

# UNIVERSITE DE LIMOGES

## ECOLE DOCTORALE Science- Technologie –Santé

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Xlim – Département « Ondes et Systèmes Associés »

Année : 2006

Thèse N° 2-2006

### Thèse

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Electronique des Hautes Fréquences et Optoélectronique

Spécialité : Télécommunications

Présentée et soutenue par

Francis DENANOT

le 2 février 2006

Techniques de sous-maillage dans la méthode FDTD,  
apports de l'approche variationnelle.

Thèse dirigée par Alain REINEIX

### JURY :

Patrick VAUDON, *Professeur, Université de Limoges, Xlim*

*Président*

Michel NEY, *Professeur, ENSTB - LEST, Brest*

*Rapporteur*

Walid TABBARA, *Professeur, Université Paris VI - SUPELEC, Gif sur Yvette*

*Rapporteur*

Christophe GUIFFAUT, *Chargé de Recherche CNRS, Xlim Limoges*

*Examineur*

Alain REINEIX, *Directeur de Recherche CNRS, Xlim Limoges*

*Examineur*

Patrick BREUILH, *Ingénieur, Nuclétudes, Les Ulis*

*Invité*

Olivier CESSENAT, *Ingénieur, CEA-CESTA, Le Barp*

*Invité*

Mais premières pensées vont à Mr le Professeur P. Vaudon qui m'a donné la possibilité d'effectuer mes premiers travaux de recherches sur la dérivation fractionnaire. Je le remercie très sincèrement pour sa gentillesse, pour la qualité de ses conseils, ainsi que pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder. Les nombreuses discussions que nous avons eues sur des sujets de physique très variés ont été passionnantes et très riches en enseignements. Elles ont été également l'occasion pour moi de découvrir et d'apprécier les qualités humaines de P. Vaudon.

Par la suite, Mr P. Vaudon m'a présenté Mr A. Reineix, directeur de l'équipe DEM, dans laquelle j'ai effectué les travaux de recherche présentés ici.

Mr A. Reineix, qui m'a accueilli très chaleureusement dans son équipe, a toujours su me donner les bons conseils aux bons moments. Son recul et sa grande expérience en matière de méthodes numériques ont été des atouts majeurs pour mener à bien ces travaux. C'est une chance pour un jeune chercheur de travailler dans son équipe. Mr A. Reineix m'a toujours exprimé sa confiance, il m'a laissé suffisamment d'autonomie dans le travail et il a toujours su me soutenir dans les moments difficiles. De telles qualités, à la fois humaines et professionnelles, ne se trouvent pas si souvent réunies. Pour toutes ces raisons, je tiens à exprimer ici ma plus grande reconnaissance et mon plus profond respect pour Mr A. Reineix.

Rien de tout ceci n'aurait été possible sans l'encadrement dynamique de Mr C. Guiffaut. Christophe a toujours été présent pour répondre avec précision aux multiples questions que je me suis posées tout au long de mes recherches. Je dois dire que son expérience en matière de programmation est exceptionnelle et qu'elle m'a permis de progresser très vite dans le codage des modèles de sous-maillage. Le nombre d'heures que nous avons passées ensemble à « déboguer » des programmes est une preuve de sa disponibilité et de sa générosité. Je remercie très sincèrement Mr C. Guiffaut pour sa gentillesse, son humour, ainsi que pour la qualité de son encadrement.

Je suis très honoré que Mr le Professeur W. Tabbara ait accepté d'être le président du jury et aussi rapporteur de cette thèse. De même je remercie très sincèrement Mr le Professeur M. Ney, Mr C. Guiffaut et Mr A. Reineix d'avoir accepté d'être membre du jury. Je remercie également Mr P. Breuilh et Mr O. Cessenat, respectivement ingénieur à Nuclétudes et ingénieur au CEA-CESTA, d'avoir accepté mon invitation à ma soutenance.

Toute ma reconnaissance va également aux membres de l'IRCOM qui m'ont entouré au cours de ces années de recherche : Melle N. Aymard, secrétaire, Mr H. Daffif, chargé de recherche, Mr S. Besse, thésard, Mr E. Touquet, thésard, pour ne citer qu'eux. Ils ont contribué à rendre ces années plus agréables et à donner une ambiance chaleureuse et motivante.

Pour terminer, je voudrais exprimer toute ma gratitude à ma famille et à mes amis qui ont partagé les moments de difficultés et de joies. Je pense tout particulièrement à ma compagne Jocelyne et à ses enfants Benjamin et Jean-Baptiste qui ont supporté patiemment mes petites variations d'humeurs ainsi que mon isolement durant cette aventure.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>II</b>	<b>Généralités sur la méthode des différences finies et le sous-maillage</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>La méthode des différences finies centrées</b>	<b>12</b>
1.1	Préambule . . . . .	12
1.2	Discrétisation temporelle des équations de Maxwell . . . . .	12
1.2.1	Différences centrées temporelles . . . . .	13
1.2.2	Application au système d'équations de Maxwell . . . . .	14
1.3	Discrétisation spatiale des équations de Maxwell : le schéma de Yee . . . . .	14
1.4	Stabilité de la méthode : le critère CFL . . . . .	18
1.5	La dispersion numérique et l'échantillonnage spatial . . . . .	22
1.5.1	Calcul de la vitesse de phase numérique . . . . .	22
1.5.2	Maillage cubique . . . . .	24
1.5.3	Maillage non uniforme . . . . .	25
1.5.4	Conclusion . . . . .	26
1.6	La génération des ondes et les surfaces de Huygens . . . . .	26
1.6.1	Le théorème de Schelkunoff et les surfaces de Huygens . . . . .	26
1.6.2	Intérêt des surfaces de Huygens . . . . .	27
1.7	Les conditions aux frontières et les PML . . . . .	28
1.8	Prise en compte des milieux matériels . . . . .	29
1.9	Le code « TRIDIMO » de l'I.R.C.O.M . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Le sous-maillage</b>	<b>32</b>
2.1	Les enjeux du sous-maillage . . . . .	32
2.2	Etat de l'art . . . . .	34
2.2.1	Bibliographie sur les méthodes d'interpolation . . . . .	34
2.2.2	Bibliographie sur les méthodes conservatives . . . . .	37
2.3	Les objectifs fixés . . . . .	38
2.3.1	Objectifs à atteindre pour les méthodes d'interpolation . . . . .	38
2.3.2	Objectifs à atteindre pour les méthodes basées sur la conservation de l'énergie . . . . .	38
2.4	Méthode de présentation et d'étude des modèles de sous-maillage . . . . .	38
2.4.1	Présentation . . . . .	39
2.4.2	Méthode d'étude . . . . .	40
2.4.2.1	La réflexion numérique . . . . .	40
2.4.2.2	La stabilité . . . . .	42

<b>III</b>	<b>Modèles de sous-maillage basés sur des méthodes d'interpolation</b>	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>Présentation d'un schéma basé sur des interpolations</b>	<b>46</b>
3.1	Le schéma . . . . .	46
3.2	Résultats des tests . . . . .	50
3.2.1	Réflexion numérique . . . . .	50
3.2.2	Stabilité . . . . .	51
3.2.3	Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé . . . . .	53
3.3	Pour résumer . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Séparation du traitement spatial et du traitement temporel</b>	<b>57</b>
4.1	Le traitement temporel seul . . . . .	57
4.1.1	Le schéma . . . . .	57
4.1.2	Résultats des tests . . . . .	60
4.1.2.1	Réflexion numérique . . . . .	60
4.1.2.2	Stabilité . . . . .	60
4.2	Le traitement spatial seul . . . . .	61
4.2.1	Le schéma . . . . .	61
4.2.2	Résultats des tests . . . . .	64
4.2.2.1	Réflexion numérique . . . . .	64
4.2.2.2	Stabilité . . . . .	65
4.2.2.3	Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé . . . . .	67
4.3	Le traitement temporel suivi du traitement spatial . . . . .	68
4.3.1	Le schéma . . . . .	70
4.3.2	Résultats des tests . . . . .	70
4.3.2.1	Comportement de la réflexion numérique en fonction de $q$ . . . . .	70
4.3.2.2	Comportement de la stabilité en fonction de $q$ . . . . .	72
4.3.2.3	Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé pour $q=1$ . . . . .	74
4.4	Pour résumer . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Recherche du meilleur schéma spatial</b>	<b>78</b>
5.1	Trois méthodes de raffinement spatial n'utilisant qu'une seule frontière . . . . .	78
5.1.1	Présentation des trois schémas . . . . .	78
5.1.1.1	Vue d'ensemble des trois schémas au cours du temps . . . . .	78
5.1.1.2	Une méthode de type « gradient » . . . . .	78
5.1.1.3	Une méthode « réciproque » . . . . .	81
5.1.1.4	Une méthode d'interpolation quadratique . . . . .	82
5.1.2	Résultats des tests . . . . .	84
5.1.2.1	Réflexion numérique . . . . .	84
5.1.2.2	Stabilité . . . . .	85
5.2	Une méthode de recouvrement . . . . .	86
5.2.1	Le schéma . . . . .	87
5.2.2	Résultats des tests . . . . .	90
5.2.2.1	Réflexion numérique . . . . .	90
5.2.2.2	Stabilité . . . . .	90
5.3	Pour résumer . . . . .	91

<b>6</b>	<b>Généralisation du principe de séparation avec des facteurs de raffinement plus élevés</b>	<b>92</b>
6.1	Raffinement temporel avec $r_t = 3, 4$ et $5$	92
6.1.1	Présentation des schémas	92
6.1.1.1	$r_t = 3$	92
6.1.1.2	$r_t = 4$	94
6.1.1.3	$r_t = 5$	95
6.1.2	Résultats des tests	98
6.1.2.1	Réflexion numérique	98
6.1.2.2	Stabilité	99
6.2	Raffinement spatial avec $r_s = 3, 4$ et $5$	100
6.2.1	Présentation des schémas	100
6.2.1.1	Algorithme généralisé	100
6.2.1.2	Calcul des $H_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$	101
6.2.1.3	Calcul des $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$ le long de l'axe ( $ Ov $ )	102
6.2.1.4	Calcul des $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$ le long de l'axe ( $ Oh $ )	103
6.2.2	Résultats des tests	105
6.2.2.1	Réflexion numérique	105
6.2.2.2	Stabilité	106
6.3	Pour résumer	107
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>

