_g . Pour la mise à jour des champs dans chacune des grilles on utilise le schéma de Yee classique (5.20) avec des pas de discrétisation Δx_f et Δt_f dans la grille fine, et $\Delta x_g = 2\Delta x_f$ et $\Delta t_g = 2\Delta t_f$ dans la grille grossière. Le champ situé sur l'interface ne peut être calculé avec l'algorithme de Yee. Le schéma de raccord entre les deux grilles porte donc sur les valeurs de ce champ.

Ce schéma de raccordement doit permettre de conserver une énergie discrète \mathcal{W}_{tot} équivalente à \mathbf{W}_{tot} . Sachant que \mathbf{W}_{tot} est égale à la somme de \mathbf{W}_g et \mathbf{W}_f , on en déduit que \mathcal{W}_{tot} s'exprime comme la somme \mathcal{W}_f et \mathcal{W}_g , équivalents des énergies \mathbf{W}_f et \mathbf{W}_g .

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_g^n &= \frac{\Delta x_g}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{I_0-1} \varepsilon \cdot \mathbf{e}_{g_i}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_{g_i}^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{I_0-1} \mu \cdot (\mathbf{h}_{g_{i+\frac{1}{2}}}^n)^2 \right] + \frac{\Delta x_g}{2} \cdot \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \\ \mathcal{W}_f^n &= \frac{\Delta x_f}{2} \cdot \left[\sum_{i=I_0+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} \varepsilon \cdot \mathbf{e}_{f_i}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{e}_{f_i}^{n-\frac{1}{4}} + \sum_{i=I_0}^{N-\frac{1}{2}} \mu \cdot (\mathbf{h}_{f_{i+\frac{1}{4}}}^n)^2 \right] + \frac{\Delta x_f}{2} \cdot \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

- Expression de la variation de l'énergie discrète dans la grille fine

On utilise la même méthode que pour la démonstration de la conservation de l'énergie discrète (voir § 5.2.2.2) par le schéma de Yee. En revanche, dans ce cas le terme de bord en x_{I_0} ne s'annule pas. Après calculs, on obtient alors la relation suivante :

$$\frac{\mathcal{W}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_f} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_f}{4\Delta t_f} \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} - \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n-\frac{1}{4}} \right] = \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{4}}$$

Ce qui donne finalement pour la variation de l'énergie entre $t^{n+\frac{1}{2}}$ et t^n l'égalité (5.27).

$$\frac{\mathcal{W}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_f} = \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \left\{ \mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{4}} + \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_f}{4\Delta t_f} \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} - \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n-\frac{1}{4}} \right] \right\} \quad (5.27)$$

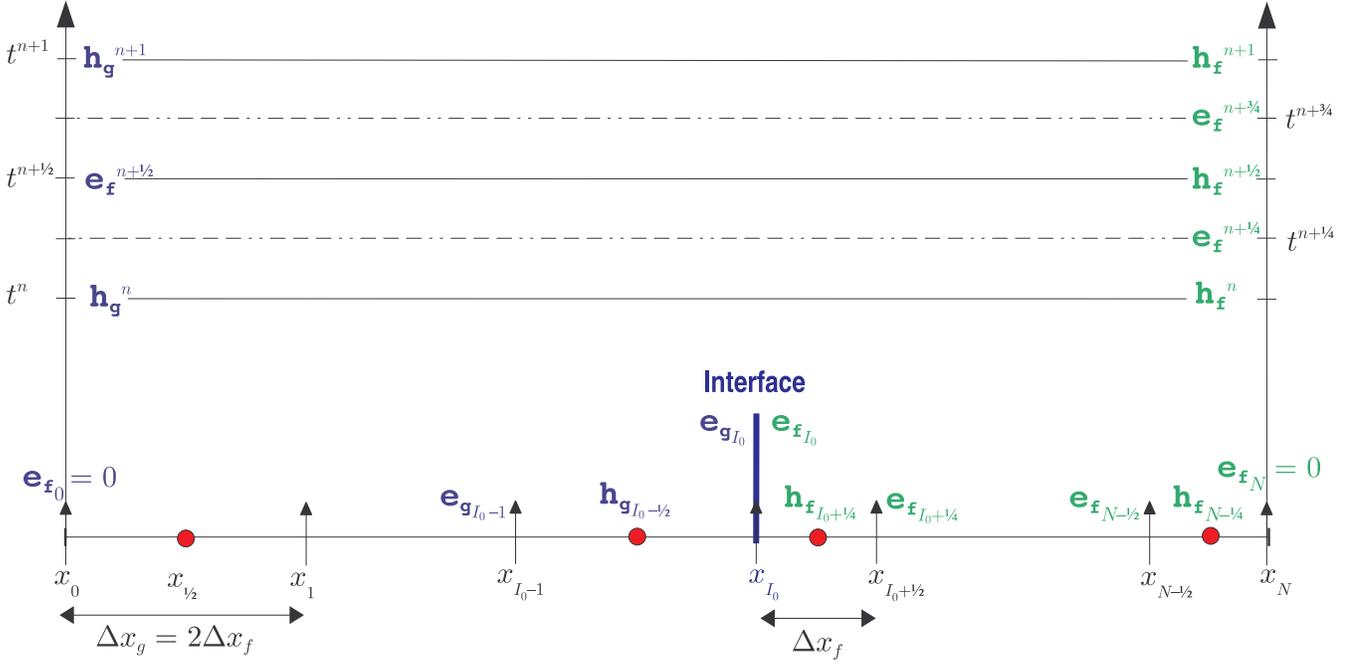


FIG. 5.11 – Le problème discret avec sous maillage

En remarquant que :

$$\frac{\mathcal{W}_f^{n+1} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_g} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\mathcal{W}_f^{n+1} - \mathcal{W}_f^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t_f} + \frac{\mathcal{W}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_f} \right]$$

et que :

$$\mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{4}} + \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_f}{4\Delta t_f} \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} - \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n-\frac{1}{4}} \right] = \mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{4}} + \frac{\Delta x_f}{2} \cdot \underbrace{\varepsilon (\partial_t \mathbf{e})_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}}}_{-(\partial_x \mathbf{h})_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}}} = \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}},$$

on peut écrire la variation de \mathcal{W}_f entre t^{n+1} et t^n sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\mathcal{W}_f^{n+1} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_g} = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \right] \quad (5.28)$$

- Expression de la variation de l'énergie discrète dans la grille grossière

En procédant de la même façon que précédemment, après calculs, on obtient dans un premier temps :

$$\frac{\mathcal{W}_g^{n+1} - \mathcal{W}_g^n}{\Delta t_g} - \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_g}{4\Delta t_g} \left[\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \right] = -\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne finalement pour la variation de l'énergie entre t^n et t^{n+1} l'égalité (5.29).

$$\frac{\mathcal{W}_g^{n+1} - \mathcal{W}_g^n}{\Delta t_g} = \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ -\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} + \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_g}{4\Delta t_g} \left[\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (5.29)$$

En remarquant que :

$$-\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} + \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_g}{4\Delta t_g} \left[\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \right] = -\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x_g}{2} \cdot \underbrace{\varepsilon (\partial_t \mathbf{e})_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}}}_{-(\partial_x \mathbf{h})_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}}} = -\mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}},$$

on peut écrire la variation de \mathcal{W}_g entre t^{n+1} et t^n sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\mathcal{W}_g^{n+1} - \mathcal{W}_g^n}{\Delta t_g} = -\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

○ Expression de la conservation de l'énergie discrète totale

Le but de cette démarche étant de construire un schéma de raccord à l'interface conservant l'énergie, on impose alors que la variation de l'énergie discrète totale entre les temps t^n et t^{n+1} est nulle pour tout n :

$$\forall n \geq 0, \frac{\mathcal{W}_{tot}^{n+1} - \mathcal{W}_{tot}^n}{\Delta t_g} = \frac{\mathcal{W}_g^{n+1} - \mathcal{W}_g^n}{\Delta t_g} + \frac{\mathcal{W}_f^{n+1} - \mathcal{W}_f^n}{\Delta t_g} = 0 \quad (5.31)$$

D'après les expressions des variations des énergies discrètes de la grille fine et de la grille grossière, assurer la relation (5.31) revient à vérifier l'équation (5.32).

$$\forall n \geq 0, \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \right] = \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

Remarquons que cette égalité peut être vue comme un équivalent discret de la relation de continuité (5.33) à l'interface du produit $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}$, exprimée au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$.

$$\forall t \geq 0, \mathbf{e}_f(x_{int}, t) \cdot \mathbf{h}_f(x_{int}, t) = \mathbf{e}_g(x_{int}, t) \cdot \mathbf{h}_g(x_{int}, t) \quad (5.33)$$

• Les différents schémas conservatifs possibles

L'équation (5.32) couple les inconnues \mathbf{e} et \mathbf{h} sur l'interface. Deux solutions simples pour découpler ces variables peuvent être exploitées. Soit on écrit que $\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}}$ peut s'exprimer comme la moyenne temporelle de $\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}}$ et $\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}}$ et on obtient un premier schéma de raccord possible s'écrivant sous la forme de système de trois équations (5.34).

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \right] = \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} = \mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \end{cases} \quad (5.34)$$

Soit on écrit la «formulation duale», c'est-à-dire qu'on exprime $\mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}}$ comme la moyenne temporelle de $\mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}}$ et $\mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}}$. On peut alors écrire un autre schéma de raccord sous la forme du système d'équations (5.35).

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{h}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \right] = \mathbf{h}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} = \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} \end{cases} \quad (5.35)$$

Dans [II-9], T. Fouquet démontre l'existence d'un grand nombre d'autres systèmes permettant de vérifier (5.32). La sélection du schéma de raccord à utiliser se fait après une étude de consistance de chacun des schémas, via une analyse par ondes planes.

Les systèmes (5.34) et (5.35) sont écrits sous forme condensée, par exemple le détail du système (5.34) permet d'écrire le schéma :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} = 2 \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^n \right] + \frac{\varepsilon \Delta x_f}{4 \Delta t_f} \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}} - \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n-\frac{1}{4}} \right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+1} + \mathbf{h}_{f_{I_0-\frac{1}{2}}}^n \right] + \frac{\varepsilon \Delta x_g}{4 \Delta t_g} \left[\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+1} + \mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \frac{\varepsilon \Delta x_f}{4 \Delta t_f} \left[\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{5}{4}} - \mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{1}{4}} \right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+1} + \mathbf{h}_{f_{I_0-\frac{1}{2}}}^n \right] + \frac{\varepsilon \Delta x_g}{4 \Delta t_g} \left[\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n-\frac{1}{2}} \right] \end{cases}$$

Supposons toutes les quantités connues jusqu'au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$. Les inconnues du système sont alors les quantités définies sur l'interface $\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}}$, $\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{5}{4}}$ et $\mathbf{e}_{g_{I_0}}^{n+\frac{3}{2}}$. En effet, $\mathbf{h}_{g_{I_0-\frac{1}{2}}}^{n+1}$ se calcule classiquement à l'aide des données aux temps t^n et $t^{n+\frac{1}{2}}$, tandis que, $\mathbf{h}_{f_{I_0+\frac{1}{4}}}^{n+1}$ s'exprime à l'aide du schéma de Yee en fonction des données et de l'inconnue du système $\mathbf{e}_{f_{I_0}}^{n+\frac{3}{4}}$.

Le système précédent est donc un système de 3 équations à 3 inconnues permettant de raccorder les deux grilles tout en conservant l'énergie et assurant par conséquent la stabilité.

5.2.2.4 Quelques mots sur la formulation variationnelle

T. Fouquet propose une généralisation de la méthode précédente en deux dimensions d'espace. Le calcul des variations d'énergie dans chaque grille est relativement lourd mais faisable. Remarquons cependant que ces calculs sont présentés uniquement dans le cas où le domaine FDTD est coupé en deux avec la grille grossière à gauche et la grille fine à droite. La limite de cette méthode pour le passage en trois dimensions est la complexité des calculs des variations d'énergie. C'est pourquoi Fouquet et Joly ont ensuite étendu leur procédé à un formalisme éléments finis plus abstrait permettant de s'affranchir de ces calculs laborieux.

- **Le problème modèle continu**

Comme dans le cas 1D, le volume \mathcal{V} est décomposé en deux sous domaines \mathcal{V}_g et \mathcal{V}_f tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_g \cup \mathcal{V}_f = \mathcal{V} \\ \mathcal{V}_g \cap \mathcal{V}_f = \Sigma_{int} \end{cases}$$

Σ_{int} représente la surface réalisant l'interface entre les deux sous domaines. Pour l'instant Σ_{int} est quelconque, mais pour les applications FDTD, elle aura vocation à devenir un parallélépipède rectangle. On note par la suite, pour tout point M appartenant à Σ_{int} :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_g(M) & \text{ la normale entrante à } \Sigma_{int} \text{ au point M} \\ \mathbf{n}_f(M) & \text{ la normale sortante à } \Sigma_{int} \text{ au point M} \\ \mathbf{n}_g(M) & = -\mathbf{n}_f(M) \end{aligned}$$

Si Σ_{int} n'est qu'une surface fictive, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de discontinuité matérielle au niveau de cette surface, alors le système de Maxwell global peut être réinterprété comme deux sous systèmes de Maxwell couplés, écrits dans chacun des domaines \mathcal{V}_g et \mathcal{V}_f (voir systèmes (5.36) et (5.37)). Le couplage entre les deux sous systèmes intervient au niveau de l'interface Σ_{int} et permet la transmission des informations d'un domaine à l'autre (équation (5.38)).

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_g(M, t)) = \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{E}_g(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_g \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}_g(M, t)) = -\mu \cdot \partial_t \mathbf{H}_g(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_g \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_f(M, t)) = \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{E}_f(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_f \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}_f(M, t)) = -\mu \cdot \partial_t \mathbf{H}_f(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_f \end{cases} \quad (5.37)$$

Avec les conditions de continuité des traces tangentielles des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sur l'interface Σ_{int} :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_g(M, t) \times \mathbf{n}_g(M) = -\mathbf{H}_f(M, t) \times \mathbf{n}_f(M) & \forall M \in \Sigma_{int} \\ \mathbf{n}_g(M) \times (\mathbf{E}_g(M, t) \times \mathbf{n}_g(M)) = \mathbf{n}_f(M) \times (\mathbf{E}_f(M, t) \times \mathbf{n}_f(M)) & \forall M \in \Sigma_{int} \end{cases} \quad (5.38)$$

En introduisant la variable supplémentaire \mathbf{J} représentant le courant électrique surfacique parcourant la surface fictive Σ_{int} , qui n'est autre que la valeur commune des traces tangentielles de \mathbf{H}_g et \mathbf{H}_f sur l'interface, on peut réécrire le problème précédent sous forme de deux problèmes aux limites distincts, couplés à l'interface par une condition de continuité sur les composantes tangentielles de \mathbf{E}_g et \mathbf{E}_f .

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_g(M, t)) = \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{E}_g(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_g \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}_g(M, t)) = -\mu \cdot \partial_t \mathbf{H}_g(M, t) & \forall M \in \mathcal{V}_g \\ \mathbf{H}_g(M, t) \times \mathbf{n}_g(M) = \mathbf{J}(M, t) & \forall M \in \partial \mathcal{V}_g = \Sigma_{int} \end{cases} \quad (5.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_f(\mathbf{M}, t)) = \varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{E}_f(\mathbf{M}, t) \quad \forall \mathbf{M} \in \mathcal{V}_f \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}_f(\mathbf{M}, t)) = -\mu \cdot \partial_t \mathbf{H}_f(\mathbf{M}, t) \quad \forall \mathbf{M} \in \mathcal{V}_f \\ \mathbf{H}_f(\mathbf{M}, t) \times \mathbf{n}_f(\mathbf{M}) = -\mathbf{J}(\mathbf{M}, t) \quad \forall \mathbf{M} \in \partial\mathcal{V}_f = \Sigma_{int} \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Avec la condition de continuité de la composante tangentielle du champ \mathbf{E} sur l'interface Σ_{int} :

$$\mathbf{n}_g(\mathbf{M}) \times (\mathbf{E}_g(\mathbf{M}, t) \times \mathbf{n}_g(\mathbf{M})) = \mathbf{n}_f(\mathbf{M}) \times (\mathbf{E}_f \times \mathbf{n}_f(\mathbf{M})) \quad \forall \mathbf{M} \in \Sigma_{int} \quad (5.41)$$

Avec cette écriture, les systèmes (5.39) et (5.40) peuvent être résolus indépendamment moyennant la connaissance du courant électrique surfacique \mathbf{J} circulant sur Σ_{int} c'est-à-dire de la valeur de la composante tangentielle du champ, magnétique sur le bord. La valeur de \mathbf{J} est quant à elle déterminée de façon unique grâce à la relation de continuité (5.41).

- **La formulation variationnelle**

- Dans le sous domaine \mathcal{V}_g

Soit une fonction vectorielle test Φ_g indépendante du temps suffisamment régulière. Multiplions la première équation du système (5.39) par Φ_g et intégrons sur tout le volume \mathcal{V}_g .

$$\iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t)) \cdot \Phi_g(\mathbf{M}) \, d\tau = \varepsilon \cdot \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{E}_g(\mathbf{M}, t) \cdot \Phi_g(\mathbf{M}) \, d\tau \quad (5.42)$$

D'après l'identité vectorielle :

$$\operatorname{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad ,$$

on peut écrire, en utilisant aussi le théorème de la divergence, la formule d'intégration par partie suivante :

$$\iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t)) \cdot \Phi_g(\mathbf{M}) \, d\tau = \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\Phi_g(\mathbf{M})) \cdot \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \, d\tau - \iint_{\partial\mathcal{V}_g} \Phi_g(\mathbf{M}) \times \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \cdot d\Sigma$$

A priori le domaine \mathcal{V}_g est délimité par deux interfaces : la surface Σ_{int} le séparant de \mathcal{V}_f et une surface Σ_{ext} représentant ses limites externes. En faisant l'hypothèse d'espace ouvert, Σ_{ext} est repoussée à l'infini et on peut écrire que \mathbf{H}_g y est nul. L'intégrale sur le bord $\partial\mathcal{V}_g$ devient uniquement une intégrale sur Σ_{int} .

Comme il est d'usage dans l'écriture d'une formulation variationnelle, on cherche maintenant à exprimer l'intégrale de bord de l'équation précédente en fonction de la condition aux limites sur Σ_{int} . En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_{int}} \Phi_g(\mathbf{M}) \times \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \cdot d\Sigma &= \iint_{\Sigma_{int}} \Phi(\mathbf{M}) \times \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \cdot \mathbf{n}_g(\mathbf{M}) \, d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{n}_g(\mathbf{M}) \times \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \cdot \Phi_g(\mathbf{M}) \, d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma_{int}} -\mathbf{J}(\mathbf{M}, t) \cdot \Phi_g(\mathbf{M}) \, d\sigma \end{aligned}$$

Par définition, $\mathbf{J}(\mathbf{M}, t)$ est situé dans le plan tangent en \mathbf{M} à Σ_{int} . En marquant par l'indice t la composante dans le plan tangent et par l'indice n la composante selon la normale à ce plan, on peut écrire :

$$\mathbf{J} \cdot \Phi_{g|_{\Sigma_{int}}} = J_t \mathbf{t}_J \cdot \left(\Phi_{t|_{\Sigma_{int}}} \mathbf{t}_{\Phi_g} + \Phi_{n|_{\Sigma_{int}}} \mathbf{n}_g \right) = J_t \Phi_{t|_{\Sigma_{int}}} (\mathbf{t}_J \cdot \mathbf{t}_{\Phi_g}) = \mathbf{J} \cdot \left[\mathbf{n}_g \times \left(\Phi_{g|_{\Sigma_{int}}} \times \mathbf{n}_g \right) \right]$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\iint_{\Sigma_{int}} \Phi_g(\mathbf{M}) \times \mathbf{H}_g(\mathbf{M}, t) \cdot d\Sigma = - \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{J}(\mathbf{M}, t) \cdot [\mathbf{n}_g(\mathbf{M}) \times \Phi_g(\mathbf{M}) \times \mathbf{n}_g(\mathbf{M})] d\sigma$$

Ainsi, l'égalité (5.42) s'écrit finalement comme suit :

$$\varepsilon \cdot \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{E}_g \cdot \Phi_g d\tau - \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\Phi_g) \cdot \mathbf{H}_g d\tau = \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{J} \cdot [\mathbf{n}_g \times \Phi_g \times \mathbf{n}_g] d\sigma \quad (5.43)$$

Pour la deuxième équation de (5.39), on se contente de la multiplier par une autre fonction test vectorielle Ψ_g et de l'intégrer sans utiliser d'intégration par parties. En effet, comme la condition aux limites sur Σ_{int} ne concerne pas le champ \mathbf{E} , l'intégrale sur le bord issue de l'intégration par parties ne pourrait pas être exprimée en fonction de la condition aux limites. On obtient alors directement la relation (5.44).

$$\mu \cdot \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{H}_g \cdot \Psi_g d\tau + \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\mathbf{E}_g) \cdot \Psi_g d\tau = 0 \quad (5.44)$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwartz pour la norme $\mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$:

$$\forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g), \left| \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{f}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M}) d\tau \right| \leq \iiint_{\mathcal{V}_g} \|\mathbf{f}\|^2 d\tau \cdot \iiint_{\mathcal{V}_g} \|\mathbf{g}\|^2 d\tau ,$$

si deux fonctions vectorielles (\mathbf{f}, \mathbf{g}) de \mathcal{V}_g à valeurs dans \mathbb{R}^3 sont de carrés sommables (ie $\in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$) alors l'intégrale du produit $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ existe. Ceci implique que les intégrales écrites dans les relations (5.43) et (5.44) existent si :

- la fonction test Φ_g est choisie telle que $\Phi_g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$ et $\mathbf{rot}(\Phi_g) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$,
- la fonction test Ψ_g est choisie telle que $\Psi_g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$,
- $\mathbf{E}_g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{E}_g) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$,
- $\mathbf{H}_g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g)$.

L'espace fonctionnel dans lequel doit être choisi \mathbf{J} est plus compliqué d'après ce qu'on peut lire dans [II-9]. Mais grossièrement, on sent bien que la composante normale de $\mathbf{J}|_{\Sigma_{int}}$ doit être nulle puisqu'on l'a définie comme la trace de \mathbf{H} sur l'interface. De plus, $\mathbf{J}|_{\Sigma_{int}}$ doit au moins être dans $\mathcal{L}^2(\Sigma_{int})$. On dira par la suite que \mathbf{J} appartient à un certain espace fonctionnel $\mathcal{H}_J^{\Sigma_{int}}$. On notera classiquement $\mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_g}$ l'espace fonctionnel auquel appartient Φ_g et \mathbf{E}_g .

- Dans le sous domaine \mathcal{V}_f

En procédant de la même manière que précédemment, on trouve des relations équivalentes à (5.43) et (5.44) écrites dans le sous domaine \mathcal{V}_f .

$$\varepsilon \cdot \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{E}_f \cdot \Phi_f d\tau - \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{rot}(\Phi_f) \cdot \mathbf{H}_f d\tau = - \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{J} \cdot [\mathbf{n}_f \times \Phi_f \times \mathbf{n}_f] d\sigma \quad (5.45)$$

$$\mu \cdot \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{H}_f \cdot \Psi_f d\tau + \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{rot}(\mathbf{E}_f) \cdot \Psi_f d\tau = 0 \quad (5.46)$$

Avec les fonctions test Φ_f et Ψ_f choisies respectivement dans les espaces $\mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_f}$ et $\mathcal{L}^2(\mathcal{V}_f)$, et les champs \mathbf{E}_f et \mathbf{H}_f évoluant respectivement dans $\mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_f}$ et $\mathcal{L}^2(\mathcal{V}_f)$.

- Pour la condition de raccord

Nous devons aussi écrire la condition (5.41) de continuité de la trace tangentielle du champ \mathbf{E} sur l'interface sous forme variationnelle. Multiplions cette condition de raccord par une fonction test $\tilde{\mathbf{J}}$ suffisamment régulière et intégrons sur la surface Σ_{int} .

$$\iint_{\Sigma_{int}} \tilde{\mathbf{J}} \cdot [\mathbf{n}_g \times \mathbf{E}_g \times \mathbf{n}_g] d\sigma = \iint_{\Sigma_{int}} \tilde{\mathbf{J}} \cdot [\mathbf{n}_f \times \mathbf{E}_f \times \mathbf{n}_f] d\sigma \quad (5.47)$$

Les intégrales écrites dans (5.47) sont semblables aux intégrales sur le bord écrites dans (5.43) et (5.45). De plus, comme \mathbf{E}_f et \mathbf{E}_g sont respectivement dans les mêmes espaces fonctionnels que Φ_f et Φ_g , il apparaît naturel de choisir $\tilde{\mathbf{J}}$ dans le même espace fonctionnel que \mathbf{J} .

- Problème variationnel global

Tous ces développements permettent d'écrire le problème de transmission entre deux domaines sous forme du problème variationnel suivant :

Trouver $(\mathbf{E}_g, \mathbf{H}_g, \mathbf{E}_f, \mathbf{H}_f, \mathbf{J}) \in \mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_g} \times \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g) \times \mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_f} \times \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g) \times \mathcal{H}_J^{\Sigma_{int}}$ tels que

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{E}_g \cdot \Phi_g d\tau - \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\Phi_g) \cdot \mathbf{H}_g d\tau = \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{J} \cdot [\mathbf{n}_g \times \Phi_g \times \mathbf{n}_g] d\sigma, \quad \forall \Phi_g \in \mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_g} \\ \mu \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{H}_g \cdot \Psi_g d\tau + \iiint_{\mathcal{V}_g} \mathbf{rot}(\mathbf{E}_g) \cdot \Psi_g d\tau = 0, \quad \forall \Psi_g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_g) \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{E}_f \cdot \Phi_f d\tau - \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{rot}(\Phi_f) \cdot \mathbf{H}_f d\tau = - \iint_{\Sigma_{int}} \mathbf{J} \cdot [\mathbf{n}_f \times \Phi_f \times \mathbf{n}_f] d\sigma, \quad \forall \Phi_f \in \mathcal{H}_{rot}^{\mathcal{V}_f} \\ \mu \partial_t \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{H}_f \cdot \Psi_f d\tau + \iiint_{\mathcal{V}_f} \mathbf{rot}(\mathbf{E}_f) \cdot \Psi_f d\tau = 0, \quad \forall \Psi_f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V}_f) \end{cases} \quad (5.49)$$

Avec la condition de raccord :

$$\iint_{\Sigma_{int}} \tilde{\mathbf{J}} \cdot [\mathbf{n}_g \times \mathbf{E}_g \times \mathbf{n}_g] d\sigma = \iint_{\Sigma_{int}} \tilde{\mathbf{J}} \cdot [\mathbf{n}_f \times \mathbf{E}_f \times \mathbf{n}_f] d\sigma, \quad \forall \tilde{\mathbf{J}} \in \mathcal{H}_J^{\Sigma_{int}} \quad (5.50)$$

- **Eléments pour la discrétisation**

Nous avons détaillé dans le paragraphe précédent l'obtention du problème variationnel. Nous ne détaillerons pas dans ce document la discrétisation du problème, celle-ci est relativement bien détaillée dans [II-9], mais aussi dans [II-11] où F. Dadenot explicite point par point les discrétisations spatiales et temporelles, le choix des éléments finis, le calcul des matrices et l'obtention du schéma numérique 3D.

Brièvement, Fouquet et Joly utilisent les éléments finis classiques, H_{div} pour le champ électrique et H_{rot} pour le champ magnétique, avec condensation de masse, ce qui aboutit en fait au schéma de Yee sur des mailles cubiques. Pour l'inconnue auxiliaire \mathbf{J} sur l'interface, ce sont les éléments finis de Raviart-Thomas sur la grille grossière qui sont utilisés. L'écriture de la conservation de l'énergie électromagnétique permet de déterminer un schéma temporel pour la contrainte (5.50) assurant ainsi la stabilité du schéma.

5.2.3 Schémas pour la méthode FIT

5.2.3.1 Présentation de la méthode FIT

Nous présentons rapidement dans ce paragraphe le principe et les principaux résultats de la méthode FIT développée par les allemands Thoma et Weiland. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux articles [II–18] à [II–22].

- **Discrétisation spatiale**

Dans toute sa généralité, cette méthode peut s'appliquer sur des maillages non structurés avec des éléments hexaédriques [II–18], contrairement à la méthode FDTD classique dont l'utilisation est restreinte à des maillages cartésiens. On utilise en fait un couplet de maillage $\{\mathcal{G} - \tilde{\mathcal{G}}\}$, appelé maillage «Delaunay–Voronoi».

Le maillage primal \mathcal{G} découpe le volume de calcul \mathcal{V} en N_h hexaèdres $\{V_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$ tels que l'intersection de tous les V_i définit un ensemble de N_s surfaces $\{S_i\}_{1 \leq i \leq N_s}$. Ces surfaces S_i représentent l'ensemble des facettes du maillage \mathcal{G} . De la même façon on peut définir l'ensemble des arêtes $\{L_i\}_{1 \leq i \leq N_l}$ de \mathcal{G} comme étant l'intersection des S_i .

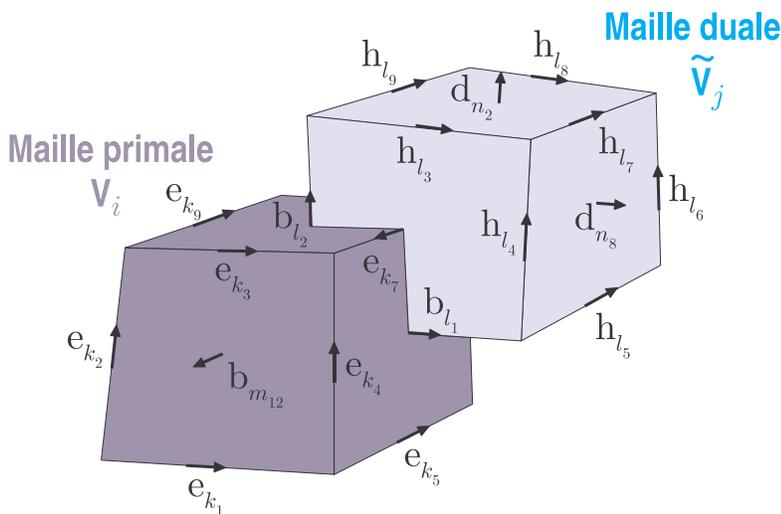


FIG. 5.12 – Maillage Delaunay–Voronoi

Le maillage dual $\tilde{\mathcal{G}}$ est défini de telle façon qu'à chaque cellule V_i du maillage primal est associée une cellule duale \tilde{V}_j comme sur la figure 5.12. En fait, le milieu de chaque arête du maillage dual est confondu avec le barycentre d'une facette du primal. La direction définie par cette arête est normale à la facette qu'elle traverse. Le contraire est aussi vrai, c'est-à-dire que le dual de $\tilde{\mathcal{G}}$ est \mathcal{G} .

Remarquons que nous avons supposé le maillage composé de mailles hexaédriques. Cependant, rien n'empêche d'avoir des mailles tétraédriques.

Le maillage ainsi défini permet une discrétisation simple des équations de Maxwell sous forme intégrale :

$$\begin{cases} \oint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \end{cases} \quad (5.51)$$

Avec \mathbf{B} le vecteur d'induction magnétique et \mathbf{D} le vecteur d'induction électrique ou de déplacement électrique. Dans la méthode FIT, les inconnues ne sont plus les composantes de champs elles-mêmes mais les tensions $\{\mathbf{e}\}_{1 \leq i \leq N_l}$ le long de chaque arête L_i de \mathcal{G} , les flux magnétiques $\{\mathbf{b}\}_{1 \leq i \leq N_s}$ à travers chaque facette S_i de \mathcal{G} :

$$\mathbf{e}_i = \int_{L_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad ; \quad \mathbf{b}_i = \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

et, ce que nous appellerons par analogie les tensions magnétiques $\{\mathbf{h}\}_{1 \leq i \leq N_l}$ le long de chaque arête \tilde{L}_i de $\tilde{\mathcal{G}}$, les flux électriques $\{\mathbf{d}\}_{1 \leq i \leq N_s}$ à travers chaque facette \tilde{S}_i de $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\mathbf{h}_i = \int_{\tilde{L}_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad ; \quad \mathbf{d}_i = \iint_{\tilde{S}_i} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

Sur chaque facette S_i du maillage primal (figure 5.13), orientée selon la normale $d\mathbf{s}$, la deuxième équation de (5.51) s'exprime simplement en fonction de \mathbf{b}_i et de 4 composantes du vecteur \mathbf{e} :

$$\forall i \in \{1 \dots N_s\}, \quad \mathbf{e}_{k_{i1}} + \mathbf{e}_{k_{i2}} + \mathbf{e}_{k_{i3}} + \mathbf{e}_{k_{i4}} = -\partial_t \mathbf{b}_i \quad (5.52)$$

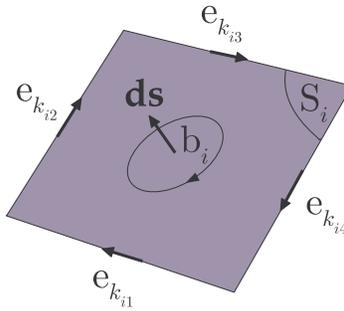


FIG. 5.13 – Facette S_i du maillage primal

On peut interpréter l'expression (5.52) de façon matricielle. En effet, en considérant la matrice creuse C de dimensions $N_s \times N_l$ avec quatre 1 par ligne, on obtient la relation (5.53).

$$\partial_t \mathbf{b} = -C \cdot \mathbf{e} \quad (5.53)$$

De la même manière, en écrivant la première équation de (5.51) sur chaque facette du maillage dual, et en considérant \mathbf{i} le vecteur composé des flux de \mathbf{J} à travers chaque facette de $\tilde{\mathcal{G}}$, on obtient la relation matricielle (5.54).

$$\partial_t \mathbf{d} = \tilde{C} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{i} \quad (5.54)$$

De même, les équations (4.4) sous forme intégrale peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{b} &= 0 \\ \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{d} &= \mathbf{q} \quad \text{avec } \mathbf{q}_i = \iiint_{\tilde{v}_i} \rho d\tau \end{aligned} \quad (5.55)$$

Remarquons que jusqu'à maintenant, aucune approximation n'a été faite. En effet, seul un changement de variable a été effectué dans les équations de Maxwell sous forme intégrale afin de les exprimer en fonction des inconnues $\{\mathbf{e}\}_i$, $\{\mathbf{b}\}_i$, $\{\mathbf{d}\}_i$ et $\{\mathbf{h}\}_i$ au lieu de \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} et \mathbf{H} .

Dans la discrétisation spatiale, l'approximation réside dans les relations existant entre \mathbf{e} et \mathbf{d} , ainsi qu'entre \mathbf{h} et \mathbf{b} , contrairement à la méthode FDTD pour laquelle les approximations proviennent des estimations des dérivées par des différences centrées. Weiland introduit des matrices D_ε et D_μ permettant d'avoir une représentation discrète de la permittivité et de la perméabilité du milieu contenu dans le volume de calcul. Ceci donne alors les relations matricielles suivantes :

$$\mathbf{b} = D_\mu \cdot \mathbf{h} \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = D_\varepsilon \cdot \mathbf{e} \quad (5.56)$$

Finalement, sur tout maillage de type Delaunay–Voronoi, on peut faire correspondre, à chaque équation analytique de Maxwell sous forme intégrale, son équation équivalente écrite sous forme matricielle. Le tableau (5.1) récapitule toutes ces correspondances.

Ecriture analytique	Equivalence matricielle
$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\partial_t \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\partial_t \mathbf{b} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}$
$\oint_{\partial \tilde{S}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \partial_t \iint_{\tilde{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\tilde{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$	$\partial_t \mathbf{d} = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{i}$
$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\mathbf{S} \cdot \mathbf{b} = 0$
$\oiint_{\partial \tilde{V}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\tilde{V}} \rho d\tau$	$\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{q}$
$\mathbf{D} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{d} = D_\varepsilon \cdot \mathbf{e}$
$\mathbf{B} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{H}$	$\mathbf{b} = D_\mu \cdot \mathbf{h}$
$\mathbf{J} = \Sigma \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{i} = D_\sigma \cdot \mathbf{e}$

TAB. 5.1 – Correspondance entre écritures analytique et matricielle

- **Discrétisation temporelle**

Plusieurs types de discrétisations temporelles sont possibles [II-18, II-20]. Nous retiendrons ici uniquement le schéma classique saute-mouton en temps également utilisé dans la méthode FDTD. Ainsi, on obtient le schéma sous forme matricielle (5.57).

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{e}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t D_\varepsilon^{-1} \tilde{C} D_\mu^{-1} \cdot \mathbf{b}^n - \Delta t D_\varepsilon^{-1} \cdot \mathbf{i}^n \\ \mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n - \Delta t C \cdot \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.57)$$

5.2.3.2 Apport de la méthode FIT pour le raffinement de maillage

Le schéma que nous venons d'écrire est valable dans un cadre général du moment que le maillage utilisé a les bonnes propriétés. Cependant, en pratique, cette méthode est utilisée sur des maillages cartésiens réguliers ce qui revient à la même chose que la FDTD. On peut alors se demander ce que peut concrètement apporter cette méthode.

- **Propriétés des opérateurs matriciels**

Il existe trois relations fondamentales reliant les opérateurs matriciels C , \tilde{C} , S et \tilde{S} . Les opérateurs C et \tilde{C} étant les équivalents matriciels du rotationnel respectivement sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ et S et \tilde{S} les équivalents de la divergence, la relation analytique $\text{div}[\mathbf{rot}(\cdot)] = 0$, se traduit de façon matricielle par les relations (5.58).

$$\begin{aligned} SC &= 0 \\ \tilde{S}\tilde{C} &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Cette relation assure la conservation de la charge par le schéma. La dualité entre le maillage primal et le maillage dual se traduit matriciellement par le fait que C et \tilde{C} sont des opérateurs adjoints, ce qui donne la troisième relation fondamentale :

$$\tilde{C} = C^T \quad (5.59)$$

La combinaison des équations (5.58) et (5.59) permet d'écrire l'équivalent matriciel de la relation analytique $\mathbf{rot}[\mathbf{grad}(\cdot)] = \mathbf{0}$:

$$\tilde{C}S^T = 0 \quad ; \quad C\tilde{S}^T = 0$$

- **Stabilité**

L'avantage du formalisme matriciel est qu'il permet d'utiliser la théorie de l'algèbre linéaire pour démontrer des propriétés sur le schéma de la méthode FIT. Ainsi, on peut montrer algébriquement que la méthode FIT conserve l'énergie discrète :

$$\mathcal{W}_{tot}^n = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{e}^T)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{d}^{n+\frac{1}{2}} + (\mathbf{h}^T)^n \cdot \mathbf{b}^n \right]$$

La démonstration de ce résultat [II–21] fait intervenir la relation (5.59). Ainsi, la formulation de la méthode FIT permet de mettre en évidence que la propriété de réciprocity (5.59) entre les opérateurs \mathbf{C} et $\tilde{\mathbf{C}}$ joue un rôle important dans la stabilité du schéma.

- **Règles pour le raffinement de maillage**

D’après ce qui vient d’être évoqué sur le principe et les propriétés matricielles de la méthode FIT, Weiland propose la mise en place d’un algorithme de raffinement reposant sur trois critères [II–19]. Les règles de construction suivantes seraient, selon lui, des conditions suffisantes de consistance et de stabilité du schéma de sous maillage :

- Règle n° 1 : les conditions de raccord écrites sur l’interface entre les deux grilles doivent toujours permettre d’écrire la méthode sous la forme des équations du tableau 5.1.
- Règle n° 2 : si la première règle est vérifiée, alors **les opérateurs \mathbf{C} et $\tilde{\mathbf{C}}$ doivent être adjoints**. Cette règle est indispensable étant donnée l’importance de l’égalité (5.59) dans la stabilité de la méthode FIT.
- Règle n° 3 : les relations (5.58) traduisant la conservation de la charge doivent aussi être vérifiées.

Ces conditions s’appliquent à des algorithmes de type FIT mais peuvent aussi servir pour la FDTD. En effet, pour des maillages cartésiens réguliers, les deux méthodes sont équivalentes. De plus, le schéma de Yee peut s’écrire sous forme matricielle [II–23] en considérant les vecteurs unidimensionnels suivants :

$$\mathbf{H} = \left[\{\mathbf{H}_x\}_{i,j,k}; \{\mathbf{H}_y\}_{i,j,k}; \{\mathbf{H}_z\}_{i,j,k} \right]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \left[\{\mathbf{E}_x\}_{i,j,k}; \{\mathbf{E}_y\}_{i,j,k}; \{\mathbf{E}_z\}_{i,j,k} \right]^T$$

Le schéma s’écrit alors, pour un milieu homogène sans perte et des pas spatiaux $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ constants égaux à $\Delta \ell$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta \ell} \mathbf{D}_h \cdot \mathbf{H}^n \\ \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}^n - \frac{\Delta t}{\mu \Delta \ell} \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

De la même manière que dans la méthode FIT, les opérateurs matriciels \mathbf{D}_h et \mathbf{D}_e sont adjoints.

5.3 Proposition d'une technique de raffinement

5.3.1 Choix de la méthode

Dans l'état de l'art sur les techniques de raffinement, nous avons répertorié trois grandes familles de méthodes. La première famille regroupe tous les algorithmes de raffinement par interpolations, pour laquelle les références bibliographiques sont nombreuses. Malgré la simplicité de mise en œuvre de ce type de méthodes, la stabilité n'est en général pas obtenue. La famille des schémas conservatifs, initiée par la thèse de T. Fouquet [II-9] assure cette stabilité. Enfin, nous avons classé à part les algorithmes développés dans les articles [II-18, II-19, II-20, II-21] par les allemands P. Thoma et T. Weiland pour la méthode FIT.

