

# UNIVERSITE DE LIMOGES

Ecole Doctorale Science Technologie Santé

Faculté des Sciences et Techniques

Laboratoire XLIM/C2S2/ESTE UMR 6172

Année : 2006

N° 31-2006

## THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Electroniques des Hautes Fréquences et Optoélectronique

Présentée et soutenue publiquement par

**Ferré Guillaume**

Le 4 Juillet 2006

## Codage spatio-temporel et techniques de décodage itératives pour systèmes multi-antennes

Diversité Temps Espace, Turbo détection, Systèmes en Couches

## JURY

<b>Président</b>	Pr. Claude BERROU, <i>Directeur d'études ENST Bretagne</i>
<b>Rapporteurs</b>	Pr. Pierre DUHAMEL, <i>Directeur de recherche CNRS à SUPELEC</i> Pr. Jean François HELARD, <i>INSA Rennes</i>
<b>Examineurs</b>	Pr. Jean Michel DUMAS, <i>ENSIL</i> M. Jean Pierre CANCES, <i>MCF ENSIL</i> M. Vahid MEGHDADI, <i>MCF ENSIL</i>

A Virginie, mes parents, ma sœur, mon frère, ma famille

# REMERCIEMENTS

---

Ce mémoire de thèse est le résultat de 3 années de travail effectué dans le département C2S2 du laboratoire XLIM, au sein du projet *Etudes des Systèmes de Télécommunications* de l'ENSIL, dirigé par M. Jean Michel DUMAS. Je remercie pour cela M. DUMAS de m'avoir accueilli, pour me permettre de mener à bien cette thèse.

Mes plus sincères remerciements à M. Jean Pierre CANCES Maître de Conférences à l'ENSIL sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Sa grande culture scientifique, sa disponibilité et sa simplicité sont autant d'éléments qui ont favorisé le développement de cette thèse. La compétence de cet encadrement fut complétée par Monsieur Vahid MEGHDADI, Maître de Conférences à l'ENSIL, qui reçoit également toute ma gratitude pour les nombreuses suggestions et les conseils qu'il a pu me donner.

Je veux ensuite remercier M. Claude BERROU, Professeur à l'ENST de Bretagne, pour le grand honneur qu'il m'a fait de bien vouloir présider ce jury de thèse. Les directeur de recherche Pierre DUHAMEL, de SUPELEC, et professeur Jean François HELARD de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes ont accepté de rapporter ce travail et je leur adresse mes plus sincères remerciements.

Les quelques années passées au Laboratoire furent une expérience fort enrichissante. Le dynamisme de ces membres et l'ambiance de travail en font un lieu de travail fort sympathique et motivant. Je tiens à remercier pour cela mon collègue de bureau M. Olivier PAJONA, d'avoir su partager avec moi les bons comme les moins bons moments, et d'avoir surtout été bon public à mes blagues pas toujours marrantes, je l'avoue...

Remerciements également à Hubert et Aurélien, l'équipe informatique de l'ENSIL, pour la disponibilité en ressources informatiques qu'ils ont su me donner, lorsque mes simulations étaient longues. Merci aux autres collègues et au personnel de l'ENSIL pour leur gentillesse.

Enfin, je tiens à exprimer ma plus grande estime aux membres de ma famille qui sont restés très à l'écoute de mes problèmes très souvent incompréhensibles pour eux. Leurs encouragements et leurs soutiens m'ont permis de mener à bien ce travail.

# TABLE DES MATIERES

---

## RESUME

<b>INTRODUCTION</b>	1
Chapitre 1 Limites des performances des systèmes de communications sans fils multi-antennes	5
1.1 Introduction	6
1.2 Etat de l'art sur la capacité des systèmes MIMO	6
1.2.1. La capacité MIMO	6
1.2.2. Capacité des systèmes utilisant des techniques de « water-filling »	7
1.2.3. Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps ou un multiplexage spatial	8
1.2.4. Capacité des systèmes MIMO corrélés	8
1.2.5. Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps différentiel	9
1.3 Le système MIMO	9
1.4 Calcul de la capacité d'un système MIMO	11
1.5 Calcul de la capacité d'un canal MIMO avec allocation de puissance à l'émetteur	15
1.6 Exemples de capacités MIMO pour des canaux à coefficients constants	16
1.7 Capacité MIMO pour des canaux à coefficients aléatoires	19
1.7.1. Capacité MIMO pour des canaux de Rayleigh dits « fast » et « block fading »	19
1.7.2. Capacité MIMO, sur des canaux de Rayleigh à évanouissement lent	26
1.7.3. Exemples de capacité MIMO, pour des canaux de Rayleigh à évanouissement lent	26
1.8 Effets des paramètres du système et de la corrélation entre antennes sur la capacité des canaux MIMO	33
1.8.1. Modèle de corrélation pour des canaux MIMO à trajets directs (LOS)	34
1.8.2. Modèle de corrélation pour un canal MIMO de Rayleigh à évanouissement	36
1.9 Conclusion	42
Chapitre 2 Analyse et Performances de schémas de codage Spatio-Temporel	44
2.1 Introduction	45
2.2 Rappels sur les modèles de canaux à évanouissement	45
2.2.1. Propagation à multi-trajets	45

2.2.2.	Effet Doppler	45
2.2.3.	Modèle statistique de Rayleigh pour un canal à évanouissement	46
2.3	Notions de diversité	47
2.3.1.	Diversité temporelle	48
2.3.2.	Diversité fréquentielle	48
2.3.3.	Diversité spatiale	48
2.3.4.	Exemple de diversité	49
2.4	Les systèmes codés Temps-Espace	49
2.5	Analyse des performances des systèmes codés Temps-Espaces	51
2.5.1.	Probabilité d'erreur, pour des canaux à évanouissement lent	51
2.6	Critère de construction des codes spatio-temporel	55
2.6.1.	Critère de construction sur un canal à évanouissement lent	55
2.7	Les codes spatio-temporel en bloc : STBC	57
2.7.1.	La construction d'Alamouti	57
2.7.2.	Performance du code d'Alamouti	58
2.7.3.	Codeur STBC	59
2.7.3.1.	Codes réels	61
2.7.3.2.	Codes complexes	61
2.7.3.3.	Ecriture généralisée de la matrice de code complexe	62
2.7.4.	Le décodage STBC généralisé	62
2.7.5.	Algorithme de décodage	62
2.8	Les codes spatio-temporel en treillis	66
2.8.1.	Introduction	66
2.8.2.	Codage des STTC	67
2.8.3.	Décodage des STTC	68
2.8.4.	Règles de construction et propriétés des codes STTC	69
2.8.5.	Amélioration des STTC	69
2.8.6.	Performances des codes STTC :	71
2.8.7.	Conclusion	77
Chapitre 3	Construction de codes STBC basés sur des structures en treillis : Super Orthogonal Space Time Trellis Codes (SOSTTC)	81
3.1	Introduction	82
3.2	Pourquoi de tels codes ?	82
3.3	Les codes Super-Orthogonaux	83

3.4	Les codes STBC paramétrés _____	84
3.5	Set partitioning pour des mots de codes orthogonaux _____	85
3.6	Set partitioning pour des mots de codes super-orthogonaux _____	88
3.7	Super Orthogonal Space-Time Trellis Codes (SOSTTC) _____	89
3.8	Codage et décodage _____	94
3.9	Extension des codes SOSTTC à plus de deux antennes d'émission _____	100
3.9.1.	Cas d'une constellation réelle _____	100
3.9.2.	Cas d'une constellation complexe _____	100
3.10	Performances des codes SOSTTC _____	105
3.11	Conclusion _____	111
Chapitre 4 Optimisation de codes STTC à base de codes STBC : cas des systèmes à trois antennes d'émission _____		112
4.1	Introduction _____	113
4.2	Choix d'une matrice STBC de base _____	114
4.3	Critères et règles de partitionnement _____	116
4.4	Construction des treillis _____	120
4.5	Remarques _____	124
4.6	Décodage des codes STTC à base de code STBC _____	127
4.6.1.	Cas du code quasi-orthogonal _____	127
4.6.2.	Cas du code STBDFT _____	129
4.7	Calcul des performances des codes STTC à base de code STBC _____	129
4.7.1.	Cas de la modulation QPSK _____	130
4.7.2.	Cas de la modulation 8-PSK _____	132
4.7.3.	Cas du code STBDFT _____	134
4.8	Conclusion _____	134
Chapitre 5 Codage turbo pour les codes STTC à base de codes STBC _____		136
5.1	Introduction _____	137
5.2	Description du principe Turbo _____	138
5.3	Concaténation parallèle _____	139
5.3.1.	Cas de deux antennes d'émission _____	139
5.3.1.1.	Réalisation du codeur _____	139
5.3.1.2.	Décodage _____	142
5.3.2.	Cas de trois antennes d'émission _____	145
5.4	Concaténation série _____	146

5.4.1.	Construction des codes récursifs STTC _____	147
5.4.2.	Décodage itératif des codes concaténés en série _____	149
5.4.3.	Cas particulier du schéma d'Alamouti _____	152
5.5	Performances _____	153
5.5.1.	Cas de deux antennes d'émission _____	153
5.5.1.1.	Concaténation parallèle _____	153
5.5.1.2.	Concaténation série _____	159
5.5.1.3.	Comparaison turbo-SOSTTC / turbo-STTC en concaténation parallèle	161
5.5.2.	Cas de trois antennes d'émission _____	164
5.5.2.1.	Concaténation parallèle _____	164
5.5.2.2.	Concaténation série _____	166
5.6	Conclusion _____	170
Chapitre 6	Les Systèmes en couches _____	171
6.1	Introduction _____	172
6.2	Description du système étudié _____	173
6.3	Exemples d'algorithmes de détection pour systèmes MIMO en couches _____	176
6.3.1.	Critère de forçage à zéro (ZF) _____	176
6.3.2.	Récepteur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQMM) _____	176
6.3.3.	Récepteur à Maximum de Vraisemblance (MV) _____	177
6.3.4.	Récepteur itératif à annulation successives d'interférences (ASI) _____	177
6.4	Systèmes de détection itératifs : TURBO-BLAST _____	179
6.4.1.	Emetteur TURBO-BLAST _____	179
6.4.2.	Décodeur itératif (TURBO-BLAST) _____	181
6.4.3.	Performances des systèmes TURBO-BLAST _____	188
6.4.3.1.	TURBO-BLAST LDPC _____	188
6.4.3.2.	Cas des codes convolutifs _____	193
6.5	Architecture en couches des codes SQOSTTC, les SQOHLSTTC _____	194
6.5.1.	Codage _____	195
6.5.2.	Décodage itératif <i>hard</i> des SQOHLSTTC _____	196
6.5.3.	Performances _____	198
6.6	Conclusion _____	200
	REVUE ANNALES DES TELECOMMUNICATIONS _____	201

<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	231
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	234
<b>NOTATIONS ET ACRONYMES</b>	244
<b>RESULTATS DE PUBLICATIONS</b>	246



# RESUME

---

Les systèmes multi-antennes ou systèmes MIMO sont maintenant reconnus comme l'outil indispensable pour obtenir des débits très élevés en espace libre sans augmenter la bande passante. La contrepartie est que ces systèmes génèrent des interférences considérables et qu'il faut créer en réception des dispositifs capables de supprimer au mieux ces interférences pour retrouver le flux de données original. Le travail proposé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la recherche de techniques de réception multi-antennes capables de supprimer au mieux les interférences.

Nous nous sommes orientés dans un premier temps vers l'utilisation de codes spatio-temporels. Nous avons généralisé le concept des codes SOSTTC (*Super Orthogonal Space Time Trellis Code*) proposé à l'origine par Jafarkhani au cas de systèmes de transmission à trois antennes en utilisant des algorithmes de partitionnement des constellations transmises. Nous avons alors obtenu des codes spatio-temporels en treillis qui utilisent des codes spatio-temporels comme composants de base et qui présentent des gains de codage supérieurs aux codes spatio-temporels en treillis de la littérature. Nous avons ensuite étudié la concaténation parallèle et série de tels codes pour obtenir des turbo récepteurs. Nous avons constaté que pour des tailles faibles de paquet (150 symboles), la concaténation série de nos codes avec les turbo codes spatio-temporels en treillis proposés initialement par Vucetic permettaient d'obtenir d'excellents résultats. C'est ainsi que la capacité limite théorique du canal est atteinte à 2.5 dB près pour une connaissance parfaite du canal en réception.

Le travail de thèse se termine par l'examen des systèmes en couches qui permettent d'obtenir des efficacités spectrales très élevées. Nous étudions la structure d'un turbo-annuleur d'interférences concaténé avec des codes convolutifs classiques ou de type LDPC. Nous montrons que l'utilisation de codes LDPC irréguliers permet d'atteindre la capacité limite du canal à 1.5 dB près pour des paquets de taille faible. Enfin, nous généralisons l'utilisation des codes spatio-temporels en treillis qui utilisent des codes spatio-temporels comme composants de base au contexte des transmissions en couches pour un nombre d'antennes d'émission multiple de trois. Les performances obtenues avec un dispositif d'annulation d'interférences simples sont très encourageantes.



# INTRODUCTION

---

Depuis quelques années, la technologie numérique complète la gamme d'applications proposée par les transmissions analogiques. Plus simples et plus robustes que les supports analogiques, les médias de communication numériques autorisent déjà de nombreux services, comme la télévision et la radio numérique, les réseaux locaux sans fil, l'Internet à très haut débit et bien sûr la téléphonie mobile.

Parallèlement à cette explosion numérique, le canal radio-mobile connaît lui aussi un engouement exceptionnel, bien évidemment dû en grande partie à l'avènement du téléphone cellulaire. Ainsi, plus des deux tiers de la population française disposent d'un téléphone portable, et le milliard d'abonnés est déjà atteint au niveau mondial. Ce phénomène ne semble pas du tout éphémère et les prévisions font du mobile de demain un véritable petit ordinateur portable, et un objet de communication extraordinaire. Le smartphone, intégrant appareil photo - caméra - PDA - lecteur mp3 - téléphone cellulaire voir même GPS, permettant entre autre d'envoyer des photos et des vidéos et qui connaît en France un succès phénoménal, n'en est que l'exemple le plus récent. Ainsi pour offrir un éventail toujours plus large de services et répondre à la demande en débits sans cesse plus élevés, les normes de téléphonie mobile évoluent sans cesse pour introduire les technologies les mieux adaptées à ce marché très diversifié. Ces normes assurent un minimum de compatibilité et permettent d'éviter les interférences entre systèmes différents. Parallèlement les développements des circuits microélectroniques permettent d'implanter des techniques de traitement du signal de plus en plus complexes. Toutes ces évolutions poussent les services de radiocommunications mobiles à être de plus en plus performants et donc gourmands en terme de bande passante. Les concepteurs de systèmes de transmissions cellulaires sans fil doivent donc concevoir des systèmes avec d'excellentes efficacités spectrales et des codes correcteurs d'erreurs performants pour faire face aux phénomènes d'évanouissements («fading») sur la propagation.

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la mise en place de nouveaux systèmes de radiocommunications mobiles à hauts débits et est constitué, outre les chapitres d'introduction et de conclusion, de six chapitres. Le principal obstacle à la mise en œuvre de tels systèmes, comme nous l'avons mentionné plus haut, vient de la nature même du canal radio-mobile. En effet, le canal radio-mobile est un canal sélectif en fréquence et variable dans le temps. Plus on augmente les débits et plus on renforce ce caractère sélectif en fréquence qui se traduit par une forte IES en réception. L'introduction des systèmes multiporteuses de type OFDM pur ou OFDM combiné avec l'étalement de spectre (systèmes MC-CDMA par exemple), permet de réduire efficacement ce problème puisque l'OFDM de taille  $N$  ( $N$  : nombre de sous-porteuses) transforme le canal large bande sélectif en fréquence en  $N$  sous-canaux parallèles non-sélectifs en fréquence. C'est ainsi que dans les calculs que nous présenterons nous ferons l'hypothèse, quitte à assumer la présence d'un système multiporteuses, que le canal de propagation entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$  se comporte comme un canal non-sélectif en fréquence. Ceci permet, entre autres, d'utiliser un égaliseur beaucoup plus simple en réception que dans le cas des systèmes TDMA. Il faut cependant signaler que les systèmes multiporteuses sont beaucoup plus sensibles aux problèmes de synchronisation fréquentielle que les systèmes monoporteuses. Nous ne traitons pas l'aspect synchronisation dans ce mémoire de thèse. De plus, la nature variable du canal avec la présence de « fadings » profond reste un obstacle majeur à l'augmentation des débits transmis.

Une solution fondamentale au problème de la capacité du canal radio-mobile  $\mathbf{H}$  a été apportée par les résultats de T elatar et Foschini. En effet, ces deux chercheurs ont montré que l'utilisation d'antennes multiples en émission et en réception permettait d'obtenir des accroissements de capacité substantielle à condition de considérer les canaux de transmission entre antennes indépendants et de pouvoir obtenir une estimation précise des coefficients de la réponse impulsionnelle du canal de propagation. Ces résultats dat es de fin 1995 ont conduit la communauté scientifique du domaine à s'intéresser aux systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output). La quantification de la capacité de tels canaux MIMO passe par le calcul de la capacité *outage*. Dans les canaux radio-mobiles réalistes la capacité est essentiellement limitée, comme on l'a déjà mentionné, par la présence de phénomènes d'évanouissements profonds sur la liaison. Cependant, la plupart du temps, une capacité bien supérieure est disponible. Ceci est particulièrement important lorsque l'on a affaire à des transmissions par paquets. Si le système est conçu pour transmettre à un certain débit, un certain pourcentage des paquets sera d emodul e avec des erreurs. Ce pourcentage est appel e *outage* et on suppose alors qu'il existe un protocole de reprise des erreurs de transmission (protocole ARQ) qui permet de réordonner la transmission des paquets erron es. Ainsi, dans le cas des canaux à fading, on considère plutôt la capacité *outage* que la capacité de Shannon classique. On définit alors la capacité de transmission *outage*  $C_x$  avec le pourcentage  $x\%$  qui correspond au débit maximum que l'on peut transmettre sans erreur pendant  $(100 - x\%)$  du temps. Ceci revient à dire que l'on vise à obtenir une capacité *outage* de  $x\%$ . En supposant le canal constant sur la durée d'un paquet, la capacité *outage* peut être évaluée par simulations de type Monte Carlo en calculant la capacité pour un grand nombre de réalisations de  $\mathbf{H}$ . Le résultat fondamental est que la pente asymptotique de la courbe de la capacité en fonction de  $E_s/N_0$  en dB est déterminée par le nombre minimum  $\min\{N_t, N_r\}$  d'antennes d'émission-réception. Ainsi, un gain de capacité très important, en termes de capacité *outage* peut être r ealis e lorsqu'on augmente à la fois le nombre d'antennes d'émission et de réception. En fait, on constate un accroissement quasi-linéaire de la capacité lorsque  $N_t = N_r$ . Par contre, si le nombre d'antennes est augment e uniquement en émission ou en réception, on n'obtient qu'une translation de la courbe de capacité (par rapport à un système simple antenne) et la pente asymptotique reste constante car la quantité  $\min\{N_t, N_r\}$  reste inchangée. Les principaux résultats de calcul des capacités des canaux MIMO sont rappel es au chapitre 1. Ces calculs de capacité nous servent de référence de borne inférieure pour les calculs de performances de nos codes temps-espace dans les chapitres qui suivent. De plus, des algorithmes d'optimisation de la puissance allouée en émission basés sur le principe du « *water-filling* » sont pr esent es. Les gains de capacité obtenus par connaissance du canal, à l'émission, à la réception ou à l'émission et à la réception sont alors pr esent es. Ces calculs supposent tous dans un premier temps des canaux indépendants. Cette hypothèse réductrice est en partie levée à la fin du chapitre en proposant un modèle de corrélation qui tient compte de l'angle d'élevation et de la séparation entre éléments rayonnants. Des courbes de capacité montrant l'influence de ces deux paramètres sont présentées alors à la fin du chapitre.

Cependant, s'il est montré que la capacité augmente considérablement avec le nombre d'antennes d'émission et de réception il faut encore pouvoir disposer d'un récepteur performant qui va pouvoir prendre en compte toute cette richesse de diversité crée par l'emploi d'antennes multiples. L'emploi de codes temps-espace est un des moyens privil egi es de s'approcher de la capacité MIMO théorique. Le chapitre 2 est de ce point de vue un état de l'art sur le codage temps-espace. Nous commençons par définir les critères de construction d'un code temps-espace performant en rappelant les définitions des gain en diversité et gain de codage. En particulier, nous introduisons, à l'aide du critère du déterminant, la notion de distance entre deux mots de code temps-espace. Cette notion de distance conduit au critère de

minCGD emprunté à Jafarkhani et qui nous sert à construire nos propres codes dans le chapitre 4. Nous nous intéressons alors à deux types de code temps-espace : les codes temps-espace en bloc (STBC) et les codes temps-espace en treillis (STTC). Les performances de ces codes, en particulier des codes STTC, sont étudiées à l'aide d'exemples.

Une idée récente due à Jafarkhani pour améliorer la performance des codes STTC est de combiner la diversité optimale des codes STBC avec le gain de codage des codes STTC. Il obtient alors des codes temps-espace en treillis dont les états sont définis à l'aide de matrices STBC. Ces nouveaux codes sont appelés Super-Orthogonal Space-Time Trellis Codes (SOSTTC). Nous présentons dans le chapitre 3 les critères de construction de ces codes particuliers, avec, en particulier, le principe de partitionnement en sous-constellations pour optimiser le gain de codage à l'intérieur de chacune d'entre elles. Ces principes de partitionnement basés sur la maximisation du minCGD sont directement inspirés des règles de construction des modulations codées en treillis données par Ungerboeck en 1976. Puis, nous montrons à l'aide de simulations, comment des treillis très simples permettent d'obtenir des performances supérieures à celles des meilleurs codes STTC de la littérature. C'est ainsi qu'un simple treillis SOSTTC à quatre états pour deux antennes d'émission offre des performances semblables à un STTC à 16 états optimisé par B. Vucetic et J. Yuan. Nous nous servons souvent, tout au long de ce document de thèse, des codes STTC optimisés par B. Vucetic et J. Yuan comme de références. Les codes SOSTTC présentés concernent principalement le cas de systèmes à deux antennes d'émission (pour lesquels il existe des codes STBC à rendement maximum) et nous présentons une extension de leur application au cas des systèmes à quatre antennes d'émission à la fin du chapitre 3.

Le chapitre 4 concerne l'application des codes SOSTTC au contexte des systèmes à trois antennes d'émission. Ce chapitre est entièrement original et constitue une des principales revendications de ce travail de recherche. En effet, il n'existe pas de codes STBC orthogonaux avec un rendement maximum pour des systèmes à trois antennes d'émission. Cependant, nous proposons dans ce chapitre de construire un code STBC pour trois antennes à l'aide du couplage de deux codes STBC  $2 \times 2$  orthogonaux. Ce code est complété par l'ajout de deux symboles supplémentaires affectés d'angles de rotation distincts pour obtenir un rendement maximum. En utilisant les degrés de liberté supplémentaires introduits par ces angles de rotation, nous montrons qu'il est possible de construire un partitionnement en sous-constellations à l'aide du critère du minGCD. Nous construisons alors des treillis pour les contextes des modulations QPSK et 8-PSK qui présentent, de par leur valeur élevée de minCGD, des gains de codage supérieur à ceux des meilleurs STTC de la littérature. Cependant, afin de construire des codes à diversité maximale, nous sommes contraints de séparer les éléments appartenant à des sous-constellations différentes à l'aide de matrices unitaires. Ceci présente évidemment l'inconvénient, contrairement aux codes SOSTTC originaux, d'étendre la constellation transmise. Le chapitre se termine par les résultats obtenus par nos codes en comparaison des codes STTC optimisés par B. Vucetic et J. Yuan pour les systèmes à trois antennes d'émission. En supposant une estimation de canal parfaite en réception, nous quantifions, à complexité de treillis équivalente, le gain de codage apporté par nos codes temps-espace en treillis à base de codes STBC.

Le chapitre 5 concerne l'utilisation des codes temps-espace en treillis à base de codes STBC dans des schémas de concaténation parallèle ou série pour obtenir des turbo-codes. Il constitue aussi une partie complètement originale de ce travail de thèse. Le but est d'essayer de voir si l'effet turbo permet d'obtenir une amélioration des performances en terme de taux d'erreur par trame pour des paquets de faible taille (typiquement 150 symboles) par rapport aux codes simples définis dans le chapitre 4 précédent. Le tracé des diagrammes EXIT chart pour les codes SOSTTC à deux antennes laisse entrevoir de bonnes performances pour la concaténation parallèle de ces codes. Nous montrons alors comment construire un turbo-code

d'efficacité spectrale 2 bits/s/Hz dans le cas d'un poinçonnage alternatif des codes supérieur et inférieur ou d'efficacité spectrale 1 bit/s/Hz lorsqu'il n'y a pas poinçonnage. Les performances obtenues en concaténation parallèle avec les codes SOSTTC sont satisfaisantes avec, en particulier, une convergence au fur et à mesure des itérations plus rapide que celles des turbo-codes STTC de B. Vucetic et J. Yuan. Cependant, pour des petits paquets, le gain d'entrelacement étant très faible, l'amélioration des performances en termes de FER par rapport à un code classique est très marginale. En ce qui concerne les codes synthétisés au chapitre 4 pour les systèmes d'émission à trois antennes, les diagrammes EXIT chart apparaissent beaucoup plus fermés et l'amplification des SNR par obtention des informations extrinsèques est très limitée. Ceci explique que les performances obtenues en concaténation parallèle soient assez médiocres. Cependant, nous avons montré que la concaténation série des turbo-codes STTC avec nos codes temps-espace en treillis à base de codes STBC présentait un certain intérêt. Le gain en diversité apporté par le code interne temps-espace en treillis à base de codes STBC conjugué à l'ajout d'un entrelaceur supplémentaire entre les deux codes permet d'obtenir d'excellentes performances. Cependant il faut bien noter que l'efficacité spectrale totale reste faible : 1 bit/s/Hz.

Le point noir des systèmes à base de codage temps-espace présentés jusqu'à maintenant réside dans leur faible efficacité spectrale. Un moyen bien connu de remédier à cet inconvénient est l'emploi de systèmes de transmission par couches (layer). Le chapitre 6 examine l'utilisation des systèmes en couches pour différentes configurations d'émetteur avec entre autres, les schémas d'encodage vertical et horizontal. Nous examinons alors la structure d'un récepteur à base de turbo-annuleur d'interférences qui présente d'excellentes performances tout en maintenant une complexité de réalisation raisonnable. Ce récepteur appelé turbo-BLAST se comporte comme un filtre MMSE lors de la première itération et tend au fur et à mesure des itérations vers un annuleur d'interférences parfait. Cette structure est testée avec des codes convolutifs classiques mais aussi avec des codes LDPC. Pour des tailles faibles de paquets (150 symboles) l'utilisation de codes LDPC irréguliers permet d'obtenir d'excellentes performances. Nous illustrons les performances obtenues pour différents contextes de transmission et pour une efficacité spectrale de 5 bits/s/Hz en faisant varier le nombre d'antennes de réception. Enfin, nous présentons un système de transmission original en couches avec encodage horizontal pour les codes temps-espace synthétisés dans le chapitre 4. Nous montrons qu'avec un dispositif à annulation d'interférences de type dur (basé sur les décisions durs sur les symboles transmis), nous pouvons obtenir des performances très satisfaisantes puisque la borne d'annulation parfaite d'interférences est atteinte à 1 dB près à forts SNR.

# CHAPITRE 1 LIMITES DES PERFORMANCES DES SYSTEMES DE COMMUNICATIONS SANS FILS MULTI-ANTENNES

---

1.1	Introduction	6
1.2	Etat de l'art sur la capacité des systèmes MIMO	6
1.2.1.	La capacité MIMO	6
1.2.2.	Capacité des systèmes utilisant des techniques de « water-filling »	7
1.2.3.	Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps ou un multiplexage spatial	8
1.2.4.	Capacité des systèmes MIMO corrélés	8
1.2.5.	Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps différentiel	9
1.3	Le système MIMO	9
1.4	Calcul de la capacité d'un système MIMO	11
1.5	Calcul de la capacité d'un canal MIMO avec allocation de puissance à l'émetteur	15
1.6	Exemples de capacités MIMO pour des canaux à coefficients constants	16
1.7	Capacité MIMO pour des canaux à coefficients aléatoires	19
1.7.1.	Capacité MIMO pour des canaux de Rayleigh dits « fast » et « block fading »	19
1.7.2.	Capacité MIMO, sur des canaux de Rayleigh à évanouissement lent	26
1.7.3.	Exemples de capacité MIMO, pour des canaux de Rayleigh à évanouissement lent	26
1.8	Effets des paramètres du système et de la corrélation entre antennes sur la capacité des canaux MIMO	33
1.8.1.	Modèle de corrélation pour des canaux MIMO à trajets directs (LOS)	34
1.8.2.	Modèle de corrélation pour un canal MIMO de Rayleigh à évanouissement	36
1.9	Conclusion	42

## 1.1 Introduction

Les demandes de capacité de canal en communications sans fils sont conduites par le développement des réseaux cellulaires, d'Internet et d'autres services multimédia, ce qui amène à chercher à augmenter de façon considérable, les limites du canal de propagation. D'un autre côté, le spectre du canal radio mobile étant limité par nature, la capacité de communication ne peut pas être augmentée de façon évidente. Les grandes avancées dans les techniques de codage (notamment les techniques *turbo* [1] et les codes LDPC<sup>1</sup> [2] [3]) ont permis de démontrer qu'il était possible d'atteindre la limite de Shannon [4] dans le cas mono-antenne. A l'heure actuelle, il semble donc intéressant, en terme d'efficacité spectrale, d'augmenter le nombre d'antennes, aussi bien à l'émission qu'à la réception [5] [6] et d'en examiner l'impact en terme de capacité.

Dans ce chapitre, nous allons discuter des capacités limites fondamentales pour une transmission sur un canal MIMO<sup>2</sup>. Les expressions théoriques que nous développons sont issues principalement des travaux théoriques de Telatar [6] et Foschini [5]. Ces capacités limites, qui augmentent linéairement avec le nombre d'antennes, dans le contexte d'une propagation idéale, mettent en lumière le potentiel d'un canal MIMO en terme d'efficacité spectrale. La capacité s'exprime comme le taux de transmission maximum qui peut être acheminé pour une faible probabilité d'erreur donnée.

L'intérêt particulier d'un canal MIMO, réside dans le fait que l'on peut considérer un à un les scénarios de propagation entre chaque lien d'antenne émission/réception, en considérant le cas d'un processus de Rayleigh à évanouissement plat et indépendant.

Dans ce chapitre, nous limitons notre analyse aux canaux à bande étroite, nos modèles seront ainsi décrits comme non sélectifs en fréquence. Les modèles de Rayleigh sont réalistes lorsqu'un système comporte un grand nombre d'antennes. Pour des canaux de Rayleigh indépendants à évanouissement, le signal transmis depuis chaque antenne d'émission, sera reçu sur chaque antenne sans corrélation avec les autres signaux émis. Il en résulte que chaque signal transmis aura une signature spatiale distincte en réception.

## 1.2 État de l'art sur la capacité des systèmes MIMO

Cet état de l'art est structuré de la manière suivante. Premièrement, les articles fondateurs concernant la capacité des systèmes MIMO sont présentés. Ensuite, les articles étudiant la capacité des techniques dites de « *water-filling* » (cf. annexe 1.1) sont donnés.

### 1.2.1. La capacité MIMO

---

<sup>1</sup> Low Density Parity Check

<sup>2</sup> Multiple Input Multiple Output



Les premières études concernant la capacité des systèmes multi-antennes remontent à 1987 lorsque Winters étudie les limites théoriques de ces systèmes dans un environnement de Rayleigh [7]. Nous entendons par environnement de Rayleigh ou canal MIMO de Rayleigh, un canal MIMO dont les canaux entre antennes d'émission et de réception sont non sélectifs en fréquence, décorrélés et suivent une loi de Rayleigh. Winters démontre qu'avec  $N$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception,  $N$  canaux indépendants peuvent être établis dans la même bande de fréquence, prouvant ainsi le grand potentiel de ces systèmes. Dans [8], Hirt étudie la capacité d'un canal discret gaussien appliquée à une antenne d'émission et une antenne de réception dit SISO<sup>3</sup> avec interférence entre symboles ISI<sup>4</sup> et propose une extension aux systèmes multi-antennes.

En 1995, Telatar s'intéresse aux systèmes MIMO pour les canaux gaussiens et pour les canaux à évanouissements lents et rapides [6]. Dans son article, on trouve la démonstration des formules de capacité pour différents types de canaux MIMO. La capacité des systèmes MIMO est supérieure à la capacité des systèmes SISO sous l'hypothèse de canaux à évanouissements et de bruits de réception décorrélés. En 2000, Telatar étudie la capacité et l'information mutuelle d'un canal large bande ayant un nombre fini de trajets [9]. Il démontre que la capacité de ce canal large bande est la même que celle d'un canal gaussien large bande avec la même puissance moyenne reçue. Cependant, si l'énergie est étalée sur de nombreux trajets d'égale énergie, l'information mutuelle du canal large bande peut devenir très petite, venant du fait que l'énergie par trajet est trop faible pour que la recombinaison soit efficace. La diversité multi-trajets est donc bénéfique jusqu'à un certain point. Ce sur-étalement apparaît lorsque le rapport signal sur bruit (SNR<sup>5</sup>) par trajet sur le temps de cohérence est trop faible.

En 1996, Foschini étudie la capacité d'un système MIMO où le canal est connu du récepteur et n'est pas connu de l'émetteur. Constatant que le gain de capacité de ces systèmes augmente linéairement avec le minimum d'antennes d'émission  $N_t$  et de réception  $N_r$ , il propose d'exploiter cette capacité grâce à une architecture basée sur des couches espace-temps [10]. En 1998, motivé par le besoin d'une compréhension globale des limites théoriques des systèmes MIMO, il étudie la capacité de ces systèmes avec un nombre d'antennes réaliste et propose des transmetteurs utilisables pour atteindre ces limites théoriques [5]. D'autres auteurs étudient également la capacité des systèmes MIMO, notamment Calderbank [11].

### 1.2.2. Capacité des systèmes utilisant des techniques de « water-filling »

En 1999, Raleigh évalue la capacité des systèmes multi-antennes en présence de multi-trajets et propose une structure DMMT<sup>6</sup> associée à des MTCM<sup>7</sup> pour atteindre cette capacité

---

<sup>3</sup> Single Input Single Output

<sup>4</sup> Inter Symbols Interference

<sup>5</sup> Signal to Noise Ratio

<sup>6</sup> Discrete Matrix Multi Tone

<sup>7</sup> Multiple Trellis Coded Modulation

[12]. En 1999, Sandhu étudie la PEP<sup>8</sup> d'un canal multi-antennes avec décodage ML<sup>9</sup> avec CSI<sup>10</sup> à l'émission et en utilisant des techniques de « *water-filling* » [13]-[14]. En 2000, Andersen étudie la capacité des systèmes utilisant une solution de « *water-filling* » [15]-[16] en se basant sur les travaux de Telatar. Dans son article, il définit les notions de diversité spatiale et de gain d'antennes d'un système à « *water-filling* ». La diversité spatiale correspond au produit du nombre d'antennes d'émission et du nombre d'antennes de réception  $N_t N_r$ . Le gain d'antennes correspond au gain de puissance donné par l'ajout de plusieurs antennes. Dans le cas du « *water-filling* », il démontre que le gain d'antennes est borné par  $\left(\sqrt{N_t} + \sqrt{N_r}\right)^2$ . En 2002, Scaglione part du constat que la maximisation de la capacité se fait de manière élégante par une solution de « *water-filling* » quand le canal est connu de l'émetteur et du récepteur [17]. Dans le cas d'un canal MIMO sélectif en fréquence, il est alors nécessaire d'effectuer une décomposition spectrale se caractérisant par une distribution de Wishart par fréquence. Dans son article, Scaglione décrit la méthodologie qui permet de calculer la capacité moyenne du canal et sa fonction caractéristique pour un nombre arbitraire d'antennes. Finalement, en 2003, Skoglund étudie les capacités des systèmes utilisant des codes espace-temps associés à des techniques de « *water-filling* » avec CSI à l'émission et à la réception [18].

### 1.2.3. Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps ou un multiplexage spatial

En 2000, Sandhu calcule la capacité des codes espace-temps en blocs et démontre que l'utilisation de ces codes provoque une perte de capacité comparée à la capacité optimale que l'on devrait atteindre avec un système MIMO [19]. Cette perte de capacité dépend du rang du canal, du rendement du code et du nombre d'antennes à la réception. En 2000, Bolcskei traite la capacité et le comportement d'un système OFDM associé au multiplexage spatial quand le canal est connu du récepteur [20][21]. Une grande dispersion des retards a l'avantage d'offrir une meilleure capacité ergodique grâce au gain de diversité dû à la sélectivité fréquentielle contrairement à des canaux MIMO non sélectifs en fréquence. En 2003, Zheng constate que les systèmes MIMO peuvent être utilisés pour augmenter la diversité ou la capacité des systèmes, mais il existe un compromis entre diversité et capacité pour un système particulier [22]. Zheng donne cette courbe optimale et l'utilise pour évaluer les performances des schémas existants.

### 1.2.4. Capacité des systèmes MIMO corrélés

En 1999, Driessen étudie la capacité des canaux MIMO pour des canaux de Rice. La nouveauté est l'interprétation géométrique par lancer de rayons pour trouver des géométries

---

<sup>8</sup> Pairwise Error Probability

<sup>9</sup> Maximum Likelihood

<sup>10</sup> Channel State Information

qui augmentent la capacité du système MIMO comparé à un système SISO [23]. En 2000, Shiu étudie les effets de la corrélation entre antennes, notant que cette corrélation affecte le gain de capacité des systèmes multi-antennes par la modification des distributions des différents sous-canaux [24]. En 2001, Loyka étudie la capacité des systèmes MIMO corrélés en utilisant un modèle de matrice de corrélation exponentielle [25][26]. En 2002, Chuah explore la capacité des systèmes multi-antennes pour des canaux à évanouissements corrélés grâce à une étude analytique par lancer de rayons [27]. Il montre que dans un environnement corrélé, la capacité augmente linéairement avec le minimum du nombre d'antennes mais avec une pente de 10 à 20 % moins forte que pour des canaux décorrélés.

### 1.2.5. Capacité des systèmes MIMO utilisant un codage espace-temps différentiel

En 1999, Marzetta analyse un système MIMO dans un environnement de Rayleigh à évanouissements plats dont les canaux sont constants sur  $T$  durées symboles sans CSI ni à l'émission ni à la réception [28]. Il prouve qu'il n'y a aucun intérêt en terme de capacité à avoir un nombre d'antennes d'émission supérieur au nombre de durées symboles du code  $T$ . Il démontre que pour un nombre fixe d'antennes, quand  $T$  augmente, la capacité approche de la capacité que l'on obtiendrait si le récepteur connaissait les coefficients du canal. En 2000, Hochwald étudie la capacité des codes espace-temps non cohérents ou différentiels utilisant des modulations espace-temps unitaires [29]. En 2002, Zheng étudie les systèmes multi-antennes non cohérents d'abord utilisés par Marzetta pour calculer la capacité du canal à haut SNR en terme de temps de cohérence, nombre d'antennes d'émission et nombre d'antennes de réception [30]. Alors que dans le cas cohérent, la capacité augmente avec le minimum du nombre d'antennes réception-émission  $n = \min(N_t, N_r)$ , dans le cas non cohérent la capacité augmente linéairement avec  $n'(1 - n'/T)$  avec  $n' = \min(N_t, N_r, T/2)$ .

Voyons désormais les équations caractéristiques qui régissent le comportement, en terme d'efficacité spectrale, d'un système MIMO.

## 1.3 Le système MIMO

Considérons un système MIMO point à point avec  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception. L'architecture générale du système MIMO étudié est présentée en figure 1.1.

Pour chaque temps symbole, le signal transmis est représenté par le vecteur  $\mathbf{x}$ , de dimension  $N_t \times 1$ , ou le  $t^{\text{ième}}$  symbole  $x_t$ , fait référence au signal émis depuis l'antenne  $t$ . Nous considérons le canal comme Gaussien, pour lequel d'après la théorie de l'information [4], la distribution optimale des signaux transmis est bien évidemment Gaussienne.

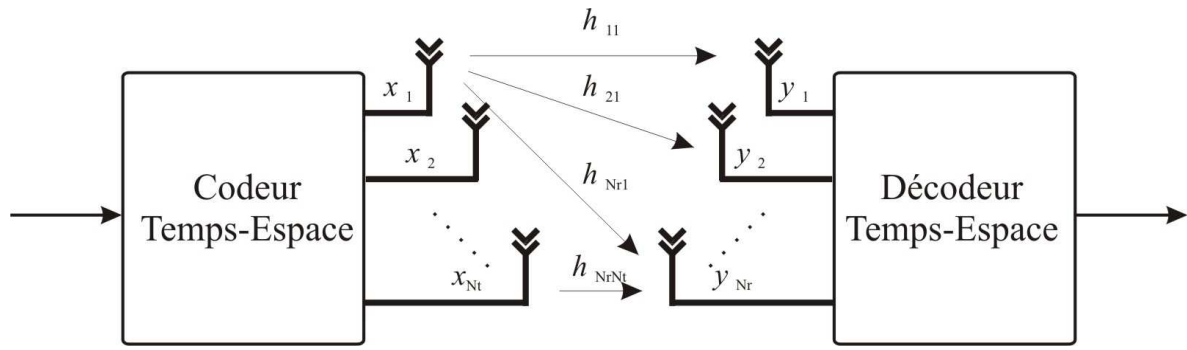


Figure 1.1 - Architecture générale d'un système MIMO

Ainsi, tous les éléments de  $\mathbf{x}$  sont considérés comme des variables Gaussiennes indépendantes, de moyenne nulle et identiquement distribuées. La matrice de covariance du signal transmis est donnée par l'expression :

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \quad (1.1)$$

où  $E\{\cdot\}$  symbolise l'espérance et  $\mathbf{A}^H$  la matrice hermitienne de  $\mathbf{A}$ , matrice transposée conjuguée de  $\mathbf{A}$ . La puissance totale transmise est notée  $P$ , répartie sur les  $N_t$  antennes d'émission. Cette puissance peut être représentée par :

$$P = \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) \quad (1.2)$$

où  $\text{tr}(\mathbf{A})$  exprime la trace de la matrice  $\mathbf{A}$ , obtenue par la somme des éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{A}$ . Si le canal de propagation est inconnu du côté de l'émetteur, nous considérons que les signaux sont transmis depuis chaque antenne d'émission avec une même puissance, égale à  $P/N_t$ . La covariance de la matrice d'émission pourra alors s'écrire :

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{P}{N_t} \mathbf{I}_{N_t} \quad (1.3)$$

avec  $\mathbf{I}_{N_t}$  matrice identité de taille  $N_t \times N_t$ . La bande passante de transmission étant considérée comme étroite, la réponse en fréquence sera donc plate. En d'autres termes, nous considérons que le canal est sans mémoire.

Ce canal, noté  $\mathbf{H}$ , est alors décrit comme une matrice complexe de dimension  $N_r \times N_t$ . Le  $rt^{\text{ième}}$  élément de  $\mathbf{H}$ , noté  $h_{rt}$ , représente le coefficient du canal de propagation vu entre l'antenne d'émission  $t$  et l'antenne de réception  $r$ . Pour une question de normalisation, nous admettons que la puissance de signal totale reçue par chaque antenne est égale à la puissance totale émise. Physiquement, cela signifie que nous ignorons tous les effets d'atténuation et d'amplification du signal durant la transmission. Ainsi, nous obtenons, pour un canal à coefficient fixe, une contrainte de normalisation pour les éléments de  $\mathbf{H}$ , à savoir :

$$\sum_{t=1}^{N_t} |h_{rt}|^2 = N_t, \text{ avec } r=1, 2, \dots, N_r \quad (1.4)$$

Nous supposons que le canal de propagation est connu à la réception, mais toujours pas à l'émission. La matrice du canal peut alors être déterminée par l'envoi d'une séquence d'apprentissage. L'estimation du CSI peut alors être communiquée à l'émetteur depuis un canal de retour. Les coefficients de  $\mathbf{H}$  peuvent être soit déterministes, soit aléatoires.

Quant au bruit au récepteur, il est décrit par un vecteur colonne  $N_r \times 1$  noté  $\mathbf{n}$ . Ses éléments sont considérés comme des variables Gaussiennes complexes, de moyenne nulle statistiquement indépendants avec une variance où les parties réelle et imaginaire sont égales et indépendantes. La matrice de covariance de ce vecteur de bruit  $\mathbf{n}$  est donnée par l'expression :

$$\mathbf{R}_{nn} = E\{\mathbf{nn}^H\} \quad (1.5)$$

S'il n'existe aucune corrélation entre les éléments de  $\mathbf{n}$ , alors on peut réécrire la matrice précédente de la façon suivante :

$$\mathbf{R}_{nn} = \sigma^2 \mathbf{I}_{N_r} \quad (1.6)$$

où chacune des  $N_r$  branches de réception ont une puissance égale à  $\sigma^2$ .

Le récepteur optimal est basé sur le principe à Maximum de Vraisemblance (MV), opérant de manière conjointe sur les  $N_r$  antennes de réception. Le signal reçu est modélisé par un vecteur colonne de dimension  $N_r \times 1$  noté  $\mathbf{y}$ , où chaque élément complexe fait référence à une antenne de réception. Sur chaque antenne, la puissance moyenne en sortie sera notée  $P_r$ . De cette façon, le rapport signal-sur-bruit moyen sur chaque antenne de réception est défini par :

$$\gamma = \frac{P_r}{\sigma^2} \quad (1.7)$$

Comme nous avons considéré que la puissance totale reçue par les antennes était égale à la puissance totale émise, le SNR devient égal au rapport entre la puissance totale émise et la puissance de bruit par antenne de réception, tout cela indépendamment de  $N_r$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\gamma = \frac{P}{\sigma^2} \quad (1.8)$$

En utilisant le modèle linéaire mathématique de la transmission, le vecteur reçu peut s'écrire comme étant égal à :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.9)$$

En utilisant la relation précédente, la matrice de covariance du signal reçu, défini par  $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\}$ , peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{H}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}^H \quad (1.10)$$

tandis que la puissance totale du signal reçu peut être déterminée en calculant :  $tr(\mathbf{R}_{yy})$ .

## 1.4 Calcul de la capacité d'un système MIMO

La capacité d'un système est définie comme étant le taux de transmission maximum possible, pour une faible probabilité d'erreur donnée.

Dans un premier temps nous considérerons que la matrice du canal est parfaitement connue en réception et complètement inconnue en émission.

En se servant du théorème de décomposition en éléments simples (SVD<sup>11</sup>) [31], n'importe quelle matrice  $\mathbf{H}$  de dimension  $N_r \times N_t$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale non négative de dimension  $N_r \times N_t$ , tandis que  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont deux matrices unitaires respectivement de taille  $N_r \times N_r$  et  $N_t \times N_t$ . Cela signifie également, que  $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}_{N_r}$  et  $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}_{N_t}$ , et que les éléments diagonaux de  $\mathbf{D}$  sont égaux aux racines carrées des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Les valeurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  notées  $\lambda$ , sont définies comme étant :

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^H \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \neq 0 \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{r}$  est un vecteur  $N_r \times 1$  associé à  $\lambda$ , nommé vecteur propre.

Les racines carrées des valeurs propres sont donc définies comme étant les valeurs singulières de  $\mathbf{H}$ . En outre, les colonnes de  $\mathbf{U}$  désigneront les vecteurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  tandis que celles de  $\mathbf{V}$  les vecteurs propres de  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ . En substituant (1.11) dans (1.9), nous pouvons réécrire le vecteur  $\mathbf{y}$  comme étant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.13)$$

Comme  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont inversibles, introduisons maintenant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{U}^H \mathbf{y} \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{V}^H \mathbf{x} \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{U}^H \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Clairement, la multiplication des vecteurs  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{n}$  par les matrices correspondantes, n'est qu'une mise en forme différente de ces derniers. De cette façon le canal original peut être réécrit ainsi :

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{x}' + \mathbf{n}' \quad (1.15)$$

Le nombre de valeurs propres non nulles de la matrice  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  est égal à  $r$ , rang de la matrice  $\mathbf{H}$ . Pour cette matrice de dimension  $N_r \times N_t$ , le rang vaut au maximum  $m = \min(N_r, N_t)$ , cela signifie qu'au plus, le nombre de valeurs singulières non nulles est de  $m$ . Notons  $\sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , les valeurs singulières de  $\mathbf{H}$ . En remplaçant ces valeurs dans l'équation (1.15), nous obtenons pour les coefficients du vecteur du signal reçu :

$$\begin{aligned} y'_i &= \sqrt{\lambda_i} x'_i + n'_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ y'_i &= n'_i, \quad i = r+1, r+2, \dots, N_r \end{aligned} \quad (1.16)$$

Comme le montre (1.16),  $y'_i, i = r+1, r+2, \dots, N_r$ , ne dépend pas du signal transmis, i.e. le gain du canal est nul. Par contre, le signal  $y'_i$  reçu pour  $i = 1, 2, \dots, r$ , dépend seulement de l'élément  $x'_i$ . Ainsi, le canal MIMO équivalent à (1.15) peut être considéré comme la superposition de  $r$  sous-canaux parallèles découplés. Chaque sous-canal se voit assigné une valeur singulière de  $\mathbf{H}$ , correspondant à l'amplitude du gain du canal. Le gain en puissance du canal est alors égal à la valeur propre de la matrice  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ .

---

<sup>11</sup> Singular Value Decomposition

Par exemple, si  $N_t > N_r$ , comme le rang de  $\mathbf{H}$  ne peut pas être supérieur à  $N_r$ , (1.16) montre qu'il y aura au maximum  $N_r$  gains de sous-canaux non nuls pour le canal MIMO équivalent, comme présenté sur la figure 1.2.

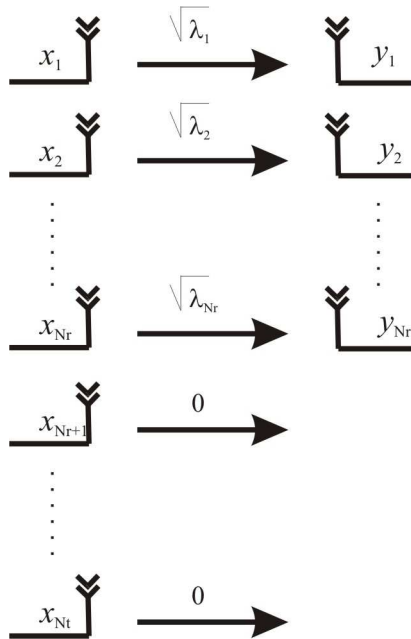


Figure 1.2 – Architecture d'un canal MIMO équivalent lorsque  $N_t > N_r$

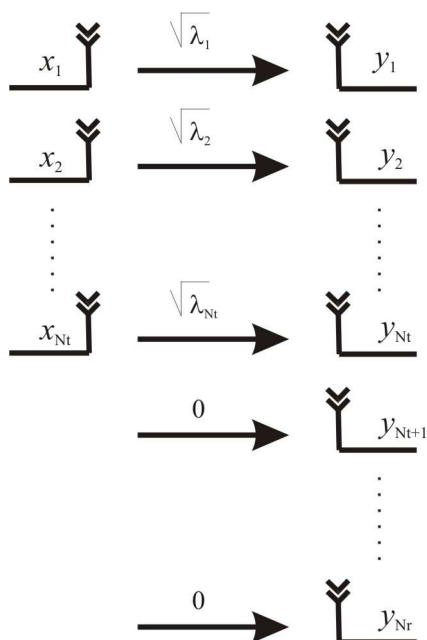


Figure 1.3 – Architecture d'un canal MIMO équivalent lorsque  $N_r > N_t$

Par contre, maintenant si  $N_r > N_t$ , il y aura au maximum  $N_t$  gains de sous-canaux non nuls pour le canal MIMO équivalent, comme le montre la figure 1.3.

Avec les nouvelles définitions des vecteurs  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{n}$  (1.14), les matrices de covariances ainsi que leurs traces correspondantes sont obtenues ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{y'y'} &= \mathbf{U}^H \mathbf{R}_{yy} \mathbf{U} \\ \mathbf{R}_{x'x'} &= \mathbf{V}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n'n'} &= \mathbf{U}^H \mathbf{R}_{nn} \mathbf{U} \\ \text{tr}(\mathbf{R}_{y'y'}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_{yy}) \\ \text{tr}(\mathbf{R}_{x'x'}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) \\ \text{tr}(\mathbf{R}_{n'n'}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_{nn}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les équations précédentes montrent que les matrices de covariance de  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{n}'$ , ont la somme de leurs éléments diagonaux, ainsi que leur puissance égale respectivement aux matrices de covariance des signaux originaux,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{n}$ .

Notons que dans le cas du canal MIMO équivalent décrit par (1.16), les sous-canaux sont découplés ce qui permet ainsi que leur capacité s'ajoute. Donc, en supposant pour le modèle du canal MIMO équivalent, que la puissance de chaque antenne d'émission soit de  $P/N_t$ , nous pouvons estimer la capacité globale du canal, que nous noterons  $C$ , en utilisant la formule de la capacité au sens de Shannon :

$$C = W \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{P_{ri}}{\sigma^2} \right) \quad (1.19)$$

où  $W$  symbolise la bande passante de chaque sous-canal et,

$$P_{ri} = \frac{\lambda_i P}{N_t} \quad (1.20)$$

représente la puissance reçue sur le  $i^{\text{ième}}$  sous-canal et  $\sqrt{\lambda_i}$  une valeur singulière de  $\mathbf{H}$ . Nous pouvons alors réécrire la capacité du canal en utilisant les relations précédentes, ce qui donne :

$$\begin{aligned} C &= W \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma^2} \right) \\ &= W \log_2 \prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nous allons désormais montrer la relation qui existe entre la capacité et la matrice du canal de propagation  $\mathbf{H}$ . En supposant  $m = \min(N_t, N_r)$ , (1.12) définissant la relation entre vecteurs propres et valeurs propres, se réécrit :

$$(\lambda \mathbf{I}_m - \mathbf{Q})\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0 \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{Q}$  est définie comme étant une matrice de Wishart, avec :

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{H}^H, & N_r < N_t \\ \mathbf{H}^H\mathbf{H}, & N_r \geq N_t \end{cases} \quad (1.23)$$

$\lambda$  sera une valeur propre de  $\mathbf{Q}$ , si et seulement si  $(\lambda \mathbf{I}_m - \mathbf{Q})$  est une matrice singulière. Si tel est le cas, on aura :

$$\det(\lambda \mathbf{I}_m - \mathbf{Q}) = 0 \quad (1.24)$$



Les valeurs singulières  $\lambda$  de la matrice du canal peuvent être calculées en cherchant les racines de l'équation (1.24). Pour cela nous introduisons  $p(\lambda)$ , polynôme de degrés  $m$ , caractéristique de la partie gauche de (1.24) :

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_m - \mathbf{Q}) \quad (1.25)$$

Comme un polynôme de degré  $m$ , à coefficients complexes à exactement  $m$  zéros, nous pouvons réécrire (1.25) comme étant :

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i) \quad (1.26)$$

où  $\lambda_i$  sont les racines du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$ , égales aux valeurs singulières de la matrice du canal  $\mathbf{H}$ . L'équation (1.24) peut maintenant s'écrire :

$$\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i) = 0 \quad (1.27)$$

De plus, nous pouvons égaliser les parties gauches des équations (1.24) et (1.27) ce qui donne :

$$\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i) = \det(\lambda \mathbf{I}_m - \mathbf{Q}) \quad (1.28)$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $-\frac{N_t \sigma^2}{P}$  dans (1.28) nous obtenons :

$$\prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma^2} \right) = \det \left( \mathbf{I}_m + \frac{P}{N_t \sigma^2} \mathbf{Q} \right) \quad (1.29)$$

En utilisant maintenant (1.29), l'expression de la capacité devient :

$$C = W \log_2 \det \left( \mathbf{I}_m + \frac{P}{N_t \sigma^2} \mathbf{Q} \right) \quad (1.30)$$

Comme les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  et  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  sont les mêmes, les valeurs respectives des capacités des canaux de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}^H$  sont égales. Pour finir, notons que si les coefficients du canal sont des variables aléatoires, les équations (1.21) et (1.30) représentent alors la capacité instantanée du canal. La capacité moyenne du canal pourra être obtenue en faisant la moyenne de toutes les réalisations des coefficients du canal.

## 1.5 Calcul de la capacité d'un canal MIMO avec allocation de puissance à l'émetteur

Lorsque les paramètres du canal de propagation sont connus à l'émetteur, la valeur de la capacité donnée par (1.30) peut être augmentée en adaptant la puissance attribuée aux différentes antennes suivant la technique dite de « *water-filling* » [2]. Elle consiste en fait à attribuer plus de puissance à un bon canal et moins lorsque ce dernier est mauvais. L'allocation de puissance d'un canal  $i$  est donnée par (annexe 1.1) :

$$P_i = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right)^+, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.31)$$

où la notation  $a^+$  signifie  $\max(a, 0)$  et la quantité  $\mu$  est déterminée de telle sorte que :

$$\sum_{i=1}^r P_i = P \quad (1.32)$$

En considérant la décomposition en valeur singulière de la matrice  $\mathbf{H}$ , comme présentée dans l'équation (1.11), la puissance reçue par le sous-canal  $i$  du modèle MIMO équivalent est :

$$P_{ri} = (\lambda_i \mu - \sigma^2)^+ \quad (1.33)$$

La capacité du canal MIMO sera alors :

$$C = W \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{P_{ri}}{\sigma^2} \right) \quad (1.34)$$

En remplaçant dans (1.34) la puissance reçue exprimée en (1.33) il vient :

$$C = W \sum_{i=1}^r \log_2 \left[ 1 + \frac{1}{\sigma^2} (\lambda_i \mu - \sigma^2)^+ \right] \quad (1.35)$$

Et la matrice de covariance du signal transmis aura pour valeur :

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{V} \text{diag} \left( P_1, P_2, \dots, P_{N_r} \right) \mathbf{V}^H \quad (1.36)$$

## 1.6 Exemples de capacités MIMO pour des canaux à coefficients constants

Dans cette partie nous examinons le taux de transmission en faisant varier les paramètres du canal. Notre étude porte sur des canaux à coefficients constants. Dans la majorité des exemples le canal est uniquement connu au récepteur et toutes les autres hypothèses sur le canal ont été précédemment définies dans le paragraphe 1.2.

### Exemple 1.1 : Système mono-antenne

Nous considérons ici que  $N_t = N_r = 1$  et que  $\mathbf{H} = h = 1$ . La formule de Shannon donne la capacité du canal :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.37)$$

La même expression peut être obtenue en utilisant (1.30). Notons qu'à fort SNR, la capacité croît logarithmiquement avec le SNR. Ainsi dans cette région, une augmentation du gain de 3 dB implique que la capacité normalisée  $C/W$  augmente quant à elle de 1bit/sec/Hz. En supposant que le canal est normalisé, à savoir  $|h|^2 = 1$ , et pour un SNR  $(P/\sigma^2)$  de 20dB, la capacité pour un système mono-antenne est de 6.658 bits/sec/Hz.

### Exemple 1.2 : Système MIMO à coefficients du canal unitaire

#### Emetteur cohérent

Pour ce canal, les coefficients  $h_{rt}$  de  $\mathbf{H}$  sont :

$$h_{rt} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, N_r, \quad t = 1, 2, \dots, N_t \quad (1.38)$$

Si le signal émis simultanément depuis les  $N_t$  antennes d'émission est le même, le signal reçu sur l'antenne  $i$  est :

$$y_i = N_t x \quad (1.39)$$

Et la puissance du signal reçu par cette même antenne sera :

$$P_{ri} = N_t^2 \frac{P}{N_t} = N_t P \quad (1.40)$$

où  $P/N_t$  est la puissance transmise par une antenne, c'est pour cela que la puissance reçue par antenne vaut  $N_t P$ . Le gain en puissance  $N_t$  provient du fait que le même signal est émis depuis les  $N_t$  antennes d'émission.

Le rang de  $\mathbf{H}$  valant 1, il n'y a seulement qu'un seul signal reçu dans le modèle de canal MIMO équivalent, avec pour puissance :

$$P_r = N_r N_t P \quad (1.41)$$

Ainsi en appliquant la formule (1.19) nous obtenons pour cette configuration de canal l'expression suivante :

$$C = W \log_2 \left( 1 + N_r N_t \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.42)$$

Un tel système dispose d'un gain de diversité égal à  $N_t N_r$  relatif au cas mono-antenne. Le prix à payer pour un tel gain, réside dans la complexité d'émettre le signal de façon synchrone sur les antennes d'émission et d'effectuer en réception une recombinaison de type MRC cohérente. Cependant, la capacité croît dans ce cas logarithmiquement avec le produit  $N_t N_r$ , ce qui a pour effet d'obtenir une capacité normalisée  $C/W$  égale à 12.65 bits/sec/Hz pour un système où  $N_t = N_r = 8$  à  $10 \log_{10} (P/\sigma^2) = 20$  dB.

### Emetteur non cohérent

Maintenant, si le signal émis depuis les différentes antennes n'est pas le même, et que les coefficients du canal sont tous égaux à 1, il y a seulement un seul signal reçu dans le modèle de canal MIMO équivalent, et pour lequel la puissance vaut  $N_r P$ . Ainsi la capacité est égale à :

$$C = W \log_2 \left( 1 + N_r \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.43)$$

Pour un SNR égal à 20 dB et  $N_t = N_r = 8$ , cette fois ci  $C/W$  ne vaut plus que 9.646 bits/sec/Hz.

### Exemple 1.3 : Diversité en réception

Considérons dans cet exemple, que nous disposons d'une seule antenne d'émission et de  $N_r$  antennes de réception. La matrice du canal de propagation s'écrit alors :

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_r})^T$$

où l'opérateur  $(\cdot)^T$  exprime la matrice transposée. Comme  $N_r > N_t$ , l'équation (1.30) peut être écrite ainsi :

$$C = W \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_{N_t} + \frac{P}{N_t \sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right] \quad (1.44)$$

or comme  $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2$  et  $N_t = 1$ , alors (1.44) peut se mettre sous la forme :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2 \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.45)$$

Dans le cas où,  $|h_1|^2 = |h_2|^2 = \dots = |h_{N_r}|^2 = 1$ , il s'ensuit que (1.45) devient :

$$C = W \log_2 \left( 1 + N_r \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.46)$$

Par rapport au cas mono-antenne cette configuration entraîne un gain de diversité égale à  $N_r$ , et pour un nombre d'antenne de réception de 8 à un SNR = 20dB, la capacité sera de 9.646 bits/s/Hz.

#### Exemple 1.4 : Diversité à l'émission

Dans ce cas de figure, nous considérons un système avec  $N_t$  antennes d'émission et juste une seule à la réception. Le canal de propagation a pour expression le vecteur :

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_t})$$

et comme  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \sum_{j=1}^{N_t} |h_j|^2$ , en appliquant la formule (1.30), on obtient pour la capacité :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \sum_{j=1}^{N_t} |h_j|^2 \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.48)$$

Si les coefficients du canal sont égaux et normalisés comme en (1.4), il en résulte que :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.49)$$

La capacité n'augmente donc pas avec le nombre d'antennes à l'émetteur. Cette expression est valable dans le cas où l'émetteur ne connaît pas le canal. Si toutes les antennes d'émission sont synchronisées, lorsque le canal est connu à l'émetteur, nous pouvons appliquer l'équation (1.35). Sachant que le rang de la matrice du canal est de un, il y a seulement un terme dans la somme de (1.35) et seulement une valeur propre non nulle qui est :

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N_t} |h_j|^2$$

A cause de la condition de normalisation,  $\mu$  prendra la valeur :

$$\mu = P + \frac{\sigma^2}{\lambda}$$

ainsi nous obtenons pour la capacité :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \sum_{j=1}^{N_t} |h_j|^2 \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.50)$$

et si les coefficients du canal sont normalisés comme en (1.4), nous obtenons,

$$C = W \log_2 \left( 1 + N_t \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.51)$$

Pour  $N_t = 8$  et SNR = 20dB, la diversité à l'émission pour un canal connu à l'émetteur est de 9.646 bits/s/Hz.

## 1.7 Capacité MIMO pour des canaux à coefficients aléatoires

Nous allons voir maintenant un cas plus réaliste, celui où les coefficients du canal de propagation sont des variables aléatoires.

Nous supposons toujours que le canal est parfaitement estimé au récepteur et méconnu à l'émetteur, que les coefficients du canal sont des variables aléatoires Gaussiennes de moyenne nulle et que leurs parties réelle et imaginaire sont des variables Gaussiennes aléatoires indépendantes et distribuées de façon identique, avec une moyenne nulle et une variance égale à  $1/2$ . De telles hypothèses impliquent que les coefficients de la matrice du canal sont distribués suivant une loi de Rayleigh avec :  $E[|h_{ij}|^2] = 1$ .

La fonction densité de probabilité  $p(z)$ , pour une variable de Rayleigh  $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$  distribuée de façon aléatoire, où  $z_1$  et  $z_2$  sont des variables Gaussiennes aléatoires, orthogonales, de moyenne nulle et statistiquement indépendantes, ayant chacune une variance  $\sigma_r^2$  a pour expression :

$$p(z) = \frac{z}{\sigma_r^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_r^2}} \quad (1.52)$$

Ici nous normalisons  $\sigma_r^2$  à  $1/2$ . En considérant l'espace entre les antennes suffisamment grand pour que les coefficients du canal de propagation ne soient pas corrélés, et en tenant compte des écarts en fréquences du canal, nous distinguerons trois scénarios possibles :

1. La matrice  $\mathbf{H}$  est aléatoire. Ces coefficients changent de façon aléatoire à chaque temps symbole  $T$  et sont constants durant tout le temps symbole. Ce modèle de canal portera le nom de « *fast fading* ».
2. La matrice  $\mathbf{H}$  est aléatoire. Chaque coefficient est aléatoire et reste constant durant un certain intervalle de temps symbole, plus court que le temps total de transmission. Ce canal s'appellera « *block fading* ».
3. La matrice  $\mathbf{H}$  est aléatoire, mais reste constante durant toute la transmission. Nous nommerons ce dernier canal : « *quasi-static fading* ».

Dans ce qui suit, nous allons donc chercher à maximiser le taux de transmission pour des cas de propagation variés et donner des exemples de réalisation.

### 1.7.1. Capacité MIMO pour des canaux de Rayleigh dits « fast » et « block fading »

Pour déterminer l'expression de la capacité d'un canal de Rayleigh MIMO à évanouissement rapide, nous allons commencer tout d'abord par l'exprimer dans le cas mono-antenne. Dans ce cas, le coefficient  $|h|^2$  de l'expression de la capacité en (1.37), suit une loi chi-deux à deux degrés de liberté, que nous noterons  $\chi_2^2$ . Cette variable aléatoire sera exprimée ainsi :

$$v = \chi_2^2 = z_1^2 + z_2^2$$

De cette façon, la fonction densité de probabilité aura pour expression :

$$p(v) = \frac{1}{2\sigma_r^2} e^{-\frac{v}{2\sigma_r^2}}, \quad v \geq 0 \quad (1.53)$$

La capacité pour un canal dit « *fast fading* » peut être obtenue en moyennant l'expression (1.37) :

$$C = E \left[ W \log_2 \left( 1 + \chi_2^2 \frac{P}{\sigma^2} \right) \right] \quad (1.54)$$

En utilisant l'approche de décomposition en valeur singulière, le canal MIMO « *fast fading* », noté  $\mathbf{H}$  sous forme matricielle, peut être représenté comme un canal équivalent, constitué de  $r \leq \min(N_t, N_r)$  sous-canaux parallèles découplés, où  $r$  représente le rang de  $\mathbf{H}$ . Ainsi, les capacités de ces sous-canaux s'additionnent donnant une capacité globale égale à :

$$C = E \left[ W \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \lambda_i \frac{P}{N_t \sigma^2} \right) \right] \quad (1.55)$$

où les  $\sqrt{\lambda_i}$  représentent les valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}$ . En utilisant la même approche, que pour celle du calcul de la capacité effectuée dans le paragraphe 1.3, la capacité moyenne d'un canal MIMO « *fast fading* » s'écrit :

$$C = E \left\{ W \log_2 \det \left[ \left( \mathbf{I}_r + \frac{P}{N_t \sigma^2} \mathbf{Q} \right) \right] \right\} \quad (1.56)$$

où  $\mathbf{Q}$  est défini en (1.23).

Pour des canaux dits « *block fading* », tant que le canal est ergodique, nous pouvons calculer la capacité du canal en utilisant les expressions (1.55) et (1.56).

Alors que la capacité peut s'exprimer de façon simple lorsque  $N_t = N_r = 1$ , il en est tout autrement pour calculer l'espérance dans (1.55) et (1.56) lorsque le nombre d'antennes augmente. Pour ce faire, il faut calculer  $C$  avec l'aide des polynômes de Laguerre [6], [10] de la façon suivante:

$$C = \int_0^\infty \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_t \sigma^2} \lambda \right) \sum_{k=0}^{m_{\min}-1} \frac{k!}{(k + m_{\min} + m_{\max})!} \left[ L_k^{m_{\max}-m_{\min}}(\lambda) \right]^2 \lambda^{m_{\min}-m_{\max}} e^{-\lambda} d\lambda \quad (1.57)$$

où

$$m_{\min} = \min(N_t, N_r) \quad (1.58)$$

$$m_{\max} = \max(N_t, N_r) \quad (1.59)$$

et  $L_k^{m_{\max}-m_{\min}}(x)$  est associé au polynôme de Laguerre d'ordre  $k$ , défini en [32] :

$$L_k^{m_{\max}-m_{\min}}(x) = \frac{1}{k!} e^x x^{m_{\max}-m_{\min}} \frac{d^k}{dx^k} \left( e^{-x} x^{m_{\max}-m_{\min}+k} \right) \quad (1.60)$$

En définissant le rapport,  $\tau = m_{\max}/m_{\min}$ , nous pouvons réécrire la capacité en la normalisant par  $m_{\min}$  comme étant égale à :

$$\lim_{m_{\max} \rightarrow \infty} \frac{C}{m_{\min}} = \frac{W}{2\pi} \int_{v_1}^{v_2} \log_2 \left( 1 + \frac{P m_{\min}}{N_t \sigma^2} v \right) \sqrt{\left( \frac{v_2}{v} - 1 \right) \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right)} dv \quad (1.61)$$

où le rapport  $\tau$  est maintenu constant quelles que soient les valeurs de  $m_{\min}$  et  $m_{\max}$ , et où :

$$\nu_2 = (\sqrt{\tau} + 1)^2$$

et

$$\nu_1 = (\sqrt{\tau} - 1)^2$$

**Exemple 1.5 : Système SIMO sur canaux « fast fading » et « block fading »**

Pour un système à une antenne d'émission et  $N_r$  antennes de réception, sur un canal de Rayleigh à évanouissement rapide, modélisé par la matrice de canal

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_r})^T$$

la formule (1.56) donne l'expression de la capacité pour un récepteur avec MRC:

$$C = E \left[ W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \chi_{2N_r}^2 \right) \right] \quad (1.62)$$

où

$$\chi_{2N_r}^2 = \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2$$

est une loi du chi-deux à  $2N_r$  degrés de liberté, qui peut s'écrire comme :

$$v = \chi_{2N_r}^2 = \sum_{i=1}^{2N_r} z_i^2 \quad (1.63)$$

où les  $z_i, i=1, 2, \dots, 2N_r$ , sont des variables aléatoires Gaussiennes, statistiquement indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_r^2 = 1/2$ , qui ont pour fonction de densité de probabilité :

$$p(v) = \frac{1}{\sigma_r^{2N_r} 2^{N_r} \Gamma(N_r)} v^{N_r-1} e^{-\frac{v}{2\sigma_r^2}}, v \geq 0 \quad (1.64)$$

ou  $\Gamma(p)$  est une fonction définie par :

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, p > 0 \quad (1.65)$$

$$\Gamma(p) = (p-1)! \text{ avec } p \text{ un entier strictement positif} \quad (1.66)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.67)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.68)$$

Pour finir une solution sous-optimale pour le calcul de la capacité consiste à calculer  $C$  sous la forme :

$$C = E \left\{ W \log_2 \left[ 1 + \frac{P}{\sigma^2} \max_i (|h_i|^2) \right] \right\} \quad (1.69)$$

Les courbes de capacité sont données en figure 1.4 et figure 1.5, représentant respectivement les solutions optimale et sous-optimale.

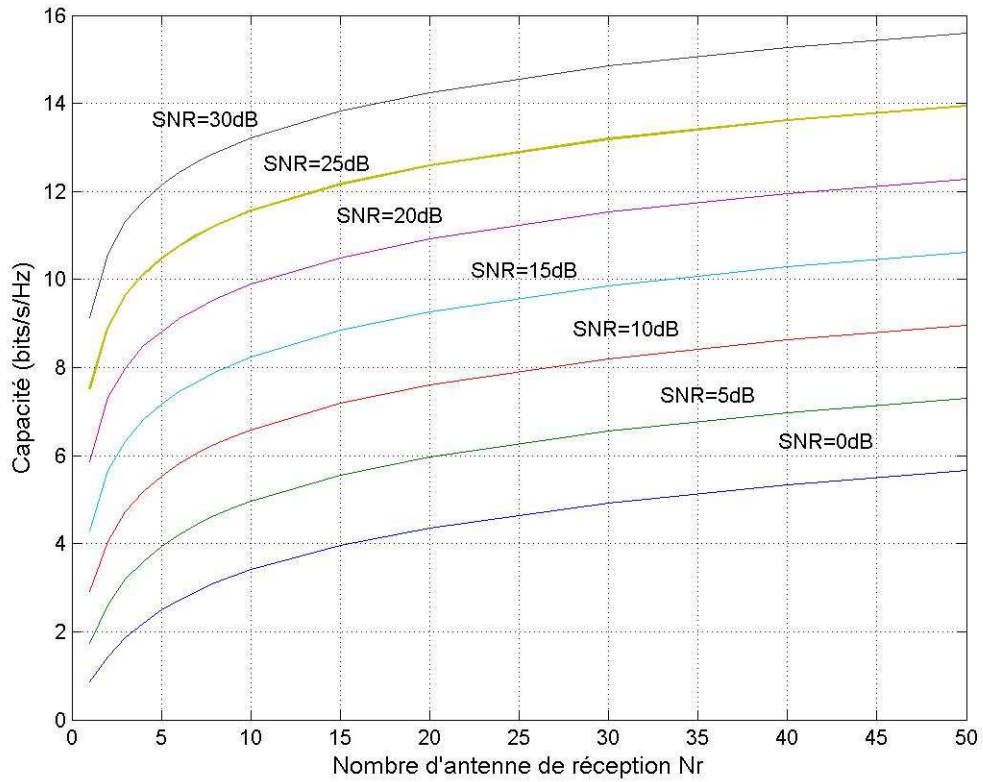


Figure 1.4 – Courbes de capacité optimale, pour un système SIMO sur canaux de Rayleigh dits « *fast fading* » et « *block fading* »

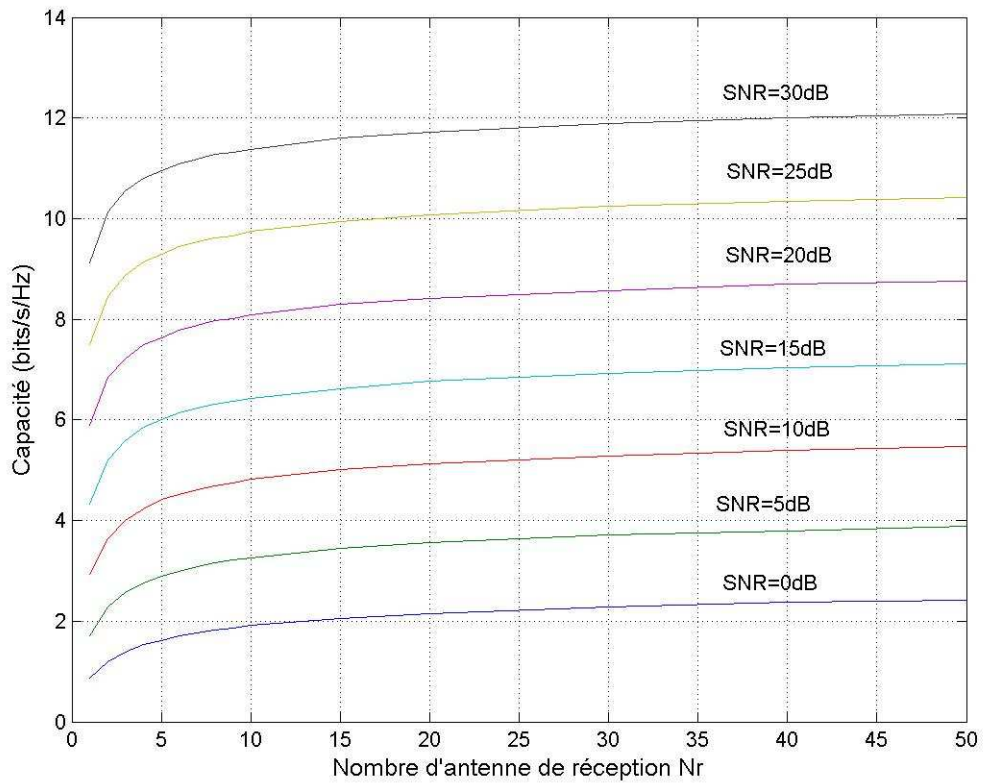


Figure 1.5 - Courbes de capacité sous-optimale, pour un système SIMO sur canaux de Rayleigh dits « *fast fading* » et « *block fading* »



### Exemple 1.6 : Système MISO sur canaux « fast fading » et « block fading »

Pour un système à  $N_t$  antennes d'émission et une antenne de réception, sur un canal de Rayleigh à évanouissement rapide, modélisé par la matrice de canal

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{N_t})$$

la formule (1.56) donne l'expression de la capacité pour un récepteur avec MRC :

$$C = E \left[ W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_t \sigma^2} \chi_{2N_t}^2 \right) \right] \quad (1.70)$$

où

$$\chi_{2N_t}^2 = \sum_{j=1}^{N_t} |h_j|^2 \text{ est une loi du chi-deux à } 2N_t \text{ degrés de liberté.}$$

Notons que si l'on augmente considérablement le nombre d'antennes à l'émission, alors la capacité approche une valeur asymptotique à savoir :

$$\lim_{N_t \rightarrow \infty} C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.71)$$

En d'autres termes, une grande diversité à l'émission permet d'annuler l'effet d'évanouissement du canal.

Les courbes de capacité MISO sont tracées en figure 1.6. La capacité est tracée en fonction du nombre d'antennes d'émission, pour un SNR variant de 0 à 30 dB. Nous constatons une saturation de la capacité à partir de  $N_t \geq 2$ , ce qui signifie que la capacité asymptotique traduite par l'équation (1.71) est atteinte pour un nombre d'antennes d'émission égal à 1.

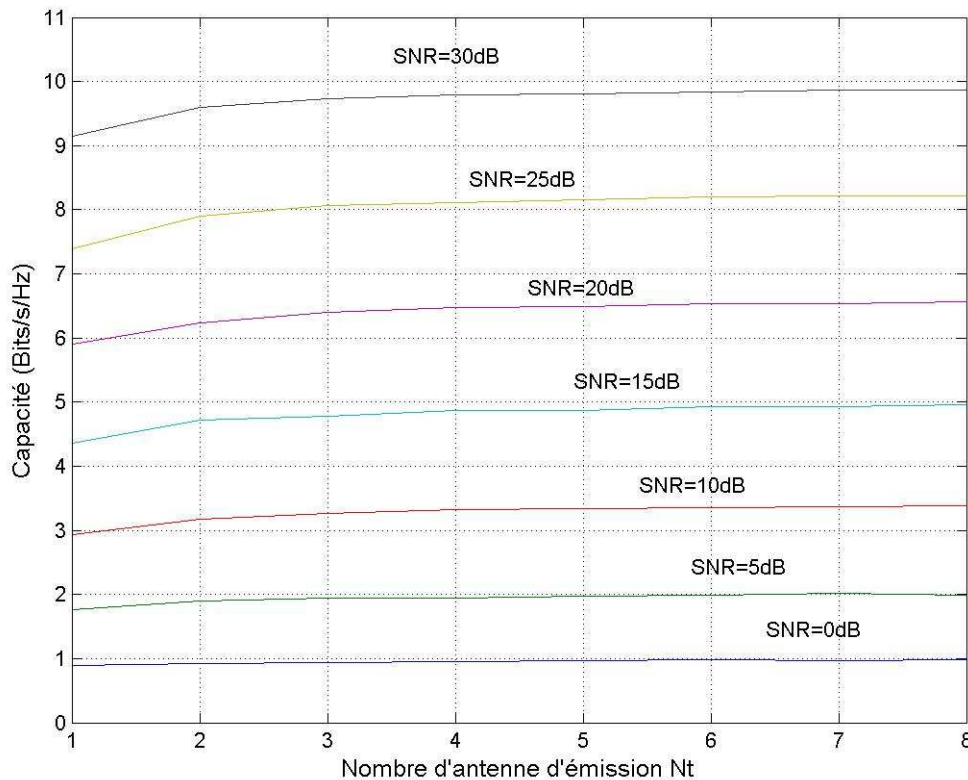


Figure 1.6 – Courbes de capacité, pour un système MISO sur canaux de Rayleigh dis « fast fading » et « block fading »

Pour finir sur cet exemple, nous donnons l'expression de la capacité lorsque le système MISO émet de façon synchrone le même signal sur chaque antenne :

$$C = E \left[ W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \chi_{2N_t}^2 \right) \right] \quad (1.72)$$

**Exemple 1.7 : Système MIMO sur canaux « fast fading » et « block fading »**

Dans cet exemple nous considérons une transmission sur un canal MIMO à évanouissement rapide, où le nombre d'antennes d'émission est égal au nombre d'antennes de réception,  $N = N_r = N_t$ . Nous supposons que le canal est uniquement connu au récepteur.

Ainsi, la capacité asymptotique grâce à (1.61) est donnée par :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{WN} = \frac{1}{\pi} \int_0^4 \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \nu \right) \sqrt{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{4}} d\nu \quad (1.73)$$

l'expression précédente peut être bornée ainsi, en remarquant que  $\log(1+x) \geq \log(x)$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{WN} \geq \frac{1}{\pi} \int_0^4 \log_2 \left( \frac{P}{\sigma^2} \nu \right) \sqrt{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{4}} d\nu \quad (1.74)$$

borne qui peut se simplifier [6] en s'exprimant :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{WN} \geq \log_2 \left( \frac{P}{\sigma^2} \right) - 1 \quad (1.75)$$

l'expression (1.75) montre que la capacité augmente de façon linéaire en fonction du nombre d'antennes et logarithmiquement en fonction du SNR. Dans cet exemple nous avons un gain de multiplexage égal à  $N$ , car il y a  $N$  sous-canaux indépendants, parfaitement identifiables car le canal est connu au récepteur.

Les courbes de capacité sont obtenues en utilisant l'expression de la borne (1.75), et sont tracées en figure 1.7 pour des valeurs de SNR variant de 10 à 30 dB.

La borne de la capacité normalisée  $C/N$  de (1.75), et la capacité normalisée moyenne simulée en utilisant (1.56), sont tracées sur la figure 1.8 en fonction du SNR pour un nombre d'antennes  $N$  variable. Remarquons que les courbes pour 2, 8 et 16 antennes coïncident parfaitement. Les simulations montrent bien que la borne est très révélatrice du comportement de la capacité lorsque  $N$  augmente.

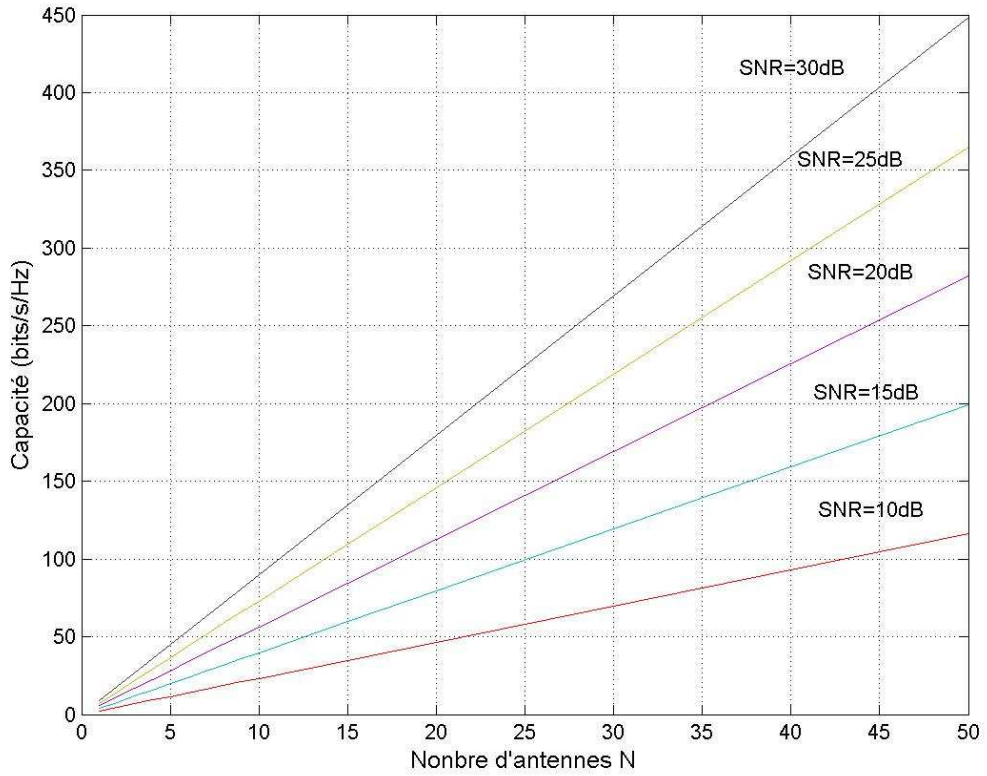


Figure 1.7 – Courbes de capacité obtenues en utilisant l'expression (1.75), pour un système MIMO sur un canal dit « *fast fading* » et « *block fading* »

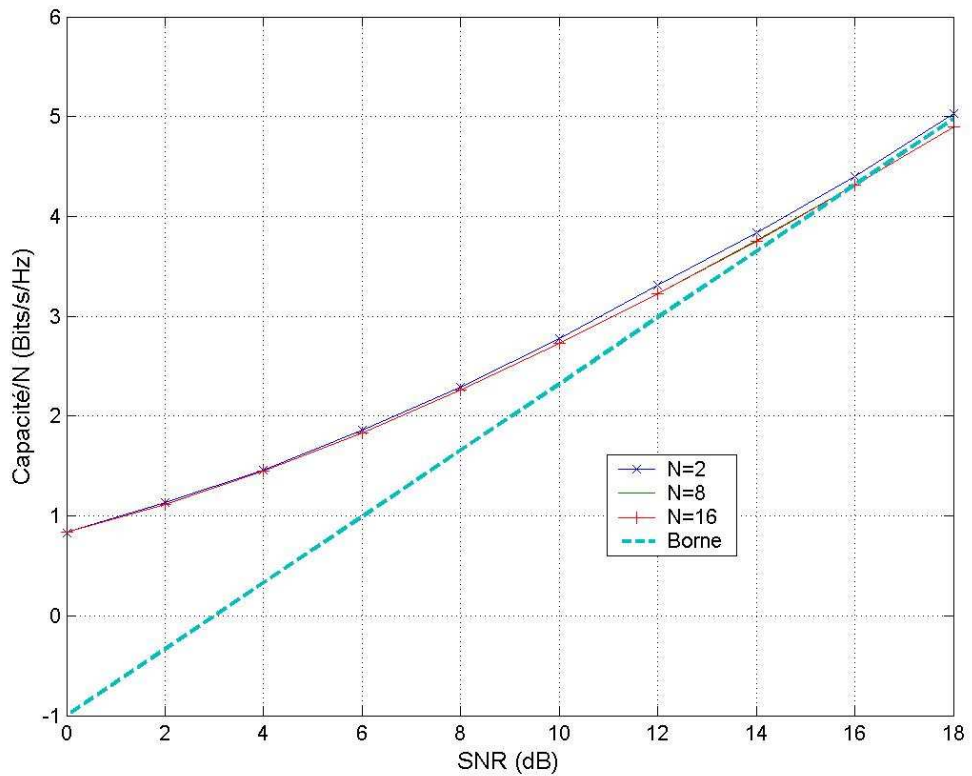


Figure 1.8 – Courbes de capacité normalisées, pour un système MIMO sur un canal dit « *fast fading* » et « *block fading* »

### Exemple 1.8 : Système MIMO sur canaux «fast fading» et «block fading» avec adaptation de puissance à l'émission

La capacité instantanée pour un système MIMO avec allocation de puissance à l'émission est donnée par la formule (1.35). La moyenne de cette capacité pour un canal ergodique peut être obtenue en moyennant toutes les réalisations des coefficients du canal. Les figures 1.9 et 1.10 montrent les valeurs de capacités estimées par simulation avec et sans adaptation de puissance à l'émetteur en fonction du nombre d'antennes d'émission pour un SNR de 25 dB et un nombre d'antennes de réception variable, sur un canal de Rayleigh. Pour notre schéma d'adaptation, les puissances sont allouées suivant le principe du «water-filling» et lorsqu'il n'y a pas d'adaptation les puissances émises sont les mêmes sur chaque antenne d'émission. Comme le montrent les figures, lorsque le nombre d'antennes d'émission est le même ou inférieur au nombre d'antennes de réception, il n'y a pas de gain d'adaptation de puissance. Cependant, lorsque le nombre d'antennes d'émission devient supérieur au nombre d'antennes de réception, nous obtenons un gain d'adaptation en puissance significatif. Pour  $N_t = 4$  et  $N_r = 2$ , le gain est de 2 bits/s/Hz et pour  $N_t = 14$  et  $N_r = 2$ , il est de 5.6 bits/s/Hz. L'amélioration de capacité obtenue par adaptation de puissance est meilleure pour des faibles SNR que pour des forts, comme le montre la figure 1.11.

#### 1.7.2. Capacité MIMO, sur des canaux de Rayleigh à évanouissement lent

Nous considérons maintenant un canal MIMO pour lequel, la matrice du canal de propagation  $\mathbf{H}$  est choisie de façon aléatoire, d'après les règles de distribution de Rayleigh, au début de la transmission, et reste constante tout au long de la transmission d'un bloc de données. Comme précédemment, nous supposons que le canal est parfaitement connu au récepteur et méconnu à l'émetteur.

Pour ce système, la capacité, estimée en (1.30), est une variable aléatoire. Dans ce cas, nous estimerons la distribution cumulée complémentaire de la capacité dite CCDF<sup>12</sup>. La CCDF est définie comme la probabilité d'obtenir un certain niveau de capacité. On la notera  $P_c$ . Quant à la probabilité de la capacité dite *outage*, notée  $P_{out}$ , elle définit la probabilité de ne pas obtenir un certain niveau de capacité, et est égale à la distribution cumulée de la capacité dite CDF<sup>13</sup> ou encore à  $1 - P_c$ .

#### 1.7.3. Exemples de capacité MIMO, pour des canaux de Rayleigh à évanouissement lent

##### Exemple 1.9 : Cas SISO

Dans cette configuration :  $N_t = N_r = 1$  et la capacité est donnée par :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \chi_2^2 \right) \quad (1.76)$$

où  $\chi_2^2$  est une variable aléatoire du chi-deux à deux degrés de liberté.

---

<sup>12</sup> Complementary Cumulative Distribution Function

<sup>13</sup> Cumulative Distribution Function

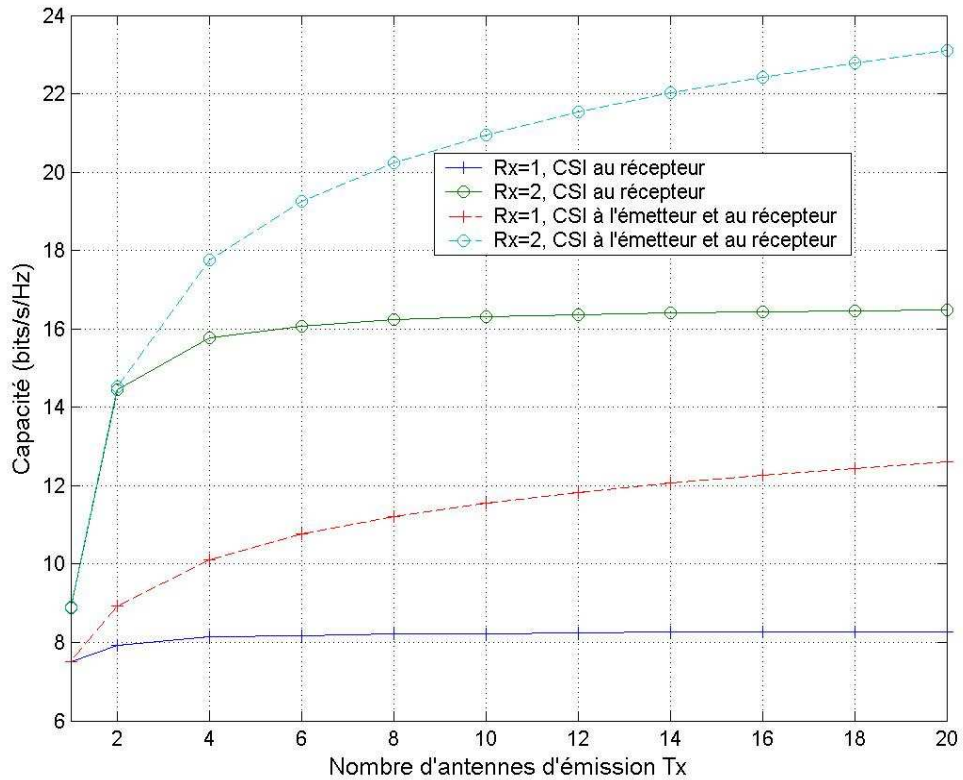


Figure 1.9 – Capacités atteignables avec et sans allocation de puissance, pour un système MIMO, sur un canal rapide de Rayleigh, pour un SNR de 25dB, un nombre d'antennes de réception de 1 et 2, en fonction du nombre d'antennes d'émission.

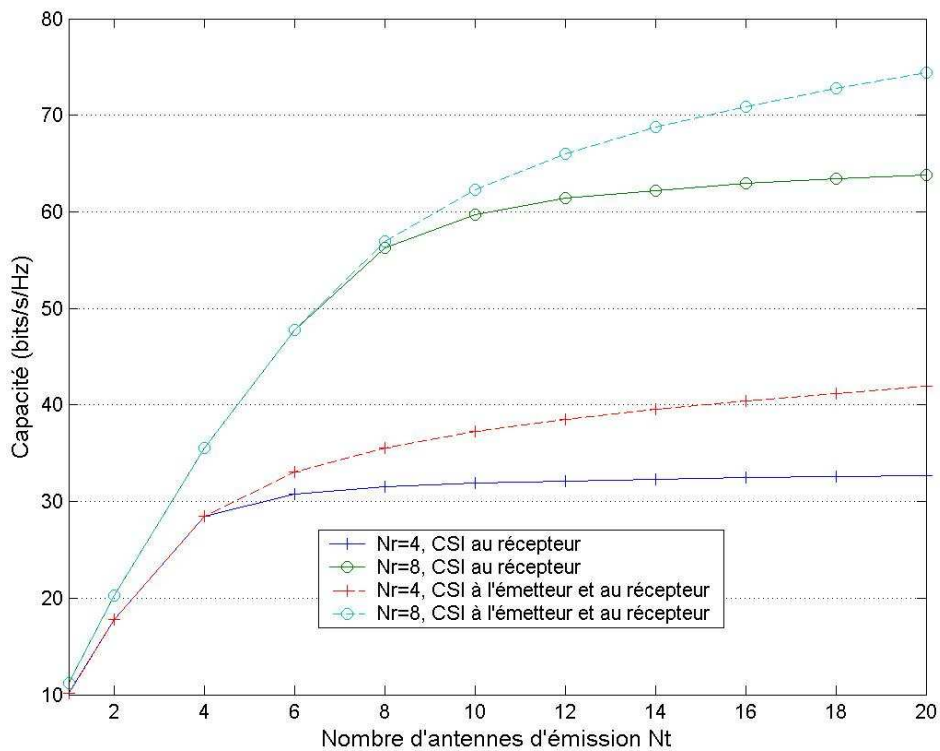


Figure 1.10 – Capacités atteignables avec et sans allocation de puissance, pour un système MIMO, sur un canal rapide de Rayleigh, pour un SNR de 25dB, un nombre d'antennes de réception de 4 et 8, en fonction du nombre d'antennes d'émission.

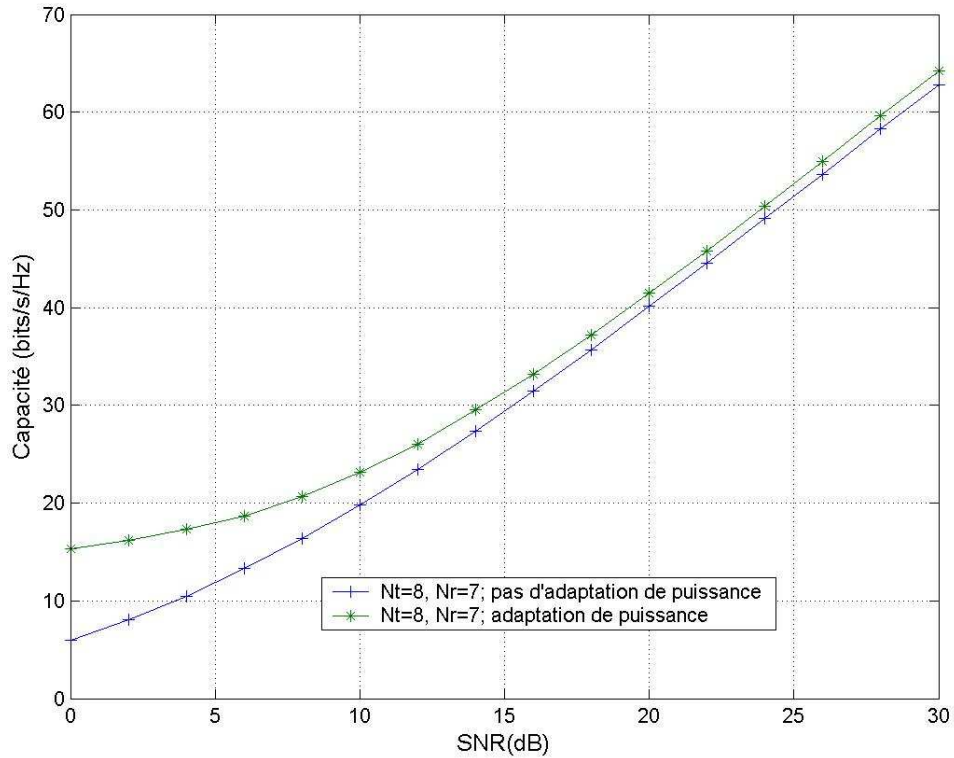


Figure 1.11 – Courbes de capacités pour un système MIMO, sur un canal de Rayleigh à évanouissement rapide, pour  $N_t = N_r = 8$  avec et sans adaptation de puissance, en fonction du SNR.

### Exemple 1.10 : Cas SIMO

Dans cette configuration, il y a une antenne d'émission et  $N_r$  antennes de réception. En utilisant les techniques MRC au récepteur, la capacité d'un tel système est :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \chi_{2N_r}^2 \right) \quad (1.77)$$

où  $\chi_{2N_r}^2$  est une variable aléatoire du chi-deux à  $2N_r$  degrés de liberté.

### Exemple 1.11 : Cas MISO

Dans cette configuration, il y a  $N_t$  antennes d'émission et une antenne de réception. En utilisant les techniques MRC au récepteur, la capacité d'un tel système est :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_t \sigma^2} \chi_{2N_t}^2 \right) \quad (1.78)$$

où  $\chi_{2N_t}^2$  est une variable aléatoire du chi-deux à  $2N_t$  degrés de liberté.

### Exemple 1.12 : Cas MIMO

Dans cette configuration, il y a  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception. En supposant que  $N_t \geq N_r$ , nous pouvons écrire que la borne inférieure de la capacité vaut :

$$C > W \sum_{i=N_t-(N_r-1)}^{N_t} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_t \sigma^2} (\chi_2^2)_i \right) \quad (1.79)$$

où  $(\chi^2)_i$  est une variable aléatoire du chi-deux à deux degrés de liberté. La borne supérieure sera quant à elle égale à :

$$C < W \sum_{i=1}^{N_r} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_r \sigma^2} (\chi^2_{2N_r})_i \right) \quad (1.80)$$

où  $(\chi^2_{2N_r})_i$  est une variable aléatoire chi-deux à  $2N_r$  degrés de liberté. Ce cas correspond à un système pour lequel la transmission se fait sur des canaux parallèles décorrélés et où les  $N_t$  signaux transmis sont reçus sans interférence sur chacune des  $N_r$  antennes de réception.

Pour  $N = N_r = N_t$ , avec  $N$  grand, la borne inférieure de la capacité est alors [5] :

$$\frac{C}{WN} > \left( 1 + \frac{\sigma^2}{P} \right) \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) - \log_2 e + \varepsilon_N \quad (1.81)$$

où la variable aléatoire  $\varepsilon_N$  suit une distribution Gaussienne de moyenne :

$$E\{\varepsilon_N\} = \frac{1}{N} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right)^{-1/2} \quad (1.82)$$

et de variance

$$\text{Var}\{\varepsilon_N\} = \left( \frac{1}{N \ln 2} \right)^2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) - \frac{P/\sigma^2}{1 + P/\sigma^2} \right] \quad (1.83)$$

Les figures 1.12 et 1.13 montrent les courbes de capacité CCDF par antenne sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, obtenues par simulation de l'équation (1.19).

La figure 1.12 est tracée pour un nombre variable d'antennes à un SNR constant. Les résultats montrent clairement que la probabilité d'atteindre des niveaux de capacité de plus en plus élevés augmente de moins en moins vite lorsque le nombre d'antennes croît.