## **IV Modèles de sous-maillage basés sur des méthodes de conservation de l'énergie 110**

<b>8</b>	<b>La méthode variationnelle</b>	<b>112</b>
8.1	Présentation du problème	112
8.2	Découplage des deux domaines	113
8.3	Ecriture variationnelle du problème	115
8.3.1	Pourquoi l'écriture variationnelle ?	115
8.3.2	Ecriture variationnelle	116
8.3.3	Notation en terme de produits scalaires et d'opérateurs	118
8.4	Discrétisation spatiale	119
8.4.1	Discrétisation des équations variationnelles	120
8.4.2	Passage à l'écriture matricielle	120
8.4.3	Détermination du courant sur l'interface	125
8.5	Discrétisation temporelle	125
8.5.1	Schéma temporel de type « saute-mouton »	126
8.5.2	Calcul de $ \mathbf{J}^{n+1/2} $	127
8.5.3	Condition de raccord discrète et conservation de l'énergie	129
8.6	Choix des espaces d'approximation	131
8.6.1	Choix des éléments finis pour $ \vec{E}_d $	131
8.6.2	Choix des éléments finis pour $ \vec{H}_d $	134
8.6.3	Choix des éléments finis pour $ \vec{J}_d $	136
8.7	Calcul des matrices	138
8.8	Déduction du schéma spatio-temporel 3D	140
8.8.1	Emplacements des composantes	140
8.8.1.1	Composantes du champ électrique	140
8.8.1.2	Composantes du champ magnétique	141
8.8.1.3	Conclusion	142

8.8.2	Schéma pour les composantes appartenant au grand maillage . . . . .	142
8.8.2.1	Développement du premier terme de l'équation 8.73 . . . . .	142
8.8.2.2	Développement du deuxième terme de l'équation 8.73 . . . . .	143
8.8.2.3	développement du premier terme de l'équation 8.74 . . . . .	145
8.8.2.4	développement du deuxième terme de l'équation 8.74 . . . . .	146
8.8.3	Schéma pour les composantes appartenant au petit maillage . . . . .	147
8.8.4	Schéma pour les composantes du grand maillage, situées près de l'interface ou sur l'interface . . . . .	149
8.8.4.1	Schéma pour les composantes $H_x$ qui sont parallèles à l'interface $\Sigma$ . . . . .	151
8.8.4.2	Schéma pour les composantes $H_x$ qui sont orthogonales à l'interface $\Sigma$ . . . . .	151
8.8.4.3	Schéma pour les composantes $E_x$ qui sont orthogonales à l'interface $\Sigma$ . . . . .	151
8.8.4.4	Schéma pour les composantes $E_x$ qui sont dans l'interface . . . . .	152
8.8.4.5	Conclusion . . . . .	157
8.8.5	Schéma pour les composantes du petit maillage, situées près de l'interface ou sur l'interface . . . . .	157
8.8.5.1	Cas où $e_x$ est dans la face $Y^-$ hors voisinage des arêtes . . . . .	158
8.8.5.2	Cas où $e_x$ est située sur l'arête $X_1$ . . . . .	162
8.9	Pour résumer . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Proposition d'une version simplifiée de la méthode variationnelle pour le sous-maillage spatial en 2D-TE</b>	<b>167</b>
9.1	Exploitation du théorème de Poynting . . . . .	168
9.2	Mise en équation . . . . .	169
9.2.1	Construction des flux . . . . .	169
9.2.2	Conservation du flux sur l'interface . . . . .	171
9.2.3	Hypothèse et obtention d'un système d'équations découplées . . . . .	171
9.2.4	Développement du système d'équation . . . . .	171
9.2.5	Solution . . . . .	172
9.3	Algorithme . . . . .	173
9.4	Résultats . . . . .	173
9.4.1	Réflexion numérique . . . . .	173
9.4.2	Stabilité . . . . .	174
<b>10</b>	<b>Proposition d'une méthode variationnelle simplifiée pour le sous-maillage spatial en 2D-TM</b>	<b>178</b>
10.1	Principe du modèle 2D-TM . . . . .	178
10.2	Algorithme . . . . .	180
10.3	Résultats . . . . .	180
10.3.1	Réflexion numérique . . . . .	180
10.3.2	Stabilité . . . . .	182
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>185</b>

<b>V</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>186</b>
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Equations de Maxwell discrétisées</b>	<b>190</b>
A.1	Equations discrètes dans le vide . . . . .	190
A.1.1	Pour les composantes du champ électrique . . . . .	190
A.1.2	Pour les composantes du champ magnétique . . . . .	190
A.2	Equations discrètes dans les milieux diélectriques et magnétiques . . . . .	191
A.2.1	Pour les composantes du champ électrique . . . . .	191
A.2.2	Pour les composantes du champ magnétique . . . . .	191
<b>B</b>	<b>Champ diffracté et champ à l'intérieur du petit maillage en fonction du nombre de cellules <math>q</math></b>	<b>192</b>
B.1	Champs diffractés . . . . .	192
B.2	Champs à l'intérieur du petit maillage . . . . .	193
<b>C</b>	<b>Définition des matrices</b>	<b>195</b>
<b>D</b>	<b>Conservation de <math>\vec{J}_d</math> sur <math>\Sigma</math></b>	<b>196</b>
<b>E</b>	<b>Calcul des matrices</b>	<b>199</b>
E.1	Calcul des composantes de $\mathbf{m}_e$ . . . . .	199
E.1.1	Calculs généraux . . . . .	199
E.1.2	récapitulatif . . . . .	200
E.2	Calcul des composantes de $\mathbf{m}_e^{-1}$ . . . . .	202
E.3	Calcul des composantes de $\mathbf{m}_h$ . . . . .	202
E.3.1	Calculs généraux . . . . .	202
E.3.2	récapitulatif . . . . .	203
E.4	Calcul des composantes de $\mathbf{m}_h^{-1}$ . . . . .	204
E.5	Résultats pour les composantes de $\mathbf{M}_E, \mathbf{M}_E^{-1}, \mathbf{M}_H,$ et $\mathbf{M}_H^{-1}$ . . . . .	204
E.5.1	Pour $\mathbf{M}_E$ . . . . .	204
E.5.2	Pour $\mathbf{M}_E^{-1}$ . . . . .	205
E.5.3	Pour $\mathbf{M}_H$ . . . . .	205
E.5.4	Pour $\mathbf{M}_H^{-1}$ . . . . .	205
E.6	Calcul des composantes de $\mathbf{b}$ . . . . .	205
E.6.1	Calculs généraux . . . . .	205
E.6.2	Expression des composantes de $\mathbf{b}$ . . . . .	208
E.7	Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{b}$ . . . . .	208
E.8	Calcul des composantes de $\mathbf{B}$ . . . . .	209
E.9	Résultats pour les composantes de ${}^t\mathbf{B}$ . . . . .	214
E.10	Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{C}$ . . . . .	216
E.10.1	Calculs généraux . . . . .	216
E.10.2	Calcul de $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^1$ . . . . .	217
E.11	Calcul des composantes de $\mathbf{C}$ . . . . .	220
E.12	Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{c}$ . . . . .	220
E.13	Calcul des composantes de $\mathbf{c}$ . . . . .	222
<b>F</b>	<b>Calcul des <math>B_{l,\nu}</math></b>	<b>224</b>
<b>G</b>	<b>Calcul des <math>A_{l,\nu}</math></b>	<b>226</b>

<b>H</b>	<b>Calcul des <math>D_{l,l'}</math></b>	<b>230</b>
<b>I</b>	<b>Calcul des <math>F_{L,L'}</math></b>	<b>233</b>
<b>J</b>	<b>Calcul des <math>G_{L,L'}</math></b>	<b>236</b>
<b>K</b>	<b>Calcul des <math>F_{l,L'}</math> et des <math>F_{L,l'}</math></b>	<b>239</b>
	K.1 Calcul des $F_{l,L'}$ . . . . .	239
	K.2 Calcul des $F_{L,l'}$ . . . . .	242
<b>L</b>	<b>Calcul des <math>G_{l,L'}</math> et des <math>G_{L,l'}</math></b>	<b>243</b>
	L.1 Calcul des $G_{l,L'}$ . . . . .	243
	L.2 Calcul des $G_{L,l'}$ . . . . .	246



**Première partie**  
**Introduction générale**

Les simulations numériques sont apparues dans les années 70 grâce aux premiers développements de l'informatique. L'accroissement des puissances de calcul des ordinateurs permet aujourd'hui d'étudier des problèmes que l'on ne pouvait pas aborder autrefois. Les capacités dont nous disposons maintenant, nous permettent en effet de considérer des situations de plus en plus proches de la réalité. Les domaines d'application des simulations numériques sont nombreux, ils concernent, pour n'en citer que quelques uns, la mécanique des fluides, la mécanique classique, l'élasticité, la résistance des matériaux, l'électromagnétisme, la physique quantique etc.... Les implications sont importantes aussi bien sur le plan théorique que dans la pratique. Les simulations permettent par exemple de réduire les durées de conception et donc les coût de fabrication d'un produit, ce qui est très important pour la compétitivité de nos industries. Sur le plan théorique, ce sont ces mêmes simulations qui ont permis récemment de prouver certaines conjectures mathématiques.

Notre domaine d'application est l'électromagnétisme. Les principales méthodes numériques qui s'y rapportent sont la méthode des moments, les éléments finis, la TLM (Transmission Line Matrix) et la FDTD. Ces méthodes sont actuellement les seules qui fonctionnent réellement en 3D, de plus elles sont utilisables aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. L'équipe de recherche dans lequel ces travaux ont été effectués (I.R.C.O.M. de Limoges, équipe D.E.M.) mène des recherches sur les méthodes numériques temporelles dont la méthode FDTD. Cette dernière a fait l'objet de nombreux développements depuis la parution en 1966 de l'article de Yee, article fondateur de la méthode. Aujourd'hui, nous disposons au sein de l'équipe de recherche d'un logiciel très complet basé sur la FDTD nommé « TRIDIMO » et qui permet d'intégrer des environnements très variés dans les simulations.

Le sujet de ce mémoire concerne le problème du sous-maillage dans la méthode des différences finies centrées utilisant des maillages orthogonaux et uniformes. Ces travaux seront utilisés pour élaborer un nouveau module qui sera intégré dans le code « TRIDIMO ».

La première partie de ce travail concerne un certain nombre de généralités sur la méthode des différences finies et le problème du sous-maillage. Dans cette partie introductive nous présentons le cadre dans lequel nous avons travaillé, ce qui nous permet ensuite de bien poser le sujet. Pour commencer la méthode FDTD ainsi que les principaux outils qui s'y rattachent sont expliqués, puis nous présentons en détail la façon dont les schémas sont exposés et étudiés tout au long de ce texte. Un travail bibliographique est également effectué.

La deuxième partie est consacrée aux techniques d'interpolation. Nous commençons par présenter un schéma de sous-maillage 3D possédant un facteur de raffinement égale à deux. Ensuite nous étudions les instabilités de ce schéma et nous prouvons qu'elles sont dues uniquement au raffinement spatial. Cette étude nous a conduit à considérer une nouvelle méthode de conception des schémas de sous-maillage, conception que nous généralisons par la suite à des facteurs de raffinement plus élevés.

Dans la troisième partie nous abordons les méthodes de sous-maillage qui sont basées sur la conservation de l'énergie électromagnétique. Ces méthodes conduisent à des schémas stables mais elles sont développées dans des cadres mathématiques très abstraits si bien qu'elles rebutent très souvent les physiciens, de plus elles donnent lieu à des programmes difficiles à mettre en oeuvre. Nous commençons alors par un travail de « traduction » que nous effectuons sur la méthode variationnelle. Cette dernière est ainsi exposée en détail et nous nous attachons particulièrement au calcul des éléments de matrice. Pour finir nous montrons qu'il est possible d'appliquer simplement cette méthode dans des cas concrets. C'est ainsi que nous stabilisons les modèles 2D-TE et 2D-TM.