La logique voudrait que nous nous intéressions à des schémas de raffinement conservatifs. Cependant, comme nous avons pu le constater précédemment au paragraphe 5.2.2, la mise en place de tels schémas est relativement lourde et nécessite de solides connaissances en mathématiques appliquées, ce qui ne relève pas de nos compétences. De plus, l'INRIA¹ a acquis une expérience considérable sur ce type de schémas. En effet, les études et développements de schémas de raffinement conservatifs ont déjà donné lieu à deux thèses [II-9] et [II-10]. Or, notre but n'est pas de redécouvrir ce qui a déjà été très bien étudié dans ces travaux.

Notre objectif est de proposer un schéma de raffinement simple à mettre en œuvre, simple à implémenter dans les outils numériques FDTD dont disposent le CEA et le département OSA de Xlim² et qui soit suffisamment stable pour répondre à nos besoins. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à l'application à la FDTD des principes de la méthode dite AMR (Adaptive Mesh Refinement). Cette méthode développée par Berger et al. dans les années 80-90 [II-25, II-26, II-27] est largement utilisée aujourd'hui dans divers domaines tels que l'hydrodynamique, l'aérodynamique ou même l'astrophysique. La technique de raffinement que nous proposons par la suite est fondée sur les travaux de A. R. Zakharian et al. exposés dans l'article [II-24]. Les auteurs y présentent un algorithme de sous maillage par interpolations en 2D qui est en fait une adaptation de la méthode AMR pour la FDTD.

Dans l'article [II-24], l'algorithme présenté se limite au cas 2D et à un raffinement [1 : 2], nous nous proposons de le généraliser au cas 3D avec un taux de raffinement quelconque. Après une rapide présentation du principe de la méthode AMR, nous présentons l'algorithme de raffinement en 2D généralisé à un taux de raffinement quelconque. Puis, des tests numériques de consistance et de stabilité du schéma en fonction des interpolations utilisées sont présentés. Enfin, nous proposons une généralisation du schéma en 3D, toujours avec un taux de raffinement quelconque, associé aux interpolations ayant donné les meilleurs résultats en 2D.

¹Institut National de Recherche en Informatique et Automatique

²Le code Sophie pour le CEA et le code TRIDIMO pour Xlim

5.3.2 Principes de la méthode AMR

La méthode de raffinement de maillage adaptatif dite AMR a été initialement développée par Berger et al. pour la résolution numérique par une technique de type volumes finis³, de systèmes hyperboliques de lois de conservation (système (5.60)). Dans le système (5.60), \mathbf{U} désigne l'inconnue du système et le terme $\text{div}(\mathcal{F})$ permet de définir les «flux numériques».

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \text{div}(\mathcal{F}[\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)]) = 0 & \text{dans } \Omega \in \mathbb{R}^3 \\ B \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.60)$$

On utilise beaucoup cette méthode en mécanique des fluides, notamment pour suivre l'évolution de chocs [II-27]. L'interface du choc, définie par un fort gradient de pression, nécessite d'être maillée très finement. Le principe de l'AMR est d'adapter la finesse du maillage, à chaque pas de temps de l'algorithme, aux endroits où cela est nécessaire. Pour l'exemple précédent, on utilise dans l'algorithme un critère sur le gradient de pression pour le raffinement des mailles.

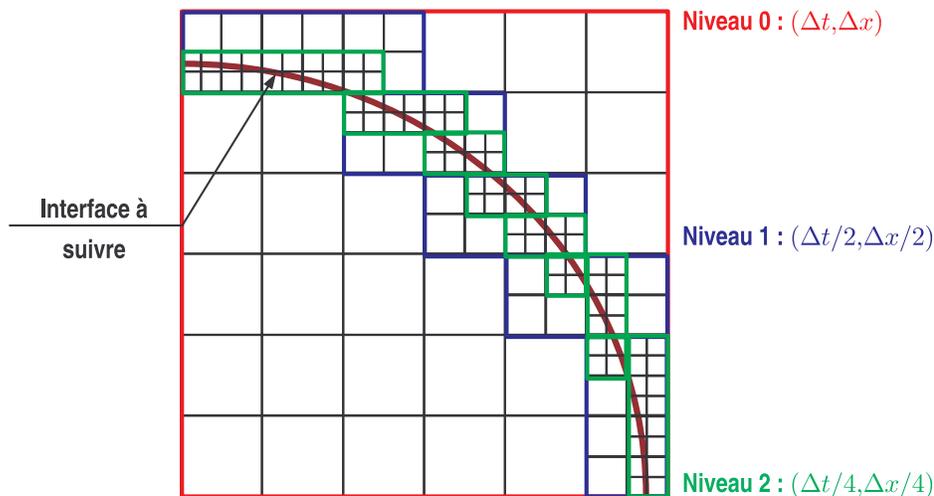


FIG. 5.14 – Hiérarchisation du maillage dans la méthode AMR

Dans la technique AMR, on peut utiliser une structure hiérarchisée de grilles cartésiennes parallélépipédiques qui est mise à jour à chaque pas de temps de l'algorithme. Comme l'illustre la figure 5.14, plus une grille est située dans un niveau élevé de la hiérarchisation, plus elle est maillée finement. Dans la technique AMR de Berger, on préfère garder le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ constant dans toute cette hiérarchisation. Ceci implique que si une grille est raffinée en espace avec un ratio r par rapport à la grille principale (niveau 0), on définit un pas de temps local pour cette grille, raffiné avec le même ratio r par rapport au pas de temps de la grille principale.

Nous décrivons par la suite brièvement le principe de l'algorithme AMR. Pour avoir une description détaillée, on pourra se référer aux articles [II-26] et [II-27]. Un pas de temps de l'algorithme

³La technique des volumes finis est équivalente à celle des différences finies sur un maillage cartésien.

peut être décomposé en 3 étapes. La première étape consiste à mettre à jour le maillage. Dans un premier temps, un «estimateur d'erreur» détermine quelles sont les mailles où la précision de la solution calculée au pas de temps précédent est insuffisante. Ces mailles sont alors candidates au raffinement. De la même façon, cette étape permet de déterminer les mailles ne nécessitant plus d'être raffinées. Ensuite, un «générateur de grilles» génère la structure de grilles hiérarchisées, en fonction du résultat précédent. Dans la seconde étape, les degrés de liberté sont mis à jour avec un solveur différences finies explicite classique. Cette mise à jour se fait progressivement dans la hiérarchie, de la grille du niveau le plus grossier au niveau le plus fin. Les inconnues situées aux interfaces de grilles de niveaux différents ne peuvent être calculées par différences finies. Elles sont alors interpolées à l'aide des inconnues de la grille du niveau inférieur. Enfin, dans une dernière étape, un «correcteur de flux» modifie a posteriori les flux «grossiers» aux interfaces entre grilles de niveaux hiérarchiques différents. Cette dernière étape permet d'assurer la continuité de ces flux.

5.3.3 Adaptation de l'AMR pour la FDTD

Le sous maillage spatio-temporel pour la méthode FDTD, comme il a été décrit au début de ce chapitre, a vocation à être utilisé uniquement pour le raffinement de détails au niveau de la géométrie. Dans le cas de la FDTD le sous maillage n'est donc pas adaptatif, autrement dit il n'évolue pas au cours du temps. La structure de grille hiérarchisée est donc une fois pour toutes construite avant la boucle temporelle. La première étape de l'AMR décrite précédemment ne sert alors qu'une seule fois. Elle consiste simplement en un problème de maillage qui peut être traité indépendamment et considéré comme une donnée d'entrée à la résolution numérique. Seules les étapes de mise à jour des champs, d'interpolations aux interfaces et de correction des flux sont utiles au développement d'un algorithme de sous maillage pour la FDTD.

Dans la méthode AMR décrite dans les articles [II-26] et [II-27], les inconnues du vecteur \mathbf{U} du système (5.60) sont évaluées au centre des mailles tandis que les flux \mathcal{F} et \mathcal{G} sont calculés aux faces. De cette façon, la FDTD s'adapte très bien à l'AMR en 2D. En effet, en mode 2D Transverse Electrique (TE) par exemple, la composante \mathbf{H}_z est évaluée au centre de la cellule de Yee et les composantes \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y sur les arêtes. Ces dernières jouent alors le rôle des flux. Cependant, en 3D, une adaptation directe de l'AMR est impossible puisque les composantes de champs sont évaluées aux arêtes pour \mathbf{E} et aux faces pour \mathbf{H} . Aucune composante n'est calculée au barycentre de la cellule, comme dans l'AMR.

La démarche suivie ici est de proposer un algorithme de raffinement de maillage de type AMR d'abord en 2D (voir paragraphe 5.3.4) en s'inspirant des résultats présentés dans l'article [II-24]. Une fois ce dernier testé et validé (voir paragraphe 5.3.5), une généralisation de l'algorithme en 3D est présentée au paragraphe 5.3.6.

5.3.4 Développement de la méthode en 2 dimensions

L'algorithme général, présenté sur la figure 5.2 page 103, s'applique parfaitement à l'adaptation de l'AMR pour la FDTD en 2D. La manière de procéder au premier échange d'informations de la grille grossière vers la grille fine est « libre ». En effet, dans le principe de la méthode AMR, les interpolations spatiales et temporelles des composantes de champs situées sur l'interface entre deux grilles de niveaux différents ne sont pas imposées. Cependant, l'échange d'informations en sens inverse, après le calcul dans la grille fine, représenté par une correction des champs \mathbf{E}_g et \mathbf{H}_g sur l'interface, est imposé par le principe de la méthode AMR. Ces corrections permettent de vérifier la loi de Faraday de façon globale sur tout le domaine de calcul $\mathcal{V} = \mathcal{V}_g \cup \mathcal{V}_f$ à tout instant discret multiple du pas de temps grossier Δt_g , c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 0, \left(\partial_t \iint_{\mathcal{V}} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \right)^{n+\frac{1}{2}} = - \left(\oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right)^{n+\frac{1}{2}}$$

5.3.4.1 Bref rappel sur le mode 2D TE

Dans la suite, on se place dans le cas d'un problème invariant selon une direction (Oz). Dans le cas du mode TE, il existe un repère (O, x, y, z) dans lequel le champ électromagnétique ne possède que trois composantes non nulles \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_y et \mathbf{H}_z indépendantes de la direction (Oz) :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_x(x, y, t) \mathbf{e}_x + \mathbf{E}_y(x, y, t) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_z(x, y, t) \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Pour simplifier les écritures, on considère un milieu homogène sans perte. En l'absence de charge et de courant, les équations de Maxwell projetées dans le repère (O, x, y, z) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_x \mathbf{E}_y(x, y, t) - \partial_y \mathbf{E}_x(x, y, t) = -\mu \partial_t \mathbf{H}_z(x, y, t) \\ \partial_y \mathbf{H}_z(x, y, t) = \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_x(x, y, t) \\ -\partial_x \mathbf{H}_z(x, y, t) = \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_y(x, y, t) \end{cases} \quad (5.61)$$

et le schéma de Yee de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \cdot \left[\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^n \right] \\ \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \cdot \left[\mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \right] \\ \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \cdot \left[\mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \cdot \left[\mathbf{E}_{y_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

avec la condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \left[c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right]^{-1} \quad (5.62)$$

5.3.4.2 Description de l'algorithme de raffinement de maillage

Plaçons nous dans la configuration de grilles de la figure 5.1 page 101. Le taux de raffinement, noté N_{raf} , peut cependant être quelconque (voir figure 5.15). Nous considérons donc par la suite une grille principale avec des pas spatiaux $(\Delta x_g, \Delta y_g)$, contenant une unique grille raffinée de pas spatiaux $(\Delta x_f, \Delta y_f)$ tels que $\Delta x_f = \frac{\Delta x_g}{N_{raf}}$ et $\Delta y_f = \frac{\Delta y_g}{N_{raf}}$.

Pour être cohérent avec les notations des chapitres précédents, on indice par g les inconnues correspondant à la grille grossière et par f celles correspondant à la grille fine. Pour reprendre la terminologie du paragraphe 5.2.1.1 page 105, on choisit la stratégie d'interpolation indirecte. La figure 5.15 représente une interface verticale. Les composantes de champs notées \mathcal{H}_{fz} et localisées au centre de «cellules fantômes⁴», sont d'abord calculées par des interpolations faisant intervenir des composantes \mathbf{H}_z connues. Les \mathbf{E}_{fy} tangents à l'interface sont ensuite calculés classiquement par la deuxième équation du schéma de Yee.

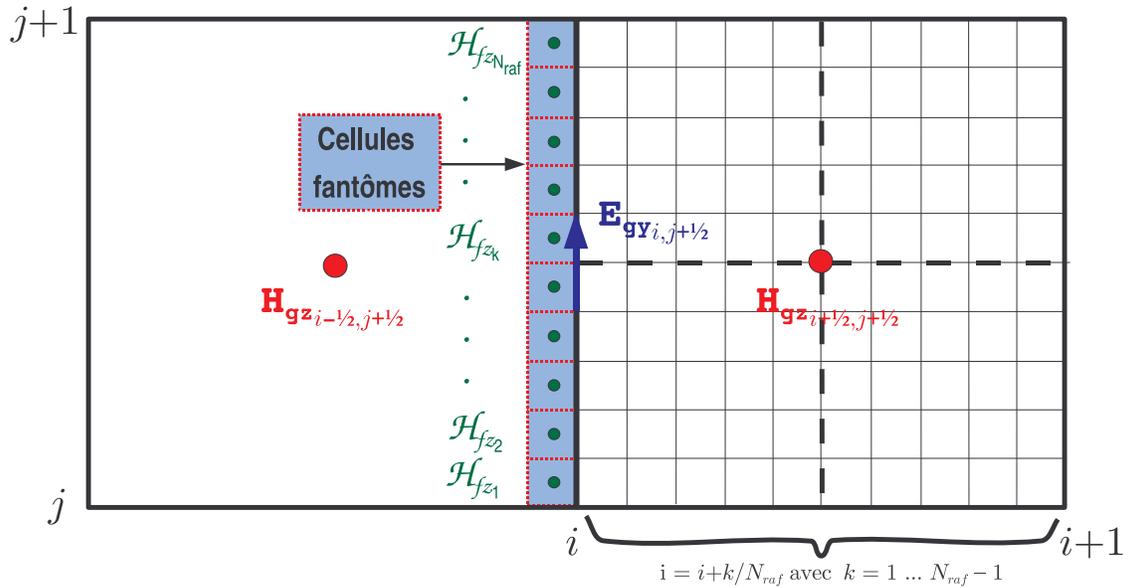


FIG. 5.15 – Raffinement de maillage quelconque de $[1 : N_{raf}]$

Rappelons que le raffinement est spatio-temporel. Nous utilisons donc un pas de temps local par grilles, Δt_g et Δt_f , choisis tels que $\Delta t_f = \frac{\Delta t_g}{N_{raf}}$, de façon à ce que les paramètres α_{CFL} soient identiques dans chacune des grilles. Ainsi pour faire une itération de l'algorithme, c'est-à-dire pour passer de la solution du problème du temps t au temps $t + \Delta t_g$, il sera nécessaire de faire une itération du schéma de Yee dans la grille grossière et N_{raf} itérations dans la grille fine. Nous décrivons par la suite le déroulement de la $n^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme, représentant le passage de la solution discrète du temps $t^n = n\Delta t_g$ au temps t^{n+1} . Supposons tous les champs connus aux temps antérieurs à $n\Delta t_g$ par les précédentes itérations de l'algorithme.

⁴Terminologie utilisée dans la méthode AMR classique

La mise à jour des champs dans les deux grilles peut être découpée en 4 étapes distinctes :

• **Etape 1 : itération du schéma de Yee dans la grille grossière**

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{gx_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{E}_{gx_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_g}{\varepsilon \Delta y_g} \cdot [\mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^n] \\ \mathbf{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t_g}{\varepsilon \Delta x_g} \cdot [\mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n] \\ \mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= \mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\Delta t_g}{\mu \Delta y_g} \cdot [\mathbf{E}_{gx_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{gx_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}}] - \frac{\Delta t_g}{\mu \Delta x_g} \cdot [\mathbf{E}_{gy_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}] \end{cases}$$

• **Etape 2 : interpolations spatiales des \mathcal{H}_{fz}^n**

Afin d'être en mesure de débiter la mise à jour des composantes de champ dans la zone raffinée, il est nécessaire de connaître les composantes de champs \mathbf{E}_y ou \mathbf{E}_x tangentes à l'interface. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la stratégie choisie consiste à interpoler spatialement les \mathcal{H}_{fz}^n avant de calculer les champs tangents. Deux types d'interpolations ont été testées : par la méthode du gradient et par la méthode de Lagrange. Le détail de ces interpolations est présenté dans le paragraphe suivant.

• **Etape 3 : itérations du schéma de Yee dans la grille fine**

Do p = 1 , Nraf

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{fx_{i+\frac{\beta}{2},j}}^{n+\frac{\beta}{2}} &= \mathbf{E}_{fx_{i+\frac{\beta}{2},j}}^{n-\frac{\beta}{2}} + \frac{\Delta t_f}{\varepsilon \Delta y_f} \cdot [\mathbf{H}_{fz_{i+\frac{\beta}{2},j+\frac{\beta}{2}}}^n - \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{\beta}{2},j-\frac{\beta}{2}}}^n] \\ \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{\beta}{2}}}^{n+\frac{\beta}{2}} &= \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{\beta}{2}}}^{n-\frac{\beta}{2}} - \frac{\Delta t_f}{\varepsilon \Delta x_f} \cdot [\mathbf{H}_{fz_{i+\frac{\beta}{2},j+\frac{\beta}{2}}}^n - \mathbf{H}_{fz_{i-\frac{\beta}{2},j+\frac{\beta}{2}}}^n] \\ \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{\beta}{2},j+\frac{\beta}{2}}}^{n+\beta} &= \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{\beta}{2},j+\frac{\beta}{2}}}^n + \frac{\Delta t_f}{\mu \Delta y_f} \cdot [\mathbf{E}_{fx_{i+\frac{\beta}{2},j+\beta}}^{n+\frac{\beta}{2}} - \mathbf{E}_{fx_{i+\frac{\beta}{2},j}}^{n+\frac{\beta}{2}}] - \frac{\Delta t_f}{\mu \Delta x_f} \cdot [\mathbf{E}_{fy_{i+\beta,j+\frac{\beta}{2}}}^{n+\frac{\beta}{2}} - \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{\beta}{2}}}^{n+\frac{\beta}{2}}] \end{cases}$$

$$n = n + \beta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{N_{raf}}$$

Interpolation temporelle des $\mathcal{H}_{fz}^{n+\beta}$

End Do

Les différentes interpolations temporelles testées des \mathcal{H}_{fz} au temps $t^{n+\beta}$ sont détaillées dans le paragraphe suivant.

• **Etape 4 : Correction des champs de la grille principale sur l'interface**

Les corrections des composantes de champs grossiers sur l'interface en fonction des composantes de champs de la grille fine sont calculées sur ce qui est fait classiquement dans la méthode AMR lors de l'étape de correction des flux. Dans le cas de la figure 5.15, les corrections effectuées portent sur les composantes : $\mathbf{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1}$ et $\mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1}$. Le détail de ces corrections est présenté dans le paragraphe suivant.

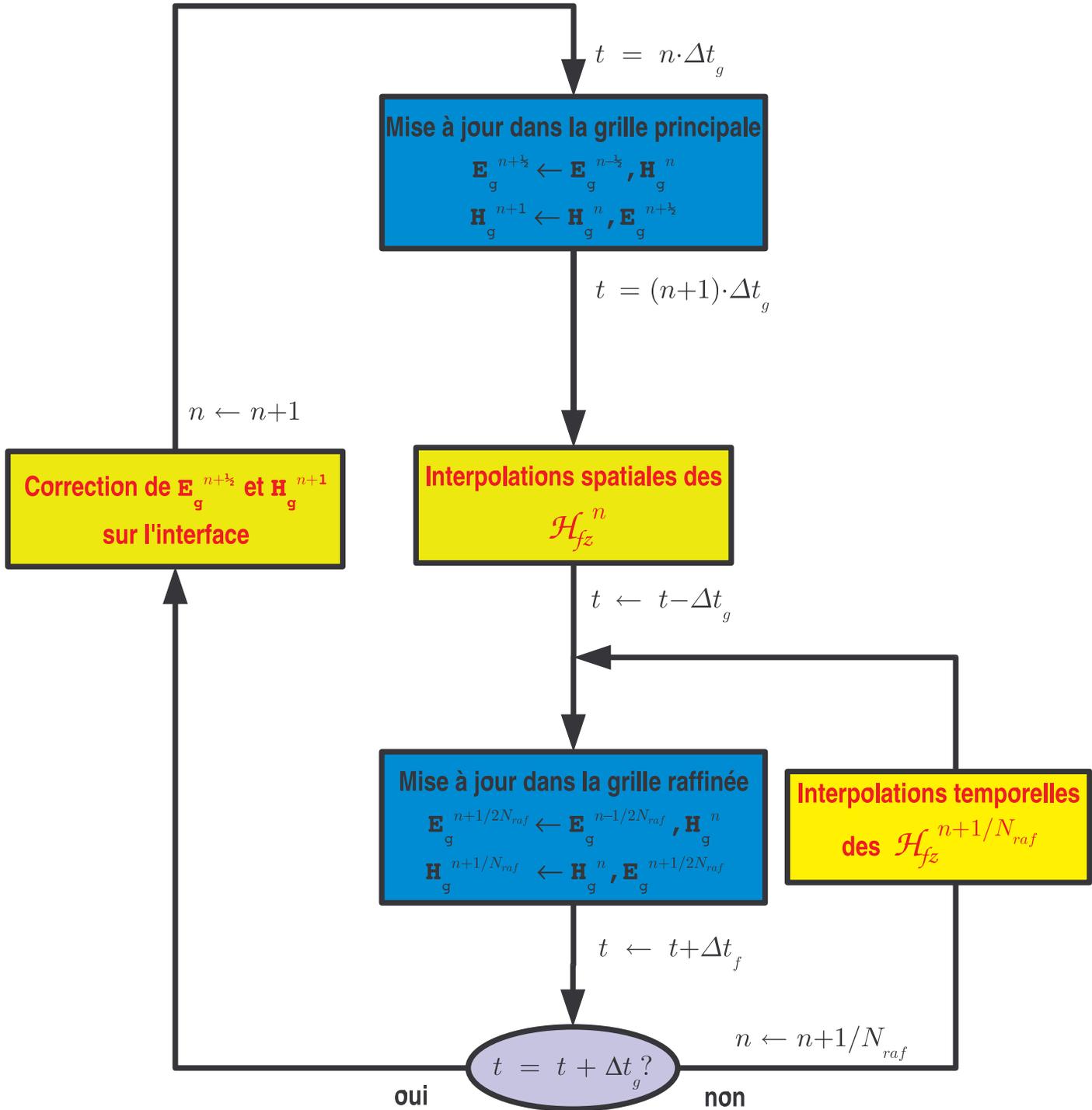


FIG. 5.16 – Algorithme général de la méthode

5.3.4.3 Détails des interpolations et des corrections testées

- Interpolations spatiales des \mathcal{H}_{fz}^n

Plaçons nous dans la configuration de la figure 5.15. L'interface verticale entre les grilles, située en $x_i = i \cdot \Delta x_g$, sépare la grille principale à gauche de la grille raffinée à droite. Sur chaque maille grossière ayant une arête sur l'interface, l'objectif est d'interpoler les N_{raf} composantes \mathcal{H}_{fz} en fonction de composantes \mathbf{H}_{gz} et \mathbf{H}_{fz} connues. Sur une maille grossière, on numérote les \mathcal{H}_{fz} de 1 à N_{raf} de bas en haut : \mathcal{H}_{fz_k} avec $k \in \{1 \dots N_{raf}\}$. On note par la suite $\beta = \frac{1}{N_{raf}}$ comme précédemment.

- Interpolation par la méthode du gradient 2D

Soient p et j_k les rationnels tels que la valeur de \mathcal{H}_{fz_k} représente la valeur du champs \mathbf{H}_z au point de coordonnées $(x_p = p \cdot \Delta x_g, y_{j_k} = j_k \cdot \Delta y_g)$. Ces rationnels peuvent s'écrire simplement en fonction des paramètres i, j, k et β . On peut alors écrire la relation suivante sur la maille grossière de la figure 5.15 centrée sur $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$:

$$\forall k \in \{1 \dots N_{raf}\}, \quad \mathcal{H}_{fz_k} = \mathbf{H}_z(x_p, y_{j_k}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p &= i - \frac{\beta}{2} \\ j_k &= j + \left[\frac{1}{2} + (k-1)\right] \cdot \beta \end{cases}$$

Le but est d'appliquer par la suite la méthode d'interpolation, exposée au paragraphe 5.2.1.2, utilisant un développement de Taylor 2D à l'ordre 1 (voir page 108). On choisit comme point de référence le point de coordonnées $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ centre de la maille grossière. En remarquant que

$$\forall k, \quad \begin{aligned} x_{i-\frac{1}{2}} - x_p &= \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) - p \right] \cdot \Delta x_g = \frac{\beta-1}{2} \cdot \Delta x_g = \delta_\beta \Delta x_g \\ y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j_k} &= \left[\left(j + \frac{1}{2}\right) - j_k \right] \cdot \Delta y_g = \left[\frac{1}{2}(1-\beta) + \beta(1-k) \right] \cdot \Delta y_g = \gamma_{\beta k} \Delta y_g \end{aligned} ,$$

on peut alors écrire le développement de Taylor 2D à l'ordre 1 suivant d'après la formule (5.4) du chapitre 5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{fz_k} &= \mathbf{H}_z \left[x_{i-\frac{1}{2}} - (x_{i-\frac{1}{2}} - x_p), y_{j+\frac{1}{2}} - (y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j_k}) \right] = \mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{2}} - \delta_\beta \Delta x_g, y_{j+\frac{1}{2}} - \gamma_{\beta k} \Delta y_g) \\ &\simeq \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} - \delta_\beta \Delta x_g \cdot [\partial_x \mathbf{H}_{gz}]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \gamma_{\beta k} \Delta y_g \cdot [\partial_y \mathbf{H}_{gz}]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En écrivant une approximation des dérivées partielles de \mathbf{H}_{gz} par les différences centrées :

$$\begin{aligned} [\partial_x \mathbf{H}_{gz}]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &\simeq \frac{\mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}}}{2\Delta x_g} , \\ [\partial_y \mathbf{H}_{gz}]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &\simeq \frac{\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}}}{2\Delta y_g} , \end{aligned}$$

on obtient finalement des formules d'interpolation faisant intervenir 5 composantes du champ \mathbf{H}_z évaluées sur la grille grossière :

$$\forall k, \quad \mathcal{H}_{fz_k} \simeq \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} - \frac{\delta_\beta}{2} \cdot \left[\mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}} \right] - \frac{\gamma_{\beta k}}{2} \cdot \left[\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}} \right]$$

- Interpolation par la méthode de Lagrange

On utilise ici la même méthode d'interpolation que celle présentée au paragraphe 5.2.1.2 page 109 pour un raffinement $[1 : 3]$, généralisée à un taux de raffinement quelconque de $[1 : N_{raf}]$. Pour interpoler les $(\mathcal{H}_{fz})_{1 \leq k \leq N_{raf}}$, on procède donc à deux séries d'interpolations de Lagrange successives dans la direction y puis dans la direction x .

On procède dans un premier temps aux interpolations selon y de la composante \mathbf{H}_z aux points intermédiaires M_k de coordonnées $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j_k})$ avec j_k rationnel défini dans le paragraphe précédent. On calcule pour cela, par la méthode de Lagrange, le polynôme \mathbf{P} de degré 2 de la variable y défini de la même façon qu'au paragraphe 5.2.1.2. Ce qui permet d'écrire une approximation de la valeur \mathbf{H}_z en chaque point intermédiaire :

$$\forall k \in \{1, \dots, N_{raf}\}, \quad \mathbf{H}_z(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j_k}) \simeq \mathbf{P}(y_{j_k})$$

Dans un second temps, on procède à N_{raf} interpolations de Lagrange dans la direction x pour estimer les \mathcal{H}_{fz_k} . Pour chaque interpolation, on utilise comme point de référence :

- le point intermédiaire M_k
- l autres points avec $1 \leq l \leq N_{raf}$, situés dans la grille fine, aux coordonnées (x_{i_m}, y_{j_k}) avec $(i_m)_{1 \leq m \leq l}$ défini de façon similaire à $(j_k)_{1 \leq k \leq N_{raf}}$, auxquels les valeurs de \mathbf{H}_z sont connues.

On calcule alors par la méthode de Lagrange, les polynômes \mathbf{Q}_k de degré l de la variable x définis par :

$$\forall k \in \{1, \dots, N_{raf}\}, \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_k(x_{i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{P}(y_{j_k}) \\ \mathbf{Q}_k(x_{i_m}) = \mathbf{H}_{fz_{i_m, j_k}} \quad 1 \leq m \leq l \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire finalement des approximations des \mathcal{H}_{fz_k} en écrivant :

$$\forall k \in \{1, \dots, N_{raf}\}, \quad \mathcal{H}_{fz_k} = \mathbf{Q}_k(x_p)$$

Le schéma d'interpolation obtenu fait donc intervenir 3 points dans la grille grossière et l points dans la grille fine.

- **Interpolation temporelle des $\mathcal{H}_{fz}^{n+\beta}$**

L'étape 3 de l'algorithme nécessite l'évaluation des champs \mathcal{H}_{fz} au temps $t^{n+\beta}$ après chaque itération du schéma de Yee dans la grille fine pour pouvoir débiter la suivante. En effet, les deux types d'interpolations spatiales présentées précédemment font intervenir le champ \mathbf{H}_z en des points de la grille principale. Or dans cette grille, la composante \mathbf{H}_z n'est évaluée qu'aux temps discrets multiples de Δt_g , ce qui n'est pas le cas de $t^{n+\beta}$. Nous présentons par la suite trois différentes approches possibles pour évaluer les $\mathcal{H}_{fz}^{n+\beta}$.

- Interpolation par la méthode du gradient 1D

Nous utilisons typiquement dans ce cas ce que nous avons appelé une «extrapolation directe du champ issu de l'interpolation spatiale» dans le paragraphe du 5.2.1.3 page 114. En effet, l'interpolation spatiale ne fournit une estimation du champ \mathcal{H}_{fz} qu'au temps t^n . Pour en avoir une estimation au temps $t^{n+\beta}$, il suffit par exemple d'écrire un développement de Taylor 1D en temps faisant intervenir \mathcal{H}_{fz} à des temps antérieurs à $t^{n+\beta}$. On obtient alors la schéma d'extrapolation temporel suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{fz}^{n+\beta} &= \mathcal{H}_{fz}^n + \beta \Delta t_g \cdot [\partial_t \mathcal{H}_{fz}]^n + \mathcal{O}(\Delta t_g^2) \\ &= \mathcal{H}_{fz}^n + \beta \Delta t_g \cdot \left[\frac{\mathcal{H}_{fz}^n - \mathcal{H}_{fz}^{n-\beta}}{\beta \Delta t_g} + \mathcal{O}(\Delta t_g) \right] + \mathcal{O}(\Delta t_g^2) \\ &= 2\mathcal{H}_{fz}^n - \mathcal{H}_{fz}^{n-\beta} + \mathcal{O}(\Delta t_g^2)\end{aligned}$$

Remarquons que si l'on désire exprimer $\mathcal{H}_{fz}^{n+\beta}$ en fonction de $(\mathcal{H}_{fz}^n, \mathcal{H}_{fz}^{n-\beta}, \mathcal{H}_{fz}^{n-2\beta}, \dots, \mathcal{H}_{fz}^{n-k\beta})$, il est toujours possible d'utiliser une interpolation de type Lagrange. On retrouve le schéma précédent par interpolation de Lagrange avec $k = 1$.

- Interpolations linéaires des $\mathbf{H}_{gz}^{n+m\beta}$ dans les formules d'interpolations spatiales

Nous utilisons typiquement dans ce cas ce que nous avons appelé une «extrapolation des champs dans la formule d'interpolation spatiale» au paragraphe 5.2.1.3 page 114. Comme la formule d'interpolation spatiale n'est pas directement applicable au temps $t^{n+\beta}$, cette approche consiste à interpoler temporellement tous les termes \mathbf{H}_{gz} intervenant dans le schéma de raffinement. Nous avons choisi ici d'interpoler linéairement ces termes en fonction des \mathbf{H}_{gz} estimés aux temps $t^n = n \Delta t_g$ et $t^{n+1} = (n+1)\Delta t_g$ ce qui donne :

$$\forall m \in \{1, \dots, N_{raf}\}, \quad \mathbf{H}_{gz}^{n+m\beta} \simeq \left(1 - \frac{m}{N_{raf}}\right) \cdot \mathbf{H}_{gz}^n + \frac{m}{N_{raf}} \cdot \mathbf{H}_{gz}^{n+1}$$

Pour l'implémentation informatique, on préfère écrire la relation précédente sous forme récursive soit :

$$\mathbf{H}_{gz}^{n_f+\beta} \simeq \mathbf{H}_{gz}^{n_f} + \frac{1}{N_{raf}} \cdot (\mathbf{H}_{gz}^{n_g+1} - \mathbf{H}_{gz}^{n_g})$$

Remarquons que la valeur de $\mathbf{H}_{gz}^{n_g+1}$ est issue de la première étape de l'algorithme et ne tient évidemment pas compte de la correction de cette valeur qui est faite dans la dernière étape.

- Interpolation «non naturelle» utilisée dans [II-24]

Le schéma d'interpolation temporelle utilisé dans [II-24] est similaire à la première méthode (gradient 1D) puisqu'on commence par écrire le même développement de Taylor :

$$\forall m \in \{1, \dots, N_{raf}\}, \quad \mathcal{H}_{fz}^{n+m\beta} = \mathcal{H}_{fz}^n + \frac{m}{N_{raf}} \cdot \Delta t_g \cdot [\partial_t \mathcal{H}_{fz}]^n + \mathcal{O}(\Delta t_g^2)$$

Cependant, contrairement à précédemment, les auteurs écrivent une approximation de la dérivée temporelle $[\partial_t \mathcal{H}_{fz}]^n$ écrite au centre de la maille grossière :

$$\forall k, \quad [\partial_t \mathcal{H}_{fz_k}]^n \simeq \left[\partial_t \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \right]^n \simeq \frac{\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta t_g},$$

ce qui donne au final le schéma d'extrapolation temporel suivant :

$$\mathcal{H}_{fz_k}^{n+m\beta} \simeq \mathcal{H}_{fz_k}^n + \frac{m}{N_{raf}} \cdot \left[\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^n \right],$$

ou bien sous forme récurrente :

$$\mathcal{H}_{fz_k}^{n_f+\beta} \simeq \mathcal{H}_{fz_k}^{n_f} + \frac{1}{N_{raf}} \cdot \left[\mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n_g+1} - \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n_g} \right]$$

On verra dans les tests numériques que cette erreur locale «volontaire» sur l'approximation de la dérivée $[\partial_t \mathcal{H}_{fz}]^n$ engendre de la diffusion numérique. Cela signifie qu'une partie de l'énergie est dissipée numériquement. Cette diffusion permet néanmoins de stabiliser le schéma.

- **Correction des champs grossiers sur l'interface**

- Correction des \mathbf{E}_g sur l'interface

Le but est de vérifier la loi de Faraday de façon globale sur tout le domaine de calcul $\mathcal{V} = \mathcal{V}_g \cup \mathcal{V}_f$ à tout instant discret multiple du pas de temps grossier Δt_g , c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 0, \quad \left(\partial_t \iint_{\mathcal{V}} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \right)^{n+\frac{1}{2}} = - \left(\oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.63)$$

Pour cela, on réestime \mathbf{E}_g sur l'interface. En effet, ce champ calculé lors de la première étape de l'algorithme peut être remis à jour par une interpolation à l'aide des champs \mathbf{E}_f calculés sur l'interface par les N_{raf} itérations du schéma de Yee dans la grille fine. La correction de type (5.64) du champ \mathbf{E}_g sur l'interface, notée \mathcal{E}_g , permet d'assurer l'égalité (5.63).

$$\mathcal{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{N_{raf}^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_{raf}} \sum_{m=1}^{N_{raf}} \mathbf{E}_{fy_{i,j_k}}^{n+(2m+1)\frac{\beta}{2}} \quad (5.64)$$

En fait, $\mathcal{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}$ est simplement une moyenne temporelle et spatiale des composantes $\mathbf{E}_{fy_{i,j_k}}$. Par exemple, la relation (5.64) s'écrit, pour un taux de raffinement [1 : 2], de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{1}{4}}}^{n+\frac{3}{4}} + \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{3}{4}}}^{n+\frac{1}{4}} + \mathbf{E}_{fy_{i,j+\frac{3}{4}}}^{n+\frac{3}{4}} \right\}$$

Rappelons que ce type de correction est exactement celui utilisé en général dans un algorithme AMR. De plus, on retrouve la même correction dans le «schéma conservatif en 2D pour la polarisation transverse électrique» proposé par Fouquet dans [II-9].

- Correction des \mathbf{H}_g une demie maille à l'extérieur de la grille fine

Dans l'algorithme AMR, la nouvelle estimation du flux sur l'interface entre les grilles, ici représentée par $\mathcal{E}_g^{n+\frac{1}{2}}$, est alors utilisée pour corriger la valeur de \mathbf{H}_{gz}^{n+1} voisins de l'interface dans la grille grossière. Pour cela, la mise à jour classique de la composante \mathbf{H}_z dans le schéma de Yee est utilisée. On note \mathcal{H}_{gz}^{n+1} ce champ corrigé.

$$\mathcal{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left[\mathcal{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{gy_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \left[\mathbf{E}_{gx_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{gx_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

Ce qui donne plus concrètement pour l'implémentation informatique :

$$\mathcal{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = \mathbf{H}_{gz_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left[\mathcal{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_{gy_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (5.65)$$

- Correction des \mathbf{H}_g à l'intérieur de la grille fine

Comme son nom l'indique, dans la méthode AMR, on se réserve le droit de modifier le maillage à chaque itération de l'algorithme, de façon à ce que les zones sous maillées soient positionnées aux endroits où règnent de forts gradients. Ainsi, une zone sous maillée au temps t peut se retrouver maillée grossièrement à l'instant $t + \Delta t$. C'est pourquoi, dans cette méthode, les différentes grilles sont en fait superposées les unes aux autres. A chaque itération, les inconnues calculées aux centres des mailles chevauchées par des mailles plus fines sont remplacées par la moyenne spatiale de toutes les inconnues centrées de la grille fine contenues dans chacune des mailles grossières (voir figure 5.17).

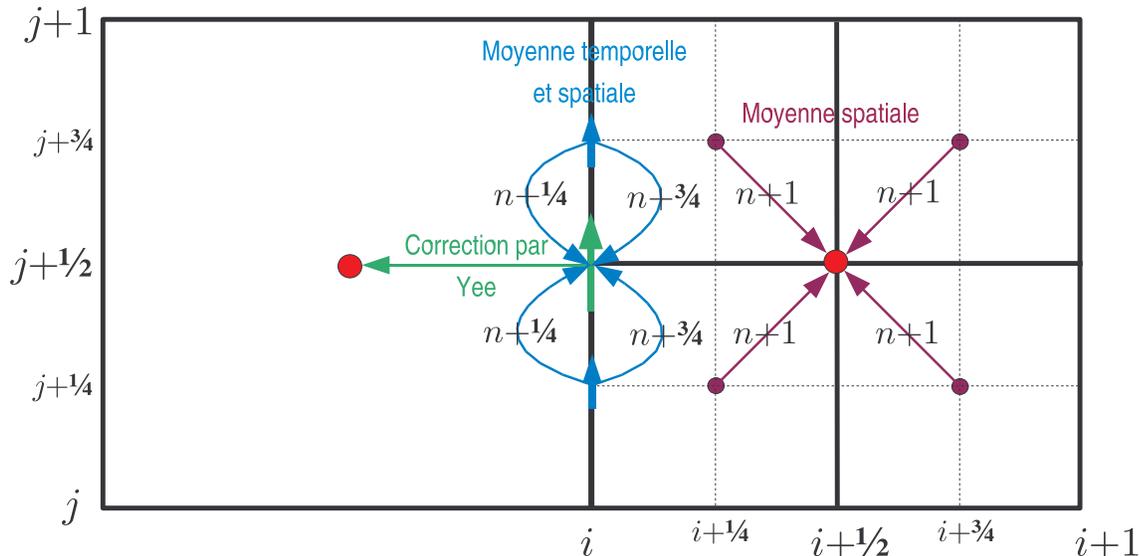


FIG. 5.17 – Correction des champs \mathbf{H}_{gz}^{n+1} et $\mathbf{E}_{gy}^{n+\frac{1}{2}}$ pour un taux de raffinement [1 : 2]

Dans notre cas, on ne considère qu'une seule zone raffinée contenue dans un volume 2D rectangulaire, que nous avons notée \mathcal{V}_f . La correction précédente se traduit donc par la relation :

$$\forall (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) \in \mathcal{V}_f, \quad \mathcal{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = \frac{1}{N_{raf}^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_{raf}} \sum_{m=1}^{N_{raf}} \mathbf{H}_{fz_{i_m,j_k}}^{n+1} \quad (5.66)$$

Par exemple cela donne pour un taux de raffinement $[1 : 2]$:

$$\mathcal{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{4},j+\frac{1}{4}}}^{n+1} + \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{3}{4},j+\frac{1}{4}}}^{n+1} + \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{4},j+\frac{3}{4}}}^{n+1} + \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{3}{4},j+\frac{3}{4}}}^{n+1} \right\}$$

Cependant, pour nos applications, les zones de sous maillage servant «uniquement» à mieux approcher les géométries, n'ont pas vocation à se déplacer dans le temps. La correction (5.66) apparaît plutôt inutile puisqu'elle ne sert pas réellement aux itérations suivantes.