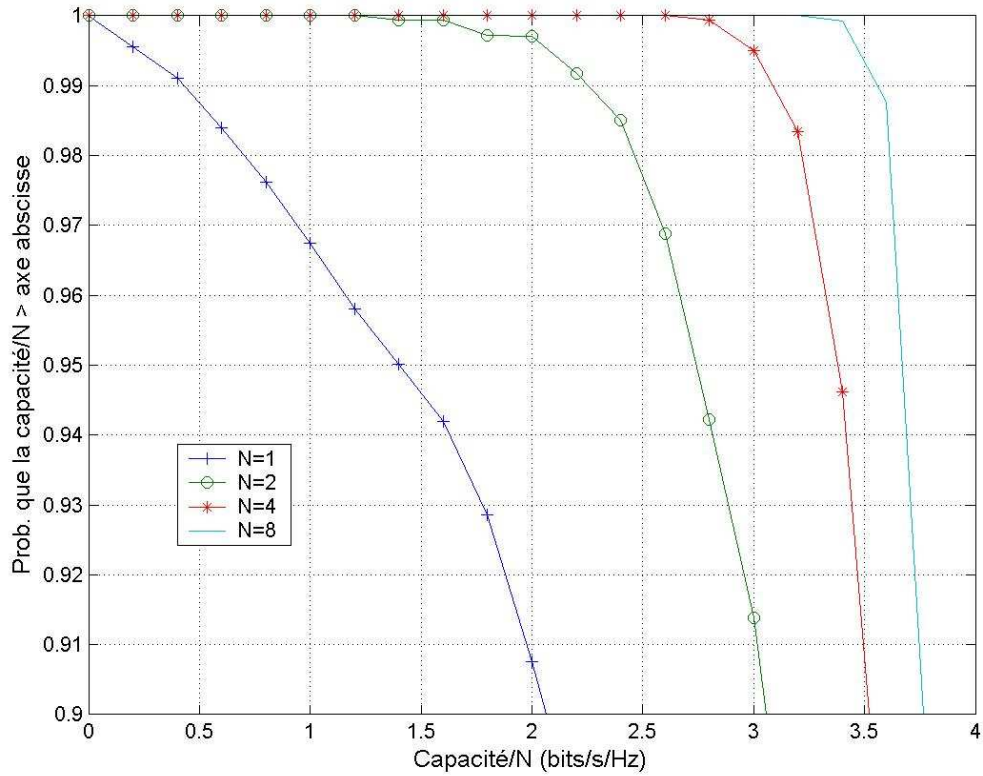


Figure 1.12 – Courbes de capacité CCDF par antenne, pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, avec un SNR constant et un nombre d’antennes variables

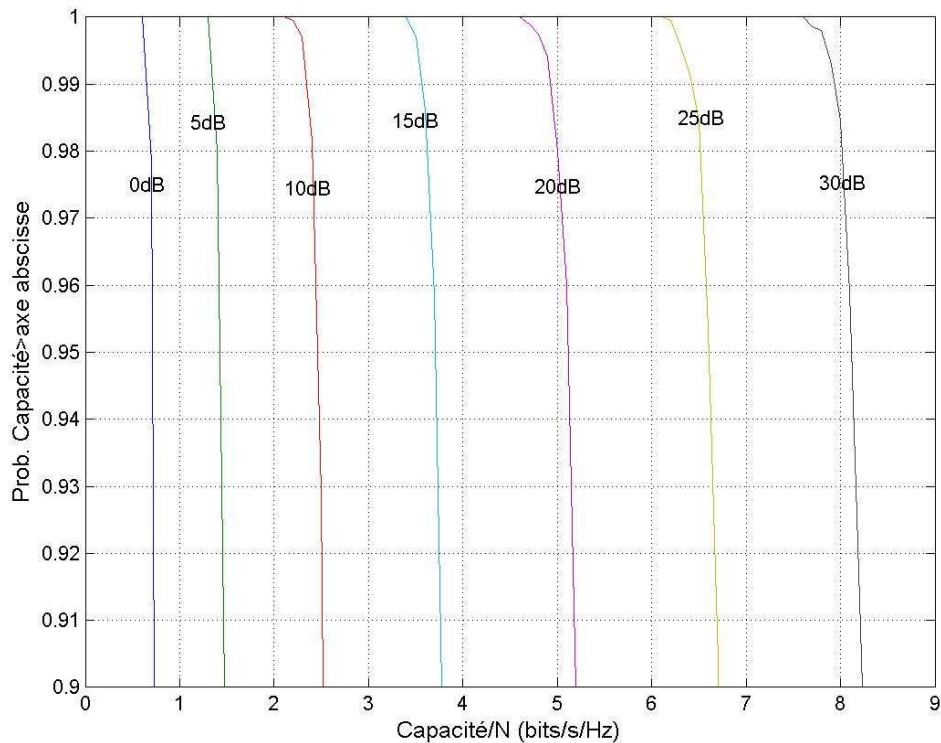


Figure 1.13 – Courbes de capacité CCDF par antenne, pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, avec un nombre d’antennes constant et un SNR variable



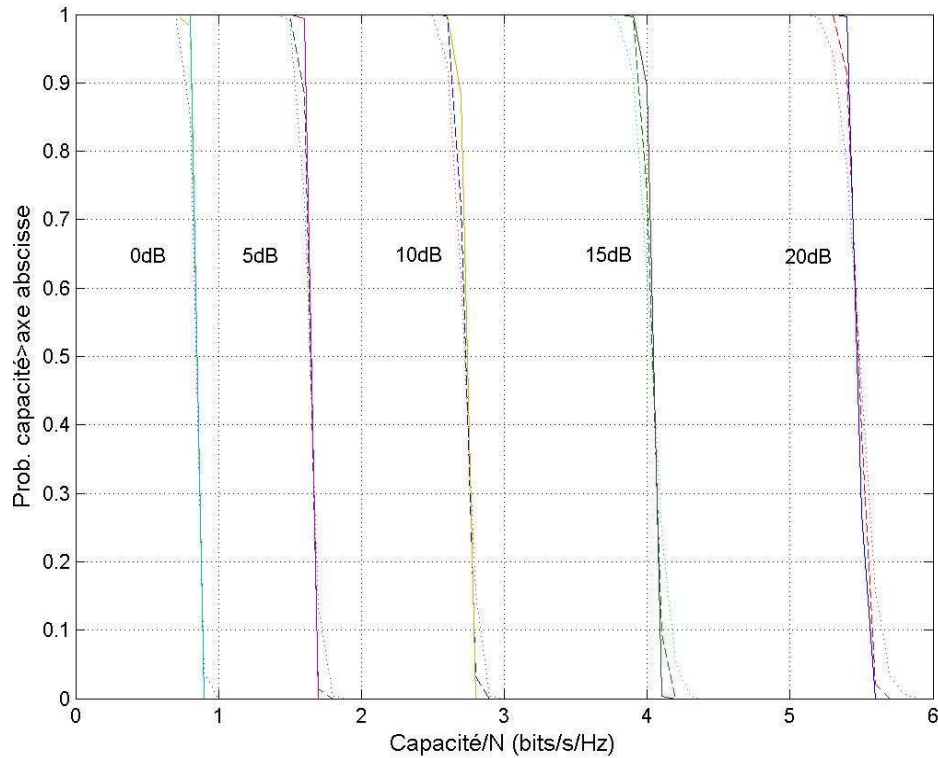


Figure 1.14 – Courbes de capacité CCDF par antenne, pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, avec un nombre d’antennes  $N = N_r = N_t = 64, 32$  et  $16$  et un SNR égal à  $0, 5, 10, 15$  et  $20$  dB

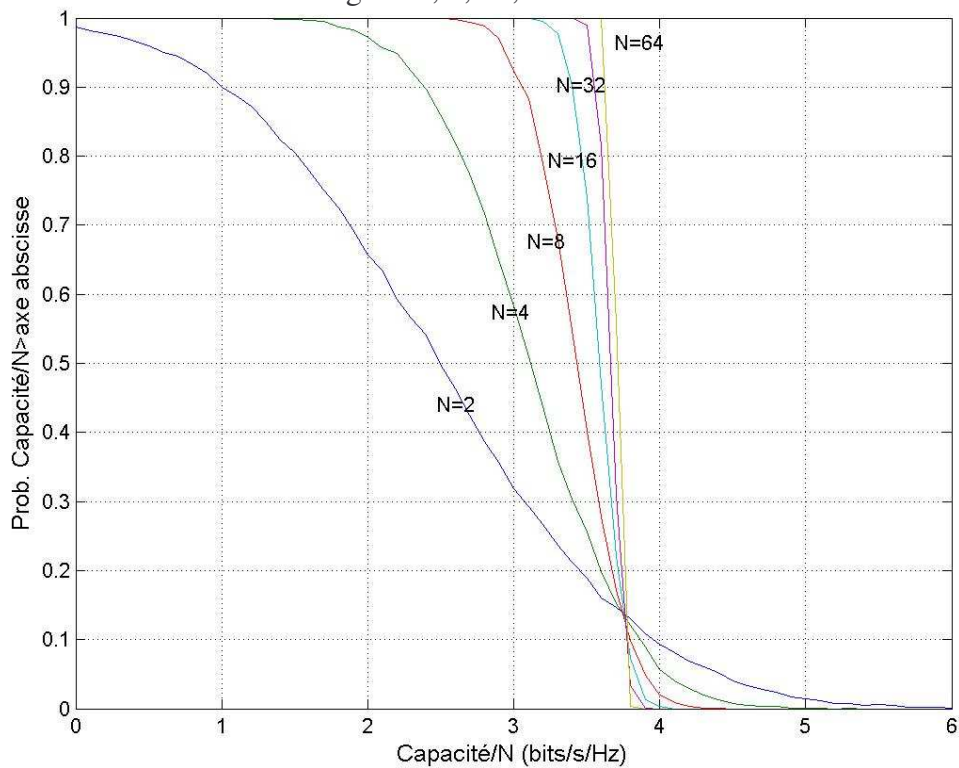


Figure 1.15 – Courbes de capacité CCDF limites théoriques par antenne, pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, avec un SNR fixé à  $15$  dB et un nombre variable d’antennes émission / réception

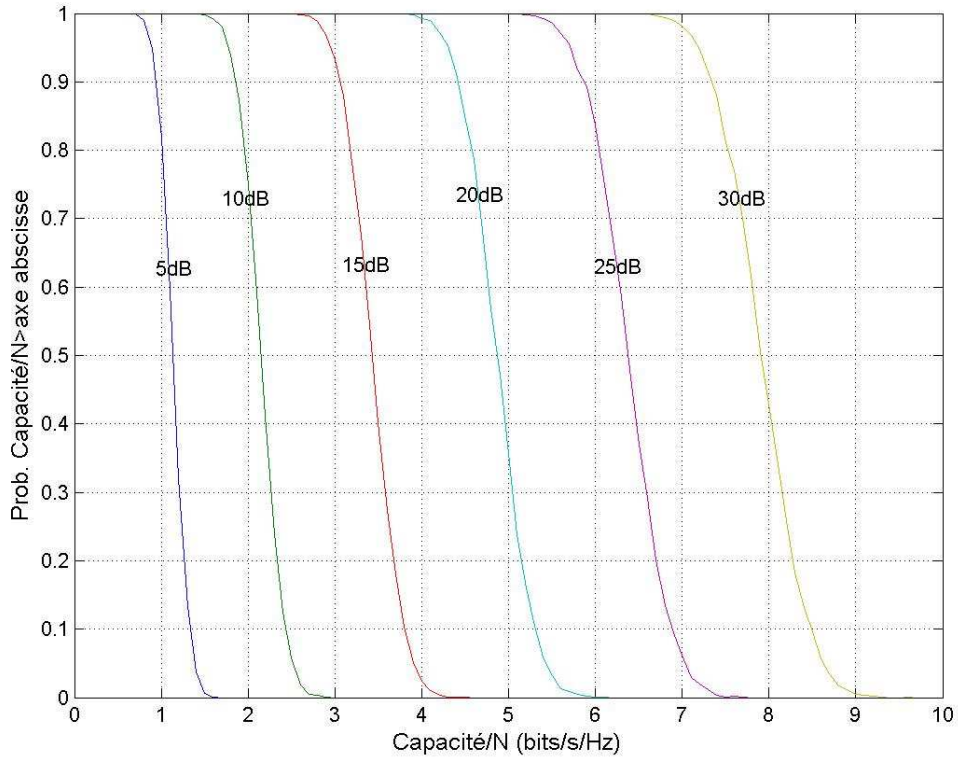


Figure 1.16 - Courbes de capacité CCDF limites théoriques par antenne, pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, avec un SNR variable et 8 antennes émission / réception

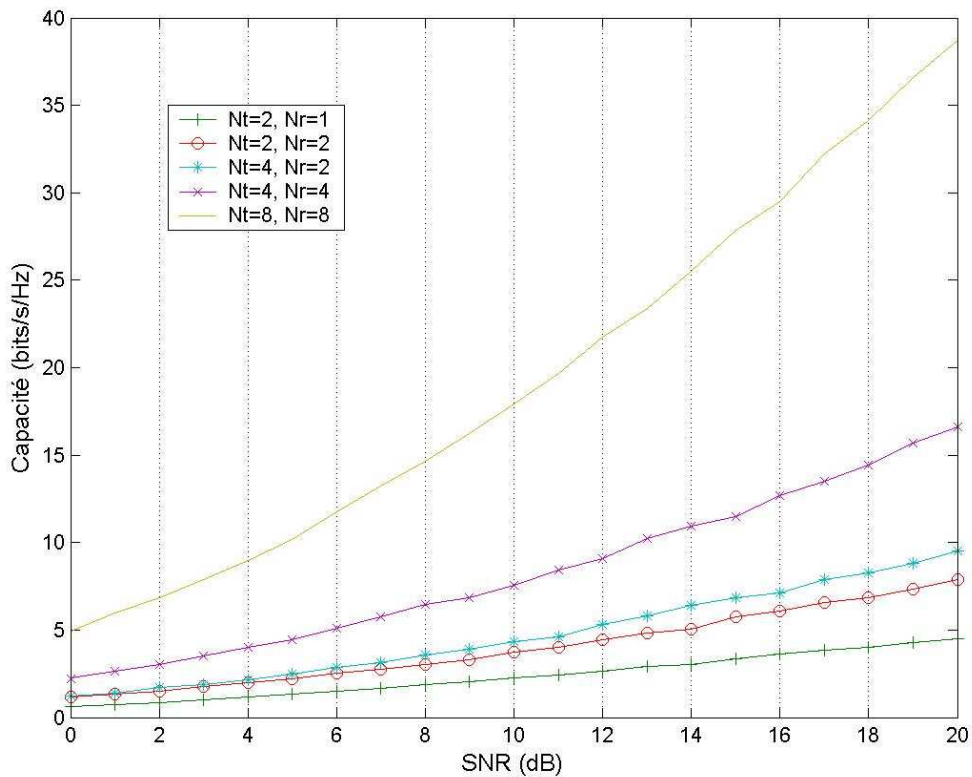


Figure 1.17 – Capacité atteignable pour un système MIMO sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent à 1% de la *outage*, en fonction du SNR pour un nombre d'antennes émission / réception variable.

La figure 1.13 montre les courbes de capacité CCFD pour un nombre d'antennes constant et un SNR variable. Pour un grand nombre d'antennes, les courbes de capacité CCFD, tracées en figure 1.14, montrent un comportement asymptotique plus prononcé pour les faibles SNR. On s'aperçoit que la valeur des capacités par antenne ne change pas, même si l'on augmente le nombre d'antennes. En d'autres termes, pour un canal MIMO, la capacité croît linéairement avec le nombre d'antennes, ce qui est en accord avec (1.81). Les bornes théoriques  $C/(WN)$  de (1.81) sont tracées sur les figures 1.15 et 1.16, dans les configurations respectives des figures 1.12 et 1.13. En comparant les résultats des courbes de capacités simulées avec les courbes théoriques, il est clair que les capacités simulées sont légèrement plus élevées pour un seuil de probabilité donné. La figure 1.17, montre la capacité atteignable sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent à 99% du temps. Elle montre que même pour un nombre d'antennes relativement faible, de grandes capacités peuvent être atteintes. Par exemple, pour un SNR de 20 dB avec huit antennes de chaque côté, la capacité obtenue est de 37 bits/s/Hz. Comparée à l'efficacité spectrale des systèmes de deuxième génération, 1 à 2 bits/s/Hz, elle apparaît comme gigantesque.

## 1.8 Effets des paramètres du système et de la corrélation entre antennes sur la capacité des canaux MIMO

La capacité des systèmes MIMO, calculée sous l'hypothèse que les coefficients de la matrice du canal de propagation sont des variables complexes Gaussiennes indépendantes, n'est pas forcément réaliste pour les canaux réels. En effet, la haute efficacité spectrale que nous fournit l'équation (1.30) est fortement diminuée dans le cas où les signaux émis se retrouvent corrélés à la réception. L'effet de la corrélation spatiale sur la capacité du système MIMO a été expliqué en [33] et [24]. La corrélation entre les antennes peut être réduite en les séparant correctement de façon spatiale [33], [24] et [23]. Cependant, même une faible corrélation entre antennes, ne garantit pas une haute efficacité spectrale. Pour les canaux réels, la dégénérescence des conditions de propagation, connue sous le nom anglophone de « *keyholes* », a été observée, ce qui a permis de constater une diminution considérable de la capacité MIMO.

En fait, les « *keyholes* » réduisent le rang de la matrice du canal de propagation, engendrant ainsi une diminution de la capacité.

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord définir les coefficients de corrélation et introduire les modèles de matrices de corrélation pour les systèmes MIMO. Ensuite, nous procéderons à l'estimation de ces coefficients de corrélation et nous constaterons l'effet de la corrélation entre antennes sur la capacité MIMO, pour un canal sans multi-trajets (LOS<sup>14</sup>).

Le canal d'un système MIMO, à  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception, est décrit par une matrice  $\mathbf{H}$  de dimension  $N_r \times N_t$ , qui s'exprime ainsi :

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_i, \dots, \mathbf{h}_{N_t} \right]^T \quad (1.84)$$

où  $\mathbf{h}_i, i = 1, 2, \dots, N_t$  est donné par :

---

<sup>14</sup> Line Of Sight

$$\mathbf{h}_i = [h_{i,1}, h_{i,2}, \dots, h_{i,N_t}] \quad (1.85)$$

Pour la détermination des coefficients de corrélation entre antennes, nous arrangeons les vecteurs  $\mathbf{h}_i$ , en un vecteur noté  $\mathbf{h}$  contenant  $N_t N_r$  éléments :

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_i, \dots, \mathbf{h}_{N_r}] \quad (1.86)$$

Nous définissons alors la matrice de corrélation  $\Theta$  de dimension  $N_t N_r \times N_t N_r$  comme étant :

$$\Theta = E[\mathbf{h}^H \mathbf{h}] \quad (1.87)$$

où  $\mathbf{h}^H$  représente la matrice hermitienne de  $\mathbf{h}$ .

Si les coefficients de la matrice du canal de propagation  $\mathbf{H}$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées,  $\Theta$  sera égale à une matrice identité signifiant une capacité maximale.

Pour simplifier notre étude, nous supposons que la corrélation entre les antennes de réception ne dépend pas des antennes d'émission et inversement. Dans ce cas nous pouvons définir deux nouvelles matrices de corrélation, la première en réception notée  $\Theta_r$  de dimension  $N_r \times N_r$  et la seconde en émission,  $\Theta_t$  de dimension  $N_t \times N_t$ .

En supposant que nous modélisons les éléments indépendants de la corrélation en réception et en émission, leurs matrices de corrélation respectives s'écrivent :

$$\Theta_r = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_r^H \quad (1.88)$$

$$\Theta_t = \mathbf{K}_t \mathbf{K}_t^H \quad (1.89)$$

où  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{K}_t$  de dimension respectives  $N_r \times N_r$  et  $N_t \times N_t$  sont des matrices triangulaires inférieures à coefficients positifs sur la diagonale. Ces matrices triangulaires peuvent être obtenues par la décomposition de Cholesky [31] (annexe 1.2), de leur matrice de corrélation. Ainsi, si l'on note  $\mathbf{H}_c$ , un canal de propagation MIMO corrélé, il prend la forme :

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{K}_r \mathbf{H} \mathbf{K}_t \quad (1.90)$$

où  $\mathbf{H}$  représente la matrice du canal de propagation Gaussien non corrélé.

### 1.8.1. Modèle de corrélation pour des canaux MIMO à trajets directs (LOS)

Considérons un canal MIMO composé d'une rangée de  $N_t$  antennes d'émissions et d'une autre de  $N_r$  antennes de réception, séparées respectivement d'une distance  $d_t$  et  $d_r$ , comme décrit sur la figure 1.18. Nous considérons également que la distance séparant l'émetteur et le récepteur, notée  $R$ , est très grande devant  $d_t$  et  $d_r$ .

Dans un premier temps, nous allons étudier une propagation sans multi-trajets. Pour cela, nous noterons les coefficients normalisés de la matrice du canal  $h_{ki}$  qui auront pour valeurs :

$$h_{ki} = e^{-j2\pi \frac{R_{ki}}{\lambda}}, \quad k = 1, 2, \dots, N_r, \quad i = 1, 2, \dots, N_t \quad (1.91)$$

où  $R_{ki}$  symbolise la distance entre l'antenne de réception  $k$  et l'antenne d'émission  $i$ .

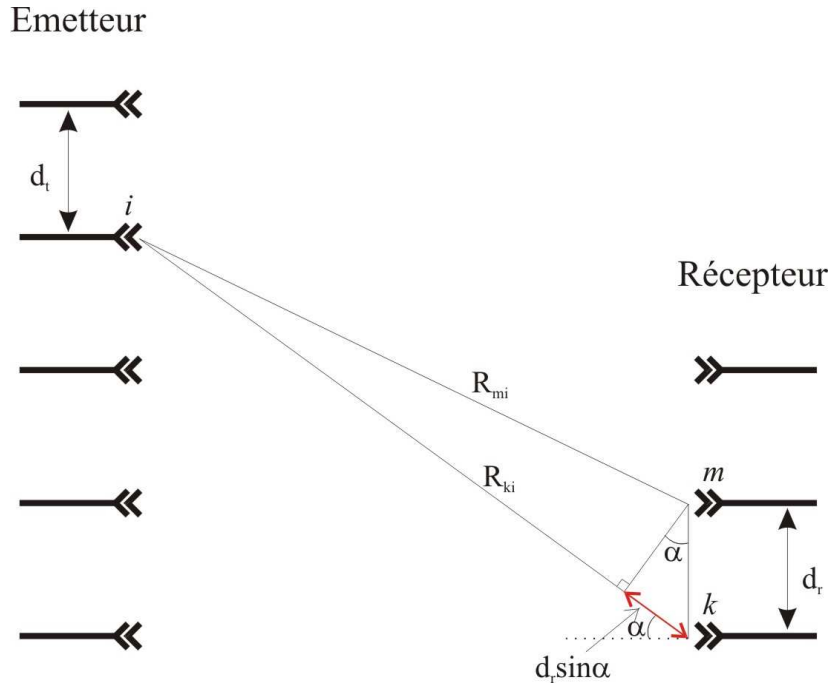


Figure 1.18 – Modèle de propagation à trajet direct

Nous supposons indépendants, les coefficients de corrélation à l'émission et à la réception. C'est pour cela que nous calculerons les coefficients de corrélation sur les antennes de réception pour un nombre fixe d'antennes d'émission, par exemple, la première  $i=1$ . Dans ce cas, les coefficients de corrélation en réception, pour un modèle de canal à trajet direct uniquement, s'écrivent :

$$\theta_{mk} = E[h_{m1}^* h_{k1}], \quad m = 1, 2, \dots, N_r, \quad k = 1, 2, \dots, N_r \quad (1.92)$$

l'expression précédente peut s'écrire en substituant l'équation (1.91) dans (1.92) :

$$\theta_{mk} = E \left[ e^{-j2\pi \frac{R_{k1} - R_{m1}}{\lambda}} \right] \quad (1.93)$$

Dans la configuration du modèle utilisé (figure 1.18) et avec des distances  $R_{k1}$  et  $R_{m1}$  très grandes, les coefficients de corrélation donnés en (1.93) peuvent être simplifiés de la façon suivante :

$$\theta_{mk} = \begin{cases} e^{-j2\pi \frac{d_{mk} \sin \alpha}{\lambda}} & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases} \quad (1.94)$$

où  $d_{mk}$  représente la distance entre les antennes de réception  $m$  et  $k$ , et  $\alpha$  la direction d'arrivée de l'onde plane.

Comme le montre l'expression (1.94), la valeur du coefficient de corrélation est gouvernée par la distance qui sépare les antennes, et elle sera la plus grande entre antennes adjacents (écartés de  $d_r$ ). Si la séparation entre antenne est petite devant la longueur d'onde  $\lambda$ , tous les coefficients de corrélation seront les mêmes et égaux à un. D'après l'expression (1.94) les coefficients de corrélation seront aussi les mêmes et égaux à un, si la direction d'arrivée  $\alpha$  est très petite, i.e.  $\alpha \square 0$ .

Dans les deux cas, pour une faible séparation entre antenne et une petite direction d'arrivée, la matrice du canal de propagation sera notée  $\mathbf{H}_1$ , et son rang sera égal à un.

En supposant que  $N_t = N_r = N$ , la matrice  $\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_1^H$  a d'après (1.24) une seule valeur propre égale à  $N^2$ . La capacité d'un tel canal sera alors :

$$C = W \log_2 \left( 1 + N \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.95)$$

Dans le cas où les antennes sont plus largement séparées, les coefficients du canal de propagation  $h_{ij}$  auront des valeurs bien différentes. Si elles sont placées dans le but que la matrice du canal, notée cette fois ci  $\mathbf{H}_N$ , soit de rang  $N$  et que  $\mathbf{H}_N \mathbf{H}_N^H$  soit donné par :

$$\mathbf{H}_N \mathbf{H}_N^H = N \mathbf{I}_N \quad (1.96)$$

alors la capacité sera :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right)^N = NW \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (1.97)$$

### 1.8.2. Modèle de corrélation pour un canal MIMO de Rayleigh à évanouissement

Nous considérons une rangée linéaire de  $N_r$  antennes de réception omnidirectionnelles, espacées d'une distance  $d_r$ , comme le montre la figure 1.19. Les  $N_t$  signaux émis depuis la source, sont soumis à des retards en réception, dus aux multi-trajets du canal de propagation. Les ondes planes provenant des différents trajets convergent vers les antennes de réception avec des directions d'arrivées  $\alpha$ .

Pour une rangée linéaire d'antennes régulièrement espacées et un angle d'orientation de  $\pi/2$ , le coefficient de corrélation des signaux reçus par les antennes  $m$  et  $k$ , séparées d'une distance  $d_{mk}$ , peut être obtenu par :

$$\theta_{mk} = E \left[ e^{-j2\pi \frac{R_{k1} - R_{m1}}{\lambda}} \right] \quad (1.98)$$

où l'expression  $(R_{k1} - R_{m1})$  est approximée par

$$R_{k1} - R_{m1} \approx d_{mk} \sin \alpha \quad (1.99)$$

le coefficient de corrélation s'écrira alors :

$$\theta_{mk} = \begin{cases} \int_{-\alpha_r/2}^{\alpha_r/2} e^{-j2\pi \frac{d_{mk}}{\lambda} \sin \alpha} p(\alpha) d\alpha, & m \neq k \\ 1, & m = k \end{cases} \quad (1.100)$$

où  $p(\alpha)$  est la probabilité de distribution des directions d'arrivée et  $\alpha_r$  l'étalement angulaire en réception. Pour une distribution uniforme des directions d'arrivée entre  $-\pi$  et  $\pi$ ,

$$p(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \quad (1.101)$$

ce qui implique un coefficient de corrélation  $\theta_{mk}$  d'après [34] égal à :

$$\theta_{mk} = J_0 \left( 2\pi \frac{d_{mk}}{\lambda} \right), \quad m \neq k \quad (1.102)$$

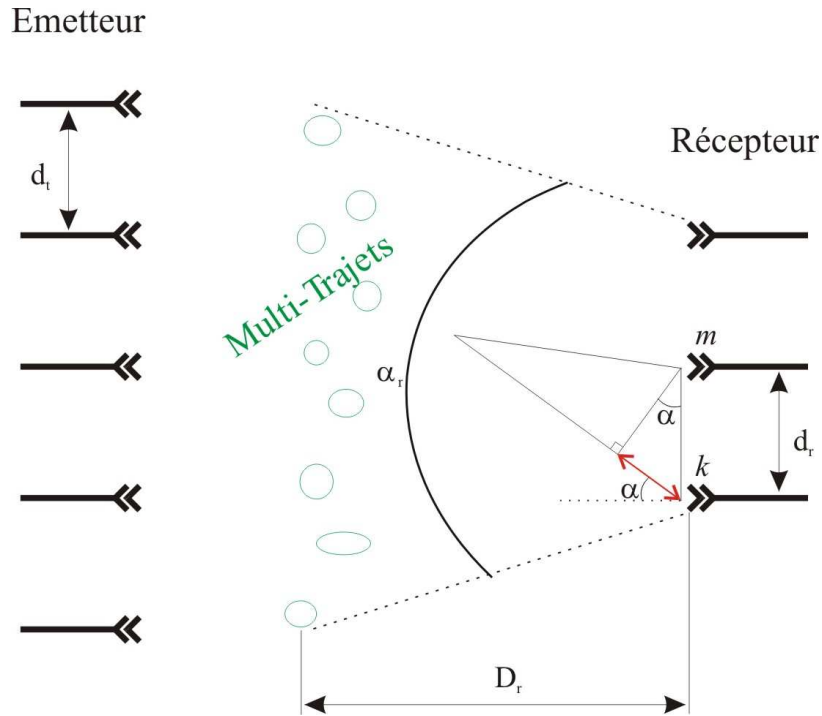


Figure 1.19 – Modèle de propagation pour un canal MIMO à évanouissement

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro. Pour disposer d'un coefficient de corrélation nul dans ce cas, les antennes doivent être espacées de  $\lambda/2$ , comme cela  $J_0 \neq 0$ . Par exemple, les stations de base étant situées très hautes par rapport au sol, cela donne un angle d'étalement très étroit, ce qui rend important le coefficient de corrélation, même si les antennes sont bien espacées. En effet, il a été montré que pour une station base disposant d'un rayon de cellule égal à 1km, l'angle d'étalement était seulement de 2°.

L'évolution des coefficients de corrélation pour une distribution uniforme des angles d'arrivée et un angle d'étalement variable est tracée en figure 1.20. On s'aperçoit que pour des petites valeurs d'angle d'étalement, une grande séparation des antennes est nécessaire pour diminuer la corrélation. D'un autre côté, si l'angle d'étalement est suffisamment grand, par exemple 30°, une faible corrélation (inférieure à 0.2) peut être obtenue pour un écart entre antennes pas plus grand que deux longueurs d'ondes. Enfin, pour une faible séparation entre antennes (inférieure à  $\lambda/2$ ), le coefficient de corrélation est relativement grand (supérieur à 0.5) même pour de grands angles d'étalement.

Maintenant, si le spectre angulaire devient Gaussien, le coefficient de corrélation décroît de façon monotone en fonction de l'écartement entre les antennes [33]. L'évolution du coefficient de corrélation pour une distribution Gaussienne des directions d'arrivée est tracée en figure 1.21, pour les mêmes angles d'étalement que ceux utilisés en figure 1.20. La fonction de densité de probabilité pour la direction d'arrivée distribuée de façon Gaussienne, notée  $p(\alpha)$ , est donnée par :

$$p(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} & -\alpha_r/2 \leq \alpha \leq \alpha_r/2 \\ 0 & |\alpha| > \alpha_r/2 \end{cases} \quad (1.103)$$

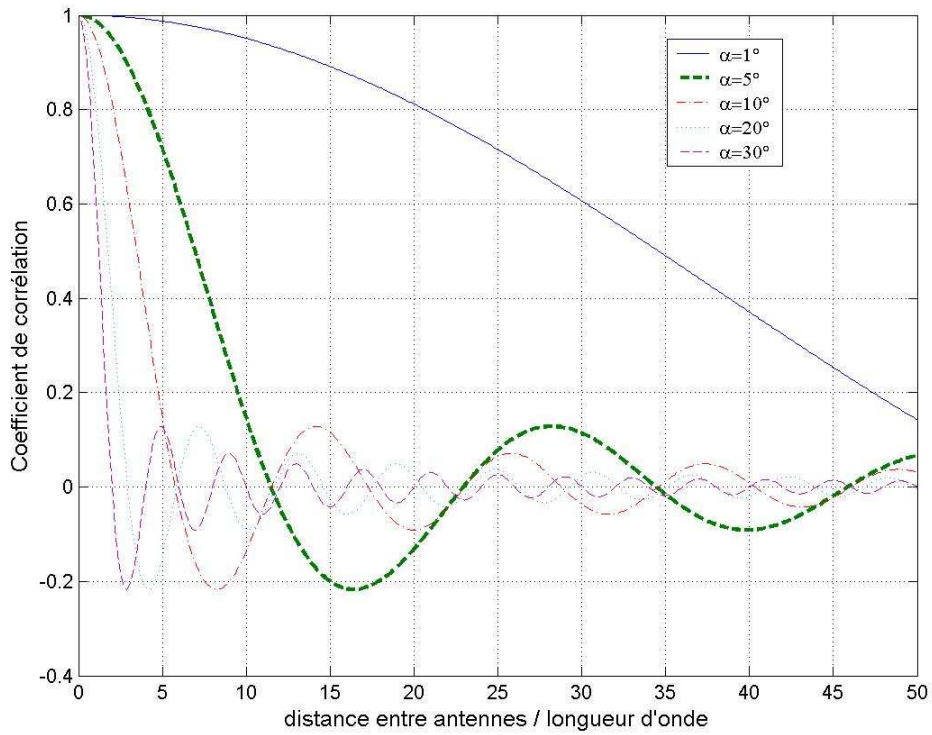


Figure 1.20 – Evolution des coefficients de corrélation sur un canal MIMO à évanouissements pour une distribution uniforme des directions d'arrivée  $\alpha$

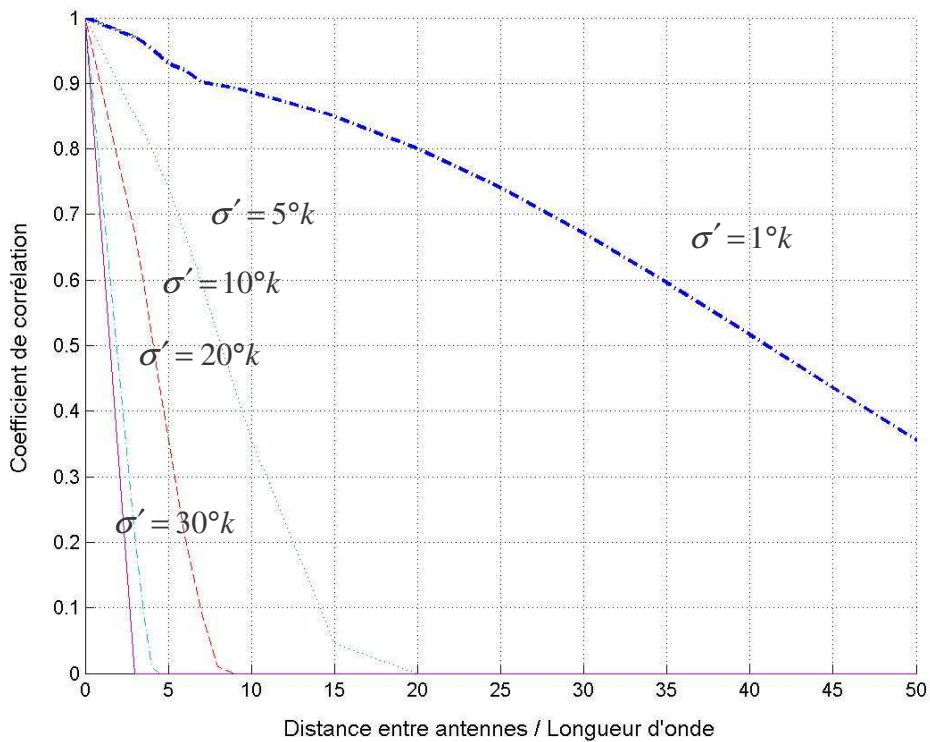


Figure 1.21 – Evolution du coefficient de corrélation sur un canal MIMO à évanouissement, pour une direction d'arrivée distribuée de façon Gaussienne et un écart type  $\sigma' = \alpha, k$ , ou  $k = 1/2\sqrt{3}$



L'écart type de la direction d'arrivée distribuée de façon Gaussienne est calculé dans le but d'obtenir les mêmes valeurs RMS<sup>15</sup>, que pour la direction d'arrivée distribuée de façon uniforme. Ainsi pour un angle d'étalement  $\alpha_r$ , on aura :

$$\sigma' = \alpha_r k, \quad k = 1/2\sqrt{3} \quad (1.104)$$

En supposant que  $N_t = N_r = N$ , la capacité d'un canal MIMO corrélé, à évanouissement s'exprime comme étant :

$$C = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{P}{N\sigma^2} \mathbf{K}_r \mathbf{H} \mathbf{K}_t \mathbf{K}_t^H \mathbf{H}^H \mathbf{K}_r^H \right) \right] \quad (1.105)$$

en utilisant la relation suivante :

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A}) \quad (1.106)$$

nous obtenons la capacité suivante :

$$C = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{P}{N\sigma^2} \mathbf{\Theta}_r^H \mathbf{H} \mathbf{\Theta}_t \mathbf{H}^H \mathbf{K}_r^H \right) \right] \quad (1.107)$$

La capacité d'un canal MIMO pour un système ou  $N_t = N_r = 3$ , sur un canal de Rayleigh à évanouissement rapide, avec une distribution uniforme de la direction d'arrivée, obtenue en moyennant l'expression (1.107), est représentée figure 1.22, pour un angle d'étalement et un écartement entre antennes variables.

Dans le but de considérer l'effet de la corrélation entre antennes de réception, sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, un système à quatre antennes d'émission et quatre antennes de réception est simulé. Les coefficients de corrélation en réception sont calculés d'après l'expression (1.102) pour une distribution uniforme des angles d'arrivée. En utilisant (1.90) pour imposer la corrélation d'une matrice aléatoire  $\mathbf{H}$  non corrélée, nous calculons la distribution cumulée complémentaire de la capacité à un SNR = 15 dB pour des angles d'étalement de 1°, 5° et 40°. Les courbes de la distribution cumulée complémentaire de la capacité sont tracées sur les figures 1.23, 1.24 et 1.25. Elles montrent que pour un angle d'étalement de 1°, la capacité de 3 bits/s/Hz est atteignable à une probabilité de 90% pour un écartement entre antennes de  $10\lambda$ , alors que pour les angles d'étalement de 5° et 40°, la même capacité est atteignable pour des distances de séparation entre antennes respectivement de  $2\lambda$  et inférieure à  $\lambda/2$ .

---

<sup>15</sup> Root Mean Square

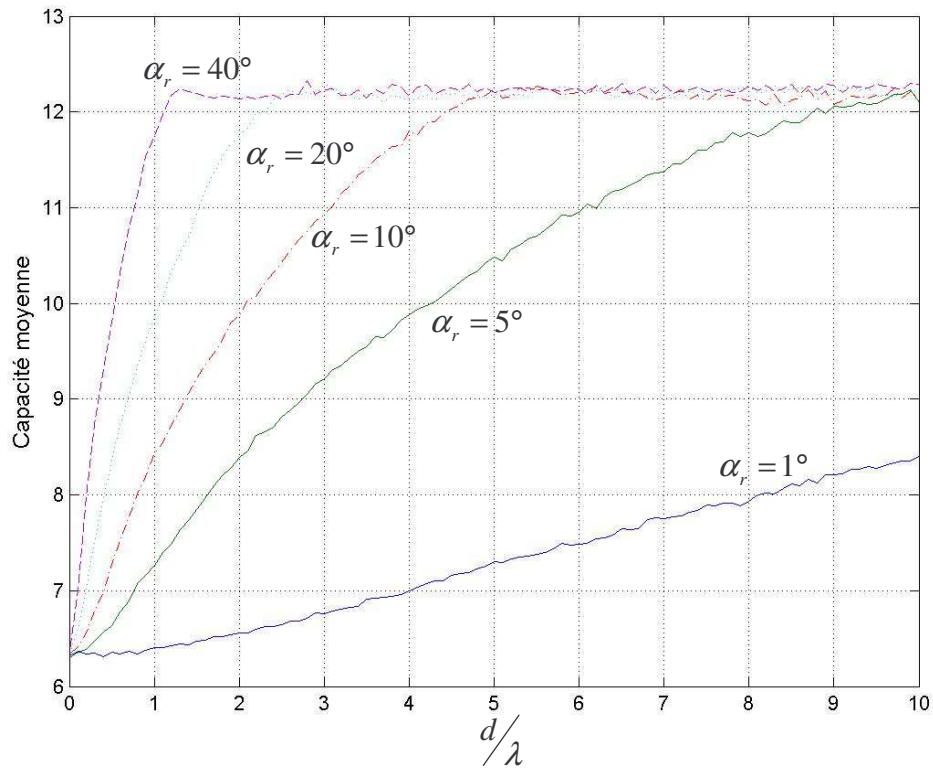


Figure 1.22 – Capacité moyenne sur un canal MIMO ( $N_t = N_r = 3$ ) à évanouissement rapide, pour une distance de séparation entre antennes et un angle d'étalement variables, à un SNR=15 dB.

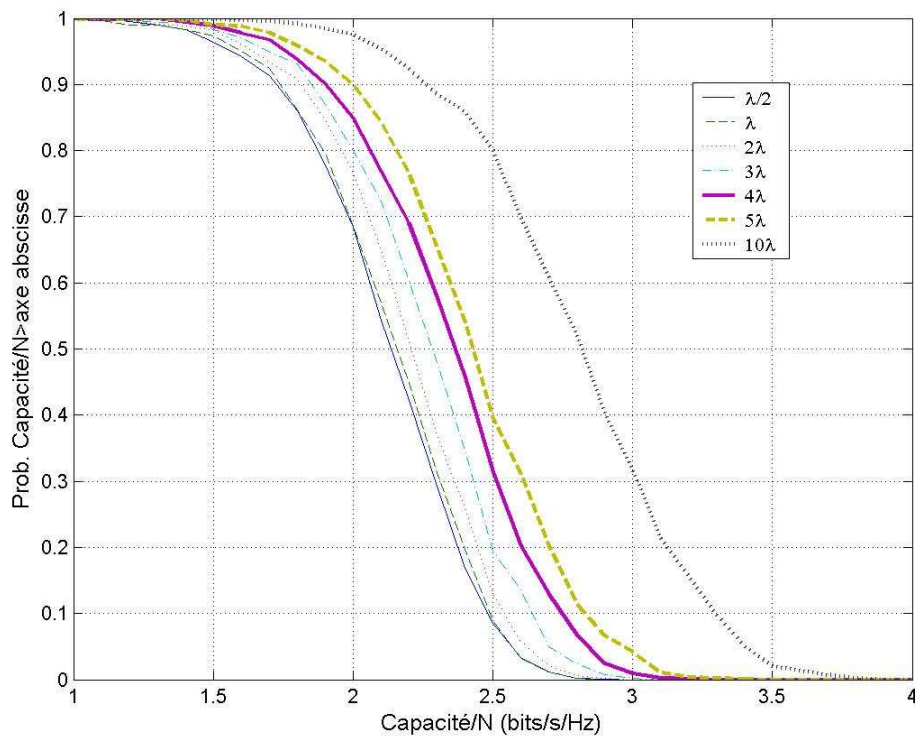


Figure 1.23 - Courbes de la distribution cumulée complémentaire de la capacité, pour un canal corrélé à évanouissement lent, avec un angle d'étalement de  $1^\circ$  sur les antennes de réception et des distances de séparation entre antennes variables

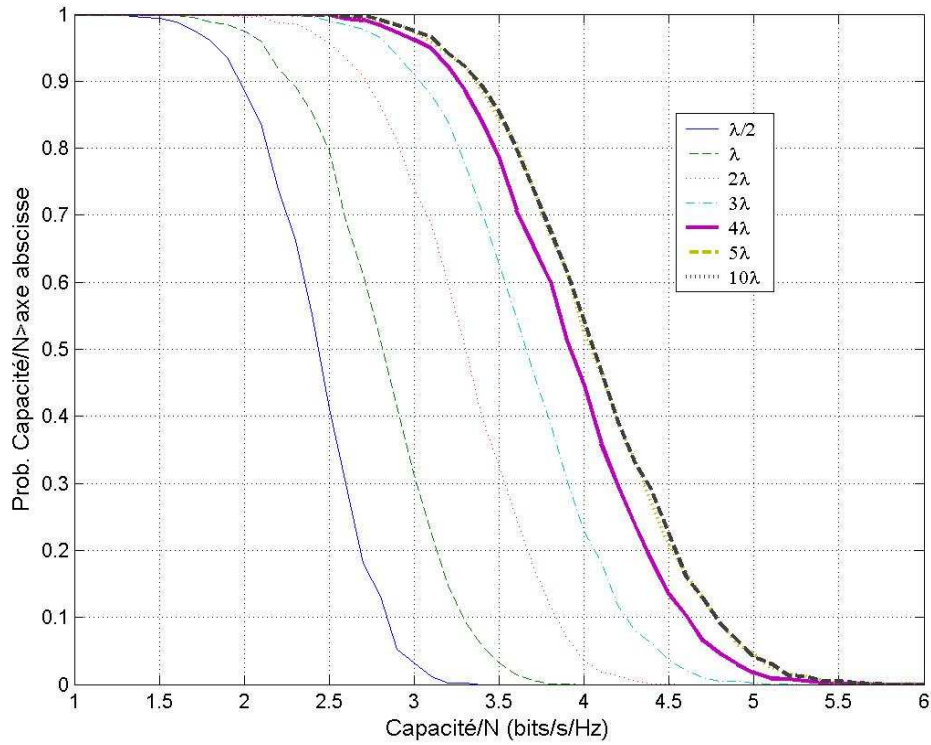


Figure 1.24 - Courbes de la distribution cumulée complémentaire de la capacité, pour un canal corrélé à évanouissement lent, avec un angle d'étalement de  $10^\circ$  sur les antennes de réception et des distances de séparation entre antennes variables.

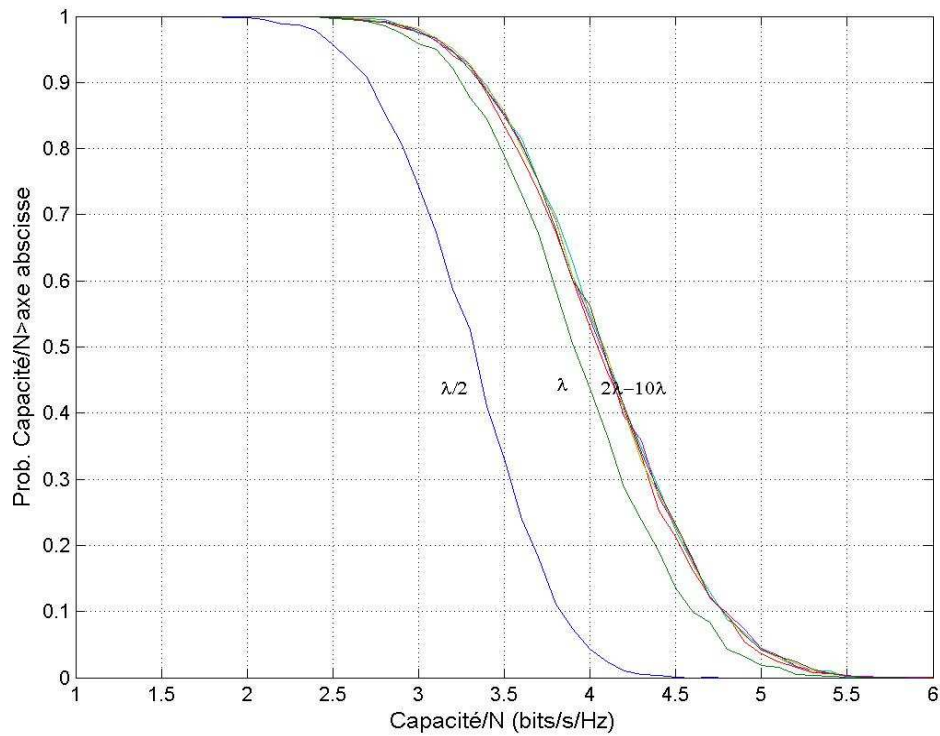


Figure 1.25 - Courbes de la distribution cumulée complémentaire de la capacité, pour un canal corrélé à évanouissement lent, avec un angle d'étalement de  $40^\circ$  sur les antennes de réception et des distances de séparation entre antennes variables.

## 1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu l'état de l'art de la capacité des systèmes MIMO, avec notamment les articles fondateurs de Telatar [6] et Foschini [5], puis l'évolution de cette capacité en fonction des paramètres du système considéré.

La capacité des systèmes MIMO augmente linéairement avec le minimum du nombre d'antennes d'émission et de réception  $\min(N_t, N_r)$ . Cette capacité est réaliste sous certaines conditions de propagation. En effet, afin d'atteindre une capacité maximale ou une diversité maximale avec des techniques d'émission différentes, il est nécessaire d'avoir une décorrélation entre les différents canaux d'émission et de réception. Plusieurs techniques peuvent être utilisées dans un système MIMO, dépendant principalement de l'utilisation de la CSI à l'émission et/ou à la réception. Si on considère la CSI au récepteur seulement, les techniques à multiplexage spatial maximisent la capacité du système alors que les codes espace-temps maximisent le gain de diversité et accessoirement le gain de codage avec par exemple les codes espace-temps en treillis que nous verrons dans le chapitre suivant.

Nous avons également défini la capacité *outage*, qui nous servira pour évaluer les performances des nouveaux schémas de codage spatio-temporel que nous présentons dans les chapitres suivants.

### Annexe 1.1 : Le Principe « *Water-filling* »

Considérons un canal MIMO où les paramètres du canal de propagation sont connus à l'émetteur. L'allocation de puissance aux différentes antennes d'émission peut se faire en utilisant le principe « *Water-filling* ». Ce principe est obtenu en maximisant la capacité du canal MIMO sous la contrainte de puissance

$$\sum_{i=1}^{N_t} P_i = P \quad i=1, 2, \dots, N_t \quad (1.112)$$

où  $P_i$  représente la puissance allouée à l'antenne  $i$  et  $P$  la puissance totale, qui reste constante. La capacité normalisée d'un canal MIMO est définie par :

$$\frac{C}{W} = \sum_{i=1}^{N_t} \log_2 \left[ 1 + \frac{P_i \lambda_i}{\sigma^2} \right] \quad (1.113)$$

En suivant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous introduisons la fonction :

$$Z = \sum_{i=1}^{N_t} \log_2 \left[ 1 + \frac{P_i \lambda_i}{\sigma^2} \right] + L \left( P - \sum_{i=1}^{N_t} P_i \right) \quad (1.114)$$

où  $L$  est le multiplicateur de Lagrange,  $\lambda_i$  la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière de la matrice du canal de propagation et  $\sigma^2$  la variance du bruit. Les puissances inconnues  $P_i$  sont déterminées en mettant à zéro la dérivée partielle de  $Z$  par rapport à  $P_i$  :

$$\frac{\partial Z}{\partial P_i} = 0 \quad (1.115)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial P_i} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\lambda_i / \sigma^2}{1 + P_i \lambda_i / \sigma^2} - L = 0 \quad (1.116)$$

Ainsi, nous obtenons pour  $P_i$  :

$$P_i = \mu - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \quad (1.117)$$

où  $\mu$  est une constante égale à  $1/(L \ln 2)$ , qui peut être déterminée grâce à la contrainte (1.112)

### Annexe 1.2 : Décomposition de Cholesky

Une matrice symétrique, définie positive peut être décomposée en une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure, à savoir  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , où  $\mathbf{L}$  (qui peut être vue comme la racine carrée de  $\mathbf{A}$ ) est une matrice triangulaire inférieure à coefficients positifs sur la diagonale. Pour résoudre  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  et trouver  $\mathbf{x}$ , on commence d'abord par résoudre  $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  puis  $\mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ 0 & 0 & \ddots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

où  $a_{ij}$  et  $l_{ij}$  sont les coefficients respectifs de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{L}$ .

$$a_{11} = l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{21} = l_{21}l_{11} \rightarrow l_{21} = a_{21}/l_{11}, \dots, l_{n1} = a_{n1}/l_{11}$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{(a_{22} - l_{21}^2)}$$

$$a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}l_{21})/l_{22}$$

de façon générale, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = i+1, \dots, n$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$l_{ji} = \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik} \right) / l_{ii}$$

et parce que  $\mathbf{A}$  est symétrique et positive, l'expression sous la racine carrée est toujours positive.

## CHAPITRE 2 ANALYSE ET PERFORMANCES DE SCHEMAS DE CODAGE SPATIO-TEMPOREL

---

2.1	Introduction	45
2.2	Rappels sur les modèles de canaux à évanouissement	45
2.2.1.	Propagation à multi-trajets	45
2.2.2.	Effet Doppler	45
2.2.3.	Modèle statistique de Rayleigh pour un canal à évanouissement	46
2.3	Notions de diversité	47
2.3.1.	Diversité temporelle	48
2.3.2.	Diversité fréquentielle	48
2.3.3.	Diversité spatiale	48
2.3.4.	Exemple de diversité	49
2.4	Les systèmes codés Temps-Espace	49
2.5	Analyse des performances des systèmes codés Temps-Espaces	51
2.5.1.	Probabilité d'erreur, pour des canaux à évanouissement lent	51
2.6	Critère de construction des codes spatio-temporel	55
2.6.1.	Critère de construction sur un canal à évanouissement lent	55
2.7	Les codes spatio-temporel en bloc : STBC	57
2.7.1.	La construction d'Alamouti	57
2.7.2.	Performance du code d'Alamouti	58
2.7.3.	Codeur STBC	59
2.7.4.	Le décodage STBC généralisé	62
2.7.5.	Algorithme de décodage	62
2.8	Les codes spatio-temporel en treillis	66
2.8.1.	Introduction	66
2.8.2.	Codage des STTC	67
2.8.3.	Décodage des STTC	68
2.8.4.	Règles de construction et propriétés des codes STTC	69
2.8.5.	Amélioration des STTC	69
2.8.6.	Performances des codes STTC :	71
2.8.7.	Conclusion	77

## 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la capacité d'un système de communications sans fils pouvait être augmentée considérablement, en utilisant plusieurs antennes, aussi bien en émission, qu'en réception. Un moyen rapide et efficace pour approcher la capacité d'un système MIMO sans fils, consiste alors à utiliser un codage spatio-temporel (STC<sup>16</sup>) [36]. Les techniques de codage spatio-temporel ont été développées dans le but d'être utilisées par des systèmes à plusieurs antennes d'émission. Le codage est réalisé, à la fois dans le domaine spatial et le domaine temporel, pour permettre d'introduire une corrélation entre les signaux transmis, depuis des antennes différentes et des temps distincts. Cette corrélation spatio-temporelle est utilisée pour exploiter les effets d'évanouissements du canal MIMO, minimisant ainsi les erreurs de transmission au récepteur. Il existe différentes structures de codage spatio-temporel, comme les codes spatio-temporel en bloc (STBC<sup>17</sup>), les codes spatio-temporel en treillis (STTC<sup>18</sup>), les codes linéaires à dispersion ou encore les codes spatio-temporel en couches (LST<sup>19</sup>).

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler brièvement des notions, sur les modèles de canaux à évanouissement et sur les techniques de diversité. Puis nous évaluons la PEP théorique sur un canal de Rayleigh à évanouissement indépendant. Cela sera suivi, par la présentation du CDC<sup>20</sup> et des critères de constructions des codes temps-espace, sur des canaux de Rayleigh. Enfin, avant de nous intéresser à la conception des codes temps-espace en treillis, nous verrons le cas des codes temps-espace en bloc.

## 2.2 Rappels sur les modèles de canaux à évanouissement

### 2.2.1. Propagation à multi-trajets

Les éléments présents, dans un environnement radio cellulaire, comme les maisons, les immeubles ou encore la végétation naturelle, agissent comme des réflecteurs sur les ondes radios. Ces obstacles engendrent des ondes réfléchies, ayant des amplitudes et des phases atténuées par rapport au trajet direct de l'onde. Ainsi, si un signal modulé est transmis, une multitude de répliques de ce dernier arriveront sur le récepteur avec des retards de propagation. Ces répliques portent le nom de multi-trajets [37]. A cause, du temps et des angles d'arrivée différents, les multi-trajets ont des phases différentes en réception. Cela peut alors conduire au récepteur, à des combinaisons de signaux aussi bien constructives que destructives. Les multi-trajets peuvent avoir des caractéristiques (amplitudes et phases) bien différentes si l'objet émetteur est mobile, du aux fluctuations du canal, tandis que si ce dernier est stationnaire, les conditions de propagation peuvent être très proches. Ces fluctuations d'amplitudes portent le nom d'évanouissement.

---

<sup>16</sup> Space-Time Coding

<sup>17</sup> Space-Time Block Codes

<sup>18</sup> Space-Time Trellis Codes

<sup>19</sup> Layered Space-Time

<sup>20</sup> Code Design Criteria

### 2.2.2. Effet Doppler

A cause du mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur, chaque multi-trajet subi un décalage en fréquence. Cet offset porte le nom d'effet *Doppler*, et il est proportionnel à la vitesse du mobile. Par exemple si nous considérons la situation où le signal émis est porté par une seule fréquence  $f_c$  et où le signal reçu consiste à une seule onde arrivant avec un angle d'incidence  $\theta$ , la fréquence *Doppler* du signal reçu, notée  $f_d$ , aura pour expression :

$$f_d = \frac{vf_c}{c} \cos \theta \quad (2.1)$$

où  $v$  représente la vitesse du mobile et  $c$  la vitesse de la lumière.

### 2.2.3. Modèle statistique de Rayleigh pour un canal à évanouissement

A cause de la multitude de facteurs influant sur la propagation d'une onde, dans un environnement cellulaire, il convient d'utiliser des techniques statistiques pour décrire les variations du signal. Dans cette partie, nous allons uniquement parler du modèle statistique utilisé pour nos travaux, celui de Rayleigh. Sachant qu'il existe un autre modèle statistique assez utilisé, celui de Rice.

Nous nous intéressons à un canal de Rayleigh MIMO, permettant une exploitation maximale de la diversité et de la capacité. Ces canaux sont représentatifs d'un système OFDM. En effet, un système OFDM transforme un canal sélectif en fréquence en une multitude de sous canaux parallèles, non sélectifs en fréquence (plats). Les résultats de simulation obtenus en considérant des canaux décorrélés permettent d'évaluer les performances asymptotiques des systèmes proposés.

La distribution de Rayleigh est utilisée fréquemment pour modéliser statistiquement les variations temporelles, de l'enveloppe reçue d'un signal à évanouissement plat ou de l'enveloppe d'une composante multi-trajet, des canaux radio-mobiles. Pour illustrer ce point, posons :

$$Y = X_1^2 + X_2^2 \quad (2.2)$$

où  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables Gaussiennes statistiquement indépendantes, de variance  $\sigma^2$ .  $Y$  suit une loi du chi-deux à 2 degrés de liberté. Définissons maintenant une nouvelle variable aléatoire :

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{Y} \quad (2.3)$$

Cette variable aléatoire suit une distribution de Rayleigh, de densité de probabilité :

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Il existe trois types de canaux à évanouissements que nous pouvons utiliser :

- le canal à évanouissements quasi-statique : les coefficients du canal restent les mêmes dans un paquet de données et varient indépendamment d'un paquet à un autre.
- le canal à évanouissement parfaitement entrelacé : le coefficient de canal de chaque symbole varie indépendamment d'un symbole à l'autre.
- le canal à évanouissement avec Doppler.

Un coefficient d'un canal de Rayleigh est une variable aléatoire gaussienne complexe :



$$h = h_r + jh_i \quad (2.5)$$

avec  $h_r$  et  $h_i$  deux variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Par conséquent, l'amplitude :

$$|h| = \sqrt{h_r^2 + h_i^2} \quad (2.6)$$

est une variable aléatoire de distribution de Rayleigh. Afin de générer un canal de Rayleigh normalisé dans nos simulations, nous prenons deux variables aléatoires Gaussiennes de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2 = 0.5$ . La densité de probabilité de la loi de Rayleigh est alors représentée sur la Figure 2.1.

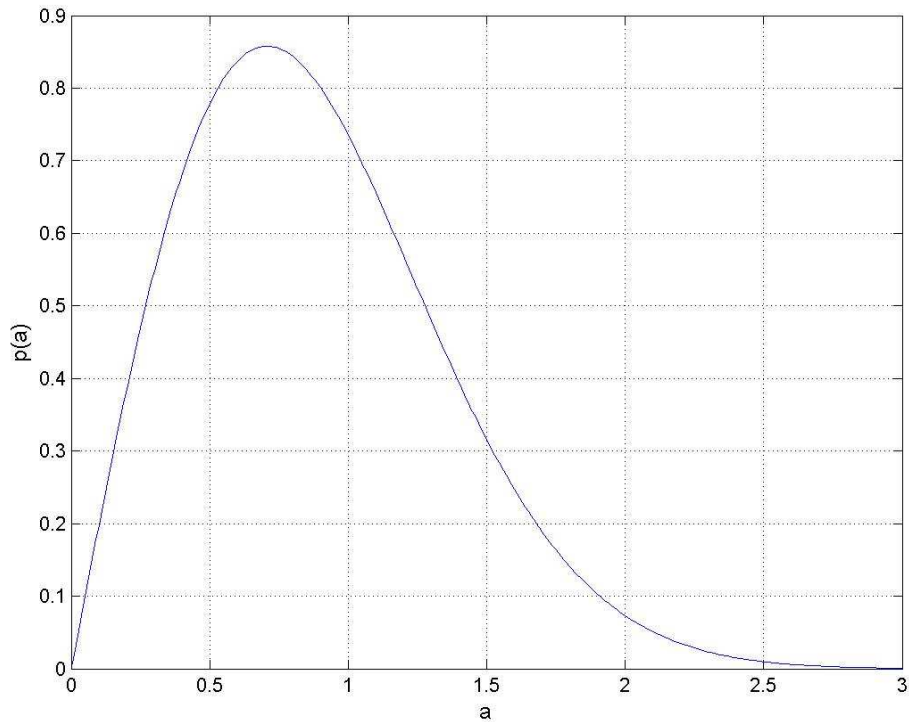


Figure 2.1 – Densité de probabilité de Rayleigh

### 2.3 Notions de diversité

Dans les communications mobiles sans fils, les techniques de diversités sont largement utilisées, afin de réduire l'effet d'évanouissement des multi-trajets et d'améliorer la fiabilité de la transmission, sans pour autant augmenter la puissance d'émission ou sacrifier de la largeur de bande [38] [39]. Les techniques de diversités requièrent plusieurs répliques du signal transmis à l'émetteur. L'idée de base de la diversité repose sur le fait que si l'on prend deux échantillons de signal indépendants, ces derniers vont subir des évanouissements décorrélés, sachant que l'un peut être faiblement atténué, tandis que l'autre peut être complètement évanoui, durant la transmission. Cela signifie que la probabilité que tous les échantillons soient tous simultanément, en dessous d'un certain niveau de puissance et plus faible que la probabilité que juste quelques uns le soient. Ainsi une combinaison particulière des symboles à l'émission permet de contrer l'effet d'atténuation du canal et améliore ainsi la fiabilité de la transmission.

Dans un grand nombre de systèmes de communications, un certain nombre de techniques de diversité sont utilisées, dans le but d'obtenir les performances voulues. En

fonction du domaine pour lequel la diversité est utilisée, on distingue des techniques de diversité, temporelle, fréquentielle et spatiale.

### **2.3.1. Diversité temporelle**

La diversité temporelle peut être obtenue en émettant des messages identiques pendant différents intervalles de temps. Le temps de séparation minimum requis doit être bien entendu supérieur au temps de cohérence du canal. Le temps de cohérence est une mesure statistique de la période temporelle durant laquelle les évanouissements du canal sont corrélés. Le contrôle des erreurs de codage est utilisé dans les systèmes de communications numériques pour obtenir des gains de codage équivalents aux systèmes non codés. Dans les communications mobiles, le contrôle des erreurs de codage est combiné à des entrelaceurs temporels pour obtenir de la diversité temporelle. Dans ce cas, les répliques des signaux émis sont utilisées par le récepteur, comme redondance de l'information. Le temps de séparation entre les répliques du signal transmis est obtenu grâce à l'entrelaceur temporel, pour permettre d'avoir des évanouissements indépendants à l'entrée du décodeur. Comme l'introduction d'un entrelaceur temporel entraîne au récepteur un retard de décodage, cette technique de diversité est optimale sur des canaux de propagation à évanouissement rapide (faible temps de cohérence du canal) ou pour l'envoi de paquets courts. Pour des canaux à évanouissement lent, un large entrelaceur est nécessaire, introduisant un retard significatif à l'entrée du décodeur, qui ne peut pas être toléré pour certaines applications, comme notamment la voix. C'est pour cela, que lorsqu'une station mobile est stationnaire, la diversité temporelle ne peut pas permettre de combattre les évanouissements. Un autre inconvénient de cette technique réside dans le fait que la redondance temporelle de l'information, entraîne une perte d'efficacité spectrale importante.

### **2.3.2. Diversité fréquentielle**

Pour la diversité fréquentielle, un certain nombre de fréquences différentes sont utilisées pour émettre le même message. L'espacement entre les fréquences doit être suffisant pour permettre à chacune d'entre elles d'être décorréliées et de subir des évanouissements indépendants. La bande de cohérence change en fonction de l'environnement de propagation. Dans les communications mobiles, les répliques des signaux transmis sont fournis au récepteur sous la forme de redondance fréquentielle impliquant un étalement de spectre. Les techniques utilisant l'étalement de spectre sont efficaces lorsque la bande de cohérence du canal est petite. Comme pour la diversité temporelle, la diversité fréquentielle introduit une perte d'efficacité spectrale due à la redondance de l'information dans le domaine fréquentiel.

### **2.3.3. Diversité spatiale**

La diversité spatiale est la plus populaire dans le domaine des communications sans fils. Elle est utilisée typiquement lorsque plusieurs antennes servent à l'émission et/ou à la réception. Les antennes sont alors séparées d'une distance propre, assurant ainsi une non

corrélation entre les signaux. La séparation requise dépend typiquement, de la hauteur des antennes par rapport au sol, de l'environnement de propagation et de la fréquence du signal. En général, une séparation de quelques longueurs d'onde est suffisante pour obtenir des signaux non corrélés. Dans la diversité spatiale, les répliques des signaux transmis sont fournies au récepteur sous la forme de redondance dans le domaine spatial. Contrairement aux techniques de diversité temporelle et fréquentielle, la diversité spatiale n'introduit aucune perte d'efficacité spectrale. Cette propriété est très intéressante pour les futurs systèmes de communication sans fils haut débit.

En fonction du côté où les antennes multiples sont utilisées (émetteur et/ou récepteur), nous pouvons classer la diversité spatiale en deux catégories : diversité à l'émetteur et diversité au récepteur [40]. Pour la diversité à la réception, plusieurs antennes sont placées au niveau du récepteur, permettant alors de récupérer des copies indépendantes du signal reçu. Les répliques du signal transmis sont alors proprement combinées pour augmenter le SNR global reçu et atténuer les évanouissements. Concernant la diversité à l'émetteur, plusieurs antennes sont déployées, de façon à ce que le message série à l'émetteur soit étalé pour être émis au travers des différentes antennes.

Dans le but d'obtenir les meilleures performances, beaucoup de systèmes combinent deux ou plusieurs techniques de diversités, pour obtenir une diversité multidimensionnelle [39]. Par exemple dans les systèmes cellulaires GSM<sup>21</sup>, un entrelaceur temporel et plusieurs antennes sont utilisées sur les stations de base, pour conjuguer à la fois diversité spatiale et temporelle.

#### 2.3.4. Exemple de diversité

Dans les systèmes de communications actuels, la multiplicité des antennes est utilisée uniquement sur les stations de base dans le but de supprimer les interférences entre canaux et de minimiser les effets d'évanouissements. Par exemple, dans le GSM en *uplink* (du mobile vers la station de base), les antennes multiples sont utilisées pour compenser la faible puissance d'émission des mobiles. Par contre en *downlink* (de la station de base vers le mobile), il est difficile d'utiliser la diversité à la réception car, premièrement ce n'est pas évident de mettre plus de deux antennes en raison du manque de place, et deuxièmement il faudrait émettre avec plus de puissance que ne l'impose les normes au niveau du mobile. Pour la liaison descendante il est plus évident de considérer la diversité à l'émetteur.

### 2.4 Les systèmes codés Temps-Espace

Dans ce paragraphe, nous considérons un système de communication en bande de base, codé temps-espace, disposant de  $N_t$  antennes d'émission et de  $N_r$  antennes de réception (Fig. 2.2). A chaque instant  $t$ , un bloc de données binaire de taille  $m$ , noté :

$$\mathbf{c}_t = [c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^m] \quad (2.7)$$

est envoyé dans le codeur temps-espace. Ce dernier module encode le bloc binaire de taille  $m$ , en  $N_t$  symboles. Les données codées subissent ensuite une transformation série/parallèle :

$$\mathbf{x}_t = [x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_t}]^T \quad (2.8)$$

---

<sup>21</sup> Global System Mobile

pour être émises, de façon simultanée, au travers des antennes d'émission. Tous les symboles sont émis durant le même temps symbole  $T_s$ . L'efficacité spectrale d'un tel système est égale à :

$$\eta = \frac{r_b}{B} = m \text{ bits/sec/Hz} \quad (2.9)$$

où  $r_b$  représente le débit des données et  $B$  la largeur de bande.

La multiplicité des antennes à l'émetteur et au récepteur, crée un canal MIMO. Pour les communications mobiles sans fils, chaque lien depuis une antenne d'émission, vers une antenne de réception peut être modélisé par un coefficient de Rayleigh, si on suppose que le canal est sans mémoire. Le canal MIMO, avec  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception peut être représenté par une matrice notée  $\mathbf{H}$  de dimension,  $N_r \times N_t$ , qui à chaque instant  $t$  s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^t & h_{1,2}^t & \dots & h_{1,N_t}^t \\ h_{2,1}^t & h_{2,2}^t & \dots & h_{2,N_t}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r,1}^t & h_{N_r,2}^t & \dots & h_{N_r,N_t}^t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

où l'élément  $(j,i)$ , noté  $h_{j,i}^t$ , représente le coefficient d'atténuation du canal, pour le lien entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$ .

Pour notre analyse, nous supposons que les coefficients du canal sont des variables complexes aléatoires et indépendantes, de moyenne nulle et de variance  $1/2$ . Nous considérons également des canaux à évanouissement lent et rapide. Ainsi, pour des canaux lents, les coefficients du canal resteront constant durant toute une trame, et fluctueront d'une trame à l'autre (temps symbole petit devant le temps de cohérence du canal). En ce qui concerne un canal à évanouissement rapide, les coefficients de ce dernier seront constant sur un temps symbole et fluctueront entre les symboles.

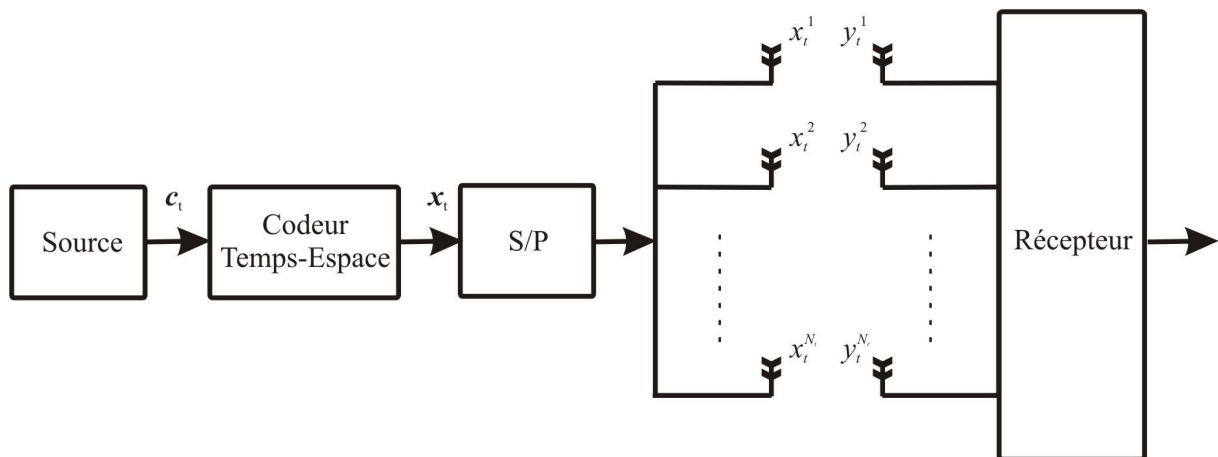


Figure 2.2 – Système en bande de base

Au récepteur, le signal reçu sur chacune des  $N_r$  antennes de réception est une superposition de bruit avec les  $N_t$  signaux émis, mais dégradés par le canal. Au temps  $t$ , le signal reçu par l'antenne  $j$ , noté  $y_t^j$  est donné par l'expression :

$$y_t^j = \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t x_t^i + n_t^j, \quad j=1, 2, \dots, N_r \quad (3.11)$$

où  $n_t^j$  est une variable Gaussienne aléatoire complexe, qui représente la composante de bruit au récepteur  $j$  et au temps  $t$ .

Représentons le signal reçu par les  $N_r$  antennes de réception au temps  $t$ , comme un vecteur colonne de dimension  $N_r \times 1$ , noté :

$$\mathbf{y}_t = [y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^{N_r}]^T \quad (2.12)$$

Le bruit au récepteur, est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de densité spectrale  $N_0$ , peut également être décrit comme un vecteur colonne de dimension  $N_r \times 1$ , noté au temps  $t$   $\mathbf{n}_t$ , et s'écrivant :

$$\mathbf{n}_t = [n_t^1, n_t^2, \dots, n_t^{N_r}]^T \quad (2.13)$$

Ainsi le signal reçu peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t \quad (2.14)$$

Nous utilisons l'algorithme basé sur le maximum de vraisemblance au récepteur pour estimer l'information émise, sachant que le canal est parfaitement connu au récepteur et inconnu à l'émetteur. Au récepteur, la métrique est alors calculée, en cherchant la distance au carrée minimale, entre le signal reçu et les hypothétiques signaux émis. La métrique est donc de la forme :

$$\sum_t \sum_{j=1}^{N_r} \left| y_t^j - \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t x_t^i \right|^2 \quad (2.15)$$

Le décodeur sélectionnera alors, le vecteur de symboles transmis pour lequel la métrique sera minimale.

## 2.5 Analyse des performances des systèmes codés Temps-Espaces

Pour analyser les performances des systèmes codés temps-espace, nous considérons que les données sont émises par paquet de taille  $L$  sur chaque antenne d'émission. Nous définissons alors la matrice du signal émis, de dimension  $N_t \times L$ , comme étant :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_L^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N_t} & x_2^{N_t} & \dots & x_L^{N_t} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où la  $i^{\text{ème}}$  ligne  $\mathbf{x}^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_L^i]$  représente les symboles émises depuis l'antenne  $i$ , et la  $t^{\text{ème}}$  colonne  $\mathbf{x}_t = [x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^{N_t}]^T$  les symboles émis au temps  $t$ .

La PEP<sup>22</sup>,  $P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , est la probabilité que le décodeur estime une séquence erronée  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_L)$ , lorsque la séquence exacte est  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_L)$ . Dans le cas du décodage à maximum de vraisemblance, cela se produira si :

$$\sum_{t=1}^L \sum_{j=1}^{N_r} \left| y_t^j - \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t x_t^i \right|^2 \geq \sum_{t=1}^L \sum_{j=1}^{N_r} \left| y_t^j - \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t \hat{x}_t^i \right|^2 \quad (2.17)$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\sum_{t=1}^L \sum_{j=1}^{N_r} 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( n_t^j \right)^* \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t (\hat{x}_t^i - x_t^i) \right\} \geq \sum_{t=1}^L \sum_{j=1}^{N_r} \left| \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t (\hat{x}_t^i - x_t^i) \right|^2 \quad (2.18)$$

où  $\operatorname{Re}\{\cdot\}$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

En supposant une parfaite connaissance du canal  $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_L)$  au récepteur, le terme à droite de l'expression (2.18) devient alors une constante, égale à  $d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , alors que le terme de gauche, est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle.  $d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  représente la distance euclidienne modifiée, entre deux matrices de code  $\mathbf{X}$  et  $\hat{\mathbf{X}}$ , s'écrivant :

$$d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \left\| \mathbf{H} \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \right\|^2 = \sum_{t=1}^L \sum_{j=1}^{N_r} \left| \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i}^t (\hat{x}_t^i - x_t^i) \right|^2 \quad (2.19)$$

ainsi, la PEP, conditionnée par  $\mathbf{H}$ , est donnée par :

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} | \mathbf{H}) = Q \left( \sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \right) \quad (2.20)$$

où,  $E_s$  représente l'énergie par symbole sur chaque antenne, et  $Q(x)$  la fonction d'erreur complémentaire telle que :

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (2.21)$$

En utilisant l'inégalité :

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}, \quad \forall x \geq 0 \quad (2.22)$$

On borne de façon supérieure, l'expression (2.20) de la PEP.

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} | \mathbf{H}) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) E_s}{4N_0}} \quad (2.23)$$

### 2.5.1. Probabilité d'erreur, pour des canaux à évanouissement lent

Tout d'abord, lorsque l'on considère un canal à évanouissement lent, ses coefficients sont constants sur toute une trame, nous enlevons, pour des raisons de lisibilité, l'exposant  $t$ , des expressions de  $h_{j,i}^t$ . Ainsi :

$$h_{j,i}^1 = h_{j,i}^2 = \dots = h_{j,i}^L = h_{j,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_t, \quad j = 1, 2, \dots, N_r \quad (2.24)$$

Définissons alors la matrice  $\mathbf{B}$ , comme la matrice de la différence entre deux matrices de codes  $\mathbf{X}$  et  $\hat{\mathbf{X}}$ . Nous l'écrivons :

<sup>22</sup> Pairwise Error Probability

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) &= \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^1 - \hat{x}_1^1 & x_2^1 - \hat{x}_2^1 & \dots & x_L^1 - \hat{x}_L^1 \\ x_1^2 - \hat{x}_1^2 & x_2^2 - \hat{x}_2^2 & \dots & x_L^2 - \hat{x}_L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N_t} - \hat{x}_1^{N_t} & x_2^{N_t} - \hat{x}_2^{N_t} & \dots & x_L^{N_t} - \hat{x}_L^{N_t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous pouvons alors construire la CDM<sup>23</sup> de dimension  $N_t \times N_t$ , notée :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{B}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \mathbf{B}^H(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \quad (2.26)$$

Comme  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}^H(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  et que les valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  sont des nombres réels positifs [41], alors  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  est une matrice hermitienne définie non négative. Il existe alors une matrice unitaire  $\mathbf{V}$  et une matrice diagonale  $\Delta$  tel que :

$$\mathbf{V} \mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \mathbf{V}^H = \Delta \quad (2.27)$$

Où les colonnes de  $\mathbf{V}$  représentent les vecteurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  et où les éléments sur la diagonale de  $\Delta$ , symbolisent les valeurs propres  $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N_t$ , de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ . Ainsi,  $\Delta$  s'écrit :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N_t} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Où,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_t} \geq 0$ .

Ensuite, en définissant  $\mathbf{h}_j = (h_{j,1}, h_{j,2}, \dots, h_{j,N_t})$ , l'équation (2.19) peut alors se réécrire ainsi :

$$\begin{aligned} d_h^2(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) &= \sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{h}_j \mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \mathbf{h}_j^H \\ &= \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i |\beta_{j,i}|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

où,

$$\beta_{j,i} = \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{v}_i \quad (2.30)$$

représente le produit membre à membre, des vecteurs complexes,  $\mathbf{h}_j$  et  $\mathbf{v}_i$ , avec  $\mathbf{v}_i$ ,  $i^{\text{ième}}$  vecteur propre de  $\mathbf{V}$ . En remplaçant (2.29) dans (2.23), nous obtenons que :

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} | \mathbf{H}) \leq \frac{1}{2} \exp \left( - \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i |\beta_{j,i}|^2 \frac{E_s}{4N_0} \right) \quad (2.31)$$

L'inégalité (2.31) borne de façon supérieure la PEP, exprimée comme une fonction de  $|\beta_{j,i}|$ , qui elle-même dépend de  $h_{j,i}$ .  $|\beta_{j,i}|$  est une variable aléatoire Gaussienne, en supposant  $h_{j,i}$  connu, elle suit une distribution de Rayleigh.

<sup>23</sup> Codeword Distance Matrix

Notons  $r$ , le rang de la matrice  $A(X, \hat{X})$ . Dans l'analyse qui va suivre, nous allons distinguer deux cas, dépendant de la valeur de  $rN_r$ .

### Détermination de la borne supérieure de la PEP, pour $rN_r$ grand (Canal de Rayleigh)

La partie droite de l'inégalité (2.31), contient  $rN_r$  variables aléatoires indépendantes. Pour une valeur de  $rN_r$  grande, i.e.  $rN_r \geq 4$ , qui correspond à un grand nombre de sous canaux indépendants, d'après le théorème de la limite centrale [42], l'expression :

$$\sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_i} \lambda_i |\beta_{j,i}|^2 \quad (2.32)$$

approche une variable Gaussienne aléatoire  $D$  de moyenne :

$$\mu_D = N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad (2.33)$$

et de variance :

$$\sigma_D^2 = N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 \quad (2.34)$$

La PEP peut alors se bornée de façon supérieure par :

$$P(X, \hat{X}) \leq \int_{D=0}^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{4N_0} D\right) p(D) dD \quad (2.35)$$

Où  $p(D)$  représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Gaussienne  $D$ . En se servant du fait que :

$$\int_{D=0}^{\infty} \frac{1}{2} \exp(-\gamma D) p(D) dD = \exp\left(\frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_D^2 - \gamma \mu_D\right) Q\left(\frac{\gamma \sigma_D^2 - \mu_D}{\sigma_D}\right), \quad \gamma > 0 \quad (2.36)$$

la borne supérieure (2.35) peut alors s'écrire :

$$P(X, \hat{X}) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^2 \sigma_D^2 - \frac{E_s}{4N_0} \mu_D\right) Q\left(\frac{E_s}{4N_0} \sigma_D - \frac{\mu_D}{\sigma_D}\right) \quad (2.37)$$

où encore :

$$P(X, \hat{X}) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^2 N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 - \frac{E_s}{4N_0} N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i\right) Q\left(\frac{E_s}{4N_0} \sqrt{N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2} - \frac{\sqrt{N_r \sum_{i=1}^r \lambda_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2}}\right)$$

### Détermination de la borne supérieure de la PEP, pour $rN_r$ petit (Canal de Rayleigh)

Lorsque le nombre de sous canaux indépendants est faible, i.e.  $rN_r < 4$ , la borne supérieure de la PEP devient d'après [36] :

$$P(X, \hat{X}) \leq \left( \prod_{i=1}^{N_i} \frac{1}{1 + \frac{E_s}{4N_0} \lambda_i} \right)^{N_r} \quad (2.38)$$

Et à fort SNR, l'expression précédente peut se simplifier, pour donner :



$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-N_r} \left( \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rN_r} \quad (2.39)$$

## 2.6 Critère de construction des codes spatio-temporel

### 2.6.1. Critère de construction sur un canal à évanouissement lent

Comme l'indique les équations (2.37) et (2.39), le critère de construction sur des canaux à évanouissement lent, dépend de la valeur  $rN_r$ . La valeur maximale possible pour  $rN_r$  est égale à  $N_t N_r$ . Pour de faibles valeurs de  $N_t N_r$ , correspondant à un faible nombre de sous canaux indépendants, la PEP à fort SNR, est régie par le rang minimum de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  de toutes les paires de mots de codes possible. Le produit entre le rang minimum et le nombre d'antennes de réception,  $rN_r$ , s'appelle la diversité minimale. Dans le but de minimiser la probabilité d'erreur, il faut maximiser, le résultat minimum du produit des valeurs propres non nulles  $\prod_{i=1}^r \lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , sur les paires de mots de codes de rang minimum. Ce critère se rapporte au gain de codage et nous le quantifierons dans la suite à l'aide de la notion de Cumulative Gain Distance (CGD).

Si  $N_t N_r$  est petit, le critère de construction des codes spatio-temporels, sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent, peut se résumer ainsi :

#### Critère de conception N° 1

- Maximiser le rang minimum  $r$  de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , sur toutes les paires de mots de codes possible
- Maximiser le produit minimum des valeurs propres,  $\prod_{i=1}^r \lambda_i$ , de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  sur les paires de mots de codes de rang minimum

Ce critère porte le nom de : *critère du rang et du déterminant*, et on appellera, rang minimum du code spatio-temporel, le rang minimum de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  obtenu sur toutes les paires distinctes de mots de code.

Maximiser le rang minimum  $r$ , revient à trouver un code spatio-temporel qui rendra la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  de rang plein, i.e.  $r = N_t$ . Cependant obtenir  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  de rang plein n'est pas toujours possible, compte tenu des restrictions et de la structure du code mis en place.

Pour des valeurs de  $N_t N_r$  importante, la PEP est bornée de façon supérieure par l'expression (2.37). Nous supposons que nous travaillons à un SNR raisonnablement élevé, de telle sorte que :

$$\frac{E_s}{4N_0} \geq \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2} \quad (2.55)$$

(En effet, la valeur de  $\frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2}$  est habituellement petite, comme par exemple, dans [36] pour

un code spatio-temporel à 4 états en QPSK, elle vaut 0.5).

En utilisant l'inégalité :

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}, \quad x \geq 0 \quad (2.56)$$

la borne (2.37) peut alors s'écrire :

$$P(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \leq \frac{1}{4} \exp\left(-N_r \frac{E_s}{4N_0} \sum_{i=1}^r \lambda_i\right) \quad (2.57)$$

Le résultat précédent montre que la probabilité d'erreur est régie par les mots de codes qui vont engendrer la somme des valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  la plus petite. Donc, dans le but de minimiser la probabilité d'erreur, la somme minimale des valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , sur toutes les paires de code possible, doit être maximisée. Pour une matrice carrée, la somme de toutes les valeurs propres est égale à la somme des éléments sur la diagonale. On appelle cette somme, la *trace de la matrice* [41], et on la note :

$$\text{tr}\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^{N_r} A^{i,i} \quad (2.58)$$

où  $A^{i,i}$  sont les éléments de la diagonale de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ . Sachant que :

$$A^{i,j} = \sum_{t=1}^L (x_t^i - \hat{x}_t^i)(x_t^j - \hat{x}_t^j)^* \quad (2.59)$$

on obtient en remplaçant (2.59) dans (2.58) :

$$\text{tr}\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})\right) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{t=1}^L |x_t^i - \hat{x}_t^i|^2 \quad (2.60)$$

L'équation précédente révèle que la trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  est équivalente à la distance euclidienne au carrée entre les mots de code  $\mathbf{X}$  et  $\hat{\mathbf{X}}$ . Cependant, maximiser le minimum de la somme de toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  sur toutes les paires de mots de code distinctes ou maximiser le minimum de la trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$ , revient en fait à maximiser la distance euclidienne minimale entre toutes les paires de mots de code distinctes. Ce critère de conception est pour cela appelé : *le critère de la trace*.

Il est à souligner que la formule (2.57) est valable que pour un grand nombre de sous canaux indépendants, à condition que la valeur minimale de  $rN_r$  soit grande. Dans ce cas, le critère de conception du code spatio-temporel, sur un canal à évanouissement lent se résume ainsi :

### Critère de conception N°2

- S'assurer que le rang minimum de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  sur toutes les paires de mots de code distinctes est tel que :  $rN_r \geq 4$
- Maximiser le minimum de la trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$  sur toutes les paires de mots de code distinctes

Nous pouvons donc dire que, appliquer le critère de conception sur le rang et le déterminant ou le critère de conception sur la trace, dépendra de l'ordre de diversité  $rN_r$ . En effet, lorsque  $rN_r < 4$  on applique le critère du rang et du déterminant, sinon c'est le critère de conception basé sur la trace de  $A(X, \hat{X})$  qu'il faudra utiliser. La valeur seuil de  $rN_r$ , différenciant les deux critères a été prise égale à 4, car pour satisfaire le théorème de la limite centrale, le nombre minimale de variable aléatoire  $rN_r$  requis dans (2.32) est de 4. Ce choix a en plus été confirmé par simulation. En effet, il a été montré dans [43] que tant que  $rN_r \geq 4$ , les meilleurs codes étaient ceux basés sur le critère de la trace, car leurs performances étaient meilleures que celles des codes basés sur le critère du rang et du déterminant.

En se basant sur tout ce qui vient d'être dit, nous pouvons dire que la conception d'un code sur des canaux à évanouissement, est très dépendante de l'ordre de diversité du système spatio-temporel mis en place.

Pour des codes sur canaux lents, la diversité totale, est égale au produit de la diversité au récepteur  $N_r$ , avec la diversité  $r$ , fournie par le schéma de codage utilisé en émission.

**Remarque :** dans la suite nous noterons  $CGD(X, \hat{X})$  la valeur du déterminant  $\det(A(X, \hat{X})) = \det(B(X, \hat{X})B^H(X, \hat{X}))$ . Dans ce cas, le critère du rang et du déterminant consiste à maximiser la valeur de  $CGD(X, \hat{X})$  pour chaque paire de mots de code transmis  $X$  et  $\hat{X}$ .

Après avoir mis en place des critères de conception de codes spatio-temporels, intéressons nous désormais, aux différents codes temps-espaces existant, en commençant tout d'abord par les codes spatio-temporels en blocs.

## 2.7 Les codes spatio-temporel en bloc : STBC

C'est le schéma de codage d'Alamouti [44], permettant d'avoir une diversité maximale avec un algorithme de décodage ML très simple au récepteur, qui fut le précurseur des STBC. En effet, c'est la généralisation du schéma d'Alamouti qui a donné naissance aux codes spatio-temporels en blocs [45]. Commençons tout d'abord par rappeler le schéma d'Alamouti, avant de voir la conception généralisée des STBC.

### 2.7.1. La construction d'Alamouti

Alamouti a proposé dans [44] une méthode simple pour exploiter la diversité temps-espace, en utilisant une construction à deux antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception. Les symboles d'information, traités par pair, engendrent quatre symboles répartis par couple sur chaque antenne. Chaque antenne envoie l'un après l'autre, les deux symboles codés qui lui sont fournis. Afin d'obtenir les symboles orthogonaux entre les antennes, la première antenne envoie les symboles d'informations de façon systématique et la deuxième antenne envoie ces symboles conjugués, dans l'ordre inverse, avec l'un des deux inversés. Cette opération de codage est résumée dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Schéma d'Alamouti

TEMPS	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$2p$	$x_{2p}$	$-x_{2p+1}^*$
$2p+1$	$x_{2p+1}$	$x_{2p}^*$

L'indice  $p$  indique le numéro de bloc STBC d'Alamouti (ASTBC).  $x_{2p}$  et  $x_{2p+1}$  sont les symboles d'information à transmettre.

Les symboles transmis par chaque antenne se propagent suivant des chemins différents avant d'arriver sur les antennes de réception. Afin de faciliter la démonstration, on considère que le chemin ne change pas pendant la transmission d'un bloc STBC et qu'il peut être modélisé par un canal de Rayleigh à évanouissement. On a alors  $2 \times N_r$  canaux de propagation pour un récepteur disposant de  $N_r$  antennes.

Les symboles envoyés subissent l'influence d'un bruit additif blanc Gaussien (AWGN) de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , ce qui permet d'écrire le signal reçu, pendant deux intervalles de temps symbole, sur l'antenne de réception  $j$  sous la forme :

$$y_{j,2p} = x_{2p} \cdot h_{j,1} - x_{2p+1}^* \cdot h_{j,2} + n_{2p} \quad (2.63)$$

$$y_{j,2p+1} = x_{2p+1} \cdot h_{j,1} + x_{2p}^* \cdot h_{j,2} + n_{2p+1} \quad (2.64)$$

Les équations (2.63) et (2.64) peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} y_{j,2p} \\ y_{j,2p+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{j,1} & -h_{j,2} \\ h_{j,2}^* & h_{j,1}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{2p} \\ x_{2p+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{2p} \\ n_{2p+1}^* \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (2.66)$$

En développant, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{y}_i &= \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \\ &= \rho \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2.67)$$

où  $(\cdot)^H$  effectue la transposée conjuguée de la matrice et

$$\rho = |h_{j,1}|^2 + |h_{j,2}|^2 \quad (2.68)$$

Si on considère que le récepteur a parfaitement estimé le canal,  $\mathbf{H}$  est alors connu. On peut donc procéder à la détection de maximum de vraisemblance.

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \Omega^2}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^{N_r} \|\hat{\mathbf{y}}_i - \rho \cdot \mathbf{X}\|^2 \right) \quad (2.69)$$

avec  $\hat{\mathbf{y}}_i = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{y}_i$

Le fait que  $x_{2p}$  et  $x_{2p+1}^*$  soient indépendants entre eux, fait qu'on peut chercher séparément le minimum de chacun des symboles, en calculant :

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{2p} \\ x_{2p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^{N_r} |\hat{y}_{i,2p} - \rho \cdot x|^2 \right) \\ \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^{N_r} |\hat{y}_{i,2p+1} - \rho \cdot x^*|^2 \right) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

On réduit ainsi la complexité de  $|\Omega|^2$  à  $2 \times |\Omega|$ .

### 2.7.2. Performance du code d'Alamouti

La performance du code d'Alamouti, sur un canal de Rayleigh quasi-statique, à évanouissement est illustré sur la figure 2.3. Le système étudié est constitué d'une seule antenne de réception et utilise une modulation QPSK. On trace sur la figure 2.3, la probabilité d'erreur par symbole, en fonction du SNR. Comme nous pouvons le constater, la performance du code d'Alamouti avec deux antennes d'émission est bien meilleure que celle d'un système

à une antenne d'émission. Pour un taux d'erreur par symbole de  $10^{-3}$  le code d'Alamouti offre un gain de 11 dB. Ce qui est plus important de constater encore, c'est que plus le SNR augmente, plus l'écart de performance entre les deux systèmes augmente. En fait le taux d'erreur diminue de façon inversement proportionnel au carré du SNR.

Pour conclure nous dirons que le code d'Alamouti fourni deux propriétés importantes :

- Décodage simple
- Diversité maximale

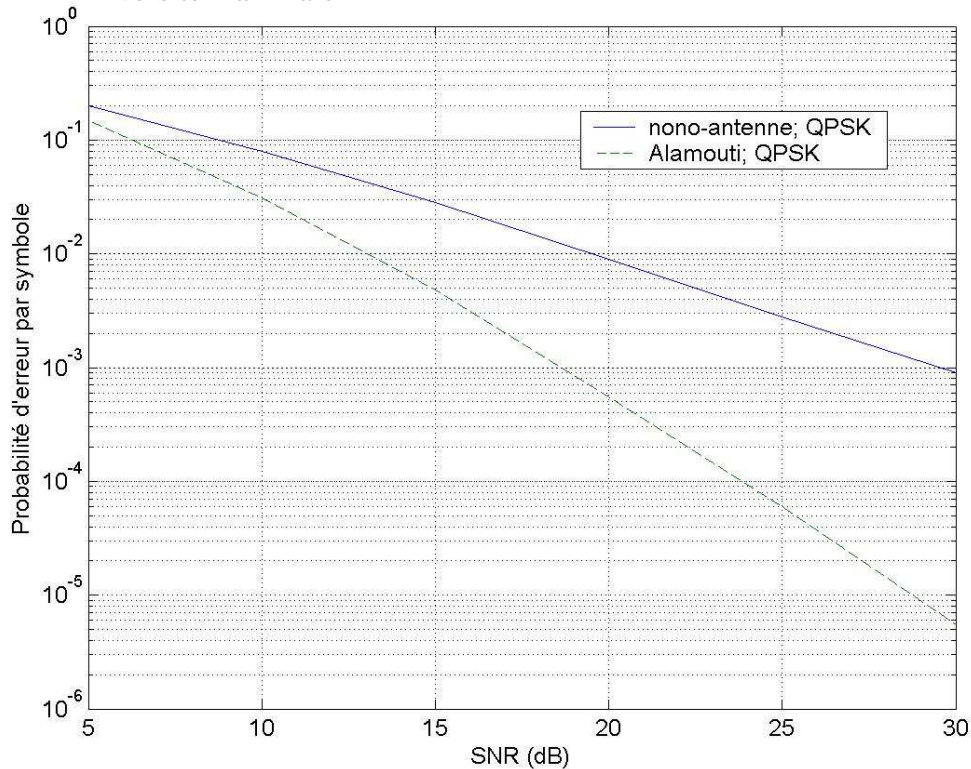


Figure 2.3 - Performance du code d'Alamouti

Une question se pose alors, existe-t-il des codes disposant des mêmes propriétés pour un nombre d'antennes d'émission plus élevé ? La réponse a été fournie par Tarokh & al en 99 qui a généralisé le concept d'Alamouti à un nombre quelconque d'antennes d'émission [45].

### 2.7.3. Codeur STBC

La figure 2.4 schématise la structure d'un codeur STBC. On définit en général un code STBC par une matrice, que nous noterons  $\mathbf{X}$ , de dimension  $N_t \times P$ , où  $P$  représente le nombre d'intervalle de temps nécessaire, pour l'émission d'un bloc de symboles codés.

La constellation utilisée comporte un nombre de points égal à  $2^m$ , ainsi à chaque opération de codage, un message d'information de  $Km$  bits sera modulé, pour former un signal de  $K$  symboles  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_K$ , où  $x_k \in \Omega$ , constellation à transmettre dans un mot STBC. Ces  $K$  symboles sont ensuite codés par un codeur STBC, de façon à générer en sortie,  $N_t$  signaux parallèles, chacun de longueur  $P$ , d'après la structure de la matrice  $\mathbf{X}$  définie précédemment. Tous les signaux sont émis de façon synchrones durant  $P$  intervalles de temps.

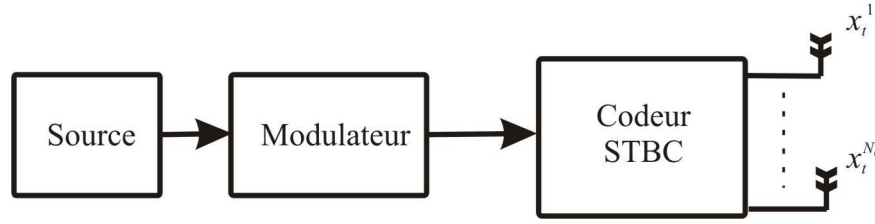


Figure 2.4 – Codeur STBC

Donc, à chaque opération de codage, le nombre de symboles pris en entrée du codeur est égal à  $K$ , et le nombre de périodes de transmission pour émettre un code STBC, au travers des antennes multiples, est de  $P$ . En d'autres termes, pour chaque bloc de  $K$  symboles en entrée du codeur, il y a  $P$  symboles temps-espace transmis depuis chaque antenne. Le rendement d'un code STBC est alors défini comme le rapport entre le nombre de symboles pris en entrée du codeur sur le nombre de symboles codés transmis depuis chaque antennes d'émission. Si nous notons  $R$  ce rapport, il vaut :

$$R = K/P \quad (2.71)$$

L'efficacité spectrale d'un code STBC sera alors :

$$\eta = \frac{r_b}{B} = \frac{r_s m R}{r_s} = \frac{K m}{P} \text{ bits/s/Hz} \quad (2.72)$$

où  $r_b$  et  $r_s$  représentent respectivement les taux de transmissions bits et symboles, et  $B$  la largeur de bande.

Dans le but d'obtenir le maximum de diversité  $N_t$ , la construction de la matrice de transmission  $\mathbf{X}$ , dans laquelle les coefficients sont des combinaisons linéaires des  $K$  symboles modulés  $x_1, x_2, \dots, x_K$  et de leurs conjugués  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_K^*$ , est basée sur un design orthogonal. Ainsi :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H = c \left( |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_K|^2 \right) \mathbf{I}_P \quad (2.73)$$

où  $c$  est une constante,  $\mathbf{X}^H$  la transposée conjuguée de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{I}_P$  la matrice identité de dimension  $P \times P$ .

Notons que la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{X}$  représente les symboles émis, depuis l'antenne d'émission  $i$ , consécutivement durant  $P$  temps symboles, alors que, la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $\mathbf{X}$  représente les symboles émis simultanément, au travers des  $N_t$  antennes d'émissions. Ainsi, l'élément  $x_{i,j}$ , où  $i=1, 2, \dots, P$  et  $j=1, 2, \dots, N_t$ , de  $\mathbf{X}$ , correspondant à la ligne  $i$  et la colonne  $j$ , représente le symbole émis depuis l'antenne  $j$  au temps  $i$ .

Dans la suite, nous noterons  $\mathbf{X}_{N_t}$ , la matrice de transmission d'un code STBC, pour un système à  $N_t$  antennes d'émissions. Ainsi, si nous utilisons un design de construction orthogonal pour créer le code STBC, les colonnes de la matrice  $\mathbf{X}_{N_t}$  seront orthogonales entre elles. Ceci se traduit mathématiquement, si nous supposons que  $\mathbf{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{P,j})$  est la séquence émise depuis l'antenne  $j$ , par :

$$\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i = \sum_{t=1}^P x_{t,j} \cdot x_{t,i}^* = 0, \quad i \neq j, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_t\} \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i$  représente le produit, éléments par éléments, entre les deux séquences à transmettre  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$ . Cette condition d'orthogonalité nous permet d'obtenir un système de diversité maximale, et en plus de cela, elle permet au récepteur de découpler les signaux émis

depuis les différentes antennes d'émission, donc par conséquent, un simple décodage à maximum de vraisemblance, basé sur des combinaisons linéaires des signaux reçus, permet de reconstituer l'information émise.

Voyons désormais la construction des codes STBC à partir de constellations réelles puis complexes, avant de formuler une écriture généralisée de conception.

### 2.7.3.1. Codes réels

Un code STBC est dit réel si tous les éléments de la matrice  $\mathbf{X}$  sont réels, c'est-à-dire

$$\forall k, x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq K \quad (2.74)$$

Les symboles envoyés sur toutes les antennes sont des symboles réels issus d'une constellation entièrement réelle comme dans le cas de la modulation d'impulsion en amplitude (PAM).

Des exemples de codes STBC réels sont présentés ci-dessous.

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

### 2.7.3.2. Codes complexes

Un code STBC est dit complexe si les éléments de la matrice  $\mathbf{X}$  sont complexes, c'est-à-dire

$$\forall k, x_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq K \quad (2.78)$$

Les symboles envoyés sur toutes les antennes sont issus d'une constellation entièrement complexe, comme dans le cas des modulations de phase (MPSK), de fréquence (MFSK) ou de la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ).

Des exemples des codes complexes sont présentés ci-dessous.