## **Deuxième partie**

# **Généralités sur la méthode des différences finies et le sous-maillage**

Nous présentons dans cette partie tous les éléments qui vont être utiles à la compréhension de ce texte. Elle est articulée autour de deux chapitres. Le premier d'entre eux concerne la méthode des différences finies centrées et le second aborde le problème du sous-maillage dans sa globalité.

Dans le premier chapitre, nous expliquons d'abord la technique de discrétisation des équations de Maxwell élaborée par Yee. Ensuite nous mettons en lumière les propriétés des algorithmes qui utilisent les équations de Maxwell discrètes obtenues. C'est ainsi que nous parlons de la stabilité de la méthode FDTD, du critère C.F.L, de la dispersion numérique et de l'échantillonnage spatial. La manière de générer les ondes dans le volume de calcul est également expliquée, nous présentons ainsi le théorème de Schelkunoff et les surfaces de Huygens. Les PML de Bérenger dont l'importance n'est plus à démontrer sont également présentées. Nous abordons aussi les milieux matériels (milieux diélectriques, milieux magnétiques, conducteurs parfaits, milieux dispersifs etc..) en expliquant brièvement la façon dont ils sont pris en compte numériquement. Pour terminer nous parlons du programme « TRIDIMO » de l'I.R.C.O.M que nous avons utilisé tout au long de ces travaux.

Le deuxième chapitre aborde le problème du sous-maillage dans sa généralité. Nous présentons d'abord l'utilité du raffinement spatiotemporel à l'aide d'un exemple simple qui montre clairement les économies en ressources informatiques que l'on peut réaliser. Ensuite nous présentons les principaux travaux qui ont été faits sur ce sujet et partant de ces derniers nous nous fixons des objectifs à atteindre. Pour finir nous précisons la façon dont les modèles de sous-maillage seront présentés et étudiés.

# Chapitre 1

## La méthode des différences finies centrées

### 1.1 Préambule

De façon à ne pas allourdir la présentation de ce qui va suivre nous considérons les équations de Maxwell uniquement dans le vide et en l'absence de charges et de courants. Nous verrons plus loin comment les milieux matériels sont pris en compte et comment les ondes électromagnétiques sont générées dans le volume de calcul. Compte tenu de cette hypothèse, le système de Maxwell se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{E}) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ \text{div}(\vec{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Nous allons voir maintenant que les deux dernières équations de 1.1 n'ont pas besoin d'être prise en compte. Pour montrer ceci appliquons l'opérateur divergence aux deux équations en rotationnel. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div}(\vec{E})) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\text{div}(\vec{H})) = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Ces deux relations prouvent que  $\text{div}(\vec{E})$  et  $\text{div}(\vec{H})$  sont des champs indépendants du temps. Puisque ces deux champs sont nuls à l'instant  $t = 0^1$ , on déduit de ce qui précède qu'ils restent nuls pour tout  $t > 0$ . Dans ce cas les équations en rotationnel sont suffisantes.

Il est temps maintenant d'expliquer la méthode de discrétisation. Ceci fait l'objet des deux paragraphes suivants.

### 1.2 Discrétisation temporelle des équations de Maxwell

Les deux équations en rotationnel dont nous parlions précédemment peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{r}, t) = \lambda \cdot \vec{g}(\vec{r}, t) \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Voir les deux dernières équations de 1.1.

Occupons nous d'abord de la discrétisation temporelle de 1.3.

### 1.2.1 Différences centrées temporelles

On discrétise le temps en remplaçant la variable continue  $t$  par une suite de valeur  $t_n$  de la forme  $t_n = n\Delta t$ .  $\Delta t$  représente le pas temporel. Si on décide de discrétiser le temps uniquement pour  $t \geq 0$  on a alors  $n \in \mathbb{N}$ .

Les variations dans le temps de  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  sont connues si on connaît l'ensemble des  $\vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . L'idée est de construire un équivalent discret de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  permettant d'effectuer un calcul itératif des  $\vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\}$ .

Pour cela considérons les développements de Taylor à l'ordre deux de  $\vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\}$  et de  $\vec{f}\{\vec{r}, (n+1)\Delta t\}$  au voisinage de la date  $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\} \simeq \vec{f}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} - \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} + \\ \frac{1}{8} \cdot \Delta t^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{f}\{\vec{r}, (n+1)\Delta t\} \simeq \vec{f}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} + \\ \frac{1}{8} \cdot \Delta t^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Formons la différence 1.5-1.4. Il vient :

$$\vec{f}\{\vec{r}, (n+1)\Delta t\} - \vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\} \simeq \Delta t \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\left\{\vec{r}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right\}$$

Dans la suite, on adopte la notation suivante :  $\vec{f}\{\vec{r}, n\Delta t\} = \vec{f}^n(\vec{r})$ . Dans ce cas on a :

$$\vec{f}^{n+1}(\vec{r}) - \vec{f}^n(\vec{r}) \simeq \Delta t \cdot \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r})$$

Finalement nous obtenons l'approximation suivante :

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \simeq \frac{\vec{f}^{n+1}(\vec{r}) - \vec{f}^n(\vec{r})}{\Delta t} \quad (1.6)$$

qui est valable jusqu'aux termes d'ordre deux.

Le taux de variation qui apparait dans le membre de droite de 1.6, constitue un équivalent discret de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  au point  $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$  et cet équivalent discret est valable à l'ordre deux en  $\Delta t$ .

L'équivalent discret de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  étant construit, il est maintenant facile de montrer que l'équation 1.3 se résoud de façon itérative. Pour cela écrivons 1.3 à la date  $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$ . Il vient :

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \lambda \cdot \vec{g}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r})$$

A l'aide de 1.6 on obtient immédiatement :

$$\vec{f}^{n+1}(\vec{r}) \simeq \vec{f}^n(\vec{r}) + \Delta t \cdot \lambda \cdot \vec{g}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \quad (1.7)$$

A partir du moment où la fonction  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  est connue, ce qui est obligatoire pour pouvoir résoudre l'équation 1.3, les  $\vec{g}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r})$  sont connus  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Il est alors possible d'obtenir  $\vec{f}^{n+1}(\vec{r})$  à partir de  $\vec{f}^n(\vec{r})$ . L'initialisation du système <sup>2</sup> permet finalement de calculer les  $\vec{f}^n(\vec{r}) \forall n \in \mathbb{N}$ .

## 1.2.2 Application au système d'équations de Maxwell

La première équation du système 1.1 s'obtient en posant  $\vec{f} = \vec{E}$ ,  $\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0}$  et  $\vec{g} = r\vec{ot}(\vec{H})$  dans l'équation 1.3. La relation de récurrence 1.7 donne alors :

$$\vec{E}^{n+1}(\vec{r}) \simeq \vec{E}^n(\vec{r}) + \Delta t \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ r\vec{ot}(\vec{H}) \right\}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \quad (1.8)$$

Pour la deuxième équation du système 1.1 on pose  $\vec{f} = \vec{H}$ ,  $\lambda = -\frac{1}{\mu_0}$  et  $\vec{g} = r\vec{ot}(\vec{E})$ , puis on remplace l'indice  $n$  par l'indice  $n - \frac{1}{2}$  dans la relation de récurrence 1.7. On obtient ainsi :

$$\vec{H}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \simeq \vec{H}^{n-\frac{1}{2}}(\vec{r}) - \Delta t \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \left\{ r\vec{ot}(\vec{E}) \right\}^n(\vec{r}) \quad (1.9)$$

Les relations 1.8 et 1.9 peuvent se résoudre par itérations successives et en alternance, pour cela il suffit simplement d'initialiser le système d'équation. Montrons ceci brièvement.

Posons :

$$\begin{cases} \vec{H}^{-\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \vec{h}(\vec{r}) \\ \vec{E}^0(\vec{r}) = \vec{e}(\vec{r}) \end{cases}$$

$\vec{h}(\vec{r})$  et  $\vec{e}(\vec{r})$  étant des champs connus. Alors l'équation 1.9, appliquée avec  $n = 0$ , permet de calculer  $\vec{H}^{\frac{1}{2}}(\vec{r})$ . Ensuite, l'équation 1.8, appliquée elle aussi avec  $n = 0$ , permet de calculer  $\vec{E}^1(\vec{r})$ . Les champs  $\vec{H}^{\frac{1}{2}}(\vec{r})$  et  $\vec{E}^1(\vec{r})$  étant connus on peut appliquer de nouveau le processus pour déterminer  $\vec{H}^{\frac{3}{2}}(\vec{r})$  et  $\vec{E}^2(\vec{r})$  et ainsi de suite.

Pour conclure nous pouvons dire que les valeurs de  $\vec{H}(\vec{r})$  et de  $\vec{E}(\vec{r})$  sont déterminées dans le temps de façon itératives et en alternance, on parle de modèle « saute-mouton ». Ceci est illustré dans la figure 1.1.

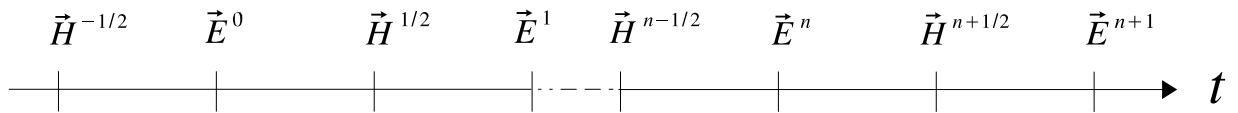


FIG. 1.1 – Modèle « saute-mouton ».

## 1.3 Discrétisation spatiale des équations de Maxwell : le schéma de Yee

On discrétise l'espace en remplaçant les variables continues  $x$ ,  $y$  et  $z$  par trois suites de valeurs  $x_i$ ,  $y_j$  et  $z_k$  de la forme  $x_i = i\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$  et  $z_k = k\Delta z$ .  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  représentent les

<sup>2</sup>On pose par exemple  $\vec{f}^0(\vec{r}) = \vec{h}(\vec{r})$  où  $\vec{h}(\vec{r})$  est un champ connu.

pas spatiaux le long des axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ . Ceci revient à remplacer l'espace affine Euclidien continu par un réseau de points situés aux noeuds d'une grille tridimensionnelle. Si les axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  sont orthogonaux, cas que nous considérons ici, la grille tridimensionnelle est constituée par la juxtaposition de parallélépipèdes rectangles nommés cellules. On parle alors de maillage orthogonal. On dira qu'une cellule donnée porte le numéro  $(i, j, k)$  si le point origine de cette cellule correspond au noeud  $N_{i,j,k}$  de coordonnées  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ . Ce système de numérotation est illustré dans la figure 1.2.