5.3.5 Cas tests numériques

Nous étudions dans cette partie la qualité des différentes méthodes précédentes à l'aide de cas tests numériques simples. Dans un premier temps, nous nous penchons sur le phénomène de réflexion numérique engendré par la présence de la grille raffinée. Puis nous évaluons la robustesse des différents schémas possibles par une analyse numérique de la stabilité en temps long. Les différents types de tests réalisés sont présentés sur la figure 5.18.

5.3.5.1 Analyse de la réflexion numérique

- **Principe**

Quelle que soit la méthode de traitement de l'interface entre les deux grilles, cette dernière, bien que théoriquement fictive dans le cas continu, n'est pas totalement transparente dans le cas discret. En effet, lorsqu'une onde numérique incidente provenant de la grille grossière rencontre l'interface, une onde réfléchie dans la grille principale et une onde transmise dans la grille fine sont générées. Ainsi, on sent bien que plus on se rapproche du cas continu, c'est-à-dire une onde incidente totalement transmise à travers l'interface et une onde réfléchie nulle, plus la façon de gérer l'interface entre les grilles peut être jugée de bonne qualité. Les différents cas tests effectués consistent donc à générer une onde plane dans le maillage grossier et à évaluer la composante réfléchie par l'interface.

- **Méthode d'étude**

La méthode d'étude consiste à éclairer une zone sous maillée, ne contenant pas d'obstacle (figure 5.18), à l'aide d'une onde plane provenant de la grille principale, générée par une surface de Huygens. Cette onde ayant un angle d'incidence notée Φ_{inc} par rapport à l'axe (Ox) traverse

de part en part la zone raffinée. Les 4 interfaces délimitant cette zone génèrent alors un champ diffracté.

Le but est d'évaluer ce champ diffracté en plusieurs points d'observations P_i de façon à le comparer au champ de référence calculé en l'absence de la zone raffinée. On note $\mathbf{H}_{ref}(P_i, t)$ et $\mathbf{E}_{ref}(P_i, t)$ les variations dans le temps des composantes du champ électromagnétique de référence calculé aux points d'observation. La valeur du champ électromagnétique diffracté en ces points est donc donné par la relation :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{dif}(P_i, t) = \mathbf{H}_{ref}(P_i, t) - \mathbf{H}(P_i, t) \\ \mathbf{E}_{dif}(P_i, t) = \mathbf{E}_{ref}(P_i, t) - \mathbf{E}(P_i, t) \end{cases}$$

Le paramètre utilisé pour l'analyse est le rapport $R(P_i, t)$ entre le champ magnétique diffracté et le champ magnétique incident au même point (noté \mathbf{H}_{inc}), ou bien le même rapport avec le champ électrique si on préfère faire une analyse en champ \mathbf{E} . Le coefficient $R(P_i, t)$ peut être interprété comme un coefficient de réflexion numérique relatif à la zone sous maillée au point d'observation P_i . Une analyse fréquentielle en dB de ce paramètre est plus judicieuse, c'est pourquoi on tracera par la suite le coefficient $R'(P_i, f)$ défini par la relation :

$$R'(P_i, f) = 20 \cdot \log(|\hat{R}(P_i, f)|) = 20 \cdot \log \left[\frac{|\hat{\mathbf{H}}_{z_{ref}}(f) - \hat{\mathbf{H}}_z(f)|}{|\hat{\mathbf{H}}_{inc}(f)|} \right] \quad (5.67)$$

Nous avons noté $\hat{R}(P_i, f)$ la transformée de Fourier en temps du coefficient $R(P_i, t)$. Les variations au cours du temps du champ incident sont caractérisées par une gaussienne d'amplitude 377 V.m^{-1} pour le champ électrique qui donne un champ magnétique unitaire. La plus grande fréquence utile contenue dans le spectre de cette gaussienne est notée f_{max} . On choisit de discrétiser l'espace contenu dans la zone grossière avec 20 points par longueur d'onde minimale λ_{min} correspondant à f_{max} . On trace finalement les variations du paramètre R' en fonction de la fréquence pour $f \in [0, f_{max}]$ aux points d'observation choisis.

Les dessins *a* et *b* de la figure 5.18 représentent les deux types de tests effectués pour cette étude de réflexion numérique. Pour chaque algorithme, on évalue la réflexion pour des incidences normale ($\Phi_{inc} = 0^\circ$) et «oblique» ($\Phi_{inc} = 45^\circ$). Pour la première incidence, le point d'observation est le point noté P_4 sur la figure 5.18, pour la deuxième le point d'observation est P_2 .

• Résultats des tests numériques

Pour tous les cas tests qui vont suivre, on a choisi un domaine FDTD de $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Comme nous venons de l'écrire, la zone sous maillée est éclairée par une onde plane de profil gaussien de plus grande fréquence utile $f_{max} = 10 \text{ GHz}$, ce qui donne pour les pas spatiaux dans la grille principale : $\Delta x_g = \Delta y_g = \frac{c}{20 \cdot f_{max}} = 1.5 \text{ mm}$. La zone sous maillée, située au

centre du domaine de calcul, est un carré de dimensions $34 \Delta x_g \times 34 \Delta y_g$ soit $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Les dimensions de la surface de Huygens, produisant l'onde incidente, est pour l'instant de taille $46 \Delta x_g \times 46 \Delta y_g$ soit $7 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$. Il y a donc 6 mailles grossières entre la surface de Huygens et la grille raffinée. Les tests de réflexion numérique sont effectués en espace ouvert, simulé par 6 couches absorbantes PML de Bérenger.

Nous présentons, par la suite, la réflexion numérique observée pour les deux interpolations spatiales présentées au paragraphe 5.3.4.3 : interpolation type Lagrange et interpolation type Gradient 2D. Pour chacune de ces deux catégories d'algorithme on fait varier des paramètres tels que le taux de raffinement, le type d'interpolation temporelle utilisée, le nombre de points de base dans la grille fine servant aux interpolations de Lagrange, etc.

- Interpolations spatiales type Lagrange

D'après ce que nous pouvons observer sur les courbes des figures 5.19 à 5.22, l'algorithme offrant la réflexion numérique la plus faible est celui utilisant des interpolations spatiales de Lagrange avec 2 points de base dans la grille fine, couplées à des interpolations temporelles linéaires des $\mathbf{H}_{gz}^{n+\beta}$ (voir § 5.3.4.3 page 144). En effet, en se référant à la courbe a-figure 5.19, la réflexion numérique reste inférieure à -60 dB en incidence oblique jusqu'à 10 GHz ce qui correspond à $\Delta x_g = \Delta y_g = \frac{\lambda}{20}$. En incidence normale (courbe b-figure 5.19), la réflexion est supérieure d'environ une décade par rapport à l'incidence oblique.

Ainsi un échantillonnage spatial raisonnable en $\frac{\lambda_{\min}}{20}$ permet d'obtenir une réflexion numérique inférieure à -50 dB . Enfin, il semble important de remarquer sur la figure 5.19 que la réflexion numérique due à la grille fine est très peu sensible au taux de raffinement. Les courbes restent quasiment superposées pour des raffinements allant de $[1 : 2]$ à $[1 : 12]$.

Les résultats présentés sur la figure 5.20 ont été obtenus avec des interpolations temporelles que nous avons appelées «non naturelles» (voir § 5.3.4.3 page 145). Pour raffinement de $[1 : 2]$, la réflexion numérique est similaire à celle obtenue avec des interpolations temporelles linéaires des $\mathbf{H}_{gz}^{n+\beta}$. Cependant, la sensibilité au taux de raffinement est plus importante. En effet, la réflexion numérique augmente assez rapidement avec le taux de raffinement.

Les courbes de la figure 5.21 présentent l'évolution de la réflexion numérique en fonction du nombre de points de base dans la grille fine utilisés pour les interpolations de Lagrange. Comme précédemment, on remarque toujours une plus grande sensibilité lorsqu'on utilise l'interpolation temporelle «non naturelle». On peut cependant conclure que pour des interpolations temporelles linéaires, la réflexion numérique est légèrement dégradée lorsqu'un seul point de base est utilisé. Pour des interpolations temporelles «non naturelles», on a plutôt intérêt à utiliser 1 ou 2 points de base au maximum.

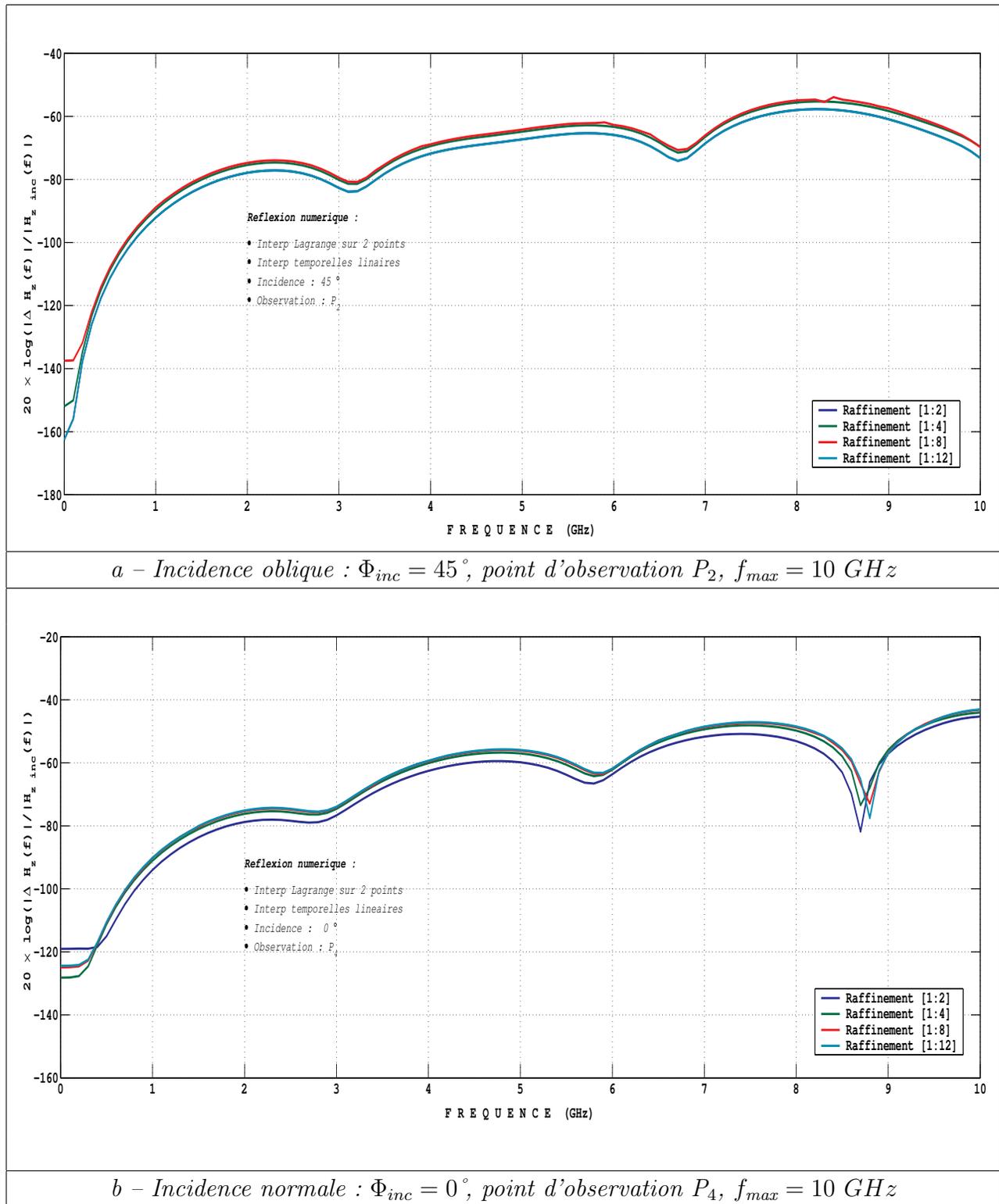
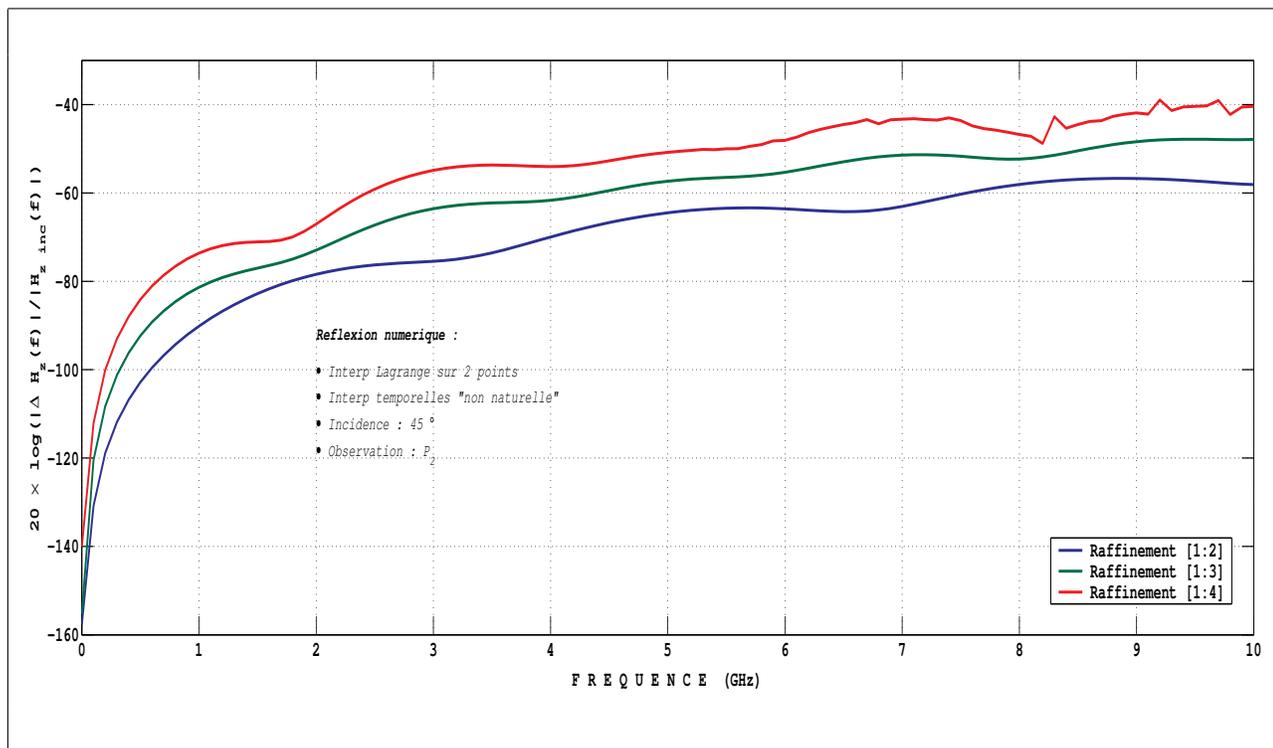
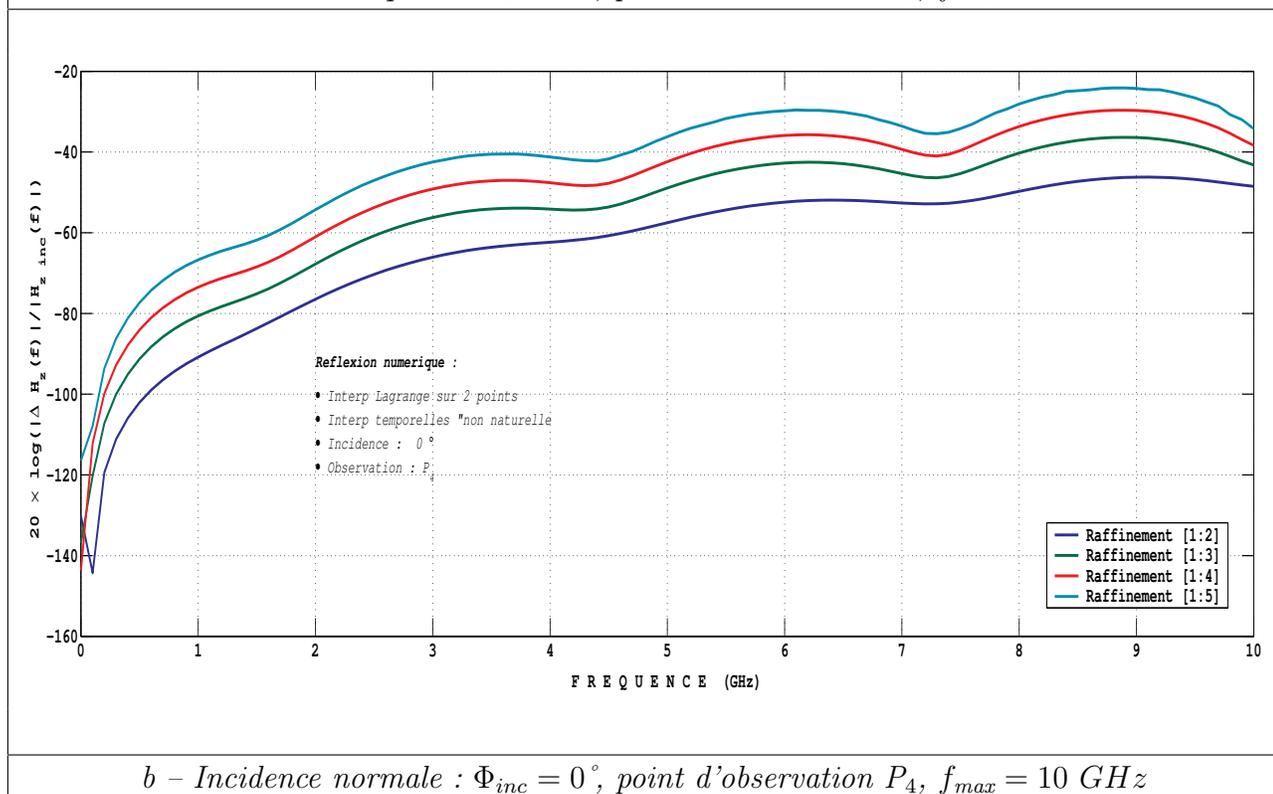


FIG. 5.19 – Evolution de la réflexion numérique en fonction du taux de raffinement. Méthode : Interpolation spatiale type Lagrange utilisant 2 points dans la grille fine + interpolation temporelle linéaire des $\mathbf{H}_{gz}^{n+\beta}$ dans le schéma d'interpolation spatiale.



a – Incidence oblique : $\Phi_{inc} = 45^\circ$, point d'observation P_2 , $f_{max} = 10 \text{ GHz}$



b – Incidence normale : $\Phi_{inc} = 0^\circ$, point d'observation P_4 , $f_{max} = 10 \text{ GHz}$

FIG. 5.20 – Evolution de la réflexion numérique en fonction du taux de raffinement. Méthode : Interpolation spatiale type Lagrange utilisant 2 points dans la grille fine + interpolation temporelle «non naturelle».

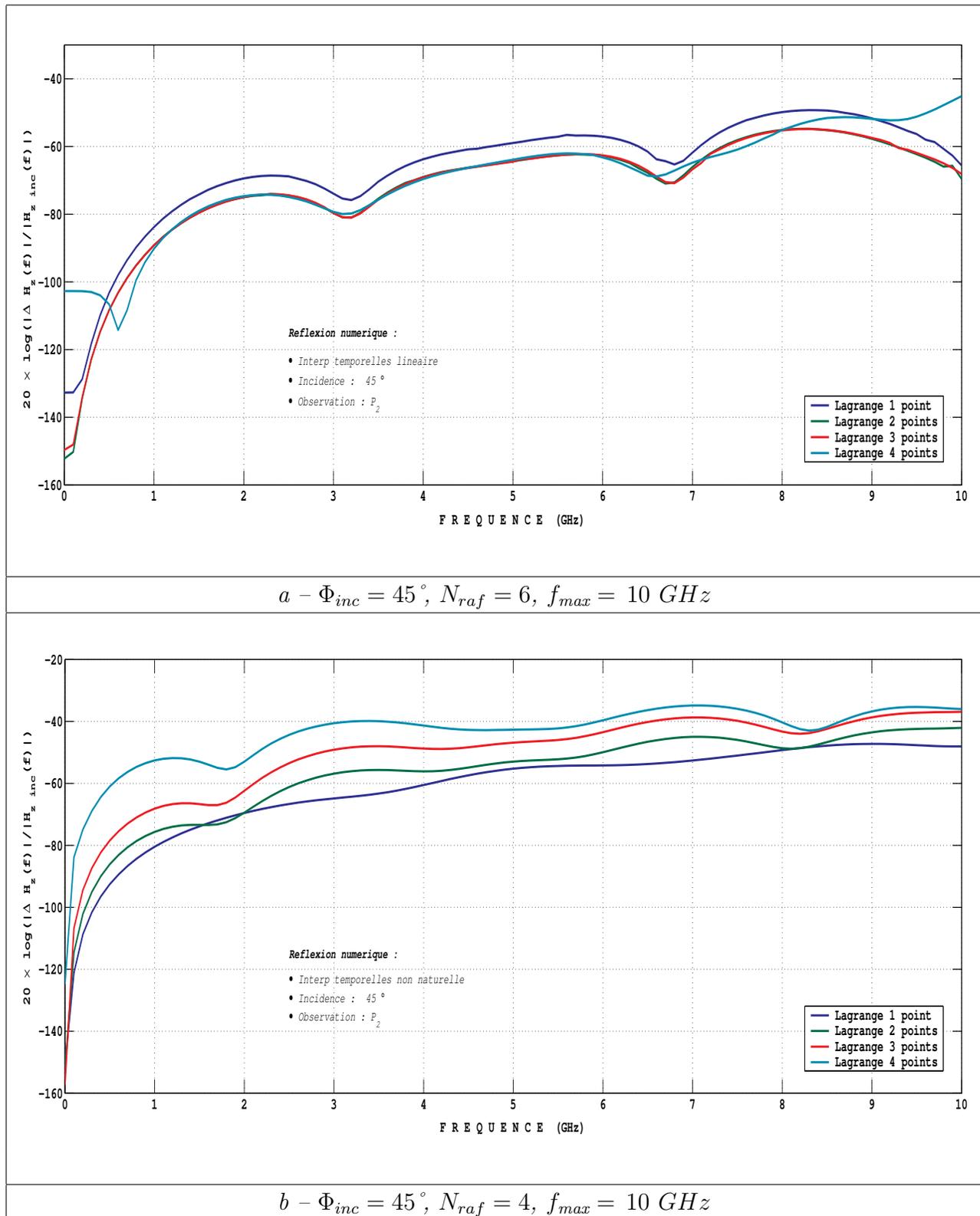


FIG. 5.21 – Evolution de la réflexion numérique en fonction du nombre de points de base utilisés dans l'interpolation de Lagrange. Méthode : Interpolation spatiale type Lagrange utilisant 1 à 4 points dans la grille fine + interpolation temporelle «non naturelle» ou linéaire.

- Interpolations spatiales type Gradient 2D

Les graphiques de la figure 5.22 présentent les résultats de réflexion numérique obtenus avec des interpolations spatiales de type Gradient 2D. La courbe a montre que la réflexion numérique est équivalente quelle que soit l'interpolation temporelle utilisée. Cependant, il apparaît que cette réflexion est moins perturbée pour des interpolations temporelles «non naturelles». Enfin, la courbe b montre toujours une certaine sensibilité de la réflexion numérique au taux de raffinement pour les interpolations temporelles «non naturelles». Cependant, cette sensibilité est moins prononcée que ce que nous avons pu observer sur les figures précédentes.

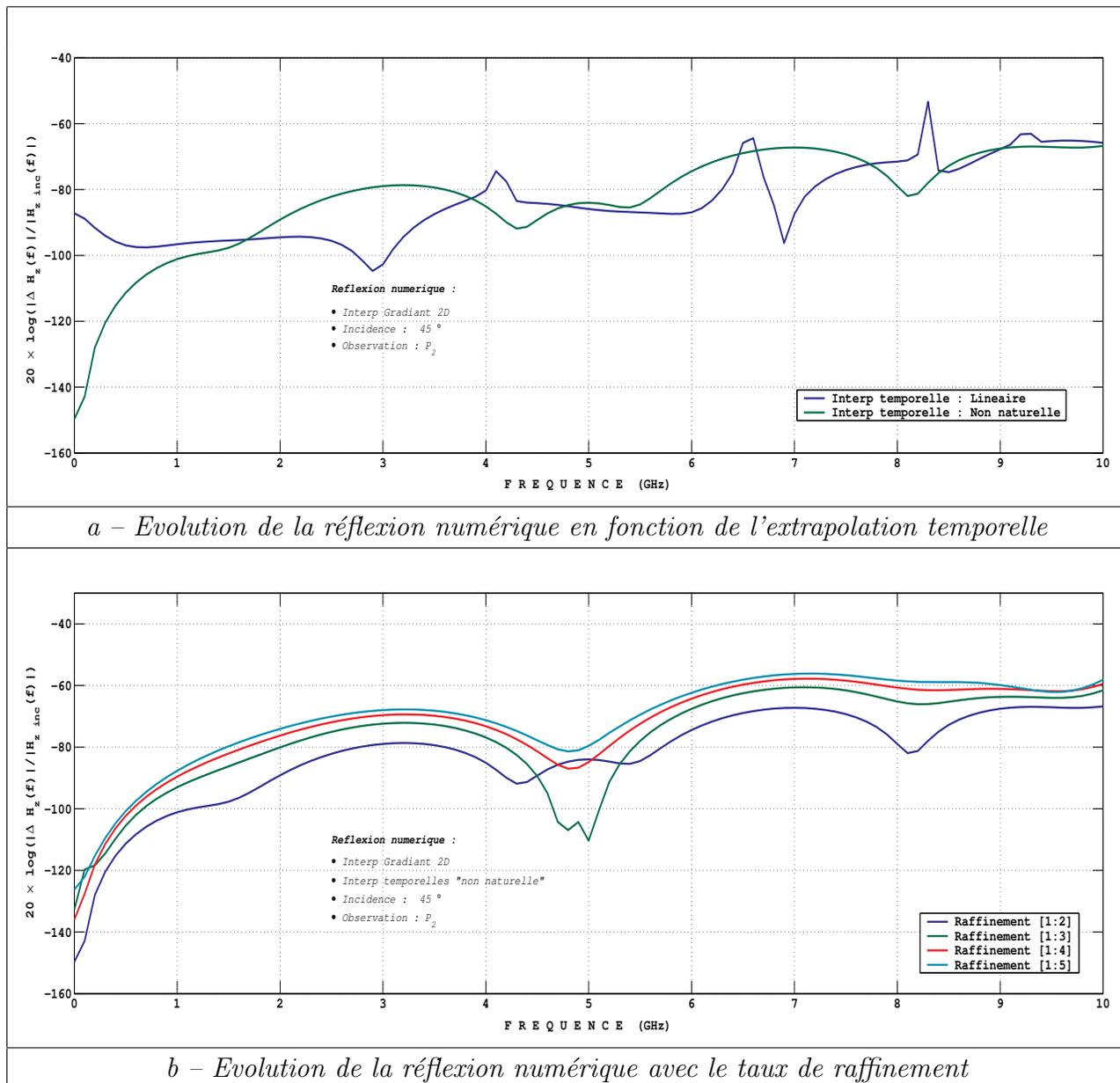


FIG. 5.22 – Réflexion engendrée par la méthode d'interpolation spatiale type Gradient 2D

5.3.5.2 Etude de la stabilité en temps long

- **Principe**

Au chapitre 4 page 95, nous avons défini ce qu'est la stabilité d'un schéma numérique. La stabilité du schéma de Yee est soumise à la condition CFL (4.10). Cependant on se rend compte qu'en général, cette condition n'est souvent plus valable lorsqu'on met en œuvre des algorithmes de sous maillage. En effet, les conditions de raccords effectués sur l'interface entre les grilles brisent la symétrie du schéma de Yee localement, ce qui le rend instable au bout d'un certain nombre d'itérations (voir figure 5.23).

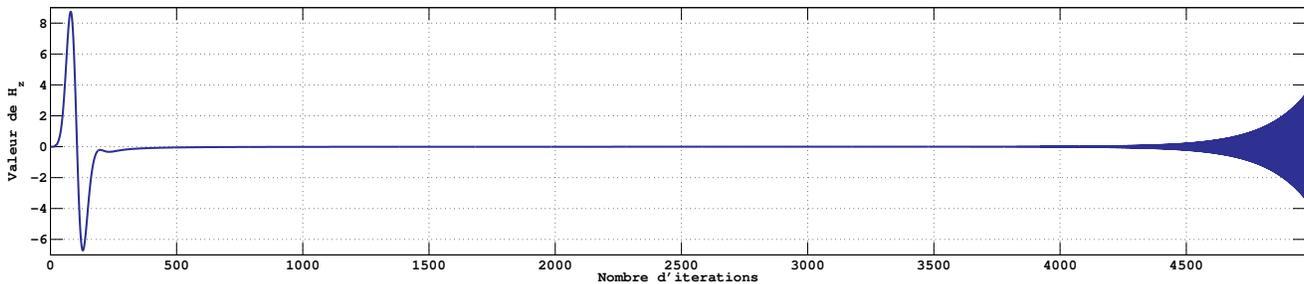


FIG. 5.23 – Illustration d'une instabilité en temps long

Dans certains cas, une diminution du paramètre α_{CFL} permet de repousser dans le temps l'apparition de l'instabilité voire d'obtenir la stabilité. Cependant, à part dans les travaux de T. Fouquet [II-9], poursuivis par J. Rodriguez [II-10], la stabilité des algorithmes de sous maillage n'est pas démontrée rigoureusement. Généralement, seuls des cas tests numériques attestent du bon comportement ou non d'une méthode. Cependant, il faut rester vigilant car quelques cas tests encourageants ne démontrent en rien la stabilité d'un algorithme de sous maillage. En effet, comme nous allons le voir par la suite, on peut observer une certaine stabilité pour un cas test et perdre cette stabilité avec un autre cas test en utilisant la même méthode.

- **Méthode d'étude**

Nous étudions ici la stabilité des différentes méthodes présentées dans ce chapitre uniquement de façon numérique. Nous effectuons deux catégories de cas tests.

- Cas tests en espace ouvert

La méthode d'étude consiste, comme précédemment, à éclairer une zone sous maillée, contenant cette fois-ci un obstacle métallique, à l'aide d'une onde plane provenant de la grille principale. L'espace ouvert est toujours simulé grâce à 6 couches PML. Dans ce type de cas test, la zone sous maillée n'est traversée de part en part qu'une seule fois par l'onde incidente. Cependant, pour notre application, l'intérieur de la chambre d'expériences du LMJ est un espace qui sera

modélisé avec des conditions aux limites de conducteurs parfaits sur ses bords. C'est pourquoi nous avons aussi testé la stabilité des différentes méthodes en espace confiné.

○ Cas tests en espace confiné

Dans ce type de cas tests, on remplace les conditions aux limites absorbantes précédentes par des conditions aux limites de conducteur parfait. Ainsi, ce test numérique apparaît plus exigeant que le précédent puisque la grille raffinée est traversée de multiples fois par l'onde incidente à cause des réflexions sur les bords du domaine. Une méthode apparaissant comme stable pour un cas test en espace ouvert peut s'avérer instable en espace confiné.

Exciter une cavité métallique avec une onde plane provenant de l'infini n'a pas de sens. C'est pourquoi nous n'utilisons pas de surface de Huygens. Nous nous contentons d'exciter le système localement sur un intervalle $I \times J$ du domaine de calcul, en rajoutant un second membre g à la première équation du système (5.61), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mu \partial_t \mathbf{H}_z(x, y, t) &= -\partial_x \mathbf{E}_y(x, y, t) + \partial_y \mathbf{E}_x(x, y, t) + g(x, y, t) \\ g(x, y, t) &= f(t) \cdot \delta_{I \times J}(x, y) \end{aligned},$$

avec f gaussienne dont la fréquence maximale utile contenue dans son spectre est toujours notée f_{\max} , et, $\delta_{I \times J}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $I \times J$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \delta_{I \times J}(x, y) = 1 & \text{si } (x, y) \in I \times J \\ \delta_{I \times J}(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) \notin I \times J \end{cases}$$

Numériquement cela se traduit par l'ajout d'une troisième étape au schéma de Yee :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= \mathbf{H}_{z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}^{n+1} + \alpha_{CFL} \cdot \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\mu}{\Delta t_{\max}} \cdot g_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

○ Critère de durée de stabilité

L'objectif des cas tests est d'évaluer la durée de stabilité de l'algorithme de raffinement exposé dans ce chapitre, associé aux différentes méthodes d'interpolations spatiales et temporelles possibles. Ceci permet de comparer les méthodes et de les classer selon leur temps de stabilité. Cependant, l'estimation de cette durée reste très subjective. En effet, comme on peut le voir sur la figure 5.24 qui représente la même courbe que celle de la figure 5.23, le temps «intuitif» de stabilité varie de 3500 itérations pour la courbe 5.24 à 4500 pour la courbe 5.23. Cet exemple illustre l'étroite dépendance l'estimation que nous venons de faire et l'échelle adoptée sur l'axe des ordonnées. Nous adoptons alors un critère commun d'évaluation de ces durées. Même si

ce dernier est qualitatif, il permet de comparer les méthodes testées sur le même cas. Nous proposons de définir cette durée comme étant le temps (ou le nombre d'itérations) au bout duquel le maximum du champ \mathbf{H}_z calculé sur tout le domaine devient supérieur au maximum du champ \mathbf{H}_z théorique sur le temps et l'espace.

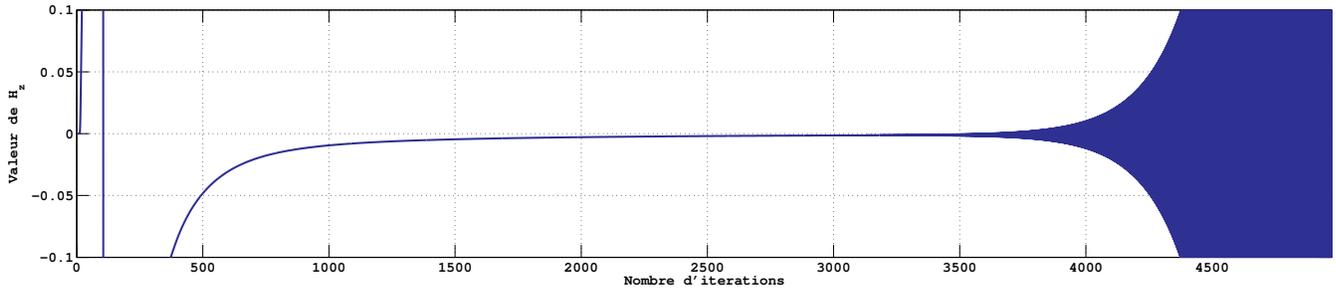


FIG. 5.24 – Illustration de l'estimation de la durée de stabilité

Informatiquement, le maximum théorique sur le temps et l'espace du champ \mathbf{H}_z est calculé grâce à un premier calcul effectué sans zone sous maillée. Pour s'assurer que la divergence du schéma est bien atteinte, on rajoute en pratique une marge de $\frac{3}{2}$. Ainsi, à chaque instant discret $n \cdot \Delta t_g$, on effectue le test suivant :

$$\max_{i,j} \left(\left| \mathbf{H}_{gz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \right|, \left| \mathbf{H}_{fz_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \right| \right) \geq \frac{3}{2} \cdot \max_{x,y,t} \left(\left| \mathbf{H}_z^{\text{th}}(x,y,t) \right| \right) ?$$

Si au bout de 3 millions d'itérations cette condition n'est pas vérifiée, on stoppe le calcul et on estime que la méthode est stable pour le cas test considéré.

- **Résultats des tests numériques**

Pour tous les cas tests qui vont suivre, les dimensions du domaine FDTD de la zone sous maillée et de la surface de Huygens restent identiques à celles utilisées dans le paragraphe 5.3.5.1. Que ce soit en espace ouvert ou en espace confiné, l'excitation reste de profil gaussien, mais de fréquence utile maximale $f_{\text{max}} = 5$ GHz, ce qui donne pour les pas spatiaux dans la grille principale : $\Delta x_g = \Delta y_g = \frac{c}{20 \cdot f_{\text{max}}} = 3$ mm. Cette diminution de f_{max} permet d'avoir des temps de calcul moins longs. L'objet métallique placé au centre de la grille raffinée est un cylindre à section circulaire de diamètre $24 \Delta x_f$.

Nous présentons par la suite les résultats de stabilité obtenus pour l'algorithme associé aux deux types d'interpolations spatiales Gradient 2D et Lagrange. Pour chacune de ces interpolations, nous faisons varier des paramètres tels que : α_{CFL} , le taux de raffinement, la taille de l'objet métallique ou bien sa forme géométrique, les dimensions de la zone sous maillée ou bien celles de la surface de Huygens, les interpolations temporelles, etc. La stabilité d'une méthode est alors illustrée par l'évolution de la durée de stabilité en fonction du paramètre α_{CFL} .

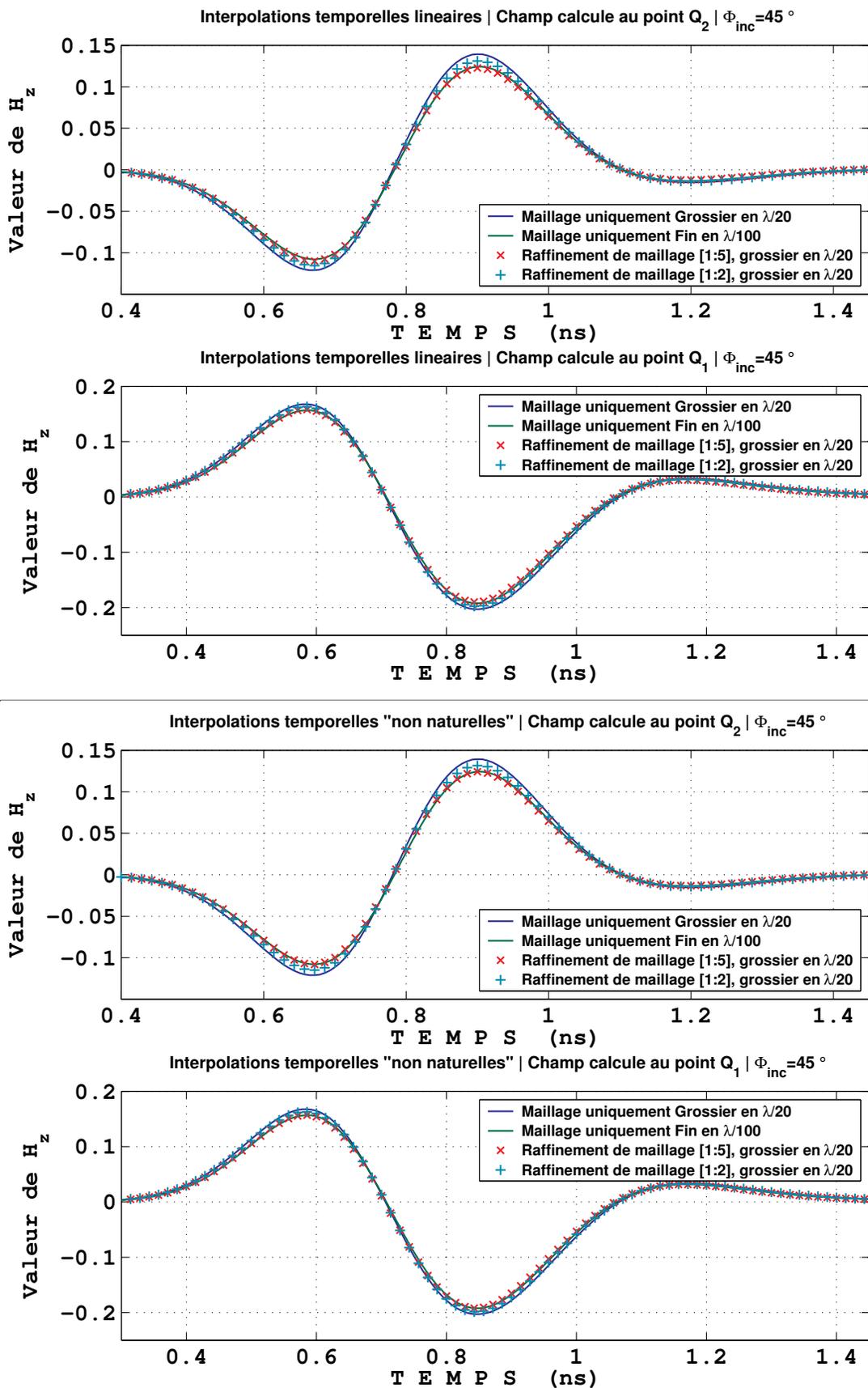


FIG. 5.25 – Champ diffracté en présence ou non d'une grille raffinée – méthode Gradient 2D

Avant de débiter les tests de stabilité, nous avons de nouveau vérifié la consistance des différentes méthodes. Pour cela, nous avons comparé le champ diffracté par le cylindre, calculé avec sous maillage au points Q_1 et Q_2 , par rapport au champ diffracté de référence (voir figure 5.25 pour la méthode Gradient 2D et 5.26 pour la méthode de Lagrange). Ce dernier est évalué par un calcul sans sous maillage avec une discrétisation en $\frac{\lambda}{100}$. On remarque que quelle que soit la méthode, le champ diffracté calculé avec une zone sous maillée est d'autant plus proche du champ de référence que le taux de raffinement est important. Ceci illustre bien l'intérêt du sous maillage puisque pour un résultat quasi identique à la référence, on gagne un facteur 9.5 en taille mémoire et un facteur 25 en temps calcul avec un taux de raffinement de [1 : 5].