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{X}_{3a} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ x_2 & x_1^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*}{2} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 + x_2^*}{2} \end{bmatrix}^T \quad (2.80)$$

$$\mathbf{X}_{3b} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & x_1^* & -x_2^* & -x_3^* & -x_4^* \\ x_2 & x_1^* & x_4 & -x_3 & x_2^* & x_1^* & x_4^* & -x_3^* \\ x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 & x_3^* & -x_4^* & x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T \quad (2.81)$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ x_2 & x_1^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*}{2} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 + x_2^*}{2} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* - x_2 - x_2^*}{2} & \frac{-x_1 - x_1^* - x_2 + x_2^*}{2} \end{bmatrix}^T \quad (2.82)$$

### 2.7.3.3. Ecriture généralisée de la matrice de code complexe

Une matrice de code  $\mathbf{X}$  complexe peut être décomposée en somme des matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$ . On peut écrire la matrice  $\mathbf{X}$  sous la forme

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k + x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \quad (2.83)$$

avec

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{1,1}^k & \cdots & a_{1,N_t}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1}^k & \cdots & a_{p,N_t}^k \end{bmatrix}_{P \times N_t}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} b_{1,1}^k & \cdots & b_{1,N_t}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1}^k & \cdots & b_{p,N_t}^k \end{bmatrix}_{P \times N_t} \quad \text{et } a_{p,n}^k, b_{p,n}^k \in \{-1, 0, 1\}$$

Les matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$  sont de la même taille que la matrice de codage  $\mathbf{X}$ . Pour obtenir l'orthogonalité de  $\mathbf{X}$ , les matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$  doivent respecter les conditions suivantes [36]

$\forall k, \forall l \in \{1, \dots, K\}, l \neq k$

$$\text{i) } \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T = \mathbf{I} \quad (2.84)$$

$$\text{ii) } \mathbf{A}_k \mathbf{A}_l^T + \mathbf{B}_l \mathbf{B}_k^T = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

$$\text{iii) } \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k^T = \mathbf{0} \quad (2.86)$$

$$\text{iv) } \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k^T + \mathbf{B}_l \mathbf{A}_l^T = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

Cette écriture nous permet de définir une méthode de décodage généralisée.

### 2.7.4. Le décodage STBC généralisé

La matrice de codage  $\mathbf{X}$  résume la manière et l'ordre de la transmission des symboles. La figure 2.2 illustre l'existence d'un canal entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception. On considère que le canal est un canal à évanouissements non sélectifs en fréquence. On note



$$\mathbf{h}_j = \begin{bmatrix} h_{j,1} & \dots & h_{j,i} & \dots & h_{j,N_t} \end{bmatrix}_{N_t \times 1}^T \quad (2.88)$$

les coefficients du canal entre les antennes d'émission  $i \in \{1, \dots, N_t\}$  et l'antenne de réception  $j$ .  
Le signal reçu sur l'antenne de réception  $j$  s'écrit sous la forme

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{n}_j \quad (2.89)$$

$\mathbf{n}_j$  est un vecteur de bruit blanc Gaussien avec

$$E[\mathbf{n}_j^H \cdot \mathbf{n}_j] = \sigma^2 \mathbf{I}_p \quad (2.90)$$

Ainsi, les signaux reçus sur toutes les antennes de réception se mettent sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{n} \quad (2.91)$$

avec

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_j & \dots & \mathbf{y}_{N_r} \end{bmatrix}_{P \times N_r}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_j & \dots & \mathbf{h}_{N_r} \end{bmatrix}_{N_t \times N_r}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \dots & \mathbf{n}_j & \dots & \mathbf{n}_{N_r} \end{bmatrix}_{P \times N_r}$$

Si une estimation parfaite du canal est disponible, l'algorithme de maximum de vraisemblance qui minimise la métrique de décision en fonction des symboles reçus sur toutes les antennes de réception s'écrit

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{p=1}^P \left| y_{p,j} - \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{x}_{p,i} \cdot h_{i,j} \right|^2 \right) \quad (2.92)$$

$\mathcal{C}$  est l'ensemble de tous les mots de codes STBC possibles avec  $|\Omega|^K$  éléments. On a donc  $|\Omega|^K$  combinaisons à tester et cela devient vite prohibitif.

L'équation (2.92) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{j=1}^{N_r} \left| \mathbf{y}_j - \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j \right|^2 \right) \quad (2.93)$$

et se développe ensuite

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{N_r} \left( (\mathbf{y}_j - \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j)^H \cdot (\mathbf{y}_j - \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j) \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{N_r} \left( \mathbf{y}_j^H \cdot \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j - \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{y}_j + \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{h}_j \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{N_r} \left( -\mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j - \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{y}_j + \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{h}_j \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

A partir de (2.73) et (2.94), on a alors

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{N_r} \left( -(\mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{y}_j) + \rho \cdot \mathbf{h}_j^H \cdot \mathbf{h}_j \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left[ \underbrace{-\sum_{j=1}^{N_r} (\mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{y}_j)}_{\Phi_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_r} (\rho \cdot \mathbf{h}_j^H \cdot \mathbf{h}_j)}_{\Phi_2} \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

avec

$$\rho = \sum_{k=1}^K (|x_k|^2) \quad (2.96)$$

$\Phi_1$  est un scalaire réel qui dépend linéairement de  $\tilde{\mathbf{X}}$ . On peut écrire  $\Phi_1$  sous la forme

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^K (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \quad (2.97)$$

avec  $q_k$  un scalaire complexe défini ultérieurement.

Comme

$$\mathbf{h}_j^H \mathbf{h}_j = \sum_{i=1}^{N_r} |h_{j,i}|^2 \quad (2.98)$$

$\Phi_2$  se met donc sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} |h_{j,i}|^2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \cdot H \end{aligned} \quad (2.99)$$

où  $H$  est un scalaire supérieur ou égal à 0 en théorie mais strictement supérieur à 0 en pratique. On obtient au final

$$\begin{aligned} \Phi &= -\Phi_1 + \Phi_2 \\ &= \sum_{k=1}^K \underbrace{\left( |x_k|^2 \cdot H - (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \right)}_{\Phi_k} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Le fait que  $\Phi_k$  ne dépende que de  $x_k$  rend les métriques indépendantes. On peut alors calculer les métriques individuellement. La complexité initiale de  $|\Omega|^K$  devient alors égale à  $K \times |\Omega|$ . Avec cette constatation, en développant (2.100), on a :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} (\Phi_k) \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( H \left( |\tilde{x}_k|^2 - \frac{q_k}{H} \tilde{x}_k^* - \frac{q_k^*}{H} \tilde{x}_k + \frac{|q_k|^2}{H^2} \right) - \frac{|q_k|^2}{H} \right) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Etant donné que  $q_k$  et  $H$  sont des scalaires, on réduit l'équation (2.101) en :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( |\tilde{x}_k|^2 - \frac{q_k}{H} \tilde{x}_k^* - \frac{q_k^*}{H} \tilde{x}_k + \frac{|q_k|^2}{H^2} \right) \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left| \tilde{x}_k - \frac{q_k}{H} \right|^2 \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left| \tilde{x}_k - q'_k \right|^2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

On arrive alors à un calcul de métrique très simple. Il reste à définir la constante  $q'_k$ . A partir de (2.95) et (2.97),

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{N_r} (\mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}}^H \cdot \mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^K (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \quad (2.103)$$

Etant donné que le code STBC peut être écrit comme une somme de matrices (2.83), on peut faire le développement suivant.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j \Big|_{P \times 1} &= \left( \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k + x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \right) \cdot \mathbf{h}_j \\
&= \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{h}_j + \sum_{k=1}^K x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{h}_j
\end{aligned} \tag{2.104}$$

où  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$  et  $\mathbf{h}_j$  sont des constantes. La somme sur  $k$  dans (2.104) nous donne la forme matricielle :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j \Big|_{P \times 1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{h}_j & \dots & \mathbf{A}_K \cdot \mathbf{h}_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_h^j} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{h}_j & \dots & \mathbf{B}_K \cdot \mathbf{h}_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_h^j} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_K^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^*} \\
&= \mathbf{A}_h^j \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_h^j \cdot \mathbf{x}^*
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Si on insère l'équation (2.105) dans la partie gauche de (2.103) on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j &= \sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{y}_j^H \cdot (\mathbf{A}_h^j \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_h^j \cdot \mathbf{x}^*) \\
&= \left( \sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{y}_j^H \cdot \mathbf{A}_h^j \right) \cdot \mathbf{x} + \left( \sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{y}_j^H \cdot \mathbf{B}_h^j \right) \cdot \mathbf{x}^*
\end{aligned} \tag{2.106}$$

ou sous sa forme matricielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{y}_j^H \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{h}_j &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N_r} \end{bmatrix}^H}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_h^{N_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_h} \cdot \mathbf{x}_{K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N_r} \end{bmatrix}^H}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_h^1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_h^{N_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_h} \cdot \mathbf{x}_{K \times 1}^* \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^*
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Le résultat de (2.107) est un scalaire où  $(\cdot)^H = (\cdot)^*$ , donc l'équation (2.103) devient :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^* + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^*)^H \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}_h^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{B}_h^* \cdot \mathbf{x} \\
&= \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{B}_h^*)}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}_h^* + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h)}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}^* \\
&= \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}^*
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Et on trouve

$$\mathbf{q} = (\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}_h^* + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h) = [q_1 \quad \dots \quad q_K]_{K \times 1} \tag{2.109}$$

L'équation (2.108) a alors la forme matricielle de (2.97). On peut donc désormais calculer la métrique (2.102) et procéder au décodage. On résume l'algorithme de décodage ci après.

### 2.7.5. Algorithme de décodage

- Les symboles transmis par toutes les antennes d'émission arrivent sur toutes les antennes de réception après avoir subi un certain gain de canal pendant  $K$  temps

symboles. On considère le canal invariant pendant ce temps, et un bruit blanc s'ajoute aux symboles en réception.

- Le décodeur obtient les estimations des canaux par des méthodes qui importent peu ici. Les canaux estimés sont représentés par  $\mathbf{A}_h$  et  $\mathbf{B}_h$ , comme présentés dans (2.105)-(2.107).
- Le décodeur STBC calcule les valeurs  $q'_k$  par les formules (2.108)–(2.109)
- Ces valeurs  $q'_k$  sont fournies aux démodulateurs  $\Omega$  pour obtenir le symbole estimé via les métriques (2.102)

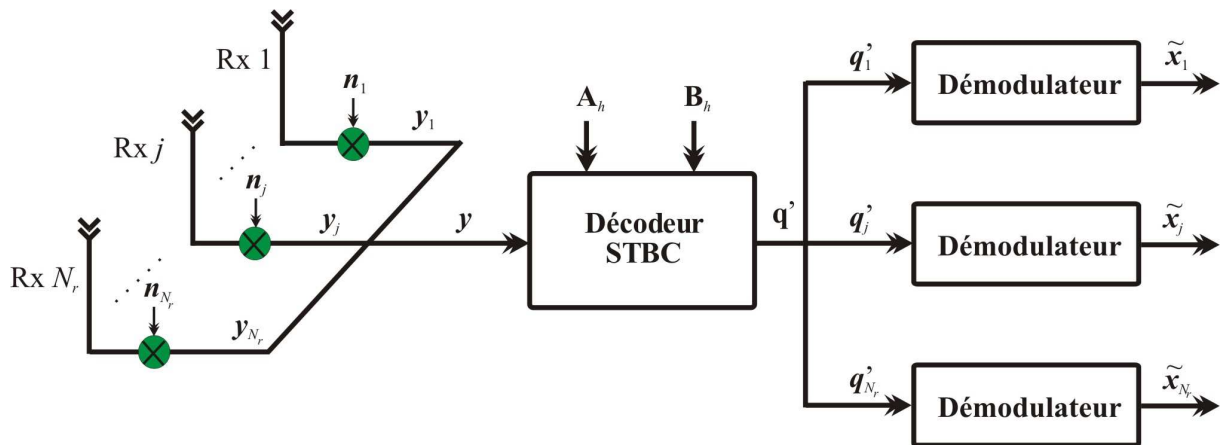


Figure 2.5 - Le récepteur STBC

La figure 2.5 résume le décodeur STBC au récepteur.

## 2.8 Les codes spatio-temporels en treillis

Ici, nous présentons un codage temps-espace qui associe le principe de la diversité spatio-temporelle et le codage convolutif (code en treillis). Ce type de codage est généralement considéré comme un concurrent du codage spatio-temporel en bloc (STBC). Cependant, contrairement au cas des codes STBC qui permettent d'obtenir une diversité optimale, le codage STTC introduit de la corrélation au niveau des symboles transmis entre les différentes antennes. Ceci explique que les performances de ce type de code sont en général supérieures à celles des codes STBC, au prix d'une complexité supérieure. Le but de cette partie est de présenter les critères de construction des codes STTC pour obtenir les meilleures performances en termes de FER.

### 2.8.1. Introduction

Les modulation codées en treillis [47,48] (TCM<sup>24</sup>), combinent modulation et codage, pour accroître les gains de codage. Pour une même largeur de bande, ce type de codage

<sup>24</sup> Trellis-Coded Modulation

fournit de meilleures performances que des schémas de modulation non codés. Les codes temps-espace en Treillis (STTC<sup>25</sup>), combinent modulation et codage en treillis pour transmettre une information au travers de plusieurs antennes d'émission sur un canal MIMO. On peut donc penser que les STTC sont l'équivalent des codes TCM appliqués au cas MIMO. Le but ici est de construire des codes STTC qui vont satisfaire des critères de conception. Comme nous l'avons précédemment montré, pour avoir un code à diversité maximale, le STTC doit satisfaire le critère du rang. Si nous définissons le rendement du code, comme étant le nombre de symboles transmis par temps symbole, il faudra se contraindre à concevoir des codes de rendement 1, pour obtenir les meilleures performances.

### 2.8.2. Codage des STTC

Pour notre étude, nous considérons, le cas d'un système à  $N_t = 2$  antennes d'émission. Il y a alors deux symboles à émettre depuis ces deux antennes, pour chaque chemin dans le treillis. Nous utilisons les indices correspondant aux symboles à émettre pour représenter les changements d'états dans le treillis. Pour un STTC qui émet  $b$  bits/s/Hz d'informations,  $2^b$  bits partent de chaque état. La figure 2.6 illustre un STTC de rendement 1, émettant à un rythme  $r = 2$  bits/s/Hz. Le code utilise une modulation QPSK, ainsi  $b = 2$ , ce qui implique que les indices, 0, 1, 2, 3 représentent respectivement les symboles 1,  $j$ ,  $-1$ ,  $-j$ . Comme pour le cas des TCM lorsque l'on referme le treillis à la fin du paquet transmis, le codage démarre de l'état zéro et se termine également dans cet état. Nous notons  $S_t$ , l'état du codeur à l'instant  $t$ . Ainsi,  $b = 2$  bits arrivent sur le codeur pour sélectionner une des  $2^b = 4$  branches de transitions possibles de l'état  $S_t$ . Si l'on note  $i_1$  et  $i_2$  les indices de la branche sélectionnée, les symboles correspondant seront notés  $c_{t,1}$  et  $c_{t,2}$ . Ces derniers sont transmis simultanément par l'intermédiaire des deux antennes d'émission. Le codeur passe alors dans l'état  $S_{t+1}$ , vers lequel la branche sélectionnée précédemment a convergé. Par exemple en considérant le treillis de la figure 2.6, si le codeur est dans l'état  $S_t = 0$ , au temps  $t$ , et que l'information binaire en entrée vaut 10, les indices sélectionnés seront alors  $i_1 = 0$  et  $i_2 = 2$ . Dans ce cas, les symboles transmis correspondants seront  $c_{t,1} = 1$  et  $c_{t,2} = -1$ , et le codeur passera dans l'état  $S_{t+1} = 2$ .

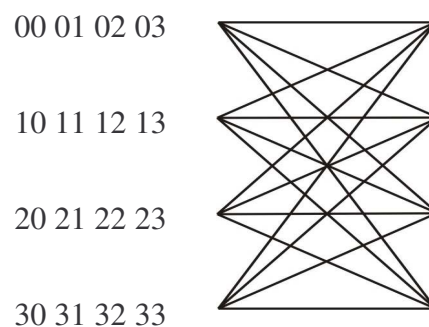


Figure 2.6 – STTC à 4 états utilisant une modulation QPSK,  $r = 2$  bits/s/Hz

<sup>25</sup> Space-Time Trellis Code

Même si le code est construit manuellement, la logique utilisée permet de garantir au code une diversité maximale. En effet, toutes les branches qui partent d'un même état émettent le même symbole sur la première antenne d'émission alors que toutes les branches qui émergent dans un état donné émettent le même symbole sur la seconde antenne. En utilisant cette méthode logique de conception manuelle, il est possible de concevoir d'autres treillis pour d'autres types de modulation. Nous donnons d'autres exemples de STTC dans ce qui suit.

Précédemment nous avons vu que pour un code, la valeur minimale du CGD parmi tous les couples de mots de codes possible, était une bonne indication des performances du code. Dans le cas des STTC, le CGD minimum peut correspondre au déterminant de tous les couples dont les chemins partent d'un même état, pour revenir dans ce même état après  $P$  transitions.

La figure 2.7, montre un exemple dans lequel  $P = 2$ , pour le cas du treillis de la figure 2.6. Dans l'exemple considéré, le premier chemin reste dans l'état 0 pendant toute la transmission, les états consécutifs valent alors 000, et en ce qui concerne le second chemin, il part de l'état 0, diverge vers l'état 2, puis revient dans l'état 0, les états consécutifs parcourus sont alors 020. Dans ce cas si on note les mots de codes correspondants  $C^1$  et  $C^2$  on a :

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

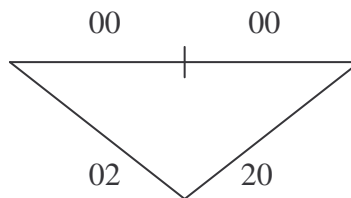


Figure 2.7 – Deux chemins différents qui divergent pendant 2 transitions

Pour cet exemple,  $\text{CGD}(C^1, C^2) = 16$ . Pour le treillis en figure 2.6, il y a beaucoup de couples pour lesquels le chemin diffère de 2 transitions. Le CGD minimum est alors calculé en cherchant tous les CGD possibles pour tous les couples, et en ne sélectionnant uniquement que le plus petit d'entre eux. Pour la figure 2.6, la valeur du CGD minimum correspond aux chemins 000 et 010 et elle vaut 4.

### 2.8.3. Décodage des STTC

Comme pour le décodage des codes STBC, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance, en sachant que l'on part de l'état 0, pour y revenir après  $T + Q$  intervalles de temps, nous sommes en mesure de trouver le chemin le plus probable. Ici  $T$  représente l'intervalle de temps des données utiles et  $Q$  l'intervalle de temps nécessaire pour finir le treillis dans l'état 0.

Considérons que nous recevons sur l'antenne  $j$  les signaux suivants,  $y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{T+Q,j}$ , avec  $t = 1, 2, \dots, T+Q$ . Comme pour le cas des TCM, nous allons utiliser l'algorithme de Viterbi pour le décodage MV. Ainsi, si une branche dans le treillis transmet les symboles  $x_1$  et  $x_2$  respectivement depuis les antennes d'émission 1 et 2, alors la métrique de branche au temps  $t$  vaudra :

$$\sum_{j=1}^{N_r} |y_{t,j} - h_{j,1}x_1 - h_{j,2}x_2|^2 \quad (2.111)$$

Ensuite, les métriques cumulées correspondent à la somme des métriques de branches, des branches qui forment le chemin. Le chemin le plus probable sera celui qui aura la métrique cumulée la plus faible. Le décodeur MV trouve alors l'ensemble des symboles de la constellation qui constituent le chemin le plus probable en résolvant la minimisation suivante :

$$\min_{c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2}, \dots, c_{T+Q,1}, c_{T+Q,2}} \sum_{t=1}^{T+Q} \sum_{j=1}^{N_r} |y_{t,j} - h_{j,1}c_{t,1} - h_{j,2}c_{t,2}|^2 \quad (2.112)$$

L'algorithme de Viterbi est le même que dans le cas des TCM, la principale différence est que pour les STTC on calcule une métrique de branche comme celle définie en (2.112), alors que dans le cas des TCM on se sert de la distance Euclidienne.

#### 2.8.4. Règles de construction et propriétés des codes STTC

Pour concevoir un « bon » STTC, il nous faut tenir compte des critères de conception des codes temps-espace énoncés précédemment. Le critère le plus important est celui du rang qui garantit un code de diversité maximale. Dans [36], pour un système à 2 antennes d'émission, si l'on souhaite obtenir un code à diversité maximale, les deux règles de conception suivantes sont suggérées :

- Les transitions qui partent d'un même état doivent différer sur le second symbole
  - Les transitions convergeant vers un même état doivent différer sur le premier symbole
- Cela impose un nombre minimum d'états pour la structure d'un treillis. Le lemme suivant donne une limite inférieure sur le nombre d'états à considérer dans un treillis, pour un rendement de code donné.

**Lemme 2.8.1** *Pour un code STTC de débit  $b$  bits/s/Hz et une diversité  $r$ , il est nécessaire que le treillis dispose d'au moins  $2^{b(r-1)}$  états.*

Donc, il est impossible de concevoir un treillis pour un code STTC avec moins de  $2^b$  branches par états, si on veut qu'il soit de diversité maximale. Nous verrons que les SOSTTC ne souffrent pas de cette limitation dans la partie les concernant.

Dans ce qui suit, nous allons vous montrer quelques exemples de STTC.

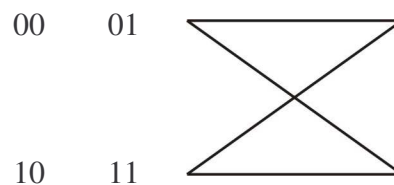


Figure 2.8 – STTC à 2 états utilisant une BPSK,  $r = 1$  bit/s/Hz

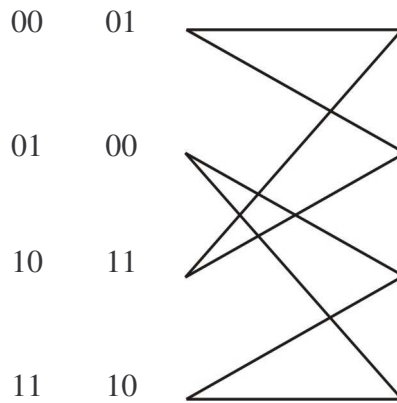


Figure 2.9 – STTC à 4 états utilisant une BPSK,  $r = 1$  bit/s/Hz

**Exemple 2.8.1 :** Un exemple de code STTC, à 2 états, utilisant une modulation BPSK et acheminant un débit de 1 bit/s/Hz est présenté en figure 2.8. Le CGD minimum pour ce code est de 16. Un exemple de deux mots de codes fournissant un CGD de 16, est proposé avec les couples des chemins suivants. Le premier chemin considéré reste dans l'état zéro durant deux transitions, donc il parcourt les états 000. Le mot de code correspondant est alors égal à :

$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

Alors que le second chemin part de l'état zéro vers l'état un, puis pour la deuxième transition, revient dans l'état zéro. Le chemin parcouru est donc 010 et le mot de code correspondant est :

$$\mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

Dans ce cas de figure, le calcul du CGD, donne 16.

**Exemple 2.8.2 :** Ici, nous parlons de la figure 2.9, pour laquelle le code STTC utilisant une modulation BPSK pour un débit de 1 bit/s/Hz, comporte 4 états dans le treillis. Le CGD minimum pour un tel code est de 32. Le couple de chemins 0000 et 0120 pour lesquels :

$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

nous donne un CGD de 32.

**Exemple 2.8.3 :** Un exemple de code STTC à 8 états, utilisant une modulation QPSK et acheminant un débit de 2 bits/s/Hz et présenté en figure 2.10.

**Exemple 2.8.4 :** Un exemple de code STTC à 8 états, utilisant une modulation 8-PSK et acheminant un débit de 3 bits/s/Hz et présenté en figure 2.11.



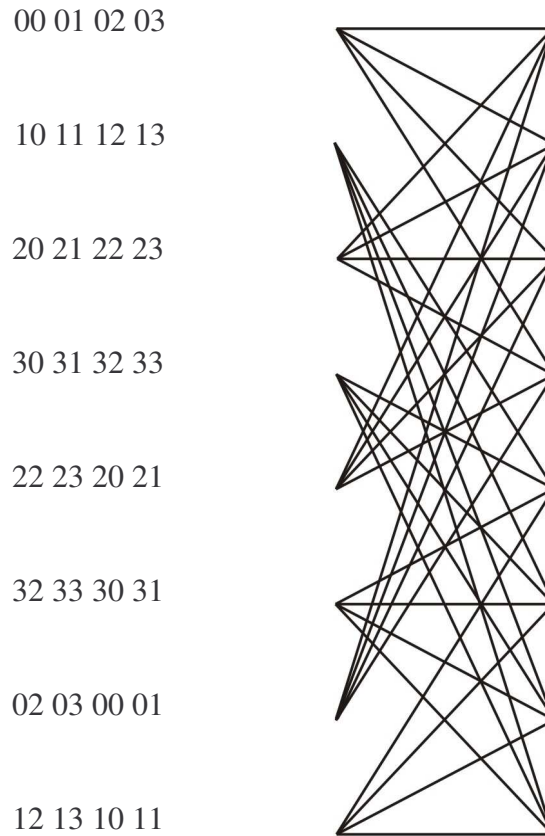


Figure 2.10 – STTC à 8 états utilisant une QPSK,  $r = 2$  bits/s/Hz

### 2.8.5. Amélioration des STTC

A la sortie d'un codeur en bloc, le code STBC est uniquement fonction des bits en entrée utilisés pour constituer ce bloc. Un code convolutif ou en treillis est différent, parce qu'il dispose d'une mémoire. Cela permet d'avoir en sortie de l'encodeur à un instant  $t$ , un code qui n'est pas uniquement fonction des bits présents aux même instant, en entrée du codeur, car il dépend également des bits utilisés précédemment. Cette dépendance, est liée à la profondeur de la mémoire du treillis.

Pour une constellation qui dispose de  $L = 2^b$  points, représentant  $b$  bits, un STBC code un bloc de  $Kb$  bits pendant  $T$  intervalles de temps. La sortie du codeur, pour les  $T$  intervalles de temps suivants sera uniquement une fonction des  $Kb$  nouveaux bits en entrée. En d'autres termes, comme le processus de codage en bloc n'a pas d'effet mémoire, les  $Kb$  bits en entrée du codeur ne participent qu'une seule fois à ce processus.

D'un autre côté, dans le cas des STTC, à cause de l'effet mémoire, tous les  $b$  bits en entrée participent au processus de codage  $Q+1$  fois. Une fois en entrée et  $Q$  fois au travers des différents états du treillis. Notons alors que les  $(Q+1)b$  bits en entrée, qui génèrent la sortie du codeur à un instant  $t$ , se chevauchent avec les  $(Q+1)b$  bits qui génèrent les symboles de sortie pendant un certain temps. Il n'y a aucun phénomène de chevauchement en STBC.

La sortie de codeur est constituée de  $N_t$  symboles à transmettre au travers des  $N_t$  antennes d'émission. Notons  $u_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,b}$ , les  $b$  bits en entrée du codeur STTC à un instant  $t$ . Les indices des symboles émis, peuvent être calculés en utilisant la formule :

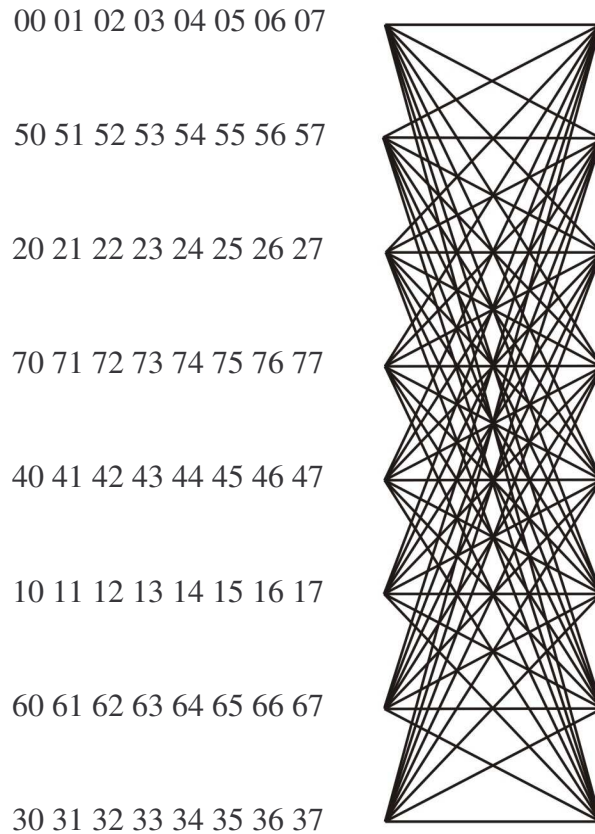


Figure 2.11 – STTC à 8 états utilisant une 8-PSK,  $r = 3$  bits/s/Hz

$$\left( i_{t,1}, i_{t,2}, \dots, i_{t,N_t} \right) = U_t \mathbf{G} \text{ mod } L \quad (2.116)$$

où

$$U_t = \left( u_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,b}, u_{t-1,1}, u_{t-1,2}, \dots, u_{t-1,b}, \dots, u_{t-Q,1}, u_{t-Q,2}, \dots, u_{t-Q,b} \right) \quad (2.117)$$

$\mathbf{G}$  représente la matrice génératrice du code STTC. Notez que le deuxième indice,  $n$ , dans l'expression de  $i_{t,n}$  indique le numéro de l'antenne d'émission, alors que celui de l'expression de  $u_{t,k}$ ,  $k$ , indique la position d'un bit en entrée.

L'équation (2.116) est une représentation du STTC. La représentation en treillis faite précédemment est donc équivalente à la représentation matricielle que nous venons d'introduire. Les exemples qui suivent permettent de faire le lien entre ces deux approches.

**Exemple 2.8.5 :** La matrice génératrice du code en figure 2.8 est donnée par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

Dans ce cas,  $Q=1$  et quatre bits sont utiles, à chaque intervalle de temps, pour générer les deux symboles à émettre en sortie. Considérons, pour le code de la figure 2.8 et la matrice génératrice (2.118), que la séquence binaire en entrée du codeur vaut par exemple 01110010. La figure 2.12 montre le chemin correspondant à une telle séquence. Notez que sur la figure nous avons rajouté les bits 00 à la fin, pour terminer le treillis dans l'état zéro.

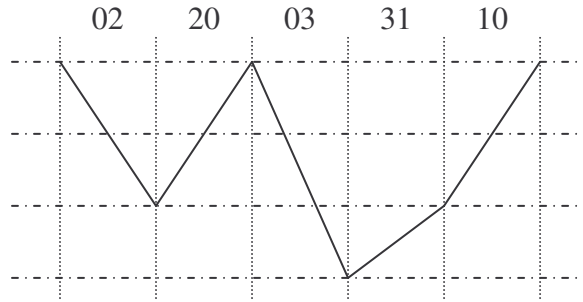


Figure 2.12 – Sortie du codeur, pour l'exemple 2.9.5 de la séquence 01110010

En utilisant (2.116) et la matrice génératrice (2.118), on peut alors retrouver le même ensemble de symboles transmis. Au temps  $t=1$ , nous avons :

$$(1000) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (02) \quad (2.119)$$

Donc, les symboles 1 et -1 sont émis à  $t=1$  au travers des antennes 1 et 2 respectivement. Au temps  $t=2$ , nous avons :

$$(0010) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (20) \quad (2.120)$$

Donc, les symboles -1 et 1 sont émis à  $t=2$  au travers des antennes 1 et 2 respectivement. Au temps  $t=3$ , nous avons :

$$(1100) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (03) \quad (2.121)$$

Donc, les symboles -1 et  $j$  sont émis à  $t=3$  au travers des antennes 1 et 2 respectivement. Au temps  $t=4$ , nous avons :

$$(0111) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (31) \quad (2.122)$$

Donc, les symboles  $-j$  et  $j$  sont émis à  $t=4$  au travers des antennes 1 et 2 respectivement. Au temps  $t=5$ , nous avons :

$$(0001) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (10) \quad (2.123)$$

Donc, les symboles  $j$  et 1 sont émis à  $t=5$  au travers des antennes 1 et 2 respectivement.

Avec cet exemple, on retrouve donc bien le chemin parcouru dans le treillis par la séquence 01110010.

La structure algébrique, présentée en (2.116) permet alors de chercher à l'aide d'un ordinateur de nouveaux codes STTC. Un certains nombres de designs STTC ont déjà été proposés [46], nous donnons certains d'entres eux dans ce qui suit.

**Exemple 2.8.6 :** Un STTC à 4 états, utilisant une modulation QPSK et émettant à  $r = 2$  bits/s/Hz conçu à partir de la matrice génératrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

est représenté sur la figure 2.13. Le CGD d'un tel code est de 8, supérieur à celui de la figure 2.8.

L'exemple qui suit est tiré de [49] :

**Exemple 2.8.7 :** Un autre exemple de treillis à 4 états à 2 bits/s/Hz utilisant une QPSK possédant la matrice génératrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

est représenté sur la figure 2.14. Le CGD de ce code est également de 8.

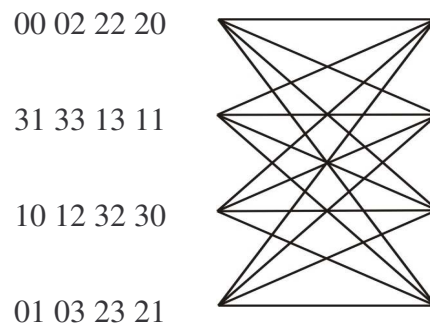


Figure 2.13 – STTC à 4 états,  $r = 2$  bits/s/Hz, utilisant une QPSK

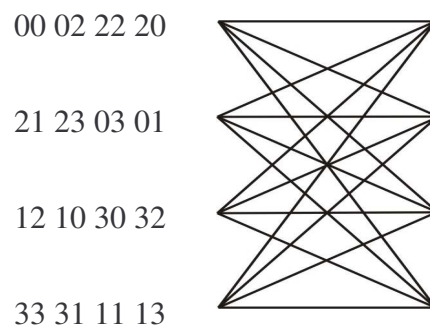


Figure 2.14 – STTC à 4 états,  $r = 2$  bits/s/Hz, utilisant une QPSK

**Exemple 2.8.8 :** Un treillis à 8 états pour un débit de 2 bits/s/Hz, utilisant une QPSK, peut être conçu à partir d'une matrice génératrice  $5 \times 2$ . Les éléments la constituant, représentent les indices des symboles QPSK et un exemple de l'une d'elle fournissant un CGD de 16 est donné par la matrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

**Exemple 2.8.9 :** Un STTC de 16 états pour transmettre 2 bits/s/Hz, utilisant une modulation QPSK avec un CGD de 32, peut être conçu en se servant de la matrice génératrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

**Exemple 2.8.10 :** Pour concevoir un treillis à 32 états, émettant à 2 bits/s/Hz en utilisant une modulation QPSK, une matrice génératrice  $7 \times 2$  est nécessaire. Un exemple de l'une d'entre elles avec un CGD 36 est donné par :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

**Exemple 2.8.11 :** Un treillis à 2 états, utilisé pour transmettre des symboles BPSK à 1 bit/s/Hz, peut se concevoir à partir de la matrice génératrice binaire suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

Le treillis correspondant, fournissant un CGD de 16, est décrit par la figure 2.15.

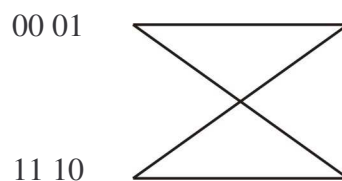


Figure 2.15 – STTC à 2 états, utilisant une BPSK,  $r = 1$  bit/s/Hz

**Exemple 2.8.12 :** Dans cet exemple, nous considérons toujours une modulation BPSK, utilisée dans un treillis à 4 états pour émettre à 1 bit/s/Hz. La matrice génératrice nécessaire doit être de dimension  $3 \times 3$ . Un exemple de l'une d'entre elles est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Nous allons utiliser cet exemple pour montrer comment ce construit la représentation du treillis. Dans ce cas, les paramètres du treillis valent :  $Q=2$  et  $b=1$ . Donc, le vecteur d'entrée  $U_t = (u_{t,1}, u_{t-1,1}, u_{t-2,1}) = (u_t, u_{t-1}, u_{t-2})$ , et les indices de branches sont calculés en se servant de (2.116). Tout d'abord, nous devons définir une convention pour connaître l'état du treillis à partir des bits aux temps  $t-2$  et  $t-1$ . Pour avoir quelque chose de similaire à la figure 2.9, nous utilisons la convention  $2u_{t-2} + u_{t-1}$  pour connaître le numéro de l'état. Ainsi, pour les branches qui partent de l'état zéro, nous avons  $u_{t-2} = u_{t-1} = 0$ . Dans ce cas, si le bit en entrée du codeur vaut zéro,  $U_t = (0, 0, 0)$  et si il vaut un,  $U_t = (1, 0, 0)$ . De la même façon, pour l'état un, nous avons  $u_{t-2} = 0, u_{t-1} = 1$ , ce qui donne soit  $U_t = (0, 1, 0)$ , si  $u_t = 0$ , soit  $U_t = (1, 1, 0)$ , si  $u_t = 1$ . Pour l'état deux, les vecteurs en entrée du codeur seront soit  $U_t = (0, 0, 1)$ , soit  $U_t = (1, 0, 1)$ . Finalement pour l'état trois, les deux derniers vecteurs restant pourront être soit  $U_t = (0, 1, 1)$ , ou soit  $U_t = (1, 1, 1)$ . En utilisant (2.116), nous déterminons les valeurs à affecter à chaque branches comme le montre la figure 2.16. Le CGD d'un tel code est de 48. Le couple de chemins 0000 et 0120 est un exemple pour lequel le CGD vaut 48. Pour son calcul, nous avons utilisé les mots de codes correspondants :

$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

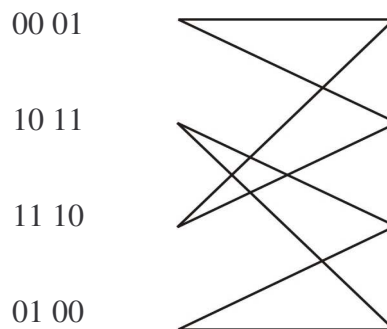


Figure 2.16 - STTC à 4 états, utilisant une BPSK,  $r = 1$  bit/s/Hz

**Exemple 2.8.13 :** Un code STTC à 8 états, utilisant une BPSK pour transmettre 1 bit/s/Hz peut être défini par la matrice génératrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

Le CGD minimum pour ce code vaut 80.

**Exemple 2.8.14 :** Pour concevoir un code STTC à 16 états, de CGD minimum 112, et transmettre 1 bit/s/Hz en utilisant une BPSK, il est possible d'utiliser la matrice génératrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

Le tableau 2.2, résume les résultats des meilleurs codes en treillis présentés.

Tableau 2.2 – CGD des meilleurs exemples de STTC

Débit bits/s/Hz	Nombre d'états	CGD minimum
1	2	16
1	4	48
1	8	80
1	16	112
2	4	8
2	8	16
2	16	32
2	32	36

### 2.8.6. Performances des codes STTC :

Dans ce paragraphe nous donnons les résultats de simulation des performances des différents exemples de STTC présentés précédemment. Nous supposons un canal de Rayleigh, quasi-statique, à évanouissement lent. Ainsi, les différents coefficients du canal sont des variables aléatoires Gaussiennes complexes, fixes durant l'émission de toute une trame de données. Nous considérons des paquets de longueur 150. Sur les courbes de résultats que nous présentons, figure le taux d'erreur par trame (FER) en fonction du SNR.

La figure 2.17 montre les résultats de simulation, pour un système utilisant deux antennes d'émission et une antenne de réception, et pour les codes représentés par les figures 2.6, 2.13 et 2.14. Tous ces codes ont des treillis constitués de quatre états et émettent 2 bits/s/Hz en utilisant une modulation QPSK. Ces codes STTC présentent les mêmes performances, mais ils ne possèdent pas le même CGD minimum. En fait, le CGD n'est pas le seul paramètre qui affecte les performances d'un code.

Par contre, lorsque le nombre d'antennes de réception devient égal ou supérieur à deux, le critère du CGD a de l'influence sur les performances des codes. En effet, comme le montre la figure 2.18, c'est le code qui présente le CGD minimum le plus élevé qui a les meilleures

performances. Ainsi, comme nous pouvons le voir, les STTC des figures 2.13 et 2.14 apportent une amélioration de 1 dB par rapport au STTC de la figure 2.6.

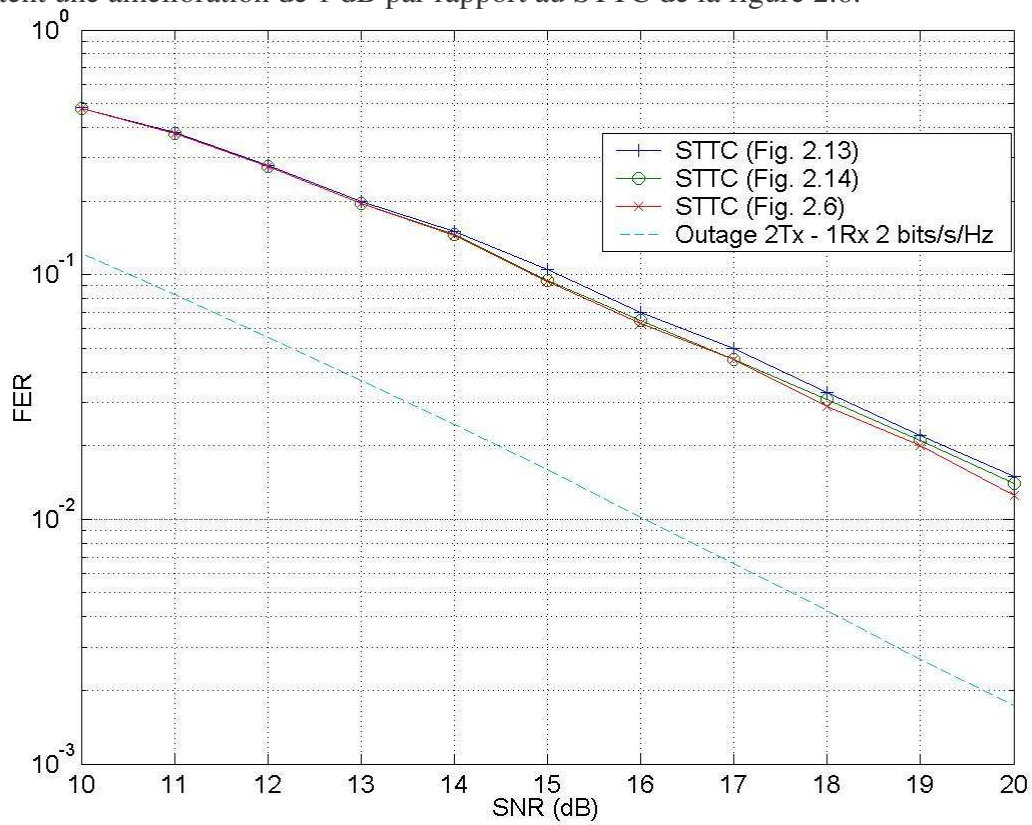


Figure 2.17 – FER en fonction du SNR, pour des STTC à 4 états, 2 Tx – 1 Rx,  $r = 2$  bits/s/Hz

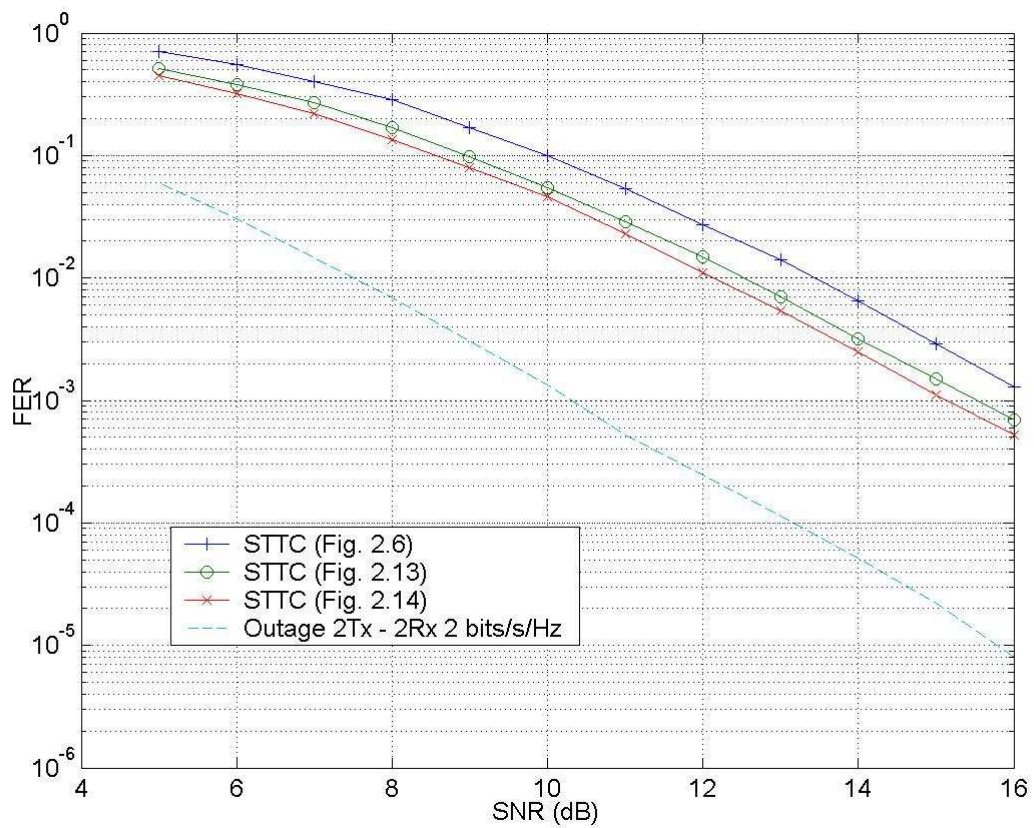


Figure 2.18 – FER en fonction du SNR, pour des STTC à 4 états, 2 Tx – 2 Rx,  $r = 2$  bits/s/Hz



Nous retrouvons ici, l'argument en [50], qui dit que le paramètre du CGD a une réelle influence uniquement lorsque le nombre d'antennes de réception est supérieur à un.

La figure 2.19 montre les résultats d'un système où le débit vaut 1 bit/s/Hz et où le nombre d'antennes de réception est de un. Les performances présentées concernent des treillis de deux et quatre états des figures 2.8, 2.15 et 2.16. Les comportements des codes à 1 bit/s/Hz et ceux des codes à 2 bits/s/Hz sont vraiment similaires. On constate également que lorsque le nombre d'états dans le treillis augmente, les performances des codes deviennent meilleures, mais en général, il y a un compromis à trouver entre, complexité du décodage (liée au nombre d'états du treillis) et performance du code. Les résultats de la figure 2.20 sont obtenus avec les mêmes paramètres que précédemment à la différence que le nombre d'antennes de réception est cette fois-ci égal à deux. On retrouve alors les mêmes conclusions que pour le cas 2 bits/s/Hz, à savoir que lorsque  $N_r > 1$ , le critère du CGD est une bonne indication pour les performances du code.

Dans nos simulations, nous avons présenté des treillis avec un nombre maximal d'états égal à 4, mais il est évident que si pour un code donné, on augmentait le nombre d'états du treillis, les performances n'en seraient que meilleures.

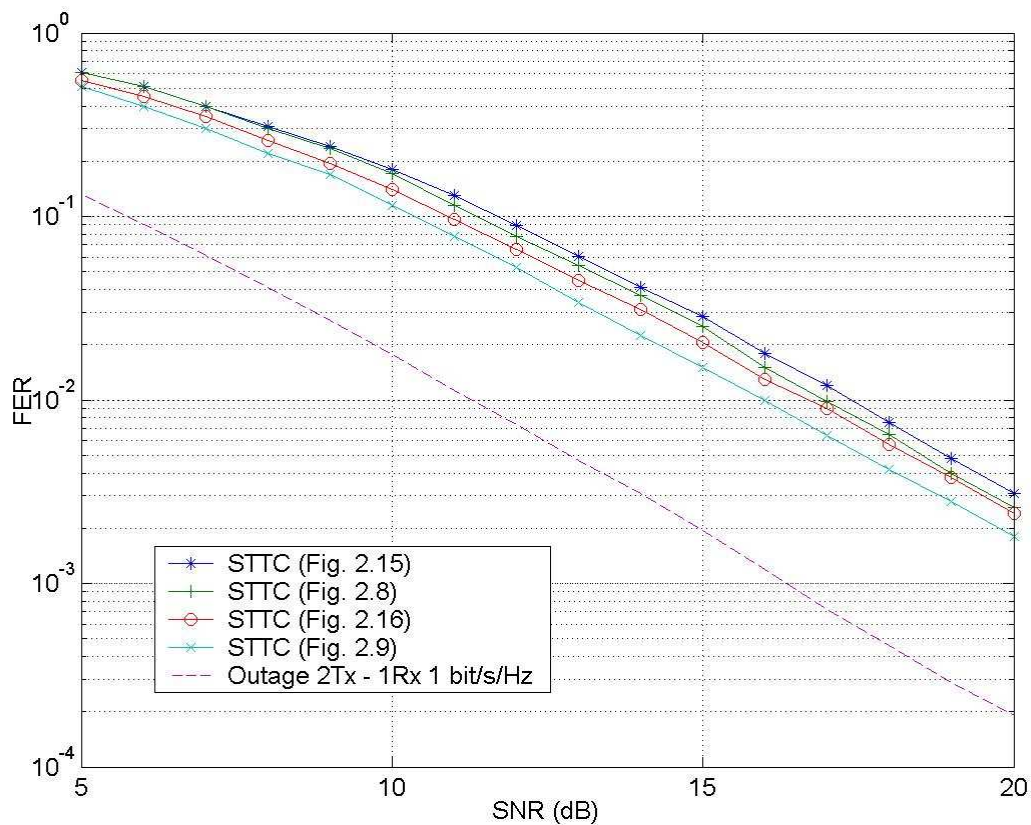


Figure 2.19 – FER en fonction du SNR, pour des STTC, 2 Tx – 1 Rx,  $r = 1$  bits/s/Hz

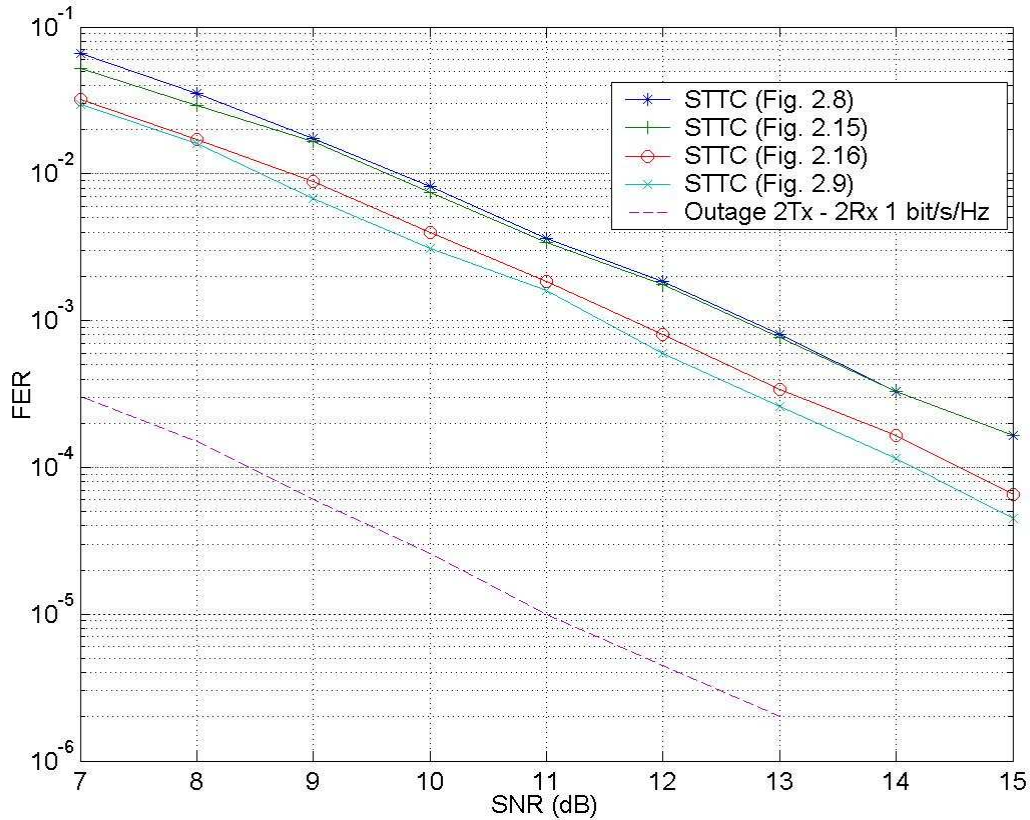


Figure 2.20 – FER en fonction du SNR, pour des STTC, 2 Tx – 2 Rx,  $r = 1$  bits/s/Hz

### 2.8.7. Conclusion

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à la construction des codes STTC pour lesquels, si le nombre d’antennes d’émission du système est de  $N_t$ , on doit assigner  $N_t$  symboles de la constellation sur toutes les transitions du treillis. Certaines contraintes existent pour la réalisation de ces codes, comme celle qui stipule que si l’on souhaite concevoir un code de débit  $b$  et de diversité  $r$  le treillis doit disposer impérativement d’un certain nombre d’états minimum. Il est possible de construire un STTC de façon manuelle, par l’intermédiaire de simulations ou alors en ce servant d’une matrice génératrice  $\mathbf{G}$ . Ces diverses méthodes de conception ont permis de montrer que certaines d’entre elles, pour une même complexité, étaient plus performantes. Le critère que nous avons privilégié ici dans les exemples de STTC synthétisés est basé sur le critère du déterminant et porte le nom de critère du minCGD. Il consiste à maximiser la valeur du déterminant du produit de la matrice des différences de code par sa transposée conjuguée pour chaque paire de mots de code émis depuis un état donné du treillis. Il est également possible d’augmenter les performances d’un code en treillis, en augmentant le nombre d’états, mais cela ne va pas sans diminuer la complexité du décodage. Il faut donc trouver pour ce genre de code, un compromis entre la complexité du décodage et les performances souhaitées.

# CHAPITRE 3      CONSTRUCTION DE CODES STBC

## BASES SUR DES STRUCTURES EN TREILLIS : SUPER ORTHOGONAL SPACE TIME TRELLIS CODES (SOSTTC)

---

3.1	Introduction	82
3.2	Pourquoi de tels codes ?	82
3.3	Les codes Super-Orthogonaux	83
3.4	Les codes STBC paramétrés	84
3.5	Set partitioning pour des mots de codes orthogonaux	85
3.6	Set partitioning pour des mots de codes super-orthogonaux	88
3.7	Super Orthogonal Space-Time Trellis Codes (SOSTTC)	89
3.8	Codage et décodage	94
3.9	Extension des codes SOSTTC à plus de deux antennes d'émission	100
3.9.1.	Cas d'une constellation réelle	100
3.9.2.	Cas d'une constellation complexe	100
3.10	Performances des codes SOSTTC	105
3.11	Conclusion	111

---

### 3.1 Introduction

Pour les communications sans fil à antennes multiples en émission et en réception, les schémas de modulation en treillis codés Temps-Espace se sont récemment imposés comme la stratégie de codage la mieux adaptée. En effet depuis les premières études proposées par Tarokh & *al* en [36], dans lesquelles ils donnent les principaux critères de construction et d'optimisation des STTC, avec notamment le calcul du rang et le critère à respecter sur le déterminant de la matrice de codage, un grand nombre de recherches ont été menées dans le but d'améliorer les performances des systèmes STTC [51]. Cependant, l'inconvénient pour construire ces systèmes, consiste à trouver l'équilibre entre le débit de transmission, la taille de la constellation, le gain de diversité et le nombre d'états du treillis, qui va permettre de construire un code avec un maximum de diversité pour une complexité de treillis réduite. Une solution de ce problème a été récemment exposée dans les travaux de Jafarkhani & *al* en [51] et par Fitz & *al* en [52]. En effet, ces chercheurs ont développé un nouveau codage utilisant une combinaison judicieuse des codes STTC et STBC, basée sur les règles de répartition d'Ungerboeck, permettant d'avoir en permanence, pour un système à deux antennes d'émission, une diversité maximale. Ainsi, pour la construction du treillis, le critère classique sur la distance euclidienne est remplacé par le critère sur le déterminant de la matrice de codage. Ce dernier consiste à maximiser le déterminant minimum obtenu par le calcul du produit de la différence entre deux matrices de codes à transmettre et sa transposée conjuguée. Ce critère est quantifié par le « *Coding Gain Distance* » (CGD). Après l'étape de répartition des différentes matrices de codes à transmettre, un treillis est construit, affectant pour une transition donnée un code en bloc particulier depuis un état du treillis donné. Ce faisant, nous sommes assurés en permanence de garder la diversité du code STBC tout en étant capables de construire un treillis avec un CGD maximum. Les codes ainsi obtenus portent le nom de *Super Orthogonal Space-Time Trellis Code* (SOSTTC) et ils améliorent nettement les performances des meilleurs codes STTC proposés par exemple, dans les travaux de Vucetic & *al* [53], et ce même pour des treillis de faible complexité (i.e. avec peu d'états). Récemment, Jafarkhani a proposé une extension de ses travaux initiaux pour deux antennes d'émission au cas de quatre antennes d'émission en utilisant un code STBC quasi orthogonal précédemment décrit en [54].

### 3.2 Pourquoi de tels codes ?

D'un côté, les codes STBC permettent d'avoir un maximum de diversité pour une faible complexité de décodage, et ils peuvent être utilisés dans des schémas de modulation à antennes d'émissions multiples, mais comme tels, ils ne fournissent pas de gain de codage. D'un autre côté, les codes STTC sont construits pour fournir un maximum de diversité et un gain de codage important, mais cela au détriment d'une grande complexité de décodage.

Un autre moyen pour obtenir d'importants gains de codage, consiste à concaténer un code externe en treillis, avec un code STBC. Dans cette configuration, les matrices de codes STBC générées, transformeront chaque état du treillis en un point de dimension spatiale différente de un. Le rôle de ce treillis, dit externe, sera alors de transmettre le code STBC présent sur l'état considéré. En [56], il est montré que sur un canal à évanouissement lent, le treillis peut être construit, en utilisant le concept dit de « *Set partitioning* » des codes de Ungerboeck, pour des canaux AWGN.

L'idée principale sous jacente des *Super Orthogonal Space-Time Trellis Codes* (SOSTTC) est de considérer les codes STBC, pour le treillis, comme des schémas de modulation à plusieurs antennes d'émission. Nous assignons alors un code STBC, avec une constellation de symbole spécifique, à toutes les transitions provenant d'un état donné. Donc,

en général, lorsqu'un code en bloc spatio-temporel de dimension  $T \times N_t$ , sera présent sur une branche du treillis émanant d'un état, cela reviendra à transmettre  $TN_t$  symboles, depuis  $N_t$  antennes d'émission et pendant  $T$  intervalles de temps. En faisant cela, il est garanti que nous conservons la diversité du code STBC correspondant. Notons que si l'on considère un code STTC pour lequel  $N_t$  symboles sont affectés à chaque branche du treillis, alors dans le cas des SOSTTC, choisir une branche du treillis sera équivalent à émettre  $N_t$  symboles depuis  $N_t$  antennes d'émission pendant un seul temps symbole. Le STBC qui sera émis au prochain temps symbole dépendra de la nouvelle branche de treillis sélectionnée. Ces codes sont construits dans le but de garantir le maximum de diversité et de rendement. Cependant, il n'est pas évident que le gain de codage soit également maximum. Dans ce chapitre nous présentons les codes SOSTTC et leurs règles de construction ainsi que leurs performances.

### 3.3 Les codes Super-Orthogonaux

Un exemple de code STBC à diversité et rendement maximum, est défini par la matrice ci-dessous :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Ce code est conçu pour un système à  $N_t = 2$  antennes d'émission et un nombre d'antennes de réception quelconque.

En utilisant une constellation comprenant  $L = 2^m$  points, le code émet  $2m$  bits tous les deux temps symbole. Pour chaque bloc,  $2m$  bits arrivent sur le codeur et il les transforme en deux symboles modulés,  $x_1$  et  $x_2$ . Le codeur émet  $x_1$  depuis l'antenne 1 et  $x_2$  depuis l'antenne 2 en un temps symbole, puis au temps symbole suivant, il émet  $-x_2^*$  depuis l'antenne 1 et  $x_1^*$  depuis l'antenne 2. Ce schéma de codage fournit du gain de diversité, mais aucun gain de codage. Le code (3.1) n'est pas le seul à fournir de telles performances, il en existe d'autres.

En effet, en multipliant un design orthogonal par une matrice unitaire, on obtient un autre design orthogonal. Ainsi le jeu de tous les codes utilisant seulement  $x_1$  et  $x_2$ , et leur conjugué (positif ou négatif), est listé ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_2^* & x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2^* & x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2^* & -x_1^* \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ x_2^* & -x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ -x_2^* & -x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ -x_2^* & -x_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cet ensemble de codes, porte le nom d'ensemble *Super-Orthogonal*, et nous le noterons  $C$ .

En utilisant uniquement un code constituant  $C$ , par exemple le premier, il est possible, pour une constellation donnée, de créer toutes les matrices orthogonales  $2 \times 2$  possibles. Pour rendre ce point plus évident, voyons par exemple le cas pour une constellation BPSK.

Il est possible de construire toutes les matrices orthogonales  $2 \times 2$  à partir uniquement de 2 codes appartenant à  $C$ . Par exemple, on peut créer 4 matrices  $2 \times 2$  à partir de (3.1) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Sachant que les 4 autres matrices orthogonales distinctes possibles vont être :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Pour obtenir ces matrices supplémentaires, on est parti de l'équation (3.1), que l'on a multipliée par :  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (matrice unitaire), ce qui nous permet d'utiliser alors un deuxième code appartenant à  $C$  :

$$\begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_2^* & x_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Celui-ci s'obtient par un décalage de phase de  $\pi$  du signal émis sur l'antenne une. Nous notons  $\mathcal{C}_2$ , le jeu des matrices de codes comprenant toutes les matrices (3.3) et (3.4).

Il est important de noter que le rang de la différence de n'importe quelle matrice distincte de (3.3) ou (3.4) est égal à 2, alors que le rang de la différence entre n'importe quelle matrice de (3.3) et n'importe quelle matrice de (3.4) vaut 1.

Tout cela nous amène à constater que multiplier un code STBC orthogonal, à gauche ou à droite, par une matrice unitaire, donne une autre matrice orthogonale. C'est pour cela que nous définissons la matrice unitaire suivante :

$$U = \begin{pmatrix} e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Donc, multiplier une matrice STBC par  $U$  à droite (ou à gauche), implique une rotation des symboles de la première colonne (ou de la première ligne), tout en conservant les propriétés d'orthogonalité. Cela nous amène donc à prétendre qu'il est possible de paramétrer un code STBC pour en obtenir d'autres. Voyons dans le paragraphe suivant comment cela est possible.

### 3.4 Les codes STBC paramétrés

En multipliant à droite le schéma d'Alamouti (3.1), par la matrice unitaire  $U$  (3.6), nous obtenons une nouvelle classe de designs orthogonaux :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, \theta) = \mathcal{G}(x_1, x_2) \cdot U = \begin{pmatrix} x_1 e^{j\theta} & x_2 \\ -x_2^* e^{j\theta} & x_1^* \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Notons que si  $\theta = 0$ , nous retombons sur la matrice (3.1). Ainsi, nous pouvons écrire que  $\mathcal{G}(x_1, x_2, 0) = \mathcal{G}(x_1, x_2)$ .

Comme précédemment pendant deux temps symboles successifs, sur l'antenne d'émission une, les symboles  $x_1 e^{j\theta}$  et  $x_2$  sont émis, puis sur la deuxième antenne d'émission, sont transmis  $-x_2^* e^{j\theta}$  et  $x_1$ . Nous considérons ici que la multiplication du code par  $U$ , n'étend pas la constellation initiale, ainsi tous les signaux émis partagent la même constellation. Nous devons donc choisir  $\theta$ , dans le but que quel que soit le symbole pris dans la constellation originale, sa rotation de la quantité  $\theta$  ne le change pas de constellation.

Sachant que pour une modulation  $L$ -PSK, la constellation des signaux à émettre est représentée par  $e^{j2\pi l/L}$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ , on peut alors sélectionner  $\theta$ , parmi toutes les valeurs tel que :  $\theta = 2\pi l'/L$  où  $l' = 0, 1, \dots, L-1$  sans craindre d'étendre la constellation  $L$ -PSK originale à de nouveaux points. Plus précisément, nous utiliserons,  $\theta = 0, \pi$  et  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , respectivement pour des modulations BPSK et QPSK.

En utilisant  $\mathcal{G}(x_1, x_2, 0)$  et  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \pi)$  pour le cas d'une BPSK, on peut générer toutes les matrices orthogonales  $2 \times 2$  de  $\mathcal{O}_2$ . En fait,  $\mathcal{G}(x_1, x_2, 0)$  représente le code (3.1) alors que  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \pi)$  représente le code (3.5). En utilisant (3.1) et (3.5), les symboles émis appartiendront tous au jeu :  $\{x_1, x_2, x_1^*, x_2^*, -x_1, -x_2\}$ . La combinaison de ces deux codes porte le nom de *Code Super-Orthogonal*.

En général, un code super-orthogonal consiste en l'association de plusieurs codes orthogonaux, comme ceux en (3.7). Donc, l'ensemble des codes orthogonaux est un sous-ensemble de l'ensemble des codes super-orthogonaux. Un cas particulier est lorsque le code super-orthogonal est composé d'un seul code orthogonal, par exemple uniquement  $\theta = 0$ .

Evidemment, le nombre de matrices orthogonales qu'un code super-orthogonal peut fournir est plus grand que, ou dans le plus mauvais cas égal, au nombre de matrices orthogonales que le code orthogonal fournit. Donc, comme le code super-orthogonal ne doit pas étendre la constellation initiale des signaux à transmettre, il augmente le nombre de matrices orthogonales disponibles. C'est son grand intérêt, mais c'est également crucial pour concevoir un code en treillis avec un rendement et une diversité maximum. Un autre avantage des codes super-orthogonaux réside dans le fait qu'ils sont paramétrables.

### 3.5 Set partitioning pour des mots de codes orthogonaux

Dans cette partie, nous expliquons comment trouver des ensembles de partitionnement « *Set partitioning* » pour des mots de code orthogonaux et nous montrons comment maximiser le gain de codage.

Si nous considérons deux mots de codes  $C^i$  et  $C^j$ , le gain de codage (CGD) d'après (2.39) est égal au déterminant minimum de la matrice  $A(C^i, C^j) = B^H(C^i, C^j)B(C^i, C^j)$ , parmi toute les paires de mots de codes distinctes. Nous utilisons alors le paramètre du CGD à la place de la distance Euclidienne, pour définir les différents *set partitioning* similaires à ceux de Ungerboeck dans le cas des TCM [47]. Notez qu'il est également possible d'utiliser le minimum de la trace de  $A(C^i, C^j)$ ,  $i \neq j$ , comme paramètre de mesure pour notre *set partitioning*.

Considérons tout d'abord, le cas où seul le code (3.1) est utilisé. Nous utilisons une modulation BPSK, et un partitionnement des mots de codes du code orthogonal, à 4 chemins (voir figure 3.1)

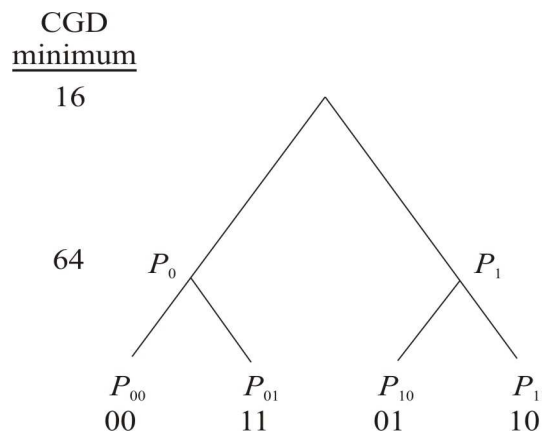


Figure 3.1 – *Set partitioning* pour BPSK

Les nombres aux extrémités de « l'arbre » représentent les indices BPSK. Chaque paire d'indices représente un mot de code  $2 \times 2$  construit à partir de la paire de symboles

correspondante dans la constellation. A la racine de l'arbre, le déterminant minimum de la matrice  $A(C^i, C^j)$  parmi toutes les paires de mots de codes est égal à 16. Au premier niveau du *set partitioning*, le déterminant minimum que l'on a pu obtenir est de 64. Il est obtenu grâce à un *set partitioning* pour lequel les sous ensembles  $P_0$  et  $P_1$  émettent des signaux différents sur les antennes d'émission. Au niveau de *set partitioning* suivant, nous disposons de 4 ensembles,  $P_{00}, P_{01}, P_{10}$  et  $P_{11}$ , dans lesquels sont affectés uniquement un seul mot de code. Un treillis à 4 états peut être construit à partir des règles de *set partitioning* de la figure 3.1, en se basant sur la structure en treillis de la figure 2.9.

Le meilleur *set partitioning* est celui pour lequel, le CGD minimum des ensembles à chaque niveau de partitionnement est maximum. Pour trouver des directives de partitionnement des ensembles, nous allons développer les formules de calcul de CGD. Pour une modulation  $L$ -PSK, les signaux transmis sont notés  $x = e^{jl\omega}$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ , ou  $\omega = 2\pi/L$ . Nous considérons alors deux paires distinctes de mots de code de la constellation  $(x_1^1 = e^{jk_1\omega}, x_2^1 = e^{jl_1\omega})$  et  $(x_1^2 = e^{jk_2\omega}, x_2^2 = e^{jl_2\omega})$ .  $C^1$  et  $C^2$  correspondent aux mots de codes orthogonaux  $2 \times 2$  obtenus respectivement à partir de  $(x_1^1 = e^{jk_1\omega}, x_2^1 = e^{jl_1\omega})$  et  $(x_1^2 = e^{jk_2\omega}, x_2^2 = e^{jl_2\omega})$ . Pour plus de clarté, lorsque nous parlerons de  $A(C^1, C^2)$  et  $B(C^1, C^2)$ , nous omettrons  $(C^1, C^2)$ . Ainsi :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e^{jk_1\omega} - e^{jk_2\omega} & e^{jl_1\omega} - e^{jl_2\omega} \\ e^{-jl_2\omega} - e^{-jl_1\omega} & e^{-jk_1\omega} - e^{-jk_2\omega} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 - 2\cos[\omega(k_2 - k_1)] - 2\cos[\omega(l_2 - l_1)] & 0 \\ 0 & 4 - 2\cos[\omega(k_2 - k_1)] - 2\cos[\omega(l_2 - l_1)] \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En utilisant (3.9), nous pouvons exprimer le CGD comme étant égal à :

$$\det(\mathbf{A}) = \{4 - 2\cos[\omega(k_2 - k_1)] - 2\cos[\omega(l_2 - l_1)]\}^2 \quad (3.10)$$

Pour le calcul du CGD, nous avons considéré ici uniquement une transition dans le treillis. Cependant, pour être plus précis dans les calculs de gain de codage, il s'avère plus rigoureux de calculer le minCGD d'un code en treillis en considérant la somme des CGD élémentaires pour deux chemins qui divergent puis reconvergent vers un même état dans le treillis. Cependant, comme nous allons le voir dans les formules qui suivent il suffira de maximiser le CGD entre les mots de codes impliqués dans chaque transition du treillis pour obtenir des partitionnements efficaces.

Si nous considérons 2 mots de codes qui divergent de l'état zéro pour y revenir après  $P$  transitions dans le treillis, la taille de la matrice  $\mathbf{B}$  correspondante, est égale à  $2P \times 2$ . En fait, la matrice de la différence des mots de codes  $\mathbf{B}$ , peut être représentée comme la concaténation de  $P$  matrices de différence, correspondant aux  $P$  transitions qui construisent le chemin du treillis. Nous notons l'ensemble des symboles de la constellations pour le premier mot de code  $(x_1^1, x_2^1)^p = (e^{jk_1^p\omega}, e^{jl_1^p\omega})$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$  et  $(x_1^2, x_2^2)^p = (e^{jk_2^p\omega}, e^{jl_2^p\omega})$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$  pour le deuxième. Nous pouvons alors définir la matrice  $\mathbf{B}^p$  comme la matrice de la différence des mots de codes de la  $p^{\text{ième}}$  transition. Ainsi  $\mathbf{A}^p = \mathbf{B}^{pH} \mathbf{B}^p$ , et pour les deux mots de code considérés, nous obtenons sur les  $P$  transitions :



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1 \\ \mathbf{B}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^P \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

En utilisant (3.11), nous pouvons calculer la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^H \cdot \mathbf{B} = \sum_{p=1}^P \mathbf{A}^p \quad (3.12)$$

Donc, cette matrice est une matrice diagonale, et le CGD sur les  $P$  transitions, entre les mots de code ci-dessus vaut alors :

$$\det(\mathbf{A}) = \left\{ \sum_{p=1}^P 4 - 2 \cos[\omega(k_2^p - k_1^p)] - 2 \cos[\omega(l_2^p - l_1^p)] \right\}^2 \quad (3.13)$$

En se basant sur les résultats (3.10) et (3.13), on s'aperçoit que le calcul du CGD pour un STTC est essentiellement régi par le calcul du CGD pour les branches parallèles ce qui justifie de maximiser le CGD entre les mots de codes impliqués dans chaque transition du treillis. Les *set partitioning* optimaux pour les modulations BPSK, QPSK et 8-PSK sont proposés sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3 respectivement.

CGD  
minimum

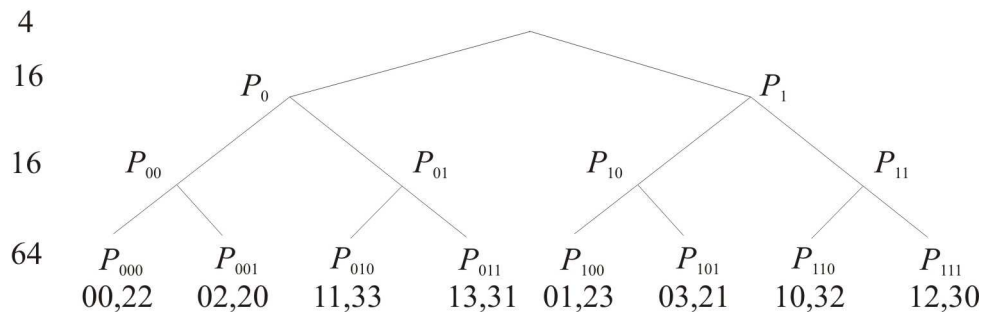


Figure 3.2 – *Set partitioning* pour une QPSK, chaque paire de nombres représente les indices des symboles utilisés pour le STBC

CGD  
minimum

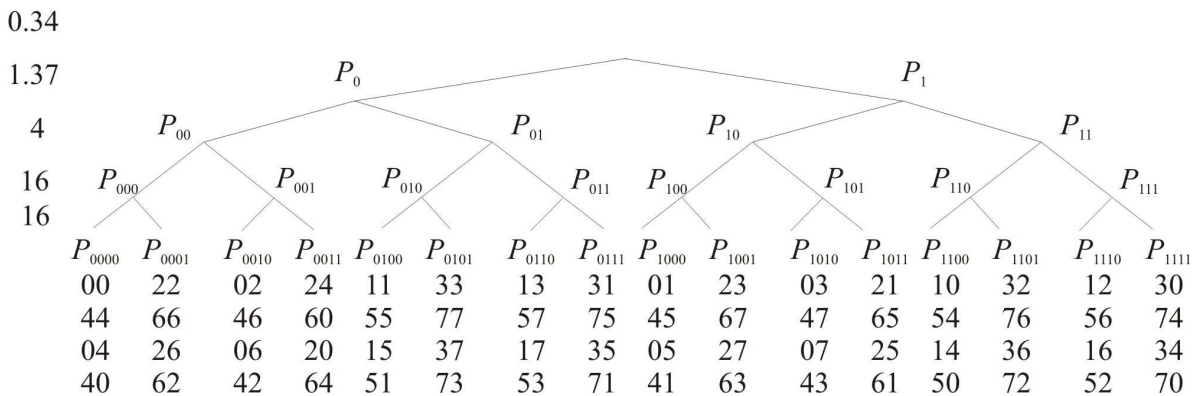


Figure 3.3 – *Set partitioning* pour une 8-PSK, chaque paire de nombres représente les indices des symboles utilisés pour le STBC

Il apparaît qu'en augmentant la distance Euclidienne, entre les premiers symboles de chaque paire, le CGD augmente. Celui-ci s'améliore également lorsqu'on augmente la distance Euclidienne entre les seconds symboles de chaque paire. Donc, pour construire de façon optimale un *set partitioning*, il suffit d'avoir sur chaque extrémité de l'arbre, des mots de codes entre lesquels les distances Euclidiennes sont maximisées.

Si l'on considère le cas de la QPSK (figure 3.2), où les symboles  $x = e^{j\pi l/2}$ ,  $l=0, 1, 2, 3$ , de la constellation QPSK valent  $x=1, j, -1, -j$  respectivement lorsque,  $k=0, 1, 2, 3$ , alors lorsque  $|k_1 - k_2| = 2$  et  $|l_1 - l_2| = 2$  (3.10), le *maximum minimum* CGD est de 64. Ceci est la justification du choix des extrémités de l'arbre présenté sur la figure 3.2.

Au second niveau de l'arbre, il est impossible d'avoir en même temps dans tous les cas,  $|k_1 - k_2| = 2$  et  $|l_1 - l_2| = 2$ . Ici, le meilleur CGD que l'on peut atteindre est de 16, et il s'obtient lorsque  $|k_1 - k_2| = 2$  et  $|l_1 - l_2| = 0$  ou lorsque  $|k_1 - k_2| = 0$  et  $|l_1 - l_2| = 2$ . Pour construire les différents niveaux du *set partitioning*, il faut donc chercher quelles sont les associations qui maximisent au mieux le CGD minimum. On utilise les mêmes stratégies de conception pour les autres constellations.

Comme nous pouvons le voir sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3, le CGD minimum augmente (ou ne change pas) lorsque l'on se déplace de la racine aux extrémités de l'arbre de *set partitioning*. A chaque niveau de partitionnement de l'arbre, on peut définir un treillis de rendement spécifique. Pour obtenir un bon gain de codage, il faudra utiliser de la redondance ce qui aura comme conséquence de faire chuter le rendement. Dans ce qui suit, nous allons voir comment construire des codes en treillis, sans pour autant sacrifier le rendement.

### 3.6 Set partitioning pour des mots de codes super-orthogonaux

Dans cette partie nous allons construire des *set partitioning* pour des codes super-orthogonaux, et montrer comment maximiser le gain de codage sans sacrifier le rendement du code.

Construire un code basé sur un ensemble super-orthogonal, se fait de la façon suivante. Nous assignons un code STBC à toutes les transitions divergeant d'un état. Les états adjacents se voient quant à eux affectés d'autres codes STBC, constituant le code super-orthogonal. Nous pouvons alors assigner le même code STBC aux branches qui convergent vers un même état. Cela permet d'assurer que toutes les paires de mots de codes divergeant (ou émergeant) d'un état, fournissent une diversité maximale, parce que chaque paire fait partie d'un même code orthogonal ayant le même paramètre de rotation  $\theta$ .

Comme pour le cas des designs orthogonaux, il reste à faire le *set partitioning*, tel que le CGD minimum soit maximisé à chaque niveau du partitionnement. Ce *set partitioning* doit être fait pour tous les mots de codes  $2 \times 2$  orthogonaux et pour toutes les rotations possibles. En d'autres termes, nous devons partitionner les ensembles de toutes les matrices  $2 \times 2$  générées par le code (3.7).

En se basant sur les critères de partitionnement présentés précédemment, nous devons d'abord nous assurer que le code est à diversité maximale. Donc, nous partitionnons tout d'abord l'ensemble de tous les mots de code, en sous ensembles ayant le même angle de rotation  $\theta$ . En d'autres termes, la première étape du partitionnement est basée sur le paramètre de rotation. Ensuite, nous devons partitionner l'ensemble de tous les mots de code de même angle de rotation, comme nous l'avons fait pour le cas  $\theta = 0$ . Dans ce qui suit, nous montrons que chercher un *set partitioning* pour des ensembles de paramètre de rotation différent, revient en fait à construire le même arbre de partitionnement que celui déjà réalisé pour le design orthogonal où  $\theta = 0$  (voir paragraphe précédent).

Nous considérons deux paires distinctes de symboles dans la constellation,  $(x_1^1 = e^{jk_1\omega}, x_2^1 = e^{jl_1\omega})$  et  $(x_1^2 = e^{jk_2\omega}, x_2^2 = e^{jl_2\omega})$ . Nous notons les mots de codes correspondants par  $\mathbf{C}^{\theta^1}$  et  $\mathbf{C}^{\theta^2}$ , et la matrice de la différence des mots de codes,  $\mathbf{B}^\theta$ . Pour les transitions parallèles dans le treillis, nous avons donc :

$$\mathbf{B}^\theta = \begin{pmatrix} e^{jk_1\omega} e^{j\theta} - e^{jk_2\omega} e^{j\theta} & e^{jl_1\omega} - e^{jl_2\omega} \\ e^{-jl_2\omega} e^{j\theta} - e^{-jl_1\omega} e^{j\theta} & e^{-jk_1\omega} - e^{-jk_2\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{U}$  représente la matrice de rotation (3.6) et  $\mathbf{B}$  la matrice (3.8) pour laquelle  $\theta = 0$ . Pour calculer le CGD, nous avons besoin d'exprimer la matrice  $\mathbf{A}^\theta = \mathbf{B}^{\theta^H} \cdot \mathbf{B}^\theta$  en utilisant (3.14).

$$\mathbf{A}^\theta = \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{D}^H \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad (3.15)$$

Où  $\mathbf{U}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$  se démontre facilement par multiplication des matrices et avec  $\mathbf{A} = \mathbf{D}^H \cdot \mathbf{D}$ , la matrice diagonale calculée en (3.8).

Comme le montre (3.15), le CGD entre deux mots de codes est seulement fonction des symboles de la constellation, et ne change pas quelque soit la valeur de  $\theta$ . Nous pouvons donc utiliser la formule développée dans le paragraphe précédent pour calculer les CGD. C'est ainsi que le partitionnement optimum pour  $\theta = 0$ , présenté précédemment, sera également optimum pour les autres valeurs de  $\theta$ .

Pour réaliser le *set partitioning* d'un code super-orthogonal, le premier niveau de partitionnement sera basé sur le paramètre de rotation  $\theta$ , et les suivants sur les paires de mots de codes.

La figure 3.4 illustre le *set partitioning* d'un code super-orthogonal dans le cas d'une modulation BPSK, utilisant les angles de rotation 0 et  $\pi$ . Contrairement à la figure 3.1, nous représentons les matrices  $2 \times 2$  au lieu des indices, aux extrémités de l'arbre de partitionnement. Les lettres en exposant, sur la figure 3.4, représentent les angles de rotation. L'arbre de la moitié gauche de la figure 3.4, est le même que celui de la figure 3.1, pour  $\theta = 0$ , tandis que celui sur la moitié droite diffère uniquement de  $\theta$ , car dans cette partie l'angle de rotation vaut  $\pi$ .

CGD  
minimum

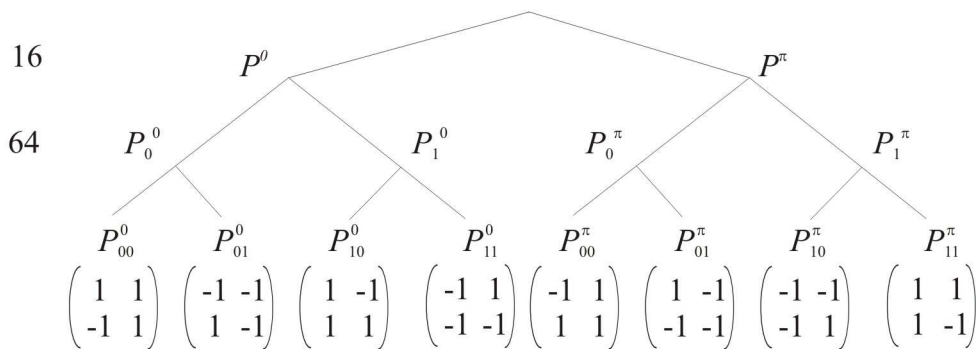


Figure 3.4 – Arbre complet de partitionnement d'un code super-orthogonal, pour une modulation BPSK et des angles de rotation, 0 et  $\pi$

### 3.7 Super Orthogonal Space-Time Trellis Codes (SOSTTC)

Dans ce paragraphe, nous montrons comment utiliser les schémas de partitionnement proposés précédemment pour construire des codes en treillis de diversité et de rendement

maximum. Nous allons commencer par présenter quelques exemples pour pouvoir proposer des règles générales de construction de codes SOSTTC, pour un treillis donné et un rendement désiré.

Dans tous les exemples de codes SOSTTC que nous proposons, nous attribuons à chaque branche du treillis un sous-ensemble. Chaque sous-ensemble est composé d'un certain nombre de matrices  $2 \times 2$ . Comme nous l'avons expliqué précédemment, à un sous-ensemble correspond, un paramètre de rotation et un ensemble de paires de symboles de la constellation. Si nous notons  $\theta$  le paramètre de rotation, la matrice STBC  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \theta)$  (3.7) sera celle à émettre. Pour une rotation  $\theta$  donnée, l'ensemble comprenant toutes les paires de symboles possibles, est le même que celui déjà présenté pour  $\theta = 0$ , pour lequel les figures 3.1, 3.2 et 3.3 ont été construites. Par exemple,  $P_{10}^\pi$  pour une QPSK, correspond à la matrice STBC,  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \pi)$  et au sous-ensemble  $P_{10}$  de la figure 3.2.

**Exemple 3.1 :** Sur la figure 3.5 un exemple de code SOSTTC à 4 états est donné. Ici, nous montrons comment représenter de deux façons le même code. A gauche, la représentation est explicite, tandis qu'à droite on utilise des indices et des exposants pour caractériser le code STBC utilisé dans chaque état. Dans cet exemple, quand nous utilisons une BPSK, le rendement du code est de 1, et le set partitioning correspondant et celui présenté en figure 3.1. Nous utilisons  $\mathcal{G}(x_1, x_2, 0)$  lorsque nous partons des états 0 ou 2 et  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \pi)$  lorsque nous partons des états 1 ou 3. Le CGD minimum d'un tel code est de 64, comme mentionné sur la figure 3.1.

Si maintenant, nous utilisons une modulation QPSK, la figure 3.5 montre un partitionnement utilisable, pour un treillis à 4 états et un rendement de 2 bits/s/Hz. Le CGD minimum vaut alors 16, ce qui est quatre fois supérieur à celui obtenu dans [36].

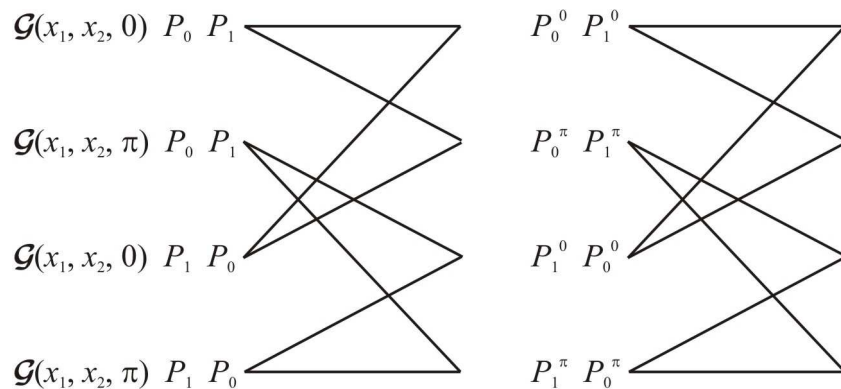


Figure 3.5 – SOSTTC à 4 états,  $r = 1$  bit/s/Hz en BPSK, et  $r = 2$  bits/s/Hz en QPSK

**Exemple 3.2 :** La figure 3.6 montre un code SOSTTC de rendement 3 bits/s/Hz, utilisant une modulation 8-PSK, correspondant au set partitioning de la figure 3.3. Le CGD minimum pour ce code est de 2.69.

**Exemple 3.3 :** La figure 3.7 montre que pour des codes utilisés dans un treillis à 2 états, nous obtenons pour une modulation BPSK (1 bit/s/Hz) un CGD de 48 et que pour une QPSK (2 bits/s/Hz) on arrive à un CGD de 16. Notez qu'il n'y a pas d'équivalent pour un code STTC à 2 états en QPSK.

**Exemple 3.4 :** Ici, la figure 3.8 illustre un code SOSTTC à 8 états, pour une modulation 8-PSK (3 bits/s/Hz). Le CGD d'un tel code est de 4, alors que son équivalent en [36] possède un CGD égal à 2.

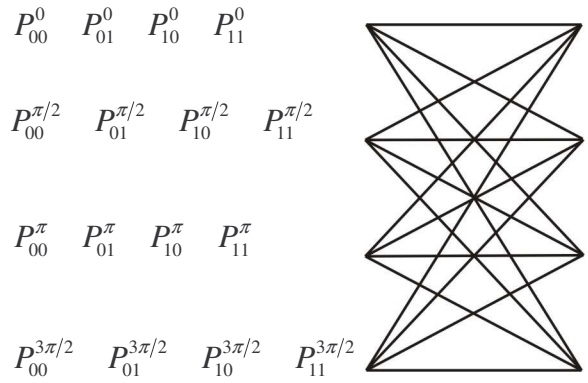


Figure 3.6 – SOSTTC à 4 états,  $r = 3$  bits/s/Hz (8-PSK)

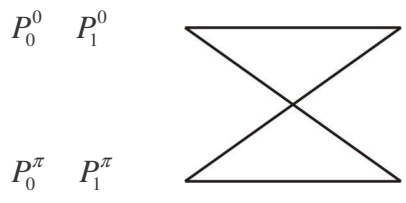


Figure 3.7 – SOSTTC à 2 états,  $r = 1$  bit/s/Hz en BPSK, et  $r = 2$  bits/s/Hz en QPSK

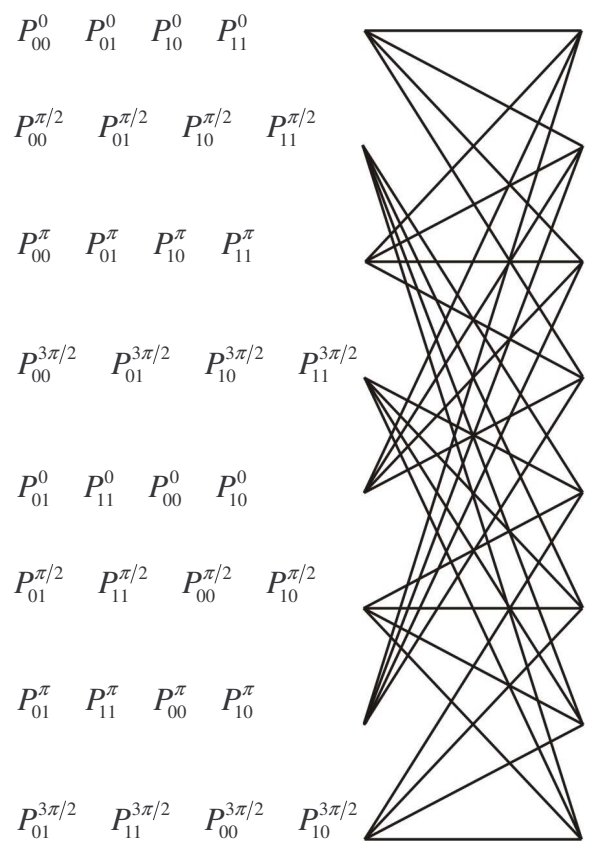


Figure 3.8 – SOSTTC à 8 états,  $r = 3$  bits/s/Hz (8-PSK)

Comme des codes basés sur des choix de paramètres de rotation différents, fournissent le même gain de codage, il existe quelques degrés de liberté dans le choix des paramètres de rotation dans le cas de l'exemple 3.4.. Par exemple le code à 8 états et 3 bits/s/Hz, présenté en figure 3.9, fournit les mêmes performances que celui en figure 3.8. Cela vient du fait que dans ce cas, nous disposons d'assez de matrices orthogonales  $2 \times 2$  pour concevoir des treillis similaires sur la structure, le rendement et les performances, mais pas sur les matrices de codes orthogonales.

Pour éviter les codes catastrophiques, une même information binaire en entrée ne doit pas engendrer des mots de codes redondants sur les différents états. Pour obtenir cela, les paramètres de rotation affectés sur les différents états ne doivent pas être les mêmes, ou alors, ce sont les sous-ensembles assignés qui doivent diverger. Une stratégie de codage consiste à prendre un petit nombre de paramètres de rotation pour créer le nombre voulu de matrice orthogonale, puis de faire des permutations dans les sous-ensembles lorsque plusieurs se voient assigner le même paramètre de rotation (figure 3.8). Une autre stratégie de construction consiste à assigner à chaque état un paramètre de rotation différent, ainsi il n'est pas nécessaire de faire des permutations sur les sous-ensembles (figure 3.9). Si l'on souhaite augmenter le nombre d'états, il sera alors possible de combiner ces deux stratégies pour créer des codes SOSTTC avec plus d'états. Il faudra tout de même faire attention dans le choix des angles, car certains d'entre eux peuvent entraîner un faible CGD. En effet, il est possible par exemple de créer un code pour lequel le CGD sur les transitions parallèles n'est pas optimal.

Comme pour les codes STTC, pour construire les codes SOSTTC, il y a toujours un compromis à trouver entre, le gain de codage et la complexité du treillis liée au nombre d'états. Un code peut être construit de façon systématique à partir des *set partitioning* présentés sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3. Les règles pour assigner les différents ensembles sur les différentes transitions sont similaires aux règles de construction générales des schémas MTCM présentées en [47]. D'abord on fixe le rendement, puis on sélectionne la constellation et on utilise le *set partitioning* correspondant. Bien entendu, le choix de la constellation fixe les paramètres de rotation qui peuvent être utilisables, car on ne souhaite pas étendre la constellation des signaux à transmettre. Comme nous l'avons présenté, l'algorithme de *set partitioning* est basé sur deux étapes, que nous allons décrire dans ce qui suit.

En utilisant les valeurs correctes pour  $\theta$  dans (3.7), nous définissons les mots de codes utilisables de l'ensemble super-orthogonal. Ensuite, nous affectons un code orthogonal de l'ensemble super-orthogonal à toutes les transitions depuis un état donné. Pour éviter un code catastrophique, les sous-ensembles sont affectés de telle façon que la même entrée binaire sur différents états, ne corresponde pas au même mot de code en sortie. Comme le processus de *set partitioning* est fait pour maximiser le CGD minimum à chaque niveau de partitionnement, le gain de codage des transitions parallèles du code SOSTTC considéré sera bien entendu maximum.

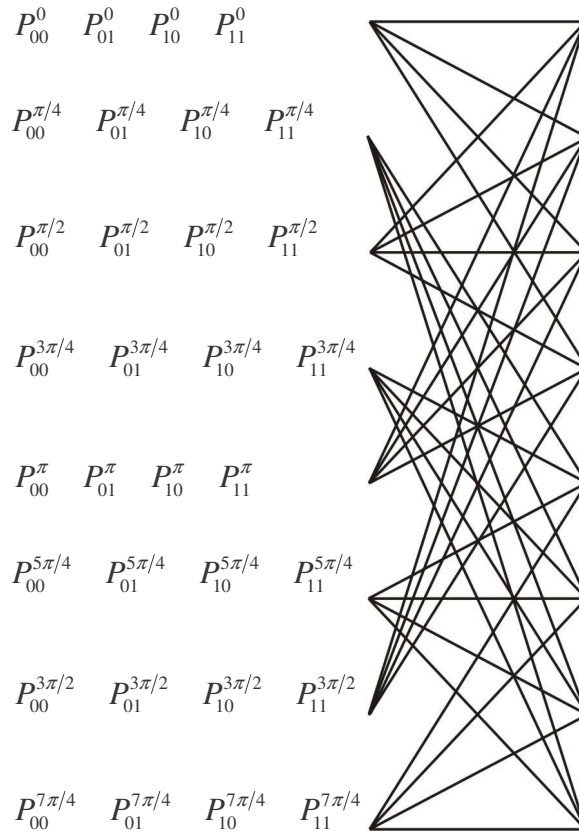


Figure 3.9 – SOSTTC à 8 états,  $r = 3$  bits/s/Hz (8-PSK)

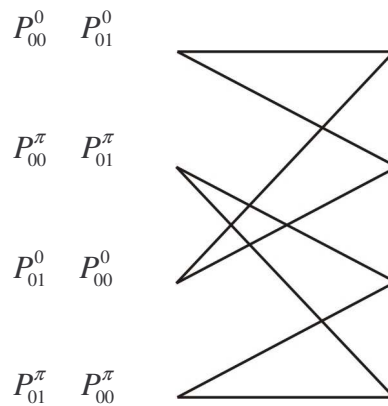


Figure 3.10 – Code SOSTTC à 4 états,  $r = 2.5$  bits/s/Hz (8-PSK)

Contrairement à la construction de certains codes, il est possible de créer de façon systématique un code SOSTTC, pour un treillis et un rendement arbitraire, en utilisant les *set partitioning* présentés et les stratégies de conception. Alors que précédemment nous avons donné des exemples de codes à rendement maximum, il est possible de créer des codes de rendement moindre pour obtenir de meilleurs gains de codage. La méthode de construction de tels codes est exactement la même que précédemment. L'exemple d'un tel code est fourni juste en dessous.

**Exemple 3.5 :** Un code à 4 états pour un rendement de 2.5 bits/s/Hz, utilisant une modulation 8-PSK, est présenté figure 3.10. Le CGD d'un tel code est de 4, alors que sur la figure 3.6, où le rendement est de 3 bits/s/Hz le CGD est de 2.69. Donc on s'aperçoit qu'il est possible d'améliorer le gain de codage, si on sacrifie le rendement du code.

La table 3.1 résume les différentes valeurs de CGD obtenues dans les différents exemples proposés.

Table 3.1 – Valeurs de CGD pour différents codes

Figure	Nombre d'états	Débit (bits/s/Hz)	CGD minimum
3.5 (BPSK)	4	1	64
3.5 (QPSK)	4	2	16
3.10	4	2.5	4
3.6	4	3	2.69
3.7 (BPSK)	2	1	48
3.7 (QPSK)	2	2	16
3.8 et 3.9	8	3	4

Il est évident qu'utiliser la méthode de codage des codes super-orthogonaux en treillis, ne permet pas seulement de créer de nouveaux designs, qui n'existent pas dans le cas STTC, elle permet également d'augmenter considérablement le CGD. Par exemple, considérons un code à  $r = 2$  bits/s/Hz. En se basant sur le lemme 2.8.1, il n'existe pas de code STTC à 2 états ou  $r$  soit égal à 2 bits/s/Hz, alors qu'un tel cas en SOSTTC est fourni dans l'exemple 3.3. En effet, en se servant des méthodes décrites dans le paragraphe 2.8, pour concevoir un tel code STTC, à maximum de diversité, le nombre d'états minimum doit être de 4.

Une comparaison des performances des codes STTC et SOSTTC sera effectuée dans le paragraphe 3.10. Regardons désormais les aspects de codage et de décodage des SOSTTC.

### 3.8 Codage et décodage

Le système que nous considérons dans cette partie est constitué de deux antennes d'émission. Donc, si une trame des données contient  $2Lm$  bits,  $L$  blocs orthogonaux ou alors  $2L$  symboles sont transmis. La transmission d'une trame commence toujours dans l'état zéro et doit également se terminer dans cet état. Pour garantir cela, si la mémoire du treillis est de  $Q$ ,  $2Q$  symboles ( $Q$  blocs) additionnels vont être nécessaire à la fin de chaque trame.

Nous utilisons la notation  $l = 1, 2, \dots, L+Q$  pour indexer la  $l^{\text{ième}}$  transition du  $l^{\text{ième}}$  bloc orthogonal. Donc, si  $S_l$  représente l'état du  $l^{\text{ième}}$  bloc orthogonal, nous savons que  $S_1 = S_{L+Q+1} = 0$ .

Pour émettre les  $2b$  bits du bloc  $l$ , nous formons tout d'abord à partir de ces derniers, les symboles  $x_1^l$  et  $x_2^l$  correspondants. Le paramètre de rotation utilisé dans l'état  $S_l$  sera noté



$\theta^l$ . Les symboles et le paramètre de rotation sélectionnés, servent à la transmission pendant deux intervalles de temps.

Ainsi, pendant le premier intervalle de temps de transmission du bloc  $l$ , les symboles  $x_1^l e^{j\theta^l}$  et  $x_2^l$  sont transmis respectivement depuis la première et la deuxième antenne, alors que pendant l'intervalle de temps suivant, c'est au tour de  $-(x_2^l)^* e^{j\theta^l}$  et  $(x_1^l)^*$  de subir la même opération. Pour l'émission d'une trame, tout ceci a lieu durant  $L + Q$  intervalles de temps, sachant que les  $Q$  derniers blocs garantissent de finir le treillis dans l'état zéro.

Comme pour le cas des codes STTC, un décodage à maximum de vraisemblance permet de trouver les chemins les plus probables, sachant que l'on part de l'état zéro et qu'on y revient après  $L + Q$  blocs. Chaque état de transition correspond à l'émission de deux symboles pendant deux intervalles de temps et depuis deux antennes d'émission. Considérons que le signal est reçu sur l'antenne  $j$ , nous notons  $y_{j,1}^l$  et  $y_{j,2}^l$ , les signaux reçus durant deux intervalles de temps symboles successifs. Les coefficients du canal de propagation pendant l'émission du bloc  $l$ , entre les antennes 1 et 2 d'émission et l'antenne  $j$  de réception sont notés  $h_{j,1}$  et  $h_{j,2}$ . Ainsi au récepteur, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} y_{j,1}^l = h_{j,1} x_1^l e^{j\theta^l} + h_{j,2} x_2^l + n_{j,1}^l \\ y_{j,2}^l = -h_{j,1} (x_2^l)^* e^{j\theta^l} + h_{j,2} (x_1^l)^* + n_{j,2}^l \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $n_{j,1}^l$  et  $n_{j,2}^l$  représentent les échantillons de bruit du bloc  $l$ .