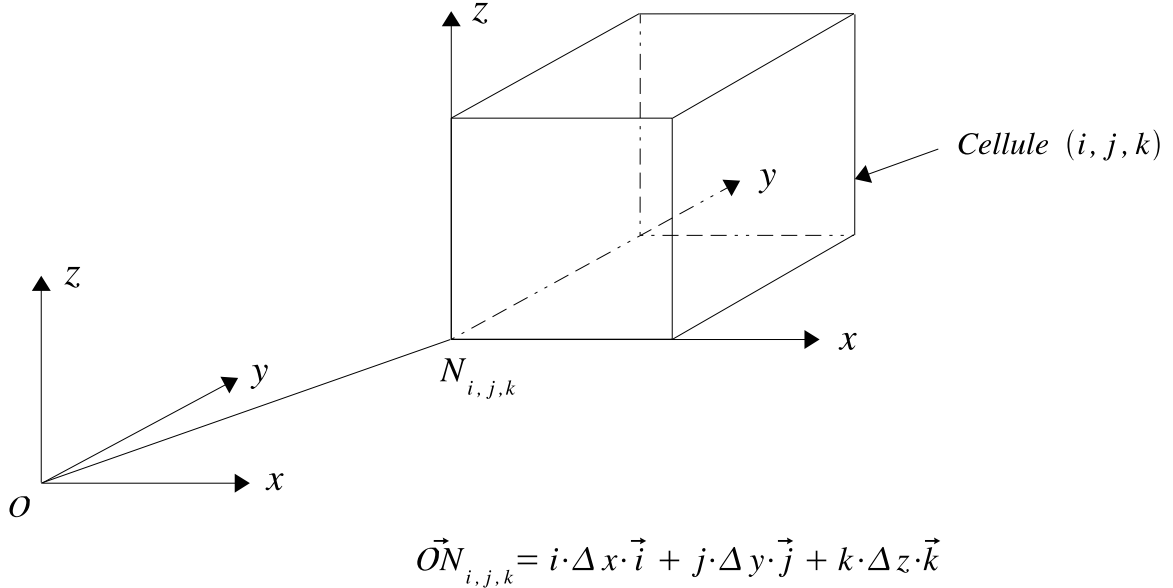


FIG. 1.2 – Numérotation des cellules.

Les indices  $i, j$  et  $k$  sont bornés, c'est à dire que :

$$\begin{cases} i \in [i_{min}, i_{max}] \\ j \in [j_{min}, j_{max}] \\ k \in [k_{min}, k_{max}] \end{cases}$$

Ceci permet évidemment de délimiter un volume de calcul fini.

Maintenant que le décor est mis en place, notre objectif est de calculer les équivalents discrets des deux rotationnels qui apparaissent dans les équations 1.8 et 1.9. Bien entendu cela revient à déterminer les équivalents discrets des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

L'idée simple et géniale qu'à eu Yee en 1966 [1], consiste à distribuer dans chaque cellule les six composantes du champ électromagnétique de façon à ce que les équivalents discrets des opérateurs spatiaux soient eux aussi des taux de variation centrés. On obtient ainsi un schéma qui est à l'ordre deux à la fois en espace et en temps.

La répartition des composantes est illustrée sur la figure 1.3 :

- Les composantes de  $\vec{E}$  sont placées au milieu des arêtes.
- Les composantes de  $\vec{H}$  sont placées au milieu des faces.

Ainsi dans une cellule  $(i, j, k)$  et à une date  $t$  quelconque on a :

$$\begin{cases} H_x(t) = H_x \left\{ i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta z, t \right\} \\ H_y(t) = H_y \left\{ \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta y, \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta z, t \right\} \\ H_z(t) = H_z \left\{ \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y, k\Delta z, t \right\} \end{cases} \quad (1.10)$$



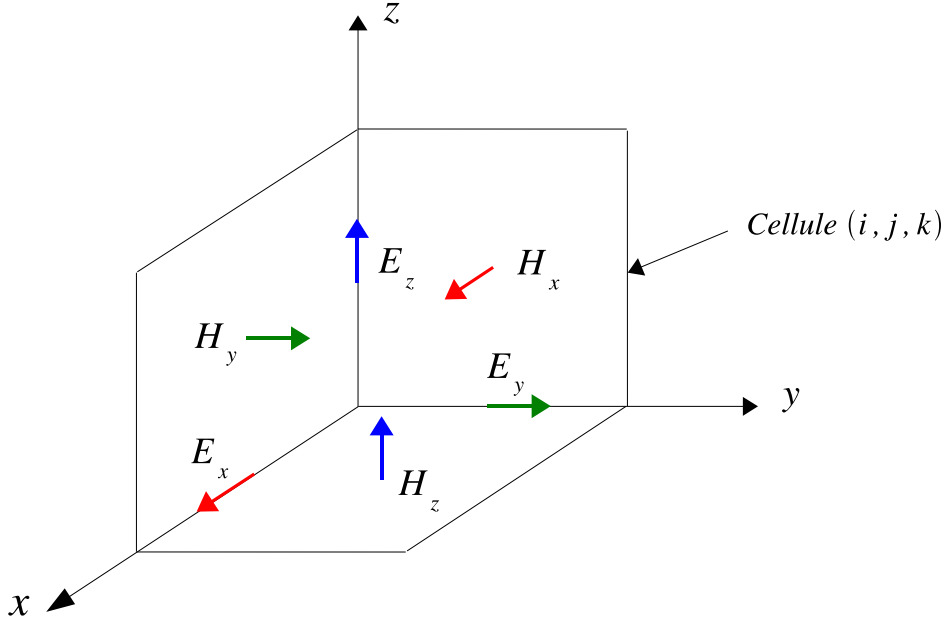


FIG. 1.3 – Cellule de Yee.

puis :

$$\begin{cases} E_x(t) = E_x \left\{ \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, t \right\} \\ E_y(t) = E_y \left\{ i \Delta x, \left( j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, k \Delta z, t \right\} \\ E_z(t) = E_z \left\{ i \Delta x, j \Delta y, \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, t \right\} \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans la suite, on adopte la notation suivante :  $A(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, t) = A_{i,j,k}(t)$ . Dans ce cas les composantes précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} H_x(t) = H_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t) \\ H_y(t) = H_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(t) \\ H_z(t) = H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

et :

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}(t) \\ E_y(t) = E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}(t) \\ E_z(t) = E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

Pour montrer que l'idée de Yee fonctionne bien, effectuons la discrétisation spatiale des équations 1.8 et 1.9 en projection sur l'axe  $(Oz)$ . La projection sur  $(Oz)$  de l'équation 1.8 s'écrit :

$$E_z^{n+1}(\vec{r}) \simeq E_z^n(\vec{r}) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) - \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \right\}$$

Etant donné l'emplacement de la composante  $E_z$  dans la cellule  $(i, j, k)$ ,  $\vec{r}$  désigne nécessairement le triplet  $(i \Delta x, j \Delta y, (k + \frac{1}{2}) \Delta z)$  (voir 1.11). Il vient alors :

$$E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \simeq E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

Or :

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{H_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y,i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

et :

$$\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{H_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

Ce qui donne finalement :

$$E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \simeq E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \frac{H_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y,i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{H_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right\} \quad (1.14)$$

Ce calcul est illustré dans la figure 1.4.

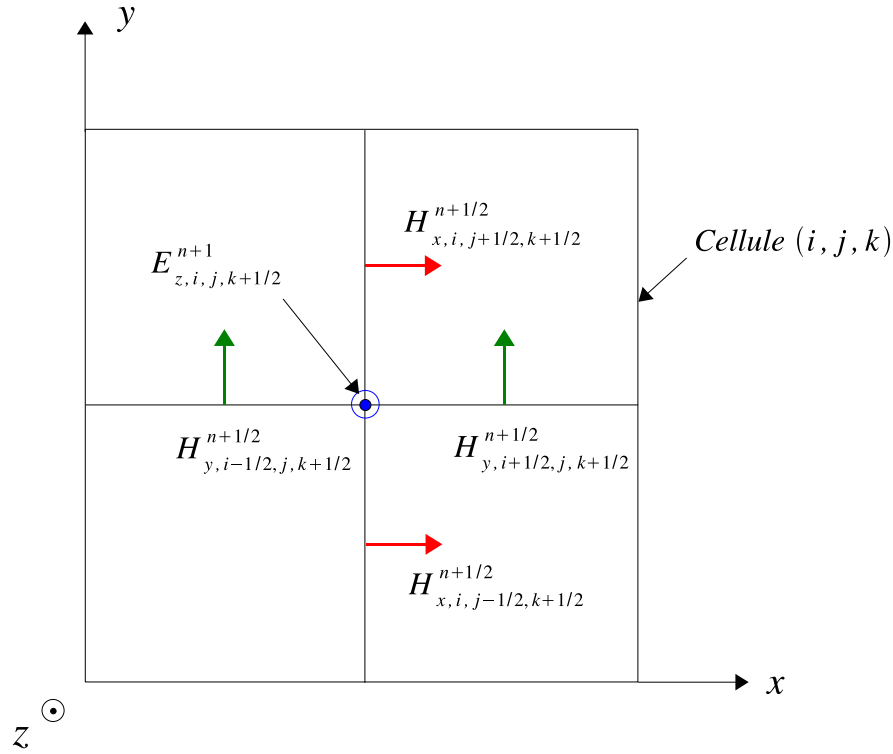


FIG. 1.4 – Calcul de  $E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ .

La projection sur l'axe ( $Oz$ ) de l'équation 1.9 s'écrit :

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \simeq H_z^{n-\frac{1}{2}}(\vec{r}) - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)^n(\vec{r}) - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^n(\vec{r}) \right\}$$

Etant donné l'emplacement de la composante  $H_z$  dans la cellule  $(i, j, k)$ ,  $\vec{r}$  désigne nécessairement le triplet  $((i + \frac{1}{2}) \Delta x, (j + \frac{1}{2}) \Delta y, k \Delta z)$  (voir 1.10). Dans ce cas on a :

$$H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \simeq H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n \right\}$$

Or :

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^n \simeq \frac{E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}, k}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta x}$$

et :

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^n \simeq \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j+1, k}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta y}$$

Ce qui donne finalement :

$$H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} \simeq H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \frac{E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}, k}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta x} - \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j+1, k}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta y} \right\} \quad (1.15)$$

Ce calcul est illustré dans la figure 1.5.