- Interpolations spatiales type Gradient 2D

Les courbes de la figure 5.27 présentent l'évolution de la durée de stabilité d'une méthode en fonction du critère CFL utilisé. De manière générale, la stabilité augmente logiquement avec la réduction du paramètre α_{CFL} . Cependant, nous n'avons pas réussi à dépasser la barre des 1 million d'itérations avec ce type d'interpolation. Pour atteindre des temps de stabilité relativement élevés permettant de dépasser les 100 000 itérations, il est nécessaire de diminuer α_{CFL} largement au dessous de $\frac{1}{4}$. Cela est finalement peu intéressant, non seulement à cause des erreurs de dispersion engendrées, mais aussi à cause du nombre d'itérations à effectuer qui augmente considérablement pour atteindre un même temps «physique». En outre, plus le taux de raffinement augmente, plus la stabilité du schéma est dégradée. On peut donc considérer que les interpolations spatiales type Gradient 2D ne donnent pas de résultats satisfaisants au niveau de la stabilité. Nous pouvons cependant remarquer, sur la courbe c-figure 5.27, que des interpolations temporelles «non naturelles» permettent d'avoir un gain de stabilité important par rapport aux interpolations temporelles linéaires, mais pas suffisamment pour rendre la méthode satisfaisante.

Nous avons ensuite fait varier quelques paramètres pour évaluer leur impact sur la stabilité des méthodes. A part l'angle d'incidence de l'onde plane, les variations de tous les autres paramètres géométriques ont eu une incidence sur la stabilité. Ainsi, sur la figure 5.28, une section carrée du cylindre permet de repousser l'instabilité (courbe a). La courbe b montre l'influence du diamètre du cylindre lorsque la section est circulaire : plus le diamètre de ce dernier diminue plus l'instabilité apparaît tardivement. De la même manière que dans [II-11], on remarque que les durées de stabilité s'améliorent lorsque les dimensions de la zone sous maillée augmentent. Nous avons même remarqué une sensibilité de la stabilité à la taille de la surface de Huygens permettant d'illuminer la zone raffinée (courbe d).

Pour conclure sur cette méthode d'interpolation spatiale, la faible performance en terme de stabilité et la sensibilité au moindre paramètre géométrique en font un candidat à éliminer pour la suite.

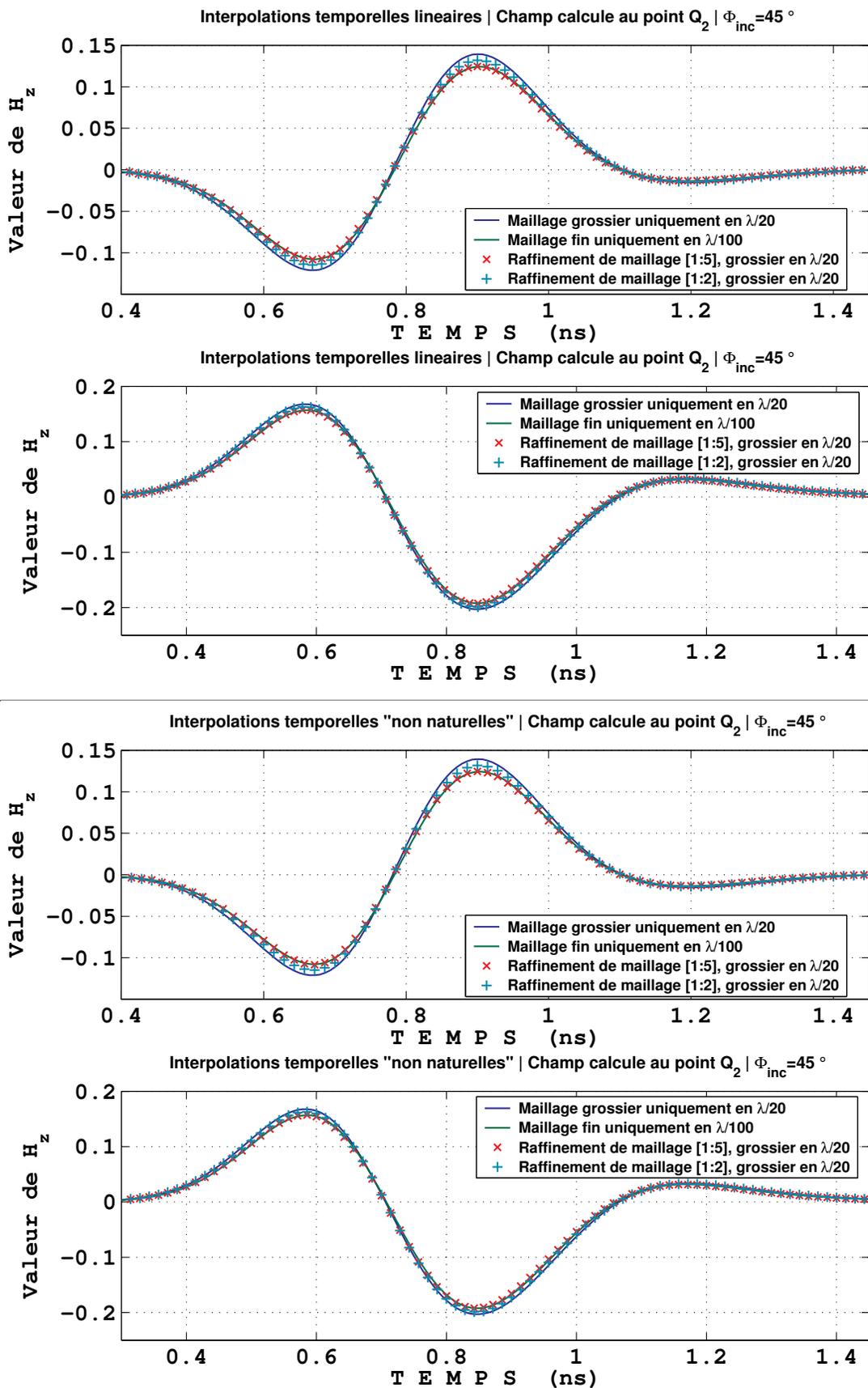


FIG. 5.26 – Champ diffracté en présence ou non d'une grille raffinée – méthode de Lagrange

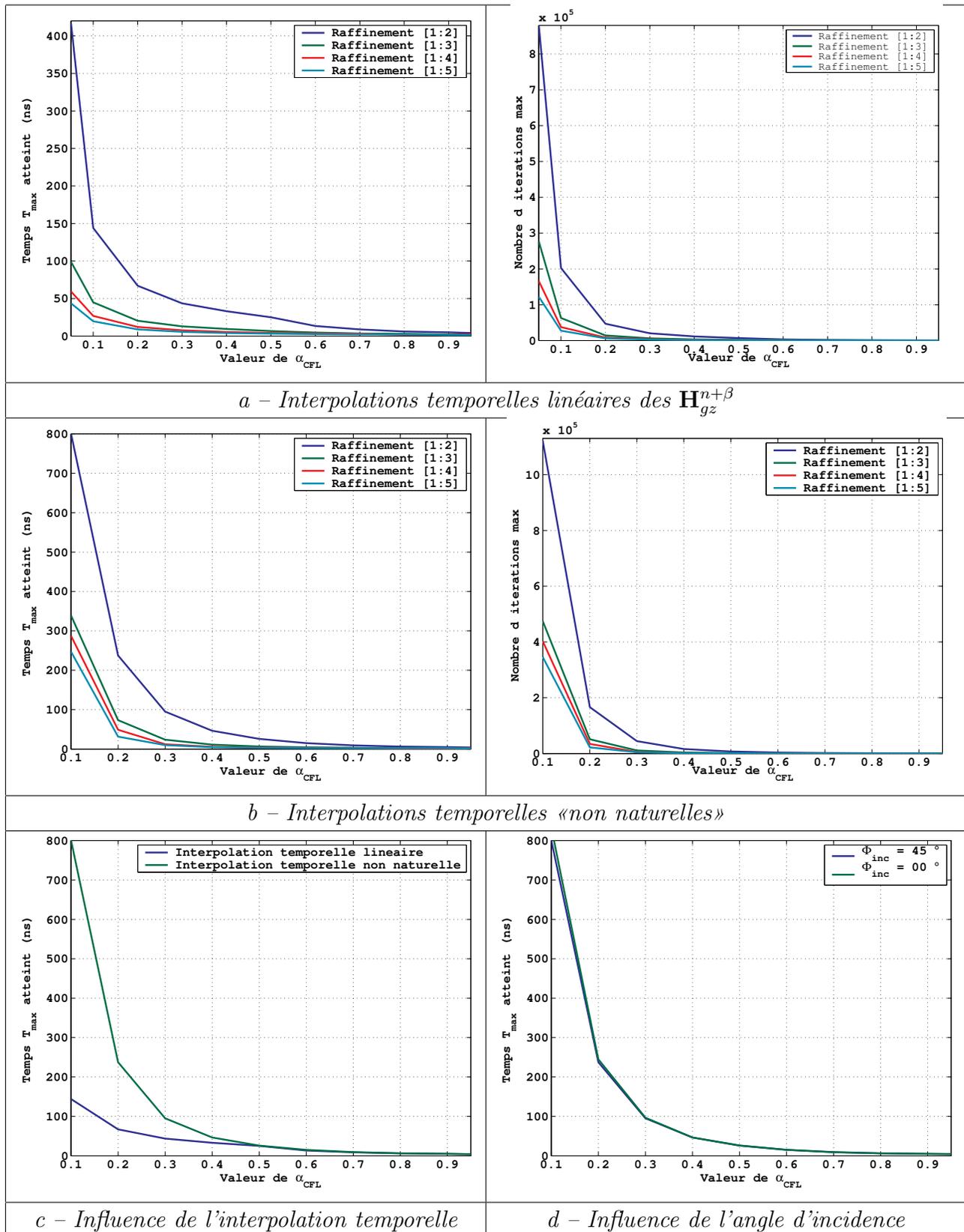


FIG. 5.27 – Evolution de la stabilité en fonction du critère CFL utilisé. Méthode : interpolations spatiales type Gradient 2D

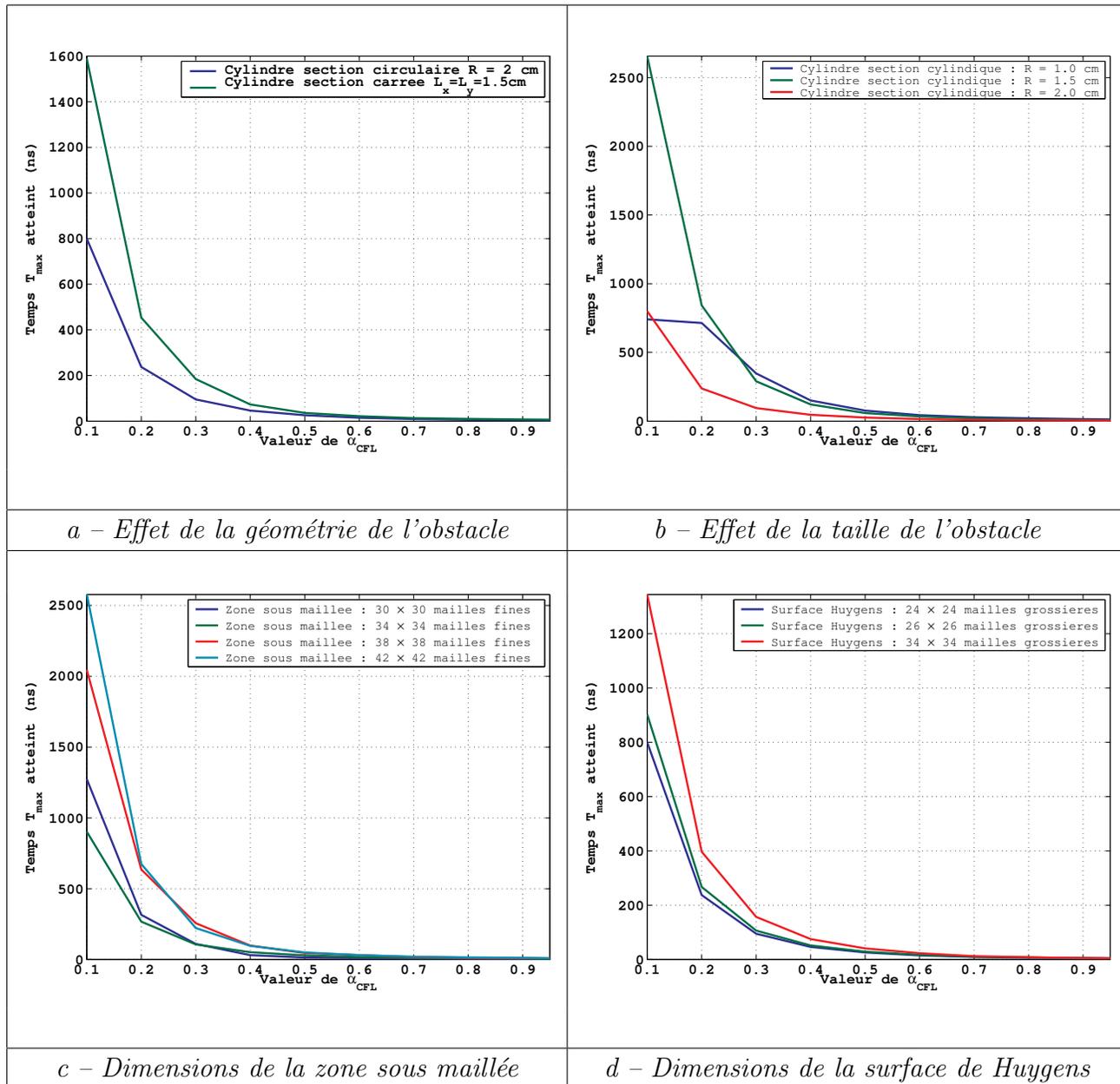


FIG. 5.28 – Evolution de la stabilité en fonction de paramètres géométriques. Méthode : interpolations spatiales Gradient 2D + interpolations temporelles «non naturelles»

Gardons cependant à l'esprit que les interpolations temporelles «non naturelles» permettent une augmentation non négligeable de la durée de stabilité. Les prochains cas tests permettront d'expliquer ce phénomène. Sachant que le cas test en espace confiné nous semble encore plus exigeant qu'en espace ouvert, nous n'avons pas jugé intéressant d'y soumettre l'algorithme couplé aux interpolations spatiales Gradient 2D.

- Interpolations spatiales type Lagrange

Nous avons dans un premier temps étudié l'association de ces interpolations spatiales aux interpolations temporelles linéaires. Pour les tests en espace libre, la courbe a–figure 5.30 montre, d'une part, que la combinaison de ces interpolations permet de gagner un facteur 5 à 10 sur la durée de stabilité, pour un raffinement [1 : 2], par rapport aux interpolations type Gradient 2D. Elle montre, d'autre part, de façon surprenante que la durée de stabilité est bien plus importante avec des taux de raffinements supérieurs à 2. Ainsi, les 3 millions d'itérations sont largement dépassées lorsque $\alpha_{CFL} \leq 0.8$ pour un raffinement [1 : 3], $\alpha_{CFL} \leq 0.9$ pour un raffinement [1 : 4] et $\alpha_{CFL} \leq 0.75$ pour un raffinement [1 : 5]. Ceci rend donc cette méthode très intéressante car pour des paramètres α_{CFL} proches de 1 et des forts taux de raffinement nous n'avons pas observé d'instabilité.

Après ces résultats encourageants, nous avons testé cette méthode en espace confiné. Dans ce cas, le champ calculé en un point ne revient pas à zéro mais oscille indéfiniment car le milieu est sans perte et le champ incident se réfléchit sur les bords du domaine. Une instabilité se traduit par la courbe de la figure 5.29 : l'enveloppe du signal oscillant augmente exponentiellement à partir d'un certain nombre d'itérations.

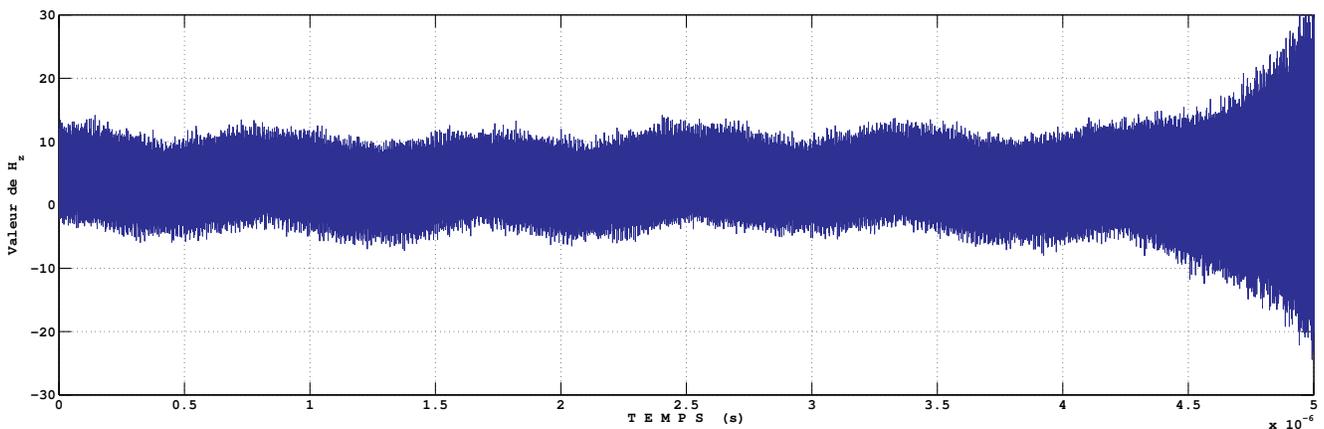


FIG. 5.29 – Instabilité en espace confiné

Les résultats de stabilité, présentés sur la courbe b–figure 5.30, sont très différents des résultats observés précédemment. Nous n'avons pas dépassé dans ce cas la barre des 3 millions d'itérations, à part dans un seul cas pour un raffinement [1 : 4] avec $\alpha_{CFL} = 0.75$. Cependant,

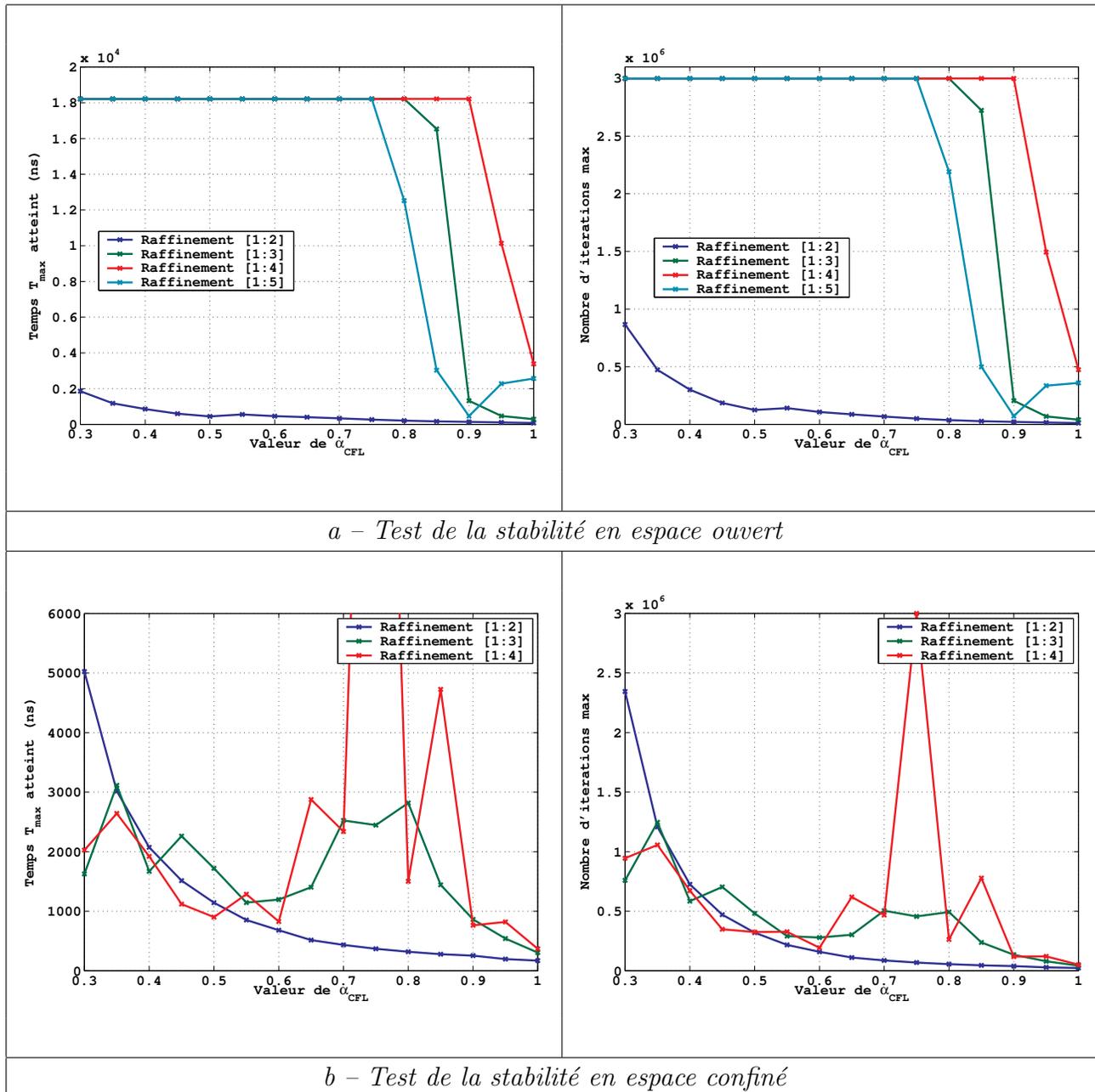


FIG. 5.30 – Evolution de la stabilité en espace ouvert puis en espace confiné. Méthode : interpolations spatiales de type «Lagrange 2 points» et interpolations temporelles linéaires.

curieusement pour ce même raffinement, on observe une importante chute de la durée de stabilité pour $\alpha_{CFL} \leq 0.75$, alors qu'en espace ouvert, lorsqu'on n'observait pas d'instabilité pour une valeur de α_{CFL} , on n'en observait pas non plus pour les valeurs de α_{CFL} inférieures. La stabilité se comporte comme prévu pour un raffinement [1 : 2], puisqu'elle augmente de façon exponentielle avec la diminution du critère C.F.L. Cependant, pour des raffinements plus importants, le comportement est beaucoup plus chaotique et difficile à interpréter.

Nous nous intéressons ensuite à l'influence de la présence de la grille raffinée sur la consistance du schéma. En effet, cette grille étant traversée de multiples fois par l'onde incidente, du fait des réflexions sur les bords, si des erreurs de consistance sont faites au niveau du traitement de l'interface entre les grilles, elles devraient être bien visibles après un certain temps de simulation. C'est pourquoi nous avons choisi de comparer sur la figure 5.31 l'évolution temporelle de la composante \mathbf{H}_{gz} au point Q_1 lorsque le domaine contient une grille raffinée ou non. On se rend compte sur la courbe b-figure 5.31 que sur les premières itérations, les signaux calculés avec ou sans sous maillage sont identiques. Cependant, sur la courbe c-figure 5.31, on observe, au bout d'un certain nombre d'itérations, l'effet de l'accumulation des erreurs faites au niveau de l'interface entre les grilles. Les courbes ne se superposent plus. Néanmoins, l'analyse modale faite sur la courbe d-figure 5.31 montre que ces erreurs ne sont pas suffisantes pour traduire de manière significative les fréquences de résonance de la cavité.

Dans un second temps nous avons étudié l'association des interpolations spatiales de type Lagrange aux interpolations temporelles «non naturelles». Sur les résultats des tests en espace ouvert, présentés sur les courbes a-figure 5.32, on observe un phénomène à seuil. Ceci signifie qu'il existe une valeur précise du paramètre α_{CFL} , noté α_{CFL}^{stab} , pour laquelle :

- le schéma diverge après très peu d'itérations lorsque $\alpha_{CFL} \geq \alpha_{CFL}^{stab}$
- on n'observe pas d'instabilité lorsque $\alpha_{CFL} \leq \alpha_{CFL}^{stab}$.

Sur les courbes b-figure 5.32, pour les tests en espace confiné, on peut observer exactement le même phénomène, excepté pour le raffinement [1 : 2] pour lequel le calcul avec $\alpha_{CFL} = 1$ a divergé après 1 millions d'itérations. Après un grand nombre de tests, nous avons conjecturé que α_{CFL}^{stab} peut s'écrire en fonction de N_{raf} sous la forme :

$$\alpha_{CFL}^{stab}(N_{raf}) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]^{N_{raf}-1}$$

Ce résultat reste bien évidemment à démontrer. On remarque que lorsque $N_{raf} > 3$, α_{CFL}^{stab} devient inférieur à $\frac{1}{2}$. Cette méthode est donc, dans une certaine mesure, pénalisante pour le choix du pas de temps lorsque le taux de raffinement devient important. Afin de conserver des pas de temps moins restrictifs pour des raffinements conséquents, il conviendrait de tester le comportement de cette méthode sur des raffinements [1 : 2] successifs.

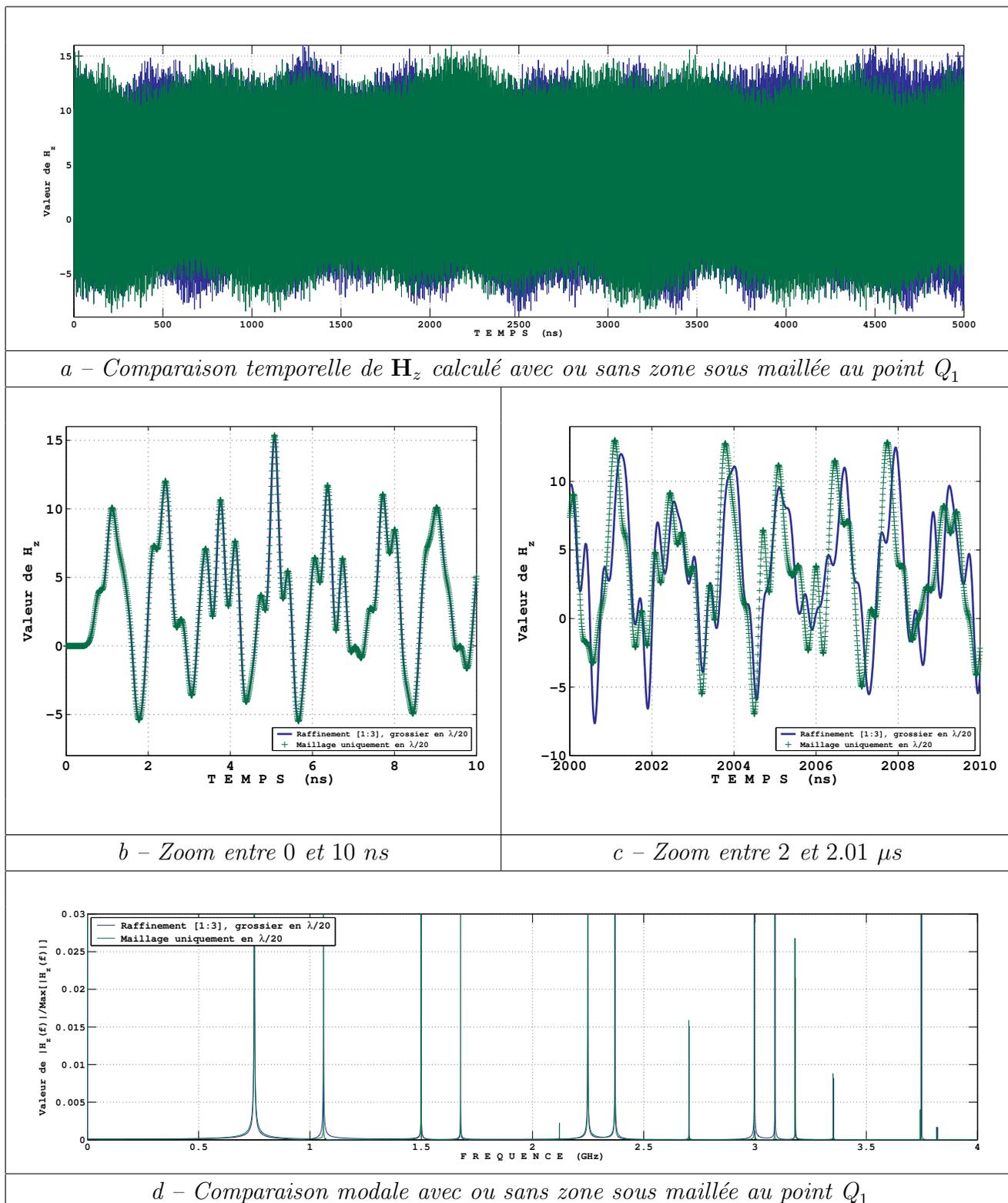


FIG. 5.31 – Comparaison des résultats avec la présence ou non d'une grille fine dans un espace confiné. Méthode : interpolations spatiales de type «Lagrange 2 points» et interpolations temporelles linéaires.

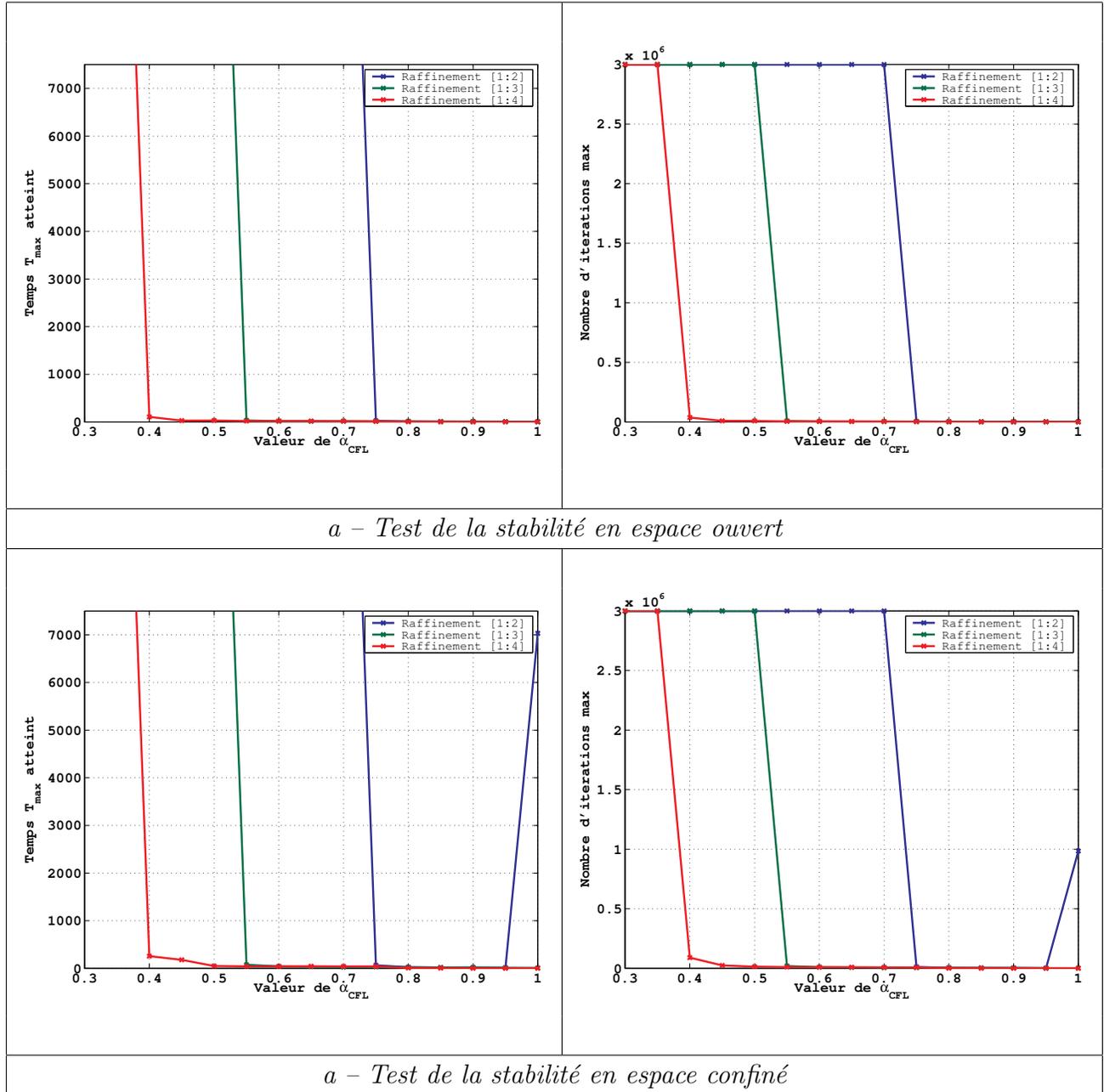


FIG. 5.32 – Evolution de la stabilité en espace ouvert puis en espace confiné. Méthode : interpolations spatiales de type «Lagrange 2 points» et interpolations temporelles «non naturelles».

Le cas test en espace confiné, dont un résultat stable est présenté sur la figure 5.33, nous permet de comprendre pourquoi les interpolations temporelles «non naturelles» stabilisent le schéma. En effet, lorsque $\alpha_{CFL} \geq \alpha_{CFL}^{stab}$, on remarque que l'enveloppe du signal oscillant décroît avec le temps de simulation. Or comme le milieu considéré ici est sans perte, ce ne devrait pas être le cas. On en déduit que toute l'énergie perdue par le système est dissipée numériquement. Le schéma est donc dissipatif, il ne conserve pas l'énergie mais la fait décroître, d'où la stabilité.

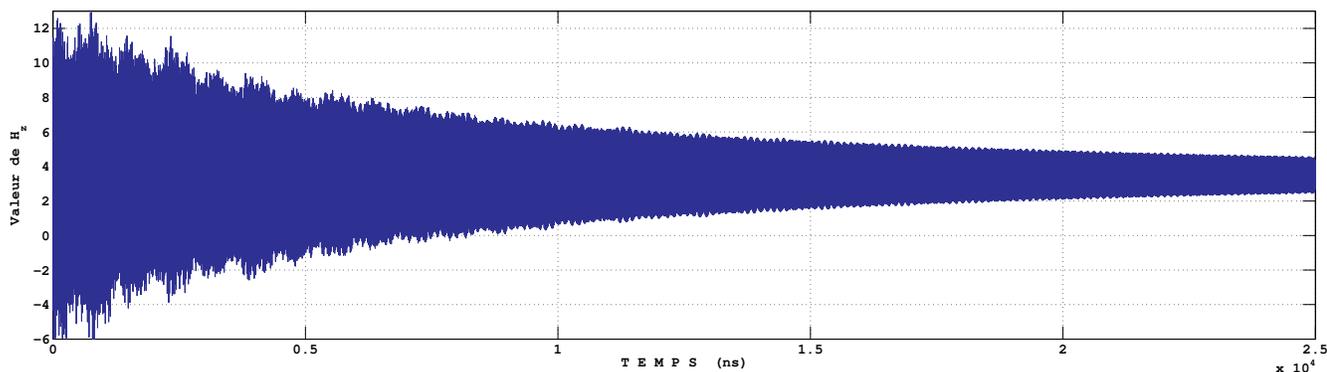


FIG. 5.33 – Résultat obtenu avec un schéma dissipatif

De la même façon que précédemment, nous avons testé la consistance du schéma en comparant, sur la figure 5.34, l'évolution temporelle de la composante de champ \mathbf{H}_{gz} au point Q_1 avec et sans grille raffinée. En observant la courbe a-figure 5.34, on peut déjà conclure qu'après $1 \mu s$, la solution calculée avec sous maillage est fortement dissipée. Ceci est confirmé par la courbe c-figure 5.34, puisque l'amplitude des oscillations est presque réduite de moitié par rapport au calcul dépourvu de grille raffinée. Cependant, on n'observe quasiment pas de déphasage entre les deux solutions. Enfin, sur la courbe d-figure 5.34, nous avons comparé les spectres de Fourier des deux solutions. On remarque que la dissipation induite par ces interpolations temporelles «non naturelles» modifie légèrement le spectre. En effet, bien que les fréquences propres calculées avec sous maillage soient à peu près identiques à celles calculées sans sous maillage, on se rend compte que le niveau associé varie. De plus, on voit apparaître un mode à 6.5 GHz normalement inexistant et quasiment disparaître des modes vers 3 et 4 GHz.

Pour conclure sur ce type d'interpolations temporelles, nous pouvons dire que, moyennant une baisse du critère de stabilité, elles rendent le schéma suffisamment dissipatif pour le stabiliser. Cependant, lorsque le taux de raffinement augmente, la diminution nécessaire du paramètre α_{CFL} devient de plus en plus pénalisante en terme de dispersion numérique. Enfin, cette méthode est intéressante en espace ouvert, lorsque l'onde parcourt peu de distance, mais son intérêt peut être discutable pour des structures fortement résonantes à cause de son caractère dissipatif.

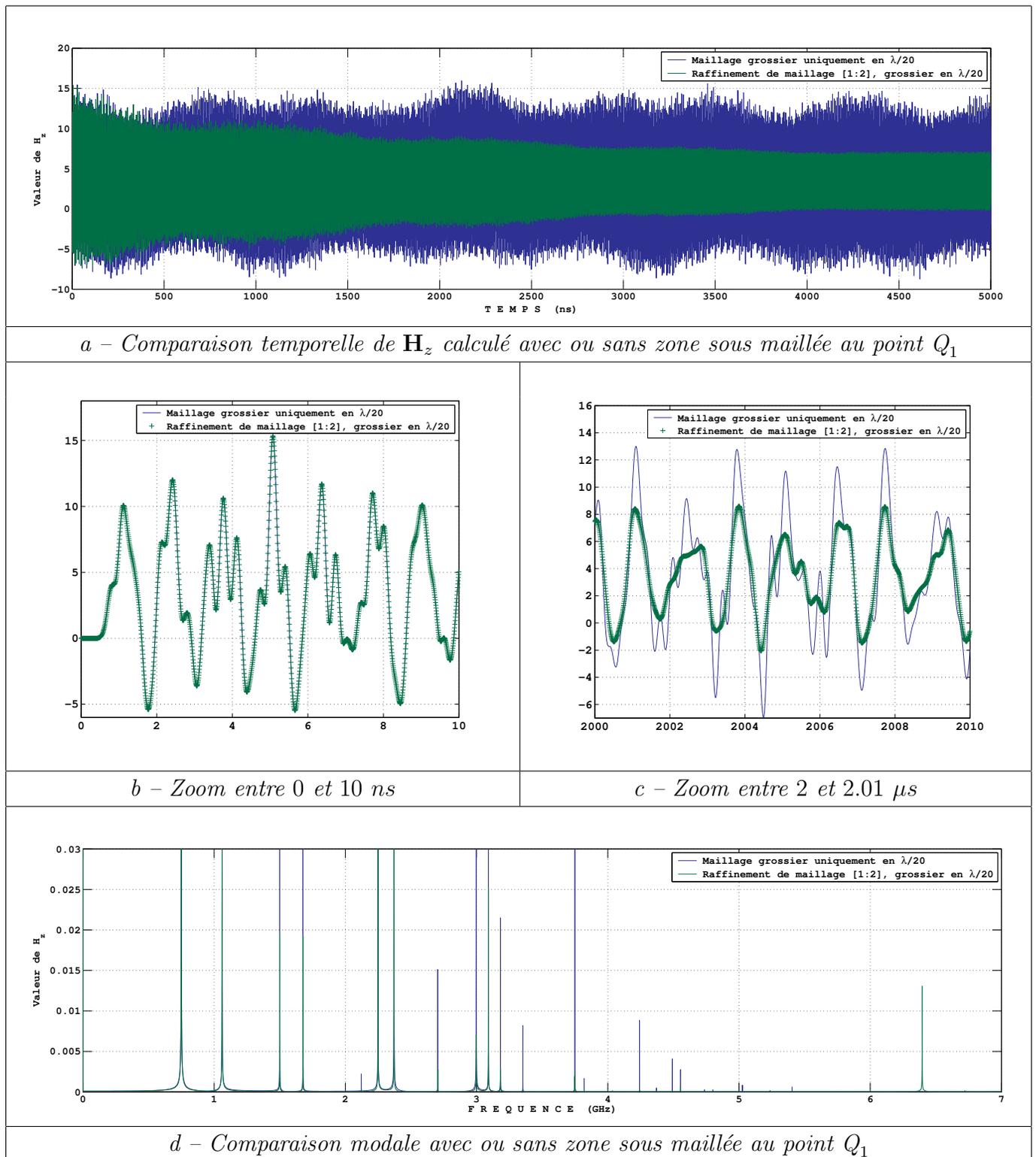


FIG. 5.34 – Comparaison de résultats avec la présence ou non d'une grille fine dans un espace confiné. Méthode : interpolations spatiales de type «Lagrange 2 points» et interpolations temporelles «non naturelles».