L'algorithme de Viterbi peut être utilisé pour le décodage MV du code SOSTTC. Comme il existe des transitions parallèles dans le cas des codes SOSTTC, à chaque étape de décodage, nous devons trouver la meilleure transition parmi toutes les transitions parallèles. Ainsi, nous utilisons la meilleure transition pour calculer la métrique de branche dans l'algorithme de Viterbi. La métrique de branche du bloc  $l$  sera alors égale à :

$$\sum_{j=1}^{N_r} \left| y_{j,1}^l - h_{j,1} x_1^l e^{j\theta^l} - h_{j,2} x_2^l \right|^2 + \left| y_{j,2}^l - h_{j,1} (x_2^l)^* e^{j\theta^l} - h_{j,2} (x_1^l)^* \right|^2 \quad (3.17)$$

En développant la métrique précédente, et en supprimant les termes constants, il en résulte la métrique suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_r} 2 \operatorname{Re} \left\{ y_{j,2}^l h_{j,1}^* (x_2^l)^* e^{-j\theta^l} - y_{j,2}^l h_{j,2}^* x_1^l - y_{j,1}^l h_{j,1}^* (x_1^l)^* e^{-j\theta^l} - y_{j,1}^l e^{j\theta^l} h_{j,2}^* (x_2^l)^* \right\} \quad (3.18)$$

Pour tous les blocs, le paramètre de rotation, le canal de propagation, et le signal reçu sont connus au récepteur. Donc, la métrique de branche (3.18) est fonction seulement du signal transmis et nous la noterons,  $2\mathbf{J}^l(x_1^l, x_2^l)$ .

La première étape consiste donc à trouver la paire  $(x_1^l, x_2^l)$  parmi toutes les transitions parallèles qui minimise la fonction  $\mathbf{J}^l(x_1^l, x_2^l)$ . Comme le code STBC est orthogonal, on peut utiliser le fait que :

$$\mathbf{J}^l(x_1^l, x_2^l) = \mathbf{J}_1^l(x_1^l) + \mathbf{J}_2^l(x_2^l) \quad (3.19)$$

où

$$\mathbf{J}_1^l(x_1^l) = -\operatorname{Re} \left\{ \left[ y_{j,2}^l h_{j,2}^* + (y_{j,1}^l)^* h_{j,1} e^{j\theta^l} \right] x_1^l \right\} \quad (3.20)$$

est seulement une fonction de  $x_1^l$  et

$$\mathbf{J}_2^l(x_2^l) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ y_{j,2}^l h_{j,1}^* e^{-j\theta^l} - (y_{j,1}^l)^* h_{j,2} \right] x_2^l \right\} \quad (3.21)$$

est quant à lui une fonction de  $x_2^l$ .

Comme pour le cas STBC, nous utilisons ces simplifications pour calculer la métrique de branche minimale parmi toutes les transitions possibles. Cependant, si l'orthogonalité entre les blocs nous permet d'utiliser un simple décodage MV, ce calcul ne se fait pas de la même façon que pour les STBC. En effet, même si  $J_1^l(x_1^l)$  n'est seulement qu'une fonction de  $x_1^l$ , toutes les paires  $(x_1^l, x_2^l)$  ne sont pas permises pour chaque branche du treillis.  $x_1^l$  et  $x_2^l$  ne sont donc pas deux variables indépendantes. De la même façon,  $J_2^l(x_2^l)$  sera une fonction de  $x_1^l$  à cause de la corrélation entre les deux variables  $x_1^l$  et  $x_2^l$ . En d'autres termes, les symboles en entrée du code STBC orthogonal ne sont pas indépendants, nous ne pouvons donc pas pratiquer, pour une transition donnée, un décodage séparé des signaux transmis. Pour chaque branche, parmi toutes les transitions parallèles possibles, nous devons donc trouver le couple  $(x_1^l, x_2^l)$  qui minimise la fonction  $J^l(x_1^l, x_2^l)$ . Si nous trouvons un symbole  $x_1^l$  qui minimise  $J_1^l(x_1^l)$  et un symbole  $x_2^l$  qui minimise  $J_2^l(x_2^l)$ , cela ne signifiera donc pas pour autant que le couple  $(x_1^l, x_2^l)$  sera celui à considérer pour la transition. Il est cependant possible de diviser en sous-ensembles, l'ensemble des couples de symboles parallèles possibles, pour lesquels, les couples de symboles  $(x_1^l, x_2^l)$  seront indépendants. Ainsi, un décodage, de chaque sous-ensemble, consistant à la minimisation séparée de  $J_1^l(x_1^l)$  et  $J_2^l(x_2^l)$  sera possible. Evidemment, nous trouverons alors le couple qui minimise  $J^l(x_1^l, x_2^l)$ , parmi tous ceux possibles dans les différents sous-ensembles. Donc, pour réduire la complexité du décodage, il faut que le récepteur connaisse le *set partitioning* utilisé en émission. Nous allons voir désormais un certain nombre d'exemples de décodage SOSTTC, pour différentes constellations.

Pour une modulation BPSK et le *set partitioning* de la figure 3.1, les ensembles  $P_0 = \{00, 11\}$  et  $P_1 = \{01, 10\}$  contiennent seulement deux paires de symboles chacun, donc aucune simplification n'est nécessaire. L'ensemble  $P = \{00, 11, 01, 10\}$ , à la racine du *set partitioning* fournit donc des symboles  $x_1$  et  $x_2$  indépendants. En d'autres termes, comme toutes les combinaisons de 0 et 1 existent dans cet ensemble, on peut minimiser  $J_1^l(x_1^l)$  et  $J_2^l(x_2^l)$  séparément.

Pour une modulation QPSK et le *set partitioning* de la figure 3.2, les ensembles  $P_{00}, P_{01}, P_{10}$  et  $P_{11}$  contiennent des couples indépendants. Si par contre on utilise l'ensemble  $P_0$ , il est nécessaire de le diviser en deux sous-ensembles  $P_0 = P_{00} \cup P_{01}$ . Ensuite, nous devons trouver les meilleurs couples dans chacun des sous-ensembles en utilisant des minimisations séparées de  $J_1^l(x_1^l)$  et  $J_2^l(x_2^l)$ , puis il faut comparer conjointement les deux métriques de branches correspondantes  $J^l(x_1^l, x_2^l)$ , et ne conserver que la plus faible des deux. Il faut appliquer la même démarche pour l'ensemble  $P_1$  en utilisant le fait que  $P_1 = P_{10} \cup P_{11}$ . Enfin, la plus faible des deux métriques, des deux ensembles  $P_0$  et  $P_1$ , est celle sélectionnée parmi toutes les branches parallèles.

Pour les autres modulations, il faudra donc de la même façon, combiner le *set partitioning* avec le décodage séparé de chaque bloc STBC orthogonal, de façon à ce que les

combinaisons réalisées réduisent au maximum, la complexité de calcul des métriques de branches.

Après avoir trouvé les meilleures branches parallèles parmi toutes les transitions, le décodeur estime le chemin le plus probable. Nous calculons tout d'abord les différentes métriques de chemins en utilisant les meilleures métriques de branches  $J^l(x_1^l, x_2^l)$ . La métrique cumulée du chemin est égale à la somme des métriques de branches des branches qui forment le chemin. Le chemin le plus probable est celui qui aura sa métrique cumulée la plus faible. Le décodeur à maximum de vraisemblance trouve alors l'ensemble des symboles de la constellation  $(x_1^l, x_2^l)$ ,  $l=1, 2, \dots, L+Q$  qui valident le chemin le plus probable, en minimisant le problème :

$$\min_{x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_1^{L+Q}, x_2^{L+Q}} \sum_{l=1}^{L+Q} J^l(x_1^l, x_2^l) \quad (3.22)$$

**Exemple 3.6 :** Dans cet exemple nous donnons des détails sur le décodage de l'exemple 3.1 utilisant le treillis de la figure 3.5 et une modulation QPSK. Le décodage ML utilisant l'algorithme de Viterbi comporte deux étapes :

- Trouver la meilleure branche parmi toutes les transitions parallèles dans le treillis,
- Chercher le chemin qui parmi tous les chemins possibles aura la métrique cumulée la plus faible.

Commençons par la première étape. Les ensembles assignés aux différentes transitions parallèles du treillis, sont notées  $P_0$  et  $P_1$ . Ils sont affectés des paramètres de rotation  $\theta^l = 0$  ou  $\pi$ , et sont composés des indices QPSK suivants :

$$\begin{aligned} P_0 &= \{00, 22, 02, 20, 11, 33, 13, 31\} = \{00, 22, 02, 20\} \cup \{11, 33, 13, 31\} \\ P_1 &= \{01, 23, 03, 21, 10, 32, 12, 30\} = \{01, 23, 03, 21\} \cup \{10, 32, 12, 30\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par exemple, pour  $P_{00} = \{00, 22, 02, 20\}$ , les symboles  $x_1^l$  et  $x_2^l$ , correspondant aux indices 0 et 2 pourront valoir soit 1 soit -1 respectivement. Nous pourrions donc déterminer :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{10}^l &= \arg \min_{x_1^l \in \{1, -1\}} (J_1^l(x_1^l)) \\ \hat{x}_{20}^l &= \arg \min_{x_2^l \in \{1, -1\}} (J_2^l(x_2^l)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

De la même façon, pour l'ensemble  $P_{01} = \{11, 33, 13, 31\}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{11}^l &= \arg \min_{x_1^l \in \{1, -1\}} (J_1^l(x_1^l)) \\ \hat{x}_{21}^l &= \arg \min_{x_2^l \in \{1, -1\}} (J_2^l(x_2^l)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Enfin la meilleure branche parallèle est donnée par :

$$(\hat{x}_1^l, \hat{x}_2^l) = \arg \min_{\{(\hat{x}_{10}^l, \hat{x}_{20}^l), (\hat{x}_{11}^l, \hat{x}_{21}^l)\}} \{J_1^l(x_1^l) + J_2^l(x_2^l)\} \quad (3.26)$$

Cette recherche doit être effectuée pour trouver les couples de symboles optimum pour les 4 cas suivants :  $P_0^0, P_1^0, P_0^\pi$ , et  $P_1^\pi$ . Ensuite, nous utilisons les meilleures métriques de branche de chacun des cas dans la seconde étape.

Dans la seconde étape, c'est l'algorithme de Viterbi qui nous sert à déterminer le meilleur chemin. L'utilisation de cet algorithme pour le cas des codes SOSTTC, est similaire à celle du cas des codes STTC.

Pour évaluer la complexité du SOSTTC à quatre états de cet exemple, nous allons compter le nombre d'opérations nécessaires pour calculer la métrique. Pour simplifier les calculs, les termes communs à plusieurs équations seront enregistrés, pour ne pas avoir à les recalculer.

Nous devons calculer  $J_1^l(x_1^l)$  et  $J_2^l(x_2^l)$  pour différentes valeurs de  $x_1^l$  et  $x_2^l$ . Pour cela, nous évaluons tout d'abord, les deux termes,  $r_{j,2}^l h_{j,2}^* + (r_{j,1}^l)^* h_{j,1} e^{j\theta^l}$  et  $r_{j,2}^l h_{j,1}^* e^{-j\theta^l} - (r_{j,1}^l)^* h_{j,2}$ , pour le calcul de (3.20) et (3.21) respectivement. Notons que  $e^{j\theta^l}$  et  $e^{-j\theta^l}$  ont pour effet de juste changer les signes, car lorsque  $\theta^l = 0$ ,  $e^{j\theta^l} = e^{-j\theta^l} = 1$  et lorsque  $\theta^l = \pi$ ,  $e^{j\theta^l} = e^{-j\theta^l} = -1$ .

Donc le calcul de chaque terme pour un paramètre donné de rotation, nécessite huit multiplications, et six additions. En calculant cela pour tous les paramètres de rotation, on ajoute quatre additions. Donc, il est nécessaire de faire 16 multiplications et 16 additions, pour évaluer les différentes possibilités de ces deux termes.

Ensuite, nous devons calculer et sauvegarder  $J_1^l(x_1^l)$  et  $J_2^l(x_2^l)$ , pour les différentes valeurs de  $x_1^l$  et  $x_2^l$ . Comme une modulation QPSK comprend les symboles  $\{1, j, -1, -j\}$ , ce calcul requière 16 multiplications pour les deux paramètres de rotation. Donc pour évaluer tous les cas possibles de (3.20) et (3.21), il faudra 32 multiplications et 16 additions. Finalement, pour trouver le meilleur chemin pour chaque transition (3.26), 8 additions et 4 comparaisons seront nécessaires. Pour finir, calculer la métrique d'une transition, qui correspond à l'émission de deux symboles, nécessite de faire en tout 32 multiplications, 24 additions et 12 comparaisons. La table 3.2 recense de façon détaillée les différentes étapes de calcul de la métrique, alors que la table 3.3 compte le nombre d'opérations de chaque étape de calcul.

Tant que le treillis reste le même, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de la métrique de branche dans l'algorithme de Viterbi ne change pas, quel que soit le code. Il est fonction du nombre de branches qui partent ou arrivent dans chaque état. Ainsi le nombre d'opérations, et par voie de conséquence la complexité du treillis, sera d'autant plus faible que le nombre de branches qui quittent ou arrivent dans un état sera petit.

Pour conclure cette partie, nous dirons que c'est grâce à l'orthogonalité des blocs STBC que la complexité du décodage des codes SOSTTC peut être grandement réduite.

Table 3.2 – Les différentes étapes de calcul de la métrique de l'exemple 3.6

N° étape de calcul	Calcul	Remarques
1	$y_{j,2}^l h_{j,2}^*$	
2	$(y_{j,1}^l)^* h_{j,1}$	
3	$y_{j,2}^l h_{j,1}^*$	
4	$-(y_{j,1}^l)^* h_{j,2}$	
5	$y_{j,2}^l h_{j,2}^* + (y_{j,1}^l)^* h_{j,1} e^{\theta^l}$	$(\theta^l = 0)$
6	$y_{j,2}^l h_{j,2}^* + (y_{j,1}^l)^* h_{j,1} e^{\theta^l}$	$(\theta^l = \pi)$
7	$y_{j,2}^l h_{j,1}^* e^{-\theta^l} - (y_{j,1}^l)^* h_{j,2}$	$(\theta^l = 0)$
8	$y_{j,2}^l h_{j,1}^* e^{-\theta^l} - (y_{j,1}^l)^* h_{j,2}$	$(\theta^l = \pi)$
9	$J_1^l(x_1^l)$	(3.20) $\forall x_1^l, \theta^l = 0, \pi$
10	$J_2^l(x_2^l)$	(3.21) $\forall x_2^l, \theta^l = 0, \pi$
11	$\min\{J_1^l(x_1^l)\}$	(3.24) et (3.25)
12	$\min\{J_2^l(x_2^l)\}$	(3.24) et (3.25)
13	$\min\{J_1^l(x_1^l) + J_2^l(x_2^l)\}$	(3.26)

Table 3.3 – Nombre d'opérations nécessaires pour les différentes étapes de calcul de la métrique de l'exemple 3.6

N° étape de calcul	Nombre de multiplications	Nombre d'additions	Nombre de comparaisons
1	4	2	0
2	4	2	0
3	4	2	0
4	4	2	0
5	0	2	0
6	0	2	0
7	0	2	0
8	0	2	0
9	8	0	0
10	8	0	0
11	0	0	4
12	0	0	4
13	0	8	4
Total	32	24	12

### 3.9 Extension des codes SOSTTC à plus de deux antennes d'émission

Dans ce paragraphe, nous développons une approche de construction plus générale des codes SOSTTC, dans laquelle on considère un système comprenant plus de deux antennes d'émission. Pour leur conception nous suivons les mêmes principes, à savoir :

- design orthogonal,
- *set partitioning*,
- paramètres de rotation.

Nous allons voir quelques exemples qui vont permettre de comprendre comment fonctionne cette approche générale.

#### 3.9.1. Cas d'une constellation réelle

Nous considérons le cas d'un système contenant  $N_t = 4$  antennes d'émission. La structure orthogonale de base est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Cette structure est développée, comme dans le cas de deux antennes (3.7), à l'aide des paramètres de rotation,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$ , de la façon suivante :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} x_1 e^{j\theta_1} & x_2 e^{j\theta_2} & x_3 e^{j\theta_3} & x_4 e^{j\theta_4} \\ -x_2 e^{j\theta_1} & x_1 e^{j\theta_2} & -x_4 e^{j\theta_3} & x_3 e^{j\theta_4} \\ -x_3 e^{j\theta_1} & x_4 e^{j\theta_2} & x_1 e^{j\theta_3} & -x_2 e^{j\theta_4} \\ -x_4 e^{j\theta_1} & -x_3 e^{j\theta_2} & x_2 e^{j\theta_3} & x_1 e^{j\theta_4} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Comme les symboles de la constellation sont réels, (exemple d'une modulation BPSK) et que nous ne voulons pas étendre la constellation, nous prenons  $\theta_i = 0$  ou  $\pi$ , avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . Cela signifie que l'on peut changer potentiellement le signe des symboles sur chacune des colonnes (notez que la matrice (3.27) fait partie des ensembles super-orthogonaux que l'on peut obtenir avec (3.28), pour laquelle  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ ). Comme pour le cas deux antennes, nous utilisons le CGD au lieu de la distance Euclidienne pour définir le *set partitioning*.

Un exemple de *set partitioning* utilisant une modulation BPSK est donné sur la figure 3.11. A la racine de l'arbre de partitionnement, le CGD minimum est de 256. Au premier niveau de partitionnement, on obtient un CGD minimum est de 4096 en créant les deux sous-ensembles  $P_0$  et  $P_1$  pour lesquels les symboles transmis diffèrent au moins dans deux positions. Au dernier niveau de partitionnement, nous avons au total huit ensembles  $P_{000}, P_{001}, P_{010}, P_{011}, P_{100}, P_{101}, P_{110}$ , et  $P_{111}$ , qui comportent chacun deux éléments de quatre symboles, qui diffèrent tous sur chacune des positions. Le CGD obtenu dans ce cas vaut 65536.

CGD  
minimum

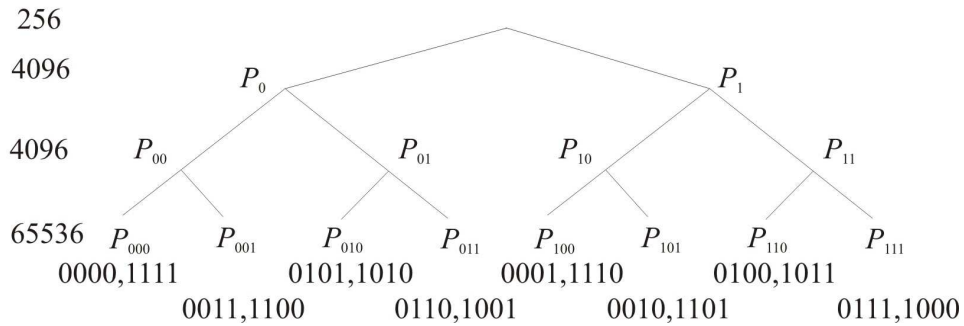


Figure 3.11 – *Set partitioning* pour une modulation BPSK et 4 antennes d’émission, chaque groupe de nombres binaires représente les 4 indices des symboles émis par notre STBC

La construction du code est basée sur ce qui suit :

- Nous affectons un code STBC à toutes les transitions depuis un même état,
- Les états adjacents se voient quant à eux affectés par d’autres codes STBC issus de l’ensemble super-orthogonal.

Comme précédemment il est possible d’affecter le même code STBC à des branches qui convergent vers un même état. Cela permet de s’assurer que tous les chemins qui divergent du chemin correct, auront un rang différent de 4. En d’autres termes, tous les couples de mots de codes divergeant ou émergeant dans un état, auront une diversité maximale car les couples font partie d’un même code orthogonal (même paramètres  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ).

Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 montrent le cas de codes SOSTTC à deux, quatre et huit états respectivement, pour un rendement de 1 bit/s/Hz, en modulation BPSK.

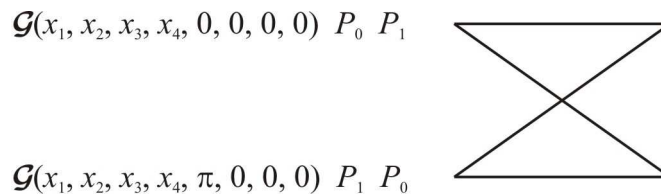


Figure 3.12 – Code SOSTTC à 2 états, 4 antennes d’émission,  $r = 1$  bit/s/Hz (BPSK)

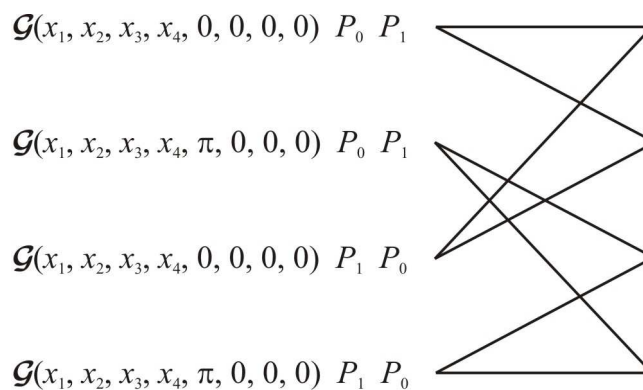


Figure 3.13 – Code SOSTTC à 4 états, 4 antennes d’émission,  $r = 1$  bit/s/Hz (BPSK)

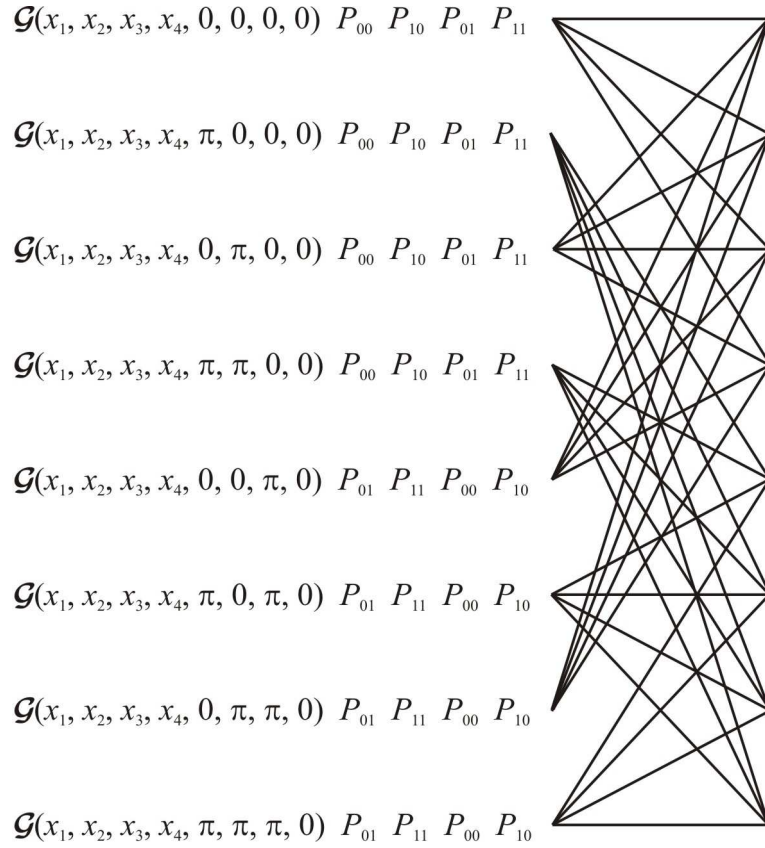


Figure 3.14 – Code SOSTTC à 8 états, 4 antennes d'émission,  $r = 1$  bit/s/Hz (BPSK)

### 3.9.2. Cas d'une constellation complexe

Dans ce paragraphe, nous allons voir la conception de plusieurs codes SOSTTC utilisant des symboles modulés complexes. Le système étudié comporte 4 antennes d'émission. Dans ce cas de figure, le rendement maximum d'un code STBC orthogonal est de 0.75.

Un exemple de design orthogonal complexe  $4 \times 4$  est donné ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 & x_3 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* & x_2 \\ 0 & x_3^* & -x_2^* & -x_1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Pour étendre les matrices orthogonales, comme pour le cas des modulations réelles, nous utilisons des paramètres de rotation qui conduisent aux matrices:

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} x_1 e^{j\theta_1} & x_2 e^{j\theta_2} & x_3 e^{j\theta_3} & 0 \\ -x_2^* e^{j\theta_1} & x_1^* e^{j\theta_2} & 0 & x_3 e^{j\theta_4} \\ x_3^* e^{j\theta_1} & 0 & -x_1^* e^{j\theta_3} & x_2 e^{j\theta_4} \\ 0 & x_3^* e^{j\theta_2} & -x_2^* e^{j\theta_3} & -x_1 e^{j\theta_4} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Encore une fois, nous utilisons des rotations qui n'étendent pas la constellation originale, ainsi pour une modulation QPSK,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  ne peuvent valoir que



$\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ . Nous pouvons ainsi construire de façon systématique, un code SOSTTC, de rendement  $3/4$ , pour n'importe quel treillis et n'importe quelle modulation complexe, à l'aide d'un *set partitioning* et en affectant des ensembles de mots de codes aux différentes branches du treillis.

La structure paramétrable des codes SOSTTC rend possible la conception de treillis particuliers pour lequel le rendement peut valoir 1. Nous allons voir dans ce qui suit, comment une augmentation du rendement est possible.

Pour obtenir un code STBC  $4 \times 4$  de rendement 1, auquel on applique une constellation comprenant  $L = 2^m$  symboles, il est nécessaire de disposer de  $L^4$  matrices de mots de code, pour transmettre à un débit de  $m$  bits/s/Hz.

En utilisant par exemple une modulation QPSK, on doit pouvoir disposer, pour construire un tel code (rendement 1), de  $4^4 = 256$  matrices de mots de codes pour quitter un état. Un STBC de rendement  $3/4$ , peut seulement fournir  $L^3$  matrices de mots de code, soit dans le cas QPSK,  $4^3 = 64$  matrices. Donc, dans ce cas, il est impossible que dans un état donné, tous les mots de codes appartiennent au même STBC. Si on considère que le nombre de branches quittant chaque état dans le treillis est de deux, alors le nombre maximum de branches parallèles, pour un SOSTTC de rendement 1, vaut  $L^4/2$ , soit 128 pour une QPSK. Pour obtenir une diversité maximale en SOSTTC, il faut que tous les couples possibles, parmi tous les mots de codes affectés aux branches parallèles fournissent une diversité maximale. Donc, c'est impossible, par exemple, de construire un SOSTTC à deux états, comme celui de la figure 3.12.

D'un autre côté, en augmentant le nombre de branches quittant un état donné, le nombre de branches parallèles requis diminue. Donc, même si un STBC ne peut pas fournir suffisamment de mots de codes pour quitter un état, il peut en fournir assez pour les branches parallèles, si on augmente le nombre de branches quittant un état. Par exemple, dans le cas d'une modulation QPSK, si quatre branches quittent chaque état, nous aurons 64 branches parallèles. Ainsi, un code STBC de rendement  $3/4$  pourra fournir les mots de codes nécessaires pour ces branches parallèles.

Rappelons que dans nos exemples précédents, nous avons toujours affecté le même STBC à toutes les branches quittant un état donné. Ce genre d'affectation ne permet plus, lorsque le nombre d'antennes d'émission est supérieur à deux, d'obtenir des codes SOSTTC de rendement 1. A la place, lorsque  $N_t > 2$ , il est possible de concevoir un code SOSTTC de rendement 1, en assignant des membres appartenant aux différents ensembles du code super-orthogonal, aux branches quittant un même état [57]. Nous donnons les détails de la conception d'un tel code, dans l'exemple suivant.

**Exemple 3.7 :** *Comme nous l'avons déjà dit, un code STBC orthogonal n'est pas unique. En fait, il suffit de le multiplier, par la gauche ou par la droite par une matrice unitaire, et nous obtenons un autre code STBC orthogonal. Nous avons utilisé cette propriété pour étendre les matrices de mots de codes et concevoir les codes SOSTTC. Cette fois-ci utilisons la matrice unitaire ci-dessous pour permuter les symboles dans chaque colonne, en multipliant par la droite, ou dans chaque ligne, en multipliant par la gauche :*

$$U_1(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

La matrice (3.30) est par exemple le résultat de la multiplication par la droite de (3.29) par  $U_1(e^{j\theta_1}, e^{j\theta_2}, e^{j\theta_3}, e^{j\theta_4})$ .

Ici, en plus de permuter les symboles à l'intérieur des colonnes ou des lignes, on va permuter les lignes ou les colonnes entre elles. Les matrices unitaires suivantes, permettent de permuter les symboles, mais également de permuter les lignes ou les colonnes d'un code STBC orthogonal  $4 \times 4$  :

$$U_2(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$U_3(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$U_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Nous allons utiliser ces permutations de symboles et de colonnes ou lignes, pour concevoir de nouveaux modèles SOSTTC.

Notons  $\mathcal{G}$  la matrice (3.2), fonction de  $(x_1, x_2, x_3)$ . Comme le code va avoir un nombre important de paramètres, qui rend difficile sa représentation sur une figure, nous définissons les notations suivantes pour représenter les matrices de codes dans les différents états du treillis :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= U_1(1, 1, 1, j) \cdot \mathcal{G} \\ \mathcal{G}_2 &= U_2(1, 1, j, 1) \cdot \mathcal{G} \\ \mathcal{G}_3 &= U_3(1, j, 1, 1) \cdot \mathcal{G} \\ \mathcal{G}_4 &= U_4(j, 1, 1, 1) \cdot \mathcal{G} \end{aligned} \quad (3.35)$$

De la même façon, nous définissons  $\mathcal{G}_5, \mathcal{G}_6, \dots, \mathcal{G}_{16}$  comme étant égaux à :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{4+i} &= U_1(1, 1, -1, -1) \cdot \mathcal{G}_i, i = 1, 2, 3, 4 \\ \mathcal{G}_{8+i} &= U_1(1, -1, -1, 1) \cdot \mathcal{G}_i, i = 1, 2, 3, 4 \\ \mathcal{G}_{12+i} &= U_1(1, -1, 1, -1) \cdot \mathcal{G}_i, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.36)$$

En plus de définir les matrices STBC orthogonales pour chaque transition dans le treillis, nous devons construire le set partitioning, pour des symboles QPSK. Dans cet exemple, nous donnons seulement la première couche de partitionnement de l'arbre, qui consiste aux ensembles  $P_0$  et  $P_1$ , composés des triplets d'indices de symboles QPSK suivants :

$$P_0 = \{000, 002, 020, 022, 200, 202, 220, 222, 110, 112, 130, 132, 310, 312, 330, 332, 011, 013, 031, 033, 211, 213, 231, 233, 101, 103, 121, 123, 301, 303, 321, 323\} \quad (3.37)$$

$$P_1 = \{001, 003, 021, 023, 201, 203, 221, 223, 111, 113, 131, 133, 311, 313, 331, 333, \\ 010, 012, 030, 032, 210, 212, 230, 232, 100, 102, 120, 122, 300, 302, 320, 322\} \quad (3.38)$$

La figure 3.15 donne l'exemple d'un code SOSTTC à 8 états, pour un système à 4 antennes d'émission. Dans cet exemple, pour chaque transition dans le treillis, on affecte une matrice STBC orthogonale et on lui associe un ensemble de couples de symboles (voir entres les parenthèses dans les différents états).

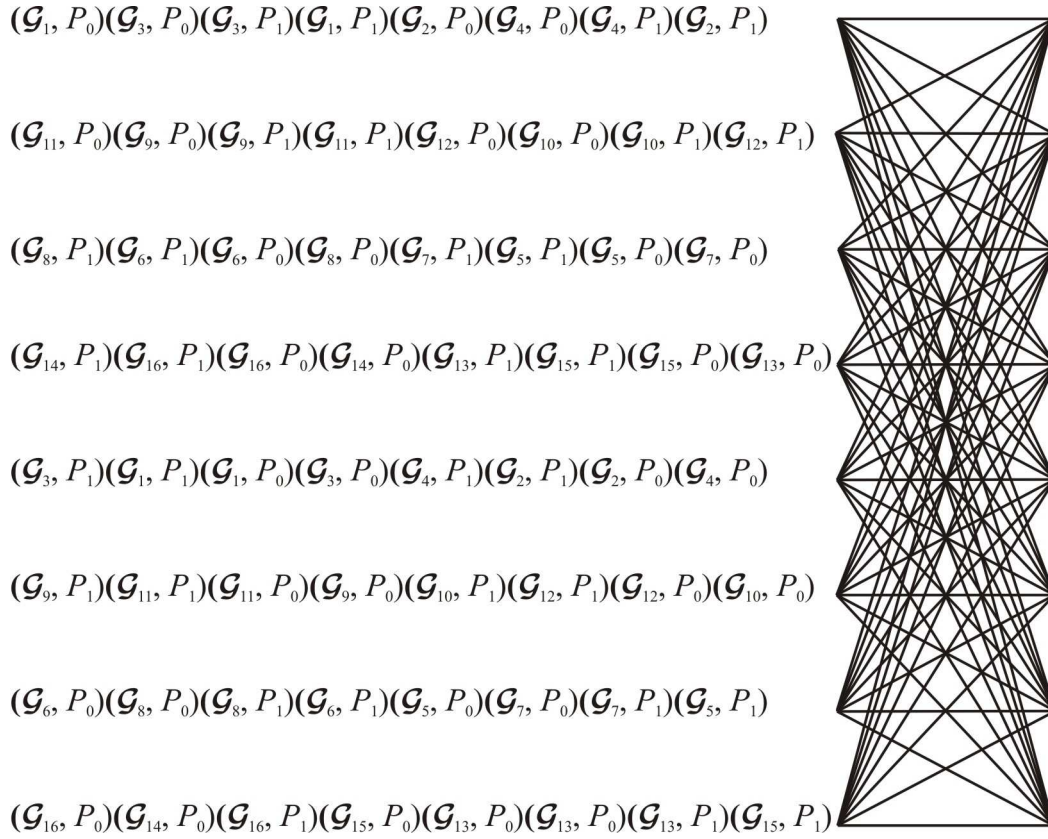


Figure 3.15 – SOSTTC à 8 états, pour un système à 4 antennes d'émissions, et  $r = 2$  bits/s/Hz (QPSK)

Pour construire des codes à diversité maximale et de rendement 1, pour des systèmes où le nombre d'antennes d'émission est supérieur à deux, une autre méthode consiste à utiliser des codes STBC Quasi-Orthogonaux. Les méthodes décrites précédemment marchent toujours et l'on appelle ce genre de codes, les *Super-Quasi-Orthogonal Space-Time Trellis Codes* (SQOSTTC) [54].

### 3.10 Performances des codes SOSTTC

Dans ce paragraphe nous allons donner les résultats de simulation des codes SOSTTC. Nous supposons que le canal est quasi-statique, et qu'il suit un modèle de Rayleigh à évanouissement lent. Donc les coefficients du canal sont des variables Gaussiennes, complexes indépendantes fixes durant la transmission d'une trame entière. Nous évaluons les performances de tels codes, en traçant leurs *Frame Error Rate* (FER) en fonction du SNR.

Nous comparons les résultats obtenus avec les performances de codes STTC comparables. Les paquets émis ont une taille de 150 symboles.

La figure 3.16 montre les résultats de FER tracés en fonction du SNR pour les codes présentés sur les figures 3.5 et 3.7, utilisant une modulation BPSK et le *set partitioning* de la figure 3.1. Le code présenté par la figure 3.5 se nomme « SOSTTC à 4 états » alors que celui de la figure 3.7 portera le nom de « SOSTTC à 2 états ». Chacun de ces codes dispose d'un rendement de 1 et transmet à un débit de 1 bit/s/Hz. Pour comparer, nous insérons les résultats de deux codes STTC, un « STTC à 4 états » et un « STTC à 2 états » des figures 2.8 et 2.9 du chapitre précédent.

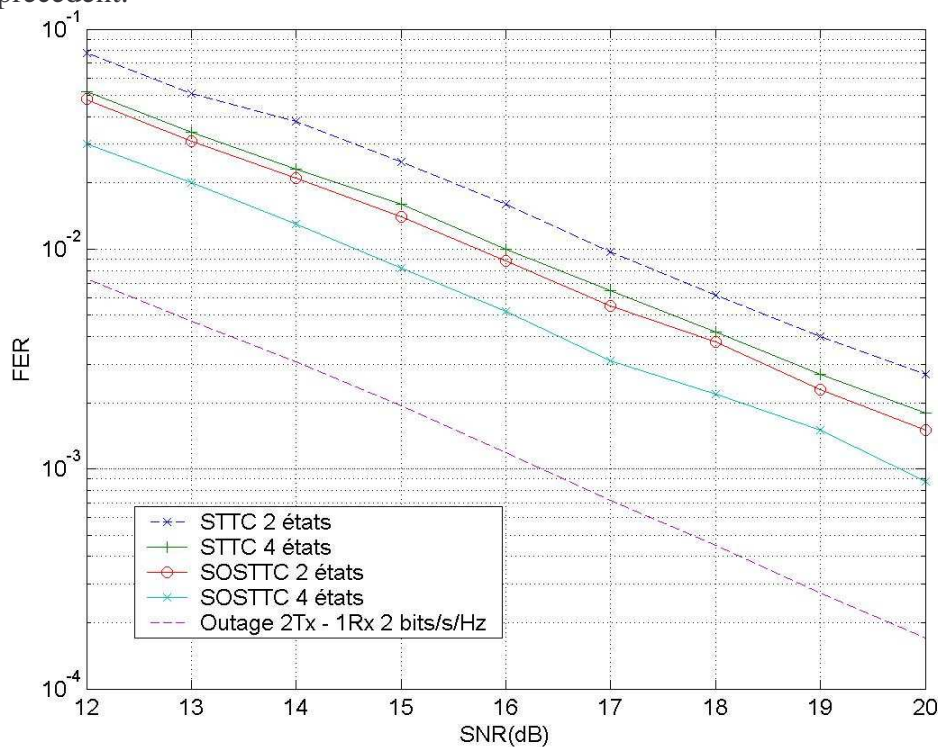


Figure 3.16 – FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC et STTC à 1 bit/s/Hz, 2 antennes d'émission et 1 antenne de réception

Les performances des SOSTTC supplantent celle des STTC correspondant de 1.5dB. Nous obtenons des résultats similaires, figure 3.17, lorsque l'on considère au récepteur  $N_r = 2$  antennes. La figure 3.18 montre les résultats de simulations, lorsque l'on transmet à 2 bits/s/Hz, dans le cas d'une modulation QPSK. Sur la figure 3.18 les légendes « SOSTTC à 2 états » et « SOSTTC à 4 états » correspondent respectivement aux codes des figures 3.7 et 3.5, alors que la notation « STTC à 4 états » est liée à la figure 2.6 du chapitre précédent. Les codes que nous comparons ont le même rendement, c'est pour cela qu'il nous est impossible de comparer le SOSTTC à 2 états lorsque  $r = 2$  bits/s/Hz, car son équivalent STTC n'existe pas. Comme le montre la figure 3.18, pour un treillis à 4 états, les résultats du code SOSTTC supplantent ceux du STTC de 2 dB. Les performances du SOSTTC à 4 états, sont même meilleures que celle de son équivalent STTC à 32 états [36], et très proches du STTC à 64 états [36]. En plus, pour un même nombre d'états dans le treillis, le décodage des SOSTTC est moins compliqué que celui des STTC. Cela est dû à l'orthogonalité des matrices STBC. Les mêmes remarques peuvent être faites concernant la figure 3.19, où le nombre d'antennes de réception est égal à 2. En effet, si l'on compare notre SOSTTC avec les résultats du STTC de la figure 2.14 du chapitre précédent, le SOSTTC à 4 états présente un gain d'environ 1.5 dB.

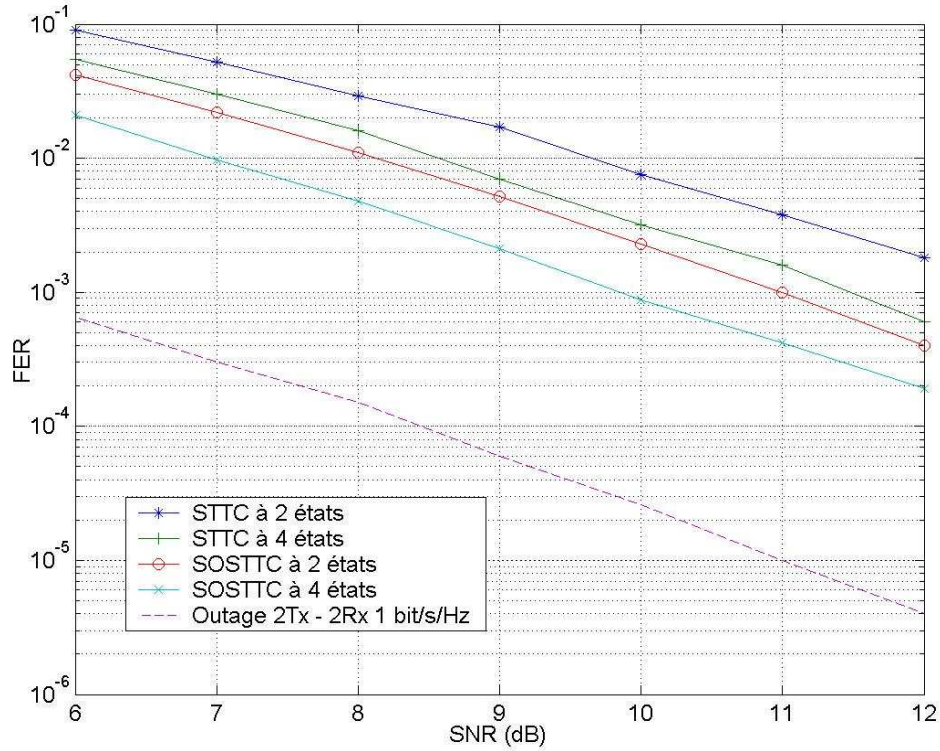


Figure 3.17 – FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC et STTC à 1 bit/s/Hz, 2 antennes d'émission et 2 antennes de réception

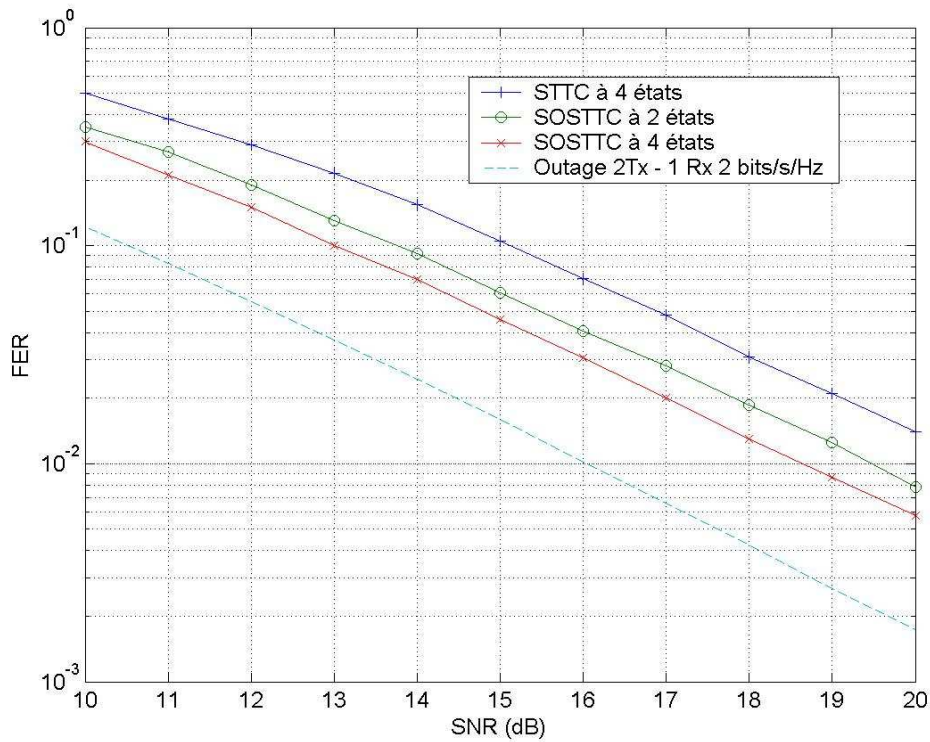


Figure 3.18 – FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC et STTC à 2 bit/s/Hz, 2 antennes d'émission et 1 antenne de réception

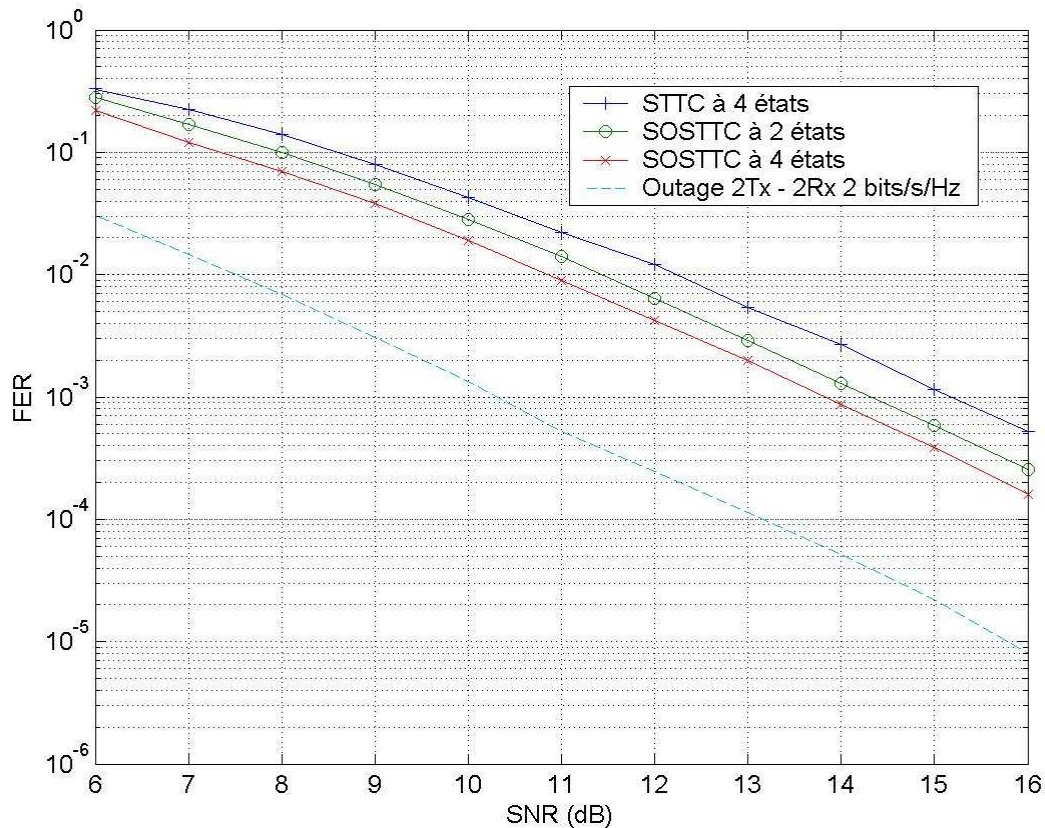


Figure 3.19 – FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC et STTC à 2 bit/s/Hz, 2 antennes d’émission et 2 antennes de réception

La figure 3.20 montre les résultats de simulations pour une transmission à 3 bits/s/Hz, utilisant une modulation 8-PSK. Un code SOSTTC à 8 états supplante son homologue STTC à 4 états de 0.75 dB. Bien évidemment, augmenter le nombre d’états permet d’améliorer les performances du code, au détriment d’une complexité de décodage plus importante. Comme le montre également la figure, les performances des codes SOSTTC sont similaires lorsqu’ils ont le même nombre d’états dans le treillis. Ceci en dépit de la différence de CGD qu’il peut y avoir entre les codes. L’impact de la différence du CGD se fait plus sentir lorsqu’il y a dans le système plus d’une antenne de réception. Cela est évident au vu de la figure 3.21 qui montre les performances du code précédent lorsque le nombre d’antennes de réception est de deux.

En général, le CGD est un bon indicateur de performances, lorsque le nombre d’antennes de réception devient important.

La figure 3.22 montre les résultats de simulations dans le cas d’une modulation BPSK, pour un système de  $N_t = 4$  antennes d’émission émettant à 1 bit/s/Hz. Le SOSTTC simulé correspond à celui de la figure 3.19 et le SQOSTTC est issu de la même structure que [54] en utilisant des codes STBC Quasi-Orthogonaux à la place des STBC Orthogonaux.

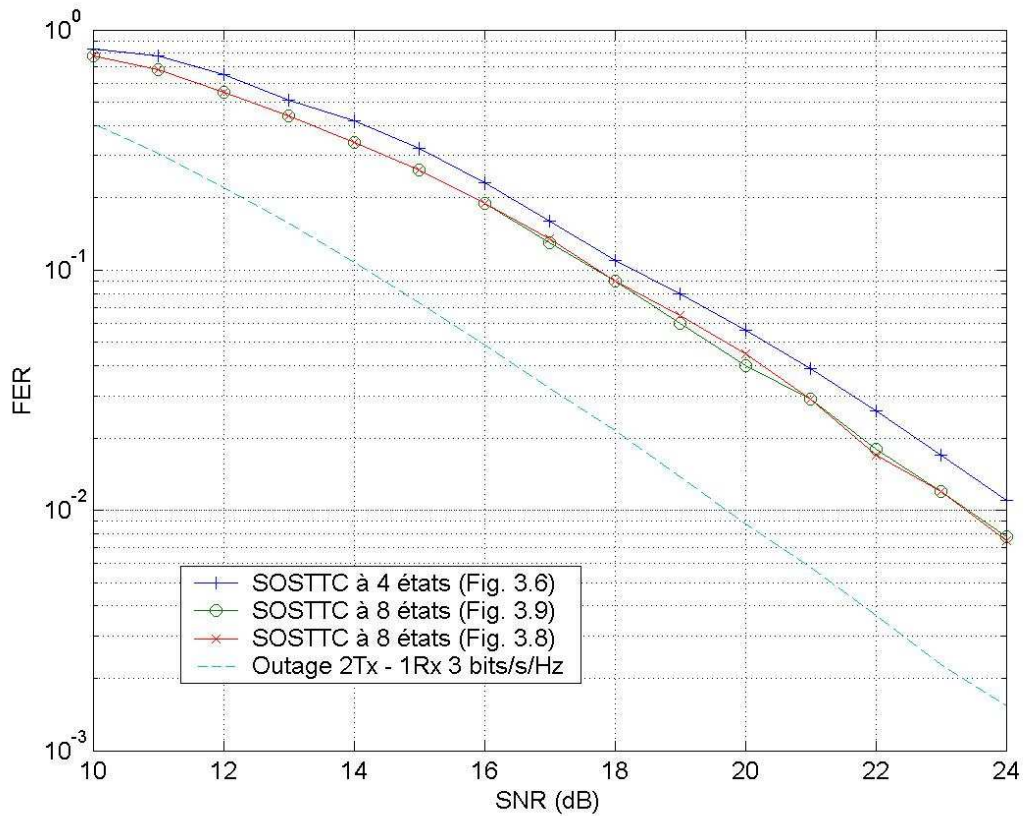


Figure 3.20 - FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC à 3 bit/s/Hz, 2 antennes d'émission et 1 antenne de réception

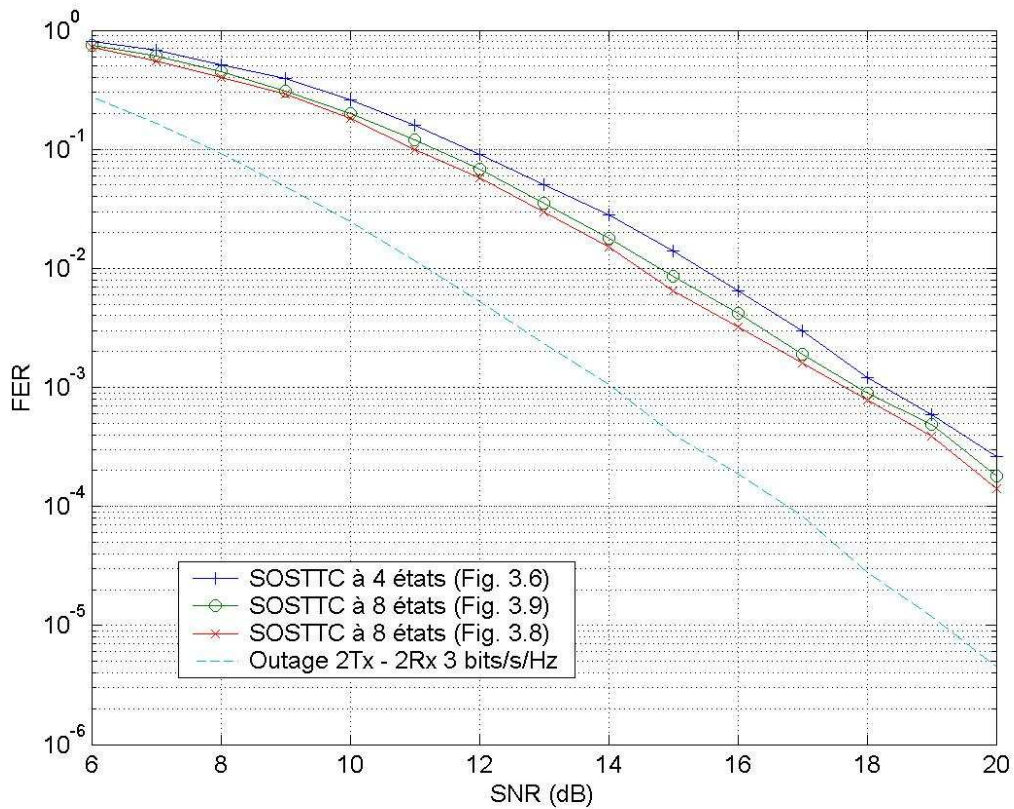


Figure 3.21 - FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC à 3 bit/s/Hz, 2 antennes d'émission et 2 antennes de réception

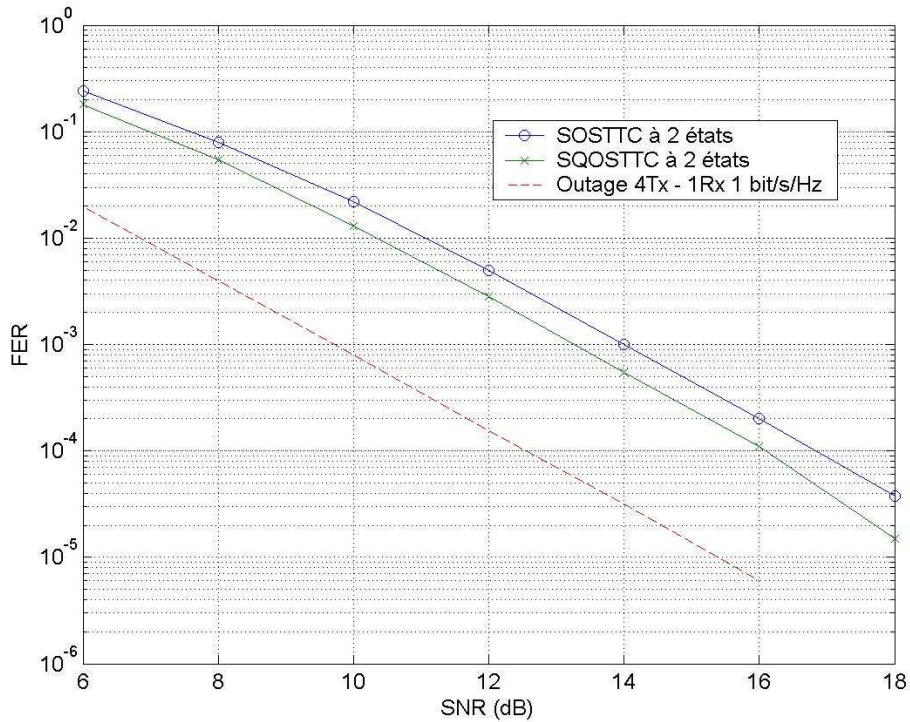


Figure 3.22 - FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC à 1 bit/s/Hz, 4 antennes d'émission et 1 antenne de réception

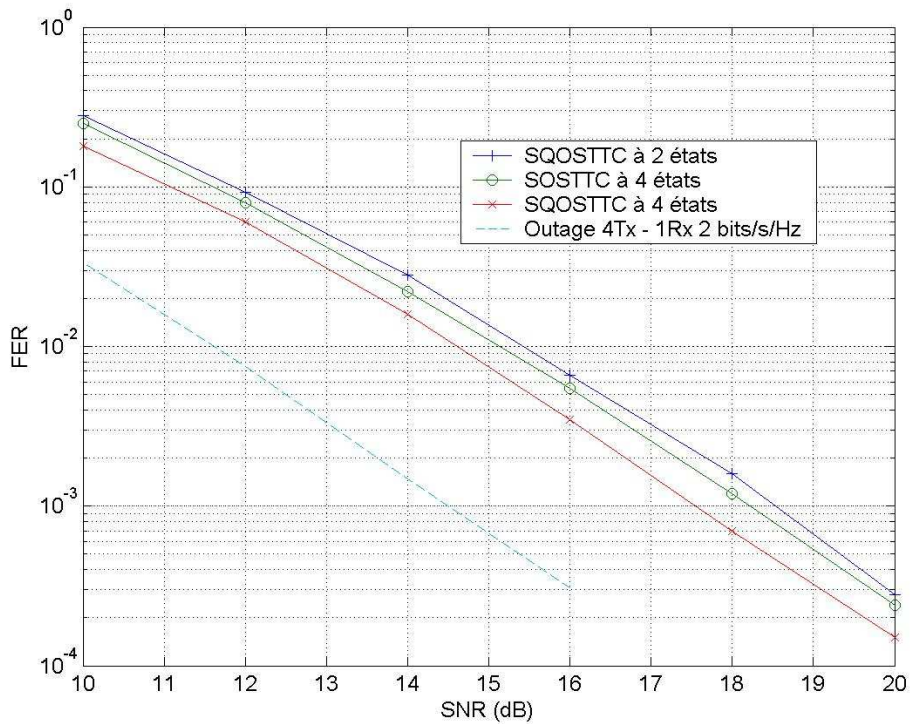


Figure 3.23 - FER en fonction du SNR, pour des codes SOSTTC à 2 bit/s/Hz, 4 antennes d'émission et 1 antenne de réception

Comme le montre la figure 3.22, avec seulement deux états dans le treillis, nous sommes à 4 dB de la capacité *outage*. La figure suivante, 3.23, montre les mêmes résultats, mais cette



fois-ci pour une modulation QPSK à 2 bits/s/Hz. Le SOSTTC contient 4 états et est similaire au code développé dans l'exemple 3.7, alors que les codes SQOSTTC proviennent de [54]. La figure montre donc que pour un code de rendement 1, lorsque le nombre d'antennes d'émission est supérieur à deux, les performances obtenues pour une constellation QPSK sont relativement bonnes (au mieux à moins de 3 dB de la *outage*). Et si l'on s'intéresse aux performances du SOSTTC à 16 états (non tracées sur la figure 3.23), on s'aperçoit qu'elles supplantent celles du code à 4 états de 2 dB.

### 3.11 Conclusion

Nous venons donc de voir les règles de conception des codes SOSTTC, qui résultent de la combinaison des codes STBC et des codes STTC. En effet, en paramétrant un code STBC orthogonal, il est possible de construire un ensemble super-orthogonal. Ici nous avons contraint la construction de l'ensemble super-orthogonal, en paramétrant le STBC de façon à ne pas étendre la constellation des symboles originaux. Comme pour le cas des MTCM, un code en treillis super-orthogonal est conçu de façon systématique en utilisant un *set partitioning* déterminé au préalable, pour affecter à chaque branche du treillis un mot de code STBC. Typiquement, nous affectons le même paramètre de rotation aux transitions issues d'un même état. En plus de fournir une diversité et un rendement maximum, les codes SOSTTC peuvent être conçus pour n'importe quel treillis, avec n'importe quel nombre d'états et pour n'importe quel rendement. Pour des configurations comparables (treillis, nombre d'états, modulation, rendement), les codes SOSTTC ont de bien meilleures performances que les codes STTC et leur décodage présente une complexité comparable puisqu'il est également basé sur l'algorithme de Viterbi.

# CHAPITRE 4      OPTIMISATION DE CODES STTC A BASE DE CODES STBC : CAS DES SYSTEMES A TROIS ANTENNES D'EMISSION

---

4.1	Introduction _____	113
4.2	Choix d'une matrice STBC de base _____	114
4.3	Critères et règles de partitionnement _____	116
4.4	Construction des treillis _____	120
4.5	Remarques _____	124
4.6	Décodage des codes STTC à base de code STBC _____	127
4.6.1.	Cas du code quasi-orthogonal _____	127
4.6.2.	Cas du code STBDFT _____	129
4.7	Calcul des performances des codes STTC à base de code STBC _____	129
4.7.1.	Cas de la modulation QPSK _____	130
4.7.2.	Cas de la modulation 8-PSK _____	132
4.7.3.	Cas du code STBDFT _____	134
4.8	Conclusion _____	134

---

## 4.1 Introduction

La généralisation des SOSTTC proposés par Jafarkhani & *al* pour les cas deux et quatre antennes au contexte de systèmes à trois antennes d'émission pose de gros problèmes à priori. En effet pour un nombre d'antennes d'émission  $N_t$  égal à trois, il n'existe pas de structures de codes en blocs orthogonales ayant un rendement en transmission égal à un pour les constellations complexes. On peut citer cependant, dans ce contexte particulier de trois antennes d'émission, les travaux de Hassibi & *al* récemment publiés [58]. Cependant, il s'agit dans ce travail de codes linéaires à dispersion et le décodage s'opère de façon différentielle. Pour construire des codes performants Hassibi montre qu'il est possible d'utiliser une paramétrage des matrices unitaires du groupe  $SU(3)$ .

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il est possible de généraliser le concept de codes SOSTTC au cas de trois antennes en utilisant de nouvelles techniques de séparation des sous-constellations. La structure de base STBC sur laquelle nous nous appuyerons est constituée essentiellement de la concaténation de deux matrices d'Alamouti d'ordre 2. Elle comporte de plus deux termes supplémentaires avec des angles de rotation qui permettent d'optimiser le gain de codage (basé sur le critère du CGD comme dans les cas à deux et quatre antennes) à l'intérieur de chaque sous-constellation. Cette structure sera appelée par la suite code quasi-orthogonal d'ordre 3.

Le premier inconvénient de la structure utilisée est la nécessité d'étendre les points de la constellation transmise. En effet, contrairement par exemple au cas à deux antennes, la recherche des angles de rotation permettant d'optimiser le gain de codage à l'intérieur de chaque sous-constellation conduit à des valeurs incompatibles avec la constellation des symboles transmis. Le second inconvénient est lié à l'absence d'orthogonalité de la structure STBC de base. En effet, un partitionnement à CGD maximum conduit, sans précaution supplémentaire, à un code qui n'est pas à diversité maximale. En d'autres termes, il existe des points ou plutôt ici des matrices appartenant à des sous-constellations différentes telles que le déterminant de leur matrice STBC différence multipliée par sa transposée conjuguée soit égale à zéro (critère du déterminant défini par Tarokh dans [36]). Pour remédier à ceci et obtenir ainsi un code à diversité optimale, nous proposons de multiplier, dans chaque sous-constellation, la matrice STBC de base par une matrice unitaire d'ordre 3. La séparation des sous-constellations se fait donc en affectant une matrice unitaire d'ordre 3 à chacune d'entre elles. Cette affectation se fait avec le souci de maximiser la distance (définie toujours par le critère du CGD) inter-constellation.

Utilisant le principe de partitionnement récemment proposé par M. Janani & *al* dans [59], nous sommes alors capables de construire des treillis avec un nombre d'états variables comme dans le cas des SOSTTC à deux antennes pour des constellations de type QPSK ou 8-PSK. Les performances de ces codes sont comparées à celles des codes spatio-temporels initialement proposés par Vucetic & *al* dans [60-61]. Nous montrons alors que nos codes permettent un gain de l'ordre de 0.5 à 1 dB selon le type de constellation et ce pour des canaux quasi-statiques et non-sélectifs en fréquence.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : nous montrons d'abord comment la structure STBC choisie permet d'optimiser le gain de codage à l'intérieur de chaque sous-constellation. Puis, nous en déduisons les partitionnements correspondants pour les constellations QPSK, 8-PSK. La construction des treillis avec le choix des matrices unitaires de séparation est alors abordée. Enfin, nous présentons des résultats de simulation avec la comparaison des performances de nos codes avec les codes STTC optimisés de Vucetic & *al*.

## 4.2 Choix d'une matrice STBC de base

La première étape de la construction d'un treillis à base de codes STBC consiste à choisir une matrice de base. Le critère du CGD étant optimal pour des codes à structure orthogonale, nous nous sommes orientés vers le choix d'une matrice utilisant les principes de codage d'Alamouti, sachant que nous voulions conserver le CGD comme critère de partitionnement. La première structure qui a servi de référence pour nos études a la forme suivante :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & 0 \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ 0 & x_3 & x_2^* \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Elle est composée de deux codes d'Alamouti d'ordre deux, couplé par le symbole  $x_2$  de la deuxième colonne. Il est clair que ce code qui possède un rendement en transmission égal à un est peu performant puisque les symboles  $x_1$  et  $x_3$  ne se répètent que deux fois contrairement au symbole  $x_2$  qui se répète trois fois.

Cependant, malgré ses piètres performances, cette matrice a l'avantage de présenter un partitionnement simple qui nous servira par la suite lorsque nous utiliserons la version définitive de notre code STBC. En effet, nous avons ici pour deux mots de codes  $\mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}^2$  :

$$A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) = (\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) - \mathcal{G}(x'_1, x'_2, x'_3)) \times (\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) - \mathcal{G}(x'_1, x'_2, x'_3))^H$$

et

$$\det(A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2)) = |x'_2 - x_2|^2 (|x'_1 - x_1|^2 + |x'_2 - x_2|^2 + |x'_3 - x_3|^2)^2 \quad (4.2)$$

Avec :  $x_1 = e^{j.l_1.\omega}$ ,  $x_2 = e^{j.l_2.\omega}$ ,  $x_3 = e^{j.l_3.\omega}$  et  $x'_1 = e^{j.k_1.\omega}$ ,  $x'_2 = e^{j.k_2.\omega}$ ,  $x'_3 = e^{j.k_3.\omega}$  et  $\omega = 2\pi/L$  où  $L$  représente la taille de la constellation ( $\omega = \pi/2$  pour une constellation QPSK). On obtient finalement pour le CGD :

$$\det(A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2)) = 64. \sin^2\left(\frac{|k_2 - l_2|}{2}\omega\right). \left(\sin^2\left(\frac{|k_1 - l_1|}{2}\omega\right) + \sin^2\left(\frac{|k_2 - l_2|}{2}\omega\right) + \sin^2\left(\frac{|k_3 - l_3|}{2}\omega\right)\right)^2 \quad (4.3)$$

On peut définir un partitionnement simple à partir de la formule (4.3). Pour avoir un déterminant non nul à l'intérieur de chaque sous-constellation, il faut que les triplets de points à l'intérieur de chaque sous-constellation soient tels qu'ils aient tous un deuxième symbole différent. Ceci impose un partitionnement (en QPSK) avec au moins 16 sous-constellations. A l'intérieur de ces sous-constellations, on choisit alors les symboles  $x_1, x'_1$  et  $x_3, x'_3$  de telle sorte qu'ils maximisent les quantités  $|k_1 - l_1|$  et  $|k_3 - l_3|$ . On obtient alors le partitionnement illustré en tableau 4.1 (page suivante). Avec le partitionnement du tableau 4.1, le CGD minimum à l'intérieur de chaque sous-constellation est égal à 72. Une autre possibilité de partitionnement consisterait à utiliser à l'intérieur de chaque sous-constellation des valeurs distinctes pour les symboles  $x_1, x'_1$  et  $x_3, x'_3$ . On obtient alors le partitionnement illustré sur le tableau 4.2 de la page suivante. Le CGD minimum à l'intérieur de chaque sous-constellation avec le partitionnement du tableau 4.2 est égal encore à 72.

Tableau 4.1 - *Set partitioning* pour un treillis de 16 états, une modulation QPSK et trois antennes d'émission

S <sub>0000</sub>	S <sub>0001</sub>	S <sub>0010</sub>	S <sub>0011</sub>	S <sub>0100</sub>	S <sub>0101</sub>	S <sub>0110</sub>	S <sub>0111</sub>	S <sub>1000</sub>	S <sub>1001</sub>	S <sub>1010</sub>	S <sub>1011</sub>	S <sub>1100</sub>	S <sub>1101</sub>	S <sub>1110</sub>	S <sub>1111</sub>
000	030	020	010	101	131	121	111	001	031	021	011	100	130	120	110
212	202	232	222	313	303	333	323	213	203	233	223	312	302	332	322
022	012	002	032	123	113	103	133	023	013	003	033	122	112	102	132
230	220	210	200	331	321	311	301	231	221	211	201	330	320	310	300

Tableau 4.2 - *Set partitioning* pour un treillis de 16 états, une modulation QPSK et trois antennes d'émission

S <sub>0000</sub>	S <sub>0001</sub>	S <sub>0010</sub>	S <sub>0011</sub>	S <sub>0100</sub>	S <sub>0101</sub>	S <sub>0110</sub>	S <sub>0111</sub>	S <sub>1000</sub>	S <sub>1001</sub>	S <sub>1010</sub>	S <sub>1011</sub>	S <sub>1100</sub>	S <sub>1101</sub>	S <sub>1110</sub>	S <sub>1111</sub>
000	001	002	003	010	011	012	013	020	021	022	023	030	031	032	033
111	112	113	110	121	122	123	120	131	132	133	130	101	102	103	100
222	223	220	221	232	233	230	231	202	203	200	201	212	213	210	211
333	330	331	332	303	300	301	302	313	310	311	312	323	320	321	322

L'exemple très simple du code présenté en (4.1) nous a donné l'idée d'essayer une structure légèrement différente, dans laquelle toutes les antennes et tous les créneaux temporels sont utilisés. L'objectif est de conserver pour cette structure le CGD minimum égal à 72 que nous avons trouvé pour le code (4.1). L'inconvénient de la nouvelle structure est qu'il n'existe pas de calcul facilement exploitable comme en (4.2) de la quantité  $\det(A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2))$ . La nouvelle matrice STBC de base prend la forme ci-dessous définie en (4.4) :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1^* e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3^* e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Pour une telle matrice, on a :

$$A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) = (\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) - \mathcal{G}(x'_1, x'_2, x'_3)) \times (\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) - \mathcal{G}(x'_1, x'_2, x'_3))^H$$

$$A(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) = \begin{pmatrix} |z_2|^2 + 2|z_1|^2 & -(z_3)(z_1)^* e^{j\beta} & -(z_2)^*(z_3)e^{-j\alpha} + (z_3)^*(z_1) + (z_1)^*(z_2)e^{j\beta} \\ -(z_3)^*(z_1)e^{-j\beta} & |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 & (z_3)(z_1)^* e^{-j\alpha} \\ -(z_2)(z_3)^* e^{j\alpha} + (z_3)(z_1)^* + (z_1)(z_2)^* e^{-j\beta} & (z_3)^*(z_1)e^{j\alpha} & 2|z_3|^2 + |z_2|^2 \end{pmatrix}$$

avec :  $z_1 = x_1 - x'_1$  ,  $z_2 = x_2 - x'_2$  et  $z_3 = x_3 - x'_3$  .

### 4.3 Critères et règles de partitionnement

La difficulté de l'utilisation de (4.4) provient évidemment du fait que la valeur de  $\det(A(C^1, C^2))$  est difficilement exploitable. Dans ce cas, il semble très délicat d'obtenir des règles de partitionnement.

Cependant, il existe un algorithme de partitionnement très général qui permet de traiter les cas où le  $\det(A(C^1, C^2))$  ne conduit pas à des expressions facilement exploitables. Cet algorithme a été proposé à WCNC 2005 par M. Janani et A. Nosratinia [59] et appliqué tout d'abord au contexte des codes linéaires à dispersion. C'est cet algorithme que nous utiliserons ici avec les degrés de liberté supplémentaires donnés par les angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

Nous rappelons les principes généraux de cet algorithme. Le critère de distance entre mots de code utilisé ici correspond au calcul du déterminant de la matrice différence  $A(C^1, C^2)$  puisque nous utilisons une matrice STBC quasi-orthogonale :  $d(C^1, C^2) = \det(A(C^1, C^2))$ . Nous nous contentons de décrire ici l'étape qui consiste à partager l'ensemble des mots de code  $S_0$  en deux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_1^*$  de telle sorte que la distance minimale entre deux mots de code à l'intérieur de chacun de ces deux sous-ensembles soit maximisée. Cette étape s'applique à chaque étage du partitionnement pour doubler le nombre de sous-constellations. L'objectif sera atteint si pour chacune des paires de mots de code affichant une petite distance, ces mots de code appartiennent à des sous-constellations différentes. Pour le réaliser, on construit deux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_1^*$  qui contiendront les mots de code dont la distance est trop faible. Dans la construction du treillis ces deux sous-ensembles seront séparés en affectant une matrice unitaire propre à chacun d'eux. La stratégie de partitionnement consiste alors à classer les paires de mots de code en ordre croissant selon la valeur de  $\det(A(C^1, C^2))$ . A chaque fois, que l'on trouve une valeur faible (en dessous d'un seuil préfixé, ici ce seuil peut être pris égal à zéro), si l'un des deux mots de code appartient déjà à un sous ensemble ( $S_1$  par exemple) alors, automatiquement, l'autre est affecté au sous-ensemble restant  $S_1^*$ . Dans le cas où aucun des deux n'appartient encore à l'un des deux sous-ensembles, on crée une paire de nouveaux sous-ensembles  $S_2$  et  $S_2^*$  pour ces mots de code et on les affecte dans ces nouveaux sous-ensembles. Il est clair qu'en agissant ainsi on multiplie les sous-ensembles et il faut trouver un moyen de regrouper ces sous-ensembles entre eux à la fin de l'algorithme pour n'avoir plus que les deux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_1^*$ . Ce problème est illustré sur la figure 1 ci-dessous.

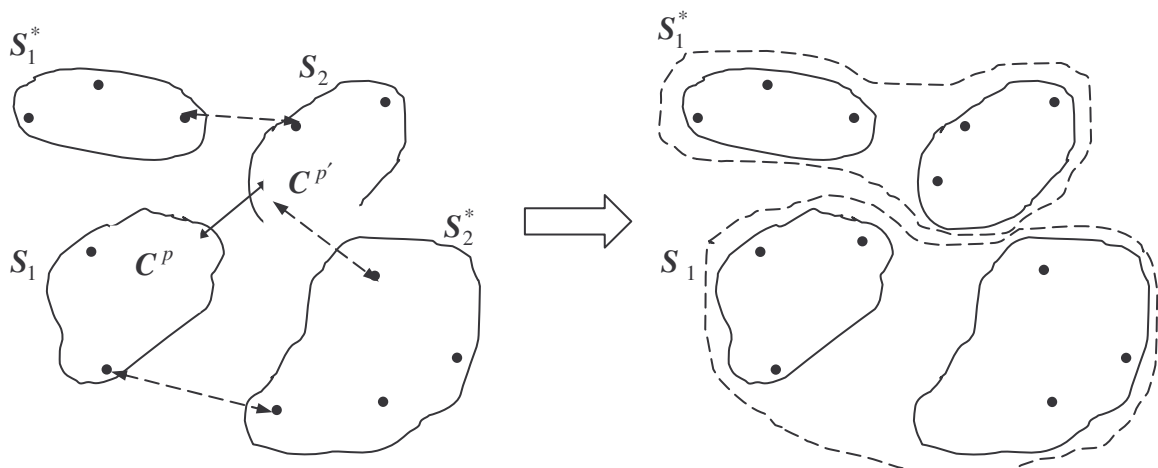


Figure 4.1 - Réunion des sous-ensembles

Comme le montre la partie gauche de la figure 4.1, on se retrouve par exemple dans le cas de quatre sous-ensembles  $S_1, S_1^*, S_2$  et  $S_2^*$ . On se rend compte que la plus petite distance entre sous ensemble correspond à  $d(C^p, C^{p'})$  lorsque  $C^p$  appartient à  $S_1$  et  $C^{p'}$  appartient à  $S_2$ . Ainsi, on ne doit pas regrouper  $S_2$  avec  $S_1$ . D'autre part, il est clair d'après les étapes précédentes de l'algorithme, que l'on doit séparer  $S_1$  et  $S_1^*$ . D'où, finalement, on regroupe  $S_1$  et  $S_2^*$ , d'un côté, pour former le premier sous-ensemble rebaptisé  $S_1$  et on regroupe  $S_1^*$  et  $S_2$ , de l'autre côté, pour former le deuxième sous-ensemble rebaptisé  $S_1^*$ . La stratégie illustrée ci-dessus pour le cas de quatre sous-ensembles peut se généraliser facilement à un nombre quelconque de sous-ensembles et c'est ce que M. Janani et A. Nosratinia ont proposé dans [59] sous la forme d'un algorithme de recherche. Cet algorithme peut se résumer de la façon suivante :

1) *Calcul de  $\min_{i,j} d(C^i, C^j)$  puis  $S_1 := \{C^i\}$  et  $S_1^* := \{C^j\}$*

2) *Tant qu'il reste des mots de code non affectés faire*

a) *Recalculer  $\min_{i,j} d(C^i, C^j) := d_1$*

*Trouver  $\min_{k,l} d(S_k, C^l) := d_2$*

*Trouver  $\min_{m,n} d(S_m, S_n) := d_3$*

b) *Si  $d_1 < \min(d_2, d_3)$*

*Création de deux nouveaux sous-ensembles  $\{C^i\}$  et  $\{C^j\}$*

*Si  $d_2 < \min(d_1, d_3)$*

*Inclure  $C^l$  dans  $S_k^*$*

c) *Sinon faire le regroupement*

$S_m \leftarrow S_m \cup S_n^*$

$S_m^* \leftarrow S_m^* \cup S_n$

*Eliminer  $S_n$  et  $S_n^*$*

*Fin Si*

*Fin Tant que*

*Fin*

Cet algorithme est appliqué pour rechercher le partitionnement optimal dans le cas de la matrice élémentaire présentée en équation (4.4). Les angles  $\alpha$  et  $\beta$ . permettent de plus d'optimiser la valeur minimale du CGD à l'intérieur de chaque sous-constellation. En effet, même si l'obtention de  $\det(A(C^1, C^2))$  ne conduit pas à des expressions facilement exploitables dans le cas général, il en va tout autrement si on considère des cas plus restrictifs où deux symboles peuvent être égaux à l'intérieur d'une même sous-constellation. Dans ce cas, on est confronté aux trois possibilités suivantes :

**a)** Les symboles  $x_1$  et  $x'_1$  sont égaux, donc  $z_1 = 0$  (car  $z_1 = x_1 - x'_1$ ). Le calcul de  $\det(A(C^1, C^2))$  conduit alors à :

$$A(C^1, C^2) = \begin{pmatrix} |z_2|^2 & 0 & -(z_2)^*(z_3)e^{-j\alpha} \\ 0 & |z_2|^2 + |z_3|^2 & 0 \\ -(z_2)(z_3)^*e^{j\alpha} & 0 & 2|z_3|^2 + |z_2|^2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

et :

$$\det(A(C^1, C^2)) = |z_2|^2 \left( |z_2|^2 + |z_3|^2 \right)^2 = |x_2 - x'_2|^2 \left( |x_2 - x'_2|^2 + |x_3 - x'_3|^2 \right)^2 \quad (4.6)$$

**b)** Les symboles  $x_2$  et  $x'_2$  sont égaux, donc  $z_2 = 0$  (car  $z_2 = x_2 - x'_2$ ). Le calcul de  $\det(A(C^1, C^2))$  conduit alors à :

$$A(C^1, C^2) = \begin{pmatrix} 2|z_1|^2 & -(z_3)(z_1)^*e^{j\beta} & (z_3)^*(z_1) \\ -(z_3)^*(z_1)e^{-j\beta} & |z_1|^2 + |z_3|^2 & (z_3)(z_1)^*.e^{-j\alpha} \\ (z_3)(z_1)^* & (z_3)^*(z_1)e^{j\alpha} & 2|z_3|^2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

et :

$$\begin{aligned} \det(A(C^1, C^2)) &= |z_1|^4 |z_3|^2 + |z_1|^2 |z_3|^4 - 2\text{Re}[(z_3^*)^3 (z_1)^3 \exp(j(\alpha - \beta))] \\ &= |x_1 - x'_1|^4 |x_3 - x'_3|^2 + |x_1 - x'_1|^2 |x_3 - x'_3|^4 - 2\text{Re}[(x_3^* - x'_3)^3 \cdot (x_1 - x'_1)^3 \cdot \exp(j(\alpha - \beta))] \end{aligned} \quad (4.8)$$

**c)** Les symboles  $x_3$  et  $x'_3$  sont égaux donc  $z_3 = 0$  (car  $z_3 = x_3 - x'_3$ ). Le calcul de  $\det(A(C^1, C^2))$  conduit alors à :

$$A(C^1, C^2) = \begin{pmatrix} |z_2|^2 + 2|z_1|^2 & 0 & (z_1)^*(z_2)e^{j\beta} \\ 0 & |z_1|^2 + |z_2|^2 & 0 \\ (z_1)(z_2)^*e^{-j\beta} & 0 & |z_2|^2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

et :



$$\begin{aligned} \det(A(C^1, C^2)) &= |z_2|^2 \left( |z_1|^2 + |z_3|^2 \right) \left( |z_2|^2 + |z_3|^2 \right) \\ &= |x_2 - x'_2|^2 \left( |x_1 - x'_1|^2 + |x_3 - x'_3|^2 \right) \left( |x_2 - x'_2|^2 + |x_3 - x'_3|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'expression obtenue dans le cas b) (équation (4.8)) montre bien l'utilité des angles  $\alpha$  et  $\beta$ . Ils servent à séparer les triplets de points qui possèdent le deuxième symbole en commun. Ces angles doivent appartenir à la constellation des signaux transmis si on ne veut pas étendre la constellation. Cependant, notre but étant ici de maximiser la valeur minimale des CGD à l'intérieur de chaque sous-constellation, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  n'appartiendront pas forcément à la constellation transmise.

La recherche du partitionnement se fait alors en deux étapes :

- On sélectionne d'abord pour une valeur du couple  $(\alpha, \beta)$  donné (par exemple le couple (0,0)) la sous-constellation optimale (au sens de la maximisation du CGD) d'après l'algorithme de M. Janani et A. Nosratinia,
- Puis on fait varier les valeurs de  $(\alpha, \beta)$  (par exemple par pas de  $\pi/16$ ) pour chercher la valeur maximale du CGD à l'intérieur de chaque sous-constellation.

On obtient les partitionnements illustrés en figures 4.2 et 4.3 pour le cas d'une constellation QPSK. La différence entre les deux partitionnements proposés provient du fait que dans un cas on construit la sous-constellation d'ordre  $n$  en utilisant uniquement les éléments d'une seule sous-constellation d'ordre  $n-1$ . Cette façon de procéder correspond aux règles de partitionnement initialement proposées par Ungerboeck [47]. Alors que, dans l'autre cas, on construit la sous-constellation d'ordre  $n$  en utilisant tous les éléments de toutes les sous-constellations d'ordre  $n-1$ , ce qui confère un degré de liberté supplémentaire au partitionnement pour obtenir des CGD plus élevés. Le premier niveau de partitionnement à 4 éléments (comportant chacun 16 triplets) est obtenu en prenant des triplets qui diffèrent tous les uns des autres par au moins deux symboles et il est le même pour les deux types de partitionnement proposés. Les angles  $(\alpha, \beta)$  optimaux sont également illustrés sur les figures 4.2 et 4.3.

On peut remarquer que les valeurs de  $(\alpha, \beta)$  optimales ne correspondent pas à des symboles de constellation QPSK, on en conclut qu'une extension de constellation est inévitable si on veut travailler avec des valeurs de CGD maximales. La valeur optimale obtenue avec un partitionnement à 16 sous-constellations dans le cas de la figure 4.2 est la même que celle obtenue avec le code proposé en équation (4.1), à savoir un CGD minimum de 72.

Un partitionnement à 32 sous-constellations conduit dans le cas de la figure 4.3 à un CGD égal à 256 dans chaque sous-constellation. Les valeurs de CGD minimum obtenues, pour des partitionnements à 16 et 32 sous-constellations conduisent à des codes temps-espace qui offrent de meilleures valeurs de déterminants que les meilleurs codes STTC optimisés par Vucetic & al. Ainsi, on peut légitimement penser qu'une amélioration des performances est possible comme dans le cas des systèmes à deux antennes d'émission.

Nous avons également généralisé le principe de partitionnement au cas de la modulation 8-PSK. Le premier niveau de partitionnement correspond au cas où les triplets de symboles diffèrent les uns des autres par au moins deux symboles. On obtient donc au départ 8 sous-constellations comportant chacune 64 triplets de symboles (en 8-PSK, on a en tout  $8^3 = 512$  triplets de symboles à trier). La valeur de CGD minimum correspondant à ce partitionnement est égale à  $3 \cdot 10^{-2}$ . Le deuxième niveau de partitionnement comprend 16 sous-constellations comportant chacune 32 triplets de symboles et possède une valeur de CGD minimum égale à

0.25. Cette valeur augmente à 0.8 pour un partitionnement à 32 sous-constellations de 16 triplets. De façon très nette, on peut constater que les valeurs de CGD minimum décroissent considérablement en passant d'une QPSK à une 8-PSK. La figure 4.4 représente les trois premiers niveaux de partitionnement pour la modulation 8-PSK. Pour des raisons évidentes de place, seule la première sous-constellation  $S_{000}$  est représentée au premier niveau de partitionnement.

#### 4.4 Construction des treillis

Après avoir expliqué les principes de partitionnement, nous montrons maintenant comment construire des codes STTC utilisant la structure de la matrice donnée en (4.4). La difficulté est de construire un code qui présente toujours le maximum de gain de diversité. D'après les critères de construction élaborés par V. Tarokh dans [36], pour obtenir un code à diversité maximale, il faut vérifier que pour chaque paire de mots de code distincts  $(C^1, C^2)$  on a  $\det(A(C^1, C^2)) \neq 0$ . Si cette condition est évidemment vérifiée à l'intérieur de chaque sous-constellation il est cependant aisé de se rendre compte que la valeur de ce déterminant peut devenir nulle pour  $C^1$  et  $C^2$  appartenant à des sous-constellations différentes.

On est donc confronté à la nécessité de séparer les sous-constellations construites à l'aide de nouveaux outils algébriques. Pour cela, on utilise comme dans [47] des matrices unitaires d'ordre 3. Cela signifie que la matrice de base (4.4) se retrouvera multipliée par une matrice unitaire dans chaque sous-constellation construite. Ces matrices appartiennent au groupe spécial unitaire d'ordre 3 (SU(3)) et correspondent physiquement à des rotations. Comme les rotations préservent les distances entre les points à l'intérieur d'une même sous-constellation l'utilisation de matrices unitaires ne changent pas les valeurs de CGD minimum à l'intérieur des sous-constellations. Par contre, en utilisant des matrices unitaires différentes pour des sous-constellations distinctes, on peut faire en sorte que  $\det(A(C^1, C^2)) \neq 0$  pour chaque paire de mots de code distincts  $(C^1, C^2)$  et ainsi construire un code à maximum de diversité.

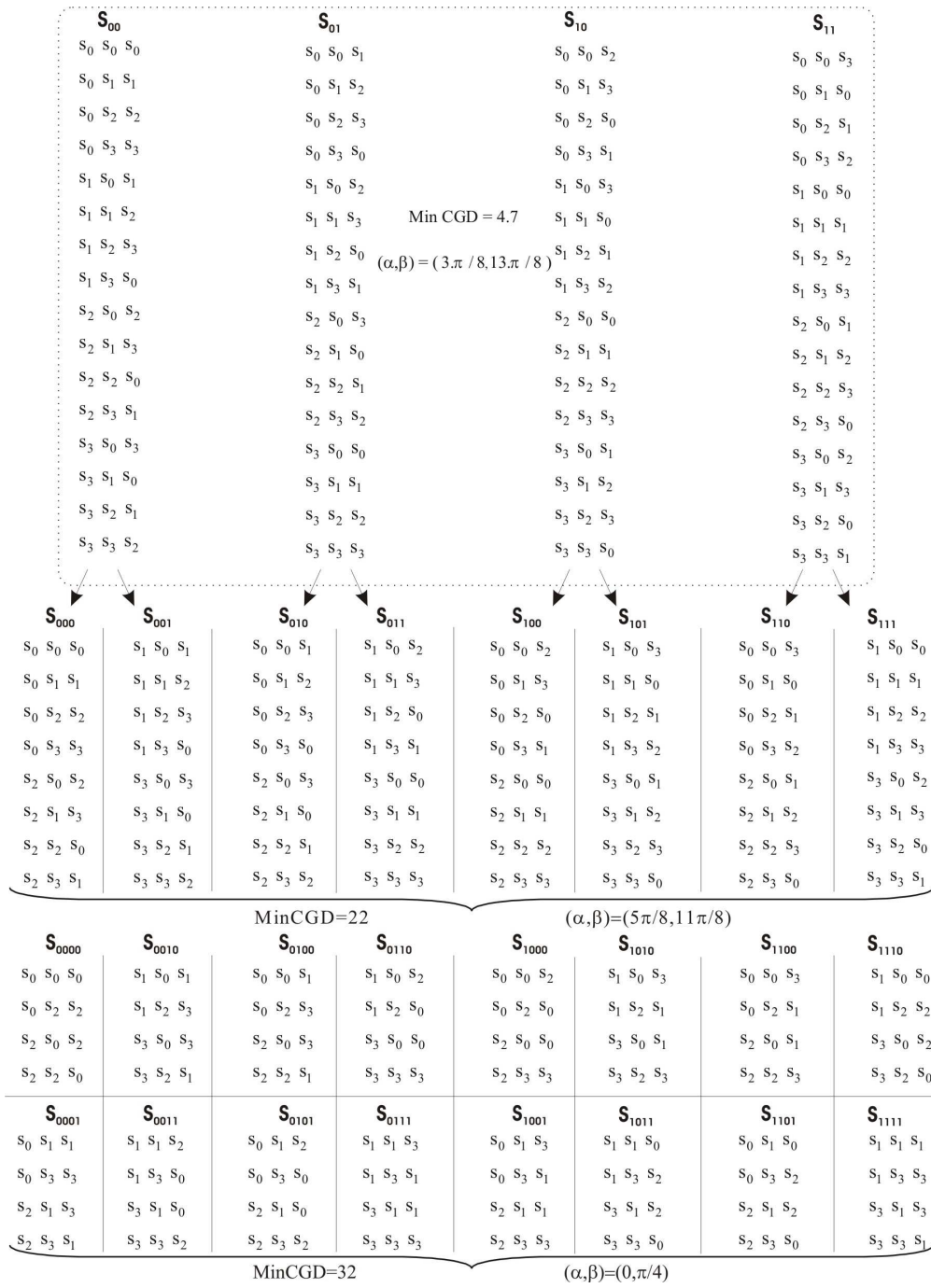


Figure 4.2 - Partitionnement pour modulation QPSK

$S_{00}$	$S_{01}$	$S_{10}$	$S_{11}$
$s_0 s_0 s_0$	$s_0 s_0 s_1$	$s_0 s_0 s_2$	$s_0 s_0 s_3$
$s_0 s_1 s_1$	$s_0 s_1 s_2$	$s_0 s_1 s_3$	$s_0 s_1 s_0$
$s_0 s_2 s_2$	$s_0 s_2 s_3$	$s_0 s_2 s_0$	$s_0 s_2 s_1$
$s_0 s_3 s_3$	$s_0 s_3 s_0$	$s_0 s_3 s_1$	$s_0 s_3 s_2$
$s_1 s_0 s_1$	$s_1 s_0 s_2$	$s_1 s_0 s_3$	$s_1 s_0 s_0$
$s_1 s_1 s_2$	$s_1 s_1 s_3$	$s_1 s_1 s_0$	$s_1 s_1 s_1$
$s_1 s_2 s_3$	$s_1 s_2 s_0$	$s_1 s_2 s_1$	$s_1 s_2 s_2$
$s_1 s_3 s_0$	$s_1 s_3 s_1$	$s_1 s_3 s_2$	$s_1 s_3 s_3$
$s_2 s_0 s_2$	$s_2 s_0 s_3$	$s_2 s_0 s_0$	$s_2 s_0 s_1$
$s_2 s_1 s_3$	$s_2 s_1 s_0$	$s_2 s_1 s_1$	$s_2 s_1 s_2$
$s_2 s_2 s_0$	$s_2 s_2 s_1$	$s_2 s_2 s_2$	$s_2 s_2 s_3$
$s_2 s_3 s_1$	$s_2 s_3 s_2$	$s_2 s_3 s_3$	$s_2 s_3 s_0$
$s_3 s_0 s_3$	$s_3 s_0 s_0$	$s_3 s_0 s_1$	$s_3 s_0 s_2$
$s_3 s_1 s_0$	$s_3 s_1 s_1$	$s_3 s_1 s_2$	$s_3 s_1 s_3$
$s_3 s_2 s_1$	$s_3 s_2 s_2$	$s_3 s_2 s_3$	$s_3 s_2 s_0$
$s_3 s_3 s_2$	$s_3 s_3 s_3$	$s_3 s_3 s_0$	$s_3 s_3 s_1$

Min CGD = 4.7  
 $(\alpha, \beta) = (3\pi/8, 13\pi/8)$

$S_{000}$	$S_{001}$	$S_{010}$	$S_{011}$	$S_{100}$	$S_{101}$	$S_{110}$	$S_{111}$
$s_0 s_0 s_0$	$s_0 s_3 s_0$	$s_0 s_2 s_0$	$s_0 s_1 s_0$	$s_0 s_0 s_1$	$s_0 s_3 s_1$	$s_0 s_2 s_1$	$s_0 s_1 s_1$
$s_2 s_1 s_2$	$s_2 s_0 s_2$	$s_2 s_3 s_2$	$s_2 s_2 s_2$	$s_2 s_1 s_3$	$s_2 s_0 s_3$	$s_2 s_3 s_3$	$s_2 s_2 s_3$
$s_0 s_2 s_2$	$s_0 s_1 s_2$	$s_0 s_0 s_2$	$s_0 s_3 s_2$	$s_0 s_2 s_3$	$s_0 s_1 s_3$	$s_0 s_0 s_3$	$s_0 s_3 s_3$
$s_2 s_3 s_0$	$s_2 s_2 s_0$	$s_2 s_1 s_0$	$s_2 s_0 s_0$	$s_2 s_3 s_1$	$s_2 s_2 s_1$	$s_2 s_1 s_1$	$s_2 s_0 s_1$
$s_1 s_0 s_1$	$s_1 s_3 s_1$	$s_1 s_2 s_1$	$s_1 s_1 s_1$	$s_1 s_0 s_0$	$s_1 s_3 s_0$	$s_1 s_2 s_0$	$s_1 s_1 s_0$
$s_3 s_1 s_3$	$s_3 s_0 s_3$	$s_3 s_3 s_3$	$s_3 s_2 s_3$	$s_3 s_1 s_2$	$s_3 s_0 s_2$	$s_3 s_3 s_2$	$s_3 s_2 s_2$
$s_1 s_2 s_3$	$s_1 s_1 s_3$	$s_1 s_0 s_3$	$s_1 s_3 s_3$	$s_1 s_2 s_2$	$s_1 s_1 s_2$	$s_1 s_0 s_2$	$s_1 s_3 s_2$
$s_3 s_3 s_1$	$s_3 s_2 s_1$	$s_3 s_1 s_1$	$s_3 s_0 s_1$	$s_3 s_3 s_0$	$s_3 s_2 s_0$	$s_3 s_1 s_0$	$s_3 s_0 s_0$

MinCGD=16  
 $(\alpha, \beta) = (\pi/8, 13\pi/8)$

$S_{0000}$	$S_{0010}$	$S_{0100}$	$S_{0110}$	$S_{1000}$	$S_{1010}$	$S_{1100}$	$S_{1110}$
$s_0 s_0 s_0$	$s_0 s_3 s_0$	$s_0 s_2 s_0$	$s_0 s_1 s_0$	$s_0 s_0 s_1$	$s_0 s_3 s_1$	$s_0 s_2 s_1$	$s_0 s_1 s_1$
$s_2 s_1 s_2$	$s_2 s_0 s_2$	$s_2 s_3 s_2$	$s_2 s_2 s_2$	$s_2 s_1 s_3$	$s_2 s_0 s_3$	$s_2 s_3 s_3$	$s_2 s_2 s_3$
$s_0 s_2 s_2$	$s_0 s_1 s_2$	$s_0 s_0 s_2$	$s_0 s_3 s_2$	$s_0 s_2 s_3$	$s_0 s_1 s_3$	$s_0 s_0 s_3$	$s_0 s_3 s_3$
$s_2 s_3 s_0$	$s_2 s_2 s_0$	$s_2 s_1 s_0$	$s_2 s_0 s_0$	$s_2 s_3 s_1$	$s_2 s_2 s_1$	$s_2 s_1 s_1$	$s_2 s_0 s_1$
$s_1 s_0 s_1$	$s_1 s_3 s_1$	$s_1 s_2 s_1$	$s_1 s_1 s_1$	$s_1 s_0 s_0$	$s_1 s_3 s_0$	$s_1 s_2 s_0$	$s_1 s_1 s_0$
$s_3 s_1 s_3$	$s_3 s_0 s_3$	$s_3 s_3 s_3$	$s_3 s_2 s_3$	$s_3 s_1 s_2$	$s_3 s_0 s_2$	$s_3 s_3 s_2$	$s_3 s_2 s_2$
$s_1 s_2 s_3$	$s_1 s_1 s_3$	$s_1 s_0 s_3$	$s_1 s_3 s_3$	$s_1 s_2 s_2$	$s_1 s_1 s_2$	$s_1 s_0 s_2$	$s_1 s_3 s_2$
$s_3 s_3 s_1$	$s_3 s_2 s_1$	$s_3 s_1 s_1$	$s_3 s_0 s_1$	$s_3 s_3 s_0$	$s_3 s_2 s_0$	$s_3 s_1 s_0$	$s_3 s_0 s_0$

MinCGD=72  
 $(\alpha, \beta) = (5\pi/16, 5\pi/16)$

Figure 4.3 - Autre partitionnement pour modulation QPSK

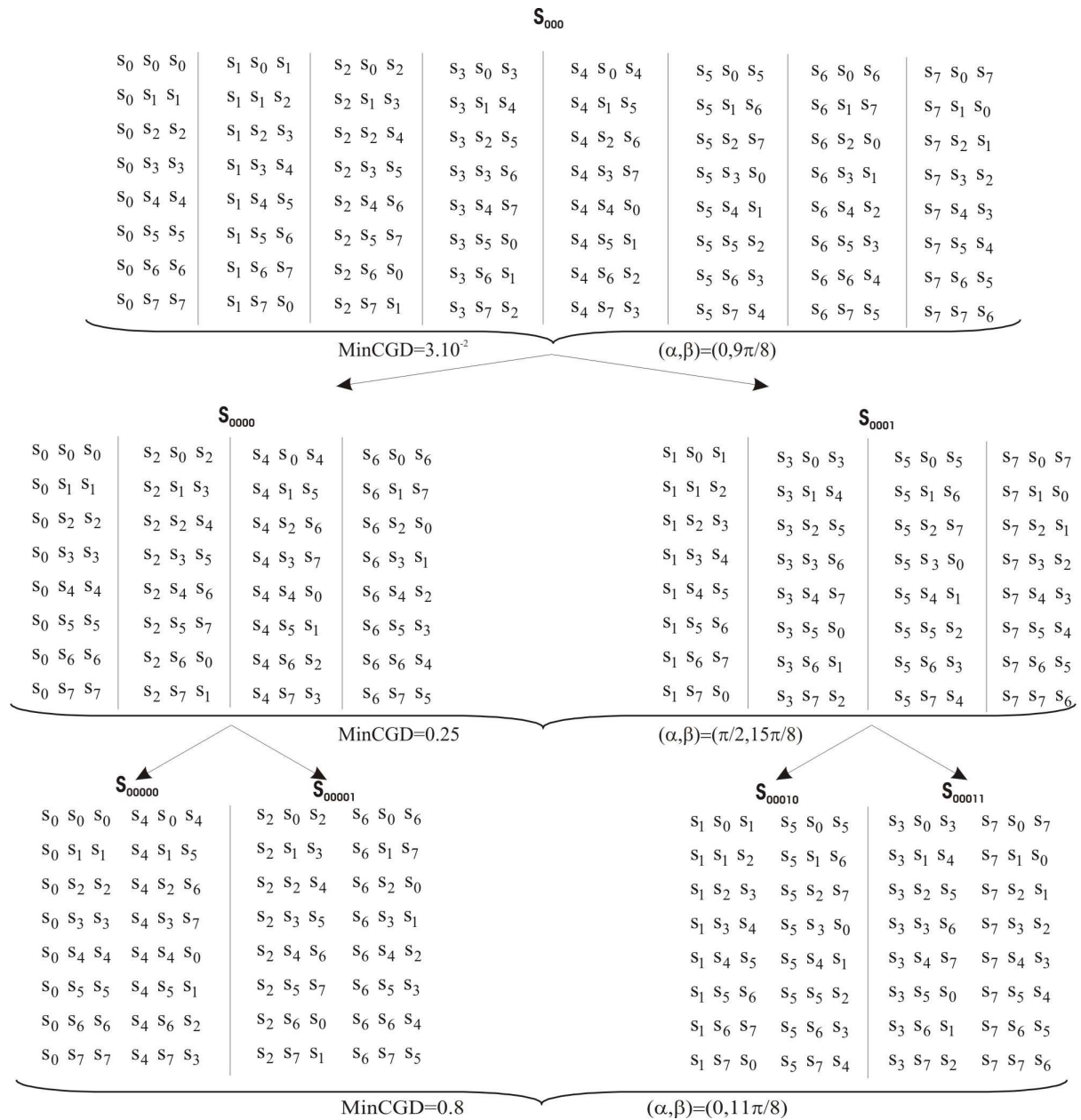


Figure 4.4 - Partitionnement pour modulation 8-PSK

Pour le choix de ces matrices unitaires il existe plusieurs paramétrages possibles. Hassibi & al dans [58] utilise l'exemple suivant de paramétrage. Toute matrice unitaire  $\mathcal{U}$  peut se décomposer sous la forme :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & e^{-j\phi} \cdot \sin \psi \\ 0 & -e^{j\phi} \cdot \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \cdot e^{j\omega} & 0 & \sqrt{1-\lambda^2} \cdot e^{j\xi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1-\lambda^2} \cdot e^{-j\xi} & 0 & \lambda \cdot e^{-j\omega} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \delta & e^{-j\gamma} \cdot \sin \delta & 0 \\ -e^{j\gamma} \cdot \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

D'autres paramétrages comme ceux proposés par Giannakis dans [62] à base de produit de matrices de Givens sont également possibles :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) \cdot \exp(j\theta) & \sin(\phi) \cdot \exp(j\psi) \\ 0 & -\sin(\phi) \cdot \exp(-j\psi) & \cos(\phi) \cdot \exp(-j\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cdot \exp(j\lambda) & 0 & \sin(\delta) \cdot \exp(-j\omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta) \cdot \exp(j\omega) & 0 & \cos(\delta) \cdot \exp(-j\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \exp(j\Phi) & \sin(\varphi) \cdot \exp(-j\zeta) & 0 \\ -\sin(\varphi) \cdot \exp(j\zeta) & \cos(\varphi) \cdot \exp(-j\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Il est clair, vu le nombre de degrés de liberté qui interviennent dans les expressions de (4.11) et (4.12) qu'il est très difficile de se fixer un critère de choix optimal pour ces matrices. L'idée que nous avons retenue est de générer ces matrices de façon aléatoire sur un grand nombre de tirages (typiquement  $10^7$  tirages) et de sélectionner le jeu de matrices qui permet d'obtenir la plus grande valeur possible de  $\min \min(\det(A(C^1, C^2)))$  lorsque  $C^1$  et  $C^2$  appartiennent à des sous-constellations différentes. Cette valeur s'interprète naturellement comme la distance minimale entre sous-constellations. Par exemple, dans le cas du partitionnement illustré sur la figure 4.3, pour la QPSK et pour 16 sous-constellations, nous avons trouvé, après  $10^7$  tirages, un jeu de 16 matrices unitaires telles que la distance minimale entre sous-constellations soit égale au maximum à 1.22. Cette distance s'accroît jusqu'à 4.16 dans le cas du partitionnement à 8 sous-constellations illustré sur la figure 4.3. Dans le cas d'une modulation 8-PSK les valeurs de distance minimale chutent considérablement. Pour un partitionnement à 8 sous-constellations (cf. figure 4.4) on trouve une distance minimale entre sous-constellations égale à 4.25 mais cette distance décroît à  $8.2 \cdot 10^{-2}$  pour un partitionnement à 16 sous-constellations et jusqu'à  $2.5 \cdot 10^{-2}$  pour un partitionnement à 32 sous-constellations.