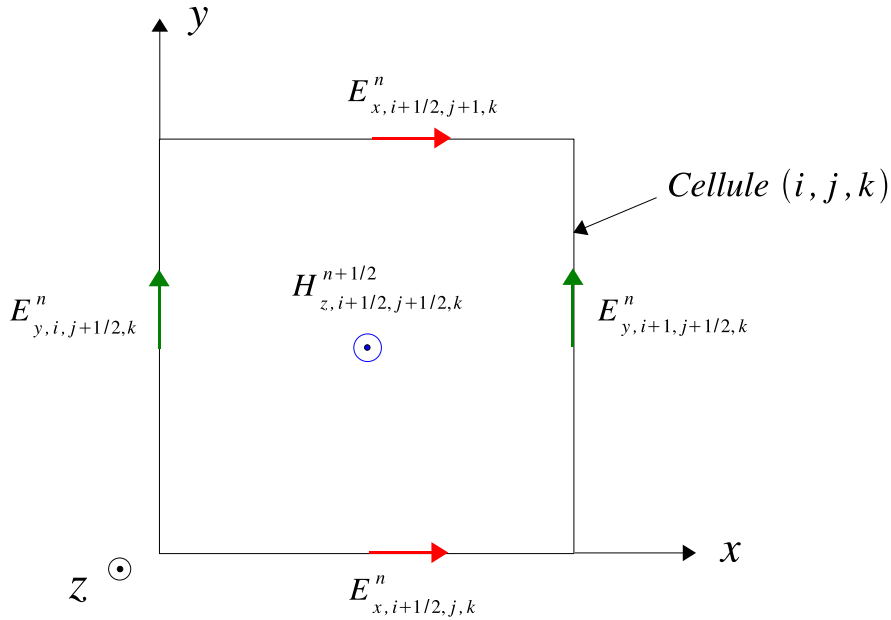


FIG. 1.5 – Calcul de  $H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}}$ .

La démarche est la même pour les autres projections des équations 1.8 et 1.9. Nous avons consigné les six équations de Maxwell discrétisées en espace et en temps dans la première partie de l'annexe A.

## 1.4 Stabilité de la méthode : le critère CFL

L'algorithme itératif temporel que nous avons décrit dans la paragraphe 1.2 peut faire apparaître des solutions numériques non physiques. Celles-ci peuvent alors conduire à une divergence du calcul et donc à des résultats faux. Les problèmes de stabilité des algorithmes numériques ont été étudiés par Courant, Friedrich et Levy (CFL), ainsi que par Von Neumann, à partir d'une approche mathématique rigoureuse. Taflove [2] a par la suite appliqué une telle approche à la méthode FDTD. Une généralisation du critère de stabilité aux systèmes d'équations hyperboliques, dont le système de Maxwell est un cas particulier, a été également proposé par Mrozowski [3].

Nous avons choisi ici de présenter la méthode CFL car elle nous paraît plus pédagogique que les autres méthodes, de plus, elle nous oblige à considérer l'équation de dispersion dont nous aurons besoin dans le paragraphe suivant.

Notons  $\epsilon_d$  l'espace vectoriel des solutions du système de Maxwell discrétisé. Afin d'étudier la stabilité de ces solutions nous devons d'abord exprimer ces dernières sous une forme qui est à la fois simple et générale. L'idée est de construire une base de  $\epsilon_d$  à partir de l'ensemble des vecteurs propres communs aux opérateurs de dérivation discrets. L'ensemble des modes de Fourier discrets, définis par :

$$f_{\omega, \vec{k}}(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = \exp \{ l \cdot (\omega \cdot n\Delta t - k_x \cdot i\Delta x - k_y \cdot j \cdot \Delta y - k_z \cdot k\Delta z) \}$$

constitue une telle base<sup>3</sup>. Ce dernier point est facile à montrer. Avant de commencer, signalons que la quantité  $f_{\omega, \vec{k}}(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  sera dorénavant notée  $f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$ , ceci va nous permettre d'alléger la présentation de ce qui va suivre.

Calculons l'action de l'opérateur  $\partial_t \text{ discret}$ <sup>4</sup> sur  $f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \partial_t \text{ discret} \left\{ f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k}) \right\} &\simeq \frac{f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}(\omega, \vec{k}) - f_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}(\omega, \vec{k})}{\Delta t} = \\ &\frac{\exp \left\{ l \cdot (\omega \cdot (n + \frac{1}{2}) \Delta t - \dots) \right\} - \exp \left\{ l \cdot (\omega \cdot (n - \frac{1}{2}) \Delta t - \dots) \right\}}{\Delta t} = \\ &\frac{\exp \left\{ l \cdot \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k}) - \exp \left\{ -l \cdot \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})}{\Delta t} = \\ &\frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cette dernière relation prouve bien que  $f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$  est vecteur propre de l'opérateur  $\partial_t \text{ discret}$  avec la valeur propre  $\frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t}$ . Des calculs tout à fait similaires permettent de montrer que  $f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$  est également vecteur propre des opérateurs  $\partial_x \text{ discret}$ ,  $\partial_y \text{ discret}$  et  $\partial_z \text{ discret}$  avec les valeurs propres respectives  $\frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x}$ ,  $\frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y}$  et  $\frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z}$ .

Maintenant que nous avons une base de  $\epsilon_d$ , nous pouvons exprimer simplement les solutions :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{i,j,k}^n \\ \vec{H}_{i,j,k}^n \end{pmatrix} = \int_{\omega \in \mathbb{R}^+} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{pmatrix} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k}) \cdot d\omega \cdot d\vec{k} \quad (1.17)$$

L'algorithme de calcul ne présentera pas de problème de divergence s'il traite une solution physique. Pour cela les champs  $\vec{E}_{i,j,k}^n$  et  $\vec{H}_{i,j,k}^n$  doivent être initialisés conformément aux équations de Maxwell. Mais cela ne suffit pas. Il faut en plus que les solutions physiques dont on parle puissent être traitées correctement par l'algorithme. Cela suppose que tous les modes de Fourier qui interviennent dans 1.17 se propagent correctement dans la grille de calcul. En d'autres termes il faut s'assurer que les quantités  $\vec{e} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$  et  $\vec{h} \cdot f_{i,j,k}^n(\omega, \vec{k})$  sont bien solution de l'équation de propagation discrète,  $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3$ . Ces deux quantités seront notées respectivement  $\vec{e}^*$  et  $\vec{h}^*$ .

<sup>3</sup>La quantité  $l$  vérifie :  $l^2 = -1$ .

<sup>4</sup> $\partial_t \text{ discret}$  est la notation que nous avons choisie pour désigner l'équivalent discret de l'opérateur de dérivation temporel.

Commençons par exprimer les opérateurs  $\partial_t discret$  et  $\vec{\nabla} discret$ . Pour  $\partial_t discret$  on a :

$$\partial_t discret (\vec{e}^*) = \vec{e} \cdot \partial_t discret \left\{ f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \right\} = \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t} \cdot \vec{e}^*$$

soit :

$$\partial_t discret \equiv \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t} \cdot I_d \quad (1.18)$$

et pour  $\vec{\nabla} discret$  on a :

$$\vec{\nabla} discret (\vec{e}^*) = \begin{vmatrix} \partial_x discret & e_x \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \\ \partial_y discret & e_y \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \\ \partial_z discret & e_z \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y discret \left\{ e_z \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \right\} - \partial_y discret \left\{ e_y \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \right\} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ -e_z \cdot \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y} \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) + e_y \cdot \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z} \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix} =$$

posons :

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x} \\ \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y} \\ \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z} \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

dans ce cas le résultat précédent s'écrit plus simplement :

$$\vec{\nabla} discret (\vec{e}^*) = -l \cdot f_{i,j,k}^n (\omega, \vec{k}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{e} = -l \cdot \vec{u} \wedge (\vec{e}^*)$$

finalemt on obtient :

$$\vec{\nabla} discret \equiv -l \cdot \vec{u} \wedge \quad (1.20)$$

Compte tenu de 1.18 et de 1.20 l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$-l \cdot \vec{u} \wedge (\vec{h}^*) = \varepsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t} \cdot \vec{e}^* \quad (1.21)$$

et l'équation de Maxwell-Faraday devient :

$$-l \cdot \vec{u} \wedge (\vec{h}^*) = \varepsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot l \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{\Delta t} \cdot \vec{e}^* \quad (1.22)$$

Pour terminer on effectue le produit vectoriel à gauche de l'équation 1.21 par le vecteur  $\vec{u}$ , puis on remplace le membre de droite à l'aide de la relation 1.22. On obtient alors :

$$\left\{ \|\vec{u}\|^2 - \frac{4 \cdot \sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c^2 \cdot \Delta t^2} \right\} \cdot \vec{h}^* = 0 \quad (1.23)$$

On pourrait établir une équation similaire pour  $\vec{e}^*$ . Ainsi  $\vec{e}^*$  et  $\vec{h}^*$  sont solution de l'équation de propagation discrète si :

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{4 \cdot \sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c^2 \cdot \Delta t^2} \quad (1.24)$$

c'est à dire si :

$$\frac{\sin^2 \left\{ k_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z^2} = \frac{\sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c^2 \cdot \Delta t^2} \quad (1.25)$$

Cette dernière relation est l'équivalent discret de l'équation de dispersion. Elle donne le lien entre les valeurs de  $\vec{k}$  et de  $\omega$  des modes de Fourier qui peuvent se propager. Or cette équation de dispersion discrète n'est pas toujours vérifiée pour toutes les valeurs de  $\vec{k}$  et de  $\omega$ , sauf si une certaine condition est satisfaite. C'est ce que nous allons élucider maintenant.

D'après 1.24 nous avons :

$$\Delta t^2 = \frac{4 \cdot \sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c^2 \cdot \|\vec{u}\|^2}$$

or :

$$\sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\} \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+$$

si bien que :

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{c^2 \cdot \|\vec{u}\|^2}$$

Pour que ceci soit vérifié on doit s'assurer que :

$$\Delta t^2 \leq \left( \frac{4}{c^2 \cdot \|\vec{u}\|^2} \right)_{\min i}$$

or :

$$\left( \frac{4}{c^2 \cdot \|\vec{u}\|^2} \right)_{\min i} = \frac{4}{c^2 \cdot \|\vec{u}\|_{\max i}^2} = \frac{4}{c^2 \cdot \left( \frac{4}{\Delta x^2} + \frac{4}{\Delta y^2} + \frac{4}{\Delta z^2} \right)}$$

Il vient finalement :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.26)$$

C'est cette condition, nommée condition CFL, qui nous assure que tous les modes de Fourier peuvent se propager dans le maillage. Finalement une onde correctement initialisée sera bien prise en charge par l'algorithme sous cette condition.

Les conditions CFL dans des espaces à deux dimensions et à une dimension se déduisent immédiatement de 1.26.