5.3.6 Proposition d'une méthode en 3 dimensions

5.3.6.1 Bilan sur la méthode de raffinement 2D

Dans ce qui précède, un algorithme de raffinement de maillage spatio-temporel pour la FDTD en 2D a été présenté. La méthode développée consiste en une généralisation de l'algorithme exposé dans [II-24] à un taux de raffinement quelconque. Le principe de cette technique s'inspire de la méthode AMR utilisée généralement dans d'autres domaines de la physique. Nous avons testé numériquement le couplage de cet algorithme à différents types d'interpolations spatiales et temporelles sur deux familles de cas tests :

- **Cas tests en espace ouvert** : une zone sous maillée est éclairée par une onde plane, générée par une surface de Huygens. L'espace ouvert est simulé par des couches absorbantes de Bérenger.
- **Cas tests en espace confiné** : les PML sont remplacées par des conditions aux limites de conducteur parfait. La cavité métallique est alors excitée localement dans la grille grossière. Ce cas test est plus approprié pour l'application LMJ.

Les résultats de réflexion numérique engendrée par la présence de la grille raffinée, et les tests de stabilité montrent que l'algorithme couplé à des interpolations spatiales de Lagrange, utilisant deux points dans la grille fine («Lagrange 2 points»), donne les meilleures performances. La réflexion numérique reste inférieure à -60 dB sur un maillage grossier en $\frac{\lambda}{20}$.

De bonnes performances de stabilité pour le cas test en espace ouvert ont été constatées. Cependant le comportement de l'algorithme est différent selon le choix de l'interpolation temporelle associée à l'interpolation spatiale de Lagrange. En effet, en utilisant une interpolation temporelle linéaire, on observe la stabilité pour des taux de raffinement supérieurs à 2 moyennant une faible diminution du pas de temps. Pour l'interpolation temporelle appelée «non naturelle», la stabilité est observée avec le critère CFL défini par la relation (5.68).

$$\Delta t \leq \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]^{N_{raf}-1} \times \Delta t_{\max} \quad (5.68)$$

Les cas tests en espace confiné, plus exigeants, montrent une instabilité de l'algorithme avec l'interpolation temporelle linéaire. L'utilisation de l'interpolation «non naturelle» stabilise le schéma. La perte d'énergie observée sur ces tests de stabilité montre le caractère dissipatif du schéma induit par ce type d'interpolation temporelle.

Dans ce qui suit, l'algorithme développé en 2D est généralisé en 3D. Ce dernier est associé aux interpolations donnant les meilleurs résultats en 2D, c'est-à-dire des interpolations de Lagrange en espace, et des interpolations temporelles linéaires ou «non naturelles». L'algorithme 3D est testé sur les mêmes types de cas de validations que ceux réalisés pour le 2D.

5.3.6.2 Généralisation de la méthode en 3D

- Point de divergence avec l'AMR 3D

Comme nous avons pu le constater dans ce qui précède, l'AMR s'adapte correctement à la méthode FDTD en deux dimensions. En effet, la localisation des degrés de liberté au centre et aux arêtes des mailles est favorable à une adaptation directe⁵. Cependant, en trois dimensions, cette analogie directe n'est plus possible car les composantes de champs ne sont plus évaluées aux bons endroits dans une cellule de Yee 3D (voir figure 5.35).

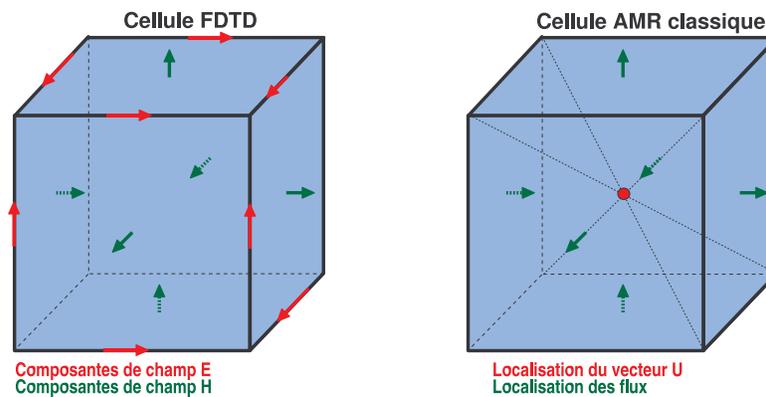


FIG. 5.35 – Différence de localisation des degrés de liberté entre FDTD 3D et AMR 3D classique

- Rappels sur le couplage entre les grilles sur l'interface

Pour faire transiter une information provenant de la grille principale vers la grille raffinée, il est nécessaire de déterminer, à chaque itération temporelle de la zone sous maillée, les conditions aux limites de bords de cette même zone. Ces dernières sont définies par les composantes de champs tangentes aux six faces constituant l'interface grille fine-grille grossière. Puisqu'en FDTD les composantes du champ électrique et celles du champ magnétique sont décalées d'une demie maille, ces conditions aux limites de bord peuvent être évaluées soit en champ \mathbf{H}_f tangent, soit en champ \mathbf{E}_f tangent.

Afin de rester cohérent avec ce qui a été présenté en 2D, les conditions aux limites de bord de la zone raffinée seront déterminées sur les composantes \mathbf{H}_f tangentes, pour la généralisation en 3D. Ces dernières sont représentées par les degrés de liberté supplémentaires \mathcal{H}_{fx} , \mathcal{H}_{fy} et \mathcal{H}_{fz} , présentés sur la figure 5.36 pour un raffinement [1 : 2]. Ils sont localisés au centre de ce qui pourrait s'appeler «facettes fantômes» par analogie aux «cellules fantômes» de l'AMR classique. Ces conditions aux limites seront évaluées par des interpolations spatiales et temporelles de la même façon que dans les étapes 2 et 4 de l'algorithme présenté figure 5.16 page 141.

⁵En mode TE, les composantes du champ \mathbf{E} jouent le rôle des flux, tandis la composante \mathbf{H}_z est le degré de liberté estimé au centre des mailles.

Remarquons que les champs normaux à l'interface, situés sur celle-ci, ne font pas partie des conditions aux limites de bord. En effet, ces composantes peuvent être déterminées par la mise à jour classique de la FDTD, du moment que les champs tangents sur l'interface (CL de bord) ont été préalablement déterminés.

De même, le passage d'une information provenant de la grille raffinée vers la grille grossière⁶ nécessite de déterminer, à chaque itération temporelle grossière, des conditions aux limites pour la grille principale sur l'interface entre grilles. De la même manière qu'en 2D, ces conditions aux limites seront déterminées en champ \mathbf{E}_g tangent par des corrections a posteriori, à la fin du calcul dans la grille fine (étape 5 de l'algorithme figure 5.16 page 141).

- **Description de l'algorithme de raffinement 3D**

En vertu de ce qui vient d'être dit, la problématique de raffinement de maillage peut être ramenée à un problème de conditions aux limites d'interfaces entre grilles. La détermination de ces conditions aux limites, à chaque pas de temps, permet le transit d'informations d'une grille à l'autre. L'algorithme, présenté sur la figure 5.16 pour le cas 2D, illustre parfaitement ce point de vue et se généralise très simplement au 3D.

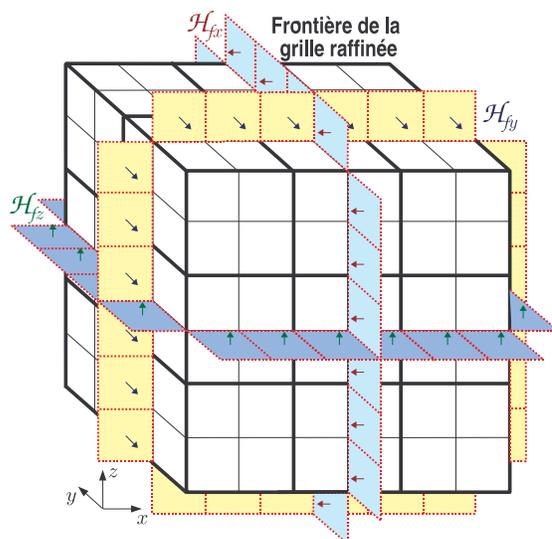


FIG. 5.36 – Localisation des composantes \mathcal{H}_{fx} , \mathcal{H}_{fy} et \mathcal{H}_{fz} à interpoler

En effet, en 3D, les étapes de mise à jour des champs dans les deux grilles restent inchangées, si ce n'est l'utilisation de la version 3D du schéma FDTD (voir § 4.1.2.3). L'étape d'interpolation spatiale des \mathcal{H}_z se généralise à une interpolation spatiale des degrés de liberté supplémentaires \mathcal{H}_{fx} , \mathcal{H}_{fy} et \mathcal{H}_{fz} localisés aux centres de facettes fantômes, comme indiqué sur la figure 5.36.

⁶Source localisée dans la zone raffinée, champ diffracté par un objet situé dans la grille fine, etc.

La vue représentée sur cette figure montre que quelle que soit la condition aux limites \mathcal{H}_{fx} , \mathcal{H}_{fy} ou bien \mathcal{H}_{fz} à déterminer, il est possible de se ramener à peu de chose près à la configuration de la figure 5.15 page 139. De cette façon, la technique d'interpolations spatiales implémentée en 3D, utilisant la méthode de Lagrange, est très similaire à celle implémentée en 2D (voir § 5.3.4.3 page 142). Elle nécessite simplement l'ajout d'une interpolation linéaire supplémentaire dans la direction définie par la composante à interpoler⁷.

En effet, considérons par exemple le cas de la figure 5.7 page 110, appliquée à l'évaluation des degrés de liberté \mathcal{H}_{fz} dans un cas 3D pour un raffinement [1 : 3]. Les composantes \mathbf{H}_{gz} , localisées au niveau des points verts sur le schéma, sont connues en 2D mais ne le sont pas forcément en 3D. Cependant, une évaluation du champ magnétique en ces points s'obtient simplement par une interpolation linéaire dans la direction z , utilisant les composantes \mathbf{H}_{gz} situées juste en dessous et juste au dessus de ces points verts.

Pour les interpolations temporelles linéaires ou «non naturelles», la méthode est identique à celle utilisée en 2D. Les champs grossiers qui ne sont pas accessibles directement sont interpolés linéairement dans l'espace, de la même manière que précédemment. Enfin, la correction a posteriori des champs grossiers tangents à l'interface est menée exactement de la même façon qu'en 2D (voir figure 5.17 page 146).

Malgré le point de divergence entre l'AMR classique et le raffinement de maillage 3D pour la FDTD, la méthode de sous maillage de type AMR présentée en 2D est facilement généralisable en 3D. L'algorithme 3D consiste en fait à utiliser plusieurs fois l'algorithme 2D dans chacune des trois directions de l'espace (voir figure 5.36). Les interpolations utilisées sont quasiment identiques à celles utilisées en 2D. Elles nécessitent seulement une interpolation linéaire supplémentaire.

5.3.6.3 Validation numérique

Le développement d'un code FDTD 3D avec sous maillage dans son ensemble a été nécessaire pour la validation numérique de l'algorithme 3D. En plus du solveur de Yee et du module propre au raffinement de maillage, les modules de base suivants ont été implémentés :

- **Lecture de maillages** : les maillages sont relus au format GORF⁸ qui est le format de maillage utilisé par le code Sophie du CEA.
- **Espace ouvert** : l'estimation de la réflexion numérique du schéma nécessitant la simulation de l'espace ouvert, des couches absorbantes de type CPML ont été implémentées [II-30].

⁷C'est-à-dire dans la direction x pour \mathcal{H}_{fx} , dans la direction y pour \mathcal{H}_{fy} et dans la direction z pour \mathcal{H}_{fz} .

⁸Nom du code FDTD 3D de la DGA

- Sources d'excitation : un injecteur d'onde plane a été développé pour les tests de réflexion numérique et de stabilité en espace ouvert. Pour les tests de stabilité en espace confiné, le domaine de calcul est excité ponctuellement par un dipôle.
- Conditions aux limites : lors des tests de consistance et de stabilité, un objet métallique est placé au centre d'une grille raffinée. Ceci nécessite la gestion de conditions aux limites surfaciques de conducteur parfait (PEC) à l'intérieur du domaine. Les surfaces de type PEC sont indiquées dans le fichier contenant le maillage.
- Matériaux : le code développé permet la prise en compte de matériaux diélectriques et magnétiques non dispersifs. Ceci sera utile lorsqu'on voudra tester la traversée de matériaux par une interface entre deux grilles de niveaux de raffinement différents.
- Reprises : les tests de stabilité nécessitant de réaliser des calculs sur un grand nombre d'itérations temporelles ($\geq 10^5$ pas de temps), un module de «reprise de cas» a été développé. Cette option permet de stopper un calcul et de le relancer ultérieurement.

- **Réflexion numérique**

De la même façon que dans le cas 2D, la précision du schéma de raffinement 3D est évaluée en estimant la réflexion numérique engendrée par une simple région raffinée ne contenant aucun obstacle, éclairée par une onde plane provenant de la grille principale. Cette dernière est entourée de couches absorbantes de type CPML de façon à simuler l'espace ouvert.

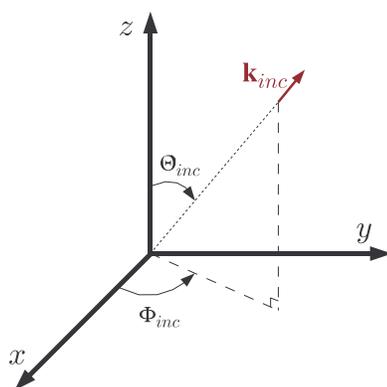


FIG. 5.37 – Définition des angles d'incidence $(\Theta_{inc}, \Phi_{inc})$

Ce cas test a été réalisé avec différents angles d'incidence $(\Theta_{inc}, \Phi_{inc})$ pour l'onde plane (voir définition figure 5.37) et jusqu'à un taux de raffinement égal à 5. Un coefficient de réflexion \mathcal{R}_M est calculé en un point donné M, en estimant la différence entre les résultats obtenus en ce point, en présence et en absence de la zone raffinée (résultat de référence).

Le point M est situé une cellule grossière avant la première des six faces, constituant l'interface entre les grilles, atteinte par l'onde plane. Le coefficient \mathcal{R}_M est évalué en dB dans le domaine fréquentiel par la relation (5.69).

$$\mathcal{R}_M(f) = 20 \times \log \left[\frac{\mathcal{F}(\|\mathbf{H}_{ref}(M, t) - \mathbf{H}(M, t)\|)}{\mathcal{F}(\|\mathbf{H}_{inc}(M, t)\|)} \right] \quad (5.69)$$

Les courbes de la figure 5.38 présentent les résultats de la réflexion numérique, obtenus avec une grille raffinée, d'une taille de $30 \times 30 \times 30$ cellules grossières, placée au centre d'une grille principale de $60 \times 60 \times 60$ cellules. Le même pas d'espace grossier ($\Delta_g = 3$ mm) est utilisé dans chaque direction. La forme temporelle de l'onde incidente est une impulsion gaussienne avec une largeur de bande spectrale allant de 0 à 10 GHz. De cette façon, la taille de maille dans la grille grossière est telle que $\Delta_g = \frac{\lambda_{min}}{10}$.

La technique d'interpolation spatiale des composantes \mathcal{H} , utilisée dans le schéma de raffinement, est de type «Lagrange 3 points», c'est-à-dire qu'on utilise 3 points de la grille fine dans la direction normale à l'interface (voir page 143). Les interpolations temporelles utilisées sont les interpolations dites «non naturelles». Les résultats avec des interpolations temporelles linéaires ne sont pas présentés car une stabilité suffisante n'a pas pu être obtenue avec ce type d'interpolations.

Sur la courbe a-figure 5.38, le coefficient de réflexion \mathcal{R}_M est tracé pour une incidence de l'onde plane minimisant les erreurs de dispersion numérique induites par le schéma de Yee, c'est-à-dire pour des valeurs des angles $(\Theta_{inc}, \Phi_{inc})$ de $(55^\circ, 45^\circ)$. C'est dans cette configuration que le schéma donne les meilleurs résultats avec une très faible réflexion. En effet, celle-ci est inférieure à -50 dB jusqu'à une fréquence de 8 GHz soit jusqu'à $\Delta_g = \frac{\lambda}{12}$. Elle reste en dessous de -40 dB jusqu'à $\Delta_g = \frac{\lambda}{10}$. Remarquons que le coefficient \mathcal{R}_M augmente avec le taux de raffinement mais pas de manière très significative.

Sur la courbe c-figure 5.38, le coefficient \mathcal{R}_M est cette fois-ci tracé pour une incidence de l'onde normale ($\Theta_{inc} = 90^\circ$ et $\Phi_{inc} = 00^\circ$) pour laquelle les erreurs de dispersion sont maximales. Dans ce cas, la réflexion augmente d'une décade par rapport à la configuration précédente. Cependant, cette réflexion est toujours faible puisqu'elle reste inférieure à -40 dB jusqu'à $\Delta_g = \frac{\lambda}{12}$. Elle devient néanmoins supérieure à -20 dB pour $\Delta_g = \frac{\lambda}{10}$. De la même façon que sur la courbe a-figure 5.38, on observe une légère augmentation \mathcal{R}_M avec le taux de raffinement.

La courbe b-figure 5.38 présente l'évolution du coefficient de réflexion numérique pour une incidence «intermédiaire» ($\Theta_{inc} = 90^\circ$ et $\Phi_{inc} = 45^\circ$). On constate que la valeur de ce coefficient est comprise entre les valeurs obtenues dans les deux configurations «extrêmes» minimisant ou maximisant les erreurs de dispersion numérique du schéma de Yee.

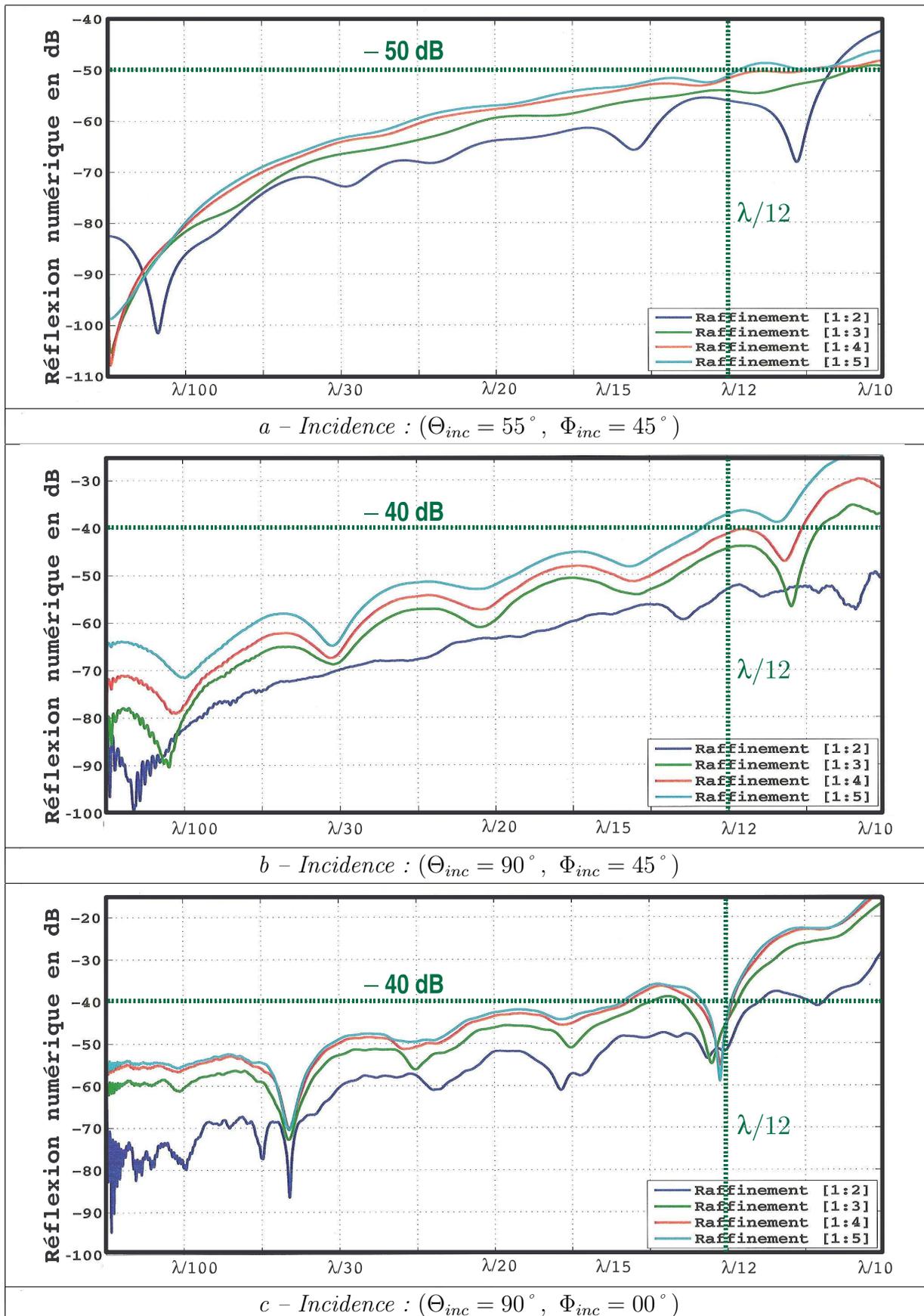


FIG. 5.38 – Réflexion numérique en fonction de la finesse du maillage dans la grille principale

D'après cette analyse, la réflexion numérique augmente d'une part avec le taux de raffinement, comme nous l'avons constaté en 2D. Cette croissance reste néanmoins raisonnable puisque le coefficient \mathcal{R}_M augmente d'environ une décade en passant d'un raffinement $[1 : 2]$ à un raffinement $[1 : 5]$. De plus, le passage d'un raffinement $[1 : 3]$ à un raffinement $[1 : 5]$ engendre une croissance de la réflexion numérique inférieure à 5 dB seulement. D'autre part, le coefficient de réflexion dépend de l'angle d'attaque de l'onde incidente, comme nous l'avons aussi constaté en 2D. Les observations précédentes tendent à montrer que plus l'angle d'incidence favorise la dispersion numérique du schéma de Yee, plus la réflexion numérique induite par la technique de raffinement proposée augmente. Ceci pourrait provenir d'un conflit de dispersion entre les grilles.

- **Stabilité en temps long**

Le cas de calcul effectué pour tester la stabilité du schéma correspond à ce que nous avons appelé un «cas test en espace confiné». En effet, ce dernier consiste à exciter une cavité à bords métalliques sans perte par un dipôle. Les bords de cette cavité sont confondus avec ceux de la grille FDTD principale. Un domaine sous maillé, contenant un objet parfaitement conducteur, est placé au centre de cette cavité.

Ce type de test est très révélateur pour éprouver la stabilité du schéma. En effet, les réflexions multiples sur les bords du domaine font que l'interface entre les 2 grilles est traversée en permanence par des ondes provenant du maillage grossier et des ondes diffractées par l'objet. Le moindre problème de stabilité est alors très vite mis en évidence par ce genre de cas test. Le but est de laisser le calcul se dérouler jusqu'à atteindre soit la divergence, soit 100 000 itérations temporelles. Si ce nombre de pas de temps est dépassé, on estime que la stabilité de la méthode de raffinement est satisfaisante pour une application LMJ.

Les dimensions de la grille grossière et de la grille raffinée utilisées pour ce test numérique sont identiques à celles du cas test effectué pour tester la précision du schéma. L'objet parfaitement conducteur disposé au centre du domaine sous maillé est un cube de taille $20 \times 20 \times 20$ cellules grossières. Les résultats présentés sur les figures 5.39 et 5.40 ont été obtenus avec des interpolations spatiales de type «Lagrange 3 points» associées à des interpolations temporelles «non naturelles».

Malgré les bons résultats obtenus en 2D, l'utilisation d'interpolations temporelles linéaires n'a pas conduit à une stabilité satisfaisante puisque les 30 000 itérations n'ont pas pu être atteintes pour un pas de temps Δt_g raisonnable de $0.75 \cdot \Delta t_{\max}$. Une forte diminution du pas de temps ne permet pas d'augmenter suffisamment la stabilité. En effet, même si le nombre d'itérations atteint est supérieur, le temps «physique», pour lequel l'instabilité commence à apparaître, reste à peu près constant.

De la même façon qu'en 2D, l'utilisation d'interpolations temporelles de type «non naturelles» a conduit à la même constatation sur le critère de stabilité plus restrictif à imposer afin que le schéma ne diverge pas au cours des 1000 premières itérations. Après un grand nombre de tests, cette condition de stabilité, écrite en (5.70) pour un taux de raffinement quelconque N_{raf} , s'est révélée être la même que celle du 2D⁹.

$$\Delta t_g \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{N_{raf}-1} \times \left[c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x_g^2} + \frac{1}{\Delta y_g^2} + \frac{1}{\Delta z_g^2}} \right]^{-1} \quad (5.70)$$

En revanche, l'association d'interpolations spatiales de «Lagrange 1 point» ou «2 points» aux interpolations temporelles «non naturelles», stable et donnant la plus faible reflexion dans le cas 2D, n'a pas donné les résultats de stabilité escomptés. En effet pour un raffinement [1 : 2] ($\Delta t_g = 0.7 \cdot \Delta t_{max}$), le schéma commence à diverger après 65 000 itérations. Pour des taux de raffinement supérieurs, le temps «physique» pour lequel apparaît la divergence reste constant.

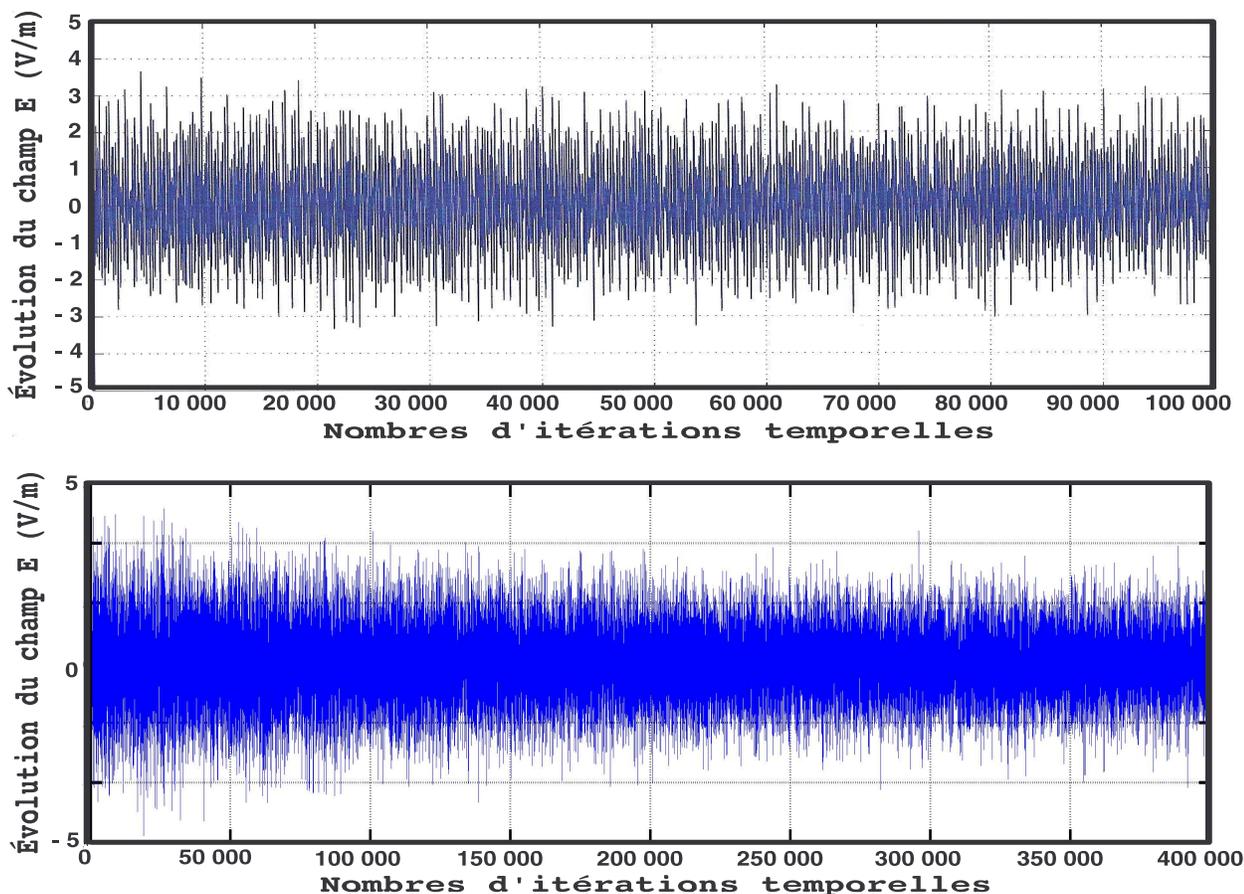


FIG. 5.39 – Résultat du cas test de stabilité pour un raffinement [1 : 2]

⁹Les tests ont confirmé ce critère CFL jusqu'à un taux de raffinement au moins égal à 5.

La stabilité au-delà des 100 000 itérations a été obtenue en associant les interpolations temporelles «non naturelles» à des interpolations de «Lagrange 3 points». La courbe de la figure 5.39 montre le résultat du cas test pour un raffinement [1 : 2]. Aucune instabilité n'est mise en évidence jusqu'à au moins 100 000 itérations avec un pas de temps imposé par l'inégalité (5.70). Des reprises du même calcul ont été menées jusqu'à 400 000 itérations sans rencontrer de problème de divergence.

La stabilité au delà des 100 000 itérations a aussi été observée pour des taux de raffinement allant jusqu'à [1 : 5], toujours avec la contrainte (5.70). Le comportement du schéma avec des taux supérieurs n'a pas été testé car les temps de calculs prohibitifs nécessaires ne permettent pas d'atteindre les 100 000 pas de temps en moins de 80 000 secondes CPU.

La courbe de la figure 5.40 montre le résultat obtenu pour un raffinement [1 : 4]. Dans ce cas, le pas de temps imposé par (5.70) est égal à la moitié du pas de temps requis pour un raffinement [1 : 2]. Au lieu de stopper le test à 100 000 itérations, nous avons laissé évoluer le calcul jusqu'à 200 000 itérations pour que le temps «physique» atteint soit identique à celui atteint au bout de 100 000 itérations avec un raffinement [1 : 2]. Aucune instabilité n'a été observée.

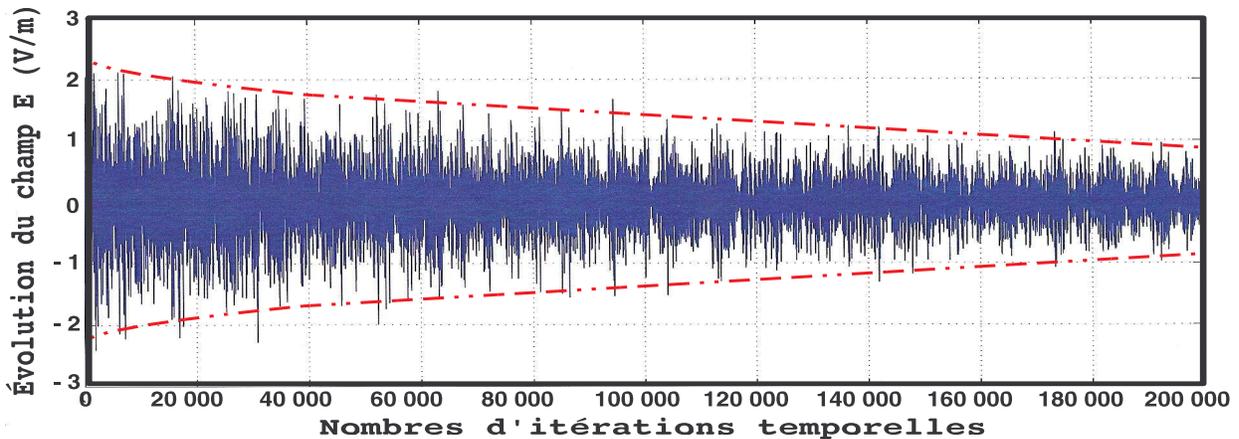


FIG. 5.40 – Mise en évidence de la diffusion numérique pour un raffinement [1 : 4]

Cependant, de la même manière que cela a pu être observé en 2D, la technique d'interpolations temporelles utilisée rend aussi le schéma dissipatif en 3D. La courbe de la figure 5.40 illustre bien ce phénomène. En effet, puisque la cavité est sans perte (conditions PEC sur les bords), la seule cause de dissipation de l'énergie ne peut être que numérique. L'amplitude du champ calculé sur cette courbe décroît avec le nombre d'itérations pour atteindre la moitié de sa valeur initiale au bout de 200 000 itérations. Cette diminution de l'amplitude est le résultat de la perte d'énergie du système par diffusion numérique.

D'après les différents tests effectués, il semble que la perte d'énergie par diffusion numérique augmente avec le taux de raffinement. Pour un taux de raffinement égal à 2, les pertes ne

sont pas visibles (voir figure 5.40) même après 100 000 itérations. Plus le taux de raffinement augmente, plus les pertes deviennent visibles. De plus, il semble que cette diffusion engendrée par le schéma de raffinement en temps permette de stabiliser le schéma de raffinement total. En effet, l'association des interpolations spatiales de type «Lagrange 3 points» avec d'autres interpolations temporelles ne conduit pas à des résultats stables.

Enfin, dans une dernière série de cas tests, la stabilité a été étudiée en fonction de la taille du cube placé au centre de la grille fine. Il est intéressant de remarquer que lorsque la distance entre la surface du cube et l'interface entre les grilles devient inférieure à une certaine valeur (de l'ordre de 5 à 10 mailles raffinées en fonction du taux de raffinement), le schéma diverge avant d'atteindre 100 000 itérations.

5.3.6.4 Application possible au Laser Mégajoule

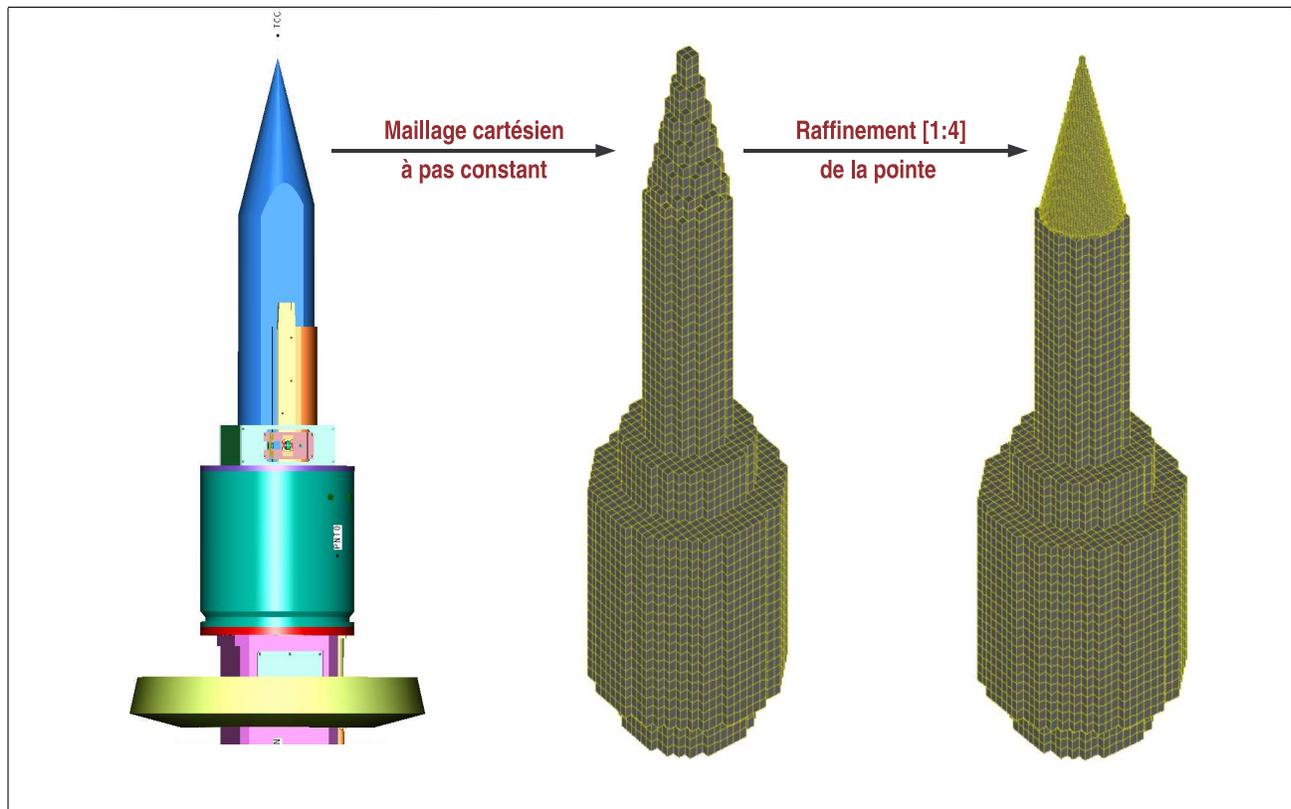
Nous présentons, dans ce paragraphe, une application pratique possible dans le cadre du LMJ de l'algorithme de raffinement 3D décrit précédemment. L'application la plus évoluée serait bien sûr le raffinement de maillage d'une importante structure telle que la chambre d'expériences du LMJ, pour des raisons évidentes de gain de place mémoire et de temps calcul.

Cependant, l'état d'avancement du code 3D développé lors de ce travail ne permet pas de traiter des cas d'une telle complexité. D'importants développements, relevant du domaine de l'informatique (et non plus du numérique), sont encore nécessaires pour permettre la gestion d'une structure de grilles hiérarchisées englobant toute la géométrie.

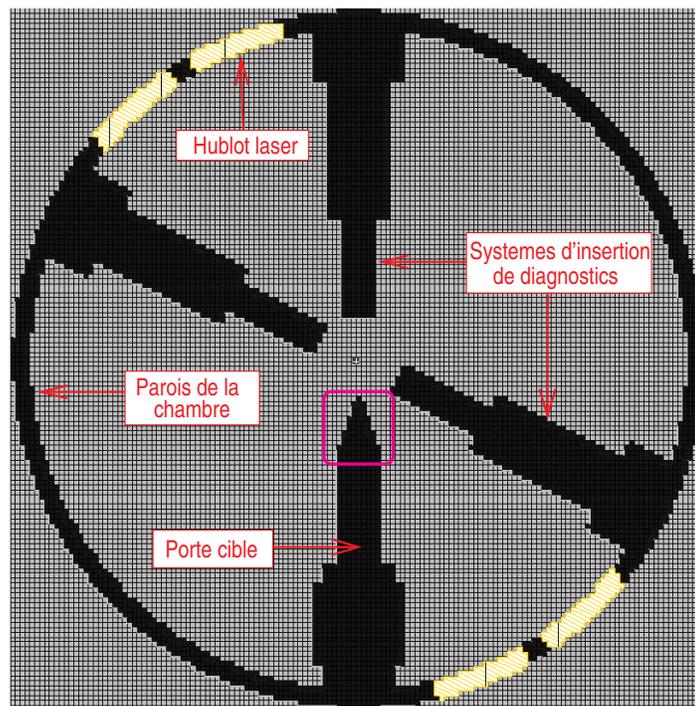
En revanche, la méthode de raffinement développée, permettant d'utiliser des taux de raffinement relativement élevés, pourrait par exemple être utile pour l'étude du renforcement de champs basses fréquences au niveau de pointes métalliques. En effet, ce type de cas est facilement envisageable dans l'état actuel du code 3D parce qu'il nécessite la mise en œuvre d'une structure de grilles minimale ; c'est-à-dire une grille principale contenant une ou plusieurs grilles fortement raffinées¹⁰, localisées au niveau de pointes.

Prenons l'exemple du porte-cible à l'extrémité duquel est disposée la cible contenant le mélange de D-T avant un tir. On peut constater sur la figure a-5.41, représentant le porte-cible du laser américain Omega, que ce dernier présente une pointe très prononcée. Un maillage cartésien à pas constant de la chambre d'expériences dans son ensemble, d'une taille raisonnable de $200 \times 200 \times 200$ cellules, tel que celui présenté en b-5.41, ne permet pas une représentation fine de la pointe (voir figure a-5.41). Un raffinement du maillage, localisé sur cette pointe, avec un taux égal à 4, permet une bien meilleure approximation sans pour autant augmenter de manière significative la taille du cas.

¹⁰Raffinement [1 : 4] ou [1 : 5] par exemple



a – Raffinement [1 : 4] de la pointe du porte-cible du laser Omega



b – Coupe d'un maillage FDTD 3D de la chambre Omega

La difficulté de ce cas de raffinement est que l'interface entre les 2 grilles traverse un objet. Or, jusqu'à maintenant, la méthode n'a été testée qu'avec un objet complètement englobé par la zone raffinée. Le porte-cible étant supposé métallique, il est modélisé par une surface fermée parfaitement conductrice. L'intérieur de l'objet est donc constitué de vide et le champ électromagnétique y est nul.