Ayant séparé les sous-constellations entre elles à l'aide ces matrices unitaires, on peut alors construire le code STTC à base de code STBC correspondant au niveau de partitionnement choisi. La figure 4.5 illustre par exemple le cas d'un code à 16 états pour une modulation QPSK avec le partitionnement illustré sur la figure 4.3.

## 4.5 Remarques

Il existe d'autres types de construction que celle présentée en équation (4.4) qui assurent une quasi-orthogonalité comme celle utilisée. On peut citer par exemple les matrices :

$$\mathcal{G}_1 = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1^* \cdot e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3 \cdot e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix}, \mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1 \cdot e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3^* \cdot e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix}, \mathcal{G}_3 = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1 \cdot e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3 \cdot e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_4 = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1 \cdot e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ j \cdot x_3 \cdot e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix} \dots \text{etc.}$$

Cependant, aucune de ces formes alternatives ne présente de valeurs plus élevées de CGD minimum que celles présentées en figures 4.2 et 4.3.

Le critère du déterminant, comme le démontreront les performances obtenues, est bien adapté au cas des codes orthogonaux et quasi-orthogonaux. Cependant, il existe d'autres critères de partitionnement, comme celui de l'optimisation de la probabilité d'erreur PEP, plus efficaces si l'on considère le contexte de codes non-orthogonaux. A titre d'exemple, nous allons exhiber un code STBC basé sur une transformée de Fourier d'ordre 3 qui possède des valeurs de CGD minimum à l'intérieur de chaque sous-constellation bien plus élevées que le code de l'équation (4.4). Malgré ses valeurs de CGD minimum très élevées, ce code (pour un treillis présentant la même complexité et donc le même nombre d'états) affiche des performances inférieures au code quasi-orthogonal synthétisé à partir de la structure donnée en équation (4.4).

Considérons en effet le code présenté figure 4.5.

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \cdot \exp(j\alpha) & x_2 \cdot \exp(j2\alpha) \\ x_3 & x_3 \cdot \exp(j2\alpha) & x_3 \cdot \exp(j4\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$= \text{diag}(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \exp(j\alpha) & \exp(j2\alpha) \\ 1 & \exp(j2\alpha) & \exp(j4\alpha) \end{pmatrix}$$

$\alpha$  est une racine cubique de l'unité différente de un,  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  ou  $\frac{4\pi}{3}$ . Le calcul de  $\det(A(C^1, C^2))$  conduit à :

$$\det(A(C^1, C^2)) = 27 \cdot |x_1 - x_1'|^2 \cdot |x_2 - x_2'|^2 \cdot |x_3 - x_3'|^2 \quad (4.14)$$

avec  $x_1 = e^{j \cdot l_1 \cdot \omega}$ ,  $x_1' = e^{j \cdot k_1 \cdot \omega}$ ,  $x_2 = e^{j \cdot l_2 \cdot \omega}$ ,  $x_2' = e^{j \cdot k_2 \cdot \omega}$  and  $x_3 = e^{j \cdot l_3 \cdot \omega}$ ,  $x_3' = e^{j \cdot k_3 \cdot \omega}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ , on obtient finalement :

$$\det(A(C^1, C^2)) = 1728 \cdot \sin^2\left(\frac{|k_1 - l_1|}{2} \omega\right) \cdot \sin^2\left(\frac{|k_2 - l_2|}{2} \omega\right) \cdot \sin^2\left(\frac{|k_3 - l_3|}{2} \omega\right) \quad (4.15)$$

La formule (4.15) montre clairement qu'il est nécessaire que tous les symboles des triplets à l'intérieur d'une même sous-constellation soient tous distincts pour s'assurer que le CGD minimum est différent de 0. Dans le cas d'une constellation QPSK, cela entraîne l'utilisation d'au moins 16 sous-constellations avec 4 triplets de symboles à l'intérieur de chaque sous-constellation. Avec un tel partitionnement qui correspond en fait à celui donné en tableau 4.2 au début de ce chapitre, on arrive à un CGD minimum égal à 216 à l'intérieur de chaque sous-constellation. Cette valeur est trois fois plus élevée que celle que nous avons obtenue pour la matrice quasi-orthogonale en figure 4.3. Dans la partie du calcul des performances des codes STTC, ce code à fort CGD sera baptisé code STBDFT (*Space Time Block Discrete Fourier Transform*). A partir de ce code élémentaire il est en effet possible de bâtir un treillis tout à fait semblable à celui de la figure 4.5 en utilisant une fois de plus des matrices unitaires pour séparer les sous-constellations. On obtient par une recherche analogue à celle menée pour le code quasi-orthogonal un jeu de 16 matrices unitaires telles que la distance minimale entre sous-constellations soit égale à 1.25.

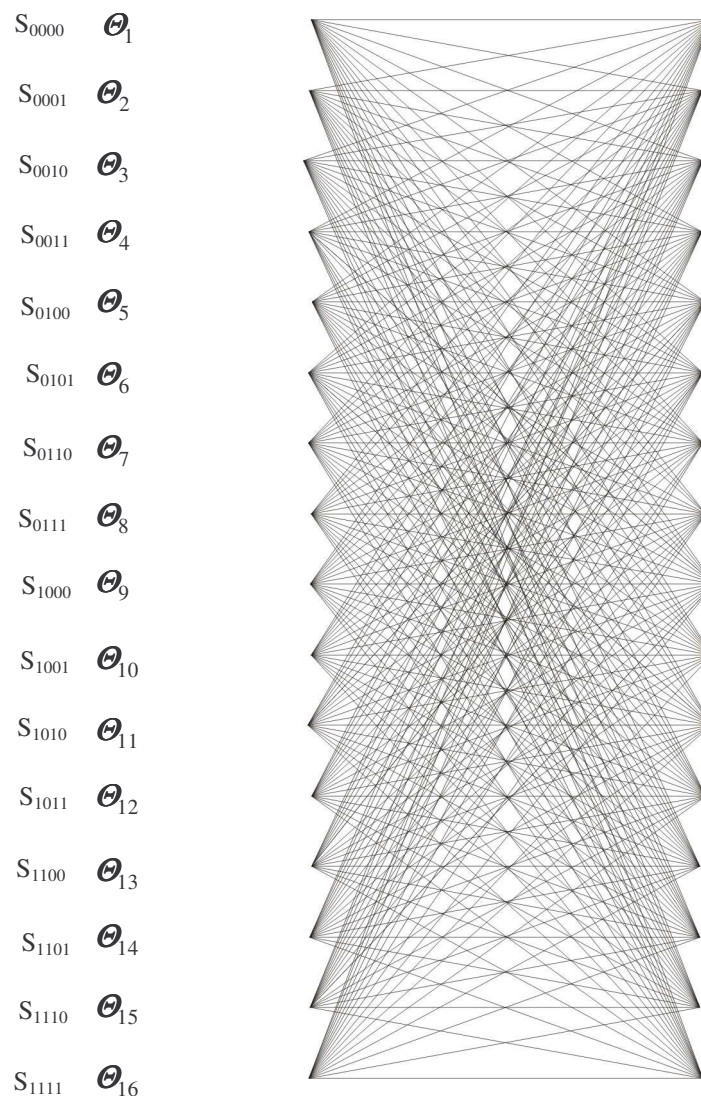


Figure 4.5 - Code SOSTTC à 16 états pour trois antennes d'émission



## 4.6 Décodage des codes STTC à base de code STBC

### 4.6.1. Cas du code quasi-orthogonal

Nous nous limitons ici, quitte à employer l'OFDM, au cas de canaux de propagation non sélectifs en fréquence entre chaque paire d'antennes d'émission / réception. De plus, considérant le cas de paquets de petite dimension, nous considérerons que le canal reste constant sur la durée d'un paquet. Par contre, le tirage des coefficients du canal sera activé à l'arrivée de chaque nouveau paquet. On obtient ainsi la modélisation d'un canal à évanouissements quasi-statiques par bloc (*quasi-static block fading channel*). Pour illustrer les calculs on considère de plus le cas d'une seule antenne de réception. On obtient alors la représentation mathématique suivante :

$$Y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Theta}^j \cdot \mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) + N \quad (4.16)$$

$\mathbf{H}$  contient les coefficients du canal de propagation,  $\mathbf{H} = [h_1 \ h_2 \ h_3]$ , les  $h_i$  sont des variables Gaussiennes de moyenne nulle et de variance 0.5 par dimension (parties réelle et imaginaire), elles seront supposées parfaitement estimées par le récepteur.  $\mathbf{\Theta}^j$  est la matrice unitaire 3×3 utilisée dans l'état  $j$  du treillis de notre code STTC. Cette matrice unitaire définit un canal de propagation propre à chaque état puisque l'on peut écrire  $[h_1^j \ h_2^j \ h_3^j] = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Theta}^j$ .  $N$  est un vecteur de bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Dans le cas où l'on calculera les performances pour plusieurs antennes de réception, le SNR affiché en abscisse correspondra au rapport signal à bruit sur chaque antenne de réception. Réécrivant l'équation vectorielle (4.16) en la décomposant en trois équations scalaires correspondant à l'observation de trois créneaux temporels successifs en réception, on aboutit à :

$$\begin{aligned} y_1 &= -h_1^j \cdot x_2^* + h_2^j \cdot x_1^* + h_3^j \cdot x_3^* \cdot e^{j\alpha} + n_1 \\ y_2 &= h_1^j \cdot x_1 + h_2^j \cdot x_2 + h_3^j \cdot x_3 + n_2 \\ y_3 &= h_1^j \cdot x_1^* \cdot e^{j\beta} - h_2^j \cdot x_3^* + h_3^j \cdot x_2^* + n_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour pouvoir calculer les métriques de branches, on forme alors les quantités auxiliaires, pour toutes les valeurs possibles de  $(x_1, x_3)$  dans la constellation transmise :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - h_3^j \cdot x_3^* \cdot e^{j\alpha} \\ y_2' &= y_2 - h_3^j \cdot x_3 \\ y_2'' &= y_2 - h_1^j \cdot x_1 \\ y_3' &= y_3 - h_1^j \cdot x_1^* \cdot e^{j\beta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

On peut alors utiliser la technique MRC (*Maximum Ratio Combining*) propre aux codes temps-espace orthogonaux. On obtient :

$$\begin{aligned}
y_1^{*} . h_2^j + h_1^{j*} . y_2' &= \left( |h_1^j|^2 + |h_2^j|^2 \right) . x_1 + n_2 . h_1^{j*} + n_1^* . h_2^j \\
-y_1^{*} . h_1^j + h_2^{j*} . y_2' &= \left( |h_1^j|^2 + |h_2^j|^2 \right) . x_2 + n_2 . h_2^{j*} - n_1^* . h_1^j \\
y_3^{*} . h_3^j + h_2^{j*} . y_2'' &= \left( |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) . x_2 + n_2 . h_2^{j*} + n_3^* . h_3^j \\
-y_3^{*} . h_2^j + h_3^{j*} . y_2'' &= \left( |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) . x_3 + n_2 . h_3^{j*} - n_3^* . h_2^j
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En sommant les équations (2) et (3) du système d'équations (4.19) on arrive alors à la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M} . \mathbf{X} + \mathbf{N}' \tag{4.20}$$

$$\text{avec } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y_1^* . h_2^j + y_2 . h_1^{j*} \\ -y_1^* . h_1^j + 2 . y_2 . h_2^{j*} + y_3^* . h_3^j \\ -y_3^* . h_2^j + y_2 . h_3^{j*} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{N}' = \begin{pmatrix} n_1^* . h_2^j + n_2 . h_1^{j*} \\ -n_1^* . h_1^j + 2 . n_2 . h_2^{j*} + n_3^* . h_3^j \\ n_2 . h_3^{j*} - n_3^* . h_2^j \end{pmatrix} \text{ et enfin :}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} |h_1^j|^2 + |h_2^j|^2 & 0 & h_3 . h_1^* + h_2 . h_3^* . e^{-j . \alpha} \\ h_1 . h_2^* + h_3 . h_1^* . e^{-j . \beta} & |h_1^j|^2 + 2 . |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 & h_3 . h_2^* - h_1 . h_3^* . e^{-j . \alpha} \\ h_1 . h_3^* - h_2 . h_1^* . e^{-j . \beta} & 0 & |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \end{pmatrix}$$

Le récepteur à Maximum de Vraisemblance aura à minimiser la métrique suivante  $(\mathbf{Z} - \mathbf{M} . \mathbf{X}) . \mathbf{R}_{\mathbf{N}'\mathbf{N}'}^{-1} . (\mathbf{Z} - \mathbf{M} . \mathbf{X})^H$ . La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{N}'\mathbf{N}'}$  se calcule aisément et l'on aboutit à :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{N}'\mathbf{N}'} = E(\mathbf{N}' . \mathbf{N}'^H) = \begin{pmatrix} \left( |h_1^j|^2 + |h_2^j|^2 \right) . \sigma^2 & h_1^{j*} . h_2^j . \sigma^2 & h_1^{j*} . h_3^j . \sigma^2 \\ h_2^{j*} . h_1^j . \sigma^2 & \left( |h_1^j|^2 + 4 . |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) . \sigma^2 & h_2^{j*} . h_3^j . \sigma^2 \\ h_1^j . h_3^{j*} . \sigma^2 & h_2^j . h_3^{j*} . \sigma^2 & \left( |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) . \sigma^2 \end{pmatrix}$$

On peut également utiliser une version sous-optimale de cette matrice d'autocorrélation en négligeant les termes en dehors de la diagonale. Dans ce cas le calcul de l'inverse de cette matrice est trivial et n'apporte pas de complexité supplémentaire pour le calcul des métriques dans l'algorithme de Viterbi. La matrice d'autocorrélation approximée s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{R}_{N'N'} = E(\mathbf{N}' \cdot \mathbf{N}'^H) \approx \begin{pmatrix} \left( |h_1^j|^2 + |h_2^j|^2 \right) \cdot \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left( |h_1^j|^2 + 4 \cdot |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) \cdot \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left( |h_2^j|^2 + |h_3^j|^2 \right) \cdot \sigma^2 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de Viterbi se déroule alors classiquement avec les métriques de branche définies par  $(\mathbf{Z} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}_{N'N'}^{-1} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X})^H$ .

#### 4.6.2. Cas du code STBDFT

Reprenant la même démarche que précédemment on peut écrire cette fois, sur trois temps symboles successifs au récepteur que :

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1^j \cdot x_1 + h_2^j \cdot x_2 + h_3^j \cdot x_3 + n_1 \\ y_2 &= h_1^j \cdot x_1 + h_2^j \cdot x_2 \cdot e^{j \cdot \alpha} + h_3^j \cdot x_3 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \alpha} + n_2 \\ y_3 &= h_1^j \cdot x_1 + h_2^j \cdot x_3 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \alpha} + h_3^j \cdot x_3 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot \alpha} + n_3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

On forme alors les quantités auxiliaires suivantes (en profitant du fait que  $1 + e^{j \cdot 2 \cdot \alpha} + e^{j \cdot 4 \cdot \alpha} = 0$ ) :

$$\begin{aligned} z_1^j &= y_1 + y_2 + y_3 \\ z_2^j &= y_1 + \exp(-j \cdot \alpha) \cdot y_2 + \exp(-j \cdot 2 \cdot \alpha) \cdot y_3 \\ z_3^j &= y_1 + \exp(-j \cdot 2 \cdot \alpha) \cdot y_2 + \exp(-j \cdot 4 \cdot \alpha) \cdot y_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Le calcul de la métrique de branche depuis l'état  $j$  s'effectue alors selon :

$$\gamma^j = \left| z_1^j - 3 \cdot h_1^j \cdot x_1 \right|^2 + \left| z_2^j - 3 \cdot h_2^j \cdot x_2 \right|^2 + \left| z_3^j - 3 \cdot h_3^j \cdot x_3 \right|^2 \quad (4.23)$$

### 4.7 Calcul des performances des codes STTC à base de code STBC

Il est clair que nous cherchons à montrer que l'utilisation de codes STTC utilisant des codes STBC comme constituant de base permet d'obtenir des gains de performance en terme de taux d'erreur par trame FER (*Frame Error Rate*) sur des canaux à évanouissements de Rayleigh quasi-statiques et non-sélectifs en fréquence. Pour opérer notre comparaison nous utilisons comme références les codes STTC de Vucetic & al optimisés pour le contexte de trois antennes d'émission à l'aide du critère du déterminant et du rang. Nous nous placerons dans le même contexte que les résultats de simulation de Vucetic & al, à savoir des tailles de paquets de 130 symboles, QPSK ou 8-PSK. Dans le cas des forts SNR ( $FER \leq 10^{-3}$ ), le calcul du FER est moyenné sur 100 000 tirages de canal. Sur chaque courbe sera rappelée également le calcul de la capacité *outage* du canal.

#### 4.7.1. Cas de la modulation QPSK

Les codes STTC optimisés qui nous servent de références proviennent de [60-61] et sont obtenus par recherche sur ordinateur à l'aide des critères du rang et du déterminant. Nous considérerons le cas de codes STTC à 16, 32 et 64 états. Les caractéristiques des codeurs correspondants sont données dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.3 - Codes STTC optimaux pour modulation QPSK sur canaux de Rayleigh quasi-statiques basés sur les critères du rang et du déterminant

Nb Tx	Mémoire	Matrice génératrice	Rang	Déterminant	Nb états	trace
3	4	$g_1=[(0,0,2),(0,1,2),(2,3,1)]$ $g_2=[(2,0,0),(1,2,0),(2,3,3)]$	3	32	16	16
3	5	$g_1=[(0,2,1),(2,0,0),(0,0,2)]$ $g_2=[(3,1,0),(3,2,1),(3,2,2),(2,0,0)]$	3	64	32	14
3	6	$g_1=[(1,1,2),(2,1,2),(1,2,0),(2,0,0)]$ $g_2=[(0,3,0),(0,3,2),(2,2,1),(0,2,2)]$	3	96	64	18

En ce qui concerne le choix des codes STTC basés sur des codes STBC nous prenons les codes ayant le CGD minimum le plus élevé : pour le code à 8 états, nous utilisons le partitionnement de la figure 4.2 avec un CGD minimum de 22 tandis que pour les codes à 16 états et 32 états nous utilisons le partitionnement de la figure 4.3 avec des CGD minimum respectivement égaux à 72 et 256. Pour les codes à 16 et 32 états on constate bien que les valeurs des CGD minimum des codes STTC à base de STBC sont largement supérieures aux valeurs des déterminants des codes STTC classiques.

Pour les simulations nous considérerons deux contextes : un système à trois antennes d'émission-une antenne de réception et un système à trois antennes d'émission-deux antennes de réception. Le cas du système à une antenne de réception est représenté sur la figure 4.6.

Nous pouvons constater sur la courbe de la figure 4.6 que le plus performant des codes STTC est le code STTC à base de STBC à 32 états. Il présente un gain de l'ordre de 0.2 dB par rapport au code STTC classique à 64 états pour un FER égal à  $10^{-2}$  et il permet de fonctionner à 2.8 dB de la capacité *outage* du canal pour des FER égaux à  $10^{-2}$  ou  $10^{-3}$ . Plus intéressant si l'on recherche des codes à faible complexité, on constate que notre code STTC à base de STBC à 8 états est plus performant que le STTC à 16 états, le gain est de l'ordre de 0.5 dB pour un FER égal à  $10^{-2}$ . D'autre part, à complexité de treillis équivalente c'est-à-dire en comparant des codes ayant le même nombre d'états, on constate que nos codes à base de STBC présentent un gain de l'ordre de 1 dB par rapport aux codes STTC.

Le contexte à deux antennes de réception est illustré sur la figure 4.7. Une fois de plus, les conclusions restent les mêmes. Le code STTC à base de STBC à 32 états présente un gain de 0.2 dB par rapport au code STTC 64 états. A complexité égale nos codes STTC à base de STBC présentent un gain de 1 dB par rapport aux codes STTC optimisés. La meilleure performance présentée par notre code STTC à base de STBC à 32 états est maintenant à 2.4 dB de la capacité *outage*.

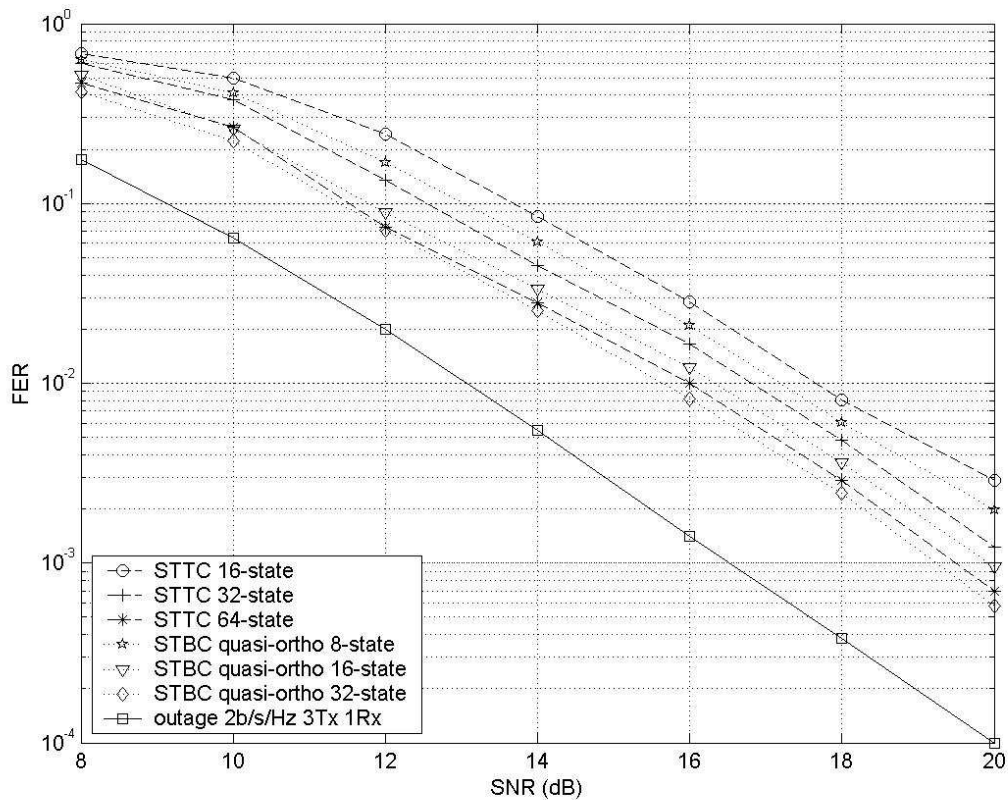


Figure 4.6 - Comparaison des performances des codes STTC et STTC à base de STBC pour une modulation QPSK dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et une antenne de réception

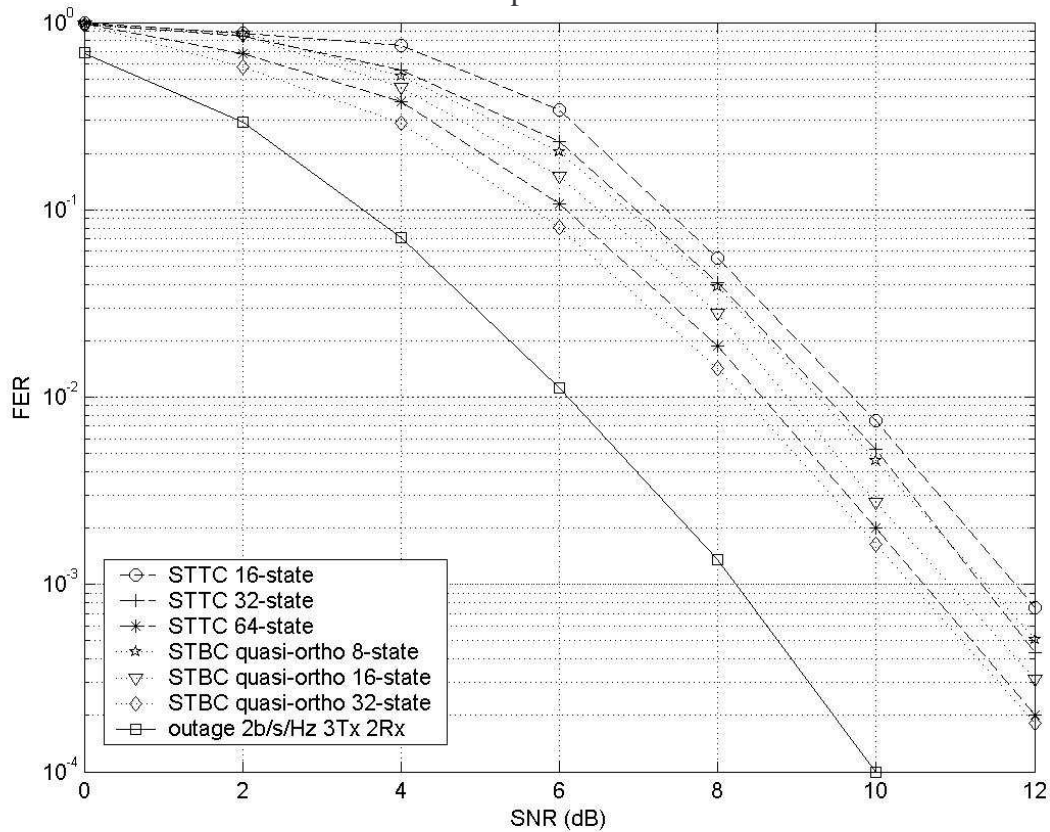


Figure 4.7 - Comparaison des performances des codes STTC et STTC à base de STBC pour une modulation QPSK dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et deux antennes de réception

#### 4.7.2. Cas de la modulation 8-PSK

Les codes STTC optimisés qui nous servent de références ici proviennent de [60-61] et sont obtenus par recherche sur ordinateur à l'aide des critères du rang et du déterminant. Nous considérerons le cas de codes STTC à 8, 16 et 32 états. Les caractéristiques des codeurs correspondants sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.4 - Codes STTC optimaux pour modulation 8-PSK sur canaux de Rayleigh quasi-statiques basés sur les critères du rang et du déterminant

Nb Tx	Mémoire	Matrices génératrices	Rang	Déterminant	Nb états	Trace
3	3	$g_1=[(2,1,3),(3,4,0)]$ $g_2=[(4,6,2),(2,0,4)]$ $g_3=[(0,4,4),(4,0,2)]$	2	-	16	12
3	4	$g_1=[(2,4,2),(3,7,2)]$ $g_2=[(4,0,4),(6,6,4)]$ $g_3=[(7,2,2),(0,7,6),(4,4,0)]$	2	-	32	14
3	5	$g_1=[(0,4,0),(4,4,4)]$ $g_2=[(0,2,4),(2,3,7),(2,2,7)]$ $g_3=[(4,2,6),(4,2,0),(3,7,2)]$	2	-	64	16

Pour les codes à base de STBC nous utilisons le partitionnement de la figure 4.4 et nous construisons deux codes à 16 et 32 états. Les performances sont illustrées sur les figures 4.8 et 4.9 pour respectivement une et deux antennes de réception. Les conclusions restent les mêmes que pour la modulation QPSK, cependant les écarts se resserrent sensiblement. A complexité égale le gain affiché par les STTC à base de STBC n'est plus que de 0.5 dB. Le meilleur code STTC à base de STBC à 32 états est à 2.5 dB de la capacité *outage* pour le cas d'une antenne de réception et à 2.3 dB pour le cas de deux antennes de réception.

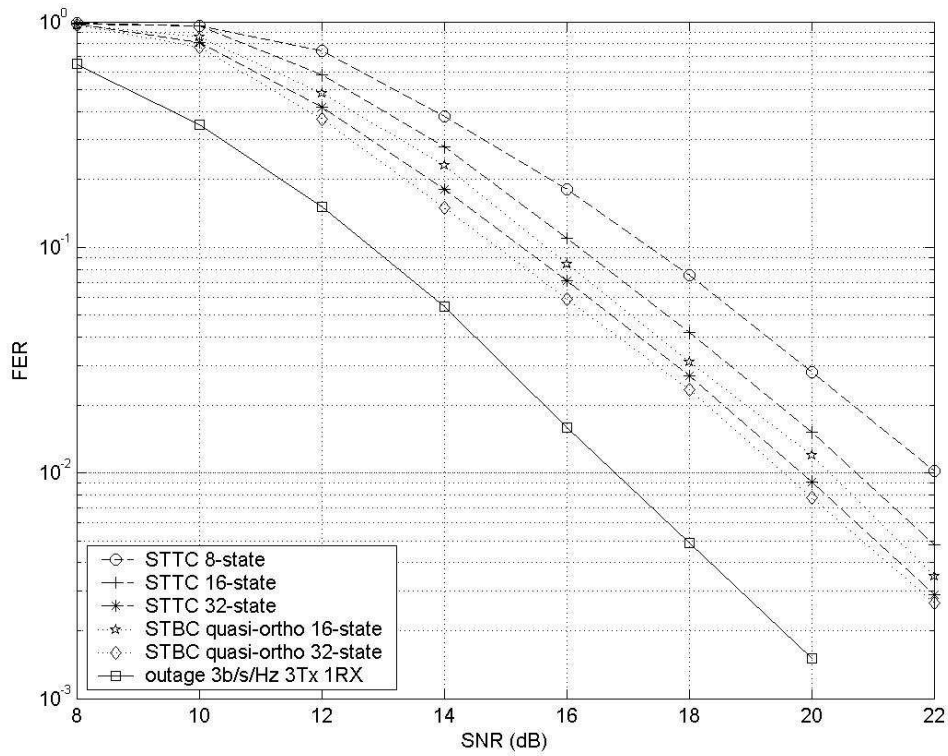


Figure 4.8 - Comparaison des performances des codes STTC et STTC à base de STBC pour une modulation 8-PSK dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et une antenne de réception

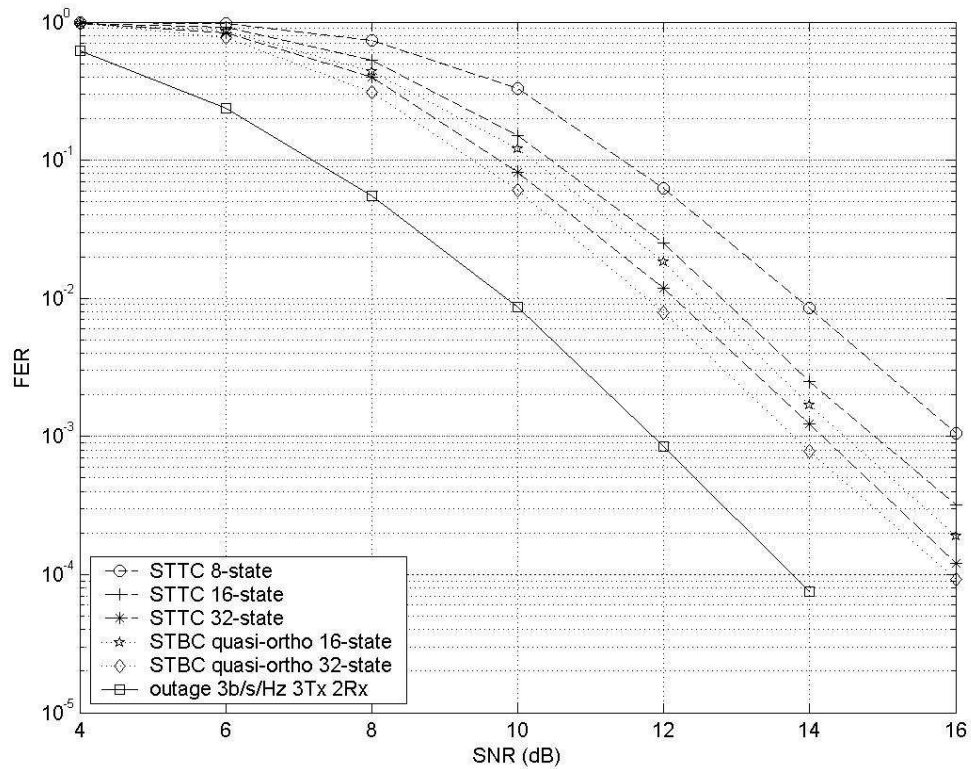


Figure 4.9 - Comparaison des performances des codes STTC et STTC à base de STBC pour une modulation 8-PSK dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et deux antennes de réception

### 4.7.3. Cas du code STBDFT

Pour terminer cette partie sur les résultats de simulation nous comparons les résultats du code quasi-orthogonal avec ceux du code STBDFT qui présente des CGD minimum plus élevés. Nous testons des codes à 16 et 32 états. Nous constatons que malgré une valeur de CGD minimum beaucoup plus élevée le code STBDFT présente des performances inférieures à celles du code quasi-orthogonal. A complexité équivalente le code quasi-orthogonal STBC présente un gain d'environ 0.3 dB pour des FER de  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . Il est à signaler que cet écart s'accroît lorsque l'on augmente le nombre d'antennes de réception. Ainsi, le critère du CGD ne s'avère pas nécessairement comme le plus pertinent, particulièrement dans le cas de codes en bloc non orthogonaux. Une optimisation directe de la PEP pour le code STBDFT est sans doute plus pertinente.

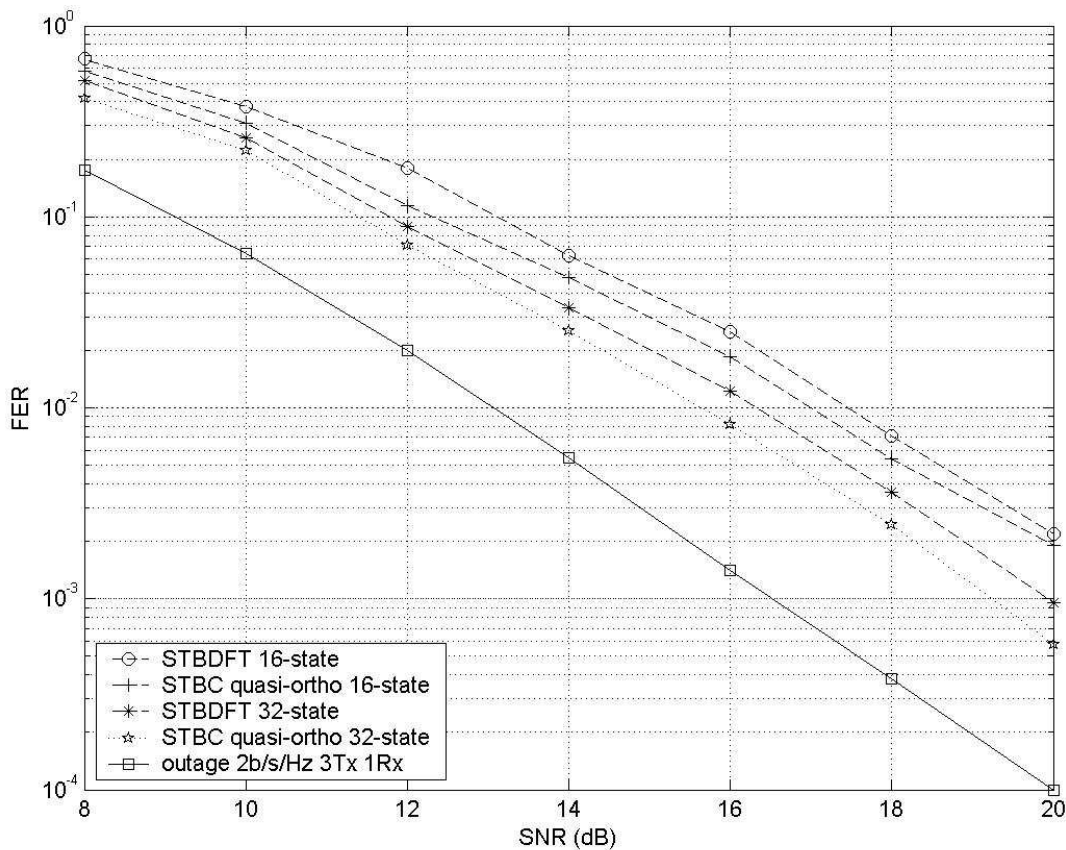


Figure 4.10 - Comparaison des performances des codes quasi-orthogonaux STBC et STBDFT pour une modulation QPSK dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et une antenne de réception

## 4.8 Conclusion

L'utilisation de codes STTC à base de STBC permet d'obtenir, surtout en QPSK, des gains de codage intéressants (de l'ordre de 1 dB) par rapport au contexte des codes STTC's optimisés d'après les critères du rang et du déterminant. Cet avantage, comme l'ont démontré les calculs



de CGD minimum dans le cas du partitionnement de la 8-PSK (CGD minimum qui sont beaucoup plus faibles en 8-PSK qu'en QPSK), est beaucoup moins évident en 8-PSK où les performances des codes apparaissent beaucoup plus resserrées. A complexité égale, les performances des codes STTC à base de STBC sont encore supérieures à celles des codes STTC avec un gain maximum de l'ordre de 0.5 dB à 1 dB.

# CHAPITRE 5    CODAGE TURBO POUR LES CODES STTC A BASE DE CODES STBC

---

5.1	Introduction	137
5.2	Description du principe Turbo	138
5.3	Concaténation parallèle	139
5.3.1.	Cas de deux antennes d'émission	139
5.3.2.	Cas de trois antennes d'émission	145
5.4	Concaténation série	146
5.4.1.	Construction des codes récursifs STTC	147
5.4.2.	Décodage itératif des codes concaténés en série	149
5.4.3.	Cas particulier du schéma d'Alamouti	152
5.5	Performances	153
5.5.1.	Cas de deux antennes d'émission	153
5.5.2.	Cas de trois antennes d'émission	164
5.6	Conclusion	170

---

## 5.1 Introduction

Dans le cas des systèmes à deux antennes d'émission, la structure des codes SOSTTC donnée par  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \theta) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j\theta} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j\theta} \end{pmatrix}$  présente des similitudes avec la structure d'un turbo code.

En effet, la première colonne contient les symboles systématiques et la deuxième colonne, par l'intermédiaire de l'angle  $\theta$ , peut être considérée comme le résultat d'un codage et donc, on peut considérer qu'elle contient les symboles codés. Cette première constatation nous conduit tout naturellement à envisager d'utiliser ces codes en concaténation parallèle avec poinçonnage alternatif des sorties supérieure et inférieure du codeur pour maintenir un rendement maximum. Une étude des fonctions de transfert EXIT charts [1], [63] nous a convaincu qu'un effet turbo pouvait être obtenu avec l'utilisation des matrices  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \theta)$ . Nous présentons alors les résultats que nous avons obtenus pour des paquets de petite taille (150 symboles) et nous établissons une comparaison avec les turbo STTC optimisés par Vucetic. Les performances de ces turbo codes sont en fait très semblables à celles des codes turbo STTC mais leur avantage, qui provient d'un meilleur gain en diversité, réside dans une convergence plus rapide. Nous avons essayé ensuite le cas de la concaténation série avec des codes turbo STTC. La concaténation turbo STTC-SOSTTC s'avère un moyen performant d'améliorer le taux d'erreur par trame des codes turbo STTC.

Dans le cas des systèmes à trois antennes d'émission, nous avons réessayé les mêmes structures que pour le cas à deux antennes. Nous utilisons la structure de base suivante pour la

construction des treillis :  $\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1^* \cdot e^{j\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3^* \cdot e^{j\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix}$ . Nous rappelons que les états

sont séparés en utilisant des matrices unitaires différentes pour chacun d'entre eux. Pour la concaténation parallèle à maximum de rendement (avec poinçonnage alternatif du code supérieur et du code inférieur), nous avons la contrainte de maintenir une colonne systématique (nous choisissons la deuxième qui utilise les symboles d'entrée inchangés) et nous utilisons donc une matrice de transformation unitaire de la forme

$\begin{pmatrix} \cos(\delta) \cdot \exp(j\lambda) & 0 & \sin(\delta) \cdot \exp(-j\omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta) \cdot \exp(j\omega) & 0 & \cos(\delta) \cdot \exp(-j\lambda) \end{pmatrix}$ . Avec une telle contrainte, nous obtenons un turbo-

code à rendement maximum. Malheureusement les courbes des fonctions de transfert EXIT charts apparaissent complètement fermées à partir de la deuxième itération : l'effet turbo s'avère très faible et bien inférieur à celui obtenu pour les codes orthogonaux à deux antennes. Nous avons alors diminué le rendement en supprimant le poinçonnage des matrices en émission. Ceci permet d'obtenir un meilleur effet turbo mais les courbes obtenues en terme de FER restent fortement éloignées des capacités théoriques *outage* avec un écart de l'ordre de 3 dB pour des petits paquets de l'ordre de 150 symboles. Dans le cas d'une utilisation de codes à trois antennes, nous avons cependant noté qu'une concaténation série avec un code STTC permettait d'améliorer les performances des turbo codes STTC.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous rappelons tout d'abord le principe turbo, puis nous présentons le cas de deux antennes d'émission avec les schémas de concaténation parallèle et série que nous avons essayés. En particulier, pour la concaténation série, nous rappelons également le principe des turbo STTC. Ensuite nous reproduisons la même étude pour le cas

de trois antennes d'émission. Enfin, nous terminons le chapitre par les résultats de simulation pour obtenir une conclusion.

## 5.2 Description du principe Turbo

C'est en 1993 que C. Berrou et A. Glavieux mettent au point les *turbo-codes*, qui vont révolutionner le domaine des communications numériques. En effet, le principe turbo ne se limite pas seulement à la conception de codes correcteurs d'erreurs, mais peut s'appliquer aussi à différents étages de traitement d'une chaîne de communications numériques.

Lorsqu'en émission, on associe plusieurs fonctions (modulation, entrelacement, codage...), la théorie de la détection nous montre que le récepteur optimal consiste à décoder de façon conjointe les différentes fonctions utilisées en émission, suivant un critère ML. Il est nécessaire pour cela de construire un *super-treillis* prenant en compte les différentes fonctions. La complexité globale de ce récepteur optimal est égal au produit cartésien des treillis de chaque fonction prise séparément.

L'idée d'un récepteur itératif est de décoder chacune des fonctions élémentaires l'une après l'autre dans une boucle itérative de telle manière à ce que les différentes fonctions s'échangent entre elles une information quantifiant la fiabilité de chacune des fonctions de décodage dite *information extrinsèque*. Par ce procédé, chaque opération de décodage profite aux autres et inversement. La figure 5.1 décrit un récepteur itératif comportant 2 fonctions. Ainsi, pour fonctionner de façon idéale, un récepteur itératif doit vérifier les conditions suivantes :

1. Les fonctions de décodage élémentaires doivent effectuer un traitement différent les unes des autres, indispensable pour que chaque algorithme de décodage profite aux autres ;
2. Les fonctions doivent être séparées par un entrelaceur afin qu'elles travaillent sur des informations décorrélées ;
3. L'information circulant entre les différentes fonctions de réception doit être pondérée afin de garder un degré de confiance.

D'un point de vue purement théorique, cette méthode de réception est sous-optimale, cependant on montre qu'au bout de plusieurs itérations et à partir d'un certain SNR, la courbe de performance optimale du récepteur peut être atteinte. On parle de récepteur turbo [1] par analogie avec les moteurs turbo qui réutilisent une partie de l'énergie rejetée pour augmenter leur performance.

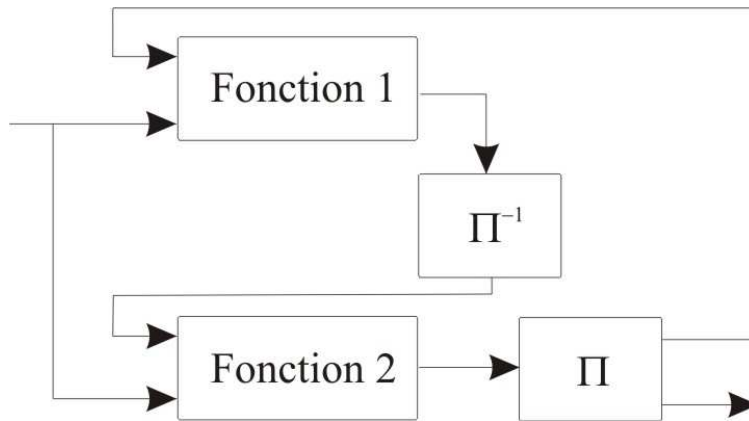


Figure 5.1 - Le principe turbo

## 5.3 Concaténation parallèle

### 5.3.1. Cas de deux antennes d'émission

#### 5.3.1.1. Réalisation du codeur

Nous avons naturellement essayé dans un premier temps la concaténation parallèle avec les codes SOSTTC de la forme  $\mathcal{G}(x_1, x_2, \theta) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j\theta} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j\theta} \end{pmatrix}$ . Le schéma de réalisation d'un tel codage prend la forme suivante :

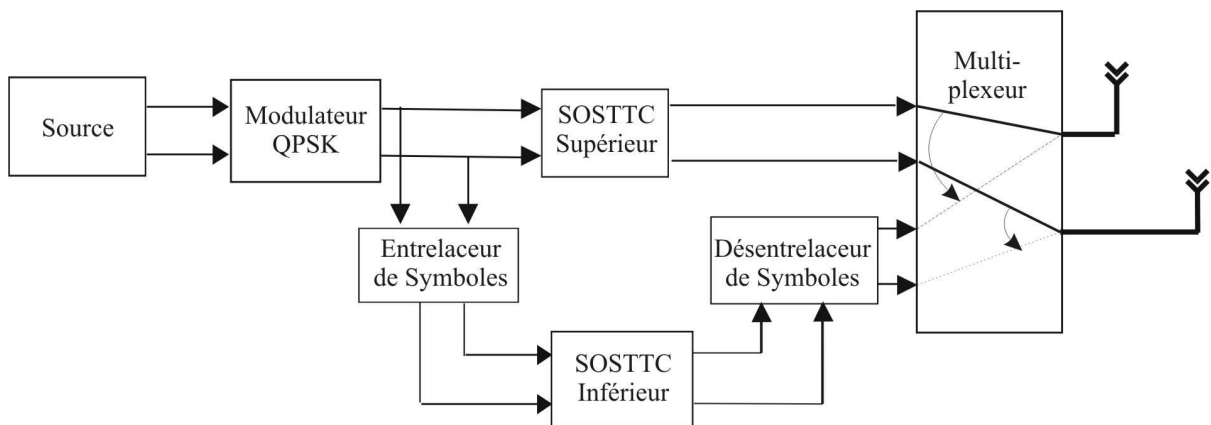


Figure 5.2 - turbo code SOSTTC en concaténation parallèle

Le schéma de la figure 5.2 comprend un désentrelaceur avec un poinçonnage alternatif des codes supérieur et inférieur. La présence de ce désentrelaceur est fondamentale pour récupérer l'ordre naturel des symboles systématiques transmis sur le canal. Pour mieux s'en rendre compte, il suffit de considérer l'exemple suivant : à la sortie du modulateur nous avons la séquence suivante des symboles à transmettre :  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  et  $x_8$ . Le codeur supérieur va produire la séquence de matrices STBC suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^1} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & -x_4^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^1} \\ x_4 & x_3^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & -x_6^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^1} \\ x_6 & x_5^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 & -x_8^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^1} \\ x_8 & x_7^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^1} \end{pmatrix}$$

Après entrelacement par paire de symboles le codeur inférieur va produire la séquence suivante :

$$\begin{pmatrix} x_3 & -x_4^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \\ x_4 & x_3^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 & -x_8^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \\ x_8 & x_7^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^2} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & -x_6^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^2} \\ x_6 & x_5^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^2} \end{pmatrix}$$

Puis, opérant un désentrelacement sur ce second flux de matrices STBC on obtient en entrée du module de poinçonnage pour le flux inférieur :

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^2} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & -x_4^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \\ x_4 & x_3^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & -x_6^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^2} \\ x_6 & x_5^* \cdot e^{j \cdot \theta_4^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 & -x_8^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \\ x_8 & x_7^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \end{pmatrix}$$

Après poinçonnage alternatif des flux des codeurs inférieur et supérieur, on produit finalement la séquence codée suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^1} \\ x_2 & x_1^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & -x_4^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \\ x_4 & x_3^* \cdot e^{j \cdot \theta_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & -x_6^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^1} \\ x_6 & x_5^* \cdot e^{j \cdot \theta_3^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 & -x_8^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \\ x_8 & x_7^* \cdot e^{j \cdot \theta_2^2} \end{pmatrix} \dots$$

Il est alors facile de vérifier que la séquence originelle des symboles transmis  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  et  $x_8$  se retrouve bien présente dans les premières colonnes des matrices STBC transmises. Avec un tel poinçonnage le turbo-code présenté en figure 5.2 présente une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz pour une modulation QPSK et 3 bits/s/Hz pour une modulation 8-PSK. Il est cependant possible d'utiliser une structure sans poinçonnage alternatif et sans désentrelaceur, cependant l'efficacité spectrale du turbo-code est diminuée de moitié pour conduire à 1 bit/s/Hz en QPSK et 1.5 bit/s/Hz en 8-PSK.

En ce qui concerne le choix des codes élémentaires SOSTTC, il est clair et reconnu que pour obtenir un effet « turbo » important, il faut utiliser des codes systématiques récurrents. Les codes STTC à base de STBC que nous proposons ne sont pas récurrents ; cependant ils présentent certaines potentialités pour devenir des turbo-codes. Pour le montrer, nous avons étudié les fonctions de transfert EXIT charts pour le code SOSTTC à huit états (cf. Fig. 5.3)

Les performances de ce code ont déjà été testées dans les chapitres précédents. Un algorithme log-MAP peut être considéré comme un amplificateur de rapport signal à bruit et les courbes de transfert EXIT charts permettent de visualiser l'évolution du SNR de l'information extrinsèque au cours des itérations [63]. Nous obtenons dans le cas du code de la figure 5.3 et pour un poinçonnage alternatif correspondant au schéma global de la figure 5.2, la courbe présentée sur le figure 5.4.

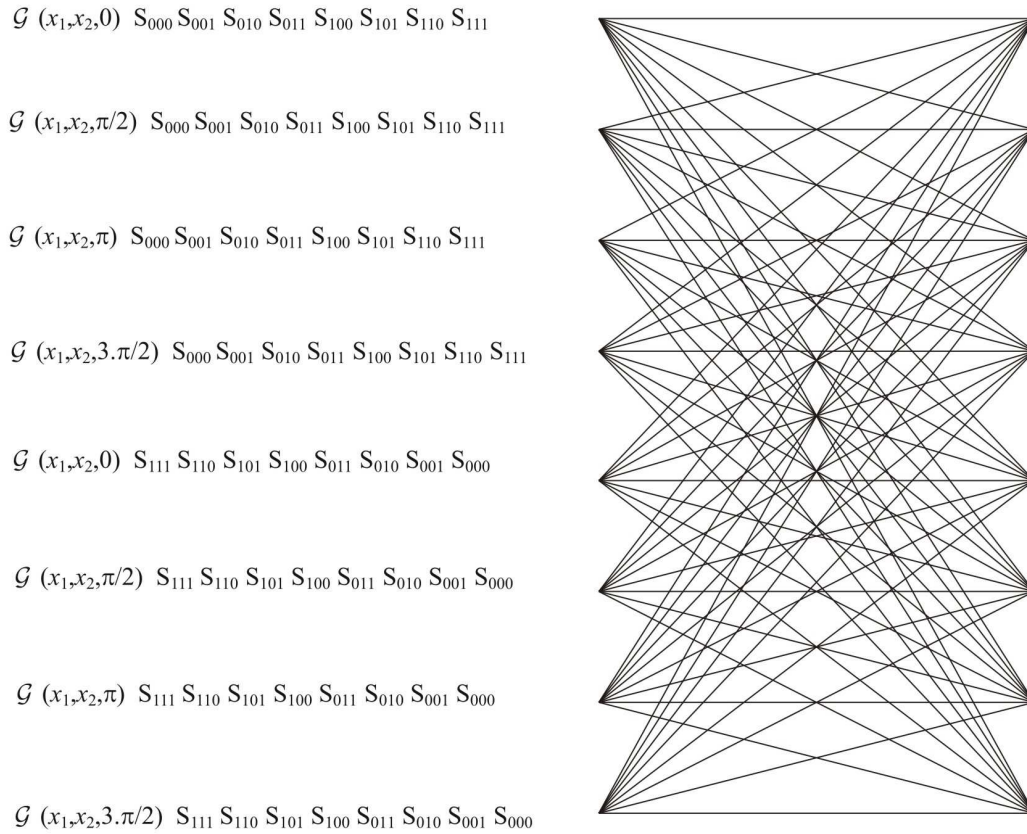


Figure 5.3 - Code SOSTTC à huit états et minCGD = 64 (QPSK)

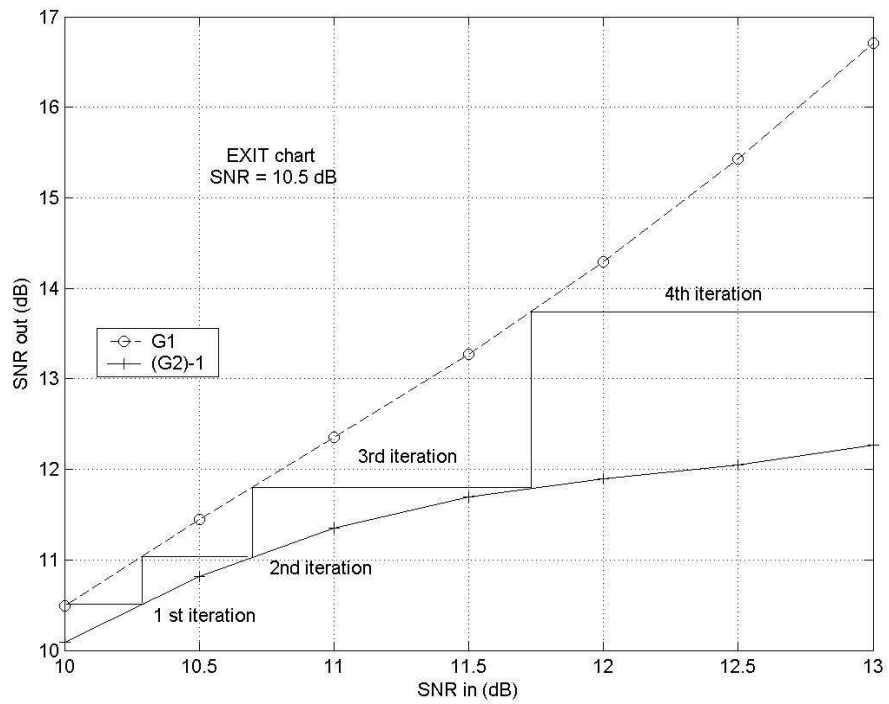


Figure 5.4 - EXIT chart pour TurboSOSTTC et un SNR égal à 10.5 dB

Il est clair que l'effet tunnel (écart des SNR de sortie et d'entrée) est suffisamment important pour permettre un effet turbo satisfaisant.

### 5.3.1.2. Décodage

Le schéma de décodage global est illustré sur la figure 5.5.

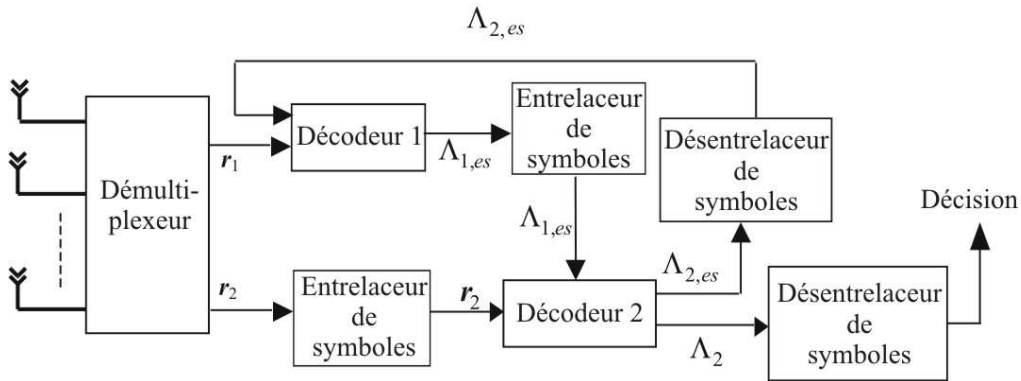


Figure 5.5 - Turbo décodeur SOSTTC

Sachant que nous employons un algorithme de pondération de type log-MAP, la première étape du décodage consiste dans le calcul des métriques de transition du canal. Pour les calculer, on réécrit le signal reçu sur deux intervalles de temps successifs (on considère ici pour simplifier le cas d'une seule antenne de réception).

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 \cdot x_1 - h_2 \cdot x_2^* \cdot e^{j \cdot \theta_i} + n_1 \\ y_2 &= h_1 \cdot x_2 + h_2 \cdot x_1^* \cdot e^{j \cdot \theta_i} + n_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

L'angle  $\theta$  écrit ici dépend bien sûr de l'état du treillis et varie d'une paire de symboles reçus à l'autre.  $n_1$  et  $n_2$  sont deux bruits Gaussiens additifs de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .  $h_1$  et  $h_2$  représentent les coefficients du canal de propagation, il s'agit de deux variables Gaussiennes de moyenne nulle et de variance égale à 0.5 pour chaque dimension (partie réelle et imaginaire). On suppose ces quantités constantes sur l'ensemble d'un paquet de symboles reçus et parfaitement estimées au récepteur. Pour le calcul des métriques de probabilité de transition, on procède à une combinaison MRC (*Maximum Ratio Combining*) des équations écrites en (5.1). On obtient alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_1 \cdot h_1^* + y_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} \cdot h_2 &= \left( |h_1|^2 + |h_2|^2 \right) \cdot x_1 + n_1 \cdot h_1^* + n_2 \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} \\ -y_1^* \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} + y_2 \cdot h_1^* &= \left( |h_1|^2 + |h_2|^2 \right) \cdot x_2 + n_2 \cdot h_1^* - n_1 \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ce qui peut encore se réécrire sous la forme :



$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{y_1 \cdot h_1^* + y_2 \cdot e^{j\theta_i} \cdot h_2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_1 \cdot h_1^* + n_2 \cdot h_2 \cdot e^{j\theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \\
x_2 &= \frac{-y_1 \cdot h_2 \cdot e^{j\theta_i} + y_2 \cdot h_1^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_2 \cdot h_1^* - n_1 \cdot h_2 \cdot e^{j\theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2}
\end{aligned} \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) permet alors d'obtenir le calcul des probabilités de transition entre les états  $l$  et  $l'$  :

$$\gamma_t^j(l', l) = \begin{cases} \frac{p_t(i)}{p_t(0)} \cdot e^{-\frac{|x_1^{(i)} - x_1|^2 + |x_2^{(i)} - x_2|^2}{2 \cdot \sigma_1^2}} & \text{pour } (l', l) \in B_t^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

avec  $\sigma_1^2 = E(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_1^*) = E(\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2^*)$  et  $\bar{n}_1 = \frac{n_1 \cdot h_1^* + n_2 \cdot h_2 \cdot e^{j\theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$ ,  $\bar{n}_2 = \frac{n_2 \cdot h_1^* - n_1 \cdot h_2 \cdot e^{j\theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$  il vient

finalement :  $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$ . Dans l'équation (5.4),  $B_t^i$  désigne l'ensemble des transitions

définies par  $S_{t-1} = l' \rightarrow S_t = l$  qui sont provoquées par le couple de symboles d'entrée numéro  $i$ :  $C_t^i = (x_t^i, x_{t+1}^i) = (x_1^i, x_2^i)$ . Les valeurs  $p_t(i)$  et  $p_t(0)$  correspondent respectivement aux probabilités à priori pour la paire de symboles numéro  $i$  et la paire de symboles référence numéro 0, qui correspond à la paire de symboles (1,1) dans le cas de la modulation QPSK.

En se rappelant qu'il y a un nombre de branches parallèles dans le treillis égal au nombre de paires de symboles dans une sous-constellation (principe de partitionnement à maximum de CGD) et qu'il y a en tout un nombre d'états égal à  $M_s$  dans le treillis SOSTTC, on obtient les relations suivantes pour le calcul des paramètres  $\alpha_t(l)$ ,  $\beta_t(l)$  et  $\gamma_t(l', l)$  du log-MAP :

$$\begin{aligned}
\gamma_t(l', l) &= \log \left( \sum_{i=0}^N \gamma_t^i(l', l) \right) \\
\alpha_t(l) &= \log \sum_{l'=0}^{M_s-1} e^{\alpha_{t-1}(l') + \gamma_t(l', l)} \quad \text{avec } \alpha_0(0) = 0, \alpha_0(l) = -\infty, l \neq 0 \\
\beta_t(l) &= \log \sum_{l'=0}^{M_s-1} e^{\beta_{t+1}(l') + \gamma_{t+1}(l, l')} \quad \text{avec } \beta_t(l) = \log(1/M_s), \forall l
\end{aligned} \quad (5.5)$$

$I$  désigne le nombre total de paires de symboles à décoder dans un paquet transmis. Ayant calculé les paramètres  $\alpha_t(l)$ ,  $\beta_t(l)$  et  $\gamma_t(l', l)$ , nous pouvons maintenant donner l'expression du logarithme de vraisemblance pour la paire de symboles  $i$  ( $\mathbf{y}$  désigne le vecteur de l'ensemble de la séquence reçue) :

$$\Lambda(C_t = i) = \log \frac{\Pr[(x_t, x_{t+1} = x_1^i, x_2^i) | \mathbf{y}]}{\Pr[(x_t, x_{t+1} = 1, 1) | \mathbf{y}]} = \log \frac{\sum_{(l', l) \in B_t^i} \alpha_{t-1}(l') \cdot \gamma_t^i(l', l) \cdot \beta_t(l)}{\sum_{(l', l) \in B_t^0} \alpha_{t-1}(l') \cdot \gamma_t^0(l', l) \cdot \beta_t(l)} \quad (5.6)$$

Une fois les LLR calculés le processus de décodage est tout à fait semblable à celui des turbo-codes STTC présentés par Vucetic dans [65]. Comme dans le cas des turbo-codes STTC on échange à la fois les informations systématiques et extrinsèques entre les deux décodeurs. L'ensemble des informations systématiques et extrinsèques en sortie du premier décodeur log-MAP pour la paire de symboles numéro  $i$  est noté par  $\Lambda_{1,es}(C_t = i)$  et s'obtient par :

$$\Lambda_{1,es}(C_t = i) = \Lambda_1(C_t = i) - \log\left(\frac{p_t(i)}{p_t(0)}\right) \quad (5.7)$$

La quantité  $\Lambda_{1,es}(C_t = i)$ , après entrelacement, sert alors de probabilité à priori pour l'entrée du second décodeur. L'ensemble des informations systématiques et extrinsèques en sortie du second décodeur est alors calculé par :

$$\Lambda_{2,es}(C_t = i) = \Lambda_2(C_t = i) - \tilde{\Lambda}_{1,es}(C_t = i) \quad (5.8)$$

Pour la prochaine étape de décodage, cette quantité, après désentrelacement notée  $\tilde{\Lambda}_{2,es}(C_t = i)$  sert de probabilité à priori dans le décodeur 1.

Un des inconvénients majeurs du schéma avec poinçonnage est d'opérer les opérations d'entrelacement-désentrelacement au niveau des paires de symboles. Ainsi, pour des paquets de 150 symboles, la taille des entrelaceur-désentrelaceur n'est que de 75, ce qui est vraiment peu pour obtenir de bonnes performances en décodage turbo. On peut éviter cet inconvénient en supprimant l'étape de poinçonnage et en entrelaçant au niveau des symboles individuels. On est alors confronté, au niveau des décodeurs log-MAP à la nécessité de convertir les LLR sur les paires de symboles en LLR sur les symboles individuels et vice-versa. Par exemple, si on veut convertir les LLR sur les paires de symboles en LLR sur les symboles individuels on part de l'expression :

$$\Lambda(C_t = i) = \lambda_{i,j}(t) = \log\left[\frac{\Pr(x_t, x_{t+1} = (i, j))}{\Pr(x_t, x_{t+1}) = (1, 1)}\right]$$

On obtient alors :

$$\lambda_i(t) = \log\left[\frac{\Pr(x_t = i)}{\Pr(x_t = 1)}\right] = \log\left[\frac{\sum_{(i,j) \in \{S^{(i)}:x_t=i\}} e^{\lambda_{i,j}(t)}}{\sum_{(i,j) \in \{S^{(0)}:x_t=1\}} e^{\lambda_{i,j}(t)}}}\right] \quad (5.9)$$

Dans l'expression (5.9)  $S^{(i)}$  désigne l'ensemble des paires de symboles où le premier symbole  $x_t$  prend la valeur  $i$  dans la constellation transmise. De plus, après l'opération d'entrelacement, il faut convertir les LLR pour les symboles individuels en LLR pour les paires de symboles. Ceci s'obtient naturellement avec la formule suivante :

$$\lambda_{i,j}(t) = \log\left[\frac{\Pr(x_t, x_{t+1} = i, j)}{\Pr(x_t, x_{t+1}) = (1, 1)}\right] = \log\left[\frac{\Pr(x_t = i)}{\Pr(x_t = 1)}\right] + \log\left[\frac{\Pr(x_{t+1} = j)}{\Pr(x_{t+1} = 1)}\right] = \lambda_i(t) + \lambda_j(t) \quad (5.10)$$

### 5.3.2. Cas de trois antennes d'émission

Dans le cas de trois antennes d'émission, sachant que l'on utilise la matrice de base :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2^* & x_1 & x_1^* . e^{j.\beta} \\ x_1^* & x_2 & -x_3^* \\ x_3^* . e^{j.\alpha} & x_3 & x_2^* \end{pmatrix}, \text{ il est nécessaire, en concaténation parallèle avec}$$

poinçonnage, de préserver la deuxième colonne de symboles systématiques entre l'encodeur supérieur et l'encodeur inférieur. C'est pourquoi on utilise des matrices unitaires de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\delta).\exp(j.\lambda) & 0 & \sin(\delta).\exp(-j.\omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta).\exp(j.\omega) & 0 & \cos(\delta).\exp(-j.\lambda) \end{pmatrix} \text{ pour séparer les constellations entre elles. Dans ce}$$

cas, pour un partitionnement à 16 sous-constellations, on obtient pour une modulation QPSK une distance minimale entre les sous-constellations égale à 0.47. Cette distance minimale est bien sûr inférieure à celle obtenue dans le cas où l'on utilise des matrices de transformation unitaires qui changent toutes les lignes et toutes les colonnes.

Pour les fonctions de transfert EXIT charts, on obtient pour un SNR de 10.5 dB la représentation suivante de la figure 5.6:

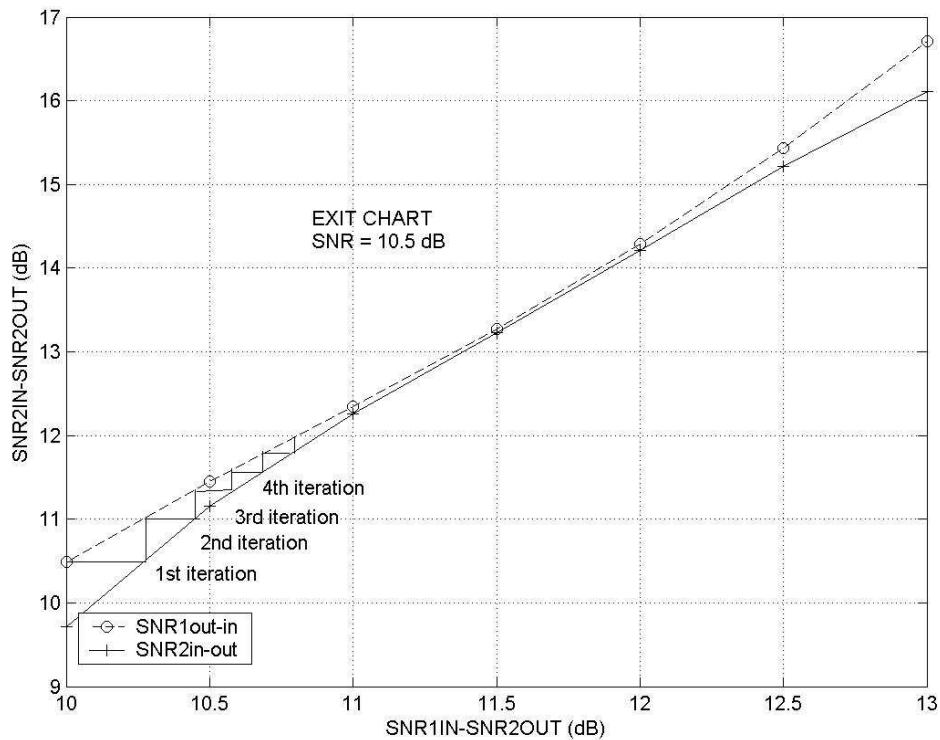


Figure 5.6 - EXIT chart pour TurboSOSTTC et un SNR égal à 10.5 dB

On constate bien que les courbes tracées restent très proches l'une de l'autre, l'effet turbo apparaît ici beaucoup plus limité que dans le cas à deux antennes. Cela s'explique par le calcul de la métrique de branche dans l'algorithme log-MAP : la perte d'orthogonalité se

traduit par des métriques de branche moins bien différenciées dans le cas trois antennes par rapport au cas deux antennes.

Nous avons implanté le schéma de la concaténation parallèle pour le cas trois antennes avec non-poinçonnage des symboles à l'émission et entrelacement au niveau des symboles individuels et non pas au niveau des triplés de symboles pour obtenir un gain d'entrelacement supérieur. De plus, le fait d'éviter de conserver une colonne systématique permet de mieux séparer les constellations entre elles en utilisant des matrices unitaires avec un maximum de degrés de liberté.

## 5.4 Concaténation série

Nous avons aussi testé les codes en blocs en treillis en concaténation série pour les cas de deux et de trois antennes d'émission. Notre but est toujours d'essayer d'obtenir les meilleures performances possibles en termes de FER pour les paquets de petite taille (typiquement de l'ordre de 150 symboles). Sachant que nos codes présentent l'avantage de travailler toujours à diversité maximale, nous les incluons dans la chaîne de transmission en tant que codeur interne. Usuellement, en concaténation série, le code interne est un code récursif, ce qui n'est pas notre choix ici. Il reste alors le choix délicat du codeur externe. Nous nous sommes orientés vers le choix de codes STTC en version récursive proposés par Tujkovic & al dans [66]. Nous avons alors testé la concaténation en série d'un turbo code STTC (concaténation parallèle de deux codeurs STTC récursifs) avec nos codes STBC en treillis. L'avantage pour nous d'une telle structure est de disposer d'un entrelaceur supplémentaire entre le turbo-code STTC et le code externe. Ainsi, nous disposons de l'entrelaceur-désentrelaceur propre au turbo-code STTC mais aussi d'un entrelaceur supplémentaire pour mieux décorréler les informations entre les sorties pondérées des deux types de décodeur. Le gain d'entrelacement global d'une telle structure est beaucoup plus élevé que celui des codes en concaténation parallèle.

Le schéma de transmission utilisé est le suivant :

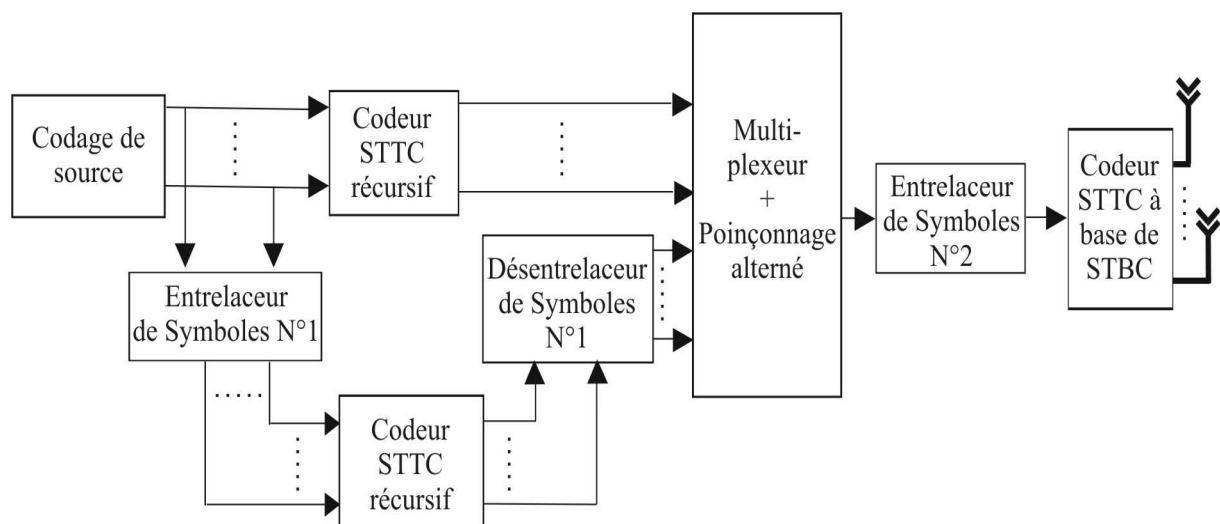


Figure 5.7 - Schéma de concaténation série turbo-STTC plus code en bloc en treillis

### 5.4.1. Construction des codes récurrents STTC

Dans cette section nous montrons comment construire des codes récurrents STTC. Les codes STTC non-récurrents qui servent de base à la construction de ces codes ont été optimisés (au sens des critères du rang et du déterminant par exemple) par Vucetic & al dans [60] et [61]. Pour construire un code STTC récurrent dans le cas d'une modulation QPSK et de deux antennes d'émission, on part d'un code classique STTC non-récurrent (cf. Figure 5.8). Ce code a une longueur de contrainte  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ , avec  $\nu_i = \left\lfloor \frac{\nu+i-1}{2} \right\rfloor, i=1,2$ . La séquence codée transmise depuis l'antenne  $i$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}(D)^i = \mathbf{c}^1(D)\mathbf{G}_i^1(D) + \mathbf{c}^2(D)\mathbf{G}_i^2(D) \text{ mod } 4 \quad (5.11)$$

La relation (11) ci-dessus peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{x}^i(D) = \mathbf{c}^1(D)\mathbf{c}^2(D) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^1(D) \\ \mathbf{G}_i^2(D) \end{bmatrix} \text{ mod } 4 \quad (5.12)$$

La matrice de génération du code  $\mathbf{G}_i(D) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^1(D) \\ \mathbf{G}_i^2(D) \end{bmatrix}$  peut être convertie en une matrice récurrente équivalente en la divisant par un polynôme  $\mathbf{q}(D)$ . Il faut choisir pour  $\mathbf{q}(D)$  un polynôme premier pour avoir une distance minimale la plus élevée possible. Le polynôme générateur pour l'antenne  $i$  peut se représenter sous la forme :

$$\mathbf{G}_i(D) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_i^1(D)}{\mathbf{q}(D)} \\ \frac{\mathbf{G}_i^2(D)}{\mathbf{q}(D)} \end{bmatrix}$$

avec :  $\mathbf{q}(D) = q_0 + q_1.D + q_2.D^2 + \dots + q_{\nu_1}.D^{\nu_1}$  et les coefficients  $q_j$  qui sont des coefficients binaires (0 ou 1). Par exemple, un code récurrent systématique STTC peut s'obtenir en prenant  $\mathbf{G}_1(D) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  ce qui entraîne que la sortie de la première antenne est obtenue par *mapping* de

la séquence d'entrée  $\mathbf{c}^1$  et  $\mathbf{c}^2$  en séquence QPSK. La figure 5.9 illustre la construction d'un code STTC récurrent en QPSK pour deux antennes d'émission.

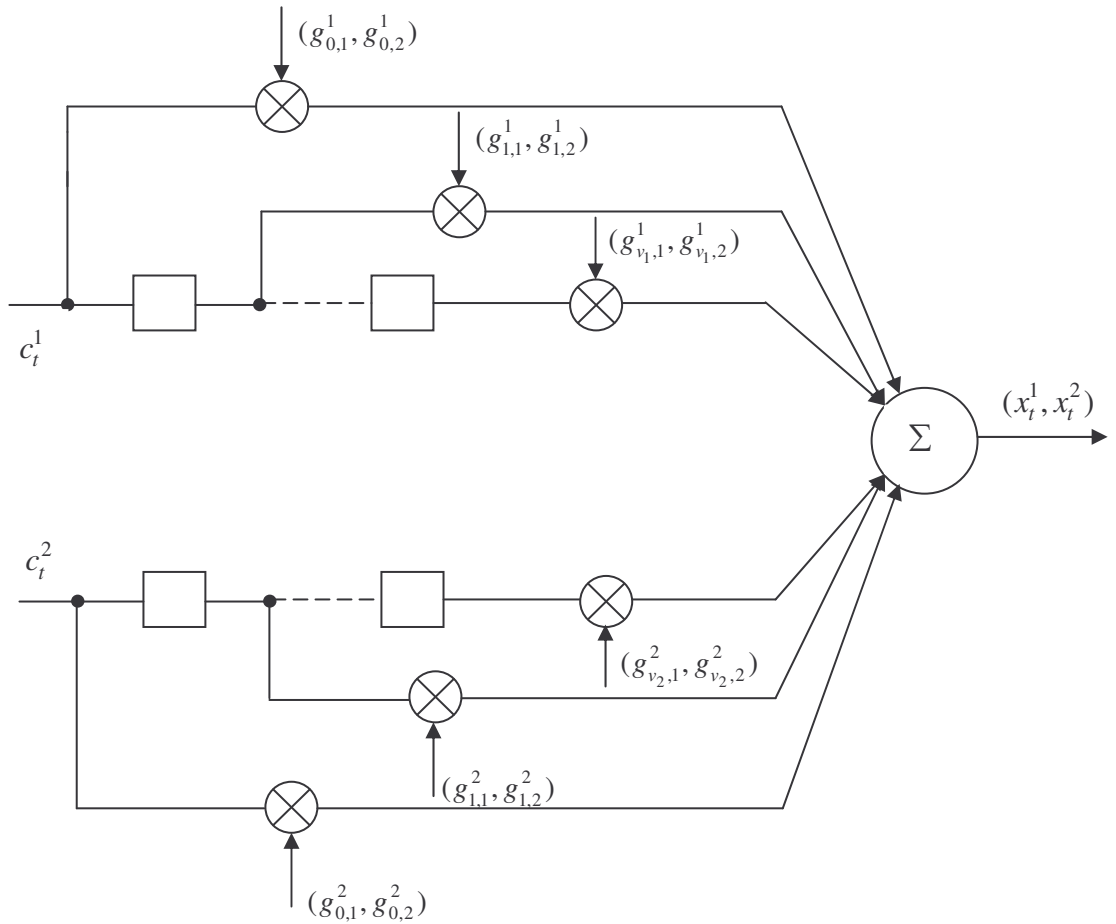


Figure 5.8 - codage STTC non-récurrent pour deux antennes

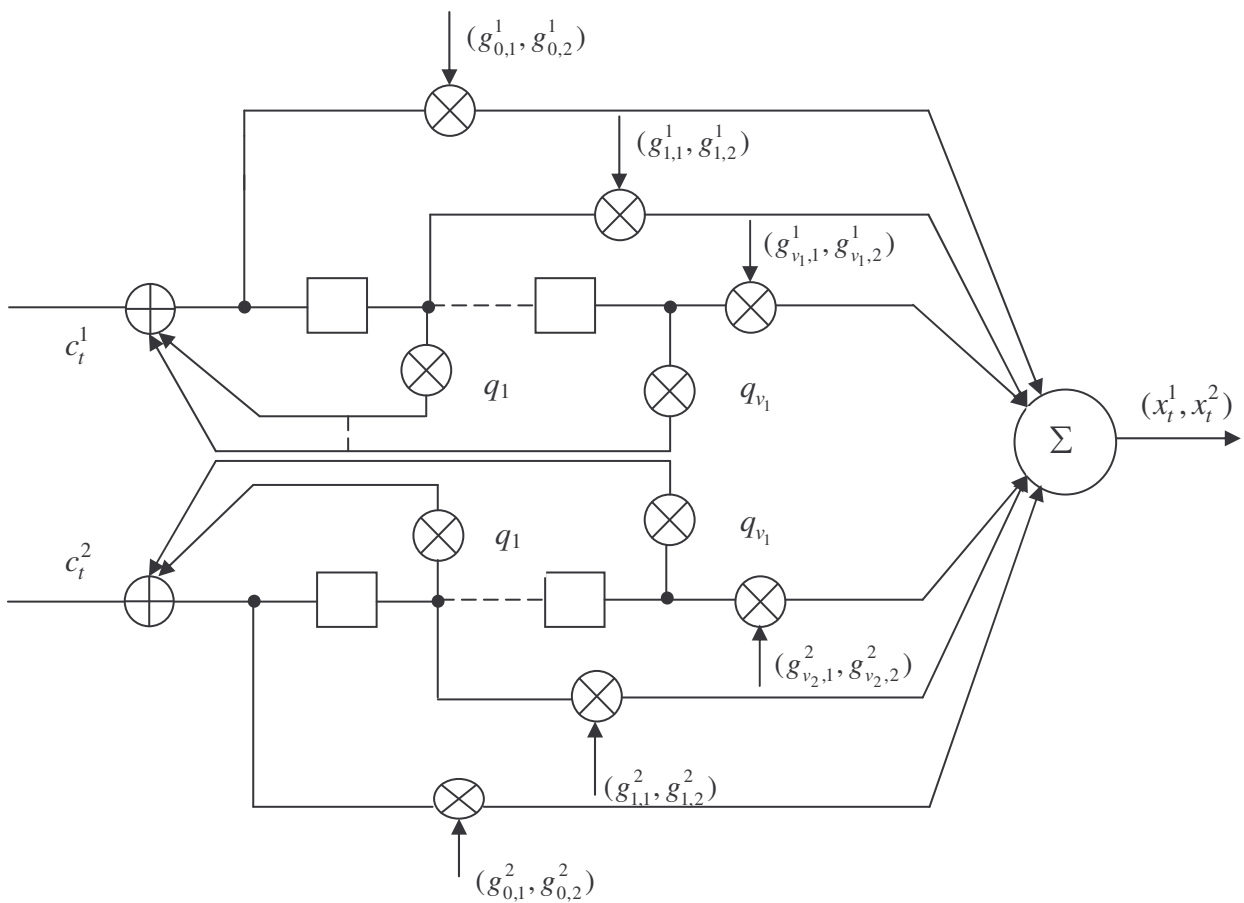


Figure 5.9 - Codage STTC récurrent pour deux antennes



$$\Lambda_i(C_t = i) = \log \left( \frac{\Pr(C_t = i)}{\Pr(C_t = 1)} \right), i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.14)$$

A partir de la formule (5.14) on peut calculer :  $\Pr(C_t = i) = \Pr(C_t = 1) \cdot \exp(\Lambda_i(C_t = i))$ . De plus, par normalisation, on a :  $\sum_i \Pr(C_t = i) = 1$ , ce qui entraîne :

$$\Pr(C_t = 1) = \frac{1}{\sum_i \exp(\Lambda_i(C_t = i))} \quad (5.15)$$

On en déduit le calcul de  $\Pr(C_t = i)$  :

$$\Pr(C_t = i) = \frac{\exp(\Lambda_i(C_t = i))}{\sum_i \exp(\Lambda_i(C_t = i))}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.16)$$

L'expression (5.16) permet alors de calculer les valeurs soft des symboles en entrée du décodeur externe. On désigne par  $x_i$  la quantité  $x_i = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (i-1))$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Les valeurs soft  $\tilde{x}(t)$  en entrée du décodeur externe se calculent alors par la formule :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^4 x_m \cdot \Pr(C_t = m) \quad (5.17)$$

On obtient alors le vecteur  $\mathbf{r}' = [\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n), \dots, \tilde{x}(N)]^T$  qui conduit, après désentrelacement, au vecteur  $\tilde{\mathbf{r}}'$  en entrée du décodeur externe. Pour les calculs des APP à l'intérieur du décodeur externe et en particulier pour le calcul des métriques de branche, on doit définir le canal de propagation équivalent en entrée de ce décodeur. Ce canal de propagation s'obtient, en se rappelant (on considère ici le cas particulier de deux antennes d'émission avec les codes SOSTTC) que pour chaque état du codeur, on a calculé les valeurs soft des symboles par combinaison MRC des symboles reçus (cf (5.2)).

$$x_1 = \frac{y_1 \cdot h_1^* + y_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} \cdot h_2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_1 \cdot h_1^* + n_2 \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$$

$$x_2 = \frac{-y_1 \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i} + y_2 \cdot h_1^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_2 \cdot h_1^* - n_1 \cdot h_2 \cdot e^{j \cdot \theta_i}}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$$

Il faut bien se rappeler ici que l'angle  $\theta_i$  utilisé dépend de l'état du codeur. En tout cas l'équation ci-dessus montre bien que l'on obtient un canal de Gauss équivalent pour chaque état du codeur. Il est alors immédiat de déduire que chaque composante  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  du vecteur  $\tilde{\mathbf{r}}'$  s'écrit sous la forme :

$$y_i = x_i + n_i \quad (5.18)$$

Avec  $\sigma_1^2 = E(n_i \cdot n_i^*)$  il vient finalement :  $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$  où  $\sigma^2$  désigne la puissance de bruit additif présente sur le canal de Rayleigh en entrée du récepteur et donc du décodeur



interne. Le modèle équivalent de canal défini par (5.18) et le vecteur  $\tilde{\mathbf{r}}'$  construit d'après (5.17) permettent alors de dérouler le décodage du turbo code STTC, avec en particulier le calcul des métriques de branches. Le problème ici vient du fait que le second décodeur étant lui-même constitué de la concaténation parallèle de deux décodeurs, il faut définir le nombre d'itérations en interne de ce décodeur turbo STTC. Lors de nos essais nous avons trouvé que deux itérations internes du décodeur turbo STTC avant de réinjecter les informations sur le décodeur interne, constituaient un bon compromis complexité-performances.

Le calcul des APP des symboles d'entrée à l'aide de l'algorithme log-MAP se fait de façon classique, en tenant compte de la structure du treillis, comme déjà mentionnés dans les équations (5.5) et (5.6). Après plusieurs itérations en interne on doit calculer deux types d'APP :

- les APP pour les symboles d'entrée (qui servent classiquement à la prise de décision) ;
- les APP sur les symboles codés qui seront réinjectés après entrelacement en entrée du décodeur interne.

Le calcul des APP sur les symboles codés nécessite une légère modification de l'algorithme log-MAP. On appelle maintenant  $B_t^i$ , l'ensemble des transitions définies par  $S_{t-1} = l' \rightarrow S_t = l$  qui sont provoquées par le couple de symboles de sortie (symboles codés) numéro  $i$ :  $C_t^i = (x_t^i, x_{t+1}^i) = (x_1^i, x_2^i)$ . On rappelle que traitant un système à deux antennes d'émission on a à chaque coup d'horloge, deux symboles émis vers le codeur interne. Le calcul des pondérations des symboles codés se fait alors à l'aide des équations suivantes :

$$\gamma_t^j(l', l) = \begin{cases} \frac{p_t(i)}{p_t(0)} \cdot e^{-\frac{|x_1^{(i)} - x_1|^2 + |x_2^{(i)} - x_2|^2}{2\sigma_1^2}} & \text{pour } (l', l) \in B_t^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t(l', l) &= \log \left( \sum_{i=0}^N \gamma_t^i(l', l) \right) \\ \alpha_t(l) &= \log \sum_{l'=0}^{M_s-1} e^{\alpha_{t-1}(l') + \gamma_t(l', l)} \quad \text{avec } \alpha_0(0) = 0, \alpha_0(l) = -\infty, l \neq 0 \quad (5.20) \\ \beta_t(l) &= \log \sum_{l'=0}^{M_s-1} e^{\beta_{t+1}(l') + \gamma_{t+1}(l, l')} \quad \text{avec } \beta_t(l) = \log(1/M_s), \forall l \end{aligned}$$

$$\text{et enfin : } \Lambda_0(C_t = i) = \log \frac{\Pr[(x_t = x_1^i) | \mathbf{y}]}{\Pr[(x_t = 1) | \mathbf{y}]} = \log \frac{\sum_{(l', l) \in B_t^i} \alpha_{t-1}(l') \cdot \gamma_t^i(l', l) \cdot \beta_t(l)}{\sum_{(l', l) \in B_t^0} \alpha_{t-1}(l') \cdot \gamma_t^0(l', l) \cdot \beta_t(l)} \quad (5.21)$$

Une fois calculées ces pondérations au niveau des symboles individuels codés, on en déduit le calcul de l'information extrinsèque :

$$\Lambda_{0,e}(C_t = i) = \Lambda_0(C_t = i) - \tilde{\Lambda}_{i,e}(C_t = i) \quad (5.22)$$

Ces informations extrinsèques au niveau des symboles sont ensuite entrelacées et converties en probabilités à priori au niveau des paires de symboles pour aboutir au vecteur  $\tilde{\Lambda}_{0,e}$  et initier une nouvelle itération. La conversion des APP pour les symboles individuels en APP pour les paires de symboles suit les principes de (5.10).

### 5.4.3. Cas particulier du schéma d'Alamouti

On peut utiliser en guise de référence pour les schémas à deux antennes d'émission, le code d'Alamouti en guise de codeur interne. Cependant, le schéma d'Alamouti ne présente aucun gain de codage et ne peut pas échanger d'informations extrinsèques de façon efficace avec un autre décodeur. Dans ce cas, on a le schéma de décodage suivant :

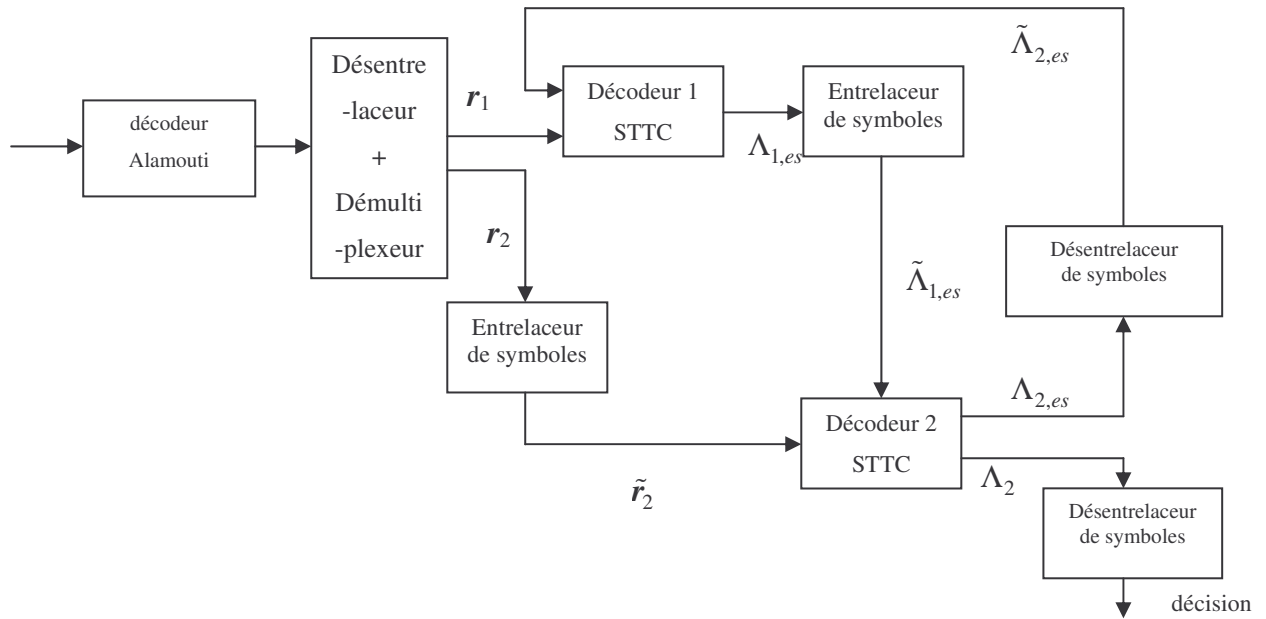


Figure 5.11 - Décodage Concaténation série Alamouti + turbo-STTC

On suppose que la matrice d'Alamouti prend la forme :  $\mathcal{G}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix}$ . On peut alors

calculer par simple technique MRC les estimations soft des symboles  $x_1, x_2$  en sortie du décodeur d'Alamouti. On a directement :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 \cdot h_1^* + y_2 \cdot h_2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_1 \cdot h_1^* + n_2 \cdot h_2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \\ x_2 &= \frac{-y_1 \cdot h_2 + y_2 \cdot h_1^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2} - \frac{n_2 \cdot h_1^* - n_1 \cdot h_2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Le canal en entrée du turbo-décodeur STTC est toujours un canal à bruit additif Gaussien. Les éléments de ce canal sont rangés en vecteur dont les entrées sont les valeurs soft  $x_1, x_2$  issues de (5.22). On a ici directement pour chaque composante  $y_i$  de ce canal équivalent :

$$y_i = x_i + n_i \text{ avec } \sigma_1^2 = E(n_i.n_i^*) = \frac{\sigma^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2}.$$

## 5.5 Performances

### 5.5.1. Cas de deux antennes d'émission

#### 5.5.1.1. Concaténation parallèle

On reprend les hypothèses de simulation classiques déjà évoquées dans les chapitres précédents. On considère des paquets de transmission de faible taille (150 symboles) en modulation QPSK. Le canal entre chaque paire d'antenne d'émission  $j$  réception  $i$  est un canal non-sélectif en fréquence de coefficient  $h_{i,j}$ . La partie réelle de  $h_{i,j}$  est un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance 0.5, il en va de même pour la partie imaginaire. On utilise des entrelaceurs aléatoires de type S-random initialement proposés par Divsalar & al [67]. Ces entrelaceurs garantissent que pour une taille  $N$  d'entrelacement, deux positions consécutives entrelacées soient écartées d'au moins  $\sqrt{N/2}$ . La contrainte n'est pas difficile à respecter pour des tailles faibles d'entrelacement ce qui est le cas ici pour 150 symboles et donc un entrelaceur de taille 75 puisque l'on entrelace au niveau des paires de symboles. Par contre, dès que la taille de l'entrelaceur dépasse le millier de symboles, il en va tout autrement et la recherche opérationnelle de tels entrelaceurs peut s'avérer très longue. On calcule sur chaque courbe le taux d'erreur par trame (FER) et on compare à la limite théorique de la capacité *outage*.

#### Schémas avec poinçonnage alternatif

Dans le cas où il y a poinçonnage alternatif des codeurs supérieur et inférieur l'efficacité spectrale est ici de 2 bits/s/Hz. Pour la première courbe de simulation on considère le cas du code SOSTTC à huit états et  $\text{minCGD} = 64$  illustré sur la figure 5.3 de ce chapitre. On obtient les résultats de simulation présentés sur la figure 5.12 pour le cas d'une antenne de réception. On constate que l'effet turbo sature assez rapidement après la quatrième itération et la performance obtenue après six itérations est à 3.2 dB de la capacité *outage* (pour un FER égal à  $10^{-2}$ ). Ces résultats sont assez décevants car ils sont du même ordre de grandeur que le code SOSTTC simple avec décodage de Viterbi. Cependant, ils illustrent bien la difficulté d'obtenir des performances proches de la capacité limite dans le cas des paquets de petite taille.

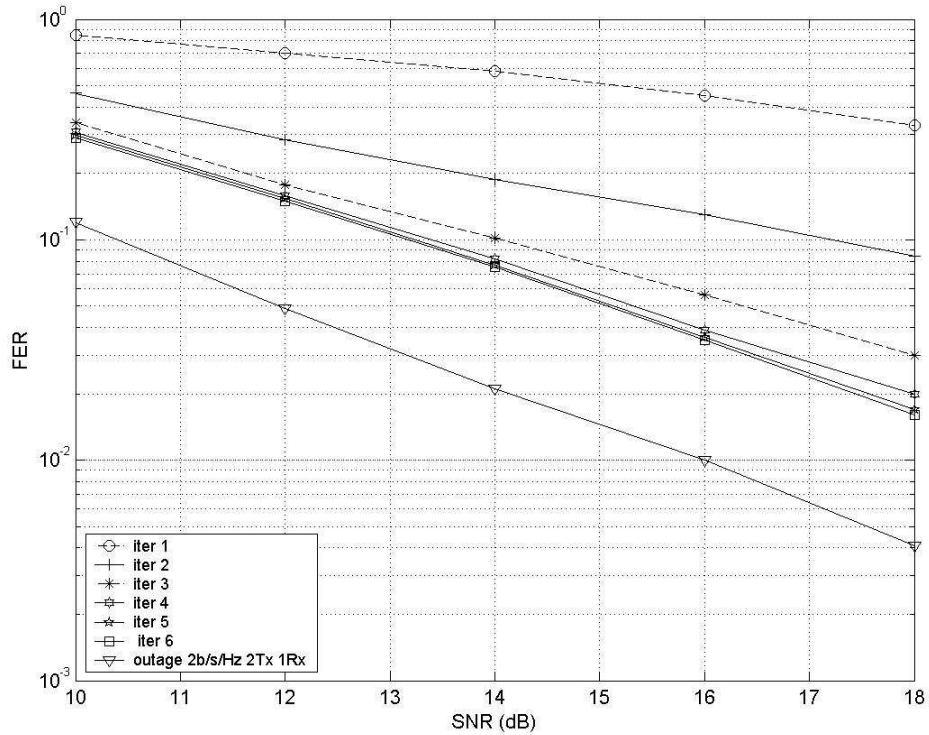


Figure 5.12 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

Pour mettre en évidence ce phénomène, nous avons testé le même code avec des paquets de taille 1500 symboles QPSK et donc un entrelaceur S-random de taille 1500. Les résultats sont représentés en figure 5.13 ci-dessous.

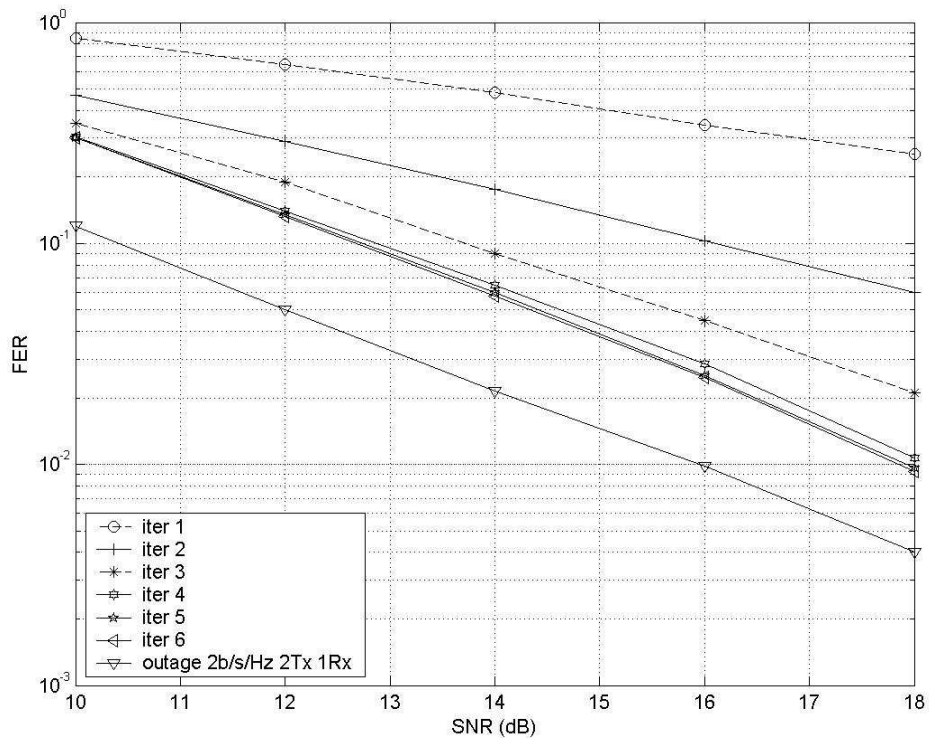


Figure 5.13 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 1500 symboles QPSK)

Les résultats sont améliorés par rapport à la figure 5.12. C'est ainsi que pour un FER égal à  $10^{-2}$  on travaille à 1.8 dB de la capacité *outage* au bout de six itérations. Cette fois-ci, l'utilisation d'un schéma turbo permet d'améliorer les performances par rapport au code simple SOSTTC avec décodage par algorithme de Viterbi. Le gain est de l'ordre de 1.4 dB pour un FER de l'ordre de  $10^{-2}$ . Le code testé à huit états reste un code assez complexe et nous avons voulu voir si l'utilisation d'un code plus simple permettait d'obtenir également un effet turbo satisfaisant. C'est ainsi que nous avons testé le code à 4 états dessiné sur la figure 5.14 ci-dessous.