Dans un espace 2D on a :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.27)$$

et dans un espace 1D on a :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \cdot \left( \frac{1}{\Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta}{c} \quad (1.28)$$

Les inégalités 1.26, 1.27 et 1.28 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max}$$

en posant respectivement :

$$\Delta t_{max} = \frac{1}{c \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Delta t_{max} = \frac{1}{c \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\Delta t_{max} = \frac{\Delta}{c}$$

Dans la plupart des simulations le pas temporel est fixé à 97% de  $\Delta t_{max}$  :

$$\Delta t = 0.97 \cdot \Delta t_{max} \quad (1.29)$$

## 1.5 La dispersion numérique et l'échantillonnage spatial

### 1.5.1 Calcul de la vitesse de phase numérique

A partir de la relation de dispersion 1.25 nous pouvons mettre en équation la vitesse de propagation de chaque mode de Fourier. Cette vitesse est appelée vitesse de phase numérique et on la note  $v_{pn}$ . Par définition du vecteur d'onde on a :

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\left\| \vec{k} \right\|}$$

Il faut maintenant exprimer  $\omega$ . D'après 1.24  $\omega$  vérifie l'équation suivante :

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{4 \cdot \sin^2 \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c^2 \cdot \Delta t^2}$$

c'est à dire :

$$\|\vec{u}\| = \frac{2 \cdot \left| \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\} \right|}{c \cdot \Delta t}$$

Pour que le maillage temporel puisse représenter correctement les variations dans le temps du mode de Fourier, il faut que le pas de temps  $\Delta t$  soit bien inférieur à la période  $T$  de ce mode :  $\frac{\Delta t}{T} \ll 1$ . Ainsi nous avons  $\omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \ll \pi$ , si bien que  $\left| \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\} \right| = \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}$ . Il vient alors :

$$\|\vec{u}\| = \frac{2 \cdot \sin \left\{ \omega \cdot \frac{\Delta t}{2} \right\}}{c \cdot \Delta t}$$

On peut extraire  $\omega$  de cette dernière équation. Cela donne :

$$\omega = \arcsin \left\{ \frac{c \cdot \Delta t \cdot \|\vec{u}\|}{2} \right\}$$

Or  $\|\vec{u}\|$  s'exprime en fonction des composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$  (voir 1.19), il vient alors :

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \cdot \arcsin \left\{ c \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{\sin^2 \left\{ k_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Soit finalement :

$$v_{pn} = \frac{2}{\Delta t \cdot \|\vec{k}\|} \times \arcsin \left\{ c \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{\sin^2 \left\{ k_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \left\{ k_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.30)$$

Il ne faut pas oublier que les composantes de  $\vec{k}$  sont fonction de  $v_{pn}$  :

$$\begin{cases} k_x = \frac{\omega}{v_{pn}} \cdot e_x \\ k_y = \frac{\omega}{v_{pn}} \cdot e_y \\ k_z = \frac{\omega}{v_{pn}} \cdot e_z \end{cases}$$

Dans ces trois dernières relations  $e_x$ ,  $e_y$  et  $e_z$  représentent les coordonnées du vecteur unitaire  $\vec{e}$  qui est colinéaire à  $\vec{k}$ <sup>5</sup>. Compte tenu de ce que nous venons de dire, la relation 1.30 se présente comme une équation en  $v_{pn}$ . Une telle équation peut être résolue à l'aide du procédé itératif de Newton [4]. Un tel procédé ne sera pas nécessaire car nous attendons ici des valeurs de  $v_{pn}$  très proches de  $c$ . Nous pouvons alors faire une approximation en remplaçant les valeurs précédentes de  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  par :

$$\begin{cases} \tilde{k}_x = \frac{\omega}{c} \cdot e_x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot e_x \\ \tilde{k}_y = \frac{\omega}{c} \cdot e_y = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot e_y \\ \tilde{k}_z = \frac{\omega}{c} \cdot e_z = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot e_z \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une première approximation de  $v_{pn}$  qui est largement suffisante. Finalement on a :

$$v_{pn} \simeq \frac{2}{\Delta t \cdot \|\vec{k}\|} \times \arcsin \left\{ c \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{\sin^2 \left\{ \tilde{k}_x \cdot \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \left\{ \tilde{k}_y \cdot \frac{\Delta y}{2} \right\}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \left\{ \tilde{k}_z \cdot \frac{\Delta z}{2} \right\}}{\Delta z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.31)$$

<sup>5</sup>Avec les angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques, on a :

$$\begin{cases} e_x = \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ e_y = \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ e_z = \cos(\theta) \end{cases}$$



Cette relation montre que la vitesse de propagation d'un mode de Fourier dépend des pas spatio-temporels et surtout de la direction de propagation. Il y a donc un phénomène de dispersion. Ceci peut se comprendre facilement. La répartition spatiale des composantes du champ électromagnétique dans les cellules fait que l'onde ne « voit » pas exactement le même milieu selon toutes les directions. Il y a pour l'onde une légère anisotropie. Cette anisotropie est due à la méthode de discrétisation spatiale des équations de Maxwell, c'est pour cette raison que l'on qualifie la dispersion de numérique.

Nous avons étudié le comportement de  $v_{pn}$  dans un maillage cubique ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ) et dans un maillage non uniforme qui présente un pas spatial  $\Delta x$  différent des deux autres pas spatiaux ( $\Delta x = \Delta y = \Delta$ ). Les résultats sont décrits dans les deux paragraphes suivant.

## 1.5.2 Maillage cubique

Le réseau de courbes de la figure 1.6 représente les variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour plusieurs directions.

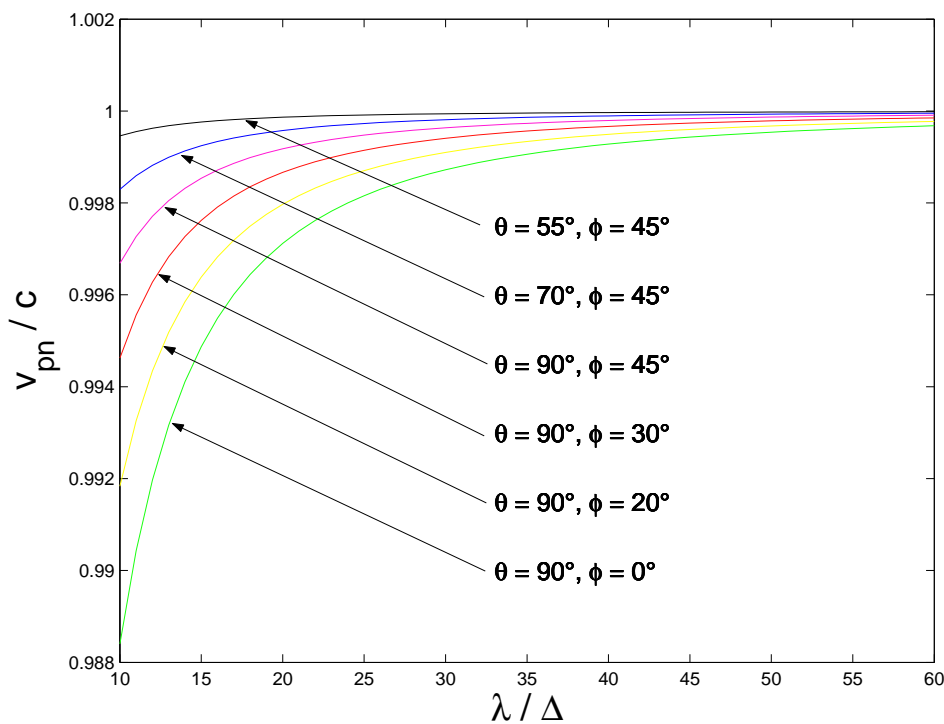


FIG. 1.6 – Variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour plusieurs directions.

- Pour une direction donnée nous constatons que la dispersion numérique diminue lorsque l'échantillonnage spatial augmente. Ceci est très logique, si le maillage est très serré vis à vis de la longueur de l'onde, cette dernière ne voit plus la répartition des composantes dans les cellules. Dans ce cas l'anisotropie disparaît.
- Pour un échantillonnage spatial donné, la dispersion numérique est maximale si l'onde se propage le long de l'un des axes du repère, par contre elle est minimale si l'onde se propage dans la direction ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $\theta = 55^\circ$ ) et ses semblables par symétrie.

<sup>6</sup>La quantité  $\frac{\lambda}{\Delta}$  qui représente le nombre de cellules par longueur d'onde, est nommée échantillonnage spatial.

### 1.5.3 Maillage non uniforme

Les réseaux de courbes des figures 1.7 et 1.8 représentent les variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour plusieurs valeurs de  $\frac{\Delta x}{\Delta}$  (dans la figure 1.7  $\Delta x \leq \Delta$  tandis que dans la figure 1.8  $\Delta x \geq \Delta$ ). Nous avons fait ces représentations lorsque l'onde se propage le long de l'axe ( $Ox$ ).

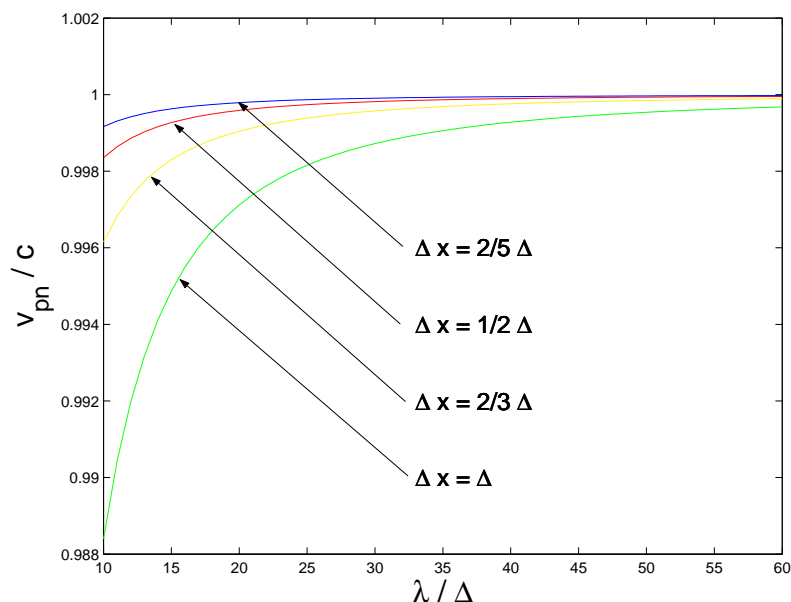


FIG. 1.7 – Variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour  $\Delta x \leq \Delta$ . L'onde se propage le long de l'axe ( $Ox$ ).

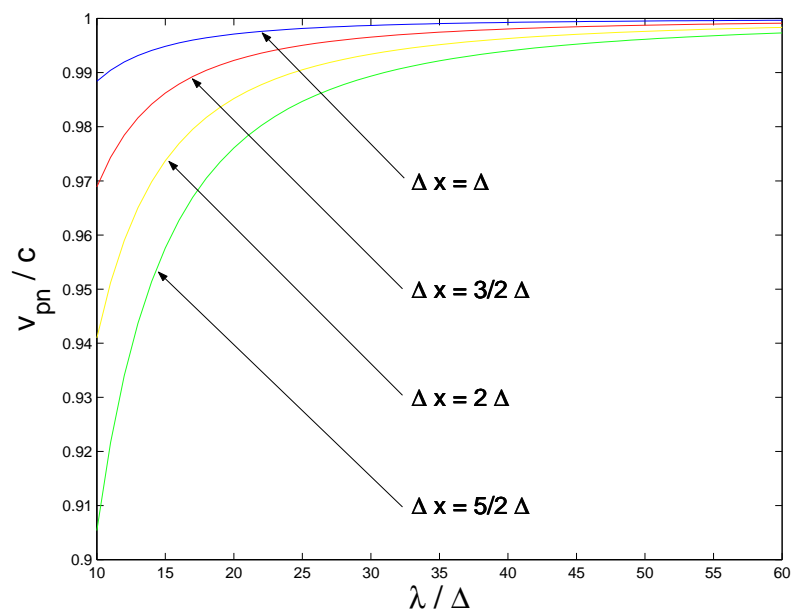


FIG. 1.8 – Variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour  $\Delta x \geq \Delta$ . L'onde se propage le long de l'axe ( $Ox$ ).