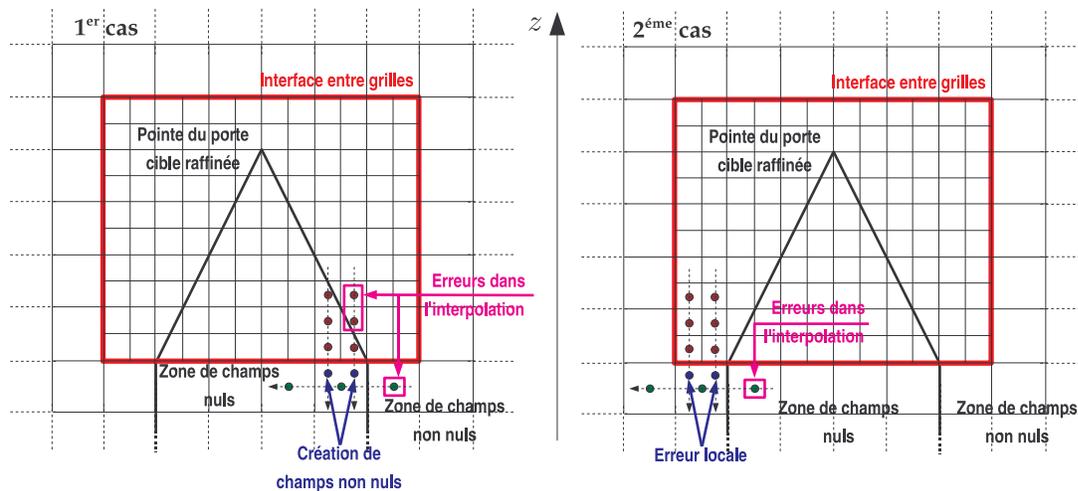


FIG. 5.42 – Problématique de la traversée du porte-cible par l'interface entre les grilles

La figure 5.42 présente le problème posé par la traversée d'un objet parfaitement conducteur et creux par l'interface grille fine-grille grossière. En effet, dans le premier cas présenté, les interpolations des composantes fantômes \mathcal{H}_x ou \mathcal{H}_y (points bleus) situées à l'intérieur de l'objet posent problème. La technique d'interpolation spatiale mise en œuvre nécessite l'emploi de composantes non nulles (composantes entourées). Le résultat des interpolations conduit à des composantes \mathcal{H} non nulles alors qu'elles le sont en réalité. De cette façon, un champ d'origine purement « numérique » se crée à l'intérieur de l'objet. La solution choisie pour contourner ce problème consiste à fermer les surfaces métalliques dans chacun des maillages fin et grossier. Ainsi, les composantes de champ \mathbf{E} tangentes à l'interface, situées à l'intérieur de l'objet, s'annulent naturellement malgré l'erreur sur le calcul des composantes fantômes \mathcal{H} . Ces interpolations sont en fait inutiles pour le calcul.

Dans le deuxième cas présenté sur la figure 5.42, ce sont les interpolations des composantes \mathcal{H}_x ou \mathcal{H}_y , localisées dans une maille grossière ayant une face métallique contigüe à une face située sur l'interface entre les grilles, qui posent problème. Comme on peut le remarquer sur le dessin, ces interpolations font intervenir une composante de champ du maillage grossier située à l'intérieur de l'objet. Ces interpolations ne sont pas licites car le champ n'est pas continu à travers l'interface métallique. Une erreur sur le calcul des champs est donc engendrée localement. Lors de la réalisation des calculs qui suivent, cette erreur a été supposée suffisamment négligeable pour ne pas agir de façon significative sur la solution.

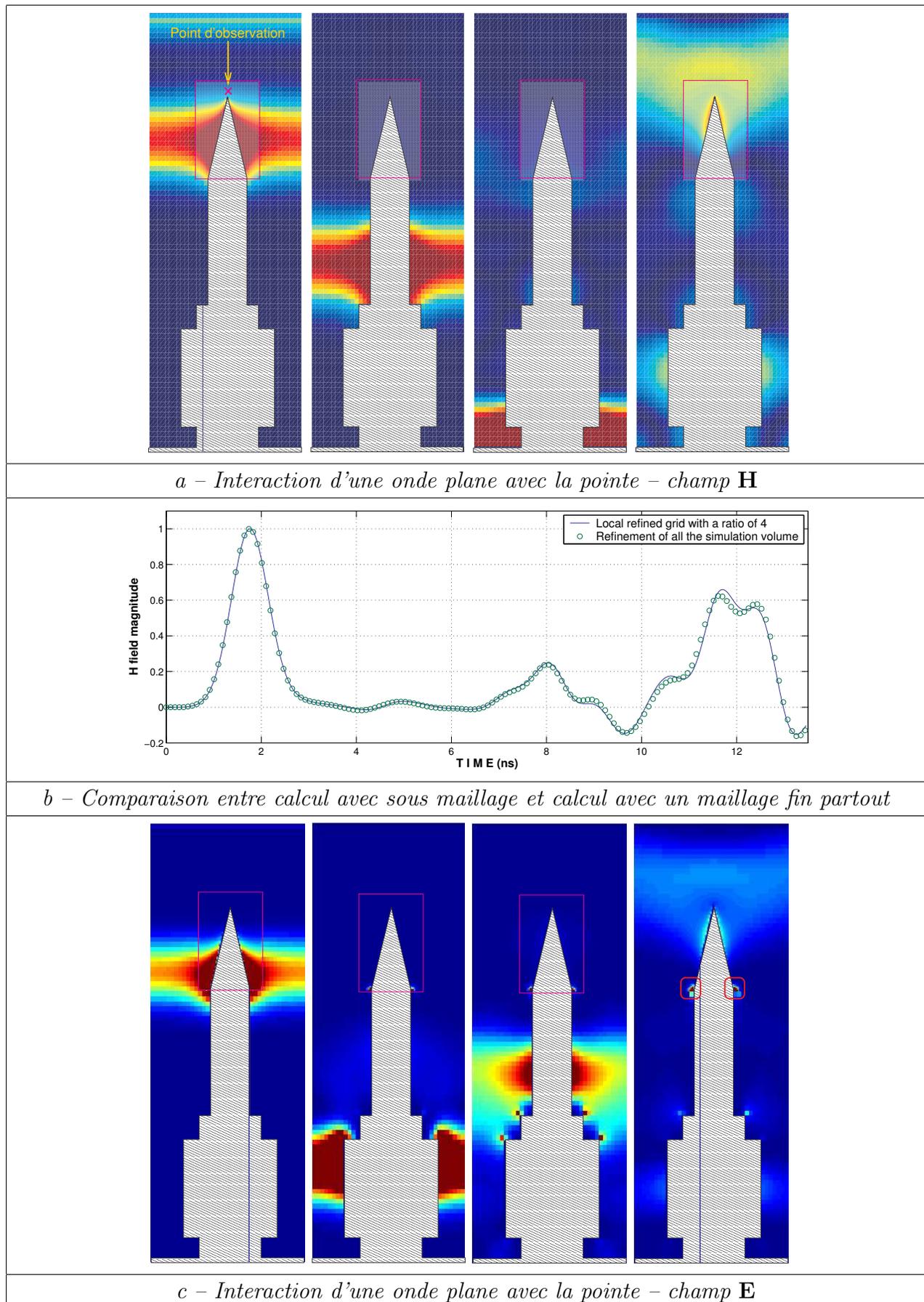


FIG. 5.43 – Résultats du test numérique d'interaction d'une onde plane sur une pointe raffinée

Les courbes de la figure 5.43 présentent les résultats obtenus pour un cas test consistant à éclairer la pointe raffinée du porte-cible par une onde plane de profil gaussien. Les calculs ont été réalisés sur un maillage du porte-cible de $40 \times 40 \times 90$ cellules grossières, inséré dans un guide d'onde dans la direction z . Des couches absorbantes de type CPML ont été disposées en $z = z_{\max}$ tandis que des conditions aux limites PEC ont été imposées en $z = z_{\min}$. Une zone sous maillée avec un taux de raffinement égal à 4 ($16 \times 16 \times 20$ cellules grossières) permet de raffiner la pointe du porte-cible comme sur la figure a-5.41.

La figure a-5.43 montre l'évolution du champ magnétique dans un plan de coupe $y = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}$. La courbe de la figure b-5.43 compare le champ \mathbf{H} au point d'observation (voir a-5.43) calculé avec raffinement au champ \mathbf{H}_{ref} calculé au même endroit sur un maillage «fin partout» de $160 \times 160 \times 360$ cellules. Les temps de simulation sont de 30 minutes pour le calcul avec raffinement contre 270 minutes sans raffinement. On remarque que le résultat avec zone sous maillée se superpose au résultat avec maillage fin dans tout le domaine pour un temps CPU 10 fois plus court. Ces résultats mettent en évidence l'intérêt du raffinement de maillage lorsque la zone à raffiner n'est pas trop volumineuse par rapport à la taille totale du cas.

En revanche, en observant la figure c-5.43 représentant l'évolution du champ électrique dans le même plan de coupe que précédemment, on peut remarquer une accumulation de champ statique aux endroits où l'interface entre les grilles traverse la surface métallique du porte-cible. Ceci est probablement dû aux erreurs locales d'interpolation, correspondant au second cas de la figure 5.42, que nous avons négligées. Une solution possible serait de modifier localement le schéma d'interpolations spatiales de façon à minimiser ces erreurs. Cette modification n'a pas encore été implémentée dans le code.

5.4 Conclusion

5.4.1 Bilan sur la méthode de raffinement de maillage proposée

Dans ce chapitre, une méthode de raffinement de maillage pour la méthode FDTD en 3D a été développée. Suite à une bibliographie sur l'état de l'art des techniques de sous maillage, nous avons présenté une adaptation de la méthode AMR pour la FDTD avec un taux de raffinement quelconque, d'abord en 2D puis en 3D. L'intérêt de cette méthode réside dans sa simplicité d'implémentation par rapport à des schémas de raffinement conservatifs, plus difficiles à mettre en œuvre. De ce fait, la technique proposée pourrait être implantée dans des codes 3D existants, tel que TRIDIMO (Xlim) ou Sophie (CEA), sans difficulté particulière.

L'algorithme de raffinement, associé à des interpolations spatiales de «Lagrange 3 points» et à des interpolations temporelles «non naturelles», a donné les résultats les plus intéressants en 3D, sur les cas tests de consistance et de stabilité réalisés. En effet, une réflexion numérique,

induite par le schéma, inférieure à -40 dB, a été observée jusqu'à une taille de maille de $\frac{\lambda}{12}$ dans le maillage grossier. Une stabilité très satisfaisante au-delà de 100 000 itérations a été constatée sur des cas tests en espace confiné, très révélateurs des problèmes de convergence.

Le critère CFL nécessaire à cette stabilité (relation 5.70) est néanmoins plus restrictif que le critère classique. Ce dernier devient malheureusement de plus en plus pénalisant lorsque le taux de raffinement croît. En effet, la constante CFL (paramètre α_{CFL}) évolue avec le taux de raffinement N_{raf} comme une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Enfin, les tests de stabilité ont mis en évidence des pertes d'énergie par diffusion numérique induites par le schéma d'interpolations temporelles. Il semble que cette diffusion numérique permette de stabiliser le schéma de raffinement total.

L'utilisation de cette méthode a été proposée pour une application pratique pour le LMJ. En effet, le raffinement de maillage pourrait être utile à l'étude des renforcements de champs au niveau de pointes, en particulier à l'extrémité du porte-cible. La possibilité d'emploi de forts taux de raffinement est intéressante dans ce cas. En revanche, d'après les premiers cas tests effectués, cette application nécessite une adaptation locale du schéma d'interpolations spatiales employé dans la méthode proposée.

5.4.2 Perspectives

Des travaux futurs pourraient dans un premier temps concerner la technique de raffinement en elle-même. Une étude plus théorique de la stabilité pourrait être faite, avec par exemple une méthode matricielle en s'inspirant de ce qui est fait pour la méthode FIT (voir § 5.2.3.2 page 133), ou bien avec une méthode énergétique, de façon à démontrer la condition de stabilité (5.70).

Il serait aussi intéressant de se pencher plus précisément sur le problème de la diffusion numérique engendrée par le schéma d'interpolations temporelles. La quantification de cette diffusion permettrait d'évaluer son influence sur la validité d'un résultat, en particulier dans le cas d'études modales dans des cavités nécessitant de faire un grand nombre d'itérations.

Des tests de l'algorithme associé à d'autres interpolations spatiales sont envisageables, notamment avec des interpolations splines cubiques qui n'ont malheureusement pas pue être implémentées ici par manque de temps. Ces dernières peuvent être dans certains cas plus intéressantes que des interpolations de type Lagrange (voir figure 5.8 page 112).

Enfin, on pourrait étudier le comportement du schéma de raffinement lorsque l'interface entre les grilles traverse un matériau. Cette configuration peut poser problème car les interpolations spatiales sont faites sur le champ magnétique dont la composante tangentielle n'est en général pas continue à travers une interface entre deux matériaux.

Dans un second temps, les perspectives pourraient concerner l'application de la méthode à des cas plus évolués, faisant intervenir une structure de grilles hiérarchisées. Comme nous l'avons dit précédemment, la gestion de telles structures nécessite des développements relevant de l'informatique et non plus du numérique.

Chapitre 6

Evaluation des possibilités de calcul avec un code massivement parallèle

6.1 Le supercalculateur TERA 10

6.1.1 Présentation

TERA 10 est le supercalculateur français le plus puissant existant. Il a été conçu et fabriqué par la société Bull, pour le compte du CEA-DAM, sur le centre «DAM Ile de France» de Bruyères-le-Châtel. Sa mise en service a débuté au début de l'année 2006. TERA 10 est alors devenu l'un des plus puissants supercalculateurs d'Europe et le septième au monde. L'acquisition de TERA 10 s'inscrit dans le cadre du programme Simulation au même titre que le laser Mégajoule.



FIG. 6.1 – Le supercalculateur Tera 10

6.1.2 Architecture

TERA 10 est un puissant cluster de 623 serveurs Bull NovaScale, reliés par un réseau d'interconnexions de très haute performance Quadrics permettant de minimiser les temps de communication entre processeurs. Au premier novembre 2006, le calculateur central est formé de 623 nœuds de calcul constitués chacun d'un serveur Bull NovaScale à 8 processeurs double cœur Intel Montecito (évolution de l'Itanium 2) pour un nombre total de 4 984 processeurs soit 9 968 cœurs.

Le supercalculateur dispose d'une mémoire centrale de 30 Téraoctets de RAM et d'une capacité de stockage de 1 pétaoctet répartie sur 7 800 disques et accessible avec une bande passante de 100 Go.s⁻¹. TERA 10 est le plus grand supercalculateur utilisant Linux comme système d'exploitation (distribution Red Hat adaptée et optimisée par Bull et le CEA).

6.1.3 Puissance de calcul

En novembre 2006, la performance atteinte s'établit à 52.8 Téraflops soutenus, selon le classement TOP500¹, représentant près de 53 000 milliards d'opérations par seconde sur des nombres flottants (voir tableau 6.1). L'évolution de TERA 10 vers son successeur annoncé, TERA 100, devrait s'accompagner d'une montée en puissance jusqu'à 100 Téraflops soutenus en 2009, soit environ 0.6 pétaflops en crête.

Dates	Rang mondial	Nombre de processeurs	Puissance soutenue en Téraflops	Puissance crête en Téraflops
Novembre 2005	62	1008	5.8	6.4
Juin 2006	5	8704	42.9	55.7
Novembre 2006	7	9968	52.8	63.8

TAB. 6.1 – Classement mondial des différentes évolutions du calculateur TERA selon le TOP500

¹Classement des 500 plus puissants calculateurs mondiaux

6.2 Calculs FDTD massivement parallèles appliqués au LMJ

6.2.1 Intérêt

Les performances annoncées de la machine TERA 10 suscitent un intérêt majeur pour notre application. En effet, une telle puissance de calcul permet d'envisager de traiter, avec la méthode FDTD, des structures 3D de grande taille, maillées avec un nombre de cellules supérieur au milliard. Cela signifie, par exemple, qu'une modélisation de la chambre d'expériences du LMJ est largement réalisable avec une précision centimétrique², jusqu'à un temps physique supérieur à la microseconde³ et en un temps calcul raisonnable.

6.2.2 Le code massivement parallèle «Sophie»

L'utilisation optimale de la puissance du supercalculateur, pour notre application, nécessite l'utilisation d'un code FDTD capable de distribuer les calculs et la taille mémoire d'une manière équilibrée sur plusieurs processeurs. Le temps de calcul ainsi que la taille mémoire gérée par un processeur sont alors théoriquement divisés par le nombre de processeurs utilisés. C'est ce qu'on appelle le parallélisme. Cependant, ce gain de temps calcul n'est que théorique. En effet, lors d'un calcul parallèle à N processeurs, les temps de communication nécessaires aux échanges d'informations entre processeurs ainsi que des charges de calcul par processeur forcément différentes font que le gain en temps de calcul n'est pas linéaire avec le nombre N mais sous linéaire. En outre, plus N est grand, plus ce phénomène s'accroît.

Etant donné que la machine TERA dispose d'un grand nombre de processeurs, un code parallèle doit pouvoir conserver les meilleures performances possibles, lorsque le nombre de processeurs utilisés augmente, en offrant la meilleure «scalabilité». Le développement de tels outils demande la mise en œuvre d'algorithmes spécifiques permettant de minimiser les temps de latence des processeurs. On ne parle alors plus de parallélisme mais de parallélisme massif.

Le code Sophie est un outil élaboré, dans un contexte différent de celui du LMJ, pour la résolution des équations couplées de Maxwell–Vlasov en 3D. Ce code est actuellement en cours de développement au CEA–CESTA dans une version massivement parallèle. La partie Maxwell du couplage est traitée par un algorithme FDTD multiprocesseurs dont le parallélisme est géré par le protocole de communication MPI⁴. Une présentation précise de l'architecture de cette version FDTD seule du code, c'est-à-dire sans le couplage aux équations de Vlasov, est donnée dans l'annexe D.

²Maillage en $\frac{\lambda}{10}$ à 3 GHz d'un volume de 10 m × 10 m × 10 m

³Simulation nécessitant environ 100 000 itérations temporelles du schéma FDTD

⁴Message Passing Interface

6.2.3 Application à la modélisation numérique en FDTD d'une chambre d'expériences laser

6.2.3.1 Objectif

Nous proposons ici de mettre à profit la puissance de calcul offerte par le supercalculateur TERA 10 associée au code massivement parallèle Sophie pour une application LMJ. L'objectif est de réaliser des calculs FDTD intensifs, utilisant un grand nombre de processeurs de TERA, sur des maillages de grande taille d'une chambre d'expériences laser.

Pour le moment, le but n'est pas de mener des simulations «quantitatives», qui permettraient de fournir des ordres de grandeur de l'impulsion électromagnétique qui sera générée dans la chambre du LMJ. En effet, cela nécessite un important travail de recherche préalable pour le calcul des termes sources d'excitation de la structure. C'est pourquoi nous présentons par la suite uniquement des calculs, que nous pourrions qualifier de «qualitatifs», permettant de démontrer la faisabilité de la modélisation de la chambre LMJ en FDTD avec le code Sophie.

6.2.3.2 Réalisation de maillages FDTD 3D de grandes tailles

La première étape de la simulation est de générer le maillage de la structure que l'on souhaite modéliser. La réalisation d'un maillage FDTD pour le code Sophie s'avère plus complexe qu'il n'y paraît. En effet, Sophie n'étant qu'un solveur FDTD, il ne dispose pas de mailleur intégré. Il est donc nécessaire d'utiliser un logiciel spécialisé dans la création de maillages que l'on appelle «mailleur». Cependant, les logiciels d'électromagnétisme transitoire du commerce⁵ disposent en général tous de leur propre mailleur intégré. C'est pourquoi il n'existe pas de mailleur du commerce adapté permettant de créer simplement des maillages FDTD. En outre, le grand nombre de cellules contenues dans les maillages que nous souhaitons générer pose un problème de ressources lors de la création de ceux-ci par un logiciel non adapté.

Ainsi, un logiciel du commerce ne peut pas être utilisé tel quel pour la réalisation des maillages dont nous avons besoin et nécessite une adaptation préalable. De plus, les mailleurs intégrés dans les codes FDTD du commerce, qui eux sont parfaitement adaptés à notre problème, ne peuvent pas être utilisés de façon indépendante. C'est pourquoi, nous avons décidé, pour le moment, de générer ces maillages «par programme», en Fortran 90, en attendant de régler ce problème de mailleur.

La structure d'un maillage FDTD peut facilement être décrite informatiquement par un tableau d'entiers à 3 dimensions, $\text{Tab}(i, j, k)$ de taille $N_x \times N_y \times N_z$. Les entiers N_x , N_y et N_z représentent le nombre de cellules par direction contenues dans le maillage.

⁵Tels que : CST-Microwave Studio, SEMCAD X, EMPIRE, XFDTD et bien d'autres encore

La figure 6.2 présente un exemple d'une partie de ce fichier pour un maillage de la chambre LMJ contenant 80 cellules par direction. Le chiffre 1 est associé au matériau «vide» et le chiffre 0 au matériau «métal parfaitement conducteur». Une fois créé, ce fichier peut être très simplement relu par le logiciel Matlab avec lequel il est ensuite possible d'afficher en 3D le maillage.

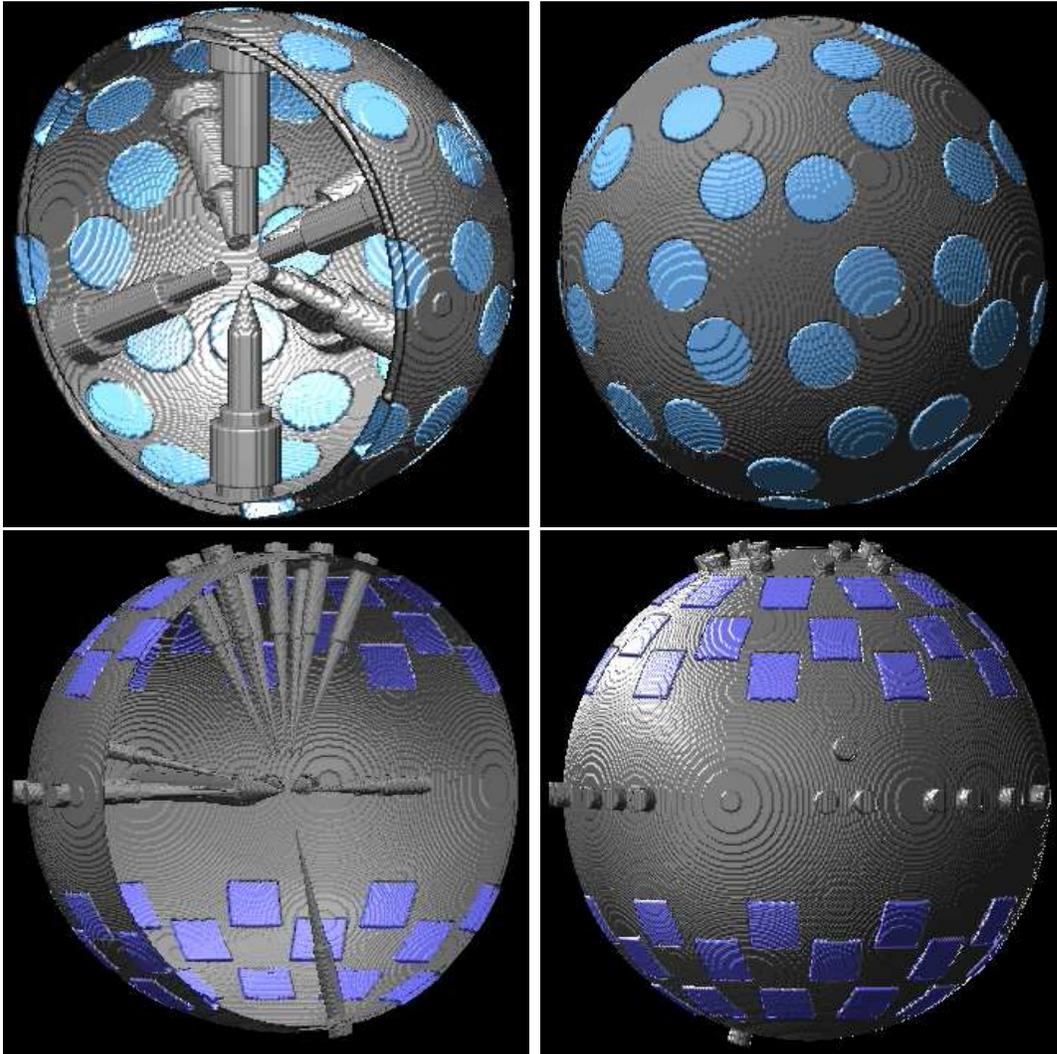


FIG. 6.3 – Visualisation Matlab 3D des maillages des chambres d'expériences Omega et LMJ

Sur la figure 6.3 sont présentées des visualisations 3D des maillages des chambres d'expériences d'Omega et du LMJ. La chambre d'Omega (3.2 m de diamètre) a été modélisée, d'après les plans fournis, avec ses 60 hublots laser à sections circulaires (44 cm de diamètre), son porte cible et 11 SID. De même, la chambre LMJ (10 m de diamètre) a été représentée avec ses 60 trous à sections rectangulaires (1.1 m \times 1m), son porte cible et 36 SID.

Pour des raisons de ressources mémoires nécessaires à l'affichage, nous n'avons pas réussi à visualiser, sur le PC à 1 Go de RAM utilisé, des maillages contenant un nombre de cellules supérieur à $275 \times 275 \times 275$.

Cependant, cette visualisation 3D n'est pas une fin en soi. Elle ne sert qu'à vérifier les maillages avec relativement peu de mailles. Une fois validé, le maillage est ensuite généré avec un plus grand nombre de cellules. Par exemple, dans le cas des calculs présentés par la suite, le maillage de la chambre Omega était composé de 27 millions de cellules tandis que celui de la chambre LMJ en contenait 1 milliard⁶.

Le fichier `maillage.msh` alors créé nécessite un espace disque assez volumineux qui croît proportionnellement avec le nombre de cellules contenues dans le maillage. En effet, pour le maillage Omega à 27 millions de cellules, ce fichier a une taille de 26 Mo tandis que pour le maillage de la chambre LMJ, sa taille est de 1.3 Go (voir tableau 6.2). Ce fichier n'est en fait que temporaire puisqu'il est ensuite relu par un programme Fortran pour être transformé en un fichier `maillage.grf` au format GORF qui est le format de maillage compatible avec le code Sophie.

Maillages	Nb total de cellules	Taille fichier <code>maillage.msh</code>	Taille fichier <code>maillage.grf</code>	Nb cellules matériaux	Nb facettes PEC	Temps CPU
OMEGA	27.0×10^6	26 Mo	23 Mo	375×10^3	487×10^3	3 min
LMJ	1×10^9	1.29 Go	700 Mo	6.6×10^6	8.3×10^6	2 h 30 min

TAB. 6.2 – Caractéristiques des maillages générés

Le fichier `maillage.grf` est, dans les cas présentés, moins volumineux que `maillage.msh` car on n'y stocke pas les mailles contenant du vide⁷. Seules les «mailles matériaux» et les facettes de conditions aux limites d'impédance, c'est-à-dire les facettes appartenant à des surfaces parfaitement conductrices dans notre cas, sont repérées dans le formalisme de maillage GORF (voir `nb cellules matériaux` et `nb facettes PEC` dans le tableau 6.2). Ces interfaces sont facilement identifiables à la relecture du fichier `maillage.msh`. Il suffit de repérer les interfaces entre les mailles associées à un matériau quelconque et celles associées au matériau numéroté 0 que nous avons appelé «métal parfaitement conducteur».

Le temps CPU nécessaire pour générer le fichier `maillage.grf` est bien sûr proportionnel au nombre de cellules du maillage. Sur un unique processeur de TERA, à peine 3 min sont nécessaires pour créer le maillage à 27 millions de mailles de la chambre Omega, contre un temps de 2 h 30 min pour engendrer le maillage de la chambre LMJ contenant 1 milliard de mailles.

⁶Soit 300 mailles par direction pour Omega et 1000 mailles par direction pour le LMJ

⁷Mailles associées au numéro de matériau 1 sur la figure 6.2

6.2.3.3 Calculs des modes de résonance des chambres Omega et LMJ

- **Objectif et présentation des calculs**

Une chambre d'expériences laser est une structure métallique fermée donc résonante. Celle-ci est néanmoins percée de hublots et remplie par différents objets tels des SID, un porte cible, des diagnostics, etc. Ces caractéristiques ont une influence sur les résonances de la structure. Dans ce qui suit, nous présentons une étude, par des calculs FDTD, de l'évolution des modes de résonance des chambres d'expériences d'Omega et du LMJ en fonction des caractéristiques géométriques prises en compte dans le maillage.

Dans un premier temps, les fréquences de résonance d'une sphère parfaitement conductrice fermée, de même diamètre que celui de la chambre d'expériences considérée, sont calculées. Puis ces résultats sont comparés à des valeurs de fréquences de résonance calculées analytiquement. Cette comparaison permet d'évaluer la validité de la méthode de détermination de ces fréquences présentée dans le paragraphe suivant. Ensuite, nous observons l'impact, sur ces résonances, de l'ajout de différents paramètres géométriques dans le maillage (hublots, porte cible, SID). Les calculs FDTD ont été réalisés avec le code Sophie sur le supercalculateur TERA en utilisant les maillages des chambres d'Omega et du LMJ présentés précédemment.

- **Méthode de détermination des résonances**

Bien qu'il soit préférable d'utiliser une méthode de résolution fréquentielle des équations de Maxwell pour les études modales de structures résonantes, il est possible de faire de telles études avec une méthode temporelle telle que la FDTD. Le principe utilisé ici consiste à exciter la structure à l'aide de plusieurs sources ponctuelles dipôlaires. Leur forme temporelle est une gaussienne d'une largeur de bande $[0 : f_{\max}]$ avec f_{\max} correspondant à une longueur d'onde égale à $10 \cdot \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ⁸. On laisse alors évoluer le système jusqu'à un temps physique T_{\max} tout en enregistrant les variations du champ électromagnétique en différents points d'observation. On calcule ensuite les transformées de Fourier des évolutions temporelles, évaluées en ces différents points, normalisées par rapport au spectre de l'excitation. L'analyse du module de ces transformées permet de déterminer les différents modes de résonance.

Les transformées de Fourier sont des transformées discrètes évaluées avec Matlab par des FFT⁹. La résolution fréquentielle Δf du calcul d'une transformée de Fourier discrète est liée au temps T_{\max} par $\Delta f = \frac{1}{T_{\max}}$. Les fréquences de résonance des structures que nous étudions pouvant n'être séparées que de quelques MHz voire moins, une résolution Δf inférieure à 500 kHz est choisie pour les calculs, soit un temps T_{\max} supérieur à 2 μ s.

⁸La finesse du maillage est donc en $\frac{\lambda_{\min}}{10}$ pour cette excitation.

⁹Fast Fourier Transform

La résolution spatiale des maillages réalisés étant centimétrique, un pas de temps de l'ordre de 25 ps est imposé par le critère de stabilité de la méthode FDTD. Cela signifie que pour atteindre un temps physique T_{\max} supérieur à 2 μs , il est nécessaire d'effectuer une centaine de milliers d'itérations du schéma FDTD.

Etant donné la taille des maillages ainsi que le nombre d'itérations à réaliser, des calculs massivement parallèles s'imposent. Les résultats présentés par la suite ont été obtenus par des calculs Sophie massivement parallèles utilisant 256 processeurs dans le cas de la chambre Omega (27 millions de cellules) et 1024 processeurs dans le cas de la chambre LMJ (1 milliard de mailles).

De façon à capter un maximum de modes, 80 points d'observation des champs sont disposés dans la chambre d'expériences. La source d'excitation de la structure est, quant à elle, composée de 80 dipôles aléatoirement répartis. Une dizaine de couches CPML est disposée au bord du domaine pour simuler l'espace ouvert. Cela permet d'absorber les champs diffractés par les hublots de façon à ne pas perturber le calcul des modes de la chambre d'expériences.

- **Résultats obtenus et analyses**

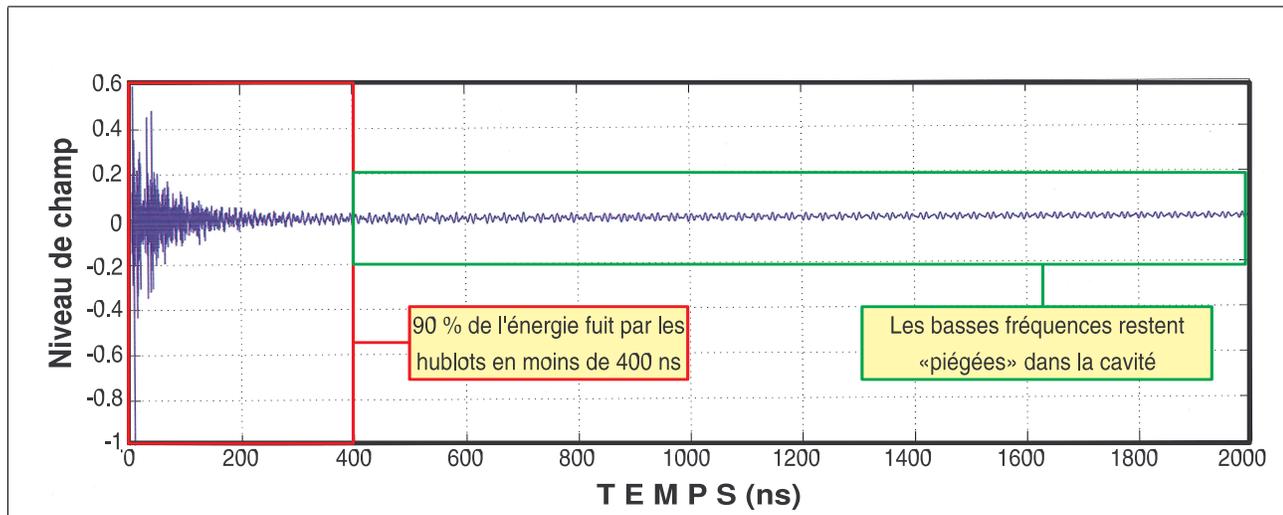
- **Evolution temporelle des champs**

Les courbes a et c-figure 6.4 montrent l'évolution dans le temps du champ électromagnétique calculé en un des points d'observation situés à l'intérieur de la chambre d'Omega ou du LMJ. Les oscillations observables sur ces courbes sont le résultat des réflexions multiples sur les parois métalliques de la chambre. Ceci montre bien le caractère résonant de ce type de structure.

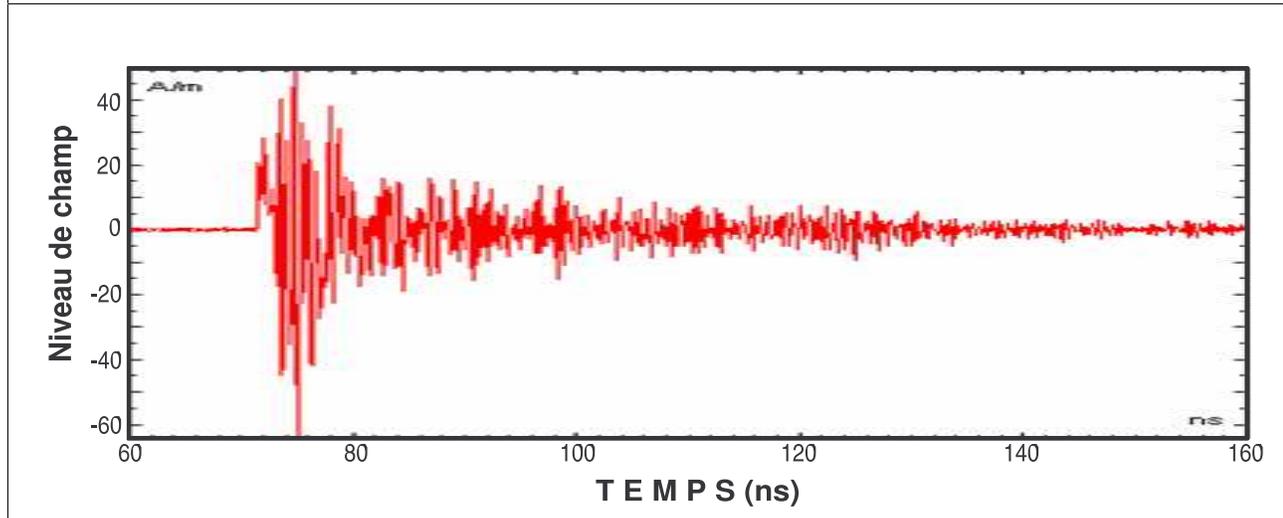
Cependant, la décroissance de l'amplitude du signal calculé limite ce phénomène de résonance. Comme on peut le remarquer sur la figure 6.5, représentant l'interaction d'une impulsion de champ à l'intérieur de la chambre Omega, à chaque réflexion sur la paroi, une partie de l'énergie de l'onde est dissipée à travers les hublots. La modélisation effectuée ne contenant pas de matériaux à pertes, les fuites à travers les hublots sont la seule cause de perte d'énergie.

La dynamique des phénomènes est similaire sur les mesures de champs, réalisées lors des campagnes de tir à Omega, dont un des résultats est présenté sur la courbe b-figure 6.4. En effet, on peut observer, à la fois sur la mesure et sur le calcul, qu'une grande partie de l'énergie s'est «échappée» de la chambre après 200 ns dans le cas Omega. La chambre LMJ étant d'une taille beaucoup plus importante, le calcul montre qu'il faut attendre environ 1 μs avant que le signal ne revienne à zéro.

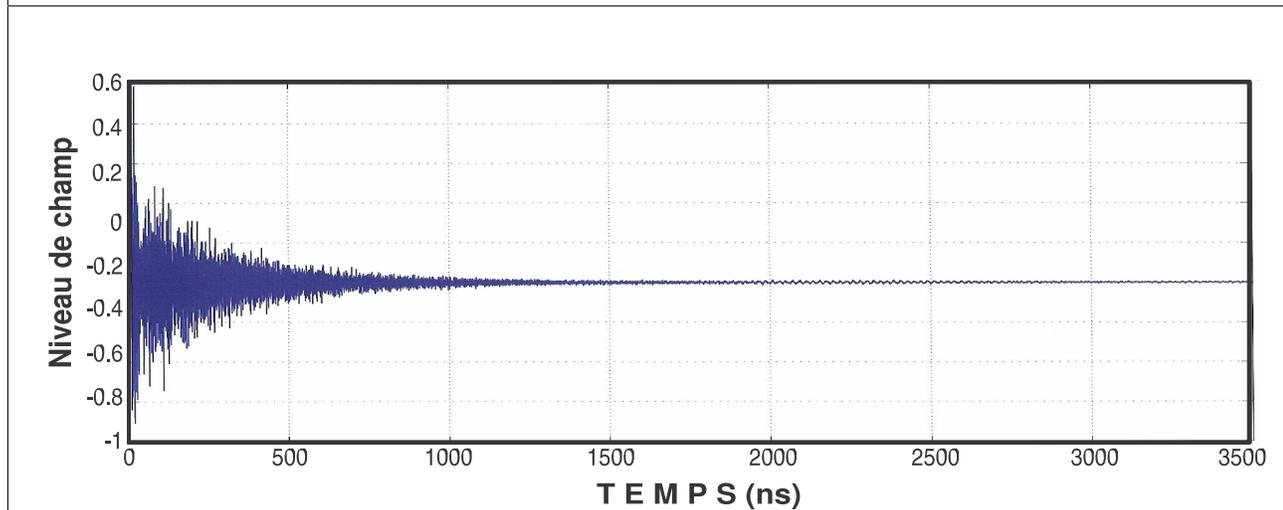
Une fois l'énergie presque totalement dissipée, le signal continue à osciller légèrement autour de zéro (voir figure 6.4). En effet, les ondes dont la longueur d'onde est trop grande devant le diamètre des hublots restent piégées à l'intérieur de la structure.



a- Evaluation numérique de la forme temporelle du champ EM dans la chambre Omega



b- Mesure du champ magnétique à 1 m de la source lors d'un tir Omega



c- Evaluation numérique de la forme temporelle du champ EM dans la chambre LMJ

FIG. 6.4 – Evolution temporelle du champ électromagnétique dans une chambre d'expériences

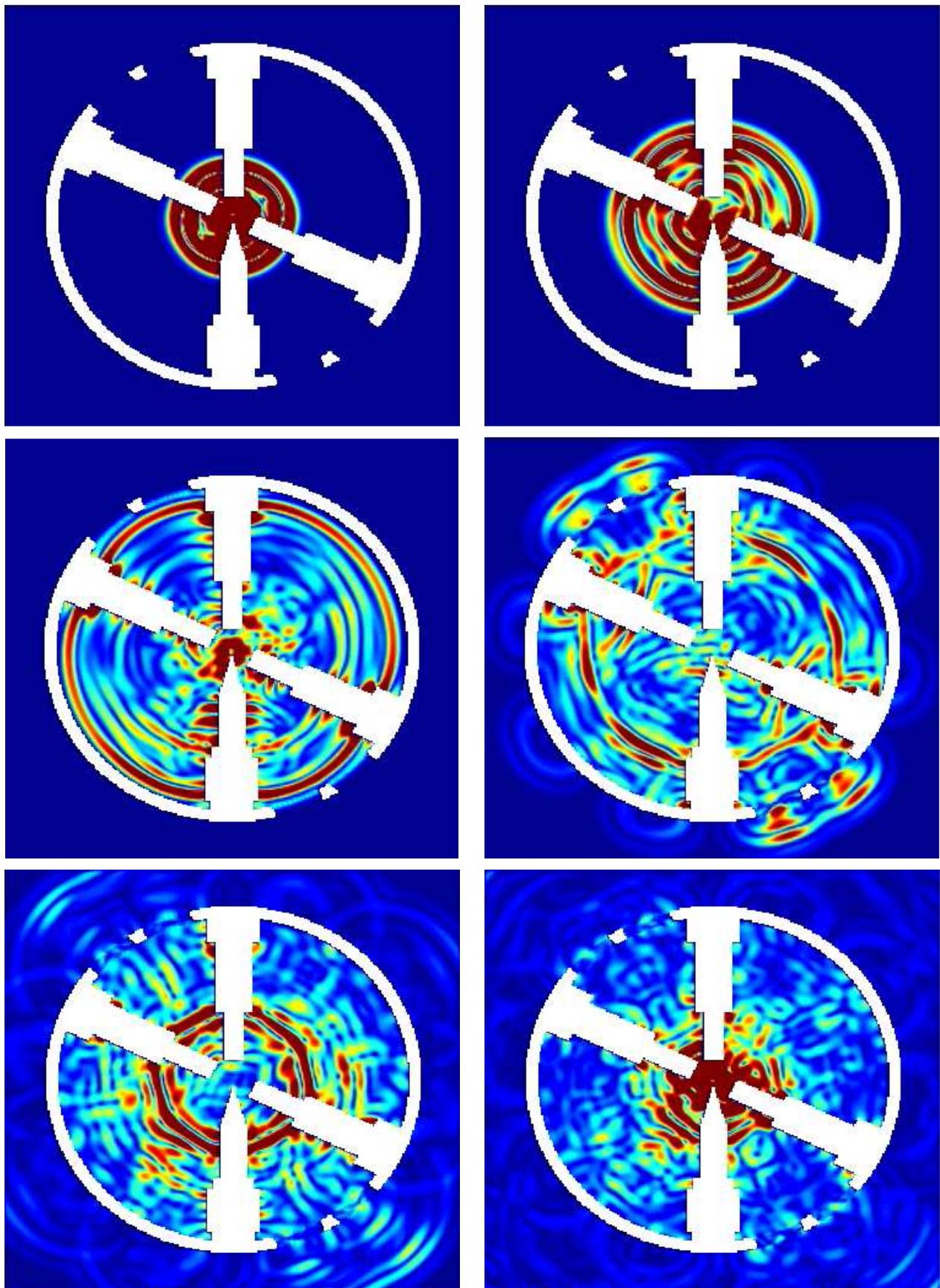


FIG. 6.5 – Excitation de la chambre du laser Omega par une impulsion de champ au centre

- Modes de résonance

Les courbes a–figure 6.6 et a–figure 6.7 présentent les résultats de calcul des modes des sphères fermées parfaitement métalliques de rayons identiques aux chambres Omega et LMJ. Les modules des transformées de Fourier calculées ont l’allure d’un spectre de raies. Les fréquences de résonance sont définies par la localisation de ces raies. Par cette méthode de calcul, sur les 50 premiers modes calculés analytiquement, 46 sont identifiés avec une erreur inférieure à 0.5 %. Les résolutions Δf utilisées¹⁰ n’ont pas permis d’identifier quatre de ces modes. La méthode de calcul analytique de ces fréquences et la comparaison à ceux obtenus sur les courbes a–figure 6.6 et a–figure 6.7 sont présentées dans l’annexe E. Les résultats ainsi obtenus valident la technique proposée de calcul des modes de résonance par l’intermédiaire d’un calcul FDTD.