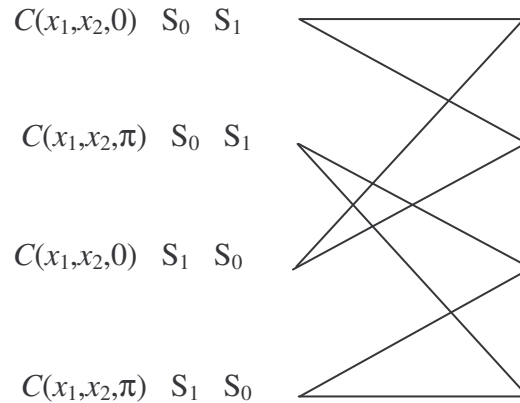


Figure 5.14 - Code SOSTTC à 4 états et minCGD = 16 (QPSK)

Les performances du turbo-code en concaténation parallèle associé à ce code sont représentées en figure 5.15 pour une taille de paquet égale à 150 symboles et en figure 5.16 pour une taille de paquets égale à 1500 symboles QPSK.

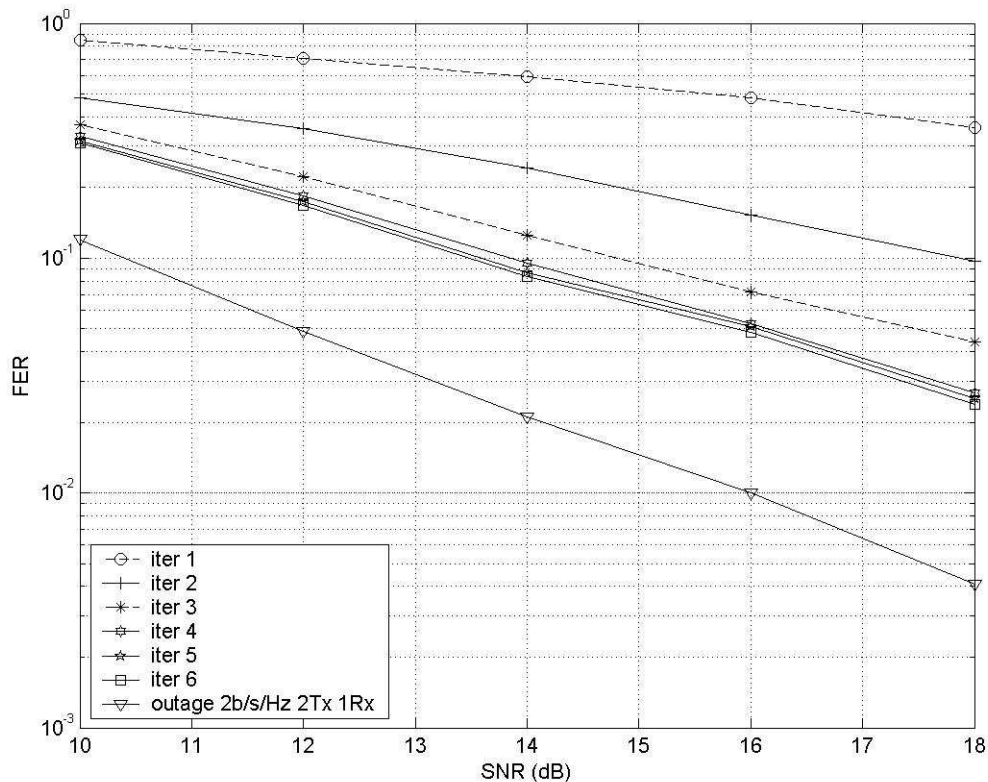


Figure 5.15 - Performances FER du turbo code SOSTTC 4 états, minCGD = 16 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

Les performances affichées par ce code sont remarquables eu égard à sa faible complexité. Quand on compare les figures 5.12 et 5.15 on se rend compte que le gain apporté par l'utilisation du code à huit états est inférieur à 1 dB et est de l'ordre de 0.8 dB (par exemple pour un FER égal à  $5 \cdot 10^{-2}$ ). On peut l'expliquer par le fait qu'aux SNR considérés ici, c'est le gain de diversité qui l'emporte sur le gain de codage et donc l'utilisation d'un code plus sophistiqué n'apporte qu'un gain marginal. Cette constatation est bien sûr confirmée par les résultats de la figure 5.16 où on utilise le même code à quatre états avec des paquets de 1500 symboles.

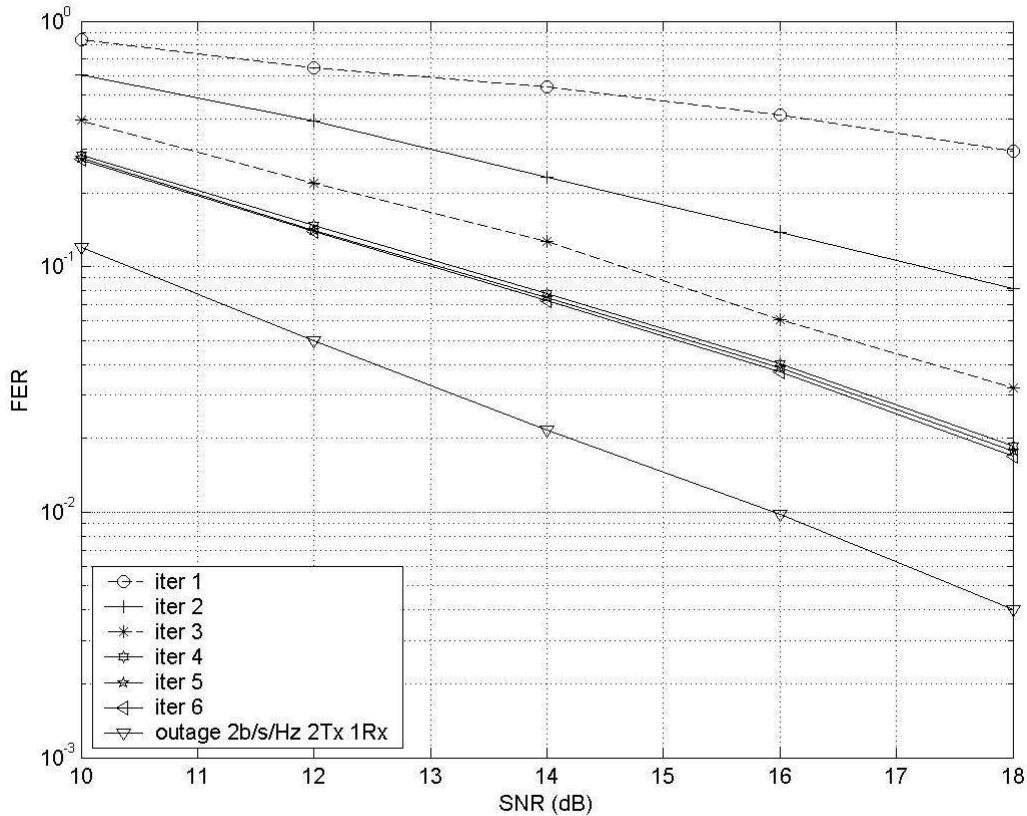


Figure 5.16 - Performances FER du turbo code SOSTTC 4 états, minCGD = 16 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 1500 symboles QPSK)

Lorsque l'on compare ces résultats à ceux de la courbe de la figure 5.15, on observe un gain de l'ordre de 1 dB pour un FER de  $3 \cdot 10^{-2}$ . De plus, par rapport à la figure 5.13, la perte en performances reste assez limitée, là encore de l'ordre de 1 dB. Ces premiers résultats montrent bien que le choix du code SOSTTC à quatre états et minCGD égal à 16 représente un excellent compromis complexité-performances. Cependant, notre but étant d'obtenir les meilleures performances possibles pour se rapprocher de la capacité *outage*, nous avons utilisé le code à huit états et minCGD égal à 64 pour la suite des simulations.

Après avoir tracé les performances pour le contexte d'une seule antenne de réception, nous donnons les résultats pour le cas de deux antennes de réception et nous considérons toujours le cas de la modulation QPSK. Les performances du code à huit états et minCGD égal à 64 en version turbo à concaténation parallèle sont illustrées sur la figure 5.17 pour une taille de paquet égale à 150 symboles QPSK. L'efficacité spectrale reste inchangée égale à 2 bits/s/Hz mais, bien sûr, la courbe de la capacité *outage* est modifiée.

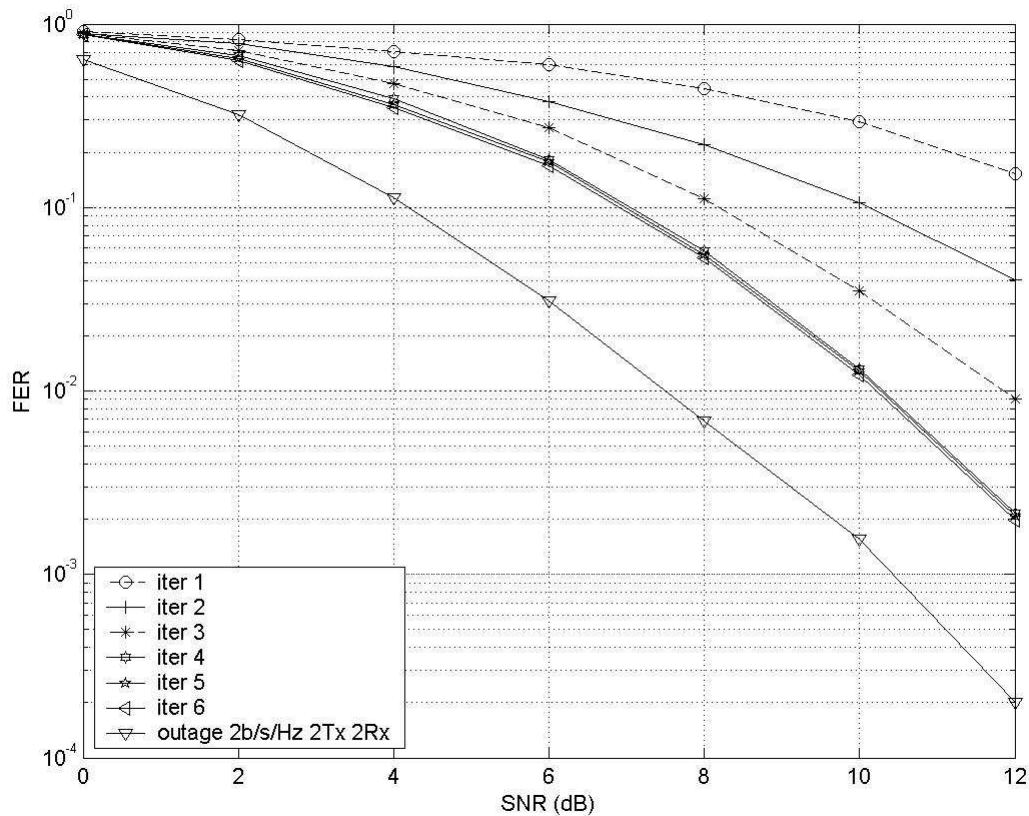


Figure 5.17 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-deux antennes de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

Cette fois, on se rapproche un peu mieux de la borne de la capacité *outage* par rapport au contexte à une antenne de réception. L'écart entre la performance obtenue à la sixième itération et cette borne limite est de l'ordre de 2.2 dB pour un FER de  $2 \cdot 10^{-2}$ . Ayant repris les simulations pour des tailles de paquets de 1500 symboles, nous arrivons à 2 dB de la capacité limite.

### Schémas sans poinçonnage

Dans ce cas, on utilise à la fois la sortie de l'encodeur supérieur et celle de l'encodeur inférieur, ce qui entraîne que chaque symbole codé est répété deux fois d'où une efficacité spectrale qui chute à 1 bit/s/Hz dans le cas d'une modulation QPSK. D'une façon générale, même si la performance pure en terme de FER s'améliore, on constate que l'on s'éloigne de façon substantielle de la capacité *outage*. On réutilise le code standard à huit états et minCGD égal à 64 en concaténation parallèle mais sans poinçonnage. Les performances sont illustrées en figure 5.18 pour le cas d'une antenne de réception avec des paquets de taille égale à 150 symboles QPSK. On constate sur la figure 5.18 que la sixième itération est située à 3.5 dB de la capacité *outage*. Cela dit, les performances brutes en terme de FER sont nettement améliorées par rapport à celles de la figure 5.12, on constate un gain de l'ordre de 3.5 dB par rapport à cette courbe pour un FER égal à  $2 \cdot 10^{-2}$ .

Le cas de deux antennes de réception est illustré sur la figure 5.19. Là encore, la performance de la sixième itération se situe approximativement à 3.2 dB de la capacité *outage*. On peut conclure des résultats de ces courbes que globalement la performance en terme de FER est plus éloignée de la capacité limite dans le cas des codes non-poinçonnés. On obtient, certes une amélioration sensible des performances brutes mais cette amélioration n'arrive pas à compenser la perte en efficacité spectrale.

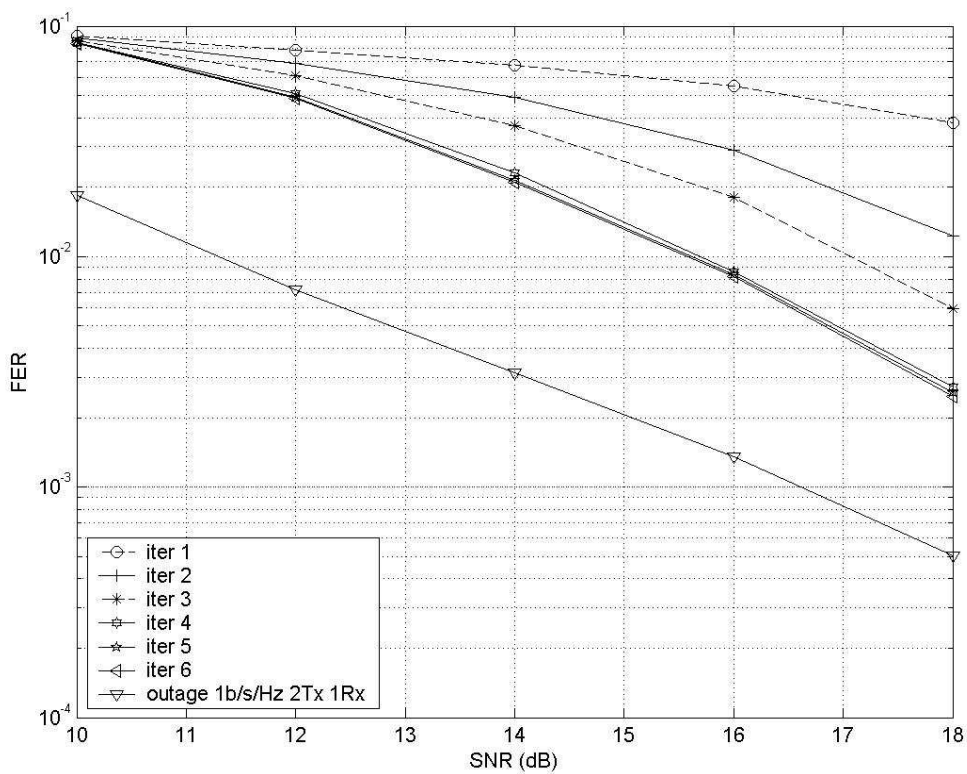


Figure 5.18 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception sans poinçonnage (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

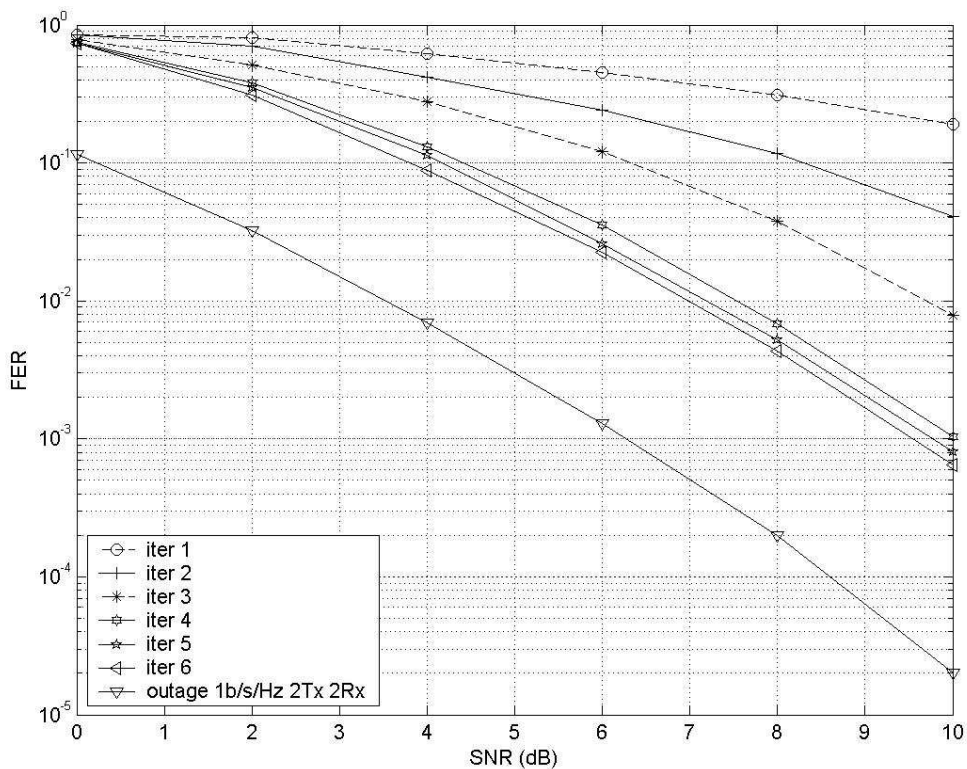


Figure 5.19 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-deux antennes de réception sans poinçonnage (taille des paquets : 150 symboles QPSK)



### 5.5.1.2. Concaténation série

Dans le cadre des simulations en concaténation série, nous avons retenu pour le code interne deux types de code STBC : le code d'Alamouti et le code SOSTTC à quatre états et minCGD égal à 16. En effet, nous souhaitons conserver une complexité raisonnable pour l'ensemble du système. Les codes STTC récurrents retenus sont extraits des travaux de recherche de Vucetic & al dans [61]. On considère respectivement trois types de codes STTC conçus pour des systèmes à deux antennes d'émission avec respectivement des longueurs de contrainte  $\nu$  égales à 2, 3 et 4. Pour le code avec  $\nu$  égal à 2, on a les polynômes générateurs (cf figure 5.9 de ce même chapitre),  $g_1=[0 \ 2;1 \ 2];g_2=[2 \ 3;2 \ 0]$ ; pour le code avec  $\nu$  égal à 3, on a les polynômes générateurs  $g_1=[1 \ 2;1 \ 3;3 \ 2];g_2=[2 \ 0;2 \ 2;2 \ 0]$  et pour le code avec  $\nu$  égal à 4, on utilise les polynômes générateurs  $g_1=[0 \ 2;3 \ 1;3 \ 3;3 \ 2]; g_2=[2 \ 2;2 \ 2;0 \ 0;2 \ 0]$ . Pour les coefficients du polynôme  $q(D)$ , on utilise des polynômes premiers avec tous les coefficients égaux à 1. Typiquement, pour les exemples retenus,  $q(D) = 1+D$ . De plus, lorsque nous utilisons un SOSTTC qui échange des informations extrinsèques avec le turbo-code STTC, nous effectuons deux itérations internes du turbo-code STTC avant de réinjecter les informations extrinsèques vers le décodeur SOSTTC.

Sachant que les codes STTC retenus ont une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz (pour deux bits en entrée du codeur STTC, on génère en sortie deux symboles codés QPSK soit une efficacité spectrale de  $4/2 = 2$  bits/s/Hz), la concaténation avec un code STBC en sortie fait alors chuter cette efficacité spectrale d'un facteur 2 pour aboutir à 1 bit/s/Hz. Les courbes de capacité théorique seront donc tracées ici pour une efficacité spectrale de 1 bit/s/Hz.

Le premier schéma testé concerne la concaténation d'un code d'Alamouti avec le code  $g_1=[0 \ 2;1 \ 2];g_2=[2 \ 3;2 \ 0]$ . Les résultats sont donnés sur la courbe de la figure 5.20.

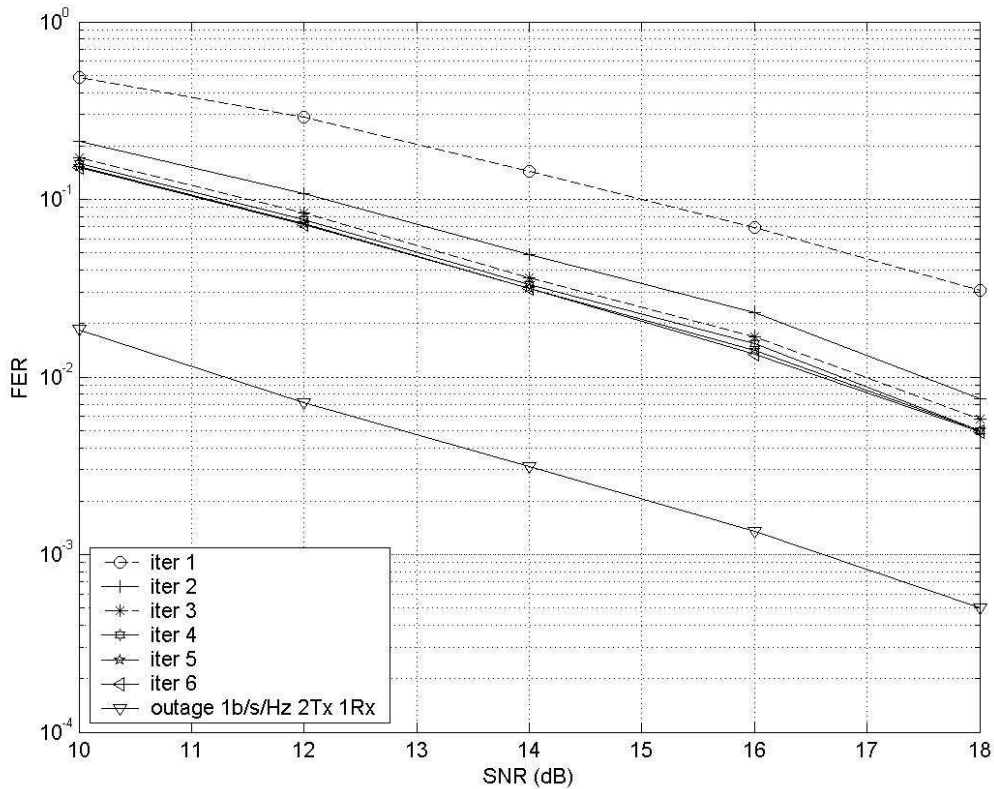


Figure 5.20 - Performances FER de la concaténation série d'un code d'Alamouti avec un turbo-code STTC ( $\nu = 2$ )

Les performances obtenues sont assez médiocres puisque la sixième itération est à 5 dB de la capacité *outage*. Nous avons alors testé la concaténation du code SOSTTC à quatre états et minCGD égal à 16 avec le même turbo code STTC. Les résultats sont illustrés sur la figure 5.21.

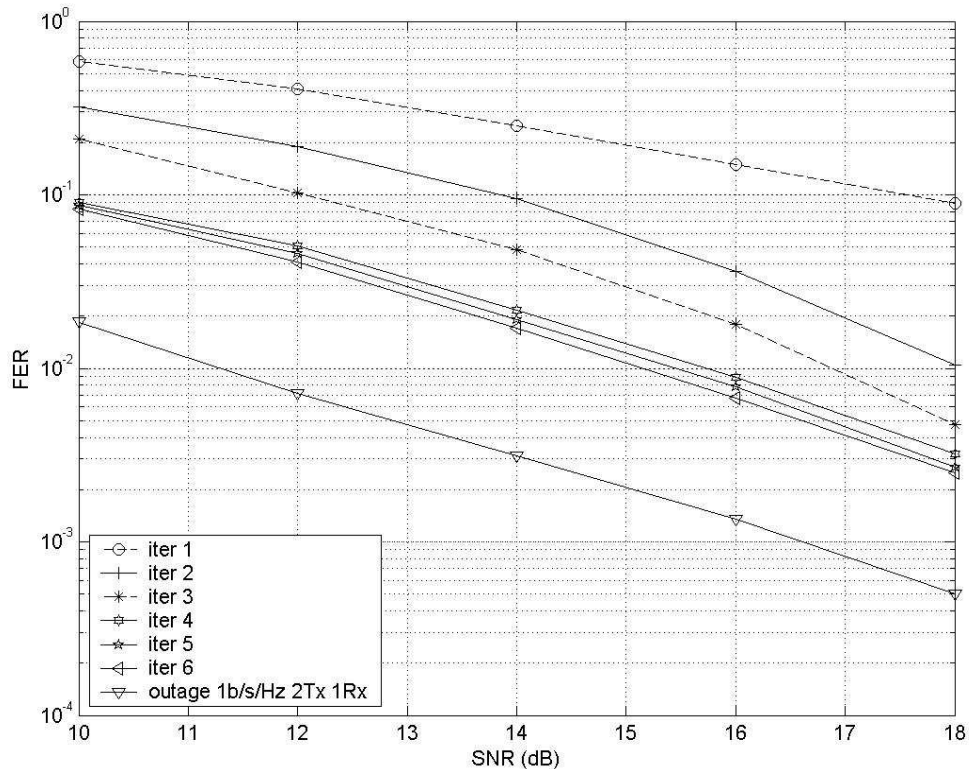


Figure 5.21 - Performances FER de la concaténation série du code SOSTTC 4 états et minCGD égal à 16 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 2$ )

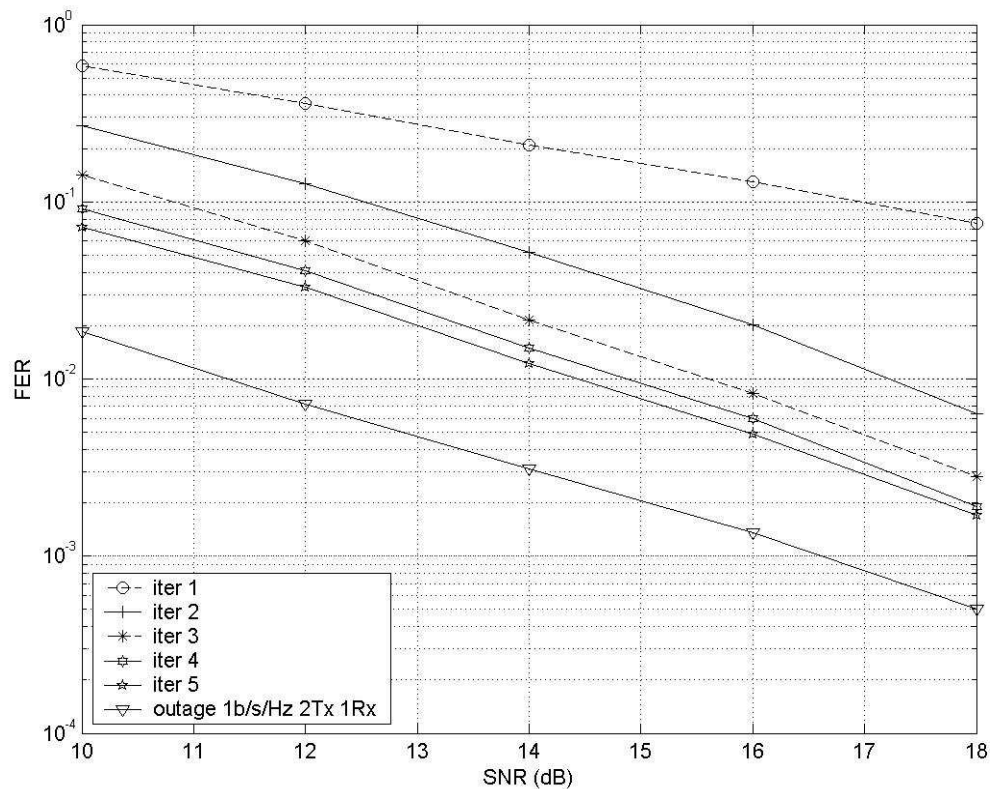


Figure 5.22 - Performances FER de la concaténation série du code SOSTTC 4 états et minCGD égal à 16 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 3$ )

On constate sur la figure 5.21 que l'apport d'un code à diversité maximale ayant un gain de codage, permet une amélioration substantielle des performances. Cette fois, au bout de la sixième itération, on arrive à 4 dB de la capacité théorique *outage*, soit un gain de l'ordre de 1 dB. Il faut signaler également que les performances lors de la première itération sont inférieures à celles du code d'Alamouti.

La figure 5.22 représente les résultats obtenus avec l'utilisation du code STTC de polynômes générateurs  $g_1=[1\ 2;1\ 3;3\ 2];g_2=[2\ 0;2\ 2;2\ 0]$  ( $\nu = 3$ ). On constate une amélioration des performances par rapport à la figure 5.21, au bout de la sixième itération la performance de la concaténation série réalisée est à 2.5 dB de la capacité *outage*. On peut encore très légèrement améliorer les performances en utilisant un code STTC plus puissant avec  $\nu = 4$ . Les résultats sont présentés sur la figure 5.23.

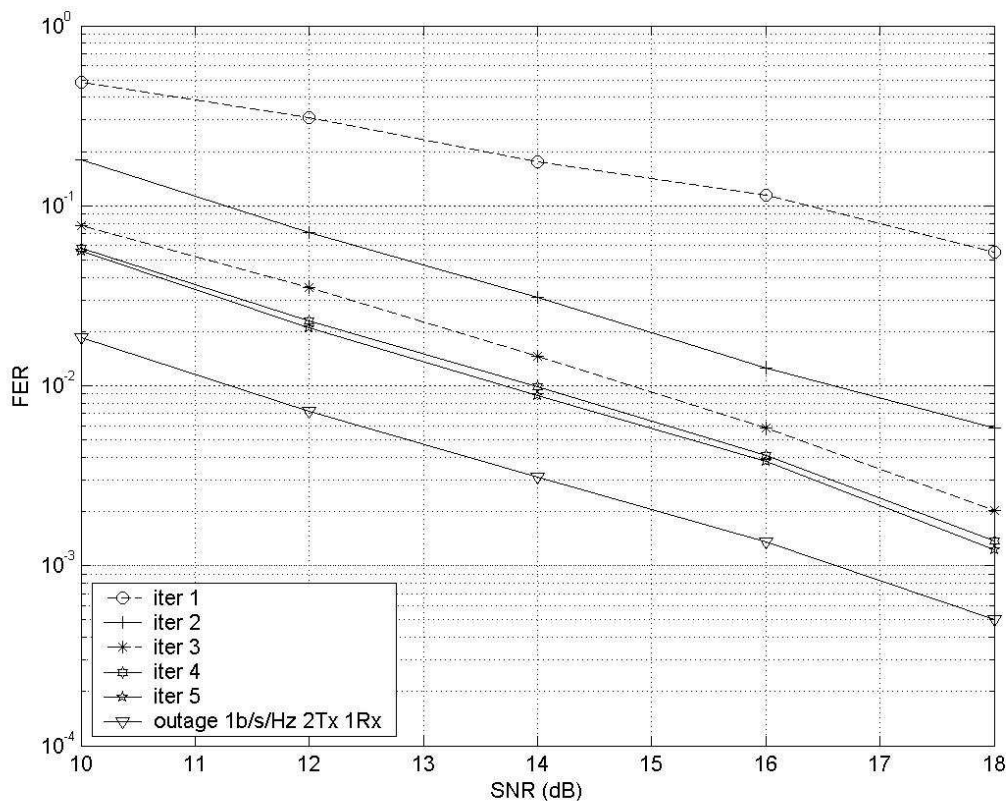


Figure 5.23 - Performances FER de la concaténation série du code SOSTTC 4 états et minCGD égal à 16 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 4$ )

L'amélioration existe certes mais elle est marginale, on arrive maintenant à 2.2 dB de la capacité *outage* au bout de six itérations.

### 5.5.1.3. Comparaison turbo-SOSTTC / turbo-STTC en concaténation parallèle

Pour terminer ce chapitre en ce qui concerne le cas à deux antennes d'émission, nous proposons, dans le cadre de schémas avec poinçonnage alternatif des codeurs supérieur et inférieur donc avec une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz, une comparaison entre turbo-codes à base de SOSTTC et turbo-codes à base de STTC. Nous utilisons le code SOSTTC à huit états et minCGD égal à 64 comme code de base pour le turbo code SOSTTC et nous utilisons un turbo code STTC avec  $\nu = 3$ , de polynômes générateurs  $g_1=[1\ 2;1\ 3;3\ 2];g_2=[2\ 0;2\ 2;2\ 0]$ .

Le contexte simulé est d'abord celui d'un système à deux antennes d'émission et une antenne de réception. Les performances du turbo code SOSTTC ont déjà été données sur la figure 5.12. Nous remettons ici cette figure, renommée figure 5.24, pour mieux comparer les performances des deux types de code. En ce qui concerne les performances du turbo-code STTC, elles sont représentées sur la figure 5.25. Si on compare les résultats de ces deux courbes, on constate que la convergence du turbo code SOSTTC est plus rapide que celle du code turbo STTC, il y a saturation pour le code SOSTTC au bout de cinq itérations alors que le seuil de saturation serait plutôt égal à huit pour le turbo code STTC. En ce qui concerne les résultats bruts, on constate un léger avantage en faveur du turbo code SOSTTC, il présente un gain de l'ordre de 0.5 dB pour un FER de  $3.10^{-2}$ .

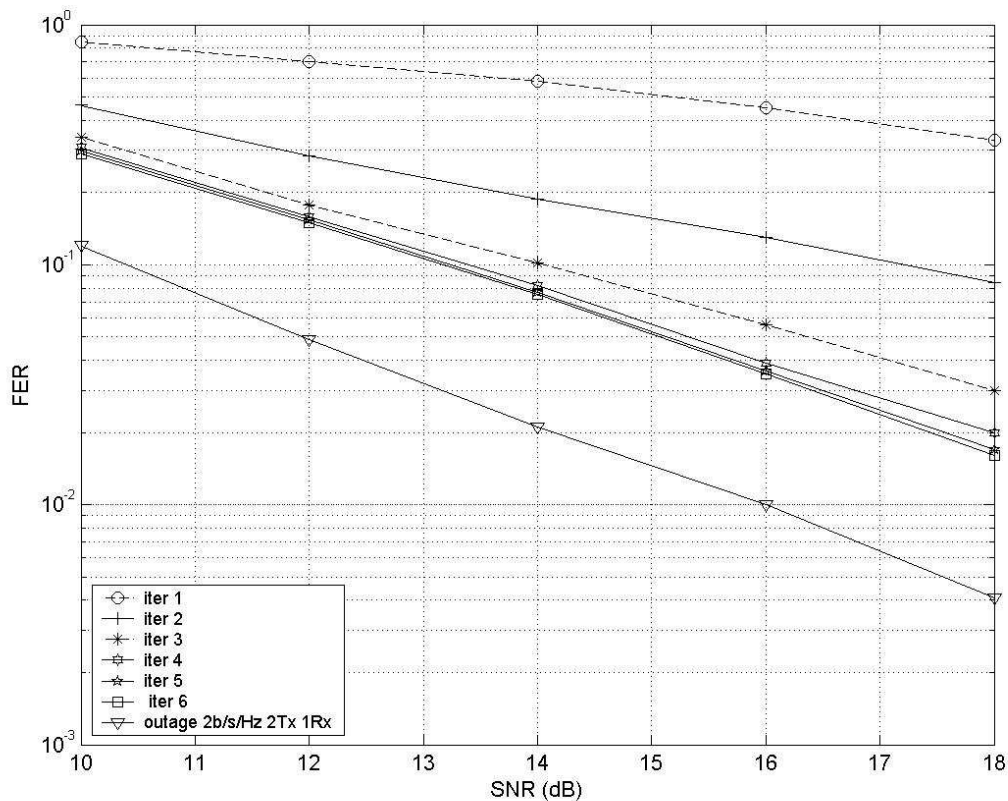


Figure 5.24 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états, minCGD = 64 avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

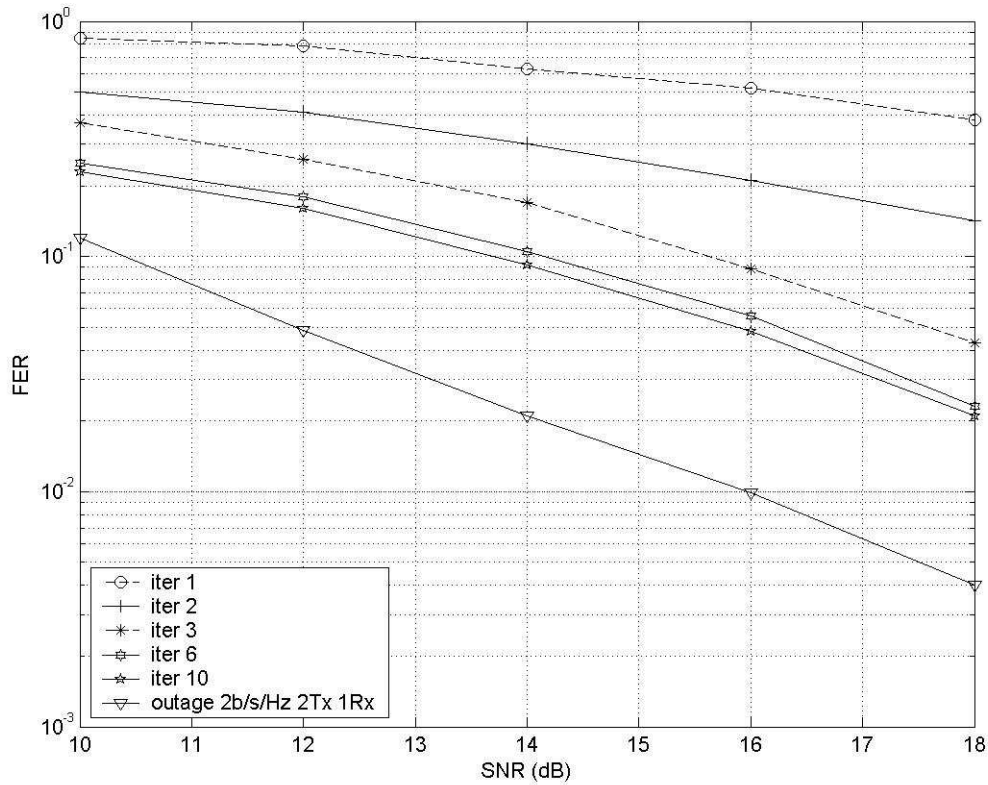


Figure 5.25 - Performances FER du turbo code STTC  $v = 3$ , avec deux antennes d'émission-une antenne de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

Nous opérons alors la comparaison des deux codes pour le cas d'un système à deux antennes d'émission et deux antennes de réception. La courbe pour le turbo code SOSTTC a déjà été donnée en figure 5.17 et nous la rappelons ici en figure 5.26 pour effectuer notre comparaison.

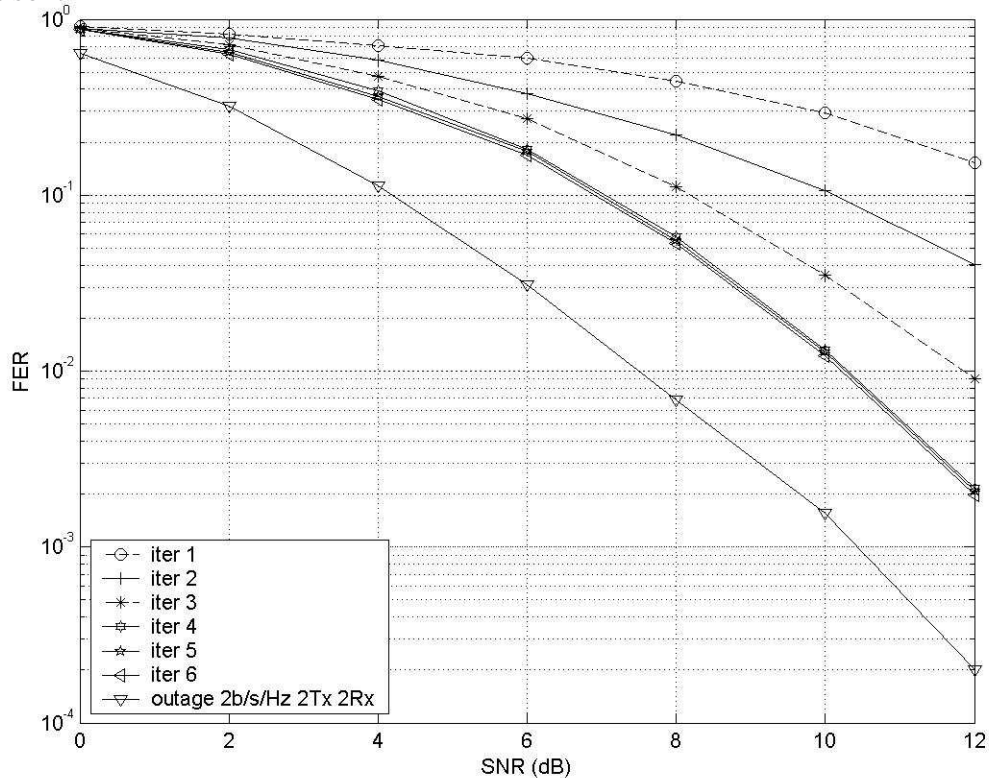


Figure 5.26 - Performances FER du turbo code SOSTTC 8 états,  $\text{minCGD} = 64$  avec deux antennes d'émission-deux antennes de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

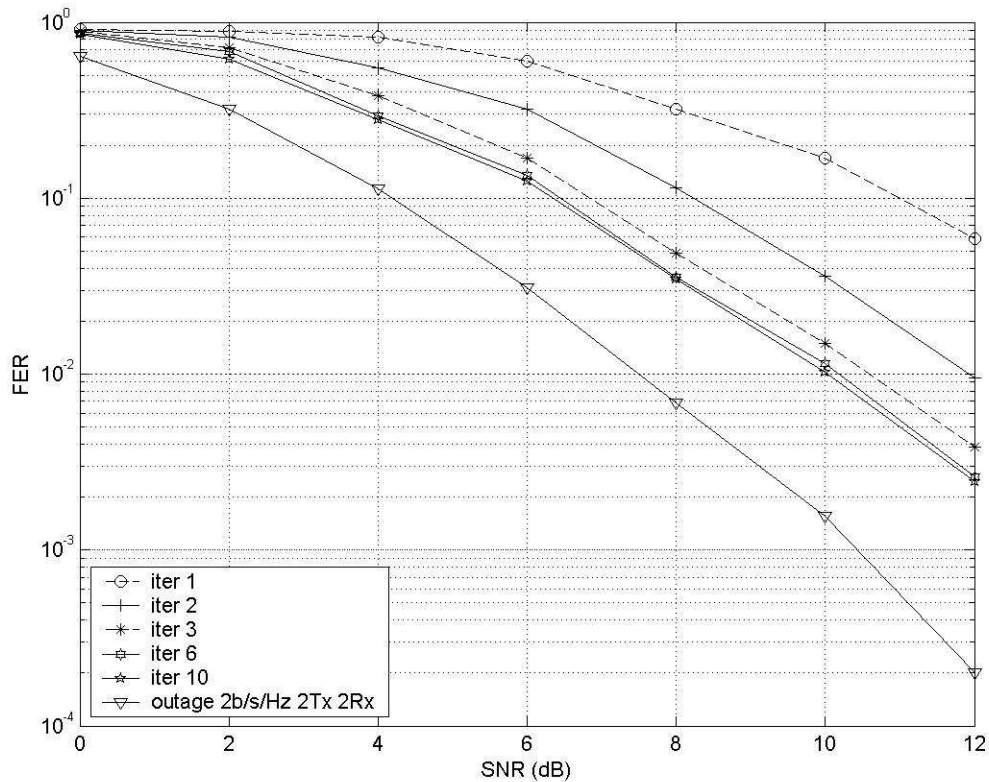


Figure 5.27 - Performances FER du turbo code STTC  $v = 3$ , avec deux antennes d'émission-deux antennes de réception (taille des paquets : 150 symboles QPSK)

Les performances des deux codes sont vraiment très proches. Il semble par contre une fois de plus que le turbo code SOSTTC converge plus vite que le turbo STTC, la saturation ayant lieu dès la cinquième courbe alors qu'elle se situe plutôt à la huitième itération pour le turbo STTC.

## 5.5.2. Cas de trois antennes d'émission

### 5.5.2.1. Concaténation parallèle

Dans le cas de systèmes à trois antennes d'émission, la perte d'orthogonalité stricte des matrices STBC transmises a pour effet de diminuer considérablement l'effet turbo par rapport au cas à deux antennes. Cet effet existe cependant comme le montre la courbe de la figure 5.6. Nous l'avons testé ici dans le cas où l'on n'emploie pas de poinçonnage alternatif entre le codeur supérieur et le codeur inférieur. Ceci permet de plus d'utiliser un entrelacement au niveau des symboles individuels pour avoir un gain d'entrelacement maximum. L'efficacité spectrale dans ce cas est de 1 bit/s/Hz sachant que chaque symbole est émis deux fois par les codeur supérieur et inférieur. Nous considérons toujours le contexte de transmission sur des canaux de Rayleigh non-sélectifs en fréquence et quasi-statiques. La taille des paquets de symboles est égale à 150 symboles QPSK. La figure 5.28 représente les performances obtenues en termes de FER pour un contexte à trois antennes d'émission et une antenne de réception. Le code STTC à base de codes STBC utilisé ici est un code à huit états basé sur le

partitionnement de la figure 4.3 du chapitre consacré à la réalisation des codes STBC pour trois antennes d'émission. Son minCGD est égal à 22.

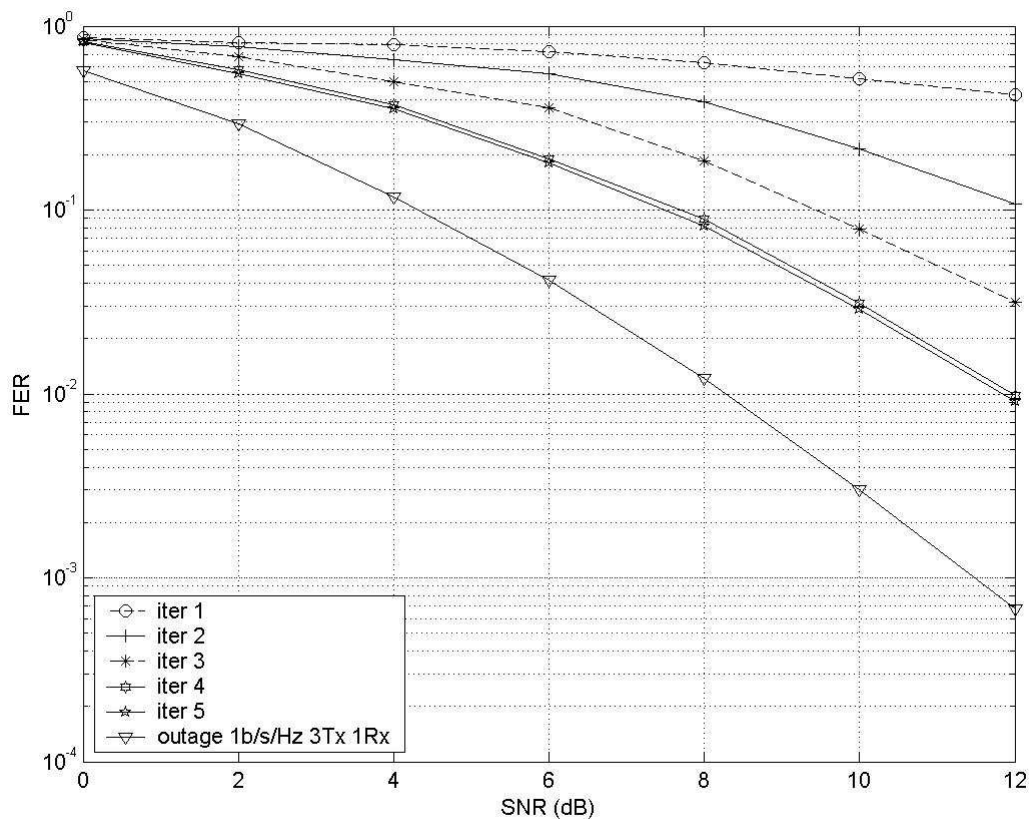


Figure 5.28 - Performances FER du turbo code STTC à base de STBC avec 8 états et minCGD égal à 22 (taille des paquets : 150 symboles QPSK) trois antennes d'émission-une antenne de réception

Il faut signaler de plus que la métrique de branche utilisée dans les algorithmes log-MAP correspond à la métrique optimale sans approximation par matrice diagonale. On constate sur la courbe de la figure 5.28 que l'effet turbo sature au bout de quatre itérations, de plus, la performance obtenue au bout de la cinquième itération est située à 4 dB de la capacité *outage* (pour un FER de  $10^{-2}$ ). Ceci ne représente aucune amélioration par rapport au cas du codage simple sans concaténation parallèle et avec un simple décodeur de Viterbi en réception. L'utilisation d'un entrelaceur de taille plus conséquente (en passant par exemple à 1500 symboles) permet d'améliorer la performance, on se situe néanmoins encore à 3.5 dB de la capacité *outage*.

Les mêmes constatations s'imposent dans le cas d'un système à trois antennes d'émission et deux antennes de réception dont les performances sont représentées sur la figure 5.29 ci-dessous.

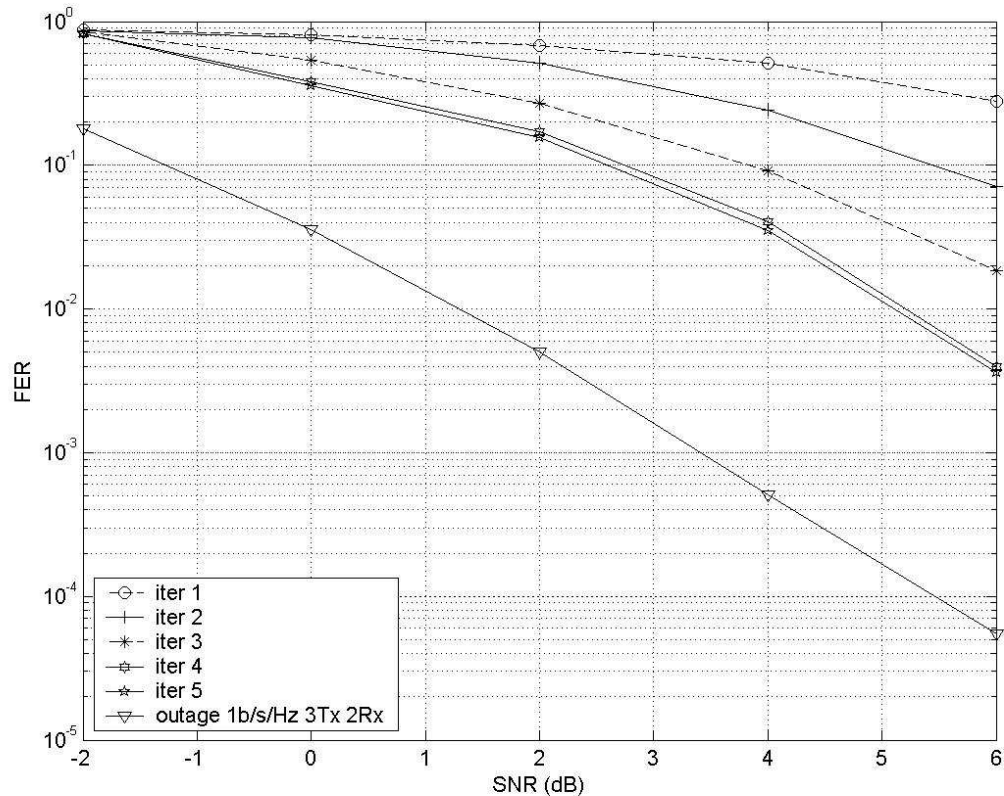


Figure 5.29 - Performances FER du turbo code STTC à base de STBC avec 8 états et minCGD égal à 22 (taille des paquets : 150 symboles QPSK) trois antennes d'émission-deux antennes de réception

Ici aussi, on constate que l'effet turbo sature au bout de quatre itérations. La encore, on constate que la performance au bout de la quatrième itération est située à 3.8 dB de la capacité *outage*. Il est à signaler que nous avons également utilisé un turbo code basé sur un code STTC à base de codes STBC à 16 états, les performances en terme de performances pures en FER sont légèrement améliorées, la performance de la quatrième itération est située maintenant à 3.5 dB de la capacité *outage*. Mais l'utilisation d'un codeur à 16 états avec une matrice unitaire différente affectée à chacun d'entre eux entraîne une complexité importante du décodeur.

La conclusion est tout à fait claire: les performances affichées en concaténation parallèle pour des paquets de petite taille ne permettent pas d'amélioration par rapport à un codeur classique avec décodage par algorithme de Viterbi.

### 5.5.2.2. Concaténation série

Dans le cadre des simulations en concaténation série, nous avons retenu pour le code interne le code STTC à base de STBC à 8 états et minCGD égal à 22 déjà utilisé en simulations pour la concaténation parallèle. Les codes STTC récursifs retenus sont extraits des travaux de recherche de Vucetic & al dans [61]. On considère respectivement deux types de codes STTC conçus pour des systèmes à trois antennes d'émission avec respectivement des longueurs de contrainte  $\nu$  égales à 4 et 5. Pour le code avec  $\nu$  égal à 4, on a les polynômes générateurs (cf



figure 5.9 de ce même chapitre),  $g_1=[0\ 0\ 2; 0\ 1\ 2; 2\ 3\ 1]; g_2=[2\ 0\ 0; 1\ 2\ 0; 2\ 3\ 3]$ ; pour le code avec  $\nu$  égal à 5, on a les polynômes générateurs  $g_1=[0\ 2\ 1; 2\ 0\ 0; 0\ 0\ 2]; g_2=[3\ 1\ 0; 3\ 2\ 1; 3\ 2\ 2; 2\ 0\ 0]$ . Pour les coefficients du polynôme  $q(D)$ , on utilise des polynômes premiers avec tous les coefficients égaux à 1. Typiquement, pour les exemples retenus,  $q(D) = 1+D+D^2$ . De plus, lorsque nous utilisons un code STTC à base de STBC qui échange des informations extrinsèques avec le turbo-code STTC, nous effectuons deux itérations internes du turbo-code STTC avant de réinjecter les informations extrinsèques vers le décodeur STTC à base de STBC.

Sachant que les codes STTC retenus ont une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz, la concaténation avec un code STBC en sortie fait alors chuter cette efficacité spectrale d'un facteur 2 pour aboutir à 1 bit/s/Hz. Les courbes de capacité théorique seront donc tracées ici pour une efficacité spectrale de 1 bit/s/Hz. La première courbe tracée en figure 5.30 concerne la concaténation du code STTC à base de STBC avec le turbo code STTC en concaténation parallèle pour des codes STTC  $g_1=[0\ 0\ 2; 0\ 1\ 2; 2\ 3\ 1]; g_2=[2\ 0\ 0; 1\ 2\ 0; 2\ 3\ 3]$ . Elle est tracée pour un système à trois antennes d'émission et une antenne de réception.

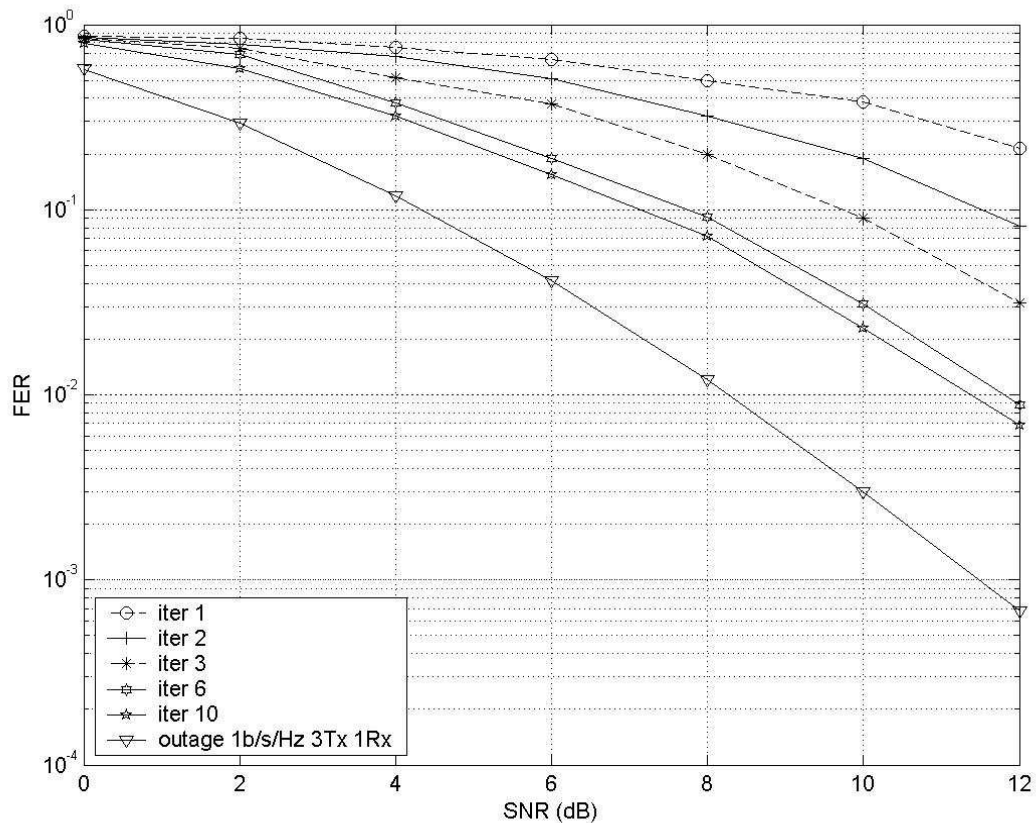


Figure 5.30 - Performances FER de la concaténation série du code STTC -STBC 8 états et minCGD égal à 22 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 4$ ) trois antennes d'émission-une antenne de réception

On constate une amélioration intéressante des performances par rapport aux courbes de la figure 5.28. En effet, la performance obtenue au bout de la dixième itération est située à 2.6 dB de la capacité *outage*, ce qui constitue un gain de l'ordre de 1.4 dB par rapport au cas de la figure 5.28. Il faut également souligner que la concaténation série obtenue ici donne de meilleurs résultats que dans le cas à deux antennes. L'utilisation d'un code plus puissant pour le codeur interne (on utilise ici un code à 8 états alors que l'on avait utilisé un codeur SOSTTC à 4 états) permet un échange d'informations extrinsèques plus efficace avec le

codeur externe. Ceci constitue une piste intéressante qui sauve l'intérêt de l'utilisation du codage turbo dans le cas des codes STTC-STBC synthétisés pour le cas à trois antennes. Ceci est confirmé par l'examen des courbes obtenues pour trois antennes d'émission et deux antennes de réception. Les résultats sont donnés sur la figure 5.31.

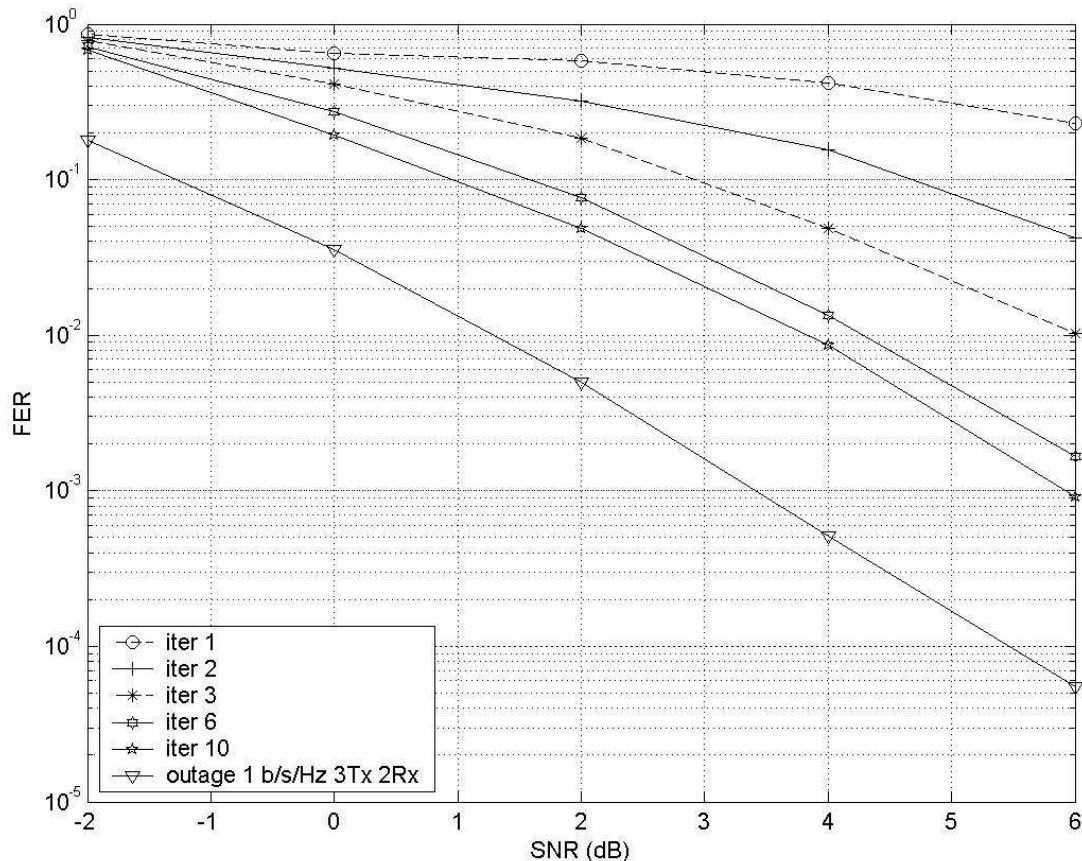


Figure 5.31 - Performances FER de la concaténation série du code STTC-STBC 8 états et minCGD égal à 22 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 4$ ) trois antennes d'émission-deux antennes de réception

La performance obtenue au bout de la dixième itération est à 2.6 dB de la capacité *outage* pour un FER égal à  $10^{-2}$ . Ces performances sont nettement supérieures à celles affichées en figure 5.29 par la concaténation parallèle de codes STTC à base de codes STBC avec un gain supérieur à 1 dB. L'intérêt de la concaténation série STTC à base de codes STBC et turbo STTC apparaît donc clairement avec les simulations réalisées ici. Nous avons également voulu quantifier l'apport d'un codeur externe plus puissant, en utilisant un turbo-code STTC à base de codes STTC avec une longueur de contrainte  $\nu = 5$ . Les résultats sont présentés en figure 5.32 pour le cas trois antennes d'émission-une antenne de réception et en figure 5.33 pour le cas trois antennes d'émission-deux antennes de réception. On constate par rapport au cas  $\nu = 4$  que le gain est marginal, un code externe plus puissant n'entraîne pas une amélioration significative des performances dans ce contexte particulier. La dixième itération est située à 2.5 dB de la capacité *outage* pour un FER égal à  $10^{-2}$ . Les constatations sont les mêmes pour le cas deux antennes de réception représenté en figure 5.33. L'apport d'un codeur plus puissant s'avère marginal et les résultats obtenus au bout de la dixième itération restent distants d'environ 2.5 dB de la capacité *outage*.

En conclusion, il semble ici que l'association d'un codeur interne STTC à base de STBC à huit états avec un minCGD égal à 22 avec un codeur externe turbo-STTC de polynômes générateurs  $g_1=[0\ 0\ 2;\ 0\ 1\ 2;\ 2\ 3\ 1]; g_2=[2\ 0\ 0;\ 1\ 2\ 0;\ 2\ 3\ 3]$  représente un excellent compromis complexité-performances.

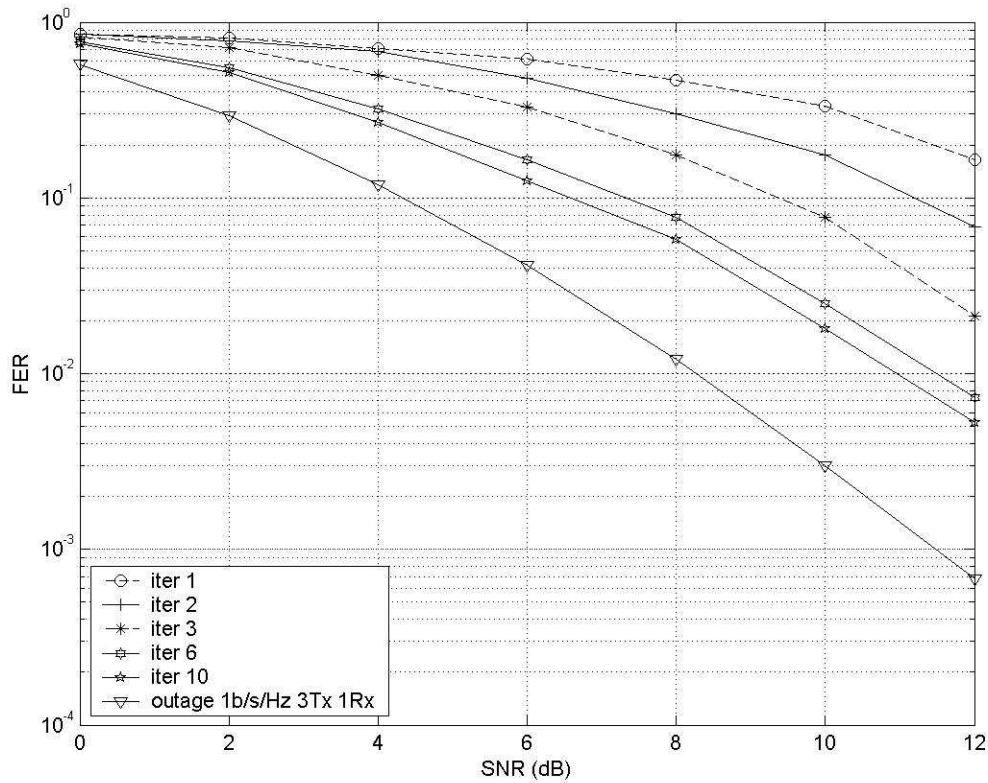


Figure 5.32 - Performances FER de la concaténation série du code STTC-STBC 8 états et minCGD égal à 22 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 5$ ) trois antennes d'émission-une antenne de réception

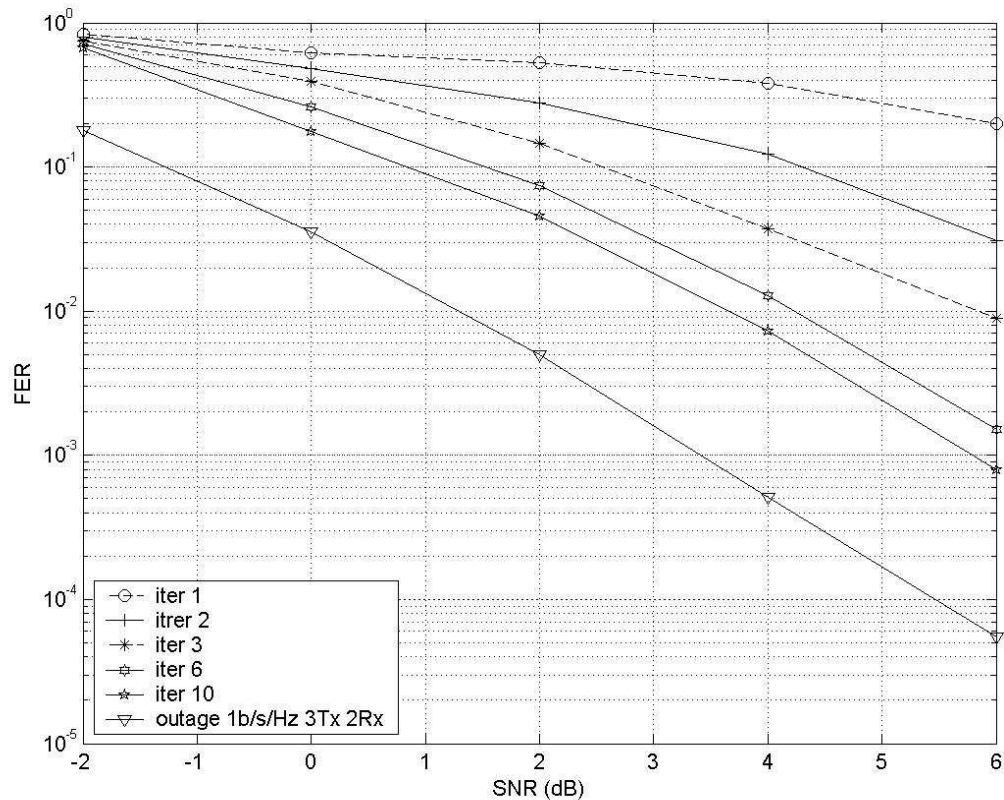


Figure 5.33 - Performances FER de la concaténation série du code STTC-STBC 8 états et minCGD égal à 22 avec un turbo-code STTC ( $\nu = 5$ ) trois antennes d'émission-deux antennes de réception

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé plusieurs schémas de concaténation parallèle ou série incluant les codes STTC à base de codes STBC que nous avons étudiés dans les chapitres précédents. Le contexte étudié est celui de petits paquets avec des tailles de l'ordre de 150 symboles.

En ce qui concerne les codes orthogonaux en treillis, cas des codes SOSTTC pour deux antennes d'émission, le choix de la concaténation parallèle s'avère être une bonne option puisque les turbo-codes ainsi synthétisés présentent une rapidité de convergence (au fil des itérations) supérieure à celle des turbo-codes STTC en concaténation parallèle de complexité équivalente. Par contre, les résultats obtenus en concaténation série par l'association d'un code SOSTTC et d'un turbo-code STTC s'avèrent assez décevants, les codes ainsi réalisés travaillant au moins à 3 dB de la capacité *outage*. Tout se passe ici en fait comme si les informations souples en sortie des décodeurs SOSTTC étaient souvent trop tranchées (trop fiables lorsqu'elles sont entachées d'erreurs) et ne permettaient pas aux informations extrinsèques en sortie du turbo code STTC de venir les corriger. L'apport d'un turbo-code STTC plus puissant permet, certes, d'améliorer les performances mais on reste assez loin de la borne théorique dans tous les cas (plus de 2.5 dB d'écart).

En ce qui concerne les codes STTC à base de STBC conçus pour les systèmes à trois antennes d'émission, les fonctions de transfert EXIT charts montrent bien que ces codes présentent un effet turbo limité en concaténation parallèle. Les performances obtenues avec des schémas sans poinçonnage et entrelacement au niveau des symboles individuels sont loin des bornes théoriques (à peu près 4 dB d'écart). Par contre, la concaténation série de ces codes avec un turbo-code STTC permet d'obtenir des performances encourageantes. En effet, avec un turbo-code STTC de longueur de contrainte 3 nous arrivons à approcher la borne de la capacité *outage* à environ 2.5 dB.

## CHAPITRE 6 LES SYSTEMES EN COUCHES

---

6.1	Introduction	172
6.2	Description du système étudié	173
6.3	Exemples d'algorithmes de détection pour systèmes MIMO en couches	176
6.3.1.	Critère de forçage à zéro (ZF)	176
6.3.2.	Récepteur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQMM)	176
6.3.3.	Récepteur à Maximum de Vraisemblance (MV)	177
6.3.4.	Récepteur itératif à annulation successives d'interférences (ASI)	177
6.4	Systèmes de détection itératifs : TURBO-BLAST	179
6.4.1.	Emetteur TURBO-BLAST	179
6.4.2.	Décodeur itératif (TURBO-BLAST)	181
6.4.3.	Performances des systèmes TURBO-BLAST	188
6.5	Architecture en couches des codes SQOSTTC, les SQOHLSTTC	194
6.5.1.	Codage	195
6.5.2.	Décodage itératif <i>hard</i> des SQOHLSTTC	196
6.5.3.	Performances	198
6.6	Conclusion	200
	Revue publiée dans les Annales des Télécommunications	201

---

## 6.1 Introduction

Les systèmes à base de codes spatio-temporels étudiés dans les chapitres précédents présentent l'inconvénient majeur d'être dimensionnés pour un nombre précis d'antennes d'émission, ce nombre étant généralement faible leur efficacité spectrale reste limitée. Pour améliorer l'efficacité spectrale, un outil bien connu consiste à partager à l'aide d'un démultiplexeur le flux des données transmises à la sortie d'un codeur de canal en différents flux et à transmettre chacun de ces nouveaux flux sur une antenne d'émission après entrelacement. Selon la place de l'entrelaceur dans la chaîne de transmission, on parle de codage vertical ou horizontal. On dispose ainsi de ce que l'on appelle communément le gain de multiplexage. Chaque antenne d'émission transmet les données en utilisant les mêmes ressources temps-fréquence que les autres antennes ce qui entraîne que le récepteur doit pouvoir discriminer les différents flux de données à l'aide d'algorithmes de traitement du signal pour éliminer les flux interférents. Ces techniques sont bien connues et référencées dans la littérature sous le nom de technique BLAST [68-69]. Elles permettent d'obtenir, selon le type de modulation utilisée des efficacités spectrales voisines de 30 bits/s/Hz. Le premier algorithme d'annulation d'interférences a été testé pour un schéma d'encodage vertical et était basé sur une technique ZF (*Zero-Forcing*) suivie d'une annulation successive d'interférences. Il porte le nom de V-BLAST (*Vertical BLAST*). Depuis, de nombreux autres algorithmes ont vu le jour à base de techniques MMSE, MAP ou de traitements itératifs [70-75]. Dans ce chapitre nous nous intéressons à ces dernières techniques car elles semblent les plus prometteuses pour obtenir des capacités proches des bornes théoriques (capacité *outage*). Après avoir d'abord défini le récepteur optimal, nous testons des algorithmes à faible complexité à base de filtrage MMSE pour la partie annulation d'interférences. Les algorithmes itératifs nécessitent l'échange d'informations entre un décodeur de canal et un dispositif à annulation d'interférences, nous testerons ici plusieurs types de codeurs de canal à base de codes convolutifs et de codes LDPC. Il existe déjà une littérature abondante sur le sujet [76-79] mais il nous semblait important d'une part d'établir une comparaison entre les schémas à base de codage vertical et de codage horizontal et d'autre part, de situer les performances des dispositifs étudiés par rapport aux bornes théoriques. En ce qui concerne l'efficacité du dispositif d'annulation d'interférences, nous introduisons une borne inférieure particulière que nous appelons borne d'annulation parfaite d'interférences. Elle correspond au cas théorique où les signaux interférents sont parfaitement éliminés et dans ce cas chaque antenne de réception reçoit le flux désiré à travers un canal de Rayleigh simplement perturbé par un bruit additif Gaussien. Nous supposons de plus, quitte à utiliser un dispositif MIMO OFDM, que le canal de propagation pour chaque paire  $(i,j)$  d'antennes d'émission-réception se comporte comme un canal de Rayleigh non-sélectif en fréquence.

Ensuite, nous verrons qu'il est heureusement possible de combiner cette approche en couche avec les codes spatio-temporels en blocs présentés dans les chapitres précédents, pour maintenir à la fois une haute efficacité spectrale et un gain de diversité maximal. L'idée est donc de partitionner les antennes d'émission en plusieurs groupes d'antennes et d'appliquer à chacun d'entre eux un codage temps-espace. En réception, chaque code temps-espace est décodé en série, de façon individuelle. Cela consiste à faire des étapes de suppressions et d'annulations d'interférences par groupe, comme dans le cas du système BLAST. En utilisant des codes temps-espace pour chaque groupe, on s'assure d'obtenir une meilleure diversité que pour le cas purement BLAST et en utilisant les techniques BLAST entre chaque groupe cela nous permet de préserver une haute efficacité spectrale. Comme précédemment, nous

considérons un système MIMO comprenant  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception.

Le plan de ce chapitre est le suivant : d'abord, nous décrivons le système étudié en précisant les architectures verticale et horizontale. Puis nous nous intéressons à la description des algorithmes d'annulation d'interférences avec le calcul des LLR (*Log Likelihood Ratios*) et des informations extrinsèques en sortie des filtres annulateurs d'interférences. Nous donnons ensuite les performances obtenues pour différents types de codeurs de canal et selon le type d'encodage vertical ou horizontal. Enfin, en considérant un nombre d'antennes d'émission multiple de trois, nous proposons une architecture en couche horizontale, ou sur chacune des couches le code SQOSTTC à trois antennes d'émission présenté dans le chapitre 4 est utilisé comme code temps-espace. Nous avons baptisé ce nouveau design : *Super-Quasi-Orthogonal Horizontal Layered Space-Time Treillis Code* SQOHLSTTC. Après avoir présenté les règles de conception de ce nouveau design, nous donnons les résultats de simulation. Une conclusion résumant les principaux résultats termine le chapitre.

## 6.2 Description du système étudié

Contrairement aux codes spatio-temporels, dont l'efficacité spectrale est limitée par le codeur utilisé, la capacité des systèmes spatio-temporels par couches (LST pour *Layered Space-Time*), formées par un multiplexage initial (Figure 6.1), croît linéairement avec le nombre d'antennes émettrices, et le TEB décroît exponentiellement si l'on utilise un détecteur optimal (MV). L'avenir des communications numériques réside sans doute dans la capacité à envoyer simultanément des informations spécifiques pour différents types d'applications. Les chaînes de symboles seront alors envoyées à différents sous-canaux dédiés avec un codage approprié, imposant aux systèmes de transmission une certaine souplesse. Ainsi, contrairement aux codes spatio-temporels, le nombre d'antennes, la technique de modulation, l'entrelaceur utilisé peuvent facilement s'ajuster dans des systèmes spatio-temporels par couches, dont les voies sont indépendantes.

Les systèmes spatio-temporels par couches sont à l'origine de l'engouement pour les systèmes MIMO. Les chercheurs des laboratoires Bell ont ainsi proposé successivement plusieurs architectures dont ils ont démontré l'énorme potentiel (figure 6.2). Le système le plus simple, qui ne fait appel à aucune technique de codage, est le V-BLAST [68] [69] [73]. Cette architecture verticale procède tout simplement à un démultiplexage de la chaîne d'informations en  $n_t$  sous-chaînes, chacune d'entre elles étant transmise par son antenne respective après avoir été modulée.

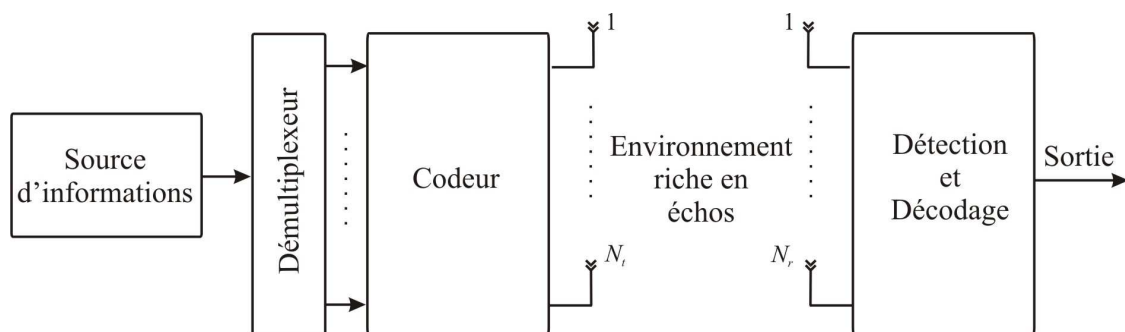


Figure 6.1 - Systèmes de transmission spatio-temporels en couches

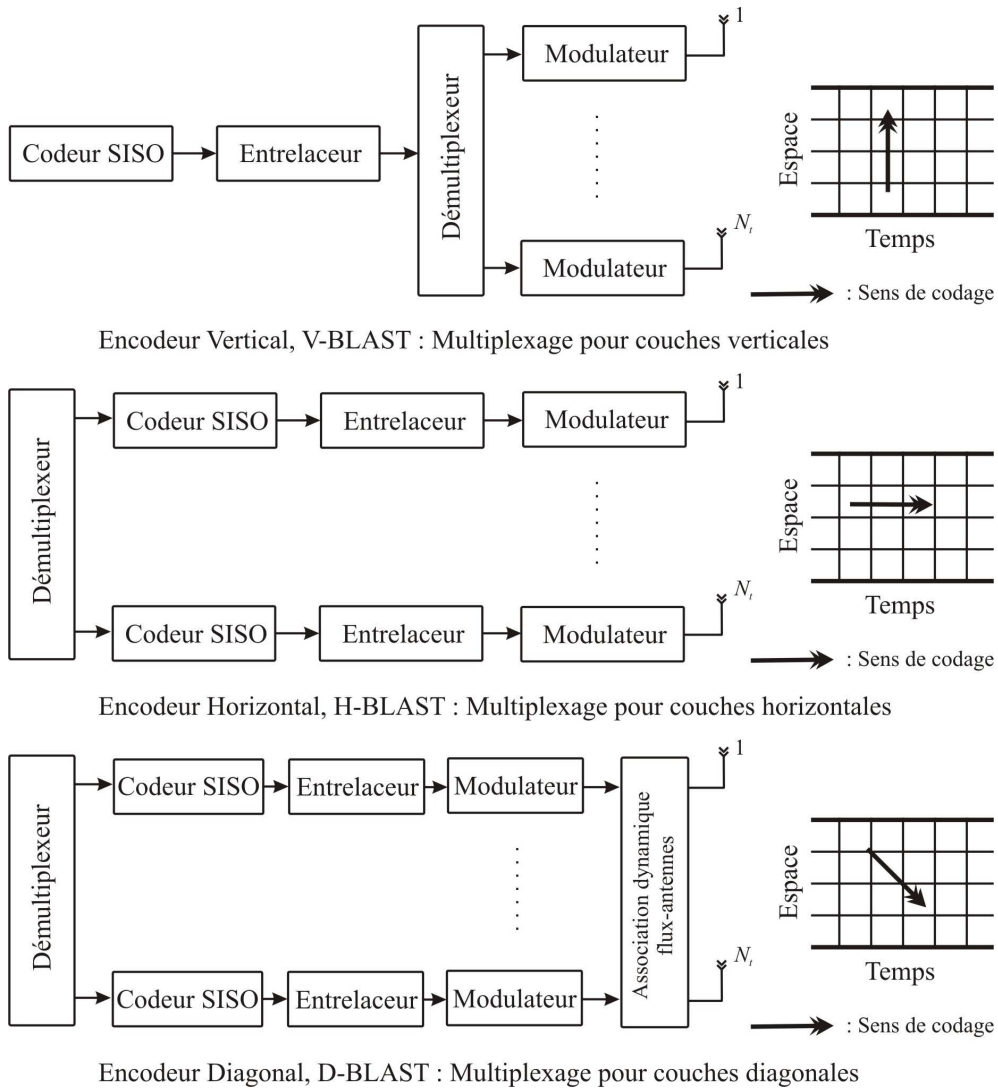


Figure 6.2 - schémas de modulation BLAST

Si on note  $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$  les bits d'information provenant de la source binaire et  $\{s_k^l\}$  les symboles à émettre qui se trouvent sur la  $l^{\text{ème}}$  ligne de la matrice résultante, le processus peut être représenté sous la forme de diagramme :

$$(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \quad \dots) \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ b_2 & b_{N_t+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ s_1^{N_t} & s_2^{N_t} & \dots \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Les symboles qui se trouvent sur la ligne (ou couche)  $l$  de la matrice sont alors envoyés par la  $l^{\text{ème}}$  antenne ( $l=1, \dots, N_t$ ). Cette architecture verticale sans codage n'est pas la première version du prototype BLAST proposée par les laboratoires Bell, mais c'est celle qui a



véritablement révolutionné le monde des systèmes multi-antennes par sa simplicité et son efficacité.

Les architectures BLAST initialement proposées comportent un système de codage à la suite du démultiplexeur. Dans l'architecture horizontale H-BLAST, chaque couche ou sous-chaîne d'éléments binaires est codée individuellement, puis modulée et transmise par une des  $n_T$  antennes. Si l'on note comme précédemment  $c_k^l$  les symboles codés transmis par la  $l^{\text{ème}}$  antenne, on obtient le schéma suivant :

$$(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \quad \dots) \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ b_2 & b_{N_t+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

L'idée originale de Foschini résidait pourtant sur un codage diagonal, par lequel les symboles codés de chaque couche sont transmis successivement par chacune des  $N_t$  antennes. En émission, dans cette architecture D-BLAST, le flot de données est démultiplexé en  $N_t$  voies, traitées chacune par un codeur propre, les flux résultants étant ensuite affectés aux antennes de transmission selon un ordre variant périodiquement par permutation circulaire. Cette allocation, conférant au signal une structure diagonale en temps et en espace d'où est tiré le nom D-BLAST, a pour but d'assurer la répartition équitable (en énergie) de l'information sur le canal MIMO. Les symboles codés occupent donc une diagonale de la matrice de transmission :

$$\begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^{N_t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^{N_t} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{N_t}^1 & c_{N_t}^2 & \dots & c_{N_t}^{N_t} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Cette architecture, bien qu'elle ait le mérite de mieux résister aux perturbations que les autres, a été cependant momentanément abandonnée, du fait de son manque d'efficacité (une partie de la matrice est nulle et ralentit la transmission) et de sa complexité de décodage.

Beaucoup d'auteurs se sont inspirés de cette architecture par couches et ont proposé différents types de codage pouvant lui être associés [74], [80-82].

En réception, le signal est une superposition des symboles transmis, bruités et atténués par les multitrajets, compliquant la tâche des récepteurs traditionnels. Le principe de base gouvernant la réception repose sur l'annulation d'interférence. Le paragraphe suivant propose différents algorithmes permettant de restituer l'information.

## 6.3 Exemples d'algorithmes de détection pour systèmes MIMO en couches

Il existe de nombreux algorithmes de réception envisageables pour récupérer les symboles lors d'une transmission multi-antennes. Les moins complexes sont les récepteurs linéaires basés sur le critère de forçage à zéro (ZF) ou la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQMM). L'algorithme de réception proposé pour le système V-BLAST original dans [10] essaie d'éliminer successivement les interférences dues aux émetteurs autres que celui dont on estime les symboles. Le détecteur optimal est basé sur le maximum de vraisemblance et se sert donc de toute l'observation dont il dispose pour récupérer l'information. Il existe aussi bon nombre d'algorithmes sous-optimaux basés sur le MV ou sur la distance euclidienne minimale.

### 6.3.1. Critère de forçage à zéro (ZF)

Le récepteur linéaire le plus simple est le récepteur basé sur le critère de forçage à zéro (ZF pour *zero forcing*) qui inverse tout simplement la matrice du canal. Supposant que  $\mathbf{H}$  est inversible, le vecteur de symboles estimés de taille  $N_t \times 1$  est alors donné par la relation:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r} \quad (6.4)$$

Le récepteur ZF sépare ainsi parfaitement les symboles  $(s_i)_{i=1..N_t}$  transmis dans le même canal. Lorsque  $\mathbf{H}$  est mal conditionnée, le récepteur ZF donne des résultats corrects pour des SNR élevés, mais pour de faibles SNR le bruit perturbe fortement les performances. En pratique, si  $\mathbf{H}$  n'est pas carrée (*i.e.* si  $N_t \neq N_r$ ) le récepteur multiplie  $\mathbf{r}$  à gauche par la pseudo-inverse  $\mathbf{H}^\dagger$  de la matrice de canal pour récupérer tous les symboles. Dans ce cas, le vecteur estimé s'écrit:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{r} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{r} \quad (6.5)$$

Si un codeur est employé, on peut utiliser la redondance temporelle et spatiale pour retrouver les données.

### 6.3.2. Récepteur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQMM)

La contrepartie de la parfaite séparation des signaux est l'augmentation du bruit. Le récepteur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQMM) constitue une excellente alternative. Cet autre récepteur linéaire minimise l'erreur globale due au bruit et à l'interférence mutuelle des signaux transitant par le même canal.

L'erreur quadratique moyenne  $\varepsilon$  est donnée par:

$$\varepsilon = E\{(s - \hat{s})^* (s - \hat{s})\} \quad (6.6)$$

Dans ce cas on estime  $s$  grâce à la relation:

$$\hat{s} = \frac{\rho}{N_t} \mathbf{H}^* (\sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{r} \quad (6.7)$$

dans laquelle on suppose que  $E\{ss^*\} = \frac{\rho}{N_t} \mathbf{I}_{N_t}$  (avec  $\rho$  SNR moyen) et  $E\{nn^*\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_r}$ . Le récepteur EQMM est moins sensible au bruit mais il sépare moins bien les signaux. Dans le cas d'un SNR élevé le récepteur EQMM converge vers le récepteur ZF.

### 6.3.3. Récepteur à Maximum de Vraisemblance (MV)

Le récepteur qui apporte les meilleures performances en terme de taux d'erreur est le récepteur à maximum de vraisemblance. Cependant, ce récepteur possède aussi la plus grande complexité et celle-ci croît exponentiellement avec le nombre d'antennes émettrices. En supposant un bruit gaussien et un état de canal parfaitement connu côté récepteur, le récepteur MV donne les symboles estimés  $\hat{s}$  grâce à la formule:

$$\hat{s} = \arg \min_s \|\mathbf{r} - \mathbf{H}s\|^2 \quad (6.8)$$

où la recherche de la distance minimale s'effectue sur tous les mots de code  $s$  possibles. Il est important de noter que, si on note  $\Omega$  la taille de la constellation, le récepteur doit calculer les distances pour un ensemble de vecteurs possibles de taille  $\Omega^{N_t}$ , et le temps de calcul devient vite prohibitif pour les constellations de grande taille, même pour un faible nombre d'antennes émettrices (par exemple, pour une MAQ-64 et  $N_t = 3$ , le récepteur doit passer en revue 262 144 vecteurs différents).

### 6.3.4. Récepteur itératif à annulation successive d'interférences (ASI)

Les méthodes linéaires citées plus haut possèdent chacune un inconvénient majeur : alors que le critère de forçage à zéro sépare parfaitement les symboles au prix d'un niveau de bruit envahissant sur certaines voies, le critère qui fait appel à l'EQMM, s'il est moins touché par le phénomène d'augmentation du bruit, n'est en revanche pas capable d'enlever toute l'IES. Dans le système V-BLAST original [73], [83] développé par les laboratoires Bell, Foschini *et al.* proposent une approche alternative très intéressante qui augmente les performances du récepteur au prix d'une complexité accrue.

Cet algorithme de détection utilise la non-linéarité et exploite ainsi la synchronisation inhérente au modèle. Le principe, basé sur "l'annulation des symboles" est assez simple: la contribution des éléments de  $s$  déjà détectés est soustraite du vecteur reçu  $\mathbf{r}$ , ce qui donne un vecteur reçu contenant moins d'interférences. En utilisant une telle méthode, l'ordre dans lequel les éléments de  $\mathbf{r}$  sont détectés devient important pour améliorer les performances du système.

La procédure devient donc la suivante: on détermine l'entrée la plus fiable de  $\mathbf{H}^\dagger$  et on estime le symbole émis par l'émetteur correspondant. La contribution de ce symbole est alors

annulée, et on répète le procédé pour les  $N_t - 1$  symboles restants, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les symboles soient estimés. L'exemple de l'algorithme complet de détection, connu sous le nom V-BLAST par allusion à l'architecture verticale originale du système, mais que l'on peut généraliser sous le terme ASIO (pour annulation successive d'interférences ordonnée) peut être résumé sous forme récursive, comme suit (Tableau 6.1) et les différents schémas de démodulation BLAST sont présentés figure 6.3 :

Tableau 6.1 - Algorithme de détection VBLAST

Initialisation	Récursivité
$i \leftarrow 1$ $\mathbf{G}_1 = \mathbf{H}^\dagger$ $k_1 = \arg \min_j \ (\mathbf{G}_1)_j\ ^2$	$\mathbf{w}_{k_i} = (\mathbf{G}_i)_{k_i}$ $\mathbf{y}_{k_i} = \mathbf{w}_{k_i}^T \mathbf{r}_i$ $\hat{s}_{k_i} = q(\mathbf{y}_{k_i})$ $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \hat{s}_{k_i} (\mathbf{H})_{k_i}$ $\mathbf{G}_{i+1} = (\mathbf{H}_{k_i}^-)^\dagger$ $k_{i+1} = \arg \min_{j \notin \{k_1 \dots k_i\}} \ (\mathbf{G}_{i+1})_j\ ^2$ $i \leftarrow i + 1$

While  $i \leq N_t$

Avec les notations suivantes :

- $(\mathbf{G}_i)_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $\mathbf{G}_i$  et les  $k_i$  représentent l'ordre de détection des symboles ( $k_1$  le premier, ...,  $k_{N_t}$  le dernier), soit l'ordre des émetteurs du plus favorisé au moins favorisé en terme de rapport signal sur bruit.
- $q$  représente le processus de quantification par lequel le détecteur décide de la valeur estimée du symbole.
- $\mathbf{H}_{k_i}^-$  signifie que l'on a annulé la contribution de  $i$  émetteurs, c'est à dire que les colonnes  $k_1, \dots, k_i$  de  $\mathbf{H}$  ont été remplacées par des zéros. Le système devient alors équivalent à une version simplifiée de la fig. 6.1 pour laquelle il ne reste que  $N_t - i$  récepteurs

Il faut signaler que dans l'algorithme initial présenté ici, l'ordre de détection des symboles doit être recalculé tous les  $N_t$  symboles. En fait, si l'on considère que le milieu est quasi-statique, l'ordre des émetteurs du plus favorisé au moins favorisé est le même durant un intervalle de temps bien plus long que  $N_t \times T_s$  (typiquement sur la durée d'un paquet), et il peut donc n'être calculé qu'une seule fois. Par ailleurs on peut améliorer la précision de la

détection des symboles en remplaçant le critère de forçage à zéro utilisé pour estimer  $y_{k_i}$  par le critère EQMM, ceci au détriment de la rapidité de l'algorithme, bien évidemment.

Cet algorithme peut en fait être considéré comme un cas particulier de l'égaliseur à retour de décision (ERD) généralisé [84], si celui-ci opère lui aussi un ordre privilégié de détection des symboles suivant le SNR des trajets, et dans le cas où l'on ne considère aucune optimisation de transmission. Une architecture d'ERD a d'ailleurs été présentée dans [85] pour la réception des systèmes MIMO.

De nombreux auteurs ont depuis proposé des améliorations des algorithmes ASI, les uns basés sur une décomposition QR [86], les autres en prenant en compte le codage utilisé par les systèmes de type H-BLAST ou D-BLAST [70]. Le but recherché est toujours le compromis parfait entre la meilleure détection possible et la faible complexité de l'algorithme de décodage.

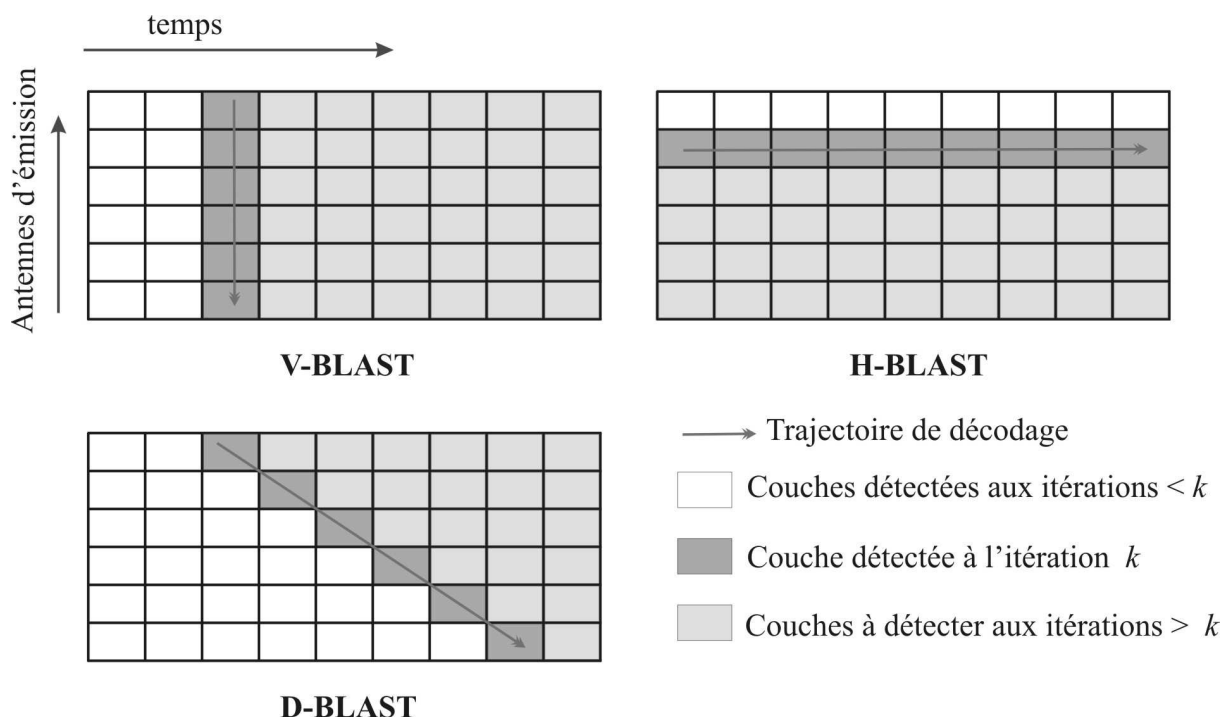


Figure 6.3 - schémas de démodulation BLAST

## 6.4 Systèmes de détection itératifs : TURBO-BLAST

### 6.4.1. Emetteur TURBO-BLAST

Nous allons considérer à chaque fois, un système composé de  $N_t$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception. Nous nous limitons ici, quitte à employer l'OFDM, au cas de canaux de propagation non sélectifs en fréquence entre chaque paire d'antennes d'émission / réception. De plus, considérant le cas de paquets de petite dimension, nous considérerons que le canal reste constant sur la durée d'un paquet. Par contre, le tirage des coefficients du canal sera activé à l'arrivée de chaque nouveau paquet. On obtient ainsi la modélisation d'un canal à évanouissements quasi-statiques par bloc (*quasi-static block fading channel*).

Nous proposons dans cette parties trois architectures émettrices différentes :

- Structure en couche verticale, utilisant un codage convolutif (5,7) ;
- Structure en couche horizontale, utilisant un codage convolutif (5,7) ;
- Structure en couche verticale, utilisant un codeur LDPC de rendement 1/2.

Les schémas de ces trois architectures sont présentés respectivement sur les figures 6.4, 6.5 et 6.6. Comme la mise en forme générale des données, pour ces différentes structures a été vue précédemment, nous ne la détaillons pas.

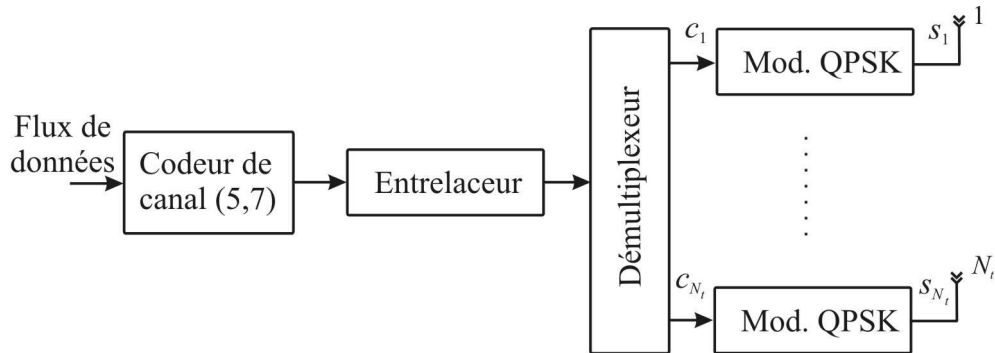


Figure 6.4 – Architecture verticale, utilisant une modulation QPSK et un codeur convolutif (5,7)

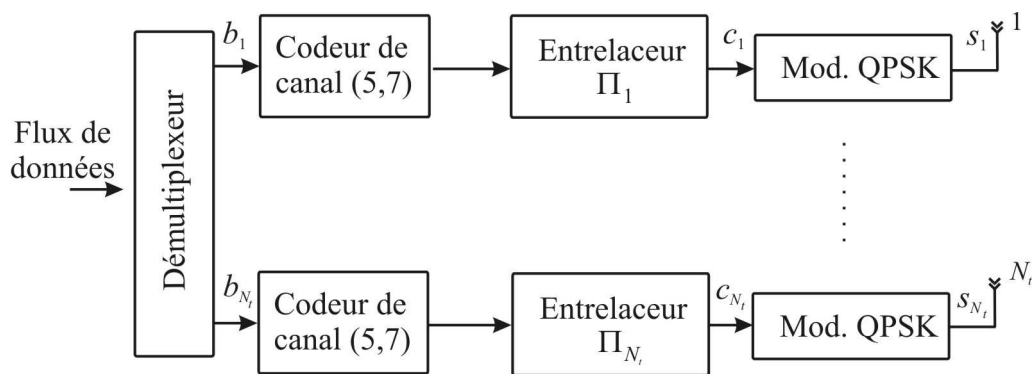


Figure 6.5 – Architecture horizontale, utilisant une modulation QPSK et un codeur convolutif (5,7)

Dans le cas de l'architecture avec codeur LDPC, l'insertion d'entrelaceurs-désentrelaceurs n'est pas nécessaire car le codeur lui-même possède un entrelaceur au niveau de sa matrice de codage.

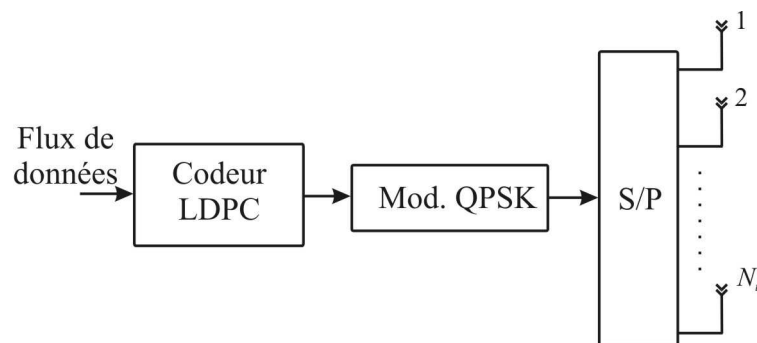


Figure 6.6 – Architecture verticale, utilisant une modulation QPSK et un codeur LDPC

## 6.4.2. Décodeur itératif (TURBO-BLAST)

Il est bien connu que le décodage optimal de plusieurs trains binaires sur  $N_r$  antennes de réception provenant de  $N_t$  antennes d'émission est un problème qui augmente les temps de calcul de façon exponentielle plus la taille de la constellation et des paquets de symboles émis sont grands. Le premier problème qui se pose en réception est de trouver un moyen de pondérer les symboles codés en entrée des décodeurs de canal. Cette pondération sera assurée par un bloc que nous appellerons décodeur interne. Pour la réalisation de ce bloc nous supposons que le canal de propagation est parfaitement connu du récepteur. On considèrera ici deux types de décodeur interne. Le premier décodeur est le décodeur interne optimal qui examine la liste exhaustive de tous les symboles susceptibles d'être transmis sur le canal, ce décodeur n'est pas autre chose que la version à sorties pondérées du décodeur à Maximum de Vraisemblance décrit en 6.3.3. Sa complexité devient rapidement prohibitive pour des nombres d'antennes d'émission  $N_t$  élevés et des constellations à haute efficacité spectrale. Le second décodeur est un décodeur sous-optimal qui utilise un filtrage des moindres carrés et une annulation d'interférences de type série ou parallèle. Sa complexité est nettement réduite par rapport au premier décodeur. Dans ce cas, on décodera de façon itérative séparément et en parallèle  $N_t$  trains binaires différents.