- La dispersion numérique diminue lorsque l'échantillonnage spatial augmente, que  $\Delta x$  soit plus petit ou plus grand que  $\Delta$ .
  - Pour un échantillonnage spatial fixé, la dispersion numérique devient très petite si  $\Delta x < \Delta$ .
- Pour finir on peut dire que la dispersion numérique augmente lorsque le pas temporel diminue. Ce dernier point est illustré sur la figure 1.9.

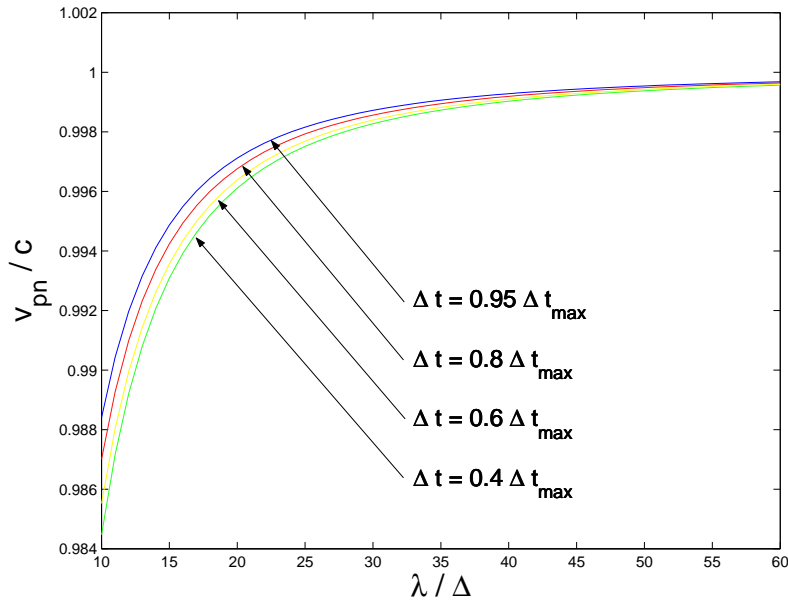


FIG. 1.9 – Variations de  $\frac{v_{pn}}{c}$  en fonction de  $\frac{\lambda}{\Delta}$  pour différentes valeurs de  $\Delta t$  (le maillage est cubique et l'onde se propage le long de l'axe  $(Ox)$ )

### 1.5.4 Conclusion

Lors du traitement d'un signal quelconque, si on ne veut pas être gêné par la dispersion numérique, il faut prendre un échantillonnage spatial suffisant, sans oublier que ce dernier doit être basé sur la plus petite longueur d'onde qui intervient dans le spectre de Fourier du signal. Cependant l'échantillonnage ne doit pas être trop fort de façon à ne pas saturer la mémoire vive du ordinateur et de façon à ne pas trop allonger le temps de calcul. Dans la plupart des simulations  $\frac{\lambda_{min}}{\Delta}$  est fixé à 10 ou à 20.

## 1.6 La génération des ondes et les surfaces de Huygens

Pour générer une excitation dans le maillage, on détermine analytiquement le champ électromagnétique correspondant à cette excitation, puis on répercute les valeurs de ce champ au niveau des cellules qui sont supposées représenter les sources. La façon de répercuter les valeurs analytiques du champ dans la grille de calcul, dépend de la nature des sources que l'on veut modéliser. Dans le cas des sources localisées telles que les sources de courant ou les sources de tension, on injecte directement les valeurs analytiques de certaines composantes de  $\vec{e}$  ou de  $\vec{h}$  dans la cellule concernée. Dans le cas des sources non localisées, sources qui sont utilisées par exemple pour générer une onde incidente, on utilise plutôt le concept des surfaces de Huygens [5]. C'est ce concept que nous expliquons dans les paragraphes qui suivent.

### 1.6.1 Le théorème de Schelkunoff et les surfaces de Huygens

Considérons un objet quelconque illuminé par une onde électromagnétique incidente. Cet objet va produire un champ diffracté qui va se superposer au champ incident. Il règne alors autour de la structure une zone de champ total qui occupe tout le volume de calcul.

Considérons maintenant une surface fermée  $\Sigma$  entourant l'objet diffractant. Cette surface, nommée surface de Huygens, délimite deux zones qui seront notées  $D_{int}$  et  $D_{ext}$ . Le théorème de Schelkunoff [6] stipule qu'il est toujours possible de trouver des courants surfaciques électriques et magnétiques  $\vec{j}_s$  et  $\vec{m}_s$ , de sorte que le champ incident soit confiné dans  $D_{int}$ . Ainsi le

champ total n'apparaît plus que dans  $D_{int}$  et le champ diffracté se trouve isolé dans  $D_{ext}$  (voir figure 1.10). En d'autres termes les courants  $\vec{j}_s$  et  $\vec{m}_s$  sont capable de générer l'onde incidente dans  $D_{int}$  et de l'annuler dans  $D_{ext}$ . On peut également dire, et c'est une autre façon de voir les choses, que  $\vec{j}_s$  et  $\vec{m}_s$  compensent la discontinuité du champ électromagnétique qui apparaît sur la surface  $\Sigma$ . Un calcul effectué au sens des distributions [7] permet d'exprimer  $\vec{j}_s$  et  $\vec{m}_s$  en fonction du champ incident :

$$\begin{cases} \vec{j}_s = \vec{n} \wedge \vec{H}_i \cdot \delta_\Sigma(M) \\ \vec{m}_s = -\vec{n} \wedge \vec{E}_i \cdot \delta_\Sigma(M) \end{cases} \quad (1.32)$$

Dans cette dernière expression  $\delta_\Sigma(M)$  est la distribution de Dirac associée à la surface  $\Sigma$ , c'est à dire que :

$$\begin{cases} \delta_\Sigma(M) = 0 & \text{si } M \notin \Sigma \\ \delta_\Sigma(M) \rightarrow +\infty & \text{si } M \in \Sigma \end{cases}$$

et  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  mais orienté vers l'intérieur de  $\Sigma$ .

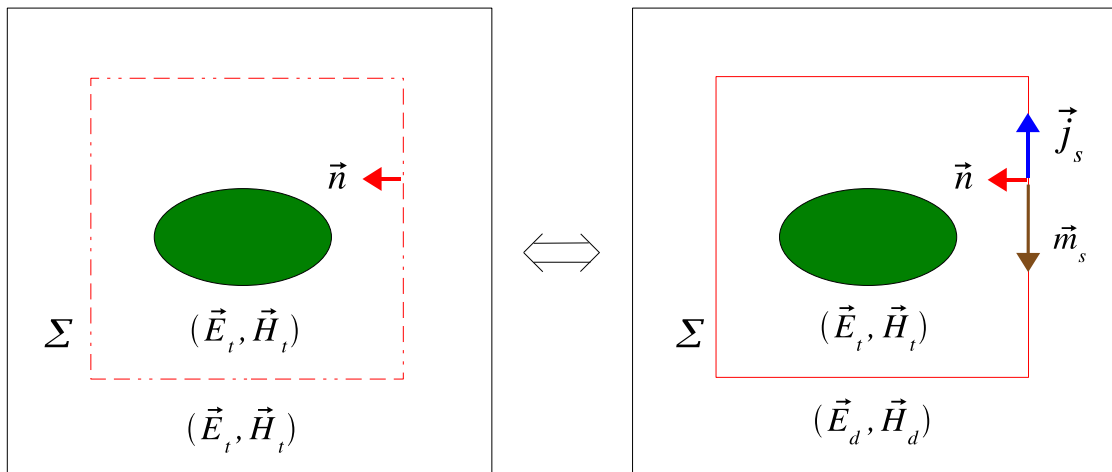


FIG. 1.10 – Illustration du théorème de Schelkunoff.

Le théorème de Schelkunoff étant présenté il est maintenant facile de comprendre comment créer une excitation dans le maillage. On calcule analytiquement le champ incident que l'on veut générer, puis on relève les valeurs de ce champ au niveau de la surface  $\Sigma$  ce qui permet d'obtenir les valeurs de  $\vec{j}_s$  et de  $\vec{m}_s$ , enfin ces dernières valeurs sont implantées dans l'algorithme de calcul.

## 1.6.2 Intérêt des surfaces de Huygens

Les surfaces de Huygens sont particulièrement bien adaptées à l'étude des problèmes de diffraction puisque le champ diffracté se retrouve seul dans  $D_{ext}$ , ce qui facilite beaucoup son analyse. D'autre part la méthode d'implantation numérique de  $\vec{j}_s$  et de  $\vec{m}_s$  dont nous avons parlé précédemment permet de générer n'importe quel type d'onde. Notons que cette méthode d'implantation à été grandement améliorée par C. Guiffaut [8] lors de ses travaux de recherche, à tel point que le champ diffracté résiduel (champ diffracté en l'absence de structure) est inférieur à  $-65dB$  sur toute la bande de fréquence.

Pour finir signalons que les surfaces de Huygens sont avantageusement utilisées dans les transformations champ proche champ lointain, ainsi que dans l'étude des antennes filaires. Pour les transformations champ proche champ lointain, l'utilisation des surfaces de Huygens permet en effet de ne pas insérer dans la grille de calcul la zone située entre le champ proche et le champ

lointain. Dans le même ordre d'idée les antennes filaires n'ont pas besoin d'être explicitement mises en place dans la grille de calcul.

## 1.7 Les conditions aux frontières et les PML

Nous avons déjà vu que le maillage est confiné dans un certain volume de calcul. Ceci est nécessaire afin de limiter l'espace mémoire utilisé ainsi que la durée d'exécution de l'algorithme itératif.

Cela veut dire que les équations de Maxwell discrétisées doivent être tronquées au niveau des frontières qui délimitent le volume de calcul. Cette troncature ne doit pas être quelconque. Elle doit permettre en effet de simuler la propagation de n'importe quelle onde sortante vers l'infini. Si cette condition n'est pas vérifiée, de multiples réflexions se produisent sur les frontières lors d'une simulation.

Une telle mise à jour des composantes sur les frontières n'est pas un problème trivial. Nous présentons ici l'évolution historique des travaux qui ont été faits à ce sujet depuis plus de vingt ans. Ensuite nous présenterons les PML de Bérenger (Perfectly Matched Layers) qui supplantent encore aujourd'hui toutes les méthodes qui ont été développées par le passé.