Les courbes b et c–figure 6.6 et b–figure 6.7 montrent l’évolution des modes lorsque les hublots, puis les SID, sont pris en compte dans le maillage. Comme on peut le remarquer sur l’évolution temporelle du champ électromagnétique dans chacune des structures (voir figure 6.4), la quasi totalité de l’énergie fuit par les hublots. Seules les basses fréquences restent piégées dans la chambre. C’est pourquoi les modules des transformées de Fourier calculées n’ont plus des allures de spectres de raies au-delà d’une certaine fréquence.

D’après les résultats obtenus, la prise en compte des hublots filtre les hautes fréquences. La structure n’admet plus que des résonances à basse fréquence, quasiment identiques à celles de la sphère fermée. L’ajout des SID modifie la position des résonances basses fréquences et accroît légèrement la réponse de la structure aux hautes fréquences. En effet, l’insertion d’objets à l’intérieur de la chambre tend à «raccourcir» la longueur caractéristique de la structure.

- Performances informatiques

Le tableau 6.3 indique les performances informatiques obtenues, avec le code Sophie en multi-processeurs sur TERA 10, lors des calculs présentés précédemment. Le nombre de processeurs utilisés, pour chacun des deux calculs, a été choisi de façon à ce que chaque processeur ait à gérer un domaine d’une taille inférieure à $100 \times 100 \times 100$ cellules. Ainsi, pour le cas Omega, à 27 millions de mailles, 256 processeurs ont été utilisés, ce qui représente des domaines par processeur d’environ 50 mailles par direction. Dans le cas LMJ, le calcul a été réparti sur 1024 processeurs pour une taille de domaine de l’ordre de 100 cellules par direction. Dans ce dernier cas, il est difficile de réaliser des calculs avec une taille de domaine par processeur équivalent au cas Omega. En effet, il serait nécessaire de mobiliser plus de 6000 processeurs de TERA c’est-à-dire environ 65 % des capacités du supercalculateur.

¹⁰500 kHz ($T_{\max} = 2 \mu\text{s}$) dans le cas Omega et 285 kHz ($T_{\max} = 3.5 \mu\text{s}$) dans le cas LMJ

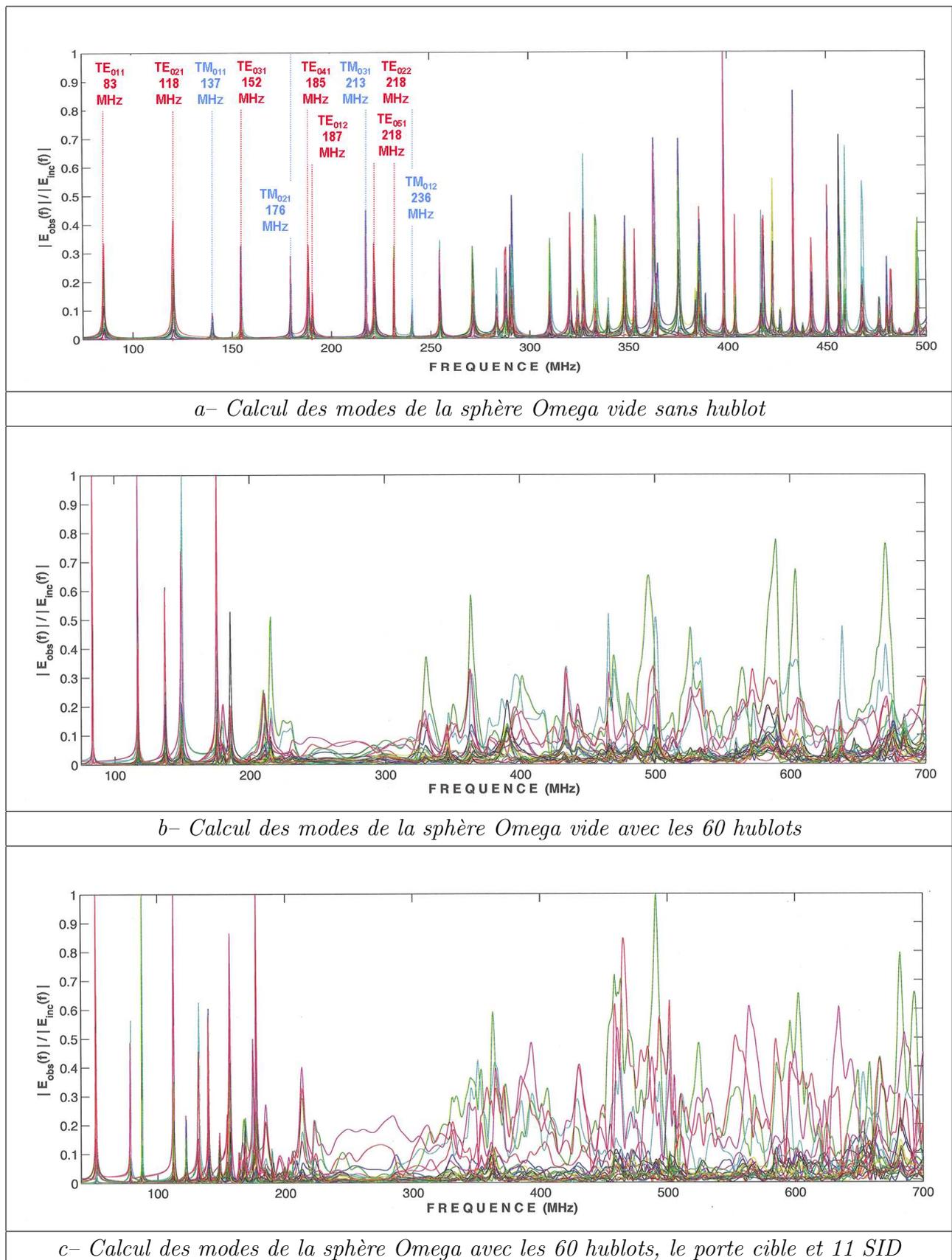
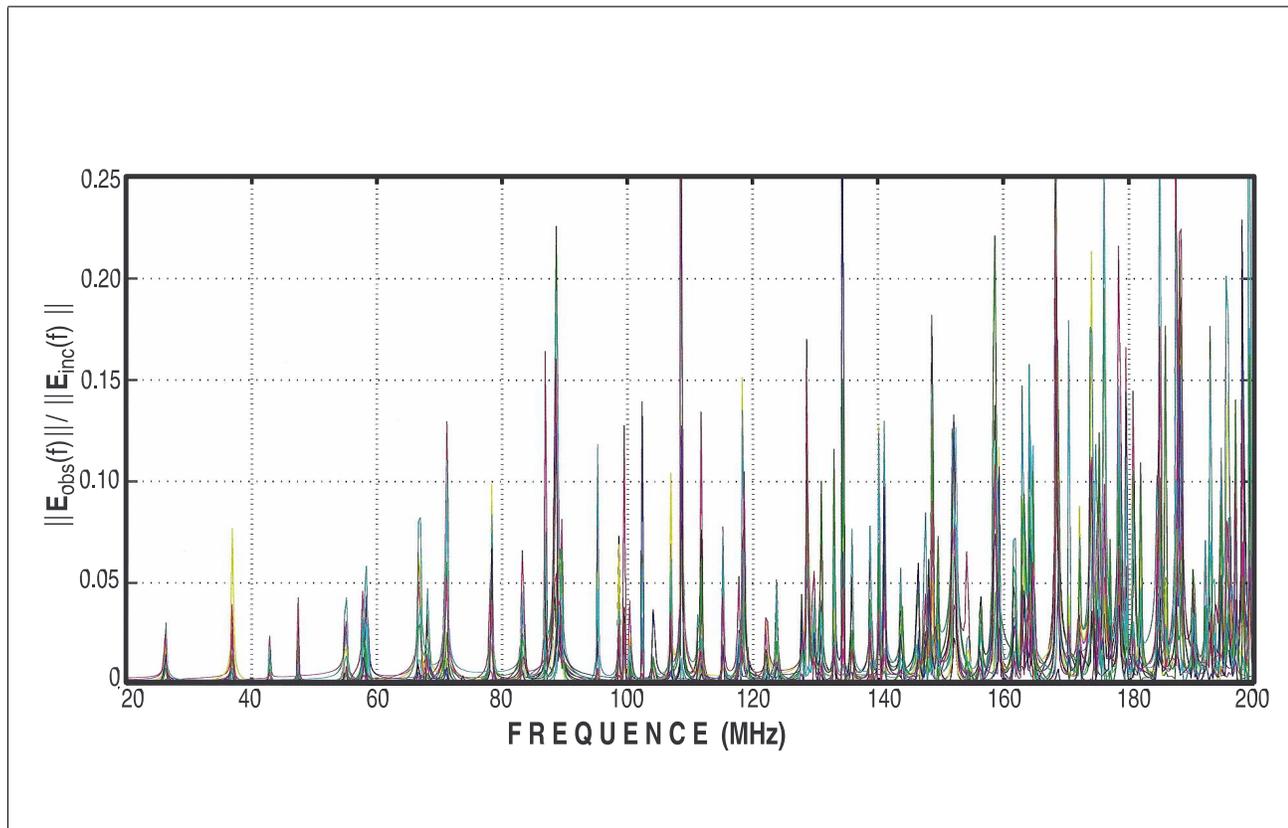
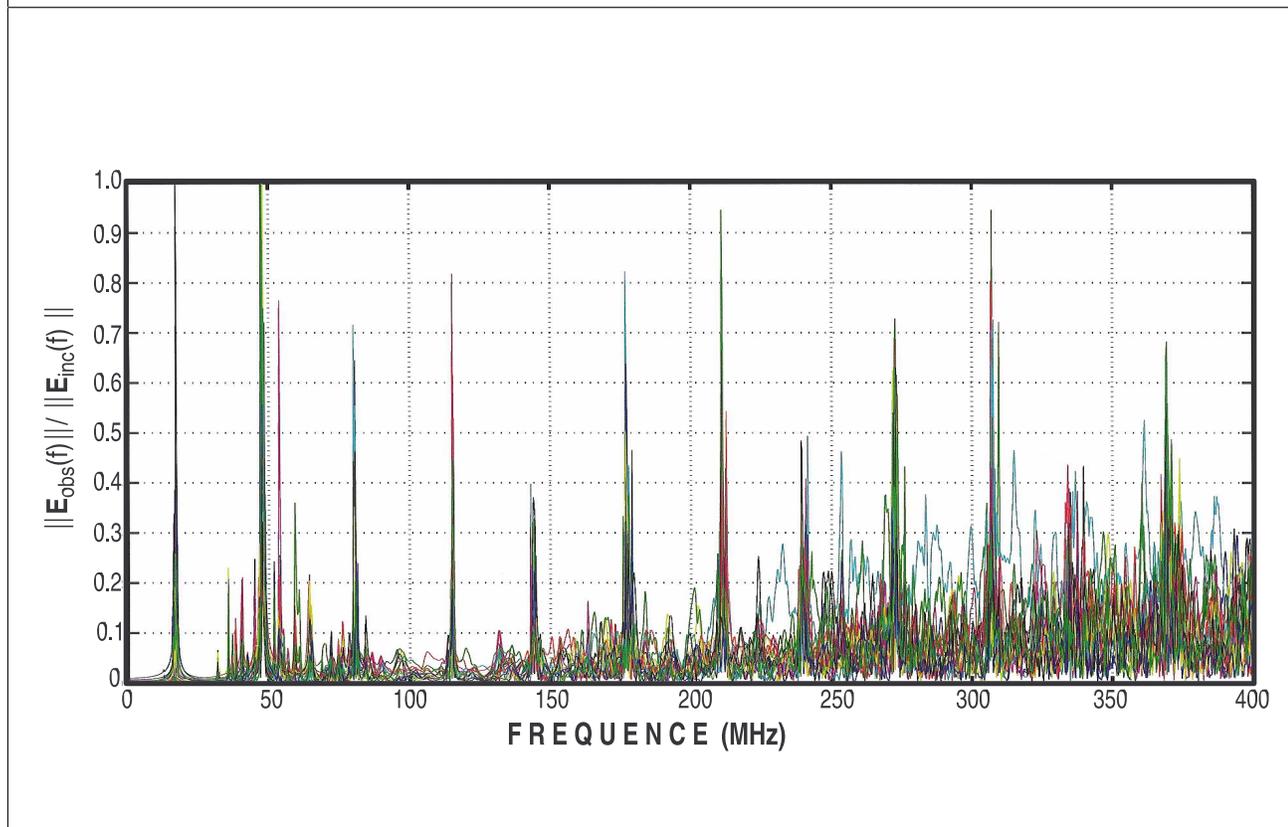


FIG. 6.6 – Résultats des calculs de modes de résonance de la chambre Omega



a- Calcul des modes de la sphère LMJ vide sans hublot



b- Calcul des modes de la sphère LMJ avec les 60 hublots, le porte cible et 36 SID

FIG. 6.7 – Résultats des calculs de modes de résonance de la chambre LMJ

Pour atteindre des temps physiques de $2 \mu s$ (Omega) et $3.5 \mu s$ (LMJ), 80 000 itérations temporelles, dans un cas, et 165 000, dans l'autre, ont été nécessaires. Les temps CPU nécessaires à ces calculs, environ 20 minutes pour le cas Omega et environ 10 heures dans le cas LMJ, sont tout à fait satisfaisants. En effet, en comparaison, le cas à 1 milliard de mailles nécessiterait largement plus de 50 jours de calculs en monoprocesseur.

Calcul	Nb total de cellules	Temps T_{\max}	Nombre d'itérations	Nb proc	Temps CPU	Puissance totale	Puissance/ processeur
OMEGA	27.0×10^6	$2 \mu s$	80 000	256	1200 s	65 GFlops	250 MFlops
LMJ	1×10^9	$3.5 \mu s$	165 000	1024	36 600 s	160 GFlops	160 MFlops

TAB. 6.3 – Performances informatiques en fonction du cas traité

De ces temps CPU, on obtient facilement le nombre de cellules traitées par seconde. Dans le cas à 27 millions de mailles, sur 256 processeurs, 1.8 milliards de cellules sont traitées par seconde, ce qui représente une puissance «développée» de l'ordre de 65 GFlops¹¹. Pour la modélisation de la chambre LMJ, sur 1024 processeurs, 4.5 milliards de cellules sont traitées par seconde, soit une puissance totale de 165 GFlops. Remarquons cependant que la performance informatique par processeur diminue, dans le cas LMJ, en passant de 250 MFlops/proc pour le cas Omega à 160 MFlops/proc. Ceci est dû à la dépendance sous linéaire des performances d'un calcul parallèle en fonction du nombre de processeurs utilisés.

6.3 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence que l'utilisation de la puissance de calcul du supercalculateur TERA 10 associée au code FDTD massivement parallèle Sophie, permet de modéliser, en FDTD, une structure de la taille de la chambre d'expériences du LMJ avec une résolution spatiale centimétrique. En effet, le temps CPU inférieur à 10 heures, pour le traitement d'un cas de calcul à 1 milliard de cellules sur 165 000 itérations, montre l'intérêt du parallélisme massif pour notre application. Ces performances permettent même d'envisager de traiter des cas à plusieurs dizaines de milliards de cellules, ce qui met à portée la modélisation du hall d'expériences (HE) dans son ensemble avec une précision centimétrique.

¹¹On considère ici qu'une itération du calcul nécessite 36 opérations par mailles, ce qui est exact pour un calcul dans le vide.

Comme nous avons pu le constater au début de ce chapitre, le facteur limitant de ce type de modélisation est la réalisation du maillage. En effet, les maillages FDTD, utilisés pour des calculs Sophie, sont actuellement générés «par programme» en Fortran 90 en l'absence d'outils de maillage adaptés. Sachant que générer un maillage à 1 milliard de mailles de la chambre LMJ nécessite un temps CPU de 2 h 30 min, la création d'un maillage, à 50 milliards de cellules, du HE en un temps raisonnable devient peu crédible avec cette technique. La solution pourrait venir de l'utilisation, ou du développement¹², d'un outil de maillage adapté lui aussi massivement parallèle.

Enfin, n'oublions pas que l'objectif final de modélisations de ce type est d'évaluer le champ électromagnétique qui règnera à l'intérieur et à l'extérieur de la chambre d'expériences lors d'un tir à gain sur le LMJ. Or, les calculs massivement parallèles présentés dans ce chapitre, ne sont que «qualitatifs». Outre la démonstration de la faisabilité de calculs FDTD sur des cas à plusieurs milliards de mailles, ces calculs permettent juste d'apprécier le caractère résonant d'une structure telle qu'une chambre d'expériences et la diffraction du champ électromagnétique interne à travers les hublots.

Il est donc clair que la suite logique de ce travail est la réalisation de simulations «quantitatives» permettant de fournir des spécifications de niveaux de champs à l'intérieur et à l'extérieur de la chambre. Ceci nécessite de calculer les sources réelles d'excitation du système. L'ambiance électromagnétique, engendrée à l'intérieur de la chambre, provient du champ normal à la paroi lui-même dû aux électrons arrachés à celle-ci par le rayonnement induit par un tir. Une première méthode de modélisation consiste à représenter ce champ normal par un réseau de dipôles perpendiculaires à la paroi. L'intensité et la forme temporelle des sources dipolaires peuvent être calculées par l'intermédiaire d'un code d'interaction rayonnement–matière tel que MCNP. La mise en œuvre de ce type de simulation est actuellement en cours.

¹²Si ce genre d'outil n'existe pas

Bibliographie

- [II-1] K. S. YEE, «*Numerical Solution of Initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media*», IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. 14, No. 3, pp. 302–307, Mai 1966
- [II-2] R. COURANT, K. O. FREIDRICH, LEWY, «*On the Partial Difference of Mathematical Physics*», I.B.M Journal, 1967
- [II-3] A. TAFLOVE, «*Computational Electrodynamics*», 2ème édition, Chapitre 4 : *Numerical Dispersion and Stability*, Boston-London Artech House, 2000
- [II-4] F. EDELVIK, R. SCHUMANN, T. WEILAND, «*A General Stability Analysis of FIT/FDTD Applied to Lossy Dielectrics and Lumped Elements*», International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks. Devices and Fields, Vol. 17, pp.407–419, 2004
- [II-5] B. BEILLARD, «*Définition d'outils électromagnétiques transitoires adaptés à la détermination de la surface équivalente radar*», Thèse de doctorat, Université de Limoges, Mars 1996
- [II-6] R. M. ALFORD, K. R. KELLY, D. M. BOORE , «*Accuracy of Finite Difference Modeling of the Acoustic wave equation*», Geophysics, Vol. 39, No. 6, 1974
- [II-7] M. A. DABLAIN , «*The Application of High Order Differencing for the Scalar wave equation*», Geophysics, Vol. 51, No. 1, 1986
- [II-8] I. S. KIM, W. J. R. HOEFFER «*A Local Mesh Refinement for the Time–Domain Difference Method Using Maxwell's Curl Equations*», IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, Vol. 38, No. 6, pp. 812–815, Juin 1990
- [II-9] T. FOUQUET, «*Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*», Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, Juin 2000
- [II-10] J. RODRIGUEZ-GARCIA, «*Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique*», Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, Décembre 2004
- [II-11] F. DENANOT, «*Techniques de sous maillage dans la méthode FDTD, apports de l'approche variationnelle*», Thèse de doctorat, Université de Limoges, Février 2005

- [II-12] M. OKONIEWSKI, E. OKONIEWSKA, M. A. STUCHLY, «*Three-Dimensional Subgridding Algorithm for FDTD*», IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. 45, No. 3, pp. 422–429, Mars 1997
- [II-13] S. S. ZIVANOVIC, K. S. YEE, K. K. MEI, «*A subgridding Method for the Time-Domain Finite-Difference Method to solve Maxwell's Equations*», IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, Vol. 39, No. 3, pp. 471–478, Mars 1991
- [II-14] D. T. PRESCOTT, N. V. SHULEY, «*A Method for Incorporating Different Sized Cells into the Finite-Difference Time-Domain Analysis Technique*», IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 2, No. 11, pp. 434–436, Novembre 1992
- [II-15] SHU-HAI SUN, C. T. M. CHOI, «*A New Multilevel Subgridding Scheme for Two-Dimensional FDTD Method*», IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 40, No. 2, pp. 1025–1028, Mars 2004
- [II-16] SHU-HAI SUN, C. T. M. CHOI, «*A New Subgridding Scheme for Two-Dimensional FDTD and FDTD(2,4) Methods*», IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 40, No. 2, pp. 1041–1044, Mars 2004
- [II-17] M. J. WHITE, M. F. ISKANDER, ZHENLONG HUANG, «*Development of a Multigrid FDTD Code for Three-Dimensional Applications*», IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. 45, No. 10, pp. 1512–1517, Octobre 1997
- [II-18] T. WEILAND, «*Time Domain Electromagnetic Field Computation With Finite Difference Methods*», International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, Vol. 9, pp. 295–319, 1996
- [II-19] P. THOMA T. WEILAND, «*A consistent subgridding Scheme for Finite Difference Time Domain Method*», International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, Vol. 9, pp. 359–374, 1996
- [II-20] M. CLEMENS, T. WEILAND, «*Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique*», Progress in Electromagnetics Research, Vol. 32, pp. 65–87, 2001
- [II-21] M. SCHUHMAN, T. WEILAND, «*Conservation of Discrete Energy and Related Laws in the Finite Integration Technique*», Progress in Electromagnetics Research, Vol. 32, pp. 301–316, 2001
- [II-22] P. THOMA, T. WEILAND, «*Numerical Stability of Finite Difference Time Domain Methode*», IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 34, No. 5, pp. 2740–2743, Spetembre 1998
- [II-23] K. XIAO, D. J. POMMERENKE, J. L. DREWNIAK, «*A Three-Dimensional FDTD Subgridding Method with Separate Spatial and Temporal Subgridding Interfaces*», IEEE proceeding, 2005

- [II-24] A. R. ZAKHARIAN, M. BRIO, J. V. MOLONEY, «*FDTD based second-order accurate local mesh refinement method for Maxwell's equations in two spaces dimensions*», Math. Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 497–513, Août 2004
- [II-25] M. BERGER, «*Adaptative Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations*», Thèse, 1982
- [II-26] M. J. BERGER, J. OLIGER, «*Adaptative Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations*», J. Comput. Phys., No.82, pp. 484–512, 1984
- [II-27] M. J. BERGER, P. COLELLA, «*Local Adaptative Mesh refinement for socks hydrodynamics*», Journal of Computational Physics, No. 82, pp. 64–84, 1989
- [II-28] M. J. BERGER, R. J. LEVEQUE, «*Three Dimensional Adaptative Mesh Refinement for Hyperbolic Conservation Laws*», SIAM J. Sci. Comput., No. 15, pp. 127–138, 1994
- [II-29] M. J. BERGER, R. J. LEVEQUE, «*Adaptative mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems*», SIAM J. Numer. Analysis, No. 35, pp. 2298–2316, 1998
- [II-30] J. A. Roden, S. Gedney, «*Convolution PML (CPML) : an efficient FDTD implementation of the CFS–PML for arbitrary media*», Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 27, No. 5, 334-339, 2000

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés dans le contexte de la vulnérabilité des systèmes électriques du LMJ soumis à l'ambiance radiative et électromagnétique engendrée par un tir à gain. L'objectif de ces travaux a été d'initier la mise en place de moyens de simulation numérique répondant aux exigences spécifiques requises pour mener à bien des études de vulnérabilité pour le LMJ.

Ce travail a été initialement motivé par la problématique «locale» de la vulnérabilité électrique des câbles coaxiaux qui seront présents dans la chambre d'expériences. Lors d'un tir à gain, ces derniers vont se comporter comme des capteurs à la fois sensibles au rayonnement nucléaire, composé essentiellement de neutrons de 14 MeV, et à l'impulsion électromagnétique générée. Le signal utile conduit dans un câble, contenant l'information d'une mesure captée par un diagnostic par exemple, sera alors perturbé par le signal capté par le câble lui-même. En outre, en fonction de l'intensité de ce signal parasite, si les dispositions nécessaires ne sont pas prises, les équipements reliés aux câbles risqueraient d'être endommagés. Les caractéristiques de l'environnement radiatif du LMJ ne pouvant pas être reproduites en totalité en laboratoire, la modélisation et la simulation numérique sont des passages obligés pour la spécification de ces parasites.

Dans la première partie de ce document, nous avons présenté une démarche complète de simulation pour la détermination des courants induits dans un câble coaxial soumis à un environnement radiatif type LMJ. Cette démarche nécessite le calcul d'un contributeur, aux courants induits, d'origine nucléaire, par l'intermédiaire d'un code d'interaction rayonnement-matière, et le calcul d'un contributeur d'origine électromagnétique, par l'intermédiaire d'un code Maxwell-Vlasov. Ces deux types de contributeurs ont, par ailleurs, été mis en évidence lors des campagnes de mesures de courants induits réalisées sur le laser Omega depuis l'année 2003. Les deux contributeurs calculés sont ensuite utilisés comme termes sources d'un modèle de lignes de transmission couplées permettant de modéliser la propagation du signal dans le câble ainsi que le couplage à l'environnement radiatif.

Le travail de modélisation des interactions de l'ambiance neutronique avec un câble est fondé sur les principes d'interaction d'un câble avec un rayonnement de type X ou γ essentiellement

développés dans les années 60–80. Dans ce cas, le signal induit est majoritairement provoqué par la mise en mouvement d'électrons par les photons au sein du diélectrique du câble. Sachant que le rayonnement neutronique n'interagit pas avec le cortège électronique des atomes, nous avons supposé, pour appliquer cette théorie, qu'on pouvait se ramener à un rayonnement photonique γ issu des conversions neutrons \rightarrow gammas se produisant dans la matière environnante.

L'originalité de la démarche présentée réside dans l'utilisation d'un code d'interactions 3D (MCNP), modélisant les interactions neutrons \rightarrow photons \rightarrow électrons, pour le calcul des sources de courants induits par l'ambiance neutronique. Une validation expérimentale portant uniquement sur le calcul de ce terme source a été présentée au chapitre 3. En effet, l'utilisation de câbles semi-rigides, lors des expériences, permet de s'affranchir des parasites électromagnétiques. Bien que les simulations effectuées donnent de bons ordres de grandeur pour un environnement radiatif purement photonique (générateur d'impulsions X Balzac III), les résultats obtenus dans le cas d'une ambiance neutronique (laser Omega) sont peu satisfaisants. En effet, l'intensité calculée est 2 ordres de grandeur en dessous de celle mesurée. Ces résultats peu concluants montrent que la théorie sur laquelle est fondée la démarche de modélisation est incomplète. Celle-ci ne permet donc pas une extrapolation fiable des résultats à l'environnement radiatif du LMJ.

Les réflexions sur la problématique de signaux parasites dans les câbles du LMJ s'orientent désormais vers d'autres interprétations physiques. En effet, ces signaux pourraient provenir de la mise en mouvement de protons au sein du diélectrique lors d'interactions de type (n,p). Des expériences «dédiées» sont mises en œuvre pour mettre en évidence ce phénomène. Les premiers résultats de ces expériences, réalisées sur le laser Omega, sont exposés dans [I-23] et semblent conforter l'originalité des phénomènes mis en jeu.

La question de la quantification des parasites d'origine électromagnétique qui seront induits dans les câbles, peut se classer dans la problématique plus «globale» de la compatibilité électromagnétique des systèmes électriques et électroniques qui seront présents dans le HE. Ainsi, les problématiques câble et CEM nécessitent l'évaluation numérique des niveaux de champs qui pourront être rencontrés dans la chambre et dans le HE.

Dans ce travail, nous recommandons l'utilisation du schéma numérique des différences finies (FDTD) pour la résolution des équations de Maxwell «instationnaires», nécessaire au calcul de l'évolution temporelle du champ électromagnétique. La chambre d'expériences du LMJ étant une structure de grande taille (10 m de diamètre), sa modélisation par la méthode FDTD pose un problème évident de taille mémoire et de temps calcul.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous avons évalué les possibilités de modélisation d'une telle structure en FDTD. Cette méthode étant très contraignante au niveau maillage, puisqu'elle nécessite l'utilisation de maillages cartésiens conformes, nous avons, dans un premier temps,

développé une méthode de raffinement de maillage non conforme spatio-temporel 3D. L'intérêt de cette technique est de pouvoir utiliser une taille de maille adaptée en fonction de la position dans la structure modélisée. Ceci permet d'optimiser la taille mémoire et le temps calcul nécessaires à la simulation. Le point faible des schémas de raffinement pour la FDTD est en général leur stabilité en temps long.

Le schéma de sous maillage présenté dans la section 5.3 est une adaptation, pour la FDTD, de la méthode AMR déjà largement utilisée dans d'autres domaines de la physique tels que la mécanique des fluides ou l'astrophysique. L'algorithme a été développé d'abord en 2D puis en 3D pour un taux de raffinement quelconque. L'intérêt de cette méthode réside dans sa simplicité d'implémentation. De ce fait, la technique proposée pourrait être implantée dans des codes 3D existants, tel que TRIDIMO (Xlim) ou Sophie (CEA), sans difficulté particulière.

Les cas tests de consistance et stabilité menés en 3D ont donné des résultats répondant à nos attentes. En effet, une réflexion numérique, induite par le schéma, inférieure à -40 dB a été observée jusqu'à une taille de maille de $\frac{\lambda}{12}$ dans le maillage grossier. Une stabilité très satisfaisante au-delà de 100 000 itérations a été constatée sur des cas tests en espace confiné très révélateurs des problèmes de convergence. Cette stabilité requiert cependant un critère CFL plus restrictif que celui du schéma de Yee classique.

Nous avons ensuite proposé l'utilisation de cette méthode dans une application pratique pour le LMJ. En effet, le raffinement de maillage pourrait être utile à l'étude des renforcements de champs au niveau de pointes, en particulier à l'extrémité du porte-cible. La possibilité d'emploi de forts taux de raffinement est intéressante dans ce cas. En revanche, d'après les premiers cas tests effectués, cette application nécessite une adaptation locale du schéma d'interpolations spatiales employé dans la méthode proposée.

Les perspectives de ce travail sur le raffinement de maillage pourraient concerner, d'une part, l'amélioration de l'algorithme en lui-même. On pourrait par exemple étudier de façon plus théorique la stabilité, tester le comportement du schéma avec de nouvelles interpolations spatiales, adapter le schéma pour la traversée de matériaux par une zone raffinée, etc. D'autre part, les perspectives pourraient concerner l'application de la méthode à des cas plus évolués, faisant intervenir une structure de grilles hiérarchisées. En revanche, la gestion de telles structures nécessite des développements relevant de l'informatique et non plus du numérique.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons évalué la possibilité d'utiliser la puissance de calcul disponible sur le supercalculateur TERA du CEA associée au code FDTD massivement parallèle Sophie pour notre application. En effet, ce dernier est actuellement en cours de développement au CEA-CESTA dans un contexte différent de celui du LMJ. Les performances, en terme de temps CPU, obtenues sur un cas de calcul modélisant la chambre d'expériences du LMJ avec une précision centimétrique (maillage à 1 milliard de mailles) et utilisant 1024 processeurs du

supercalculateur, montrent tout l'intérêt des calculs massivement parallèles pour l'évaluation des champs dans la chambre LMJ. Ces résultats rendent même envisageable la modélisation de structures encore plus volumineuses, telles que le hall d'expériences, moyennant la possibilité de réaliser les maillages FDTD de grande taille adéquats (plusieurs dizaines de milliards de mailles).

Les gigantesques possibilités de calcul offertes par le parallélisme massif pourrait remettre en question l'intérêt du raffinement de maillage. Cependant, n'oublions pas que la réalisation de calculs massivement parallèles nécessite une machine appropriée à disposition... Ce qui n'est pas forcément le cas, en particulier à l'Xlim par exemple.

En outre, le raffinement de maillage peut être très intéressant dans le cas des problèmes nécessitant la résolution du système d'équations de Maxwell-Vlasov pour lesquels est destiné le code Sophie. En effet, lorsqu'une structure est éclairée par des photons X d'assez basse énergie, les électrons arrachés restent confinés près de la surface dans une épaisseur très fine, de l'ordre de quelques centaines de microns, appelée charge d'espace. A l'image de la couche limite en mécanique des fluides, cette charge d'espace doit être représentée avec plusieurs mailles, d'où l'intérêt de l'utilisation du raffinement de maillage pour modéliser cette couche.

A N N E X E S

Annexe A

Méthode Monte-Carlo pour les codes d'interaction

Cette annexe est inspirée de l'ouvrage de P. Reuss intitulé «*Précis de neutronique*», Cours de neutronique de l'Instn, Collection Génie Atomique, Edition EDP Sciences, 2003.

A.1 Principe d'un code d'interaction

Un code d'interaction permet de simuler numériquement la propagation d'un rayonnement dans la matière. Le logiciel détermine pour chaque famille de particules (n, X, γ , e^- , etc.) composant le rayonnement, à chaque instant et en tout point du volume de calcul considéré, la densité $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t)$ de particules d'énergie E se propageant dans la direction \mathbf{u} . Cette densité vérifie une équation intégral-différentielle connue sous le nom d'équation de Boltzmann.

- **L' Equation de Boltzmann**

Cette équation peut être considérée comme un bilan de conservation de la densité de particules¹ dans un volume quelconque. Pour établir cette équation, considérons un domaine \mathcal{V} de l'espace. Intéressons nous au nombre N_i de particules, appartenant à une famille i , contenues dans \mathcal{V} , ayant une énergie E et se propageant dans la direction \mathbf{u} . En régime instationnaire, le bilan du nombre particules contenues dans le volume \mathcal{V} dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ s'écrit :

$$N_i(t + dt) - N_i(t) = dt \cdot \frac{\partial N_i}{\partial t} = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} d\tau \quad (\text{A.1})$$

¹Comme l'équation de conservation de la masse en mécanique ou l'équation de conservation de la charge en électromagnétisme

En physique nucléaire, on utilise la variable flux de particules Φ plutôt que la densité Γ . Ces deux quantités sont reliées par la relation (A.2). On note v la vitesse de la particule.

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) = v \cdot \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, la relation (A.1) s'écrit sous la forme de l'égalité (A.3).

$$N_i(t + dt) - N_i(t) = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} d\tau \quad (\text{A.3})$$

Pour écrire le second membre de cette équation bilan, il suffit d'évaluer les termes faisant croître ou décroître le nombre de particules contenues dans le volume \mathcal{V} . On distingue trois processus distincts pouvant affecter le nombre N_i .

Les émissions et ré-émissions : le terme issu de ce processus peut se définir comme un terme de production. Il regroupe toutes les particules apparaissant dans le volume \mathcal{V} d'énergie E et de direction \mathbf{u} produites, soit par des sources indépendantes, soit par des interactions avec la matière². En notant Q cette densité de production ou d'émission, on peut écrire le nombre N_q de particules créées dans l'intervalle de temps dt selon la relation (A.4).

$$N_q = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} Q_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) d\tau \quad (\text{A.4})$$

Les chocs et autres interactions : le terme issu de ce processus peut se définir comme un terme de perte. Il regroupe toutes les particules d'énergie E et de direction \mathbf{u} contenues dans \mathcal{V} passant dans un état différent après avoir subi une diffusion élastique ou inélastique par exemple, ou bien disparaissant lors d'une absorption. La densité d'interactions Ψ dans la matière se définit comme le produit $\Psi = \Sigma_t \cdot \Phi$ de la section efficace d'interactions totale de la matière par le flux de particules. Le nombre N_p de particules quittant l'état (\mathbf{u}, E) dans l'intervalle de temps dt dans le domaine \mathcal{V} s'écrit selon la relation (A.5).

$$N_p = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \cdot \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) d\tau \quad (\text{A.5})$$

Les entrées-sorties : on regroupe ici le bilan du nombre N^+ de particules dans l'état (\mathbf{u}, E) entrant dans le volume \mathcal{V} moins le nombre N^- de particules dans le même état sortant de ce même volume. En supposant qu'une particule suit une trajectoire rectiligne entre deux interactions, on définit le vecteur courant de particules \mathbf{J} par le produit $\mathbf{J} = \Phi \cdot \mathbf{u}$. Ainsi, la quantité $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) \cdot \mathbf{n} ds$ représente le nombre algébrique de traversées d'un élément de surface ds orienté par sa normale \mathbf{n} . Si \mathbf{n} est définie comme la normale sortante du volume \mathcal{V} ,

²Comme par exemple une particule qui passerait d'un état (\mathbf{u}', E') à l'état (\mathbf{u}, E) après avoir subi une diffusion dans \mathcal{V} .

en intégrant sur toute la surface S du volume, le bilan d'entrées-sorties du domaine \mathcal{V} pendant l'intervalle de temps dt s'écrit selon la relation (A.6).

$$N^- - N^+ = dt \cdot \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t) \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{A.6})$$

Pour écrire cette intégrale sous forme analogue aux précédentes, c'est-à-dire à l'aide d'une intégrale de volume, on utilise la formule de la divergence qui permet d'écrire la relation (A.7).

$$N^- - N^+ = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} [\mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E, t)] \, d\tau \quad (\text{A.7})$$

Finalement, le bilan de la densité de particules du type i contenues dans le domaine \mathcal{V} dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ s'écrit :

$$N_i(t + dt) - N_i(t) = N_q - N_p - (N^- - N^+) \quad (\text{A.8})$$

Comme le domaine \mathcal{V} est choisi arbitrairement, on peut le rendre aussi petit que l'on veut et donc le réduire à l'élément de volume $d\tau$. Ce qui revient à supprimer les intégrales de volume dans (A.8). En simplifiant par $dt \cdot d\tau$, on obtient l'équation de transport (A.9) ou équation de Boltzmann sous forme différentielle vérifiée par toute population de particules de type i composant le rayonnement.

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \text{div} [\mathbf{u} \cdot \Phi_i] + \Sigma_t \cdot \Phi_i = Q_i \quad (\text{A.9})$$

Comme nous l'avons dit plus haut, on distingue dans le terme source Q (relation A.10) un terme de production provenant de sources autonomes³ noté S_a , et un terme source D provenant des diffusions faisant passer une particule d'un état (\mathbf{u}', E') à l'état (\mathbf{u}, E) .

$$Q = D + S_a \quad (\text{A.10})$$

Le terme source de diffusion D s'explique par l'expression intégrale (A.11). On note Σ_s la section efficace de diffusion.

$$D = \int_0^\infty \iint_{4\pi} [\Sigma_s \{ \mathbf{r}, (\mathbf{u}', E') \rightarrow (\mathbf{u}, E) \} \cdot \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', E')] \, dE' \, d\mathbf{u}' \quad (\text{A.11})$$

Cette intégrale exprime tous les transferts par diffusion depuis une énergie E' et une direction \mathbf{u}' quelconques, susceptibles d'amener une particule à l'énergie E et la direction \mathbf{u} considérées au premier membre de (A.9).

L'équation de Boltzmann étant une équation bilan, l'essentiel de la physique est contenue dans les sections efficaces d'interactions. Celles-ci peuvent provenir de calculs analytiques, de modélisations ou bien de mesures. De ce fait, les logiciels fondés sur cette équation permettent de traiter le problème de la propagation d'une particule quelconque pourvu qu'on leur fournisse le bon lot de sections efficaces.

³Typiquement dans le cas du LMJ, l'implosion de la cible se représente comme une source de neutrons ponctuelle autonome.