Le schéma de détection itératif sous-optimal est basé sur les principes de turbo-égalisation inventés par Glavieux et Berrou . En effet, le décodeur interne échange des informations extrinsèques avec un ou des décodeurs de canal externes (selon le type d'architecture : encodage horizontal ou vertical). Des blocs de désentrelacement permettent de décorrélérer les informations extrinsèques en provenance du décodeur interne de celles émises par les décodeurs de canal. Les décodeurs de canal, grâce à l'algorithme log-MAP, permettent au grès des itérations d'améliorer la fiabilité des symboles codés qui sont réinjectés vers le décodeur interne. La fiabilité des symboles réinjectés vers le décodeur interne augmentant, l'annulation d'interférences s'améliore au fur et à mesure des itérations et permet d'améliorer le taux d'erreur binaire en sortie des décodeurs de canal. Dans le cas du codeur LDPC, l'utilisation de désentrelaceur n'est pas nécessaire. On obtient alors les schémas de réception illustrés sur les figure 6.7, 6.8 et 6.9.

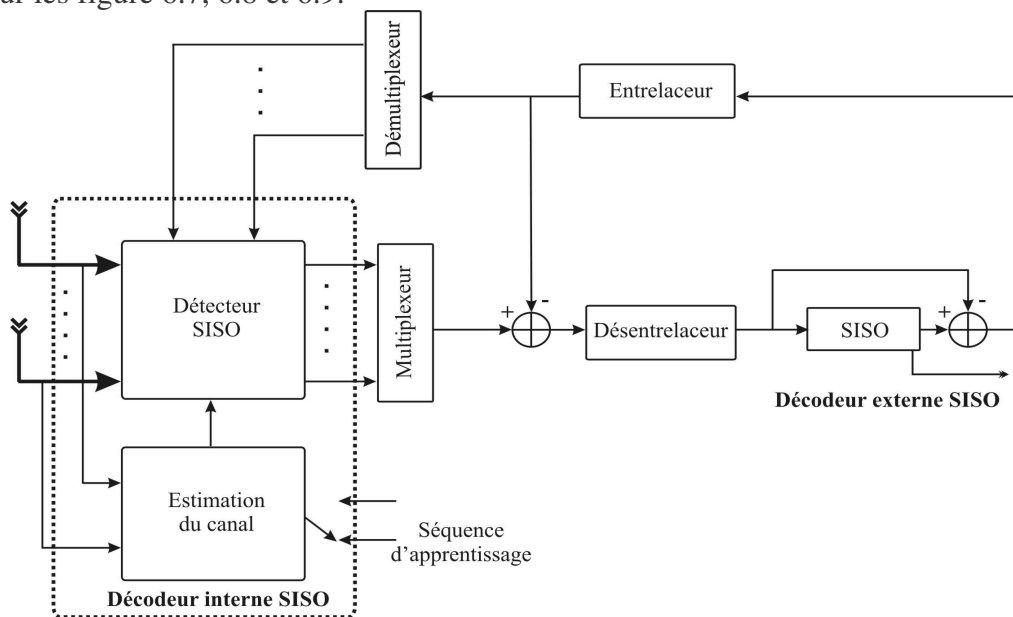


Figure 6.7 : Décodeur TURBO-BLAST itératif, architecture émettrice verticale

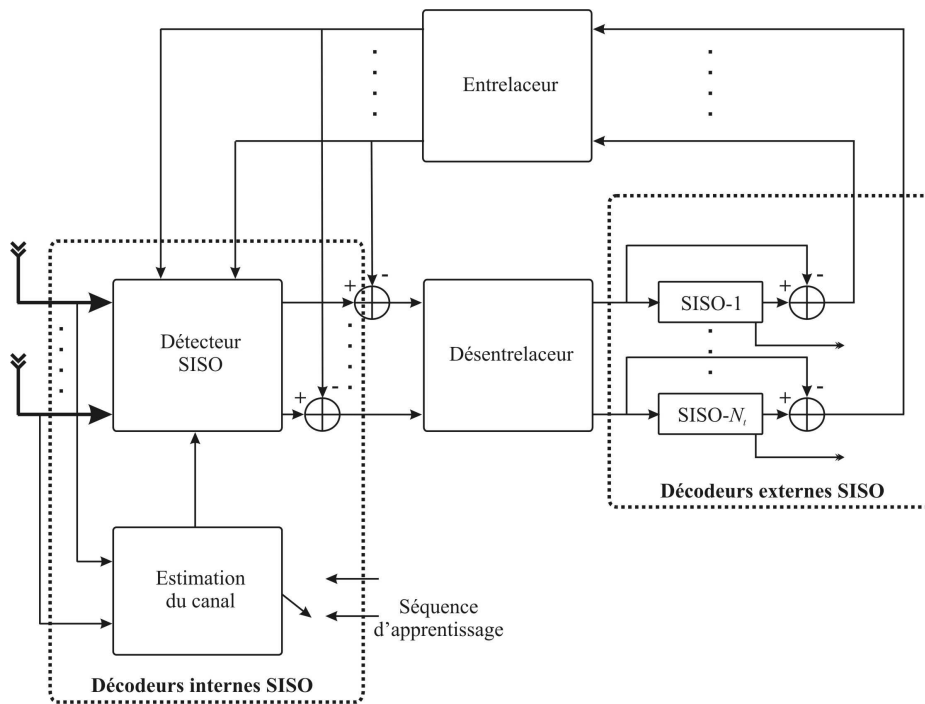


Figure 6.8 : Décodeur TURBO-BLAST itératif, architecture émettrice horizontale

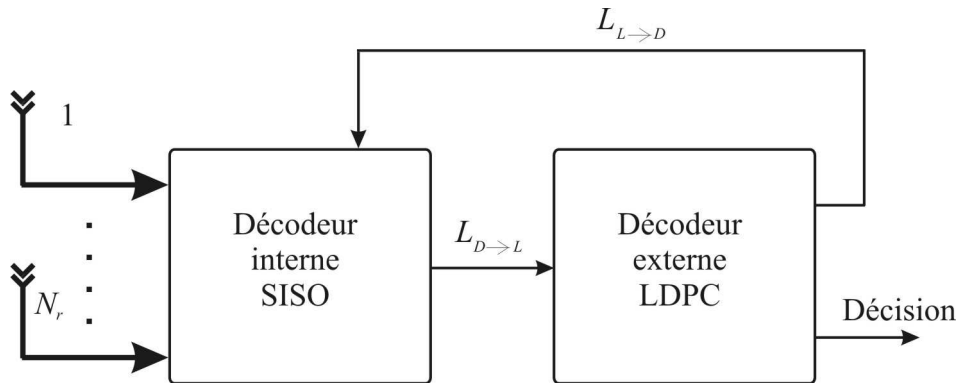


Figure 6.9 : Décodeur TURBO-BLAST itératif,

**Algorithme de décodage itératif :**

Les principes décrits ci-dessous s’appliquent aussi bien au cas du code convolutif (5,7) qu’au cas du codeur LDPC. Simplement, le codeur LDPC incluant un entrelacement interne dans sa matrice d’encodage, il n’est pas nécessaire en réception d’opérer des opérations d’entrelacement-désentrelacement au niveau des informations extrinsèques échangées entre le décodeur interne et les décodeurs de canal.

**Principes généraux :**

C’est la structure de décodage itératif des codes concaténés de façon série qui nous sert de principal modèle pour notre algorithme de décodage. Nous allons utiliser les notations suivantes pour décrire l’algorithme :



- $\lambda^i$  fera référence aux LLR (*Log-Likelihood Ratios*) associés au processus de décodage du décodeur interne
- $\lambda^o$  fera référence aux LLR associés au processus de décodage du décodeur externe
- $\lambda(:,i)$ ,  $\lambda(:,e)$  et  $\lambda(:,p)$  à la sortie et à l'entrée des décodeurs SISO font référence respectivement aux informations intrinsèques, extrinsèques et à postériori, formulées à partir des LLR.

Nous définissons tout d'abord le LLR à postériori d'un bit codé transmis à l'instant  $t$  sur l'antenne d'émission  $j$ ,  $c_{j,t}$ , pour  $j=1, 2, \dots, N_t$  et  $t=1, 2, \dots, T$ , où  $T$  représente la longueur d'une trame de bits codés :

$$\lambda(c_{j,t}, p) = \log \frac{P\{c_{j,t} = 1 | \mathbf{r}\}}{P\{c_{j,t} = -1 | \mathbf{r}\}} \quad (6.9)$$

où  $\mathbf{r}$  symbolise le signal reçu sur les  $N_r$  antennes de réception. En utilisant la règle de Baye des probabilités conditionnelles, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda(c_{j,t}, p) &= \log \frac{P\{\mathbf{r} | c_{j,t} = 1\}}{P\{\mathbf{r} | c_{j,t} = -1\}} + \log \frac{P\{c_{j,t} = 1\}}{P\{c_{j,t} = -1\}} \\ &= \lambda(c_{j,t}, e) + \lambda(c_{j,t}, i) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Le premier terme  $\lambda(c_{j,t}, e)$  dans (6.10) désigne l'information extrinsèque, alors que le second  $\lambda(c_{j,t}, i)$  constitue l'information intrinsèque du bit codé.

Le décodeur présenté par exemple sur la figure 6.7 illustre la façon dont les informations sont échangées entre les modules de décodage interne et externe. Voyons dans ce qui suit leur fonctionnement.

- Le **détecteur SISO** (décodeur interne), produit les estimations *softs* des bits codés  $c_{j,t}$ , conditionnées par le signal reçu sur les  $N_r$  antennes de réception à l'instant  $t$ . Ces informations sont quant à elles influencées par les informations intrinsèques  $\lambda(c_{j,t}, i)$  de l'étage itératif précédent.
  - L'estimation de l'information à postériori du bit codé transmis à l'instant  $t$  par l'antenne d'émission  $j$  se calcule par la formule:

$$\lambda^i(c_{j,t}, p) = \log \frac{P\{c_{j,t} = 1 | \mathbf{r}, \lambda^i(\mathbf{C}, i)\}}{P\{c_{j,t} = -1 | \mathbf{r}, \lambda^i(\mathbf{C}, i)\}} \quad \forall j \in [1, \dots, N_t], \forall t \in [1, \dots, T] \quad (6.11)$$

où  $\mathbf{C}$  représente la matrice des bits codés  $N_t \times T$ , en sortie des codeurs à l'émetteur. Pour la première itération, les probabilités intrinsèques initiales des bits codés sont supposées équiprobables.

- On calcule ensuite l'information extrinsèque :

$$\lambda^i(\mathbf{C}, e) = \lambda^i(\mathbf{C}, p) - \lambda^i(\mathbf{C}, i) \quad (6.12)$$

où  $\lambda^i(\mathbf{C}, e)$  représente l'information extrinsèque de l'ensemble des bits codés au niveau du détecteur SISO. Ce paramètre joue ensuite le rôle d'information intrinsèque pour le décodeur externe après avoir été réordonné grâce à l'opération de désentrelacement. Ainsi :

$$\lambda^o(\mathbf{C}, i) = \prod^{-1} \{\lambda^i(\mathbf{C}, e)\} \quad (6.13)$$

où  $\prod^{-1}$  désigne l'opération de désentrelacement.

- Au niveau du *décodeur externe*, les informations *softs* des bits codés  $c_{j,t}$  sont réaffinées à chaque itérations. En sortie du décodeur externe, on estime  $\lambda^o(\mathbf{C}, e)$ , à partir de  $\lambda^o(\mathbf{C}, i)$  et de  $\lambda^o(\mathbf{C}, p)$ .

- Le calcul de l'information à postériori des bits codés émis, s'obtient en calculant :

$$\lambda^o(c_{j,t}, p) = \log \frac{P\{c_{j,t} = 1 | \lambda^o(\mathbf{C}, i), \lambda^o(\mathbf{B}, i)\}}{P\{c_{j,t} = -1 | \lambda^o(\mathbf{C}, i), \lambda^o(\mathbf{B}, i)\}} \quad \forall j, t \quad (6.14)$$

$$\lambda^o(b_{j,t}, p) = \log \frac{P\{b_{j,t} = 1 | \lambda^o(\mathbf{C}, i), \lambda^o(\mathbf{B}, i)\}}{P\{b_{j,t} = -1 | \lambda^o(\mathbf{C}, i), \lambda^o(\mathbf{B}, i)\}} \quad \forall j, t \quad (6.15)$$

où  $\mathbf{B}$  symbolise un paquet de bits d'informations non codés, et si on suppose les bits d'informations sont équiprobables,  $\lambda^o(\mathbf{B}, i)$  est toujours initialisé à zéro.

- L'information extrinsèque des bits codés et non codés se fait en calculant :

$$\lambda^o(\mathbf{B}, e) = \lambda^o(\mathbf{B}, p) - \lambda^o(\mathbf{B}, i) \quad (6.16)$$

$$\lambda^o(\mathbf{C}, e) = \lambda^o(\mathbf{C}, p) - \lambda^o(\mathbf{C}, i) \quad (6.17)$$

L'information extrinsèque, en sortie du décodeur externe est ensuite réordonnée grâce à l'entrelaceur, avant d'être réutilisée pour une nouvelle itération par le décodeur interne :

$$\lambda^i(\mathbf{C}, i) = \prod \{\lambda^o(\mathbf{C}, e)\} \quad (6.18)$$

Les deux étapes qui viennent d'être décrites se répètent jusqu'à ce que l'algorithme converge.

- On estime le message binaire  $\hat{\mathbf{B}}$  émis en regardant le signe du LLR  $\lambda^o(\mathbf{B}, p)$  en sortie du décodeur externe, ainsi :

$$\hat{\mathbf{B}} = \text{sgn}\{\lambda^o(\mathbf{B}, p)\} \quad (6.20)$$

Nous allons voir désormais comment concevoir le décodeur interne en considérant deux cas : le cas du décodeur optimal et le cas du décodeur basé sur une annulation souple d'interférence et un filtrage MMSE.

### Architecture du décodeur interne :

Pour définir l'architecture de ce décodeur, il faut d'abord se donner le modèle de signal en réception. On écrit ici classiquement pour le signal reçu  $\mathbf{r}_t \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$  à l'instant  $t$ :

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{H} \mathbf{a}_t + \mathbf{v}_t \quad (6.21)$$

avec  $\mathbf{H}$  qui représente la matrice des coefficients du canal de propagation,  $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^{N_r \times N_t}$ ,  $\mathbf{H}$  peut se décomposer sous la forme :  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k, \dots, \mathbf{h}_{N_t}]$  avec  $\mathbf{h}_k \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$ ,  $\mathbf{a}_t \in \mathcal{C}^{N_t \times 1}$  qui représente le vecteur des symboles codés transmis sur les  $N_t$  antennes d'émission, et  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$  qui représente le vecteur de bruit additif sur la transmission, on supposera classiquement que :  $E(\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t^H) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_{N_r}$ .

### Décodeur optimal :

L'écriture (6.21) et son modèle matriciel permettent de calculer directement les informations extrinsèques en sortie du décodeur interne, selon la formule :

$$\begin{aligned}
\lambda^i(c_{j,t};e) &= \log \frac{P(c_{j,t} = +1 | \mathbf{r}_t)}{P(c_{j,t} = -1 | \mathbf{r}_t)} - \log \frac{P(c_{j,t} = +1)}{P(c_{j,t} = -1)} \\
&= \log \frac{\sum_{\mathbf{a}^+ \in C_t^+} P(\mathbf{r} | \mathbf{a}_t = \mathbf{a}^+) \cdot P(\mathbf{a}_t = \mathbf{a}^+)}{\sum_{\mathbf{a}^- \in C_t^-} P(\mathbf{r} | \mathbf{a}_t = \mathbf{a}^-) \cdot P(\mathbf{a}_t = \mathbf{a}^-)} - \lambda^i(c_{j,t};i) \quad (6.22) \\
&= \log \frac{\sum_{\mathbf{a}^+ \in C_t^+} \exp\left(-\|\mathbf{r}_t - \mathbf{H}\mathbf{a}^+\|^2 / 2\sigma^2 + \sum_{n=1}^{N_t \log_2 |\Omega|} \{a^+\}_n \cdot \frac{\lambda^i(c_{n,t};i)}{2}\right)}{\sum_{\mathbf{a}^- \in C_t^-} \exp\left(-\|\mathbf{r}_t - \mathbf{H}\mathbf{a}^-\|^2 / 2\sigma^2 + \sum_{n=1}^{N_t \log_2 |\Omega|} \{a^-\}_n \cdot \frac{\lambda^i(c_{n,t};i)}{2}\right)} - \lambda^i(c_{j,t};i)
\end{aligned}$$

Chaque symbole reçu dans le vecteur  $\mathbf{r}(i)$  représente  $\log_2(\Omega)$  bits codés. Dans la formule (6.22), le vecteur  $\mathbf{a}^+$  désigne le vecteur de l'ensemble des symboles pour lequel le bit  $c_{j,t}$  sera égal à 1 et le vecteur  $\mathbf{a}^-$  désigne le vecteur de l'ensemble des symboles pour lequel le bit  $c_{j,t}$  sera égal à -1.  $\{a^+\}_n$  désigne le  $n^{\text{ème}}$  bit pour le symbole correspondant dans  $\mathbf{a}^+$ . De même pour  $\{a^-\}_n$ . La complexité d'un tel détecteur est proportionnelle à  $|\Omega|^{N_t}$  et nous la noterons  $\mathcal{O}(|\Omega|^{N_t})$ . Il est clair qu'elle devient rapidement prohibitive lorsque  $N_t \geq 4$ .

### Décodeur sous-optimal :

Nous proposons ici une structure de décodeur interne sous-optimal basé sur des techniques souples d'élimination d'interférences. Le principe de cette technique provient des travaux de Wang & Poor sur la turbo détection multi-utilisateurs en étalement de spectre [87]. Le détecteur proposé ici a une complexité proportionnelle à  $|\Omega|^3$ . La première étape consiste à utiliser les informations extrinsèques entrelacées sur les bits codés en sortie du décodeur de canal  $\lambda^o(c_{j,t}, e)$  pour estimer les symboles codés transmis. On obtient cette information soft par la formule :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{j,t} &\cong \sum_{\hat{x} \in \Omega} \hat{x} \cdot P(x_{j,t} = \hat{x}) \\
&= \sum_{\hat{x} \in \Omega} \hat{x} \cdot \prod_{n=1}^{\log_2 |\Omega|} \left[ 1 + \exp\left(-\{\hat{x}\}_n \cdot \lambda^o(c_{n,t}, e)\right) \right]^{-1} \quad (6.23)
\end{aligned}$$

$c_{n,t}$  correspond au  $n^{\text{ème}}$  bit du symbole  $x_j$ . On forme alors le vecteur :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j,t} \cong \left[ \tilde{x}_{1,t}, \dots, \tilde{x}_{j-1,t}, 0, \tilde{x}_{j+1,t}, \dots, \tilde{x}_{N_t,t} \right]^T \quad (6.24)$$

Ce vecteur est constitué de tous les symboles transmis depuis les antennes d'émission autres que l'antenne numéro  $j$ . Une annulation souple d'interférences est alors réalisée par le calcul suivant :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{j,t} \cong \mathbf{r}_t - \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{j,t} = \mathbf{H} (\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_{j,t}) + \mathbf{v}_t \quad (6.25)$$

La prochaine étape consiste à appliquer un filtrage MMSE sur le vecteur  $\tilde{\mathbf{y}}_{j,t}$ , les coefficients de ce filtre MMSE étant calculés pour minimiser l'écart quadratique entre le symbole réellement transmis  $x_{j,t}$  et la sortie du filtre  $z_{j,t}$ .

$$z_{j,t} = \mathbf{w}_j^H \tilde{\mathbf{y}}_{j,t} \quad (6.26)$$

Pour le calcul de ce filtre, on a les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j &= \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}^M} E \left\{ \left| x_{j,t} - \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{y}}_{j,t} \right|^2 \right\} \\ &= (\mathbf{H} \mathbf{\Delta}_j \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (6.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}_j &\equiv \text{cov} \{ \mathbf{x}_{j,t} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,t} \} \\ &= \text{diag} \left\{ 1 - |\tilde{x}_{1,t}|^2, \dots, 1 - |\tilde{x}_{j-1,t}|^2, 1, 1 - |\tilde{x}_{j+1,t}|^2, \dots, 1 - |\tilde{x}_{N,t}|^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dans la formule (6.28), le vecteur  $\mathbf{e}$  est un vecteur de taille  $N_r$  dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la coordonnée numéro  $j$  qui est égale à 1. L'inconvénient de ce type de détecteur est que, contrairement au cas du détecteur optimal, il est difficile de définir un canal de propagation équivalent en sortie du décodeur sous-optimal. Wang & Poor ont proposé dans [87] un modèle qui permet d'obtenir des calculs de métriques de branche très performants pour interfacer avec les décodeurs de canal. Il est montré dans [87] que la sortie de l'anneur d'interférences  $z_{j,t}$  est une variable aléatoire Gaussienne telle que :

$$p(z_{j,t} | x_{j,t}) \cong N_c(\mu_j x_{j,t}, \eta_j^2) \quad (6.29)$$

Conditionnellement à  $x_j$ , la moyenne et la variance de  $z_j$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mu_j &\equiv E \{ z_{j,t} x_{j,t}^* \} \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{\Delta}_j \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \eta_j^2 &\equiv \text{var} \{ z_{j,t} \} \\ &= E \left\{ |z_{j,t}|^2 \right\} - \mu_j^2 = \mu_j - \mu_j^2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Le calcul de l'information extrinsèque en sortie du turbo-annuleur d'interférences prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda^i(c_{j,t}; e) &= \log \frac{P(c_{j,t} = +1 | z_{j,t})}{P(c_{j,t} = -1 | z_{j,t})} - \log \frac{P(c_{j,t} = +1)}{P(c_{j,t} = -1)} \\
&= \log \frac{\sum_{x^+ \in \mathcal{S}_{i,j}^+} P(x_{j,t} = x^+ | z_{j,t})}{\sum_{x^- \in \mathcal{S}_{i,j}^-} P(x_{j,t} = x^- | z_{j,t})} - \lambda^i(c_{j,t}; i) \\
&= \log \frac{\sum_{x^+ \in \mathcal{S}_{i,j}^+} P(z_{j,t} | x_{j,t} = x^+) \cdot P(x_{j,t} = x^+)}{\sum_{x^- \in \mathcal{S}_{i,j}^-} P(z_{j,t} | x_{j,t} = x^-) \cdot P(x_{j,t} = x^-)} - \lambda^i(c_{j,t}; i) \tag{6.32} \\
&= \log \frac{\sum_{x^+ \in \mathcal{S}_{i,j}^+} \exp\left(-\|z_{j,t} - \mu_j \cdot x^+\|^2 / 2\eta_j^2 + \sum_{j=1}^{\log_2|\Omega|} \{x_j^+\}_k \cdot \frac{\lambda^i(c_{k,t}; i)}{2}\right)}{\sum_{x^- \in \mathcal{S}_{i,j}^-} \exp\left(-\|z_{j,t} - \mu_j \cdot x^-\|^2 / 2\eta_j^2 + \sum_{j=1}^{\log_2|\Omega|} \{x_j^-\}_k \cdot \frac{\lambda^i(c_{k,t}; i)}{2}\right)} - \lambda^i(c_{j,t}; i)
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_{i,j}^+$  désigne l'ensemble des valeurs de  $x_{i,t}$  pour lesquelles le symbole codé  $c_{j,t}$  est égal à 1 et  $\mathcal{S}_{i,j}^-$  désigne l'ensemble des valeurs de  $x_{i,t}$  pour lesquelles le symbole codé  $c_{j,t}$  est égal à -1.  $\{x_j^+\}_k$  désigne le  $k^{\text{ème}}$  bit correspondant dans le symbole  $x_j^+$ , de même pour la notation  $\{x_j^-\}_k$ .

Il faut interpréter la relation (6.32) de la façon suivante : le décodeur à annulation souple d'interférences calcule l'information extrinsèque relative au symbole codé  $c_{j,t}$  à partir de la sortie scalaire du filtre MMSE, à savoir la quantité  $z_{j,t}$ , contrairement au décodeur optimal qui la calcule à partir de l'observation du vecteur  $\mathbf{r}$  de taille  $N_r$ . On comprend ainsi aisément la réduction de complexité apportée par le décodeur sous-optimal.

Il reste à préciser le cas de la première itération pour laquelle nous n'avons pas de valeur d'informations à priori  $\lambda^i(c_{j,t}; i)$  disponibles. Dans ce cas, on prend toutes les valeurs des coordonnées du vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}_{j,t}$  égales à zéro. La matrice  $\mathbf{\Delta}_j$  devient égale à la matrice identité et l'annuleur d'interférences pour la première itération se réduit au récepteur linéaire MMSE classique, pour le flux numéro  $k$  avec en sortie :

$$z_{k,t} = \mathbf{h}_k^H (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H + \sigma^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{r}_t \tag{6.33}$$

**Remarque :** Lorsque le récepteur a convergé, les valeurs soft estimées dans le vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}_{j,t}$  sont proches des valeurs réelles et, dans ce cas, la matrice  $\mathbf{\Delta}_j$  prend la forme :

$$\mathbf{\Delta}_j \cong \text{diag}\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$$

On arrive alors au cas d'un annuleur d'interférences parfait avec la sortie du filtre  $z_{k,t}$  qui prend la forme :

$$z_{k,t} = (\mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k + \sigma^2)^{-1} \mathbf{h}_k^H \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{H}_k \mathbf{a}_{t,k}) \tag{6.34}$$

en définissant les quantités  $\mathbf{H}_k$  et  $\mathbf{a}_{t,k}$  par :  $\mathbf{H}_k = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_{k+1}, \dots, \mathbf{h}_{N_r}]$  et  $\mathbf{a}_{t,k} = [a_{t,1}, a_{t,2}, \dots, a_{t,k-1}, a_{t,k+1}, \dots, a_{t,N_r}]$ . Le calcul de  $z_{k,t}$  par la formule (6.34) correspond à ce

que nous avons appelé la borne d'annulation parfaite d'interférences dans le chapitre d'introduction et que nous nommons *Perfect Interference Cancellation* dans les courbes des résultats de simulation. Cette borne indépendante de la qualité du codage de canal utilisé quantifie l'efficacité du système d'annulation d'interférences.

### Les décodeurs de canal :

Les décodeurs de canal utilisés pour le code convolutif sont de type log-MAP. Ils doivent comme pour toute concaténation série fournir à la fois une estimation souple des bits décodés pour la prise de décision et une estimation des bits codés pour réinjecter les informations extrinsèques vers le décodeur interne.

En ce qui concerne les codes LDPC, ils font actuellement l'objet de recherches intenses au sein de notre laboratoire. C'est ainsi que les codes utilisés et l'algorithme de décodage par propagation de croyance (Belief Propagation Algorithm) sont extraits de la thèse de Mr Syed Jamalluli [88]. Depuis les travaux de Mr Syed, notre groupe de recherche s'est orienté vers la recherche de codes LDPC irréguliers optimisés en fonction du profil de canal étudié. La description des codes LDPC réguliers est très classique et très semblable à celle des codes linéaires en blocs. Par contre, la description des codes LDPC irréguliers est plus complexe. La matrice de parité du code  $\mathbf{P}$  peut être représentée par un graphe biparties qui comprend deux types de nœuds : les nœuds variables et les nœuds de contrôle. Chaque bit codé est un nœud variable alors que chaque bit de parité ou plutôt chaque ligne de la matrice de parité représente un nœud de contrôle. Un lien dans le graphe relie le nœud variable  $i$  et le nœud de contrôle  $j$  si  $P_{i,j} = 1$ . Autrement dit, chaque nœud de contrôle est connecté à des bits codés et leur somme modulo 2 doit être nulle. Les codes LDPC irréguliers sont spécifiés usuellement

par deux polynômes :  $\lambda(x) = \sum_{i=1}^{d_{l\max}} \lambda_i \cdot x^{i-1}$  et  $\rho(x) = \sum_{i=1}^{d_{r\max}} \rho_i \cdot x^i$  où  $\lambda_i$  est la fraction des liens dans

le graphe biparties qui sont connectés aux nœuds variables de degré  $i$  et  $\rho_i$  est la fraction des liens dans le graphe biparties qui sont connectés aux nœuds de contrôle de degré  $i$ . Dans les simulations présentées pour le canal MIMO quasi-statique et non-sélectif en fréquence, nous avons utilisé les polynômes :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 0.269052 \cdot x + 0.135031 \cdot x^2 + 0.024564 \cdot x^4 + 0.031625 \cdot x^5 + 0.062323 \cdot x^6 + 0.020950 \cdot x^8 \\ &\quad + 0.035585 \cdot x^{13} + 0.4209 \cdot x^{16} \\ \rho(x) &= 0.278456 \cdot x^7 + 0.7215 \cdot x^8 \end{aligned}$$

Ces polynômes ont été obtenus à l'aide de la procédure d'optimisation donnée récemment par Wang & al dans [79]. Le nombre d'itérations internes du décodeur LDPC avant d'échanger les informations extrinsèques avec le décodeur interne est fixé à 30.

## **6.4.3. Performances des systèmes TURBO-BLAST**

### **6.4.3.1. TURBO-BLAST LDPC**

Nous considérons toujours le cas de canaux quasi-statiques non-sélectifs en fréquence. Nous donnons d'abord les performances obtenues avec le code LDPC irrégulier, pour des paquets de tailles variables. Le codeur LDPC a un rendement égal à 0.5. La première courbe représentée en figure 6.10 représente les performances obtenues par le système itératif pour

des paquets de 150 symboles QPSK et pour 5 antennes d'émission et 8 antennes de réception. Les paquets transmis contiennent 150 symboles QPSK. Le canal est supposé parfaitement connu au récepteur. Nous faisons figurer également sur la figure la courbe de la capacité *outage* pour une efficacité spectrale de 5 bits/s/Hz (à chaque instant 5 symboles QPSK sont envoyés sur le canal, ce sont des symboles codés avec un code de rendement 0.5, d'où une efficacité spectrale de  $5 \times 2 \times 0.5 = 5$  bits/s/Hz). La courbe de l'annulation parfaite d'interférence (PIC bound) est également représentée. D'une part, nous voyons que la neuvième itération de notre récepteur itératif coïncide quasiment avec la courbe d'annulation parfaite à partir d'un SNR égal à 4.5 dB. D'autre part, la neuvième itération est située à 1.5 dB de la capacité *outage*, ce qui constitue une performance remarquable pour des paquets de petite taille.

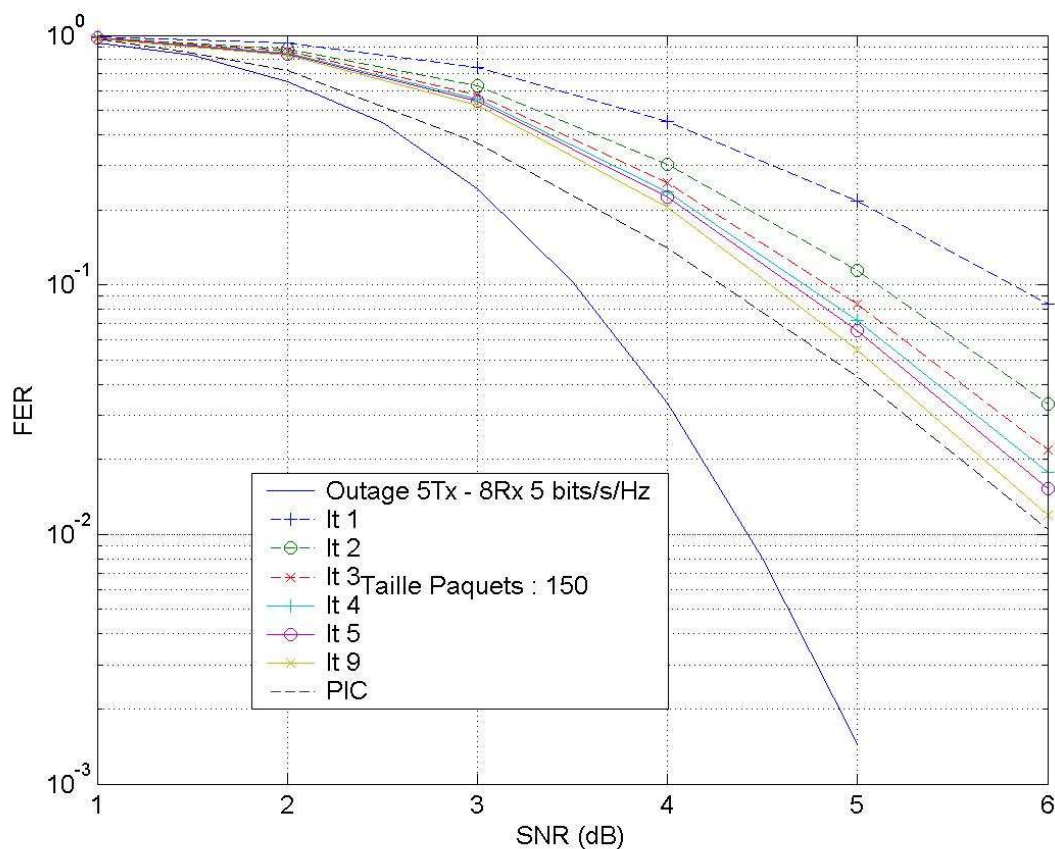


Figure 6.10 : Performances Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission 8 antennes de réception, paquets de taille 150, à 5 bits/s/Hz

Nous donnons ensuite les performances obtenues à partir du même système d'émission réception, à savoir 5 antennes d'émission et 8 antennes de réception mais pour des paquets de taille égale à 520 symboles QPSK en figure 6.11 et pour des paquets de taille 1040 symboles en figure 6.12.

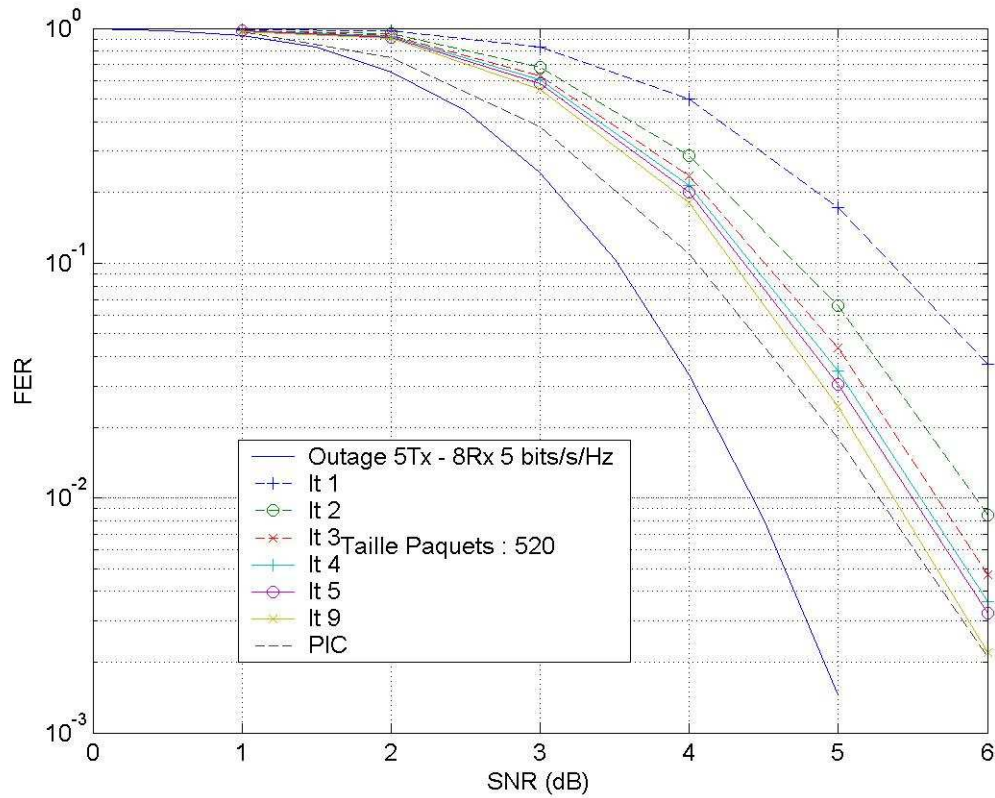


Figure 6.11 : Performances Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission 8 antennes de réception, paquets de taille 520, à 5 bits/s/Hz

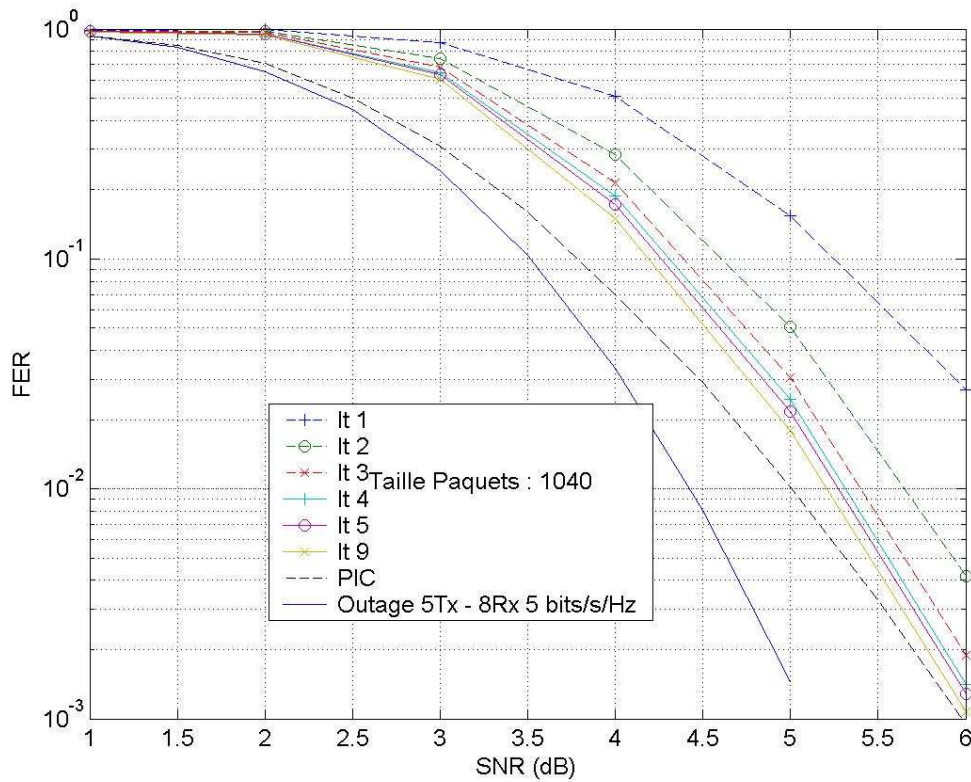


Figure 6.12 : Performances Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission 8 antennes de réception, paquets de taille 1040, à 5 bits/s/Hz



Il est clair que les performances augmentent avec la taille des paquets, c'est ainsi que l'itération 9 est à 1 dB de la capacité *outage* (pour un FER égal à  $10^{-2}$ ) dans le cas de paquets de taille 560 symboles QPSK et à 0.8 dB dans le cas de paquets de taille 1040 symboles QPSK. Dans tous les cas de figure, le dispositif d'annulation d'interférences donnent d'excellentes performances puisque la borne d'annulation parfaite d'interférences est atteinte à chaque fois aux forts SNR. La figure 6.13 compare les performances des trois scénarios précédents et montrent l'amélioration des performances avec la taille des paquets. Pour un FER égal à  $10^{-2}$ , au niveau de l'itération 9, on gagne 0.8 dB en passant d'une taille de 150 à 1040 symboles.

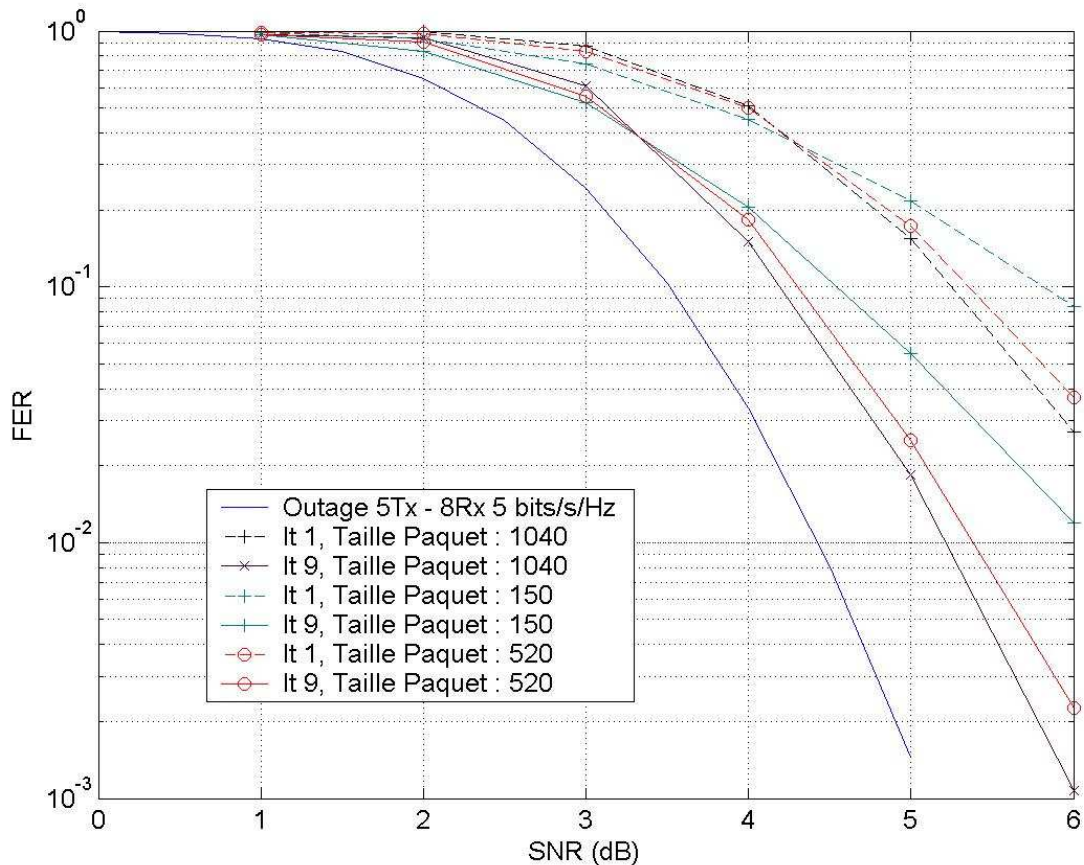


Figure 6.13 : Comparaisons des performances en fonction de la longueur des paquets, Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission, 8 antennes de réception, à 5 bits/s/Hz

Nous présentons ensuite différents résultats de simulation en faisant varier le nombre d'antennes d'émission et de réception. L'idée est d'étudier les performances du système MIMO à efficacité spectrale constante (donc à nombre d'antennes d'émission constant), égale ici à 5 bits/s/Hz en faisant varier le nombre d'antennes de réception et pour une taille de paquet de 150 symboles QPSK. Nous présentons dans ce cadre les résultats obtenus pour un système à 5 antennes d'émission et 6 antennes de réception sur la courbe de la figure 6.14. Les résultats de simulation sont dégradés par rapport au cas du système à 5 antennes d'émission et 8 antennes de réception. En effet, il faut un SNR de 8.5 dB pour obtenir un FER égal à  $10^{-2}$  contre 6.3 dB sur la figure 6.10. Les performances de l'itération 9 sont toujours situées à 1.5 dB de la capacité *outage*. On retrouve bien le fait connu que l'annulation d'interférence série fonctionne d'autant mieux que la différence ( $N_r - N_t$ ) qui conditionne le gain de diversité en réception est grande.

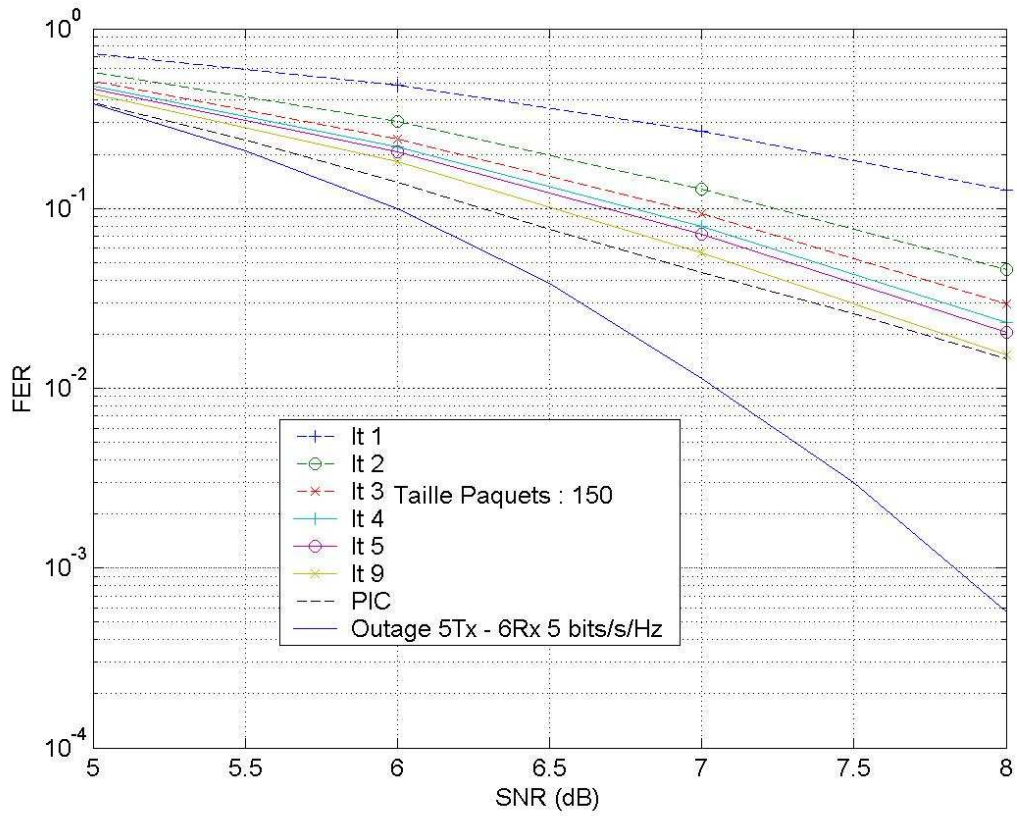


Figure 6.14 : Performances Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission 6 antennes de réception, paquets de taille 150, à 5 bits/s/Hz

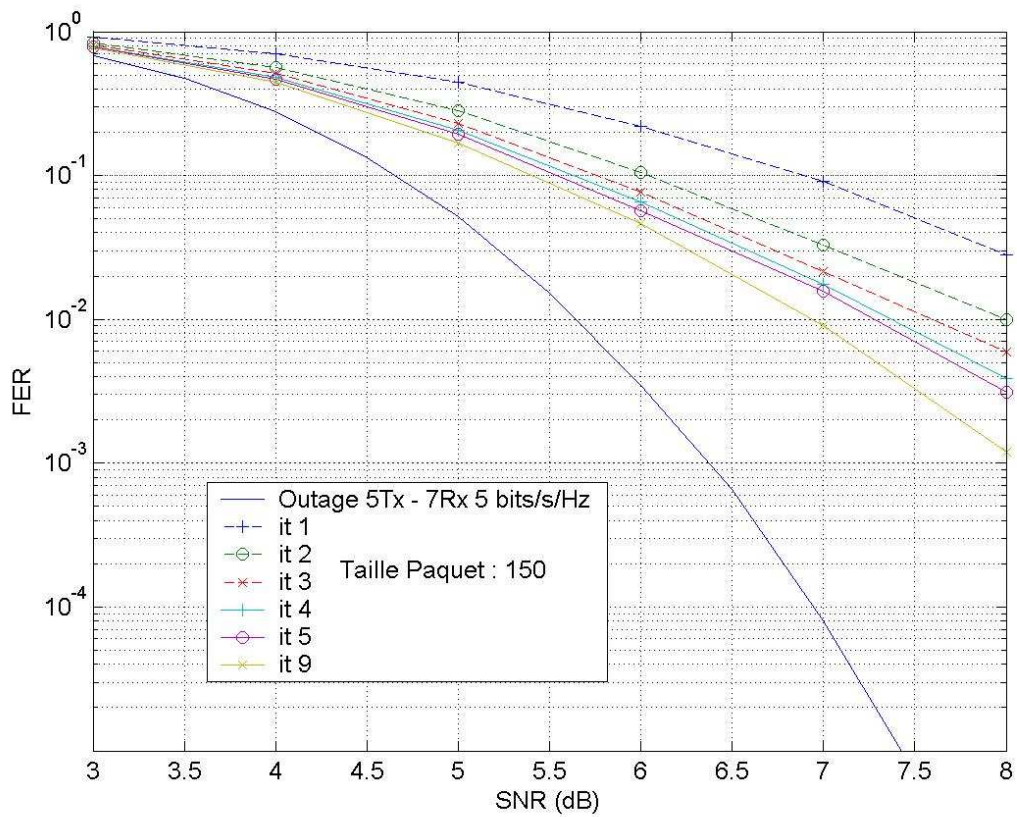


Figure 6.15 : Performances Turbo-BLAST LDPC utilisant une modulation QPSK, 5 antennes d'émission 7 antennes de réception, paquets de taille 150, à 5 bits/s/Hz

Les résultats de la figure 6.15 concernent le cas d'un système à cinq antennes d'émission et 7 antennes de réception. Logiquement, ses performances sont situées entre le cas à 6 antennes de réception et le cas à 8 antennes de réception. C'est ce que l'on retrouve sur la courbe de la figure 6.15 avec l'itération 9 qui atteint un FER de  $10^{-2}$  pour un SNR de 7 dB. La capacité limite *outage* reste à 1.5 dB de l'itération 9.

#### 6.4.3.2. Cas des codes convolutifs

Nous illustrons les résultats obtenus pour notre turbo-annuleur d'interférence dans le cas de codeurs convolutifs (5,7) pour un système à 5 antennes d'émission et 8 antennes de réception pour établir les comparaisons avec le système utilisant des codes LDPC. Nous comparons les performances obtenues pour des schémas de codage vertical et horizontal avec des paquets transmis de 150 symboles QPSK. La figure 6.16 illustre le cas de l'encodage horizontal.

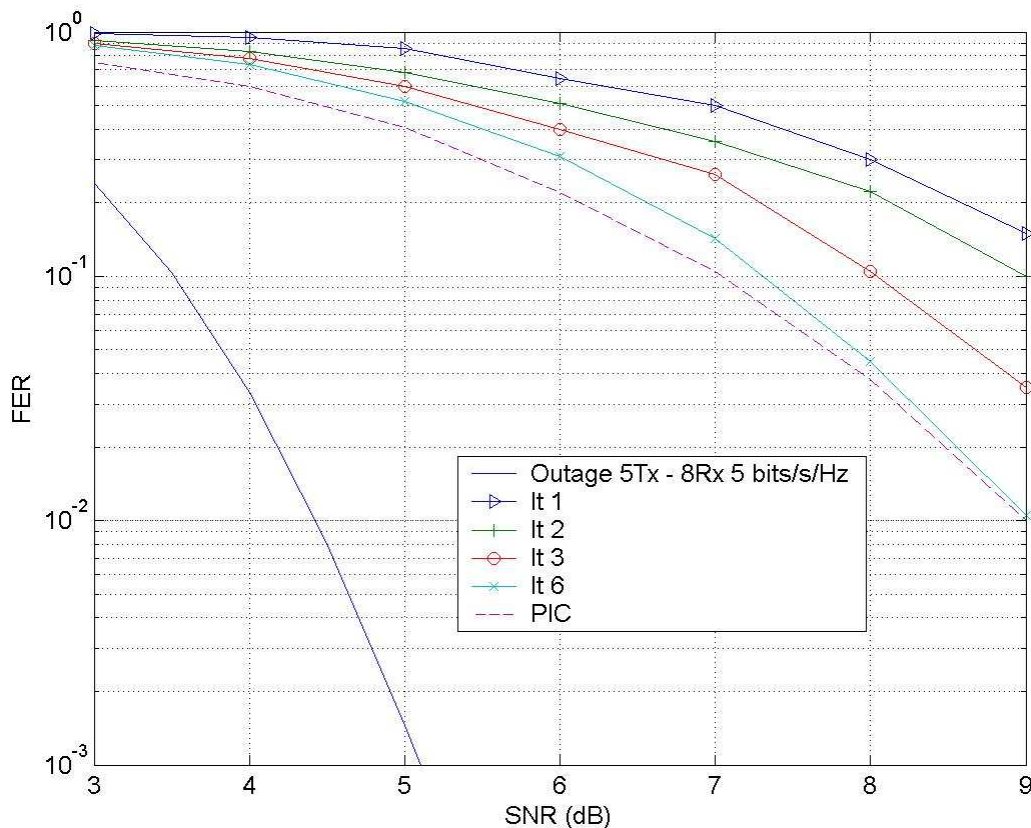


Figure 6.16 : Performances du turbo-annuleur d'interférences 5 antennes d'émission 8 antennes de réception, paquets de taille 150, à 5 bits/s/Hz, code convolutif (5,7), encodage horizontal

La figure 6.17 ci-dessous illustre les performances de l'encodage vertical. Il est clair que les performances du schéma à base de codage vertical sont supérieures à celles du schéma à base de codage horizontal. Le gain affiché par l'itération 6 du schéma à base de codage vertical par rapport à la même itération du schéma à base de codage horizontal pour un FER de  $10^{-2}$  est de l'ordre de 0.7 dB. Ce gain s'accroît bien évidemment avec la taille des paquets. Il est clair que le schéma vertical disposant d'un entrelaceur de taille cinq fois plus élevée que chacun des

entrelaceurs du schéma horizontal, ses performances sont logiquement supérieures. Cependant les performances obtenues restent logiquement éloignées de celles obtenues avec le code LDPC (cf. figure 6.10). Pour un FER de  $10^{-2}$ , l'écart entre les courbes des figures 6.10 et 6.17 est de l'ordre de 2 dB.

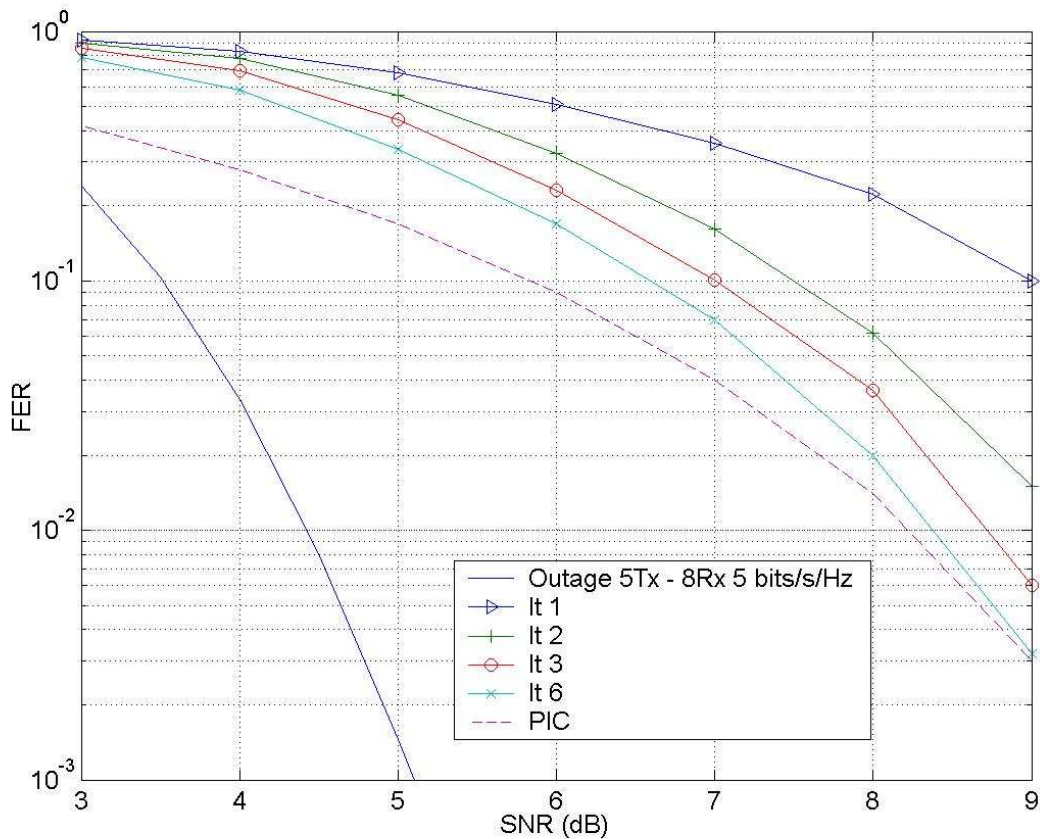


Figure 6.17 : Performances du turbo-annuleur d'interférences 5 antennes d'émission 8 antennes de réception, paquets de taille 150, à 5 bits/s/Hz, code convolutif (5,7), encodage vertical

## 6.5 Architecture en couches des codes SQOSTTC, les SQOHLSTTC

L'objectif des schémas de transmission des codes STTC à base de codes STBC ou encore nommés ici STTC Super-Quasi-Orthogonaux (SQOSTTC) en couches, par rapport aux codes présentés au chapitre précédent, est clairement d'augmenter le débit de transmission, en utilisant un plus grand nombre d'antennes d'émission. En effet, ici comme nous utilisons nos codes SQOSTTC à 3 antennes, présentés dans le chapitre précédent, chaque couche en émission contiendra 3 antennes. Dans ce paragraphe, nous allons décrire la structure de l'émetteur ainsi que les principales règles de décodage.

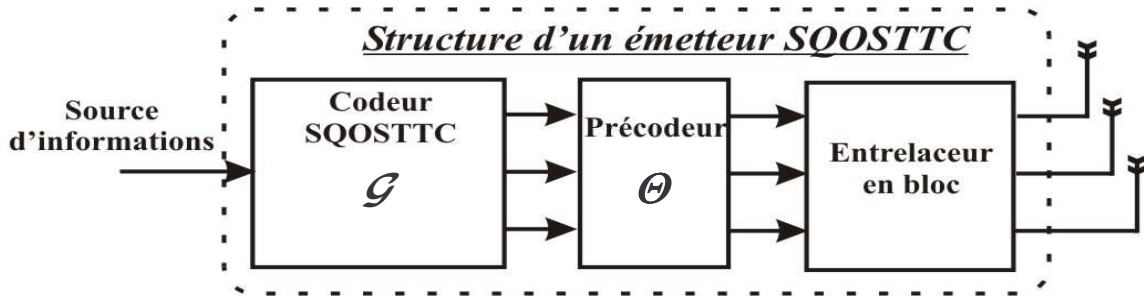


Figure 6.18 – Architecture de l'émetteur SQOSTTC

### 6.5.1. Codage

Dans une architecture temps-espace en couches, les données provenant de la source d'information sont divisées et distribuées au travers de la structure émettrice présentée sur la figure 6.2. Cette structure est composée de plusieurs codeurs individuels constituant chacun « une couche ». Pour les architectures BLAST, Foschini [10] a proposé un certain nombre de schémas en couches, ici nous allons insérer notre code SQOSTTC dans une architecture en couches dite « horizontale ».

Dans cette configuration, le flux de données  $B$  en entrée de l'architecture en couches, est divisé en  $p = N_t/n'$  groupes de symboles, de longueur  $B_1, B_2, \dots, B_p$  avec  $B_1 + B_2 + \dots + B_p = B$  (Notez que pour notre SQOSTTC  $n' = 3$ ). Les différents groupes de symboles sont codés au travers des différentes couches. Ainsi, le  $k^{\text{ième}}$  groupe de symbole  $B_k$ , ou  $1 \leq k \leq p$ , sera associé au  $k^{\text{ième}}$  codeur noté, SQOSTTC $_k$ .

Si l'on note  $C_k$  la matrice de mots de code en sortie du codeur, de dimension  $n' \times T$ , elle est à transmettre au travers des  $n'$  antennes d'émission de la couche, pendant  $T$  temps symboles. La  $t^{\text{ième}}$  colonne de  $C_k$ , notée  $c_{k,t}$ , fait référence au vecteur de symboles du groupe  $k$  au temps  $t$ . Enfin, en considérant toujours la couche  $k$ , avant la transmission dans le canal, chaque matrice  $(\Theta_j \cdot \mathcal{G}(x_1, x_2, x_3))_k$  de longueur  $T$ , passe par triplet de symboles au travers d'un entrelaceur temporel (cf Figures 6.18 et 6.19).

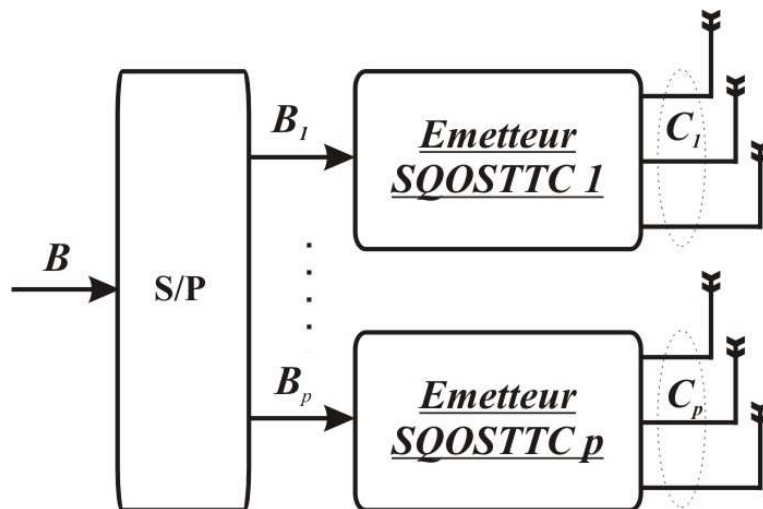


Figure 6.19 – Codeur SQOHLSTTC

## 6.5.2. Décodage itératif *hard* des SQOHLSTTC

La détection des symboles transmis comporte deux étapes majeures :

1. *Annulation d'interférences (IC<sup>28</sup>)* : Les interférences des groupes de symboles déjà décodés sont soustraites au signal reçu,
2. *Suppression d'interférences (IS<sup>29</sup>)* : les interférences des groupes de symboles non désirés sont supprimées à l'aide d'opérations linéaires.

L'étape d'annulation d'interférences soustrait au signal reçu les groupes de symboles précédemment détectés, alors que l'étape qui consiste en la suppression d'interférences enlève les interférences des groupes de symboles qui n'ont pas encore été traités, grâce à des opérations linéaires basées par exemple sur les critères ZF<sup>30</sup> ou MMSE<sup>31</sup>.

L'architecture en couches SQOHLSTTC permet d'utiliser un décodage en série comme dans le cas des systèmes BLAST, à la seule différence que les étapes d'annulation et de suppression d'interférences se font par groupes. Comme dans [89], nous utilisons un décodage en série ordonné, basé sur la plus grande norme de Frobenius au carré des coefficients du canal. Comme nous avons  $p$  groupes à décoder, l'ordre de décodage sera noté  $\{1', 2', \dots, p'\}$ .

Définissons :

$$\mathbf{Y}_u^v = \sum_{s=1}^p \tilde{\mathbf{h}}_{u,s}^j \mathcal{G}_s^v + \mathbf{n}_u^v \quad (6.35)$$

où  $(1 \leq u \leq N_r)$  et  $(1 \leq v \leq q)$ , comme étant le  $v^{\text{ième}}$  bloc de données transmis depuis les  $p$  émetteurs SQOSTTC, reçu par l'antenne de réception  $u$ .  $\mathbf{Y}_u^v$  est une matrice contenant trois intervalles de temps symboles successifs.

$\tilde{\mathbf{h}}_{u,s}^j$  représente la matrice du sous-canal de propagation équivalent entre le groupe  $s$  en émission et l'antenne de réception  $u$ , alors que l'indice  $j$  désigne l'état dans le treillis de la matrice SQOSTTC pendant l'intervalle de temps considéré. Cette matrice est supposée invariante durant la transmission d'un paquet entier.

Le  $v^{\text{ième}}$  bloc de données transmis au travers de la couche  $s$  en émission est noté  $\mathcal{G}_s^v$  et  $\mathbf{n}_u^v$  désigne le bruit AWGN reçu sur l'antenne  $u$  pendant l'intervalle de temps  $v$ , qui, nous le rappelons, comprend trois temps symboles.

Ainsi, nous pouvons exprimer le signal reçu sur l'antenne de réception  $u$  comme étant :

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1^T, \mathbf{Y}_2^T, \dots, \mathbf{Y}_{N_r}^T]^T \quad (6.36)$$

où

$$\mathbf{Y}_u = [\mathbf{Y}_u^1, \mathbf{Y}_u^2, \dots, \mathbf{Y}_u^q] \quad (6.37)$$

L'algorithme de décodage itératif procède comme suit.

Pour la première itération, et au premier niveau de décodage ( $k = 1$ ), nous avons :

---

<sup>28</sup> Interference Cancelling

<sup>29</sup> Interference Suppression

<sup>30</sup> Zero Forcing

<sup>31</sup> Minimum Mean Square Error

$$\mathbf{Y}_1^v = [(\mathbf{Y}_1^v)^T, (\mathbf{Y}_2^v)^T, \dots, (\mathbf{Y}_{N_r}^v)^T]^T \quad (6.38)$$

Pour tous  $1 \leq v \leq q$ .

Au niveau de décodage  $k$ , conditionné par le fait que les  $k-1$  groupes précédents,  $1', 2', \dots, (k-1)'$ , ont été correctement décodés et supprimés du signal reçu, le signal résultant  $\mathbf{Y}_k^v$ , qui contient toujours les interférences des groupes non décodés, est obtenu par :

$$\mathbf{Y}_k^v = \tilde{\mathbf{H}}_k^j \mathcal{G}_{k'}^v + \tilde{\mathbf{H}}_{(k+1)'}^j \mathcal{G}_{(k+1)'}^v + \dots + \tilde{\mathbf{H}}_{p'}^j \mathcal{G}_{p'}^v + \mathbf{N}_k^v \quad (6.39)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{H}}_{k'}^j = [(\tilde{\mathbf{h}}_{1,k'}^j)^T, \dots, (\tilde{\mathbf{h}}_{N_r,k'}^j)^T]^T \quad (6.40)$$

où  $\tilde{\mathbf{H}}_{k'}^j$  représente la matrice  $N_r \times 3$  du canal équivalent du groupe  $k'$ . Donc, à chaque intervalle de temps  $v$ , nous pouvons trouver un ensemble de vecteurs colonnes orthogonaux  $[\tilde{\mathbf{H}}_{(k+1)'}^j, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_{p'}^j]$  pour former la matrice d'annulation d'interférences  $\mathbf{W}_k^v$ . En multipliant  $\mathbf{W}_k^v$  avec  $\mathbf{Y}_k^v$  on supprime alors tous les signaux provenant des groupes,  $(k'+1)$  à  $p'$ , ce qui nous permet de décoder librement le groupe  $k'$  :

$$\bar{\mathbf{Y}}_k^v = \mathbf{W}_k^v \mathbf{Y}_k^v = \mathbf{W}_k^v \tilde{\mathbf{H}}_k^j \mathcal{G}_{k'}^v + \mathbf{0} + \mathbf{W}_k^v \mathbf{N}_k^v = \bar{\mathbf{H}}_k^j \mathcal{G}_{k'}^v + \bar{\mathbf{N}}_k^v \quad (6.41)$$

En supposant une parfaite annulation d'interférence,  $\bar{\mathbf{N}}_k^v$  représente la nouvelle matrice de bruit équivalente. Pour notre architecture SQOHLSTTC, le canal de propagation équivalent vu par chaque groupe en émission, varie en fonction de l'état du treillis. Cela signifie que pour chaque paquet, les matrices d'annulation sont obtenues en accord avec l'état courant du treillis.

Ainsi, le  $k^{\text{th}}$  mot de code peut être décodé en utilisant un décodage à maximum de vraisemblance, basé sur le signal  $\bar{\mathbf{Y}}_k^v$  (6.41). Avant de partir pour le niveau de décodage suivant, on soustrait la contribution des signaux que l'on vient juste de décoder pour le groupe  $k'$  à  $\mathbf{Y}_k^v$ . Il en résulte alors le signal reçu modifié suivant :

$$\mathbf{Y}_{k+1}^v = \mathbf{Y}_k^v - \tilde{\mathbf{H}}_k^j \hat{\mathcal{G}}_k^v \quad (6.42)$$

où  $\hat{\mathcal{G}}_k^v$  symbolise la  $v^{\text{ième}}$  matrice estimée du groupe  $k'$ . Nous recommençons la procédure pour  $k=k+1$ , jusqu'à  $k=p$ .

Pour les itérations suivantes, la suppression d'interférence n'est plus nécessaire. On conserve seulement l'annulation d'interférences entre chaque groupe.

Chaque itération est composée de  $p$  niveaux, et chacun d'entre eux utilise le même ordre de décodage que celui déterminé lors de la première itération. Au niveau de décodage  $k$ , nous soustrayons les interférences en provenance des groupes  $1', \dots, (k-1)', (k+1)', \dots, p'$  du signal original, et nous re-décodons le groupe  $k'$  en utilisant le décodeur à maximum de vraisemblance. Une fois décodées, les nouvelles décisions prises pour le groupe  $k'$  sont utilisées par le niveau de décodage suivant pour ré estimer le groupe  $(k+1)'$ .

Une itération se termine lorsque le décodage des  $p$  groupes est fini. Une remarque importante consiste à noter que comme notre algorithme de décodage se fait de façon *Hard*, cela permet une réalisation matérielle plus simple que pour le cas d'un décodage *Soft* par exemple.

Sur la figure 6.20, nous schématisons notre récepteur SQOHLSTTC.

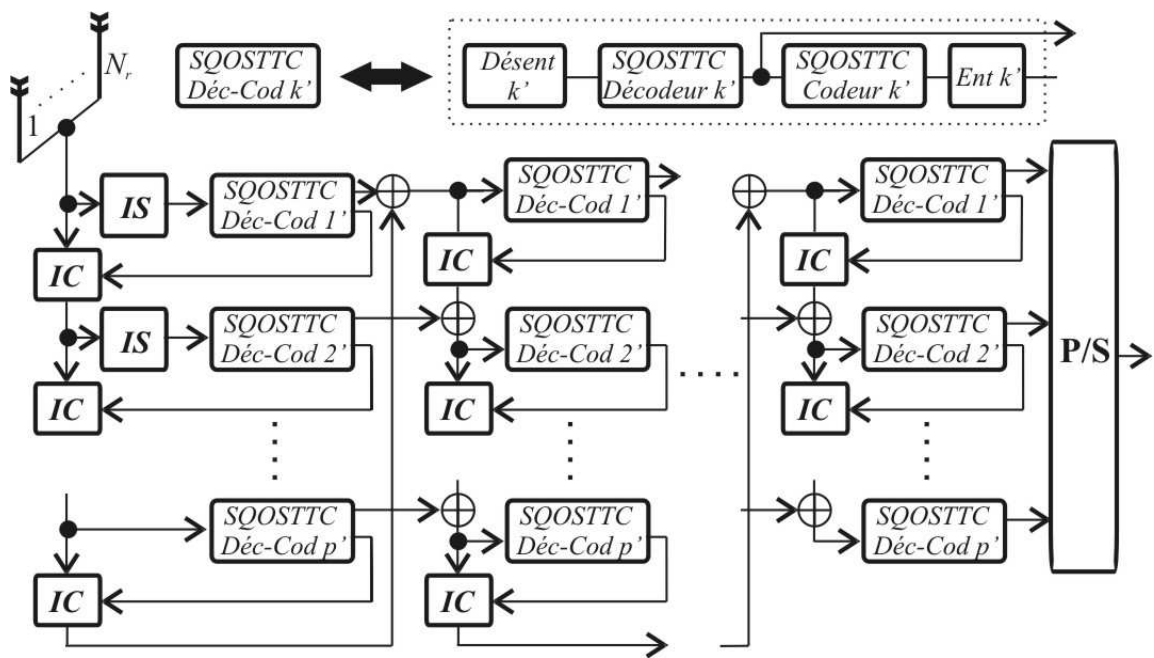


Figure 6.20 – Récepteur SQOHLSTTC

### 6.5.3. Performances

Les performances de notre système SQOSTTC en couches sont illustrées sur les figures 6.21 et 6.22. On trace les résultats de simulation pour deux configurations. Dans le premier cas, le système est composé de 6 antennes d'émission et de 8 antennes de réception, alors que dans le second cas on considère un système à 6 antennes d'émission et 9 antennes de réception. Deux flux de données SQOSTTC sont alors émis depuis les six antennes d'émission, en utilisant des entrelaceurs de taille 150. La borne d'annulation d'interférence parfaite correspond au cas où un groupe de trois antennes d'émission interférent est éteint. Le décodage est fait de façon ordonnée, dans le sens des énergies descendantes. Sur la figure 6.21 sont présentés les résultats où le système comporte 8 antennes de réception. Après cinq itérations, pour un  $FER=10^{-2}$ , nous nous trouvons à 1.2 dB de la borne d'annulation d'interférence parfaite et à 3.1 dB de la capacité *outage*. Le cas comprenant neuf antennes de réception est lui, illustré sur la figure 6.22. Comme attendu, les performances sont légèrement meilleures grâce à l'augmentation de l'ordre de diversité en réception. En effet pour un  $FER=10^{-2}$ , nous sommes maintenant à 1 dB de la borne d'annulation d'interférence parfaite et éloignés de 2.8 dB de la capacité *outage*.



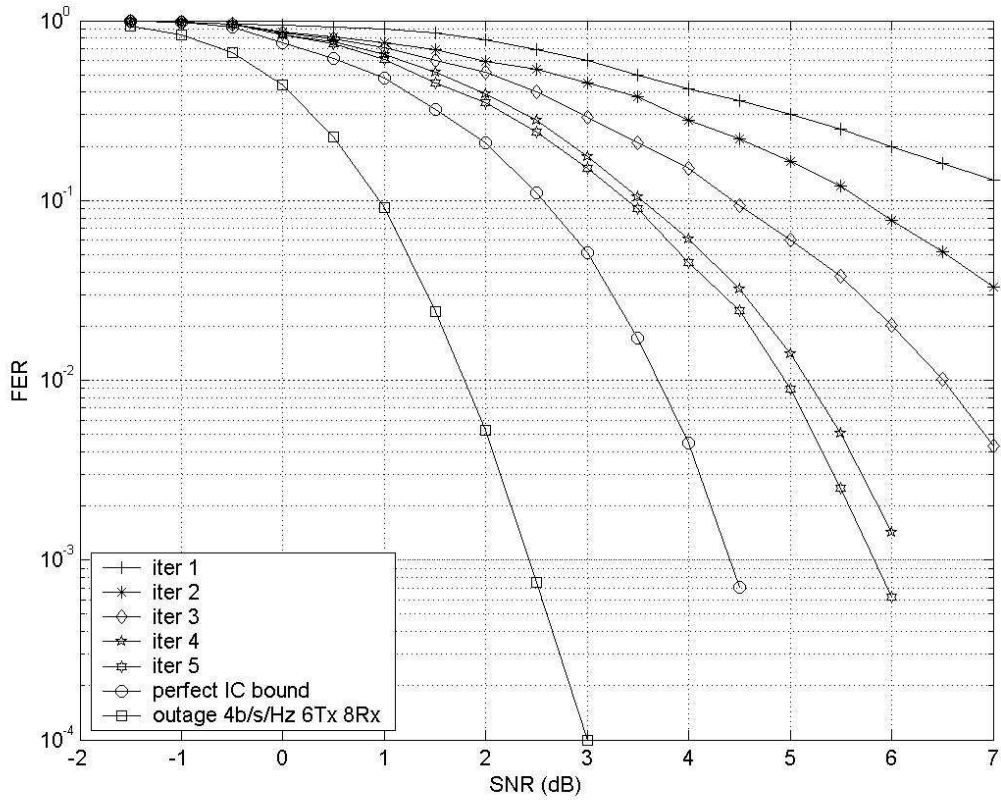


Figure 6.21. – Performances du détecteur SQOHLSTTC, modulation QPSK  
6 antennes d'émission – 8 antennes de réception

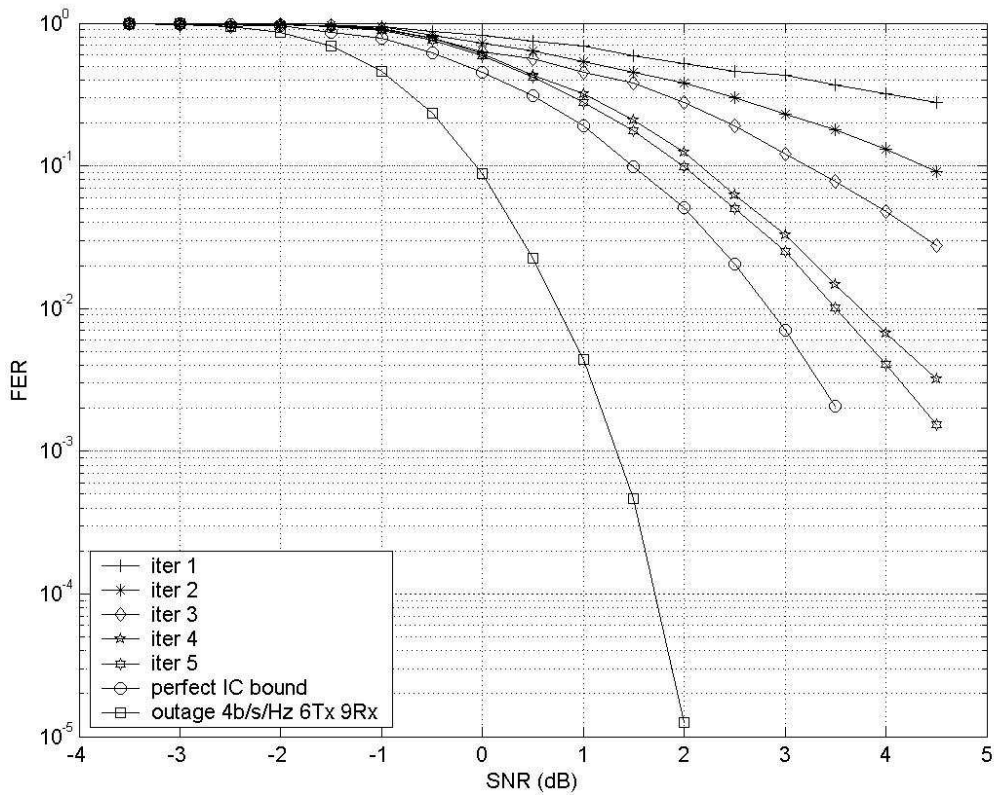


Figure 6.22. – Performances du détecteur SQOHLSTTC, modulation QPSK  
6 antennes d'émission – 9 antennes de réception

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié des architectures de systèmes d'émission-réception MIMO basés sur le principe du partitionnement en couches (layers). Ce type d'architecture offre des gains de multiplexage élevés ce qui permet d'atteindre des efficacités spectrales bien supérieures à celles des systèmes à base de codes spatio-temporels. Nous avons alors défini une structure de récepteur itératif de type turbo-annuleur d'interférences, qui permet d'obtenir d'excellentes performances tout en présentant une complexité largement inférieure à celle du détecteur optimal, qui doit tester l'ensemble des symboles susceptibles d'être transmis depuis les différentes antennes d'émission, pour obtenir la pondération des symboles codés en entrée des décodeurs de canal. Nous appliquons cette structure à différents contextes de transmission utilisant des codes convolutifs classiques et des codes LDPC. Nous montrons alors qu'avec des codes LDPC irréguliers optimisés il est possible, dans le cas d'une estimation de canal parfaite, d'opérer à 1.5 dB de la capacité *outage* limite pour des paquets de petite taille (150 symboles codés QPSK), tout en maintenant une efficacité spectrale élevée de 5 bits/s/Hz. Il faut souligner que tous les systèmes itératifs testés (y compris ceux à base de codes convolutifs) permettent à forts SNR, d'atteindre la borne d'annulation parfaite d'interférences ce qui illustre bien l'efficacité du système proposé.

Nous avons alors généralisé l'emploi des systèmes en couches au contexte des codes temps espace en blocs que nous avons synthétisés au paragraphe précédent pour des systèmes à trois antennes. Nous proposons dans le cadre de ces codes un système d'émission à base de couches horizontales qui traite les antennes d'émission par groupe de trois. Un décodage original de type annulation-suppression d'interférences à base de décisions hard est alors proposé. Cette architecture permet d'obtenir des performances intéressantes puisque nous travaillons à forts SNR à environ 1-1.5 dB de la borne d'annulation parfaite d'interférences.

Il faut souligner que tous les résultats obtenus dans ce chapitre supposent une estimation de canal parfaite en réception. Nous avons également testé au cours de cette thèse des algorithmes itératifs d'estimation de canal qui s'interfacent facilement avec la structure du turbo-annuleur d'interférences que nous proposons ici. Ces algorithmes sont basés sur l'EM (Expectation Maximization) et nous donnons un exemple de nos travaux avec un article publié dans la revue des annales des télécommunications en juillet 2005.

# LDPC-Based Space-Time Coded OFDM Systems : Turbo-EM Receiver Design with Channel State Information Guessing Algorithms

*Systèmes OFDM utilisant des codes LDPC :  
Récepteur Turbo -EM et Algorithmes d'Apprentissage  
du Canal de Propagation*

G. FERRE, M. J. SYED

J. P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS

Université de Limoges - Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL)  
Groupe d'Etude des Systèmes de Télécommunications de l'ENSIL  
(UMOP/GESTE CNRS FRE 2701)  
16, Rue Atlantis - Parc ESTER - BP 6804- 87068 Limoges cedex, France

## BIOGRAPHIES

**Guillaume Ferré** : graduated in electrical engineering from ENSIL in 2003, he is now working towards the PhD at the University of Limoges.

**Syed Mohamad Jamalullil** graduated in electrical engineering from ENSIL in 2001. He is now working towards the Ph.D at the University of Limoges. His current research activity includes multiuser MIMO OFDM system with LDPC channel coding. His research activities are sponsored by Telekom Malaysia Berhad.

**Jean-Pierre Cances** graduated in electrical engineering from ENST Bretagne in 1990. He received his Ph.D degree from Télécom Paris in satellite communication engineering in 1993. He is now an assistant professor at the Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL). His current research interests include satellite communication systems, multicarrier detection and synchronization algorithms, MIMO communication systems.

**Vahid Meghdadi** received his BSc. and MSc. degrees in communication engineering from Sharif University of Technology, Tehran, Iran, respectively in 1989 and 1992. He worked as a lecturer in Mashhad University in 1993. Since 1994, he has been a Ph.D. student in Ecole nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL) where he is now an assistant professor. His current research interests include satellite communication systems, multiuser detection and synchronization algorithms, MIMO communication systems.

**Jean-Michel Dumas** received his Diplôme d'Ingénieur from the Institut National des Sciences Appliquées of Toulouse, in 1973 and the Doctorat ès-Sciences Physiques degree from the University of Limoges in 1985. He was a member of the technical staff of France Télécom/Centre National d'Etudes des Télécommunications (FT.CNET) in Lannion till 1994. Then, he joined the Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL), University of Limoges, as Professor of Electronics and Telecommunications. At ENSIL, he leads a research group involved in the characterization of optoelectronic devices and the simulation of digital communication systems.

## Abstract

*In this paper we study some turbo receiver architectures employing low-density parity check (LDPC) codes together with orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) for high data rate wireless transmissions. Different demodulation schemes based on expectation-maximization (EM) algorithm are studied along with the channel impulse response (CIR) algorithms. We studied different CIR guessing algorithms including the EM-based algorithms such as a space-alternating generalized expectation-maximization algorithm (SAGE). It is shown that the proposed turbo-EM receiver employing a soft maximum a posteriori (MAP) EM demodulator and a belief propagation LDPC decoder can perform within 1 dB from the ergodic capacity of the studied MIMO OFDM channels. Besides, we find that a suboptimum structure based on a soft interference cancellation MMSE filtering demodulator exhibits negligible loss in non-correlated fading MIMO channels but suffer extra performance loss in highly correlated MIMO channels.*

*Key words : LDPC, EM, LMMSE-SIC, SAGE, MIMO, OFDM, outage capacity, ergodic capacity.*

## Résumé

*Dans cet article, nous étudions les performances de récepteurs de type turbo utilisant des codes LDPC dans le contexte de transmissions hauts débits en OFDM. Différents types de démodulateurs utilisant l'algorithme EM sont présentés ainsi que divers algorithmes d'apprentissage du canal de propagation toujours basés sur l'EM. En particulier nous proposons une variante de l'algorithme EM baptisée SAGE Space-Alternating Generalized Expectation-Maximization algorithm. Nous montrons alors que le récepteur turbo MAP-EM combiné avec un codeur LDPC permet de travailler à 1 dB de la capacité ergodique du canal lorsque le canal est parfaitement estimé. De plus, nous montrons qu'une structure sous-optimale utilisant un annuleur d'interférences avec un filtrage des moindres carrés présente des pertes négligeables dans le cas de canaux indépendants mais est plus sensible que la structure MAP-EM à la présence de canaux fortement corrélés.*

*Mots clés : codes LDPC, EM, LMMSE-SIC, canaux MIMO, OFDM, capacité outage, capacité ergodique*

## I. Introduction

Future wireless networks will have to provide high data rates with great spectral efficiency. In this context, so-called MIMO systems using multiple antennas both at the receiver and at the transmitter has raised considerable interest, as they exploit spatial diversity of the propagation environment. The first proposition and practical implementation of such a system was BLAST presented by Lucent [1-2]. In the MIMO systems, each antenna transmitting different data streams use identical time-frequency resources. Therefore, each of the sub-streams is treated as interference to the others and has to be eliminated by some signal processing algorithms at the receiver. The algorithm originally implemented in V-BLAST [2] was based on interference nulling (Zero-Forcing) and successive cancellation. Since then, different algorithms have been considered based on MMSE, DFE and iterative processing [3-6].

In this paper we classify and evaluate the performance of various MIMO receivers employing LDPC channel coding and OFDM for downlink transmissions which are commonly considered to be a bottleneck in system design due to their higher rate requirements. The receiver architectures are based on the so-called turbo-principle. Two main structures are studied : the MAP-EM demodulator and the MMSE soft interference cancellation demodulator (MMSE-SIC) which will be referred as the suboptimum solution. In each case the EM algorithm is used to weight the coded symbols at the input of the LDPC decoder when CSI information is not available at the receiver.

In the considered system, different users access the downlink channels in time-division multiple access (TDMA) with a certain scheduling scheme [7]. MIMO-OFDM-TDMA downlink transmissions constitute a good trade-off between performance and complexity since LDPC enables to work near the channel outage capacity [8] with a relative small decoding complexity whereas the OFDM technique enables to convert frequency selective fading channels into flat fading ones.

In addition to the study of various turbo receiver performances we propose several CIR guessing algorithms for the set-up of the EM joint channel and data processing algorithm. We studied different CIR guessing algorithms based on EM technique such as the space-alternating generalized expectation-maximization algorithm (SAGE).

The scope of the presented results is to compute the difference in terms of required SNR between the theoretical channel outage capacity and the practical obtained SNR with the proposed turbo-EM receivers for a target BER. We show that using appropriate optimized irregular LDPC codes, we obtain a difference less than 1.5 dB when using the MAP-EM structure over independent Rayleigh fading channels. The loss encountered when using a suboptimum structure is less than 1 dB when compared to the MAP-EM demodulator.

When comparing our paper to the original from Lu, Wang & al [9], the new ideas concern the study of the suboptimum MMSE-SIC receiver together with the use of new CIR guessing algorithms.

The paper is organized as follows : in the first part, we describe the studied LDPC MIMO OFDM system, part 2 is devoted to the receiver architectures whereas CIR guessing algorithms are given in section 3 ; simulation results are then presented in section 4 while section 5 concludes the paper outlining the main results.

## II. System Description of the MIMO LDPC System

We consider an LDPC-coded MIMO OFDM system with  $K$  subcarriers,  $N$  transmitter antennas and  $M$  receiver antennas, signaling through frequency-selective fading channels. The transmitter structure is illustrated in Fig. 1. A block of  $k$  bits of information data is encoded by a rate  $r = k/n$  LDPC code. The output  $n$  coded bits are interleaved. The interleaved bits are modulated by quadrature amplitude modulated (QAM) constellation  $\Omega$  into a block of  $n / \log_2 |\Omega|$  QAM symbols. Then, for each OFDM slot,  $N.K$  out of the total  $n / \log_2 |\Omega|$  QAM symbols are transmitted from  $K$  OFDM subcarriers and  $N$  transmitter antennas simultaneously. Due to the inherent random structure of LDPC codes, the  $N.K$  symbols can be mapped to  $K$  subcarriers and  $N$  transmitter antennas in any order. Without loss of generality, we assume  $(n / \log_2 |\Omega|) / (N.K) = \tilde{n}$  that means the total number of QAM symbols is transmitted using  $\tilde{n}$  slots.

Considering a quasistatic block fading model, we assume that the fading channels remain static during each OFDM slot but vary independently from one OFDM slot to another.  $L$  is the number of resolvable paths of the frequency-selective fading channels. For notational simplicity, here we consider an LDPC-MIMO-OFDM system with two transmitter antennas and one receiver antenna. The received signal during one data burst can be written as

$$\mathbf{y}[p] = \mathbf{X}[p] \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}[p] + z[p] \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{X}[p] &\cong [\mathbf{X}_1[p], \mathbf{X}_2[p]]_{K \times (2K)} \\ \mathbf{X}_j[p] &\cong \text{diag}\{x_j[p,0], x_j[p,1], \dots, x_j[p, K-1]\}_{K \times K}, j = 1, 2 \\ \mathbf{W} &= \text{diag}[\mathbf{W}_f, \mathbf{W}_f]_{(2K) \times (2L)} \\ \mathbf{W}_f &\cong [\mathbf{w}_f(0), \mathbf{w}_f(1), \dots, \mathbf{w}_f(K-1)]_{K \times L}^H \\ \mathbf{w}_f(k) &\cong [e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n_1 / K}, \dots, e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n_L / K}]^T \\ \mathbf{h}[p] &= [\mathbf{h}_{1,1}^H(p), \mathbf{h}_{1,2}^H(p)]_{2L \times 1}^H \\ \mathbf{h}_{i,j}(p) &= [\alpha_{i,j}(1; pT), \dots, \alpha_{i,j}(L; pT)]^H \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{h}_{i,j}$  is the  $L$  sized vector containing the time responses of all the nonzero taps,  $\mathbf{w}_f(k)$  contains the corresponding DFT coefficients. Furthermore, for practical MIMO OFDM systems with spatial (antenna) correlations, the frequency domain channel response matrix at the  $k$ th subcarrier and the  $p$ th slot is given by

$$\mathbf{H}[p, k] = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{R}_l^{1/2} \cdot \mathbf{H}_l[p] \cdot \mathbf{S}_l^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot k}{K}\right) \quad (3)$$

where  $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_l^{1/2} \cdot \mathbf{R}_l^{1/2}$ , and  $\mathbf{S}_l = \mathbf{S}_l^{1/2} \cdot \mathbf{S}_l^{1/2}$  represent the receive and transmit spatial-correlation matrices, which are determined by the spacing and the angle spread of MIMO antennas.  $L$  is the number of resolvable paths of the frequency-selective fading channels;  $\mathbf{H}_l[p]$  is the matrix with entries being independent and identically (i.i.d) circularly symmetric complex Gaussian distributed as  $N_c(0, \beta_l^2)$  and is assumed to be independent for different  $l$  and different  $p$ ; in addition, the power of  $\mathbf{H}_l[p]$ ,  $\forall l$  is normalized by letting  $\sum_{l=0}^{L-1} \beta_l^2 = 1$ . Assume proper cyclic insertion and sampling, the MIMO OFDM system with  $K$  subcarriers

decouples frequency-selective channels into  $K$  correlated flat-fading channels with the input-output relation ( $N_s$  denotes the total number of time-slot) :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[p, k] &= \mathbf{H}[p, k] \cdot \mathbf{x}[p, k] + z[p, k] \\ k &= 0, \dots, K-1 \quad p = 0, \dots, N_s \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\mathbf{H}[p,k] \in \mathbb{C}^{M \times N}$  is the matrix of complex channel frequency responses defined in (1);  $\mathbf{x}[p,k] \in \Omega^N$  and  $\mathbf{y}[p,k] \in \mathbb{C}^M$  are, respectively, the transmitted signals and the received signals at the  $k$ th subcarrier and the  $p$ th slot;  $z[p,k] \in \mathbb{C}^M$  is the additive noise with i.i.d entries  $z[p,k] \sim N_c(0, \mathbf{I})$ .

As in a typical data communication scenario, communication is carried out in a burst manner. A data burst is illustrated in Fig. 2. It consists of  $(N_s = P.q+1)$  OFDM words, with the first OFDM word ( $p = 0$ ) containing known pilot symbols and the rest  $(P.q)$  OFDM words spanning over the duration of  $q$  STBC code words.

With no channel state information (CSI) at the transmitter side, the channel capacity for the above MIMO OFDM modulation has been studied in [10-11]. Assuming Gaussian signaling  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  for MIMO OFDM channels and infinite fading channel observations, the ergodic capacity is given by (5) where expectation is taken over random channel states  $H$   $H := \{\mathbf{H}[p,k]\}_{p,k}$  and  $I_{/H}(SNR)$  (6) is the instantaneous mutual information conditioned on  $H$ .

$$C_{erg}(SNR) := E \left\{ \frac{1}{K.\tilde{n}} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{p=0}^{\tilde{n}-1} \left[ \log_2 \det(\mathbf{I}_M + \mathbf{H}[p,k].\mathbf{H}^H[p,k]) \right] \right\} \text{ bits/Hz/s} \quad (5)$$

$$I_{/H}(SNR) = N.\log_2|\Omega| - \frac{1}{K.\tilde{n}.|\Omega|^N} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{p=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{j=0}^{|\Omega|^N-1} E \left\{ \log_2 \sum_{i=0}^{|\Omega|^N-1} \exp \left[ -\|\mathbf{H}[p,k].(x^j - x^i) + z\|^2 + \|z\|^2 \right] \right\} \quad (6)$$

For MIMO OFDM channels with finite fading channel observations, the *outage capacity / probability* is a more sensible measure. For a target information rate  $R$ , the outage probability is given by :

$$P_{out}(R, SNR) = P(I_{/H}(SNR) < R) \quad (7)$$

### III. Receiver Architectures

A serial concatenated turbo receiver is employed (Fig. 3) to approach the maximum likelihood (ML) receiver performance of joint MIMO OFDM demodulation and LDPC decoding. It consists of a soft maximum a posteriori demodulator and a soft LDPC decoder, both of which are iterative devices themselves. The extrinsic information of the LDPC-coded bits is iteratively exchanged between a soft-input-soft-output (SISO) demodulator and a soft belief-propagation LDPC decoder; in each demodulator-decoder iteration, a number of inner iterations is performed within the soft LDPC decoder, during which time, extrinsic information is passed along the edges in the bipartite graph. We use the following notations: all extrinsic information is in log-likelihood form,  $\lambda_1^e$  and  $\lambda_2^e$  are the extrinsic informations respectively at the output of the soft MIMO OFDM demodulator and at the output of the soft LDPC decoder. When it is mandatory to precise the iteration stage we will use superscript  $(p,q)$  to denote quantities during the  $p$ th round of inner decoding within the LDPC decoder and the  $q$ th stage of outer iteration between the LDPC decoder and the MIMO OFDM demodulator. Furthermore, in this case the variable  $L$  will denote the extrinsic logarithmic information. A subscript  $D \rightarrow L$  denotes quantities passed from the demodulator to the LDPC decoder, and vice versa,  $L \rightarrow D$ . We study at



first the SISO OFDM demodulator proposing an optimum architecture and a suboptimum based on soft interference cancellation together with MMSE filtering. We describe the architectures at first in the case of perfect CSI at the receiver and then we propose a combined channel-data processing structure based on the EM-algorithm.

## 1- Perfect CSI at the receiver

### A. The SISO OFDM demodulator

Assuming a perfect CSI at the receiver, it is clear from (4) that the demodulation of the received signals at a particular subcarrier and a particular slot can be carried out independently. Besides, for notational convenience, the index  $[p,k]$  will be dropped in this subsection. At the  $q$ th turbo iteration, the soft MIMO OFDM demodulator computes extrinsic information of the LDPC code bit  $b_i$  as

$$L_{D \rightarrow L}^q(b_i) = g(\mathbf{y}, \{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_j)\}_j) \quad (8)$$

where  $\mathbf{y}$  is the received data ;  $\{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_j)\}_j$  is the extrinsic information computed by the LDPC decoder in the previous turbo iteration (at the first turbo iteration  $L_{D \rightarrow L}^q(b_i) = 0, \forall j$ ) and  $g(\cdot)$  denotes the demodulation function.

At a given subcarrier and time slot,  $N$  symbols or, correspondingly,  $N \cdot \log_2 |\Omega|$  LDPC code bits are transmitted from  $N$  transmitter antennas. In a maximum a posterior (MAP) MIMO OFDM demodulator,  $L_{D \rightarrow L}^q(b_i)$  ( $i = 1, \dots, N \log_2 |\Omega|$ ) is computed as (9), where  $C_i^+$  is the set of  $\mathbf{x}$  for which the LDPC-coded bit is "+1", and  $C_i^-$  is similarly defined ;  $\{\mathbf{x}^+\}_j$  denotes the corresponding  $j$ th binary bit in symbol  $\mathbf{x}^+$ , and similarly so does  $\{\mathbf{x}^-\}_j$ . The soft MAP demodulator in (9) has a complexity  $\mathcal{O}(|\Omega|^N)$  and can only be used in practice for small constellation size and small number of transmit antennas (typically a maximum of four transmit antennas can be considered).

$$\begin{aligned} L_{D \rightarrow L}^q(b_{i,j}) &= \log \frac{P(b_{i,j} = +1 | \mathbf{y})}{P(b_{i,j} = -1 | \mathbf{y})} - \log \frac{P(b_{i,j} = +1)}{P(b_{i,j} = -1)} \\ &= \log \frac{\sum_{\mathbf{x}^+ \in C_i^+} P(\mathbf{y} | \mathbf{x} = \mathbf{x}^+) \cdot P(\mathbf{x} = \mathbf{x}^+)}{\sum_{\mathbf{x}^- \in C_i^-} P(\mathbf{y} | \mathbf{x} = \mathbf{x}^-) \cdot P(\mathbf{x} = \mathbf{x}^-)} - L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_{i,j}) \\ &= \log \frac{\sum_{\mathbf{x}^+ \in C_i^+} \exp\left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^+\|^2 / 2 \cdot \sigma^2 + \sum_{j=1}^{N \log_2 |\Omega|} \{\mathbf{x}^+\}_j \cdot \frac{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_{i,j})}{2}\right)}{\sum_{\mathbf{x}^- \in C_i^-} \exp\left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^-\|^2 / 2 \cdot \sigma^2 + \sum_{j=1}^{N \log_2 |\Omega|} \{\mathbf{x}^-\}_j \cdot \frac{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_{i,j})}{2}\right)} - L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_{i,j}) \end{aligned} \quad (9)$$

### B. The LMMSE-SIC suboptimal demodulator

Then, we describe a suboptimal soft demodulator, which is based on the linear minimum-mean-square-error soft-interference-cancellation (LMMSE-SIC) techniques [12] and has a relatively low complexity at  $\mathcal{O}(|\Omega|^3)$ . Based on the *a priori* LLR of the code bits provided by the LDPC coder  $\{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_i)\}_i$ , we first form soft estimates of the symbol transmitted from the  $j$ th ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) antenna as

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &\cong \sum_{\hat{x} \in \Omega} \hat{x} P(x_j = \hat{x}) \\ &= \sum_{\hat{x} \in \Omega} \hat{x} \cdot \prod_{l=1}^{\log_2 |\Omega|} [1 + \exp(-\{\hat{x}\}_l \cdot L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_{l,j}))]^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

where  $b_{l,j}$  denotes the corresponding  $l$ th binary bit in symbol  $x_j$ . Denote

$$\tilde{\mathbf{x}}_j \cong [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{j-1}, 0, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_{N-1}]^T \quad (11)$$

We then perform a soft interference cancellation  $\mathbf{y}_j$  to obtain

$$\tilde{\mathbf{y}}_j \cong \mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_j = \mathbf{H} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{n} \quad (12)$$

Next, an instantaneous linear MMSE filter is applied to  $\tilde{\mathbf{y}}_j$  to obtain

$$z_j = \mathbf{w}_j^H \tilde{\mathbf{y}}_j \quad (13)$$

where the filter  $\mathbf{w}_j \in C^M$  is chosen to minimize the mean-square error between the transmit symbol  $x_j$  and the filter output  $z_j$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j &= \arg \min_{\mathbf{w} \in C^M} E \left\{ |x_j - \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{y}}_j|^2 \right\} \\ &= (\mathbf{H} \mathbf{\Delta}_j \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}_j &\cong \text{cov}\{\mathbf{x}_j - \tilde{\mathbf{x}}_j\} \\ &= \text{diag}\{1 - |\tilde{x}_1|^2, \dots, 1 - |\tilde{x}_{j-1}|^2, 1, 1 - |\tilde{x}_{j+1}|^2, \dots, 1 - |\tilde{x}_N|^2\} \end{aligned} \quad (15)$$

and  $\mathbf{e}$  denotes an  $M$ -sized vector with all-zero entries, except for the  $j$ th entry being 1. As in [12], we approximate the soft instantaneous MMSE filter output  $z_j$  in (13) as Gaussian distributed.

$$p(z_j|x_j) \cong N_c(\mu_j \cdot x_j, \eta_j^2) \quad (16)$$

Conditioned on  $x_j$ , the mean and variance of  $z_j$  are given, respectively, by

$$\begin{aligned} \mu_j &\cong E\{z_j \cdot x_j^*\} \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \cdot \Delta_j \cdot \mathbf{H}^H + \sigma^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \eta_j^2 &\cong \text{var}\{z_j\} \\ &= E\{|z_j|^2\} - \mu_j^2 = \mu_j - \mu_j^2 \end{aligned} \quad (18)$$

The extrinsic information  $L_{D \rightarrow L}^q(b_{i,j})$  of the corresponding  $i$ th binary bit in symbol  $x_j$  delivered by the LMMSE-SIC demodulator is calculated as (19), where  $S_{i,j}^+$  is the set of all possible values of  $x_i$  for which the  $i$ th LDPC-coded bit is "1", and  $S_{i,j}^-$  is similarly defined;  $\{x_j^+\}_k$  denotes the corresponding  $k$ th binary bit in symbol  $x_j^+$  and similarly so does  $\{x_j^-\}_k$ . One has to note that the LMMSE-SIC demodulator extracts the extrinsic LLR of code bit  $b_i$  from  $z_j$ , which is the scalar output of the MMSE filter in (13), whereas the MAP demodulator collects the extrinsic LLR from  $\mathbf{y}$ , which is the  $M$ -size vector of the received signals. The complexity of soft LMMSE-SIC demodulator is thus significantly lower than that of the MAP demodulator, especially when  $N$  and  $|\Omega|$  are large.

$$\begin{aligned} L_{D \rightarrow L}^q(b_i) &= \log \frac{P(b_i = +1|z_j)}{P(b_i = -1|z_j)} - \log \frac{P(b_i = +1)}{P(b_i = -1)} \\ &= \log \frac{\sum_{x^+ \in S_{i,j}^+} P(x_j = x^+|z_j)}{\sum_{x^- \in S_{i,j}^-} P(x_j = x^-|z_j)} - L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_i) \\ &= \log \frac{\sum_{x^+ \in S_{i,j}^+} P(z_j|x_j = x^+) \cdot P(x_j = x^+)}{\sum_{x^- \in S_{i,j}^-} P(z_j|x_j = x^-) \cdot P(x_j = x^-)} - L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_i) \\ &= \log \frac{\sum_{x^+ \in S_{i,j}^+} \exp\left(-\|z_j - \mu_j \cdot x^+\|^2 / \eta_j^2 + \sum_{j=1}^{\log_2|\Omega|} \{x_j^+\}_k \cdot \frac{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_k)}{2}\right)}{\sum_{x^- \in S_{i,j}^-} \exp\left(-\|z_j - \mu_j \cdot x^-\|^2 / \eta_j^2 + \sum_{j=1}^{\log_2|\Omega|} \{x_j^-\}_k \cdot \frac{L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_k)}{2}\right)} - L_{D \leftarrow L}^{q-1}(b_i) \end{aligned} \quad (19)$$

## 2- Combined EM channel-data processing structure

### A. SISO OFDM demodulator based on the EM Algorithm

This joint channel-data processing structure is related to the *SISO OFDM demodulator* of the former section.