- **Découpage en groupes d'énergie**

Pour traiter convenablement les problèmes de propagation de rayonnements de façon numérique, un échantillonnage de la variable énergie E en ce que l'on nomme «groupes d'énergie» est nécessaire. La démarche généralement adoptée est l'approximation multigroupe.

Soit E_{max} l'énergie maximale que peut atteindre une particule. Le principe de la théorie multigroupe consiste à découper l'intervalle global d'énergie $[0, E_{max}]$ en n sous-intervalles numérotés de 1 à n en y plaçant les bornes $\{E_0 = 0, E_1, \dots, E_{n-1}, E_n = E_{max}\}$. Le groupe de particules numéro k est constitué de l'ensemble des particules dont l'énergie se trouve dans l'intervalle numéro k , c'est-à-dire l'intervalle $[E_k, E_{k+1}]$. L'approximation multigroupe consiste à considérer dans chacun des groupes d'énergie k que les particules y ont une énergie constante égale à E_{k+1} ou $\frac{E_k + E_{k+1}}{2}$ par exemple. Ainsi, dans chacun de ces groupes, l'équation de Boltzmann s'écrit de façon monocinétique.

Les équations propres à chacun de ces groupes sont évidemment couplées car, aux vraies sources émettant dans le groupe considéré, s'ajoutent les taux de transfert dans ce groupe depuis les autres groupes. De plus, aux vraies absorptions dans ce groupe s'ajoutent les transferts vers les autres groupes.

D'après ce que nous venons de voir, ces «découpages» nécessitent l'introduction de la notion de bibliothèques de sections efficaces multigroupes. Ainsi, $\Sigma_{t,k}$ représente la section efficace totale pour un groupe énergétique donné et $\Sigma'_{s,k' \rightarrow k}$ désigne la section efficace de diffusion d'un groupe d'énergie k' vers le groupe d'énergie k .

Une structure multigroupe typique à 100 groupes est utilisée pour les calculs de transport de neutrons. Pour les calculs de propagation de photons X ou γ , les sections efficaces varient régulièrement en fonction de l'énergie, le découpage peut être plus grossier. On utilise en moyenne des structures à une vingtaine de groupes.

A.2 La méthode Monte-Carlo

La méthode dite «des ordonnées discrètes» consiste à résoudre numériquement le système d'équations multigroupe couplées à partir d'une discrétisation classique du domaine spatial en mailles et du domaine angulaire en éléments d'angles solides. Elle ne comporte aucune approximation de nature physique autre que les hypothèses admises pour la discrétisation multigroupe du domaine d'énergie. On se rend compte pour des problèmes 3D que le coût en taille mémoire et temps calcul devient prohibitif lorsque la finesse de discrétisation augmente⁴. C'est pourquoi ce type de méthode n'est pas utilisé dans des cas purement 3D. Son utilisation est restreinte à

⁴Nombre de groupes, de mailles et de directions

des cas simples pouvant être traités en 1D, ou bien pour des géométries planes, sphériques ou cylindriques.

Dans le cas de problèmes 3D, ou dans le cas de sections efficaces très irrégulières, la méthode précédente étant inadaptée, on lui préfère une méthode statistique dite de Monte Carlo⁵. Cette méthode consiste à simuler le comportement aléatoire d'une population de particules (neutron, γ , e^- , etc.) générée suivant une distribution fixée et circulant dans le milieu à étudier. La géométrie du problème⁶ est décrite sous forme de régions adjacentes homogènes.

«L'histoire» de chaque particule est suivie depuis sa naissance jusqu'à sa disparition (voir figure A.1) lors d'une absorption ou après avoir traversé la frontière extérieure du domaine de calcul. Une particule est définie par ses coordonnées, les composantes de sa direction de propagation et son énergie. Les interactions d'une particule avec les atomes d'un milieu donné sont traduites sous forme de probabilités discrètes ou de densités de probabilité à partir des sections efficaces totales, partielles ou différentielles du milieu.

Pour conclure, la méthode Monte-Carlo est très utilisée dans les codes d'interaction, car elle permet de traiter les problèmes avec un minimum d'approximations. Cependant, les grandeurs physiques estimées par cette méthode résultent de moyennes calculées après un certain nombre de tirages aléatoires. La précision du calcul est donc liée au nombre de tirages effectués. Ainsi, plus ce nombre est important, plus l'incertitude statistique (écart type) sera faible. L'inconvénient est que cette incertitude ne diminue que comme la racine carrée de l'inverse du nombre de tirages. Par conséquent, un gain d'un facteur 10 sur la précision nécessite 100 fois plus de tirages, donc 100 fois plus de temps calcul...

⁵Cette méthode tire son nom du fait qu'elle est fondée sur le tirage d'évènements aléatoires... ce qui est, comme chacun le sait, l'activité majeure de ce quartier de la principauté de Monaco!

⁶Limite des milieux physiques et frontière extérieure

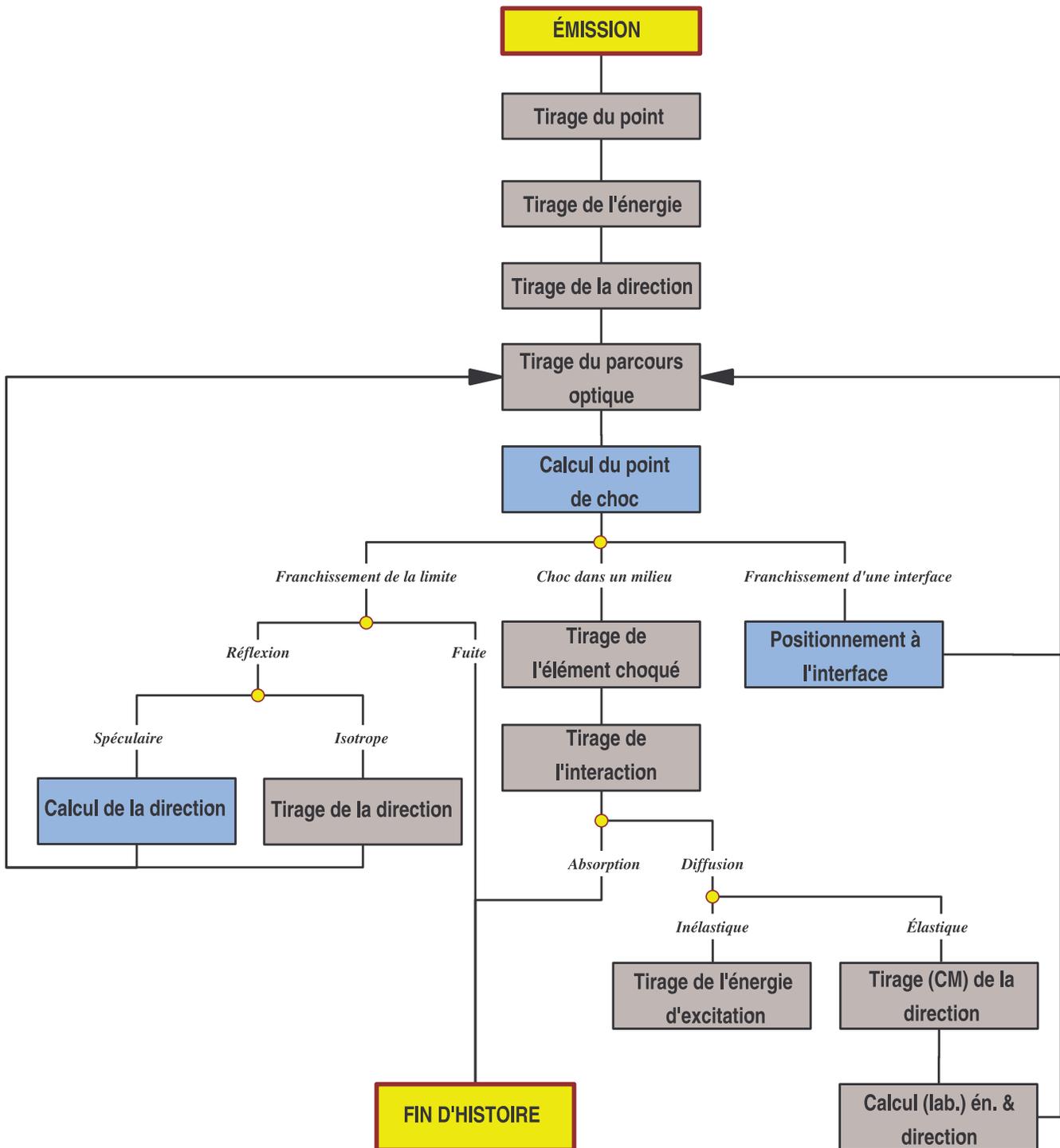


FIG. A.1 – Simulation de l'histoire d'un neutron par la méthode de Monte-Carlo

Annexe B

Principe d'un calcul Maxwell–Vlasov

Cette annexe est tirée de l'article de D. F. Higgins et L. Marin intitulé «*System-Generated EMP*» paru dans IEEE on Antennas and Propagation, Vol. 26, No. 1, Janvier 1978.

B.1 Introduction

Although analytic techniques are extremely useful for providing insight into the basic nature of SGEMP¹, many problems of interest simply cannot be solved without the use of various computer calculations. The computer is obviously useful in obtaining the EM response of complex structures; however, the primary reason for computer usage is the need to obtain a «self-consistent solution» for both the electromagnetic fields and the motion of emitted electrons in the regime where the two effects are highly coupled. Since electron motion determines the resulting electromagnetic fields and electron trajectories are dependent on field strength, some sort of iterative calculation combining the two processes is indicated.

One of more common numerical method for obtaining such «self-consistent» solutions is to use iterative timestepping techniques where time and spatial derivatives are replaced by finite-difference equivalents. Changes in the electromagnetic fields are then calculated assuming electron velocities are constant over the small time step being used. These updated fields are then used to calculate new electron velocities.

B.2 FDTD Approximation of Maxwell's Equations

There are, of course, numerous numerical methods of solving Maxwell's equations. For SGEMP problems the technique most often used is a straightforward time domain finite-difference method which grids up space into a number of small cells, replaces spatial gradients

¹System Generated ElectroMagnetic Pulse

by finite-difference equivalents, and advances the calculation in time by small time steps. The time-dependent Maxwell equations are thus converted to simple algebraic expressions that give the "new" field values in terms of "old" field values in adjacent spatial cells and the appropriate components of the spatial current density \mathbf{J} . Since "old" field values are known from the previous iteration of the time-stepping sequence, one just needs to specify the current density at the time and location of interest. Note that several variations of the exact differencing scheme used are possible. It is quite easy, however, to "center" the finite-difference form of Maxwell's equations in both space and time. Such centered equations tend to be both stable and accurate and are thus adequate for most purposes.

B.3 Self-Consistent calculation of Spatial Current Density

As previously noted, solution of Maxwell's equations requires a knowledge of the spatial current density \mathbf{J} at each time step. The ultimate source of \mathbf{J} is, of course, electron emission from various system surfaces as was discussed in Section II. The electromagnetic fields will, however, change electron trajectories. Thus, to be fully self-consistent, the spatial current density must also be calculated in some timestepping sequence.

The current density can be determined from emitted electron motion in two ways. One way is to assume that the electrons can be grouped into "particles" whose trajectories are then calculated using Newton's law. Initial velocities and directions of these particles are determined from electron emission parameters. The second method for finding the current density is to use the collisionless Boltzmann equation to calculate the phase space distribution function. Electron emission at a surface then becomes a source term for the Boltzmann equation.

Newton's Law (Particle Following) : Ideally, the particlefollowing technique would just calculate the trajectories of every emitted electron. Electron numbers are far too large to make this practical, however ; thus electrons having similar initial velocities and directions are grouped into "particles" which are assigned a total charge equal to that of the electrons represented. The nonrelativistic equation of motion of each particle is just given by equation :

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.1})$$

where the magnetic field force term is often dropped since it is small compared to the electric field term.

The velocity of each particle is thus easily calculated by a time-stepping finite-difference method using the known electromagnetic fields for that increment of time. A second integration just

gives the new position of the particle. Initial velocities depend upon the electron emission energy spectrum and initial positions are determined by the location of the emitting surface.

Thus, at the end of each time step, the position, velocity, and total charge represented by each particle are known quantities. The position of the particle is used to determine in which cell of the electromagnetic finite difference grid the particle is located. The i^{th} particle then contributes a current density \mathbf{J}_i to the cell where

$$\mathbf{J}_i = \frac{Q_i \cdot \mathbf{v}_i}{\Delta V} \quad (\text{B.2})$$

Q_i is the charge of the i^{th} , \mathbf{v}_i is the velocity vector for i^{th} particle, and ΔV is the volume of the finite difference cell. The total current density in a cell is then just the sum of current densities \mathbf{J}_i contributed by each particle in the cell.

Once the total \mathbf{J} for each cell is calculated, the EM difference equations can be advanced one step in time; this gives field values that are then used to move particles, and also gives new positions and velocities. A new value of current density can then be calculated and the entire time-stepping process started once again.

Although simple in theory, such particle following techniques are rather complex in practice. Computer storage and time limitations make the number of particles followed quite small compared to the number of electrons actually emitted. There are thus uncertainties about how well the particle distribution really represents the spatial electron cloud. Numerous techniques have been developed for numerically smoothing variations in the current density.

For example, it is often assumed that each particle has some finite size comparable to the spatial grid size. The current density contributed by the particle is then split up among the adjacent cells containing part of the finite-size particle. Such a smoothing technique eliminates the abrupt transition of a point particle as it moves from one cell to the next during a time step.

Boltzmann's Equation : Another method for finding the current density \mathbf{J} is to use the Boltzmann equation defined by

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = S_0 \quad (\text{B.3})$$

where $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ is the distribution function which describes the emitted electron distribution in phase space and S_0 is a source term determined by electron emission properties at emitting surfaces. If the Boltzmann equation is solved for f , then the current density is given by relation (B.4).

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e \cdot \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\tau \quad (\text{B.4})$$

For the SGEMP case, electrons are created only at emitting surfaces. Therefore, the source term S_0 is nonzero only at emission surface and has a value proportional to the electron emission current.

Note that the Boltzmann equation, like Newton's law, is coupled to the electromagnetic fields. Thus a time-stepping finite-difference solution technique is a plausible method for finding $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Phase space can be gridded up as was done in real space to solve Maxwell's equations; phase space is sixdimensional, however, requiring cells along not only the x , y , and z axes, but also along v_x , v_y , and v_z directions.

The Boltzmann equation approach is perhaps more intellectually satisfying than the brute force technique of tracking the trajectories of numerous particles. In practical numerical calculations, however, experience indicates that neither method has strong advantages over the other. Several large SGEMP codes have been written, and the majority use particle following methods.

Annexe C

Conductivité photo-induite dans un isolant irradié

La conductivité intrinsèque σ_0 d'un diélectrique est faible, de l'ordre de $10^{-6} \Omega^{-1}.m$ c'est pourquoi on néglige en général cette valeur dans les modèles. Cependant, lorsqu'un isolant est soumis à un rayonnement ionisant, le fort débit d'énergie déposé augmente la conductivité de l'isolant jusqu'à la rendre non négligeable. Ainsi, pour modéliser cette variation, nous introduisons une conductivité photo induite σ_i . La conductivité totale du diélectrique sera alors la somme entre sa conductivité propre et cette conductivité induite (relation (C.1)).

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \sigma_i \\ \sigma_0 &: \text{conductivité propre au diélectrique} \\ \sigma_i &: \text{conductivité induite par l'irradiation} \end{aligned} \tag{C.1}$$

- **Exemple d'un modèle dans le cas d'un diélectrique solide**

Dans le cas de diélectriques solides, la conductivité photo-induite peut se modéliser par la relation suivante :

$$\sigma_i = \varepsilon \cdot \left[\mathcal{K}_p \dot{D}(r, t) + \mathcal{K}_d \int_{-\infty}^t \dot{D}(r, t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' \right] \tag{C.2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathcal{K}_p &: \text{coefficient de conductivité prompte} \\ \mathcal{K}_d &: \text{coefficient de conductivité retardée} \\ \tau &: \text{constante de temps de la conductivité retardée} \\ \dot{D} &: \text{débit de dose dans le diélectrique} \end{cases}$$

Le premier terme du crochet est appelé conductivité prompte tandis que le deuxième terme est appelé conductivité retardée. Cette dernière persiste après l'annulation du dépôt d'énergie

($D = 0$). Pour un isolant comme le polyéthylène, les caractéristiques sont les suivantes :

$$\mathcal{K}_p = 8.8 \times 10^{-19} \text{ s} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$\mathcal{K}_d = 1.14 \times 10^{-11} \Omega^{-1} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$\tau = 50 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$\varepsilon = 2.26$$

Annexe D

Présentation du code FDTD Sophie

Cette annexe est tirée d'une présentation de «Sophie» rédigée en anglais par le développeur du code.

D.1 Implementation aspects

The electromagnetic time solver, called “Sophie”, is based upon the very well known Yee scheme (voir [II-1]), a time leap frog and space centered scheme for solving time wave equations. An original feature of the Sophie code is that it can be used either using the original Yee scheme or using the dual one that consists in inverting the discretization points of the electric and of the magnetic field.

Another point is that the code uses a system of units and unknowns that makes the Maxwell-Ampere and Maxwell-Faraday equations rigorously anti-adjoint to machine accuracy by construction. To make this article self consistent, let us detail these notions. Furthermore, despite Yee scheme seems to be very well known, its dual scheme seems to be completely ignored by the FDTD community. Section D.1.1 presents the Maxwell equations, section D.1.2 details the discrete numerical scheme.

D.1.1 Maxwell continuous equations

Let us consider a general linear medium defined by a relative permittivity $\varepsilon_r(t)$ and a relative permeability $\mu_r(t)$, relative to the vacuum electromagnetic features ε_0 and μ_0 . Instead of using the standard electric and magnetic fields, we shall define new fields which are denoted by $\tilde{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ and $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{c}$. Using these unknowns, and forgetting about the tilda, allows us to write the Maxwell Ampere equation as follows :

$$\varepsilon_r(t) * \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = 0 \quad (\text{D.1})$$

and the Maxwell-Farady one as :

$$\mu_r(t) * \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + c \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = 0 . \quad (\text{D.2})$$

This set of evolution equations are complete when adding the general boundary condition that is an impedance condition :

$$-\mathbf{E} \times \mathbf{n} + Z \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = 0 , \quad (\text{D.3})$$

where Z is the boundary impedance, $Z = 0$ being a Perfectly Electric Conductor (PEC), $Z = 1$ being an Absorbing Boundary Condition (ABC) that approximates the infinite radiation condition at first order.

Obviously, when dealing with a pure electromagnetic problem (in the absence of moving charges for instance), the Gauss relations are underlying :

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \text{div}(\mathbf{H}) = 0 . \quad (\text{D.4})$$

D.1.2 The Yee scheme and the dual Yee scheme

The Yee scheme is a scheme that solves the Maxwell evolution equations (D.1) and (D.2) on two structured hexaedric lattices. On the first lattice, which is called the primal mesh, the unknowns are the magnetic field on the faces of the lattice. On the second lattice, that is called the dual mesh, the unknowns are the electric field on the faces. Figure D.1 shows the locations of the unknowns on the two lattices. In Yee scheme, the dual mesh is obtained from the primal one as follows :

- the nodes of the dual mesh are the barycenters of the elements of the primal mesh, where we add nodes on the boundary conditions that are the barycenters of the faces of the primal mesh on the boundaries,
- the edges of the dual mesh are colinear with the normals of the primal mesh faces, the edges' barycenters in the dual mesh are colocated with the faces' barycenters in the primal mesh,
- same is true inverting primal and dual in the above sentence, as well as inverting edges and faces.

In the original Yee scheme, the electric field is thus at the edges of the primal mesh, thus a PEC condition (with $Z = 0$ in relation (D.3)) is merely

$$\mathbf{E}_{PEC \text{ edges}} = 0$$

since the tangent electric field on the PEC is associated with the edge's degrees of freedoms in the primal lattice. In Yee dual's scheme, the PEC condition is not limited to zeroing the degrees

of freedom (DOF) on the PEC surfaces, but is obtained using the integral Maxwell-Faraday condition on the dual faces. Figure D.2 provides an example where we compute a magnetic DOF on a PEC surface, represented by a red edge in the primal mesh, a blue face in the dual mesh.

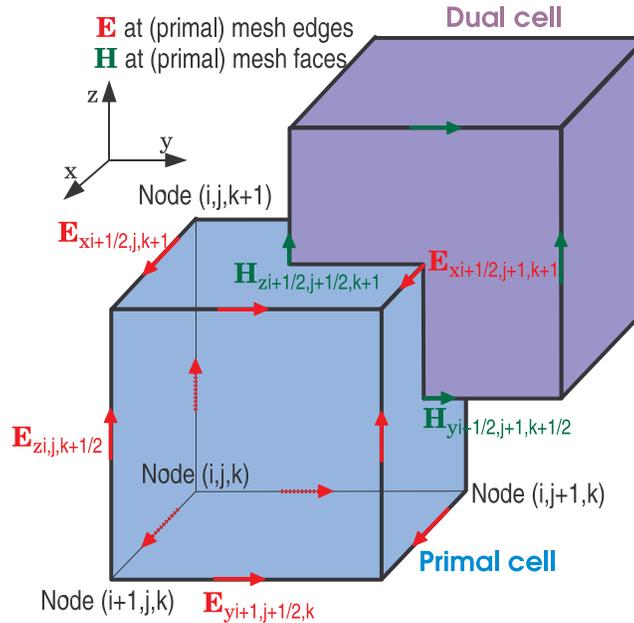


FIG. D.1 – Yee lattice.

Let us recall the integral version of the Maxwell-Farady equation, as originally pointed out by physicists. The point is that the time derivative of the integrated magnetic flux across any surface denoted by S is equal to minus the circulation (curvilinear integral) of the electric field on the border of the surface :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu_r(t) * (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) dS = -c \oint_{L=\partial S} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}) dL \quad (D.5)$$

When computing the electric circulation at the border of S as represented in blue in figure D.2, we need knowing the tangent electric field on the PEC surface, represented by E_t . This value is not an unknown of the dual Yee scheme, but is equal to zero since it is the tangent electric field on the Perfect Electric Conductor.

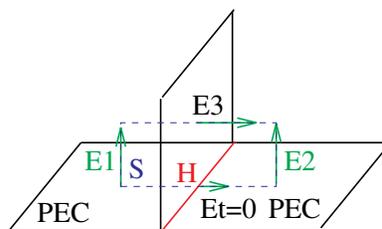


FIG. D.2 – PEC boundary condition with Yee dual's scheme.

So, Yee's dual scheme is absolutely equivalent (at half a mesh cell and potentially at half a time step) to the original Yee scheme. Taking account of the PEC boundary condition is slightly more complicated, since it requires the use of unknowns on the PEC boundary, but not more cost effective.

Thus, Yee and Yee's dual computations, when performed on the same mesh, may provide an idea of the discretization error. An issue for Yee dual's scheme interest is to provide

- a more accurate estimate of the magnetic tangent field (usually called magnetic currents) on PEC surfaces, that can be of interest for RCS (Radar Cross Section) computations,
- as well as a more accurate estimate of the normal electric field, that is of interest for SGEMP (System Generated ElectroMagnetic Pulse) computations.

D.2 Program architecture

Sophie's time electromagnetic solver is based upon Yee's numerical scheme or it's dual and implemented on a structured three-dimensionnal finite differences grid. The aim of Sophie is to be a very efficient, very scalable, parallel solver. To this end, well spreading computational costs across a network of N computers, means dividing the FDTD computation by N . This is easily achieved using a parallel library on a free mesh where the computation cost is P . In an FDTD implementation however, the computation cost is $n_x \times n_y \times n_z$ where n_x is the problem's size in the x direction. When N is whatever you want, and (n_x, n_y, n_z) is also whatever, it is not possible to equally spread the computation cost unless using a one-dimensional domain partition (in the z direction for instance), which is not suitable for reducing parallel communications costs. Furthermore, when dealing with dispersive media, Huygens layers, PML (Perfectly Matched Layers), sharing the computation costs becomes very tricky indeed. For those reasons, it has been decided to build a multi-bloc FDTD solver. Another choice could have been to build a free solver, replacing the triple mono-dimensional loops by a three-dimensionnal one. This implementation, depiste much more simple, would not have been as cost effective.

In a nutshell, Sophie is an FDTD solver, that solves the FDTD in multi-blocs, being able to connect adjacent domains when needed, where the edges unknowns are either the electric field in Yee scheme or the magnetic field in Yee'dual scheme. Parallelization, in this framework, is a very natural thing, and, oppositly to other FDTD parallel codes, does not bring much more programming complexity. Debugging the multi-bloc aspects can be performed in sequential, whereas it needs the parallel mode in other codes, to our knowledge.

D.2.1 A Yee Finite Differences solver

As shown in figure D.1, Yee scheme is a finite difference scheme in three dimensions that solves Maxwell time evolution equations (D.1) and (D.2) on primal or dual mesh faces. Let n_x denote the problem's size in the x direction, same holding for the y and z two other dimensions. In the finite difference grid we have, for instance $(n_x - 1) \times n_y \times n_z$ faces with normal in the x direction. This number of faces concerns the internal faces, not including the faces at the boundary of the domain's computation. If H_x is the unknown associated with these faces, and E_y and E_z are the unknowns associated with these faces in the dual mesh, we can solve the Maxwell-Faraday equation as follows :

```
do k=1, nz
  do j=1, ny
    do i=2, nx
      hx(i,j,k)=hx(i,j,k)+(cz(k)*(ey(i,j,k+1)-ey(i,j,k))&
        &- cy(j)*(ez(i,j+1,k)-ez(i,j,k)))
    enddo
  enddo
enddo
```

The coefficients c_z and c_y are the inverse of the faces lengths in the y and z directions, multiplied by the time step $c\Delta t$. In the above, nodes are labelled from 1 to $n_x + 1$, the cells are labelled from 1 to n_y and from 1 to n_z . Written as above, the discrete Maxwell Faraday solver is an estimate by centered finite differences of the curl space operator, rather than the integrated equation as given by relation (D.5).

The FDTD implementation above is very efficient since it needs only 6 additions and products to update electromagnetic fields, it uses 5 fields seen as input data, since the coefficients being one-dimensional they do not represent a large array. We thus can estimate the number of millions of FDTD degrees of freedoms (unknown field values) that can be computed per seconds in single precision, according to the hardware's features, since a real field requires 4 bytes, as :

$$s = \min(W/4, R/20, S/6) \quad (\text{D.6})$$

where S is the CPU speed in MegaFlops, W is the memory write throughput and R is the memory read throughput in MegaBytes per seconds. Of course, in case of a small problem's size, memory throughput does not matter, and it is the cache speed that shall play a role.

D.2.2 A multi-bloc FDTD solver

Figure D.3 shows an example of an FDTD domain computation split on 3 parallel processes. In this figure, the domain has been split in $(4, 4, 2)$ for the (x, y, z) directions, thus a split in 32

domains. In the example, process 0 shall compute the fields evolutions on 11 domains, process 1 deals with 11 domains, process 2 with the remaining 10 last ones. In order to compute the

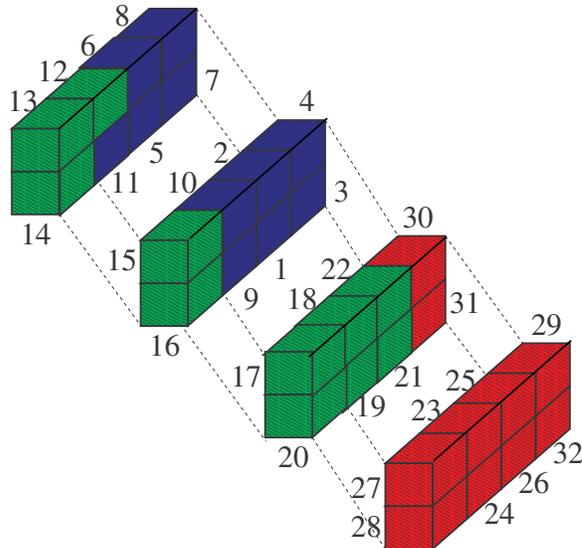


FIG. D.3 – Example of multi-bloc accounting per parallel process

connections between the domains, we use, as presented figure D.4, conventions about nodes, edges and faces labelling on a domain. Those conventions are the ones used by commercial meshers for hexaedric elements. The need for a multi-block solver is rooted in the implemented triple loop as written section D.2.1 : the original triple loop on the full domain is split direction by direction in (n_i, n_j, n_k) domains. On N processes, if $n_i \times n_j \times n_k > 8N$, load unbalancing, under the assumption that all the elementary blocks are of equal size, is at most 12 %. For any N , it is always possible (for sufficiently large problems) to find a suitable split that satisfies to $n_i \times n_j \times n_k > 8N$ with more or less equal size elementary domains, even on non cubic discretized problem. Of course, for communication costs, the set of the domains of a single process shall be as compact as possible.

D.2.3 Parallel design pattern

For computing fields at faces and edges in a parallel FDTD solver, we took the option to duplicate all the fields at interfaces and interedges between different processes. In order to maximize the overlapping between parallel communications and computations, parallel communications are performed once during a time step. Following this design option, we can decide either to compute the partial circulations at the interedges and share the partial computations, then every process shall assemble the final circulation and deduce the edge's field new value at next time step,

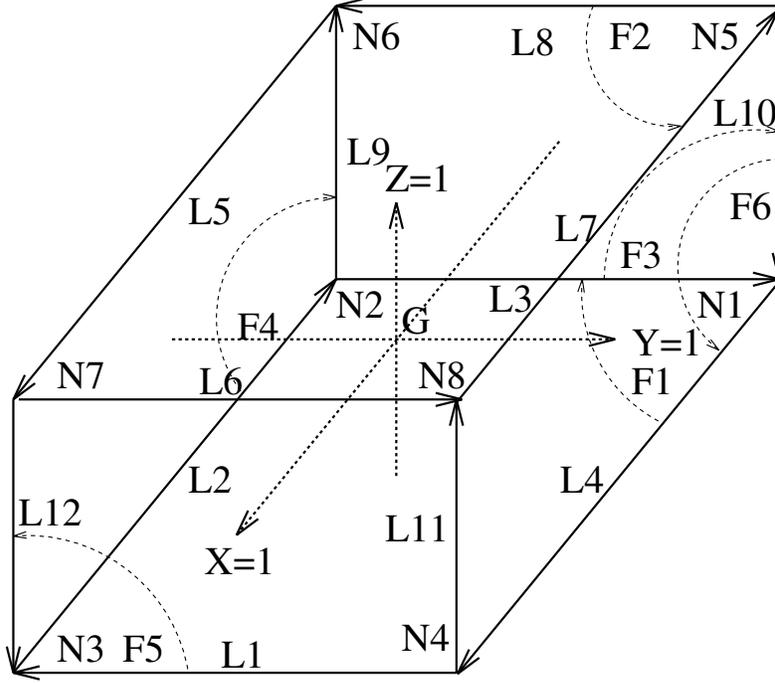


FIG. D.4 – Labelling conventions on a hexahedron.

– or to share the face’s field needed for computing the edge field at interedges (and interfaces), then every process is able to compute the Maxwell Ampere time step in one loop. When analyzing what shall be needed for impedance edges, it appears more simple to separate the communication phase of elementary data from the computation phase. Both options have been implemented in Sophie code, but the second one is the proper design pattern for impedance computation. Data to communicate for a face made of $(n_y \times n_z)$ faces is $2n_y n_z + n_y + n_z$ real values, corresponding to the values at the faces whose normal direction is coplanar with the face. Scalability limit for an internal cubic domain of size n is approximately reached when the domain’s size is so small that the computation time t_c is equal to the communication time t_b :

$$t_b = \frac{4 \times 12 \times n^2}{B} = \frac{6n^3}{s} = t_c \quad (\text{D.7})$$

where B is the communication throughput either in sending or in receiving mode in MegaBytes per second. When s , the number of millions of DOFs that can be computed per second in relation (D.6), is limited by memory throughput R , i.e. $s = \frac{R}{20}$, the minimum problem size for scalability is given by $\frac{12n^2}{B} = \frac{30n^3}{R}$

$$n = \frac{12 R}{30 B} \quad (\text{D.8})$$

Typical values on a basic Gigabit network with 800 MHz RAM can be $R = 6400$, $B = 100$ thus $n = 27$. This value is obtained with the assumption that the processor’s cache is of zero size.

In practice, this is not correct and the limit for problem's size scalability shall be higher. On a supercomputer, communication speed shall also be higher.

Annexe E

Fréquences propres d'une cavité métallique sphérique

Considérons une cavité sphérique constituée d'une sphère parfaitement conductrice de rayon R contenant un matériau diélectrique homogène de caractéristiques (ε, μ) . Les modes de résonance d'une telle structure sont calculables analytiquement¹. Les fréquences propres du mode TE, notées f_{TE}^{np} , sont données par la relation (E.1).

$$f_{\text{TE}}^{np} = \frac{x_{np}}{2\pi R\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{avec } n > 0 \quad (\text{E.1})$$

La variable x_{np} correspond à la $p^{\text{ième}}$ racine de la fonction de Bessel Sphérique (notée \hat{B}_n) de première espèce d'ordre n .

x_{np}	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
p=1	4.493	5.763	6.988	8.183	9.356	10.513	11.657	12.791
p=2	7.725	9.095	10.417	11.705	12.967	14.207	15.431	16.641
p=3	10.904	12.323	13.698	15.040	16.355	17.648	18.923	20.182
p=4	14.066	15.515	16.924	18.301	19.653	20.983	22.295	–
p=5	17.221	18.689	20.122	21.525	22.905	–	–	–
p=6	20.371	21.854	–	–	–	–	–	–

TAB. E.1 – Premières racines x_{np} des fonctions de Bessel Sphériques

Les fonctions \hat{B}_n sont reliées aux fonctions de Bessel de première espèce classiques (notées B_n) par la relation (E.2)

$$\hat{B}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot B_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{E.2})$$

¹Pour le détail des calculs analytiques, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage : «Time-Harmonic Electromagnetic Fields», R. F. Harrington, Mc Graw-Hill Book Company, 1961

Les fonctions $B_{n+\frac{1}{2}}$ peuvent s'exprimer en fonction de combinaisons de sinus et de cosinus de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x \quad , \\ B_{\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad , \\ B_{\frac{5}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\} \quad , \text{ etc.} \end{aligned}$$

Les expressions des fonctions suivantes peuvent être déterminées selon la relation de récurrence :

$$B_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} \cdot B_n(x) - B_{n-1}(x)$$

Les valeurs des racines x_{np} peuvent par exemple être calculées, à la précision souhaitée, à l'aide d'une méthode de dichotomie. Dans le tableau E.2 sont données les premières valeurs des x_{np} avec 3 chiffres significatifs après la virgule.

x'_{np}	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
p=1	2.744	3.870	4.973	6.062	7.140	8.211	9.275	10.335
p=2	6.117	7.443	8.722	9.968	11.189	12.391	13.579	14.753
p=3	9.317	10.713	12.064	13.380	14.670	15.939	17.190	18.425
p=4	12.486	13.921	15.314	16.674	18.009	19.321	20.615	21.894
p=5	15.644	17.103	18.524	19.915	21.281	22.626	–	–
p=6	18.796	20.272	21.714	23.128	–	–	–	–

TAB. E.2 – Premières racines x'_{np} des dérivées des fonctions de Bessel sphériques

Les fréquences propres du mode TE, notées f_{TM}^{np} , sont données par la relation (E.3). La variable x_{np} correspond à la $p^{\text{ième}}$ racine de la dérivée de la fonction de Bessel Sphérique (notée \hat{B}'_n) de première espèce d'ordre n .

$$f_{\text{TM}}^{np} = \frac{x'_{np}}{2\pi R \sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{avec } n > 0 \quad (\text{E.3})$$

Les fonctions \hat{B}'_n peuvent se calculer par dérivation des fonctions \hat{B}_n , mais il est plus simple d'utiliser la relation de récurrence suivante :

$$B'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \{B_{n-1}(x) - B_{n+1}(x)\}$$

Dans le tableau E.2 sont données les premières valeurs des x'_{np} avec 3 chiffres significatifs après la virgule. Les 50 premières fréquences de résonance des cavités sphériques contenant du vide de rayons $R = 1.53$ m («Sphère Omega») et $R = 5$ m («Sphère LMJ»), calculées avec les formules analytiques (E.3) et (E.1), sont présentées dans les tableaux des figures E.1 et E.2. Une comparaison avec les fréquences calculées avec le code Sophie est également donnée.

	Type de Mode	Fréquence Analytique en MHz	Fréquence calculée en MHz	Erreur relative en %
1	TE01	85,3773	85,5004	0,144
2	TE02	120,4321	120,5006	0,057
3	TM01	139,8236	140,0007	0,126
4	TE03	154,7603	154,5007	0,168
5	TM02	179,3443	179,5008	0,087
6	TE04	188,6326	188,5009	0,070
7	TE01	190,3383	190,5009	0,085
8	TM03	217,4468	217,5010	0,025
9	TE05	222,1859	221,5010	0,308
10	TE02	231,6101	231,5011	0,047
11	TM01	240,3904	240,5011	0,046
12	TM04	254,6207	254,5012	0,047
13	TE06	255,5007	abs	abs
14	TE03	271,3989	271,0013	0,147
15	TM02	283,0138	283,0013	0,004
16	TE07	288,6290	288,0014	0,217
17	TE01	289,9096	290,0014	0,032
18	TM05	291,1293	291,0014	0,044
19	TE04	310,1649	310,0015	0,053
20	TE08	321,6067	320,5015	0,344
21	TM03	324,1545	324,0015	0,047
22	TM06	327,1329	327,0015	0,040
23	TE02	333,3619	333,0016	0,108
24	TM01	339,3088	339,5016	0,057
25	TE05	348,1730	347,5016	0,193
26	TE09	354,4595	353,0017	0,411
27	TM07	362,7375	362,5017	0,065
28	TM04	364,2272	364,0017	0,062
29	TE03	375,3886	375,0018	0,103
30	TM02	383,4589	383,5018	0,011
31	TE06	385,5916	385,0018	0,153
32	TE10	387,2068	386,0018	0,311
33	TE01	388,5309	388,5018	0,007
34	TM08	398,0169	398,0019	0,004
35	TM05	403,4857	403,5019	0,004
36	TE04	416,3557	416,0020	0,085
37	TE11	419,8635	417,5020	0,562
38	TE07	422,5357	422,5020	0,008
39	TM03	426,2480	426,0020	0,058
40	TM09	433,0253	433,0020	0,005
41	TE02	433,1715	abs	abs
42	TM01	437,7045	abs	abs
43	TM06	442,0982	442,0021	0,022
44	TE12	452,4414	450,0021	0,539
45	TE05	456,4971	456,0021	0,108
46	TE08	459,0876	459,0022	0,019
47	TM10	467,8037	467,5022	0,064
48	TM04	467,9965	abs	abs
49	TE03	476,5194	476,0022	0,109
50	TM07	480,1828	480,0023	0,038

FIG. E.1 – 50 premières fréquences propres de la «sphère Omega»

	Type de Mode	Fréquence Analytique en MHz	Fréquence calculée en MHz	Erreur relative en %
1	TE01	26,2138	26,2856	0,273
2	TE02	36,9769	36,8570	0,324
3	TM01	42,9307	42,8570	0,172
4	TE03	47,5168	47,4284	0,186
5	TM02	55,0650	55,1427	0,141
6	TE04	57,9168	57,7141	0,350
7	TE01	58,4405	58,2856	0,265
8	TM03	66,7638	66,5712	0,288
9	TE05	68,2189	67,9998	0,321
10	TE02	71,1124	71,1427	0,043
11	TM01	73,8083	abs	abs
12	TM04	78,1775	77,9998	0,227
13	TE06	78,4477	78,5712	0,157
14	TE03	83,3290	83,1426	0,224
15	TM02	86,8952	86,8569	0,044
16	TE07	88,6192	88,2855	0,377
17	TE01	89,0124	88,8569	0,175
18	TM05	89,3869	89,4283	0,046
19	TE04	95,2315	95,1426	0,093
20	TE08	98,7445	98,5712	0,176
21	TM03	99,5268	99,4283	0,099
22	TM06	100,4413	100,2854	0,155
23	TE02	102,3538	102,2854	0,067
24	TM01	104,1797	103,9997	0,173
25	TE05	106,9013	106,8568	0,042
26	TE09	108,8315	108,5711	0,239
27	TM07	111,3731	111,1426	0,207
28	TM04	111,8305	111,7140	0,104
29	TE03	115,2574	115,1425	0,100
30	TM02	117,7353	117,7140	0,018
31	TE06	118,3901	118,2854	0,088
32	TE10	118,8860	abs	abs
33	TE01	119,2926	119,1425	0,126
34	TM08	122,2051	121,9997	0,168
35	TM05	123,8843	123,7139	0,138
36	TE04	127,8358	127,7139	0,095
37	TE11	128,9128	128,5711	0,265
38	TE07	129,7333	129,4282	0,235
39	TM03	130,8731	130,8568	0,012
40	TM09	132,9539	132,8568	0,073
41	TE02	132,9988	abs	abs
42	TM01	134,3906	134,2853	0,078
43	TM06	135,7397	135,7139	0,019
44	TE12	138,9154	138,5710	0,248
45	TE05	140,1606	139,9996	0,115
46	TE08	140,9560	140,8568	0,070
47	TM10	143,6321	143,4282	0,142
48	TM04	143,6913	abs	abs
49	TE03	146,3082	145,9996	0,211
50	TM07	147,4330	147,1425	0,197

FIG. E.2 – 50 premières fréquences propres de la «sphère LMJ»