Without CSI, the maximum-likelihood (ML) detection problem is written as

$$\hat{X}[p] = \arg \max_{X[p]} \log p(X[p]|y[p]) \quad p = 1, 2, \dots, Pq \quad (20)$$

with the notations following equations [1-2] (Recall that  $X[0]$  contains pilot symbols). The optimal solution to (20) is of prohibitive complexity. We next propose to use the expectation-maximization (EM) algorithm [13] to solve (20). As mentioned before, for the sake of simplicity we only treat the case of a single transmit-two receive antennas system. The basic idea of the MAP-EM algorithm is to solve (20) iteratively according to the following two steps (we temporarily drop the time index  $p$ , with the understanding that the MAP-EM algorithm discussed below is applied to each OFDM word in the data burst) :

1. E-step: Compute  $Q(X|X^{(i)}) = E(\log p(y|X, \mathbf{h}) | y, X^{(i)})$  (21)

2. M-step: Solve  $X^{(i+1)} = \arg \max_X Q(X|X^{(i)}) + \log P(X)$  (22)

where  $X^{(i)}$  denotes hard decisions of the data symbols at the  $i$ th EM iteration and  $P(X)$  represents the *a priori* probability of  $X$ , which is fed back by the channel decoder from the previous turbo iteration. It is known that the likelihood function  $Q(X|X^{(i)})$  is nondecreasing and under regularity conditions the EM algorithm converges to a local stationary point [13]. In the E-step, the expectation is taken with respect to the “hidden” channel response  $\mathbf{h}$  conditioned on  $y$  and  $X^{(i)}$ ,  $\mathbf{h}$  is complex Gaussian distributed and its distribution is expressed as  $\mathbf{h}|(y, X^{(i)}) \cong N_c(\hat{\mathbf{h}}, \hat{\Sigma}_h)$

with 
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}} &\stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot \Sigma_z^{-1} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} + \Sigma_h^\vee)^{-1} \times \mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot \Sigma_z^{-1} \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} + \Sigma_h^\vee)^{-1} \cdot \mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (23)$$

and 
$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_h &\stackrel{\Delta}{=} \Sigma_h - (\mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot \Sigma_z^{-1} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} + \Sigma_h^\vee)^{-1} \times \mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot \Sigma_z^{-1} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} \cdot \Sigma_h \\ &= \Sigma_h - (\mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} + \Sigma_h^\vee)^{-1} \times \mathbf{W}^H \cdot X^{(i)H} \cdot X^{(i)} \cdot \mathbf{W} \cdot \Sigma_h \end{aligned} \quad (24)$$

where  $\Sigma_z$  and  $\Sigma_h$  denote respectively the covariance matrix of the ambient white Gaussian noise  $z$  and channel responses  $\mathbf{h}$ . According to the assumptions made, both of them are diagonal matrices as :

$\Sigma_z \cong E(z \cdot z^H) = \mathbf{I}$  and  $\Sigma \cong E(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^H) = \text{diag}[\sigma_{1,1}^2, \dots, \sigma_{1,L_f}^2, \sigma_{2,1}^2, \dots, \sigma_{2,L}^2]$ , where  $\sigma_{j,l}^2$  is the average power of the  $l$ th tap related with the  $j$ th transmitter antenna;  $\sigma_{j,l}^2 = 0$  if the channel response at this tap is zero.

Assuming that  $\Sigma_h$  is known or measured by means of pilot symbols,  $\Sigma_h^\vee \cong \text{diag}[\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,L_f}, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,L}]$  is defined as the pseudo inverse of  $\Sigma_h$  as

$$\gamma_{j,l} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{j,l}^2}, \sigma_{j,l}^2 \neq 0 \\ 0, \sigma_{j,l}^2 = 0 \end{cases} \quad l = 1, \dots, L, j = 1, 2 \quad (25)$$

Using (23-24),  $Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)})$  is computed as shown in (26), where  $[\mathbf{W} \cdot \hat{\Sigma}_h \cdot \mathbf{W}^H]_{(i,j)}$  denotes the  $(i,j)$ th element of the matrix  $[\mathbf{W} \cdot \hat{\Sigma}_h \cdot \mathbf{W}^H]$ .

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)}) &= -E_h \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}\|^2 \right\} + \text{const} \\ &= -E_h \left\{ \left\| (\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{h}}) + (\mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}) \right\|^2 \right\} + \text{const} \\ &= -\|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{h}}\|^2 - E_h \left\{ (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^H \cdot \mathbf{W}^H \cdot \mathbf{X}^H \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}) \right\} + \text{const} \\ &= -\|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{h}}\|^2 - \text{trace} \left\{ \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\Sigma}_h \cdot \mathbf{W}^H \cdot \mathbf{X}^H \right\} + \text{const} \\ &= -\sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \left[ \mathbf{y}[k] - \mathbf{x}^H[k] \cdot \mathbf{W}_f'(k) \cdot \hat{\mathbf{h}} \right]^2 + \left[ \mathbf{x}^H[k] \cdot \hat{\Sigma}_h(k) \cdot \mathbf{x}[k] \right] \right\} + \text{const} \\ &= -q(\mathbf{x}[k]) + \text{const} \end{aligned} \quad (26)$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k] &\cong [x_1[k], x_1[k]]_{2 \times 1}^H \\ \mathbf{W}_f' &\cong \begin{bmatrix} \mathbf{w}_f^H(k) & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_f^H(k) \end{bmatrix}_{2 \times (2 \cdot L_f)} \\ \hat{\Sigma}_h(k) &\cong \begin{bmatrix} [\mathbf{W} \hat{\Sigma}_h \mathbf{W}^H]_{(k+1, k+1)} & [\mathbf{W} \hat{\Sigma}_h \mathbf{W}^H]_{(K+k+1, k+1)} \\ [\mathbf{W} \hat{\Sigma}_h \mathbf{W}^H]_{(k+1, K+k+1)} & [\mathbf{W} \hat{\Sigma}_h \mathbf{W}^H]_{(K+k+1, K+k+1)} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Next, based on (26), the M-step proceeds as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(i+1)} &= \arg \max_{\mathbf{X}} \left[ Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)}) + \log P(\mathbf{X}) \right] \\ &= \arg \max_{\mathbf{X}} \left[ -\sum_{k=0}^{K-1} q(\mathbf{x}[k]) + \sum_{k=0}^{K-1} \log P(\mathbf{x}[k]) \right] \\ &= \arg \max_{\mathbf{X}} \left[ -\sum_{k=0}^{K-1} q(\mathbf{x}[k]) + \log P(\mathbf{x}[k]) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{or } \mathbf{x}^{(i+1)}[k] = \arg \min_{\mathbf{x}[k]} [q(\mathbf{x}[k]) - \log P(\mathbf{x}[k])], k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (28)$$

where (27) follows from the assumption that  $\mathbf{X}$  contains independent symbols. It is seen from (28) that the M-step can be decoupled into  $K$  independent minimization problems, each of which can be solved by enumeration over all possible  $\mathbf{x} \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  (recall that  $\mathcal{Q}$  denotes the set of all STC symbols). Hence, the total complexity of the maximization step is  $\mathcal{O}(K|\mathcal{Q}|^N)$ .

### B. LMMSE-SIC based on the EM Algorithm

For the suboptimum demodulator, we use the following Gaussian model at the output of the MMSE filter (see equation (16)).

$$z_j = \lambda_j \cdot x_j + \rho_j \quad (29)$$

with  $\mu_j = E(\lambda_j)$  and  $E(|z_j - \lambda_j \cdot x_j|^2) = E(\rho_j^2) = \mu_j - \mu_j^2 = \eta_j^2$ . We obtain now for the equivalent form of the computation of  $Q(\mathbf{X}|\mathbf{X}^{(i)})$  in (26).

$$\begin{aligned} Q(z_j|x_j^{(i)}) &= -E_h|_{(z_j, x_j^{(i)})} \left\{ \|z_j - \lambda_j \cdot x_j\|^2 \right\} + const \\ &= -E_h|_{(z_j, x_j^{(i)})} \left\{ \|(z_j - \mu_j \cdot x_j) + (\mu_j \cdot x_j - \lambda_j \cdot x_j)\|^2 \right\} + const \\ &= -|z_j - \mu_j \cdot x_j|^2 + \eta_j^2 + const \\ &= q(x_j^{(i)}) \end{aligned} \quad (30)$$

Then the M-step proceeds as follows :

$$x_j^{(i+1)}[k] = \arg \min_{x[k]} [q(x_j^{(i)}[k]) - \log P(x_j^{(i)}[k])] \quad (31)$$

Then, the update equations for computing  $\mu_j$  and  $\eta_j^2$  are given by

$$\begin{aligned} \mu_j^{(k+1)} &= \frac{z_j^{(k)} \cdot x_j^{(k)}}{1 + (\eta_j^{(k)})^2} \\ (\eta_j^{(k+1)})^2 &= \mu_j^{(k+1)} - (\mu_j^{(k+1)})^2 \end{aligned} \quad (32)$$

## IV. CIR Guessing Algorithms

All the receiver structures mentioned before need initial channel coefficient values using the pilot symbols in the first OFDM word. Several channel guessing algorithms are proposed here and we focus our attention to the EM-type channel estimation algorithm. Considering a transmission between  $N$  transmit antennas and one receive antenna, using the model of equation (4), we rewrite the signal received at time  $n$ .

$$\mathbf{y}_n = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{H}_{i,n} + \mathbf{z}_n \quad (33)$$

Here,  $\mathbf{X}_{i,n}$  is an  $K \times K$  diagonal matrix with  $\mathbf{X}_{i,n}[k,k] = x_i(n,k)$  representing the symbol through the  $i$ th antenna over the  $k$ th tone at time  $n$ . The channel impulse response between the  $i$ th transmit antenna and the receive antenna,  $h_i(t)$  can be modeled as

$$h_i(t) = \sum_j \alpha_{i,j} \cdot \delta(t - \tau_{i,j} T_s)$$

where  $\tau_{i,j}$  is the channel delay associated with the  $i$ th transmitter and the  $j$ th path. For OFDM systems, if the cyclic prefix  $T_c = N_c T_s$  is sufficiently long i.e.  $T_c \geq \tau_{i,j} T_s \geq 0, \forall i, \forall j$  and perfect sample time is assumed, the discrete channel impulse response at time  $n$  can be expressed as an  $L \times 1$  vector  $\mathbf{h}_{i,n}$  with tolerable leakage, where  $L$  satisfies  $L \leq N_c + 1$ . Therefore, the frequency response vector  $\mathbf{H}_{i,n}$  can be expressed as

$$\mathbf{H}_{i,n} = \mathbf{W}_f \cdot \mathbf{h}_{i,n} \quad (34)$$

with  $\mathbf{W}_f$  being a  $N \times L$  DFT matrix transform with  $\mathbf{W}_f[k,l] = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot l / K}$ , in fact  $\mathbf{W}_f$  is constructed by the first  $L$  columns of the  $K \times K$  square DFT matrix.

A temporal estimation of the channel impulse response vector is obtained by minimizing the following function

$$\hat{\mathbf{h}}_n = \arg \min_{\mathbf{h}_n} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n \mathbf{h}_n\|^2 \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n &\cong [\mathbf{X}_{1,n} \cdot \mathbf{W}_f \ \mathbf{X}_{2,n} \cdot \mathbf{W}_f \ \cdots \ \mathbf{X}_{N,n} \cdot \mathbf{W}_f] \\ \mathbf{h}_n &\cong [\mathbf{h}_{1,n}^H \ \mathbf{h}_{1,n}^H \ \cdots \ \mathbf{h}_{1,n}^H]^H \\ \hat{\mathbf{h}}_n &\cong [\hat{\mathbf{h}}_{1,n}^H \ \hat{\mathbf{h}}_{1,n}^H \ \cdots \ \hat{\mathbf{h}}_{1,n}^H]^H \end{aligned} \quad (36)$$

The least-squares (LS) solution of (36) is also the maximum-likelihood (ML) channel estimate assuming known pilot symbols transmitted in the first OFDM word. If  $\mathbf{G}_n$  is of full rank, then the ML solution  $\hat{\mathbf{h}}_n^{(ML)}$  is determined by

$$\hat{\mathbf{h}}_n^{(ML)} = (\mathbf{G}_n^H \cdot \mathbf{G}_n)^{-1} \mathbf{G}_n^H \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{R}_n^{-1} \cdot \mathbf{P}_n \quad (37)$$

where

$$\mathbf{R}_n \cong \begin{pmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{1,n}^H \cdot \mathbf{X}_{2,n} \cdot \mathbf{W}_f & \cdots & \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{1,n}^H \cdot \mathbf{X}_{N,n} \cdot \mathbf{W}_f \\ \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{2,n}^H \cdot \mathbf{X}_{1,n} \cdot \mathbf{W}_f & \mathbf{I}_L & \cdots & \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{2,n}^H \cdot \mathbf{X}_{N,n} \cdot \mathbf{W}_f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{N,n}^H \cdot \mathbf{X}_{1,n} \cdot \mathbf{W}_f & \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{N,n}^H \cdot \mathbf{X}_{2,n} \cdot \mathbf{W}_f & \cdots & \mathbf{I}_L \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{P}_n \cong [\mathbf{r}_n^H \mathbf{X}_{1,n} \cdot \mathbf{W}_f, \mathbf{r}_n^H \mathbf{X}_{2,n} \cdot \mathbf{W}_f, \cdots, \mathbf{r}_n^H \mathbf{X}_{N,n} \cdot \mathbf{W}_f]^H \quad (39)$$

A drawback of directly solving (37) is that the calculation of the inverse of the  $N.L \times N.L$  square matrix,  $\mathbf{R}_n$ , is required. The inverse matrix operation requires significant computation for large values of  $N$  and  $L$ . To overcome this drawback, the authors of [14] proposed to use only the most significant channel taps thus reducing the size of  $\mathbf{R}_n$  to obtain a computationally tolerable level for small  $L$ . This method is referred to as significant-tap-catching [14]. Another solution is to design the training blocks  $\mathbf{X}_{i,n}$  for  $1 \leq i \leq N$  to make  $\mathbf{R}_n$  diagonal, so that matrix inversion is trivial [15]. However, this method can only provide channel estimation at the pilot blocks and cannot work in a decision-directed feedback mode to track the CIR time-variations.

Instead of minimizing (35) directly, EM-type algorithms provide an iterative and more easily implementable solution. Fessler and Hero [16] extended the classical EM algorithm to the SAGE algorithm, in which one alternates between several hidden data spaces rather than just one “complete” data space, and only updates a subset of the elements of the parameter vector in each iteration. Here we apply both approaches.

In the EM algorithm, we view the observed data  $\mathbf{y}_n$  as the “incomplete” data, and define the “complete” data  $\mathbf{Y}_{i,n}$  as

$$\mathbf{Y}_{i,n} = \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \mathbf{h}_{i,n} + \mathbf{z}_{i,n} \quad (40)$$

where  $\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_{i,n} = \mathbf{z}_n$  ( $\sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_{i,n} = \mathbf{y}_n$ ).  $\mathbf{Y}_{i,n}$  is the component of the received signal transmitted by the  $i$ th

antenna through the channel with impulse response  $\mathbf{h}_{i,n}$ . It is easy to show that the EM algorithm for the above particular choice of complete data takes the following form.

- E-Step: For  $i = 1, 2, \dots, N$ , compute

$$\hat{\mathbf{Z}}_{i,n}^{(k)} = \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k)} \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i,n}^{(k)} = \hat{\mathbf{Z}}_{i,n}^{(k)} + \beta_i \cdot \left[ \mathbf{y}_n - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{Z}}_{j,n}^{(k)} \right] \quad (42)$$

- M step: For  $i = 1, 2, \dots, N$ , compute

$$\hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{h}_{i,n}} \left\{ \left\| \hat{\mathbf{Y}}_{i,n}^{(k)} - \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \mathbf{h}_{i,n} \right\|^2 \right\} \quad (43)$$

The superscript  $(k)$  denotes the  $k$ th iteration, and the  $\beta_i$  are chosen such that  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ . Solving (43), we obtain

$$\hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k+1)} = \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{i,n}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_{i,n}^{(k)} \quad (44)$$

It is possible to combine (40), (41) and (43) to obtain the complete recursion

$$\hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k)} + \beta_i \cdot \left[ \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{i,n}^{-1} \cdot \mathbf{y}_n - \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{i,n}^{-1} \cdot \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \hat{\mathbf{h}}_{j,n}^{(k)} \right] \quad (45)$$



Note that  $\mathbf{X}_{i,n}$  is a diagonal matrix, and thus, calculation of its inverse is trivial. Also, we can remark that (44) is just the well known LS channel estimation scheme for the conventional single transmit antenna OFDM system. The motive of the EM algorithm is clear. At the E-step, it estimates the corresponding component in the received signal for each of the OFDM links. At the M-step, as in the conventional OFDM scheme, it divides the corresponding component by the reference symbols in the frequency domain and then performs an inverse fast Fourier transform (IFFT) to update the estimate of the channel impulse response.

The convergence rate of the EM algorithm is inversely related to the Fisher information of its complete data space [16]. In the above algorithm, the noise variance is distributed over  $\mathbf{Y}_{i,n}$  for all  $i$ ; therefore, the Fisher information of  $\mathbf{Y}_{i,n}$  for  $\mathbf{h}_{i,n}$  is relatively large for a certain  $i$ . To improve the convergence rate, we can choose the hidden data space as  $\mathbf{Y}_{i,n}$  for  $i = 1, 2, \dots, N$  alternately in each iteration, and thus associate all the noise variance with it. The SAGE algorithm for this specific problem is then as follows

- Initialization : For  $1 \leq i \leq N$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{i,n}^{(0)} = \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(0)} \quad (46)$$

- At the  $k$ th iteration ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

For  $i = 1 + \lfloor k \bmod N \rfloor$ , compute

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i,n}^{(k)} = \hat{\mathbf{Z}}_{i,n}^{(k)} + \left[ \mathbf{y}_n - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{Z}}_{j,n}^{(k)} \right] \quad (47)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k+1)} = \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{i,n}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_{i,n}^{(k)} \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{i,n}^{(k+1)} = \mathbf{X}_{i,n} \cdot \mathbf{W}_f \cdot \hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(k+1)} \quad (49)$$

For  $1 \leq j \leq N$  and  $j \neq i$ ,

$$\hat{\mathbf{Z}}_{j,n}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{Z}}_{j,n}^{(k)} \quad (50)$$

A proper selection of the initial value of  $\hat{\mathbf{h}}_{i,n}$  is very important for the convergence speed of both algorithms. Intuitively, assuming all the signals transmitted from other than the  $i$ th antenna to be zero, we can obtain an initial estimate of the channel for the EM-type iteration as follows :

$$\hat{\mathbf{h}}_{i,n}^{(0)} = \mathbf{W}_f^H \cdot \mathbf{X}_{i,n}^{-1} \cdot \mathbf{y}_n \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (51)$$

## V. Simulation Results

In this section, we present numerical results for MIMO OFDM transmissions using regular and irregular LDPC codes. We will study here systems with equal number of transmit and receive antennas, this is justified by a well known result from information theory: at high SNR's, a narrowband MIMO system can support a

$m = \min(N, M)$  times higher information rate than that in single antenna ( $N = M = 1$ ). In this case, MIMO techniques potentially increase considerably the spectral efficiency of wireless transmission systems. For example, to achieve a fixed data rate of 100 Mb/s, a traditional single-antenna system requires 100 MHz bandwidth (assuming QPSK modulation and coding rate 1/2), whereas a four-transmit, four-receive antenna system could potentially transmit the same 100 Mb/s data rate using only 25 MHz bandwidth. We note that the information rate in the single antenna system is 1 bit/Hz/s, whereas it is increased to 4 bits/Hz/s in the  $4 \times 4$  MIMO system (higher spectral efficiency).

Two kinds of LDPC codes are used: regular and irregular ones. For regular LDPC, the parity check matrix  $\mathbf{P}$  of a regular  $(n, k, s, t)$  LDPC code of rate  $r = k/n$  is a  $(n-k) \times n$  matrix, which has  $s$  ones in each column and  $t > s$  ones in each row, where  $s \ll n$ , and the ones are typically placed at random in the parity check matrix. When the number of ones in every column is not the same, the code is known as an irregular LDPC code. The description of irregular LDPC codes is a little bit more complicated: the code parity check matrix  $\mathbf{P}$  can be represented by a bipartite graph that consists of two types of nodes: variable and check nodes. Each code bit is a variable node, whereas each parity check or each row of the parity check matrix represents a check node. An edge in the graph is placed between variable node  $i$  and check node  $j$  if  $P_{ij} = 1$ . That is, each check node is connected to code bits whose sum modulo-2 should be zero. Irregular LDPC codes are usually specified by two

polynomials  $\lambda(x) = \sum_{i=1}^{d_{l\max}} \lambda_i \cdot x^{i-1}$  and  $\rho(x) = \sum_{i=1}^{d_{r\max}} \rho_i \cdot x^i$ , where  $\lambda_i$  is the fraction of edges in the bipartite

graph that are connected to variable nodes of degree  $i$ , and  $\rho_i$  is the fraction of edges that are connected to check nodes of degree  $i$ . In the following simulation results all the regular LDPC codes are ( $s = 3, t = 6$ ) codes taken from [8] and are  $1024 \times 2048$  rate  $1/2$  block codes. The irregular LDPC codes used in simulations have the same size ( $1024 \times 2048$ ) and are generated at hand using the basic principles of regular LDPC construction in [8] with slight modifications to obtain irregular LDPC parity check matrices.

We use the two following polynomial generators :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 0.269052 \cdot x + 0.135031 \cdot x^2 + 0.024564 \cdot x^4 + 0.031625 \cdot x^5 + 0.062323 \cdot x^6 + 0.020950 \cdot x^8 \\ &\quad + 0.035585 \cdot x^{13} + 0.4209 \cdot x^{16} \\ \rho(x) &= 0.278456 \cdot x^7 + 0.7215 \cdot x^8 \end{aligned}$$

The number of iterations for the belief-propagation algorithm inside the LDPC decoder is equal to 30.

## 1. Channels with no spatial correlation

For channels' models we use specifications similar as those planned in future wireless high data rate services such as those planned in IEEE 802.11. The entire channel bandwidth is 100 MHz and is divided into 128 subcarriers or tones. The symbol duration is  $1.28 \mu s$ . An additional  $320 ns$  guard interval was used to provide protection from intersymbol interference (ISI) due to channel delay spread. The simulations are carried out for two different channel delay and power profiles as shown in Fig. 4. The first one is an uniform power and delay

profile and the second is an Hilly terrain profile. The maximum channel delay spread of 100 ns is assumed to be known in all the simulations.

**Perfect CSI (uniform power and delay profile) :** The simulation results are given on Fig. 5 for the uniform power and delay profile after five turbo-iterations between the soft MIMO log-MAP OFDM demodulator and the LDPC decoder in the case of an  $1 \times 1$  MIMO OFDM system. It is clearly seen from the curve that the LMMSE-SIC suboptimal demodulator exhibits negligible loss when compared to the log-MAP OFDM demodulator. The irregular LDPC code offers better performances than the regular one, the gain is approximately equal to 1 dB at  $\text{FER} = 10^{-1}$  or  $10^{-2}$ . The loss encountered by the schemes including irregular LDPC codes when compared to the channel capacity is 1.5 -1.6 dB for the same FER as mentioned just before.

The results in Fig. 6 are given in the case of an case of an  $2 \times 2$  MIMO OFDM system for the same channels' profile and after five turbo-iterations. The overall performance is improved to approximately 2 dB for all the studied schemes. Once again it is clear that the LMMSE-SIC suboptimal demodulator exhibits negligible loss when compared to the log-MAP OFDM demodulator. The irregular LDPC code offers better performances than the regular one, the gain is approximately equal to 0.8 dB at  $\text{FER} = 10^{-1}$  or  $10^{-2}$ . The loss encountered by the schemes including irregular LDPC codes when compared to the channel capacity is 1.5-1.6 dB.

The results in Fig. 7 are given in the case of an case of an  $4 \times 4$  MIMO OFDM system for the same channels' profile and after five turbo iterations. The overall performance is improved to approximately 1 dB for all the studied schemes. Once again it is clear that the LMMSE-SIC suboptimal demodulator exhibits negligible loss when compared to the log-MAP OFDM demodulator. The irregular LDPC code offers better performances than the regular one, the gain is approximately equal to 0.8 dB at  $\text{FER} = 10^{-1}$  or  $10^{-2}$ . The loss encountered by the schemes including irregular LDPC codes when compared to the channel capacity is 1.8-2.0 dB for the same FER as mentioned just before.

**Combined EM channel-data processing structure :** We use here the structure described in Section II.2. The initial channel estimate is given by the SAGE algorithm with five iterations and the EM detection algorithm within each detection loop consists of five iterations too. Fig .8 shows the results obtained in the case of  $1 \times 1$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation. When compared to Fig. 5 we can notice a slight degradation due to the use of a channel state information guessing algorithm. However, the MAP-EM demodulator and the SIC-EM exhibit no error floor and the degradation encountered is less than 1.0 dB. Fig .9 shows the results obtained in the case of  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation. When compared to Fig. 6 we can notice once again a slight degradation. The degradation encountered is less than 1 dB showing the accuracy of the MAP-EM algorithm.

The case of Fig.10 concerns the FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm. The conclusions remain the same as those just given above: one can notice a slight degradation of approximately 1 dB when compared to Fig. 7.

**Perfect CSI (Hilly terrain profile) :** The simulation results are given on Fig. 11-13 for the Hilly terrain profile after five turbo-iterations between the soft MIMO log-MAP OFDM demodulator and the LDPC decoder in the case of an  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  and  $4 \times 4$  MIMO OFDM system. Similar to the former observations, we can see once again that the LMMSE-SIC suboptimal demodulator exhibits negligible loss when compared to the log-MAP OFDM demodulator. The irregular LDPC code offers better performances than the regular one the gain is

approximately equal to 1 dB at FER =  $10^{-1}$  or  $10^{-2}$ . In all antennas configurations the channel capacity is clearly inferior to the case of the uniform power and delay profile since the channel is clearly less frequency selective.

**Combined EM channel-data processing structure :** The results are plotted on curves 14-16, the loss encountered when compared to the perfect CSI case vary between 1.5 and 2 dB. This degradation is superior to the one mentioned for the uniform power and delay profile channel, this is probably due to the fact that the time-average channel energy is inferior to the case of uniform power profile. Hence, the frequency selectivity influences the quality of the CIR EM guessing algorithm.

## 2. Channels with spatial correlation

In this subsection, we discuss the performance of MIMO OFDM systems with spatial (antenna) correlation. Following [20], we assume uniform linear antenna placement at both the transmitter and the receiver. The antenna correlation matrices  $\mathbf{R}_l$  and  $\mathbf{S}_l$  are given by

$$[\mathbf{R}_l]_{m,n} = \exp[-j.2.\pi.(n-m).d_T.\cos(\bar{\theta}_{T,l}) - \frac{(2.\pi.(n-m).d_T.\sin(\bar{\theta}_{T,l}).\sigma_{\theta_{T,l}})^2}{2}] \quad (52)$$

$$[\mathbf{S}_l]_{m,n} = \exp[-j.2.\pi.(n-m).d_R.\cos(\bar{\theta}_{R,l}) - \frac{(2.\pi.(n-m).d_R.\sin(\bar{\theta}_{R,l}).\sigma_{\theta_{R,l}})^2}{2}] \quad (53)$$

where  $[\mathbf{A}]_{m,n}$  denotes the  $(m,n)$ th element of matrix  $\mathbf{A}$ ;  $d_T$  denotes the transmitter antenna spacing normalized by carrier wavelength,  $\bar{\theta}_{T,l}$  denotes the mean angle of departure for each scatterer cluster at the transmitter;  $\sigma_{\theta_{T,l}}$  denotes the root-mean-square (RMS) of angle of departure at the transmitter; and  $d_R, \bar{\theta}_{R,l}$  and  $\sigma_{\theta_{R,l}}$  denote the corresponding variables at the receiver side. Considering an urban micro-cell scenario, we assume that all  $L$  paths follow the same spatial parameters as  $\bar{\theta}_{T,l} = 53$ ,  $\bar{\theta}_{R,l} = 18$ ,  $\sigma_{\theta_{T,l}} = 8$  and  $\sigma_{\theta_{R,l}} = 2$ ; we also let  $d_T = 4.0$  and  $d_R = 0.5$  [17] to reflect the situations that the antennas at base station are easier to sparsely place than the antennas at mobile devices. We study only the case of perfect CSI for uniform power and delay profile channel in the case of  $2 \times 2$  and  $4 \times 4$  systems. The results are plotted on figures 17 and 18. The capacity of correlated channels is clearly worse than those of non-correlated channels. The main result is the degradation exhibited by the performances of the suboptimum (SIC + LDPC) demodulator when compared to the case of non-correlated fading channels, particularly in the case of the  $4 \times 4$  system where it exhibits nearly 2.5 dB loss compared to the optimum MAP demodulator. The irregular LDPC code plus MAP demodulator still enables to work within 1 dB from the outage capacity in all the cases.

## VI. Conclusion

In this paper, we have considered the performance analysis of LDPC-coded MIMO OFDM systems for high data-rate wireless transmission. We developed a EM-based Maximum Likelihood algorithm for the soft

demodulator which interfaces with the LDPC channel decoder. Two versions are proposed : the MAP-EM demodulator and the suboptimum low-complexity SIC-EM demodulator. For the initial channel estimate we proposed two different EM-based algorithms. We found that the receiver employing a low-complexity linear minimum mean-square-error soft interference cancellation demodulator has limited performance loss in spatially uncorrelated channels but suffers extra performance loss in spatially correlated channels. Besides the simulation runs showed that the proposed EM based channel guessing algorithms always enable to work within 2-3 dB from the theoretical channel ergodic capacity. In outage MIMO OFDM channels, both the regular and irregular LDPC codes perform close to each other; however the irregular LDPC codes are helpful to expedite the convergence of iterative receiver.

## REFERENCES

- [1] J. G. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi element antennas", *Bell Labs Tech. J.*, vol. 2, pp. 41-59, Autumn 96.
- [2] G. D. Golden, J. G. Foschini, R. A. Valenzuela and P. W. Wolniansky, "Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture", *Electron. Lett.*, vol. 35, pp. 14-15, Jan. 99.
- [3] B. Hassibi, "An efficient square-root algorithm for BLAST", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, Istanbul, Turkey, June 5-9, 2000, pp. 737-740.
- [4] W. J. Choi, R. Negi and J. M. Cioffi, "Combined ML and DFE decoding for the V-BLAST system", in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun.*, June 18-22, 2000, pp. 1243-1248.
- [5] X. Li, H. Huang, G. J. Foschini, and R. A. Valenzuela, "Effects of iterative detection and decoding on the performance of BLAST", in *Proc. IEEE Globecom*, San Francisco, CA, 2000, pp. 1061-1066.
- [6] M. Sellathurai, S. Haykin, "TURBO-BLAST for Wireless Communications: Theory and Experiments", *IEEE Trans. on Sig. Process*, vol. 50, n°10, pp. 2538-2546, Oct. 2002.
- [7] P. Bender, P. Black, M. Grob, R. Padovani, N. Sindhushyana and S. Viterbi, "CDMA/HDR: A bandwidth efficient high speed wireless data service for nomadic users", *IEEE Commun. Mag.*, vol. 38, pp. 70-77, July 2000.
- [8] D. J. C. MacKay and R. M. Neal, "Near Shannon limit performance of low density parity check codes", *Electron. Lett.*, vol. 33, pp. 457-458, Mar. 97.
- [9] B. Lu, X. Wang, and K. R. Narayanan, "LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, n°1, pp. 74-88, Jan. 2002.
- [10] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels", *Eur. Trans. Telecommun.*, vol. 10, pp. 585-595, Nov-Dec 99.
- [11] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas", *Wireless Pers. Commun.*, vol. 6, pp. 311-315, Mar. 98.
- [12] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (Turbo) soft interference cancelation and decoding for coded CDMA", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 47, n°7, pp. 1046-1061, July 99.

- [13] C. N. Georghiades, and J. C. Han, "Sequence estimation in the presence of random parameters via the EM algorithm", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 45, n°3, pp. 300-308, March 97.
- [14] Y. Li, N. Seshadri, and L. Ariyavisitakul, "Channel estimation for OFDM systems with transmitter diversity in mobile wireless channel", *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 17, pp. 461-471, March 99.
- [15] Y. Li, "Optimum training sequences for OFDM systems with multiple transmit antennas", in *Proc. IEEE Globecom*, San Francisco, CA, 2000, pp. 1478-1482.
- [16] J. A. Fessler and A. O. Hero, "Space-alternating generalized expectation maximization algorithm", *IEEE Trans. on Sig. Process*, vol. 42, n°10, pp. 2664-2677, Oct. 94.
- [17] H. Bolcskei, D. Gesbert and A. J. Paulraj, "On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, n°2, pp. 225-234, Feb. 2002.

## Figures Caption

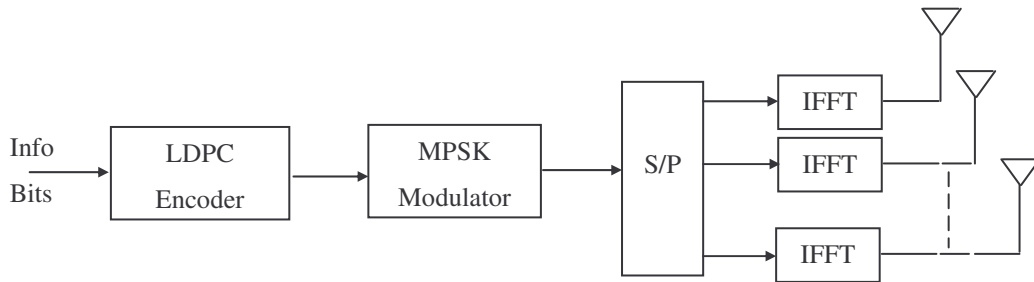


Fig 1. Transmitter structure of an LDPC-based STC-OFDM system with multiple antennas

Fig 1. Structure du système OFDM-STC avec codage LDPC et antennes multiples

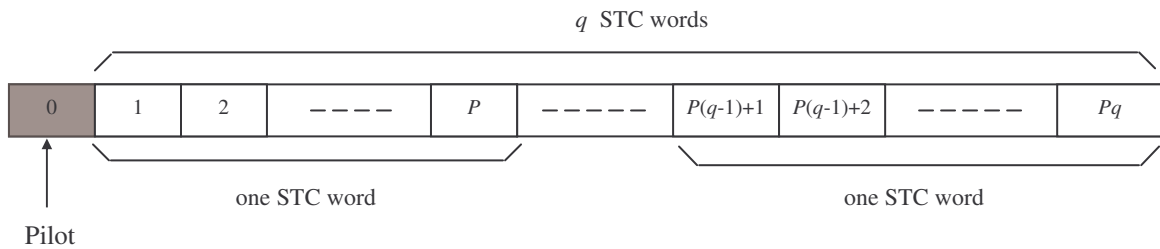


Fig 2. OFDM time slots allocation in data burst transmission

Fig 2. Structure des paquets OFDM

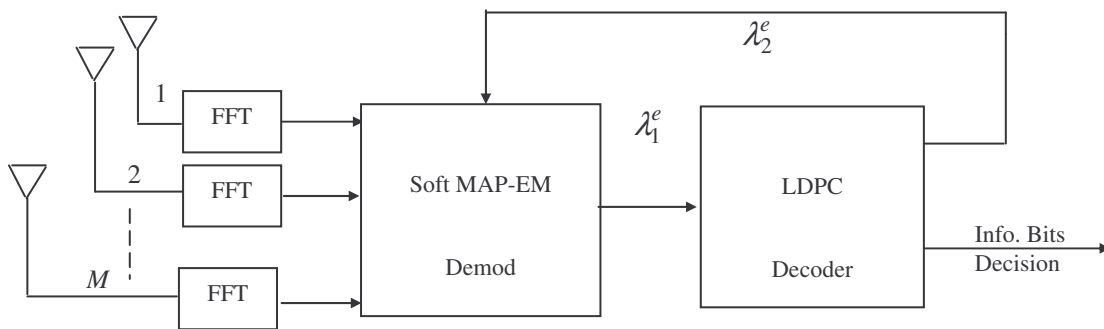


Fig 3. Turbo-receiver structure

Fig 3. Structure du turbo récepteur

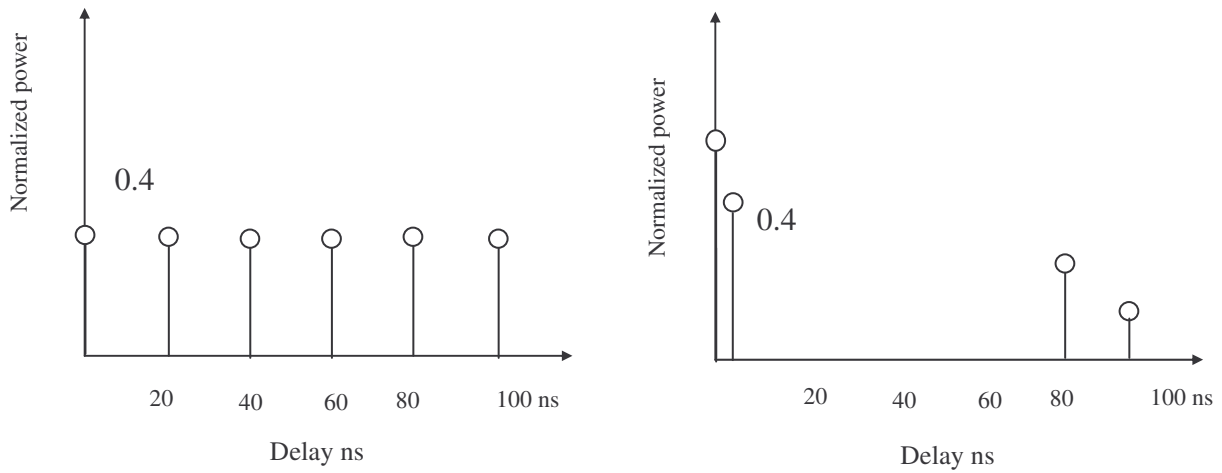


Fig 4 : Channel energy profile a) Uniform power, b) Hilly terrain profile

Fig 4 : Profils énergétiques des canaux a) équirépartition, b) distribution

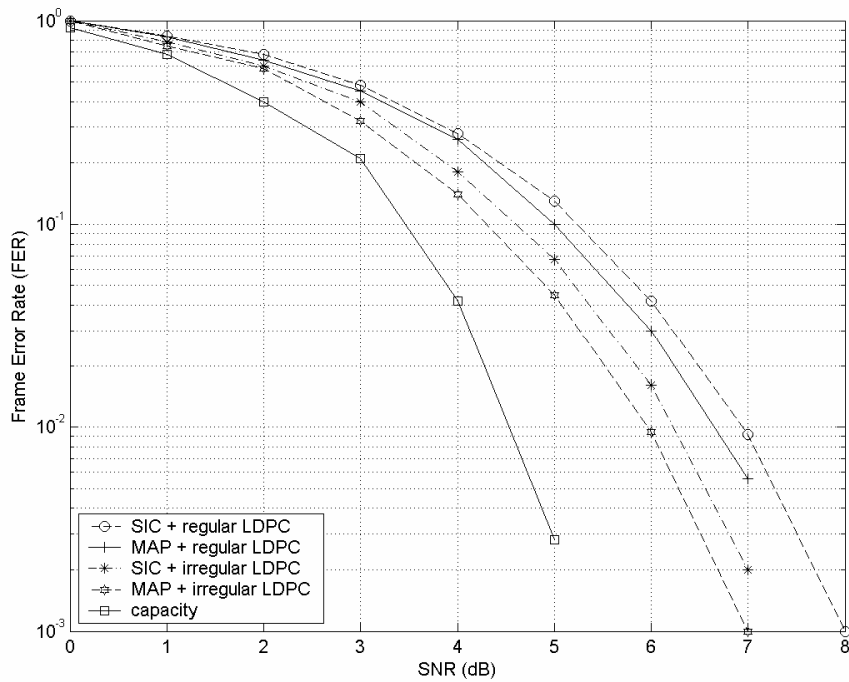


Fig. 5 : FER performance for outage  $1 \times 1$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (uniform power and delay profile, perfect CSI)



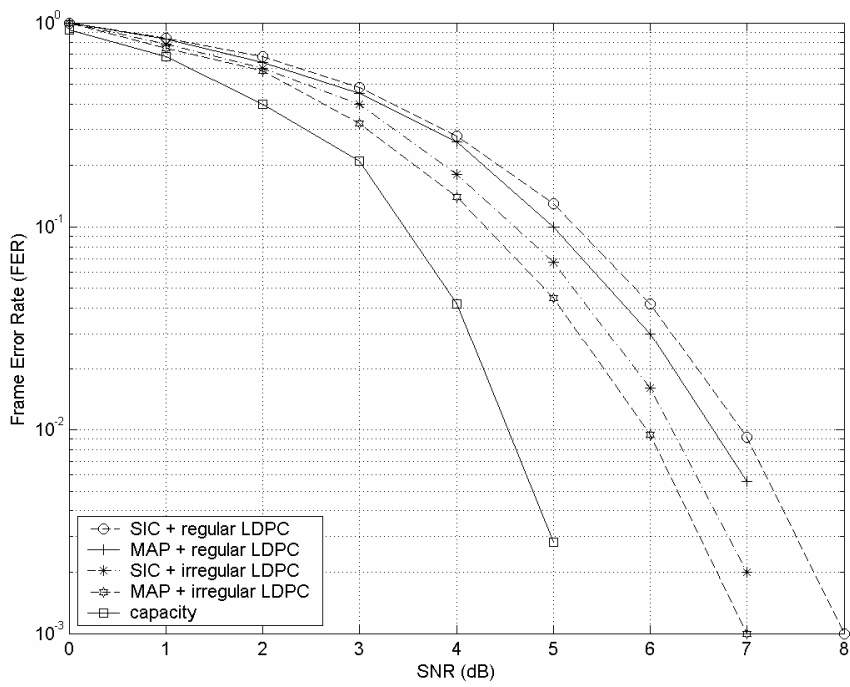


Fig. 6 : FER performance for outage  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (uniform power and delay profile, perfect CSI)

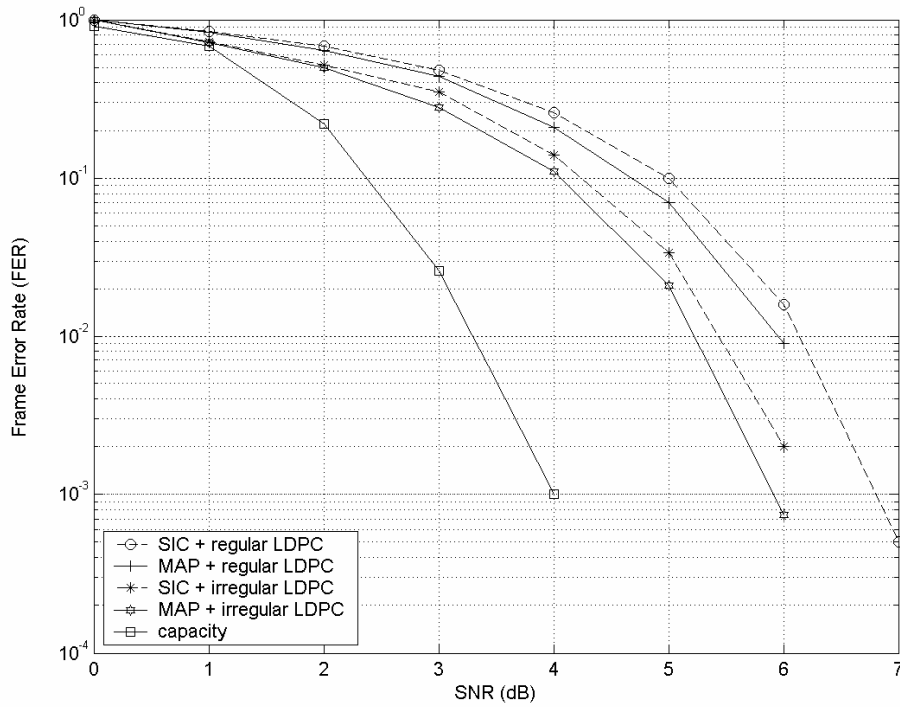


Fig. 7 : FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (uniform power and delay profile, perfect CSI)

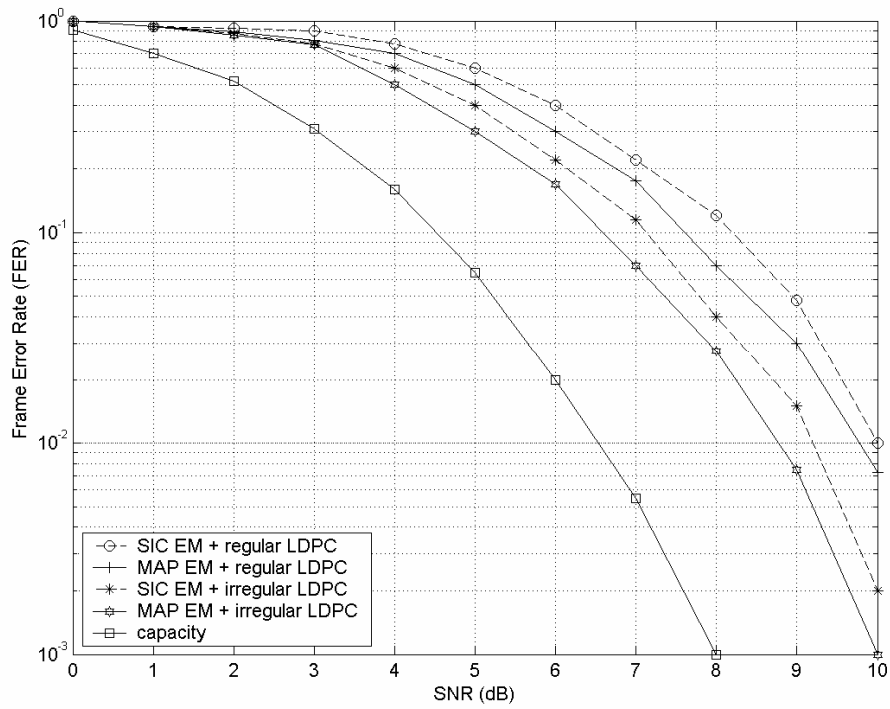


Fig. 8 : FER performance for outage  $1 \times 1$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (uniform power and delay profile)

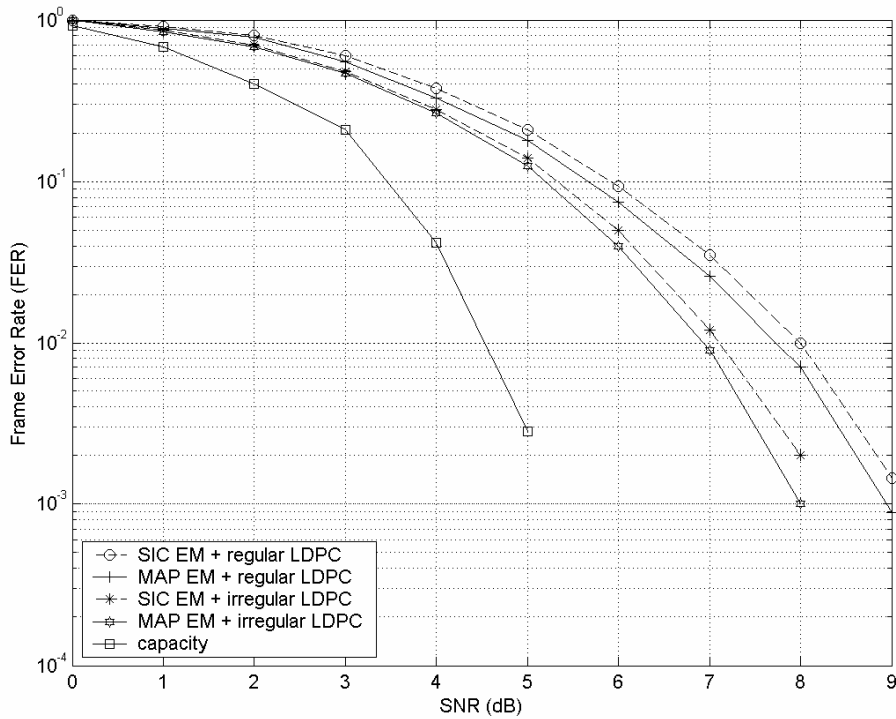


Fig. 9 : FER performance for outage  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (uniform power and delay profile)

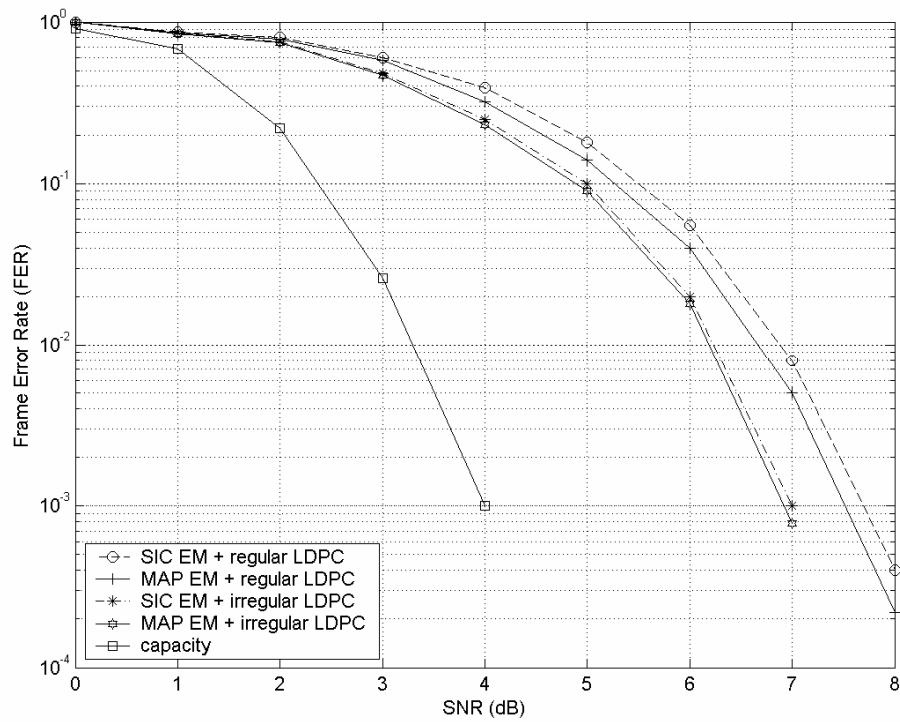


Fig. 10 : FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (uniform power and delay profile)

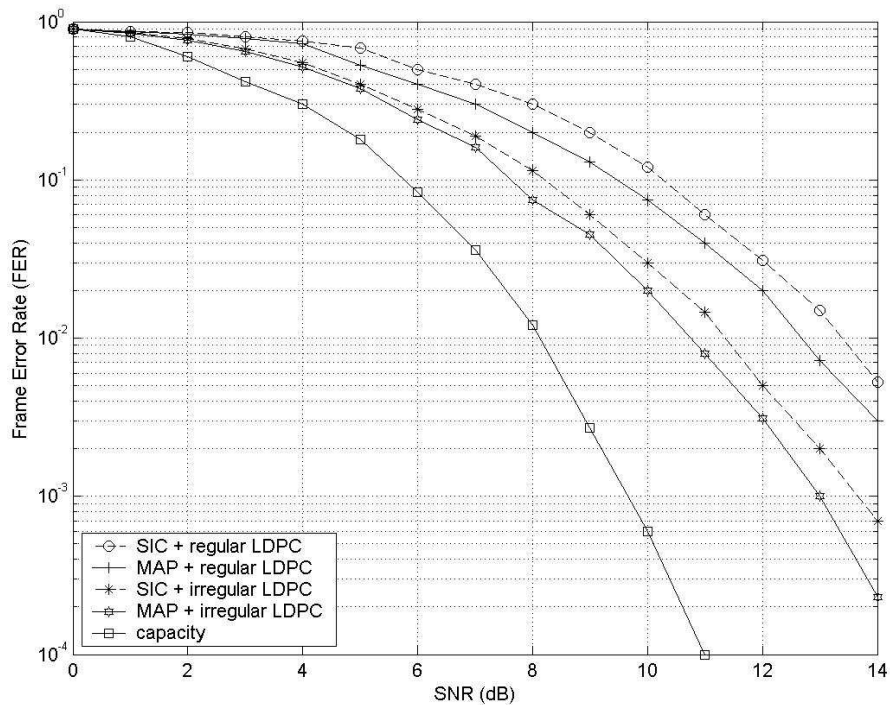


Fig. 11 : FER performance for outage  $1 \times 1$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (Hilly terrain profile, perfect CSI)

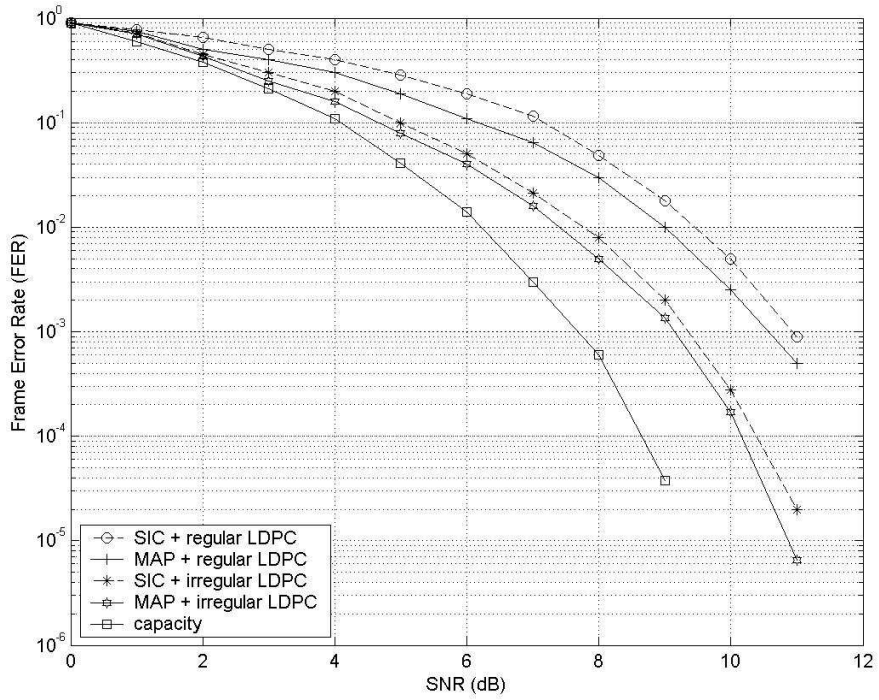


Fig. 12 : FER performance for outage  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (Hilly terrain profile, perfect CSI)

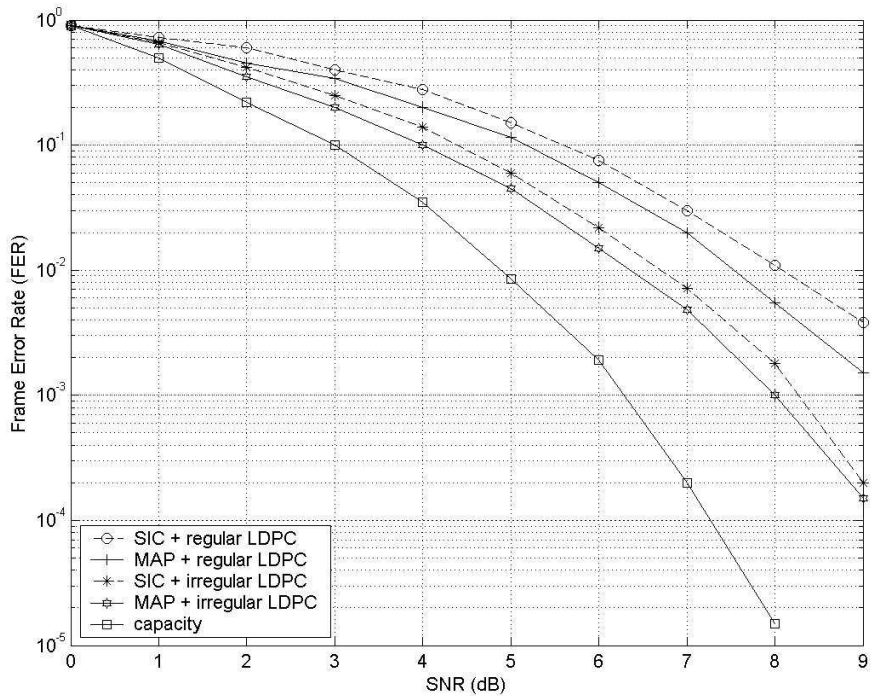


Fig. 13 : FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation (Hilly terrain profile, perfect CSI)

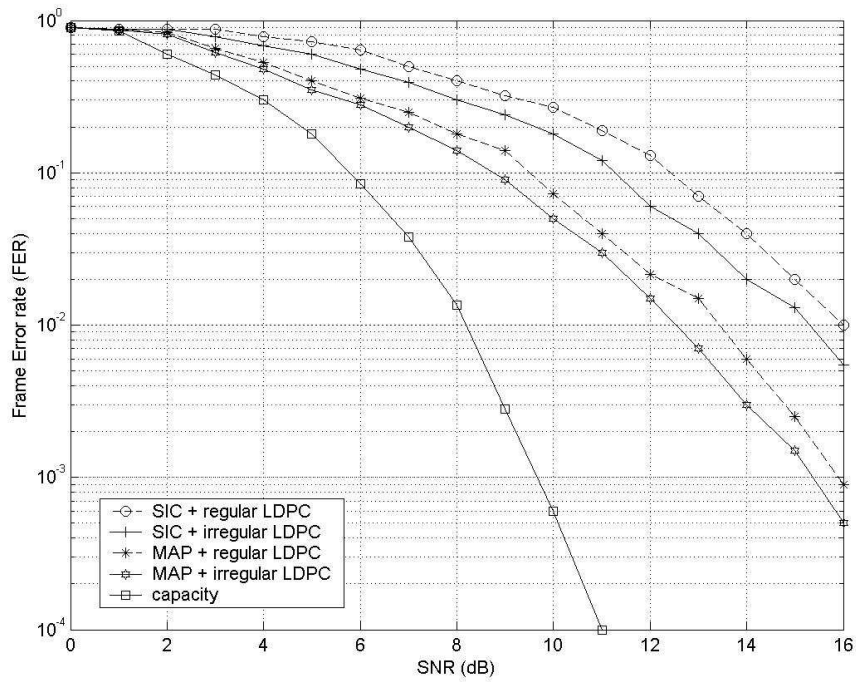


Fig. 14 : FER performance for outage  $1 \times 1$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (Hilly terrain profile)

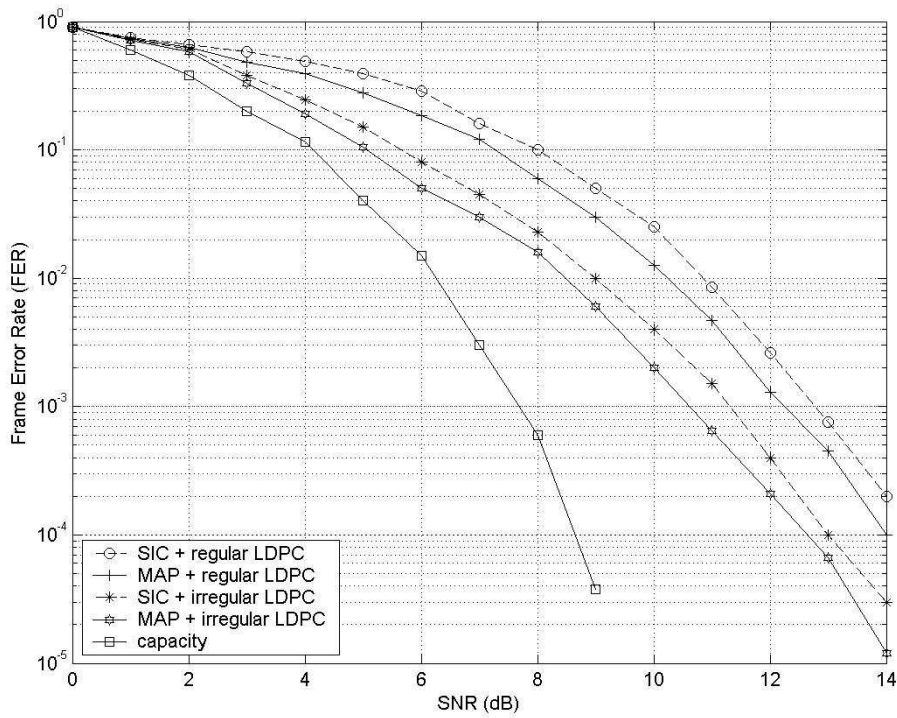


Fig. 15 : FER performance for outage  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (Hilly terrain profile)

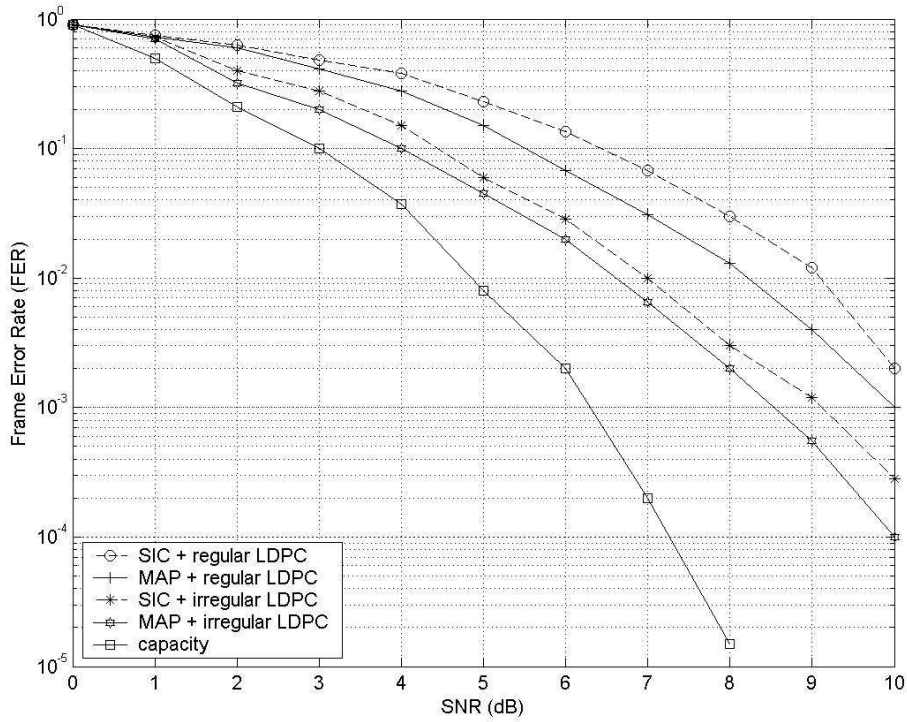


Fig. 16 : FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with no spatial correlation and EM-detection algorithm (Hilly terrain profile)

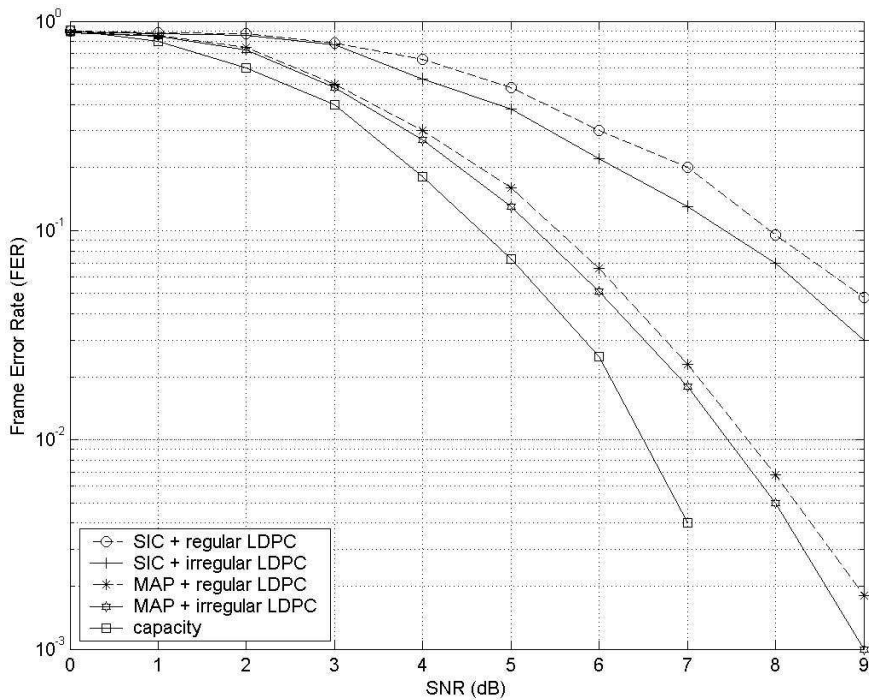


Fig. 17 : FER performance for outage  $2 \times 2$  MIMO OFDM channels with spatial correlation (uniform delay and power profile, perfect CSI)

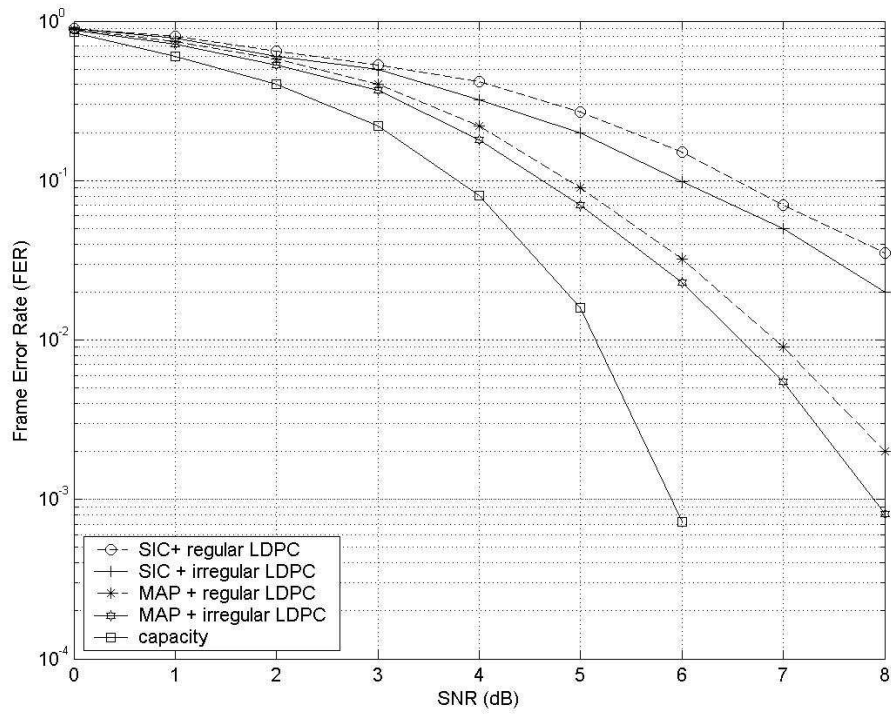


Fig. 18 : FER performance for outage  $4 \times 4$  MIMO OFDM channels with spatial correlation (uniform delay and power profile, perfect CSI)





## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Ce mémoire de thèse constitue un apport à la conception de nouveaux schémas de codage spatio-temporel. En effet, après avoir exposé les calculs théoriques de capacité d'un canal MIMO dans le premier chapitre et rappelé l'état de l'art actuel sur les codes spatio-temporels en treillis et en bloc dans les chapitres deux et trois, nous avons proposé dans le chapitre 4 des nouveaux codes en treillis basés sur des codes STBC pour le contexte de systèmes de transmission MIMO à trois antennes d'émission. Ces travaux de recherche constituent un prolongement des travaux de Jafarkhani avec les codes Super Orthogonal Space Time Trellis Codes (SOSTTC) principalement adaptés aux contextes des systèmes d'émission à deux ou quatre antennes. Nous avons montré que les codes synthétisés permettent, à complexité de treillis équivalente et par comparaison aux meilleurs codes STTC existants dans la littérature, des gains de l'ordre de 1 dB pour une modulation QPSK et de 0.5 dB pour une modulation 8-PSK. Cependant, ces gains sont obtenus en supposant une parfaite connaissance du canal de propagation en réception. Il est probable que les codes proposés présentant une extension de constellation (due par exemple à l'utilisation de matrices unitaires dans chaque état pour obtenir des codes à diversité maximale), leur sensibilité face à des erreurs d'estimation des paramètres du canal de propagation est plus grande que celle des codes SOSTTC. Cette quantification est une première piste pour une poursuite des travaux de cette thèse. Un autre domaine d'investigation qui doit être poursuivie concerne la recherche des matrices unitaires qui permettent de séparer les constellations entre elles. A l'heure d'aujourd'hui ces matrices sont obtenues par tirages aléatoire en cherchant à maximiser la valeur minimale du déterminant de la différence des matrices d'encodage pour des points appartenant à des sous-constellations différentes. Le critère du déterminant utilisé ici, n'est peut-être pas le seul applicable et une optimisation directe de la Pairwise Error Probability (PEP) est peut-être préférable. Pour corroborer cette affirmation nous pouvons citer en exemple le code temps-espace à base de matrice de transformée de Fourier que nous avons testé dans le même chapitre. Ce code présente des valeurs de déterminant minimum (pour la matrice différence des codes transmis) bien plus élevées que les codes quasi-orthogonaux que nous avons mis en avant dans ce chapitre. Pourtant, ces performances en termes de Frame Error Rate (FER) sont moins bonnes que celles des codes quasi-orthogonaux. Ceci semble bien confirmer que l'utilisation du critère du déterminant est intéressante pour les codes orthogonaux mais sous-optimale pour d'autres types de codes.

Nous avons ensuite utilisé les codes SOSTTC ainsi que nos codes quasi-orthogonaux pour trois antennes d'émission dans des schémas itératifs de détection avec concaténation parallèle ou série. Dans le cas de la concaténation parallèle, les fonctions de transfert EXIT charts ont montré que seuls les codes orthogonaux (SOSTTC) pouvaient présenter des effets turbo intéressants. En effet, pour les codes quasi-orthogonaux à trois antennes d'émission, il est nécessaire de ne pas poinçonner les symboles transmis pour conserver un effet turbo significatif car l'amplification des SNR en sortie des algorithmes log-MAP est faible. Cependant, dans le cas où il n'y a pas de poinçonnage, les performances obtenues restent très loin de la capacité *outage*.

Dans le cas des codes orthogonaux SOSTTC, leur convergence est plus rapide que celle des turbo-codes STTC proposés par Vucetic & al. Ceci est dû à un meilleur gain en diversité. Par contre, leurs performances restent très proches de celles des turbo-codes STTC et, dans le contexte de la transmission de paquets de faible taille, l'utilisation de la concaténation parallèle n'offre qu'un gain très marginal par rapport au code simple détecté par un algorithme de Viterbi. Nous avons cependant trouvé que l'utilisation de nos codes quasi-orthogonaux à grande diversité pouvait présenter un intérêt dans le cadre de la concaténation série avec les turbo-codes STTC de Vucetic. En effet, l'utilisation d'un entrelaceur supplémentaire entre les deux codes apporte un gain d'entrelacement très bénéfique pour les paquets de petite taille et l'utilisation d'un décodeur interne à diversité maximale capable d'échanger des informations extrinsèques avec le décodeur externe turbo STTC s'avère un choix judicieux comme le prouvent les résultats de simulation. En effet, pour des paquets de 150 symboles QPSK, nous montrons qu'il est possible de s'approcher de la capacité *outage* à 2.5 dB près (pour un FER de  $10^{-2}$ ). Ces performances sont largement supérieures à celles obtenues en concaténation parallèle sans poinçonnage alternatif des deux codeurs.

Pour pouvoir atteindre des efficacités spectrales importantes, il est nécessaire de pouvoir disposer d'un gain de multiplexage élevé en émission. On tombe alors sur le concept de transmissions en couches (layered) avec les schémas d'encodage horizontal et vertical. Le chapitre 6 traite des systèmes de transmission MIMO en couches avec des efficacités spectrales élevées. Nous proposons d'abord un système itératif (turbo) de complexité modérée qui permet d'éliminer efficacement les interférences en provenance des différentes antennes d'émission. Ce système est nommé turbo-BLAST. Il comprend un annuleur d'interférences souple basé suivi d'un filtrage MMSE qui interface avec des décodeurs de canal pour échanger les informations extrinsèques. La structure de ce détecteur est testée avec différents codeurs de canal : codes convolutifs et codes LDPC. Nous montrons que l'utilisation de codes LDPC irréguliers avec un profil optimisé permet d'obtenir d'excellentes performances. En effet, pour un système à cinq antennes d'émission présentant en QPSK une efficacité spectrale de 5 bits/s/Hz et pour des paquets de taille égale à 150 symboles, nous arrivons au bout de dix itérations entre l'annuleur d'interférences et les décodeurs LDPC à 1.5 dB de la capacité limite *outage*. Ce qui constitue une performance remarquable. Les performances sont grandement diminuées avec l'utilisation de codes convolutifs : en effet, un code (5,7) permet au bout de six itérations de fonctionner à 4 dB de la capacité limite *outage*. Par contre, il faut signaler que la borne d'annulation parfaite d'interférences (obtenue lorsque les signaux interférents sont parfaitement estimés et retranchés du signal en réception) est toujours atteinte à forts SNR, ce qui prouve l'efficacité du turbo-annuleur d'interférences.

Nous avons alors proposé un système d'émission en couches original à base d'encodage horizontal qui utilise les codes temps-espace quasi-orthogonaux que nous avons synthétisés au chapitre 4. Ce système est basé sur une annulation dure d'interférences et est donc plus simple en termes de complexité que le système turbo BLAST. Cependant, nous montrons qu'il présente des performances très intéressantes. En effet, nous sommes capables d'atteindre la borne d'annulation parfaite d'interférences à 1 dB près à forts SNR et nous sommes alors à 2.8 dB de la capacité *outage* limite.

Un extension naturelle de ces travaux consisterait à inclure les algorithmes de détection des paramètres du canal de propagation à l'intérieur du dispositif à turbo-annulation d'interférences. L'idée est d'obtenir un dispositif turbo complet qui itère également sur la détection des paramètres du canal. L'algorithme Expectation Maximization (EM) est maintenant reconnu comme étant un auxiliaire précieux pour ce genre de situations. Il resterait à adapter son utilisation au contexte turbo-BLAST proposé dans ce chapitre.

Quelques idées sont déjà fournies avec un article des Annales des Télécommunications publié en juillet 2005 que nous joignons à la fin du chapitre 6.

Une autre piste qui fait l'objet d'études actuellement au sein de notre groupe de recherche consisterait à traiter, uniquement dans le contexte OFDM, les algorithmes d'annulation d'interférences et à étudier l'impact de la synchronisation fréquentielle sur les performances de l'algorithme. En effet, nous nous sommes toujours abrités derrière le contexte OFDM pour justifier du choix de canaux non-sélectifs en fréquence. Ceci est évidemment vérifié mais il faut bien comprendre que les systèmes OFDM sont très sensibles aux problèmes de synchronisation. Ce type d'étude fait aussi suite aux travaux de thèse présentés par Mr Pierre-Jean Bouvet à l'INSA de Rennes en décembre 2005.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, “Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo codes”, in *Proc. 1993 Inter. Conf. Commun.*, pp. 1064-1070, 1993.
- [2] R. G. Gallager, *Low Density Parity Check Codes*, MIT Press, Cambridge, Massachusets, 1963.
- [3] D. C. MacKay, “Near Shannon limit performance of low density parity check codes”, *Electronics Letters*, vol. 32, pp. 1645-1646, Aug. 1966.
- [4] C. E. Shannon, “ A mathematical theory of communication”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379-432 (Part one), pp. 623-656 (Part two), Oct. 1948, reprinted in book form, University of Illinois Press, Urbana, 1949.
- [5] G. J. Foschini and M. J. Gans, “On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas”, *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, 1998.
- [6] E. Telatar, “Capacity of multi-antenna Gaussian channels”, *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10, no. 6, pp. 585-595, Nov./Dec. 1999.
- [7] J. Winters, “On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 5(5), pp. 871–878, June 1987.
- [8] W. Hirt and J. L. Massey, “Capacity of the discrete-time gaussian channel with intersymbol interference”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34(3), pp. 380–388, May 1988.
- [9] I. Telatar and D. Tse, “Capacity and mutual information of wideband multipath fading channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46(4), pp.1384–1400, July 2000.

- [10] G. J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communications in a fading environment when using multiple antennas", *Bell Labs. Tech. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 41-59, 1996.
- [11] A. R. Calderbank, "The art of signaling : Fifty years of coding theory", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44(6), pp. 2561–2595, October 1998.
- [12] G. G. Raleigh and V. K. Jones, "Multivariate modulation and coding for wireless communication", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 17(5), pp. 851–866, May 1999.
- [13] S. Sandhu and A. Paulraj, "Space-time coding for the parametric fading channel", *Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Asilomar'98*, vol. 1, pp. 774–779, November 1998.
- [14] S. Sandhu and A. Paulraj, "Space-time coding for the parametric fading channel – capacity", *Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Asilomar'99*, vol. 2, pp. 1535–1540, October 1999.
- [15] J. B. Andersen, "Array gain and capacity for known random channels with multiple element arrays at both end", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 18(11), pp. 2172–2178, November 2000.
- [16] J. B. Andersen, "Antenna arrays in mobile communications : Gain ; diversity, and channel capacity", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol 42(2), pp. 12–16, 2000.
- [17] A. Scaglione, "Statistical analysis of the capacity of MIMO frequency selective Rayleigh fading channels with arbitrary number of inputs and outputs", *IEEE International Symposium on Information Theory, ISIT'02*, p. 278, Lausanne, SWITZERLAND, June 2002.
- [18] M. Skoglund and G. Joengren, "On the capacity of a multiple-antenna communication link with channel side information", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21(3), pp. 395–405, April 2003.

- [19] S. Sandhu and A. Paulraj, "Space-time block codes : A capacity perspective", *IEEE Communications Magazine*, vol. 4(12), pp. 384–386, December 2000.
- [20] H. Bölcskei and A. Paulraj, "On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'00*, vol. 5, pp. 2569–2572, Istanbul, Turkey, June 2000.
- [21] H. Bölcskei, D. Gesbert, and A. Paulraj, "On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50(2), pp. 225–234, February 2002.
- [22] L. Zheng and D. Tse, "Diversity and multiplexing: A fundamental tradeoff in multiple antenna channels", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49(5), pp. 1073–1096, May 2003.
- [23] P. Driessen, G. Foschini, "On the capacity for multiple input-multiple output wireless channels: a geometric interpretation", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 2, pp. 173–176, Feb. 1999.
- [24] D. S. Shiu, G. Foschini, M. Gans and J. Kahn, "Fading correlation and effect on the capacity of multielement antenna systems", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 3, pp. 502–512, March 2000.
- [25] S. Loyka, "Channel capacity of MIMO architecture using the exponential correlation matrix", *IEEE Communications Letters*, vol. 5(9), pp. 369–371, September 2001.
- [26] S. Loyka, "Estimating MIMO system performance using the correlation matrix approach", *IEEE Communications Letters*, vol. 6(1), pp. 19–21, January 2002.
- [27] C. Chuah, D. N. C. Tse, J. M. Kahn, and R. A. Valenzuela, "Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48(3), pp. 637–650, March 2002.
- [28] T. L. Marzetta and B. M. Hochwald, "Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45(1), pp. 139–157, January 1999.

- [29] B. M. Hochwald and T. L. Marzetta, "Unitary space-time modulation for multiple antenna communications in Rayleigh flat fading", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46(2), pp. 543–564, March 2000.
- [30] L. Zheng and D. Tse, "Communication on the grassmann manifold : A geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48(2), pp. 359–383, February 2002.
- [31] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [32] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, New York, Academy Press, 1980.
- [33] D. Chizhik, F. Rashid-Farrokhi, J. Ling and A. Lozano, "Effect of antenna separation on the capacity of BLAST in correlated channels", *IEEE Commun. Letters*, vol. 4, no. 11, pp. 337-339, Nov. 2000.
- [34] W. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, IEEE Press, 1993.
- [35] N. Milosavljevic, *Adaptive Space-Time Block Codes*, Final Year Project, The University of Belgrade, 2002.
- [36] V. Tarokh, N. Seshadri and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction", *IEEE Trans. Inform Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.
- [37] J. G. Proakis, "Digital communications", 4<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
- [38] T. S. Rappaport, "Wireless Communications: Principles and Practice", Prentice Hall, 1996.
- [39] M. K. Simon and M.-S. Alouini, "Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis", John Wiley & Sons, 2000.
- [40] Z. Liu, G. B. Giannakis, S. Zhuo and B. Muquet, "Space-time coding for broadband wireless communications", *Wireless Comm. And Mobile Computing*, vol. 1, no. 1, pp. 35-53, Jan. 2001.

- [41] R. A. Horn and C. R. Johnson, “Matrix Analysis”, New York, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [42] A. Papoulis, “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes”, Third Edition, McGraw Hill.
- [43] Z. Chen, J. Yuan and B. Vucetic, “An improved space-time trellis coded modulation scheme on slow Rayleigh fading channels”, *Proc. IEEE ICC’01*, Helsinki, Finland, pp. 1110-1116, Jun. 2001.
- [44] S. M. Alamouti, “A simple transmit diversity technique for wireless communication”, *IEEE Journal Select. Areas Commun.*, vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, Oct. 1998.
- [45] V. Tarokh, A. Naguib, N. Seshadri and A. R. Calderbank, “Space-time block codes from orthogonal designs”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456-1467, July 1999.
- [46] S. Baro, G. Bauch and A. Hansmann, “Improved codes for space-time trellis-coded modulation”, *IEEE Comm. Letters*, vol. 4, pp. 20-22, Jan. 2000.
- [47] G. Ungerboeck, “Channel coding for multilevel/phase signals”, *IEEE Trans. On Information Theory*, 28(1), pp. 55–67, Jan. 1982.
- [48] E. Biglieri, D. Divsalar, P. J. McLane and M. K. Simon, “Introduction to Trellis Coded Modulation with Applications”, Prentice Hall, 1992
- [49] Q. Yan and R. S. Blum, “Improved space-time convolutional codes for quasi-static fading channels”, *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 1(4), pp. 563-571, Oct. 2002.
- [50] D. Aktas and M. P. Fitz, “Distance spectrum analysis of space-time trellis-coded modulations in quasi-static Rayleigh-fading channels”, *IEEE Trans. on Information Theory*, 49(12), pp. 3335-3344, Dec. 2003.
- [51] H. Jafarkhani, N. Seshadri, “Super-Orthogonal Space-Time Trellis Codes”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 4, pp.937-951, April 2003.



- [52] S. Siwamogsatham and M. P. Fitz, "Improved high rate space-time codes via expanded STBC-MTCM constructions" *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory (ISIT)*, Lausanne, Switzerland, p.106, June/july 2002.
- [53] B. Vucetic, J. Yuan, "Space-Time Coding", *Wiley Editions*, 2004.
- [54] H. Jafarkhani, N. Hassanpour, "Super-Quasi-Orthogonal Space-Time Trellis Codes for Four Transmit Antennas", *IEEE Trans. Wir. Comm.*, vol. 4, no. 1, pp. 215-227, Jan. 2005.
- [55] H. Jafarkhani, "A quasi-orthogonal space-time block code", *IEEE Trans. Comm.*, vol. 49, no. 1, pp. 1-4, Jan. 2001.
- [56] S. Alamouti, V. Tarokh and P. Poon, "Trellis-coded modulation and transmit diversity: design criteria and performance evaluation", *IEEE International Conference on Universal Personal Communication (ICUPC-98)*, pp. 917-920, 1998.
- [57] S. Siwamogsatham and M. P. Fitz, "Improved high rate space-time codes via orthogonality and set partitioning", *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, 1, pp. 264–270, Mar. 2002.
- [58] Y. Jing and B. Hassibi, "Three transmit antenna space-time codes based on  $SU(3)$ ", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 10, pp. 3688-3702, Oct. 2005.
- [59] M. Janani and A. Nosratinia, "Generalized Block Space-Time trellis Codes: Set-partitioning and Code Design", *IEEE Wireless Comm. and Networking Conference (WCNC) 2005*, New-Orleans, March 2005.
- [60] Z. Chen, B. Vucetic, J. Yuan and K. Lo, "Space-time trellis coded modulation with three and four antennas on slow fading channels", *IEEE Commun. Letters*, vol. 6, no. 2, pp. 67-69, Feb. 2002.
- [61] Z. Chen, J. Yuan and B. Vucetic, "Improved space-time trellis coded modulation scheme on slow Rayleigh fading channels", *IEEE Electron. Letters*, vol. 37, no. 7, pp. 440-442, Apr. 2001.

- [62] Y. Xin, Z. Wang and G. B. Giannakis, "Space-time Diversity Systems Based on Linear Constellation Precoding", *IEEE Trans. Wir. Comm.*, vol. 2, no. 2, pp. 294-308, March. 2003.
- [63] S. ten Brink, "Convergence of iterative decoding", *Electron. Lett.*, vol. 35, no. 13, pp. 806-808, May 24<sup>th</sup> 1999.
- [64] D. Divsalar, S. Dolinar and F. Pollara, "Iterative turbo decoder analysis based on density evolution", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol .9, pp. 891-907, May 2001.
- [65] W. Firmanto, B. Vucetic, J. Yuan and Z. Chen, "Space-time Turbo Trellis Coded Modulation for Wireless Data communications", *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2002, no. 5, pp. 459-470, May 2002.
- [66] D. Tujkovic, "Recursive space-time trellis codes for turbo coded modulation", *Proc. of Globecom 2000*, San-Francisco.
- [67] D. Divsalar and F. Pollara, "Turbo codes for PCS applications", *Proc. ICC'95 Seattle*, WA, pp. 54-59, June 95.
- [68] G. D. Golden, G. J. Foschini, P. W. Wolnianski, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST: A high capacity space-time architecture for the rich-scattering wireless channel", *Proceedings of the International Symposium on Advanced Radio Technologies*, Boulder (CO), USA, September 10 1998.
- [69] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel", *Proceedings of the URSI International Symposium on Signal, Systems and Electronics (ISSSE)*, pp. 295–300, Pisa, Italy, September 29 - October 2 1998.
- [70] X. Li, H. Huang, G. J. Foschini, and R. A. Valenzuela, "Effects of iterative detection and decoding on the performance of BLAST", *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom)*, vol. 2, pp. 1061–1066, San Francisco (CA), USA, November 27 - December 3 2000.

- [71] M. Sellathurai and S. Haykin, "Turbo-BLAST for high speed wireless communications", *Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC 2000)*, pp. 315-320, Sept. 2000.
- [72] M. Sellathurai and S. Haykin, "Turbo-BLAST for Wireless Communications: Theory and Experiments", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 10, pp. 2538-2546, Oct. 2002.
- [73] G. D. Golden, C. J. Foschini, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolniansky, "Detection algorithm and initial laboratory results using v-blast space-time communication architecture", *Electronic Letters*, 35(1), pp. 14-15, January 1999.
- [74] S. Ariyavisitakul, "Turbo space-time processing to improve wireless channel capacity", *Proceedings of the IEEE International Conference on Communications (ICC)*, vol. 3, pp. 1238-1242, Hyderabad, India, June 2000.
- [75] W. J. Choi, R. Negi and J. M. Cioffi, "Combined ML and DFE decoding for the V-BLAST system", in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun.*, pp. 1243-1248, June 18-22, 2000.
- [76] C. Hermosilla, L. Szczecinski, "Turbo receivers for narrow-band MIMO systems", *IEEE International Conference on Communication Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP 2003)*, Hongkong, pp. 421-424, 6-10 Apr. 2003.
- [77] M. A. Khalighi, J. Boutros, "Channel Estimation in Turbo-BLAST Detectors using EM Algorithm", *IEEE International Conference on Communication Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP 2005)*, Philadelphie, pp. 1037-1040, Mar. 2005.
- [78] B Lu, Xiaodong Wang, K.R. Narayanan, "LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels: Performance analysis and receiver design", *IEEE Trans. Comm.*, vol. 50, no. 1, pp.74-88, Jan. 2002.
- [79] B. Lu, Guosen Yue, Xiaodong Wang. "Performance analysis and design optimization of LDPC-coded MIMO OFDM systems", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 348-361, Feb. 2004.

- [80] A. R. Hammons and H. El Gamal, "Space-time codes: New design criteria and general constructions", *Proceedings of the Sixth Annual Workshop on Smart Antennas in Wireless Mobile Communications*, Stanford University (CA), USA, July 22-23 1999.
- [81] D. Shiu and J. M. Kahn "Scalable layered space-time codes for wireless communications: Performance analysis and design criteria", *IEEE Proceedings of Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, vol. 1, pp 159–163, New Orleans (LA), USA, September 21-24 1999.
- [82] B. A. Bjerke and J. G. Proakis "Multiple antenna diversity techniques for transmission over fading channels", *IEEE Proceedings of Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, vol. 3, pp 1038–1042, New Orleans (LA), USA, September 21-24 1999.
- [83] G. J. Foschini, G. D. Golden, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolnianski, "Simplified processing for wireless communication at high spectral efficiency", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(11):1841–1852, November 1999.
- [84] G. Ginis and J. M. Cioffi, "On the relation between V-BLAST and the GDFE", *IEEE Communications Letters*, 5(9):364–366, September 2001.
- [85] C. Tidestav, A. Ahlen, and M. Sternad, "Realizable MIMO decision feedback equalizers: Structure and design", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(1):121–133, January 2001.
- [86] M. O. Damen, K. Abed-Meraim, and S. Burykh, "Iterative QR detection for BLAST", *Wireless Personal Communications*, 19(3):179–192, December 2001.
- [87] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (Turbo) soft interference cancelation and decoding for coded CDMA", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 47, no. 7, pp. 1046-1061, July 1999.
- [88] M. J. Syed, "Transmission multiple porteuses utilisant un codage détecteur/correcteur d'erreur de type LDPC (Low Density Parity Check) sur canaux MIMO", Thèse de l'Université de Limoges, Mai 2005.
- [89] M. Tao and R. S. Cheng, "Generalized layered space-time codes for high data rate wireless communications," *IEEE Trans. Wir. Comm.*, vol. 3, pp. 1067-1075, July 2004.



## NOTATIONS ET ACRONYMES

---

8-PSK	8 - Phase Shift Keying
APP	A Posteriori Probability
ARQ	Automatic Retransmission reQuest
ASI	Annulation Successives d'Interférences
ASIO	Annulation Successive d'Interférences Ordonnée
AWGN	Average White Gaussian Noise
BLAST	Bell Laboratories Layered Space-Time
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CCDF	Complementary Cumulative Distribution Function
CDC	Code Design Criteria
CDF	Cumulative Distribution Function
CDM	Codeword Distance Matrix
CSI	Channel State Information
D-BLAST	Diagonal – BLAST
DMMT	Discrete Matrix Multi Tone
EM	Expectation Maximization
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
ERD	Egaliseur à Retour de Décision
FER	Frame Error Rate
GPS	Global Position Satellite
GSM	Global System Mobile
H-BLAST	Horizontal – BLAST
IC	Interference Cancelling
IES	Interférences entres Symboles
IS	Interference Suppression
ISI	Inter Symbols Interference
LDPC	Low Density Parity Check
LLR	LogLikelihood Ratio
LOS	Line Of Sight

LST	Layered Space Time
MAP	Maximum A Priori
MC-CDMA	Multi Carrier – Code Division Multiple Access
MIMO	Multiple Input Multiple Output
minCGD	Minimum Cumulative Gain Distance
ML	Maximum Likelihood
MRC	Maximum Ratio Combining
MTCM	Multiple Trellis Coded Modulation
MV	Maximum de Vraisemblance
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PDA	Personal Digital Assistant
PEP	Pairwise Error Probability
PIC	Perfect Interference Cancellation
QPSK	Quaternary Phase Shift Keying
RMS	Root Mean Square
SISO	Single Input Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio
SOSTTC	Super Orthogonal Space Time Trellis Code
SQOHLSTTC	Super Quasi Orthogonal Horizontal Layered Space Time Trellis Code
SQOSTTC	Super Quasi Orthogonal Space Time Trellis Code
STBC	Space Time Bloc Code
STBDFT	Space Time Bloc Discrete Fourier Transform
STC	Space Time Coding
STTC	Space Time Trellis Code
SVD	Single Value Decomposition
TCM	Trellis Coded Modulation
TDMA	Time Division Multiple Access
V-BLAST	Vertical - BLAST
ZF	Zero Forcing

## RESULTATS DE PUBLICATIONS

---

### Reuves internationales avec comité de lecture [RI]

- RI-1: G. R. MOHAMMAD-KHANI, **G. FERRE**, J.P. CANCES, and V. MEGHDADI, "Maximum Likelihood Decoding Rules for STBC : Generalized Framework for Detection and Derivation of accurate Upperbounds", *Annals of Telecommunications*, vol. 59, n° 9-10, pp. 1228-1240, Octobre 2004.
- RI-2: **G. FERRE**, M. J. SYED , J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS, "LDPC-Based Space-Time Coded OFDM Systems : Turbo-EM Receiver Design with Channel State Information Guessing Algorithms", *Annals of Telecommunications*, vol. 60, n° 5-6, pp. 770-795, Juin 2005.
- RI-3: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS "Building Space-Time Trellis Codes by Set-Partitioning : (Turbo) Super Orthogonal Space Time Trellis Codes", accepté pour publication dans la revue *Mediterranean Journal of Electronics and Communications*, Vol.1, n°1, 2005, pp. 35-42, Septembre 2005.
- RI-4: G. R. MOHAMMAD-KHANI, **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J. M. DUMAS, "Derivation of Accurate Upperbounds for STBC Maximum Likelihood Decoding", *IEE Proceedings Circuits, Devices & Systems*, Vol. 153, Issue 4, pp. 307-314, August 2006.
- RI-5: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J. M. DUMAS, "STBC based (Turbo) Codes built by Set Partitioning for Three Transmit Antennas: Construction and Performances", *IEEE Transaction on Wireless Communications*, parution Novembre 2006.

### Communications internationales invitées [CII]

- CII-1: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS "(Invited) Building Space-Time Trellis Codes by Set-Partitioning: (Turbo) Super Orthogonal Space Time Trellis Codes", à ISCCSP 2006 (Second International Symposium on Control, Communications and Signal Processing), Session Advanced techniques for mobile radiocommunications: paper n°2, Marrakech, Maroc, 13-15 Mars 2006.

### Congres internationaux avec actes et comités de lecture [CI]

- CI-1: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and G. R. MOHAMMADKHANI, "Super-Orthogonal Space-Time Trellis Codes together with Blind Channel Identification Algorithm based on Symmetric Noise Subspace", *IEEE Int. Symp. Communications Systems, Networks and Digital Processing (CSNDSP 2004)*, pp. 221-224, Newcastle, Juillet 2004.



- CI-2: V. MEGHDADI, **G. FERRE**, J.P. CANCES and G. R. MOHAMMADKHANI, "New Accurate Upperbounds for Maximum Likelihood Decoder of STBC", IEEE Int. Symp. Communications Systems, Networks and Digital Processing (CSNDSP 2004), pp. 148-152, Newcastle, Juillet 2004.
- CI-3: G. R. MOHAMMADKHANI, **G. FERRE**, J.P. CANCES and V. MEGHDADI, "Accurate Upperbounds Derivation for Maximum Likelihood STBC Decoder", 2nd International Symposium on Image/Video Communications over Fixed and Mobile Networks (ISIVC 2004), pp. 77-82, Brest, Juillet 2004.
- CI-4: **G. FERRE**, J.P. CANCES and V. MEGHDADI, "Super-Orthogonal Space-Time Trellis Codes together with Blind Channel Identification Algorithm ", 2nd International Symposium on Image/Video Communications over Fixed and Mobile Networks (ISIVC 2004), pp. 83-87, Brest, Juillet 2004.
- CI-5: M. J. SYED, **G. FERRE**, J.P. CANCES and V. MEGHDADI, "Performances of LDPC based multiuser space frequency diversity system design for uplink multicarrier CDMA", IEEE Ninth International Conference on Communication Systems (ICCS-2004), pp. 655-659, Singapour, 6-8 Septembre 2004.
- CI-6: M. J. SYED, **G. FERRE**, J.P. CANCES and V. MEGHDADI, "Performances of LDPC based multiuser space time diversity system for uplink multicarrier CDMA", IEEE International Conference Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS-2004), pp. 486-491, Seoul, 18-19 Novembre 2004.
- CI-7: M. J. SYED, **G. FERRE**, J.P. CANCES and V. MEGHDADI, "Multiuser space time diversity system design for uplink multicarrier CDMA", IEEE International Conference on Signal Processing and Communications (SPCOM-2004), pp. 269-274, Bangalore, 11-14 Décembre 2004.
- CI-8: M J. SYED, V. MEGHDADI, **G. FERRE**, J.P. CANCES, J.M. DUMAS and G.R.M. KHANI, "Multi-user detection in OFDM space time block code for high rate uplink application", IEEE Wireless Communications & Networking Conference (WCNC 2005), CD ROM, ISBN 0-7803-8967-0, Page 20, New-Orleans USA, 13-17 Mars 2005.
- CI-9: V. MEGHDADI, A. SAEMI, J.P. CANCES, M.J. SYED, **G. FERRE** and J.M. DUMAS, "Improving frequency synchronization by means of new correlation criteria for fine time synchronization in MIMO systems", Proc. 47<sup>th</sup> Int. Symp. ELMAR-2005 on Multimedia systems and applications, pp.283-286, Zadar, Croatie, 08-10 Juin 2005.
- CI-10: A. SAEMI, **G. FERRE**, M. J. SYED, V MEGHDADI, J.P. CANCES and J.M. DUMAS "Fine Timing and Frequency Synchronization for MIMO Systems" accepté pour publication à IST Conference, Dresde, Juin 2005.
- CI-11: **G. FERRE**, M.J. SYED, V. MEGHDADI, J.P. CANCES and J.M. DUMAS, "Performances of turbo sage based equalizer for multiuser multicarrier space time

block coded system”, 13th European Signal Processing Conference 2005 (EUSIPCO 2005), , CDROM, ISBN 975-00188-0-X, Session : Signal Processing for Communications, Antalya, Turquie, 4-8 Septembre 2005.

- CI-12: **G. FERRE**, M. J. SYED, V. MEGHDADI, CANCES J.P. "A new Transmit Preprocessing Technique for Multiuser MIMO Downlink Communications" 11<sup>th</sup> IEEE European Wireless 2005, pp. 451-456, Chypre, Avril 2005.
- CI-13: **G. FERRE**, M. J. SYED, V MEGHDADI, J.P. CANCES and J.M. DUMAS "Turbo EM Based Equalization for Multi-User Multi-Carrier Space Time" IEEE Malaysia International Conference on Communications and IEEE International Conference on Networks (MICC & ICON 2005), CDROM, ISBN 1-4244-0001-5, Kuala Lumpur, Malaisie, Novembre 2005.
- CI-14: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS, "STBC based STTC codes optimized designs for three transmit antenna systems", 5<sup>th</sup> Int. Symp. Communications Systems, Networks and Digital Processing, (CSNDSP 2006), Patras, Grèce, 19-21 Juillet 2006.
- CI-15: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS, "Building Space Time Block Codes with set partitioning for three transmit antennas: application to STTC Codes", 14th European Signal Processing Conference 2006 (EUSIPCO 2006), Florence, Italie, 4-8 Septembre 2006.
- CI-16: A. SAEMI, J.P. CANCES, V. MEGHDADI, J.M. DUMAS and **G. FERRE**, "ML Symbol Synchronization For General MIMO-OFDM Systems In Unknown Frequency-Selective Fading Channels", 14th European Signal Processing Conference 2006 (EUSIPCO 2006), Florence, Italie, 4-8 Septembre 2006.
- CI-17: **G. FERRE**, J.P. CANCES, V. MEGHDADI and J.M. DUMAS, "Layered space-time coding for 3Xn transmit antenna communication systems", 17th annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications 2006 (PIMRC 2006), Helsinki, Finlande, 11-14 Septembre 2006.