Les recherches concernant les conditions absorbantes aux frontières ont débutées en même temps que les premiers développements de la méthode FDTD, c'est à dire dans les années 70. Les couches adaptées de Holland [9] furent les premières à susciter un intérêt, malgré une efficacité limitée aux seules ondes qui sortent orthogonalement aux frontières. Ensuite, est apparue toute la famille des opérateurs aux dérivées partielles en espace et en temps. L'élaboration de ces opérateurs sensés simuler l'absorption des ondes sortantes, est basée sur l'équation de Helmholtz. C'est Bayliss et Turkel [10] qui les premiers ont proposés une formulation en coordonnées sphériques et cylindriques de ces opérateurs. Cependant leur travaux étaient difficilement transposables en coordonnées cartésiennes.

Enquist et Majda [11] ont proposés un opérateur adapté aux coordonnées cartésiennes, en divisant suivant chaque axe, l'équation de Helmholtz en deux opérateurs correspondant aux deux sens de propagation. Mur [12] a décrit un schéma aux différences finies centrées prenant en compte l'opérateur d'Enquist et Majda. Par la suite ce schéma a été amélioré par Joly et Mercier [13] notamment pour le traitement des arêtes et des coins en 3D.

Trefethen et Halpern [14] ont généralisé le schéma de Mur en développant l'opérateur d'Enquist et Majda sous forme de fonctions rationnelles. C'est Higdon [15] qui a parachevé la généralisation de l'opérateur d'Enquist et Majda en faisant apparaître de manière explicite les angles d'absorption au sein d'un nouvel opérateur. En dépit de tout ces efforts, le taux de réflexion généré par les opérateurs aux frontières ne descend pas en dessous de  $-40dB$  à  $-50dB$  en espace libre. En outre, les frontières doivent être placées à une dizaine de cellules de la structure traitée pour éviter des perturbations trop importantes. On notera aussi la technique de « superabsorption » de Mei-Fang [16], c'est une procédure de réduction d'erreur qui permet d'améliorer, principalement en incidence normale, l'efficacité des opérateurs aux frontières. Une autre technique basée sur l'extrapolation du champ sortant est proposée par Liao et Al [17]. Elle a l'avantage de ne pas être sensible à l'angle d'incidence ni aux variations de la vitesse de phase. Néanmoins, elle poserait des problèmes de stabilité.

L'évolution lente des performances des couches absorbantes a subi une forte accélération avec l'avènement des PML de Bérenger [18] en 1994. Les PML ont mis quasiment fin aux recherches sur les précédents types de conditions aux frontières car elles sont théoriquement parfaites dans leur absorption des ondes sortantes. On peut les voir comme une généralisation de la couche adaptée de Holland, avec une impédance égale entre chaque couche quels que soient l'angle d'incidence, la fréquence et le type de polarisation. L'espace de calcul est entouré de couches parfaitement adaptées qui vont atténuer les ondes qui les traversent grâce à des conductivités électriques

et magnétiques. Leur efficacité et leur simplicité de mise en oeuvre se payent toutefois par un coût mémoire et un temps de calcul qui peuvent doubler vu que chaque composante de champ doit-être subdivisée en deux sous-composantes sur lesquelles des conductivités spécifiques sont appliquées. Par exemple pour la composante  $E_z$  on a :

$$E_z = E_{zx} + E_{zy}$$

A  $E_{zx}$  est associée une conductivité  $\sigma_{ezx}$  qui va permettre une absorption suivant l'axe ( $Ox$ ). A  $E_{zy}$  est associée une conductivité  $\sigma_{ezy}$  qui va permettre une absorption suivant l'axe ( $Oy$ ). Par permutation circulaire des indices, on déduit les mêmes associations pour les dix autres composantes. En tout, on arrive à un système composé de douze équations. Les PML originales de Bérenger [19], [20] doivent respecter les règles suivantes :

– Adaptation d'impédance :

$$\frac{\sigma_{e,i}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{m,i}}{\mu_i} \quad i = x, y \text{ ou } z$$

– Adaptation transverse entre deux milieux diélectriques au sein d'une couche PML :

$$\frac{\sigma_{e,i,1}}{\varepsilon_{i,1}} = \frac{\sigma_{e,i,2}}{\varepsilon_{i,2}} = \frac{\sigma_{e,0}}{\varepsilon_0}$$

– Profil de conductivité croissant dans les couches PML afin d'éviter des réflexions parasites liées à la différentiation en espace.

Le coefficient de réflexion théorique est donné par :

$$R(\theta) = R(0)^{\cos(\theta)}$$

avec :

$$R(0) = \exp \left\{ \frac{-2}{c \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^d \sigma(\rho) \cdot d\rho \right\}$$

$d$  est l'épaisseur des couches PML et  $\sigma(\rho)$  représente la conductivité longitudinale.

Les PML de Bérenger peuvent offrir un coefficient de réflexion inférieur à  $-80dB$ . Elles peuvent en outre être placées très près (deux cellules) de la structure traitée.

## 1.8 Prise en compte des milieux matériels

Les équations de Maxwell que nous avons considéré dans le paragraphe 1.1 étaient écrites dans le vide et en l'absence de toutes sources. Il nous reste maintenant à expliquer comment les milieux matériels sont pris en compte dans l'algorithme de calcul.

Commençons par décrire le cas des milieux diélectriques et magnétiques, homogènes, anisotropes et pouvant faire l'objet de pertes électriques. Pour de tels milieux les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} + \vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.33)$$

Où  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\sigma}$  et  $\vec{\varepsilon}$  sont des tenseurs diagonaux représentant respectivement la perméabilité, la conductivité et la permittivité :

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & & \\ & \mu_y & \\ & & \mu_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & & \\ & \sigma_y & \\ & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

La discrétisation du système 1.33 se fait exactement selon les mêmes techniques de calcul que celles que nous avons exposées dans le paragraphe 1.1. Les équations discrètes obtenues diffèrent de celles que nous avons établies dans le paragraphe 1.1, uniquement par des coefficients multiplicatifs qui sont fonction des  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  et  $\varepsilon_i$ . Nous avons consigné ces équations discrètes dans la deuxième partie de l'annexe A.

Pour traiter les milieux inhomogènes il suffit de remplacer les constantes  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  et  $\varepsilon_i$  par des tableaux à trois dimensions, afin de prendre en compte les variations d'une cellule à l'autre de la perméabilité, de la conductivité et de la perméabilité. Partant de ce principe les équations discrétisées dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent sont utilisables, il n'y a aucun problème de principe, il faut simplement être conscient que la quantité de mémoire vive requise est plus importante que lors du traitement d'un milieu homogène.

Les conducteurs parfaits sont quand à eux pris en compte en imposant les conditions :

$$\vec{E}_{\Sigma, t} = \vec{0} \quad (1.34)$$

La figure 1.11 illustre la situation des conducteurs parfaits.

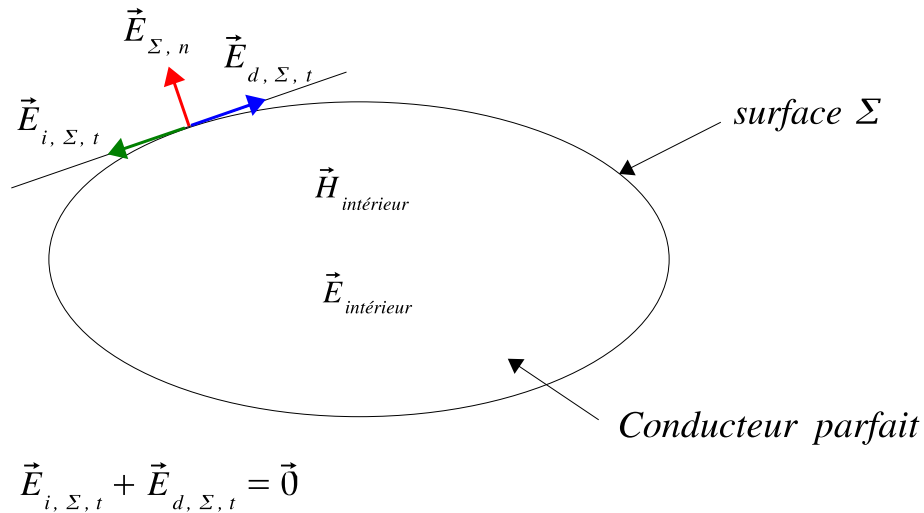


FIG. 1.11 – Conditions aux limites sur un conducteur parfait.

Il faut savoir que la discrétisation de 1.34 pose des problèmes de précision au niveau des arêtes et des coins des structures métalliques. Cependant des solutions existent pour remédier à ce genre de problème ([21] et [22]).

Pour terminer il faut mentionner le cas des milieux dispersifs. Sans rentrer dans les détails, on peut dire que ces milieux sont décrits par les modèles de Debye et de Lorentz. Ces deux modèles fournissent chacun une expression temporelle de la permittivité faisant intervenir la fonction exponentielle du temps. Dès lors le produit de convolution  $\vec{D}(t) = \vec{\varepsilon}(t) \otimes \vec{E}(t)$  peut se mettre sous forme récurrente, ce qui permet d'intégrer les valeurs des composantes de  $\vec{D}(t)$  dans l'algorithme de calcul.

## 1.9 Le code « TRIDIMO » de l'I.R.C.O.M

Le code FDTD dont nous disposons se nomme « TRIDIMO ». Il a été développé à partir d'octobre 2001 par C. Guiffaut chargé de recherche au CNRS, par A. Reineix directeur de recherche au CNRS et directeur de l'équipe et par C. Giraudon dans le cadre de sa thèse.

Le langage de programmation utilisé est le fortran 90. Le programme possède une structure modulaire et utilise au maximum les possibilités offertes par l'encapsulation des données.

Outre les fonctionnalités dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents, « TRIDIMO » gère également les fils et les torons filaires, les milieux fractales, les CPML et les maillages non uniformes. Il dispose également de tout un ensemble de fonctions sources utilisables avec les surfaces de Huygens ou en injection directe (sources de tension et sources de courant).

Notons pour finir qu'un langage de script utilisant des balises et des mots clés est disponible pour faciliter l'écriture des fichiers d'entrée et que de nombreuses possibilités sont offertes pour le stockage des données.



# Chapitre 2

## Le sous-maillage

### 2.1 Les enjeux du sous-maillage

Etudier l'influence d'un rayonnement incident sur un objet matériel est un problème qui revient très fréquemment dans les simulations numériques. De telles études nécessitent parfois des moyens informatiques très importants. C'est notamment le cas lorsque les objets étudiés présentent des détails géométriques très fins par rapport à leurs dimensions extérieures. Dans une telle situation, les dimensions des cellules de Yee doivent être inférieures aux dimensions des détails géométriques les plus fins, ce qui revient à considérer un très grand nombre de cellules, surtout lorsque l'objet est grand. Il faut alors disposer d'une très grande quantité de mémoire vive.

Des besoins informatiques conséquents sont également requis lorsque l'on est confronté à des variations très rapides du champ électromagnétique. Ces variations nécessitent un échantillonnage temporel important ce qui peut conduire à des temps de calcul prohibitifs. Dans un tel cas il faut disposer d'un calculateur cadencé à haute fréquence.

Un bon moyen pour remédier à ce genre de problème consiste à ajouter des grilles de calcul possédant des pas spatiotemporels plus petits que ceux de la grille de départ. On parle alors de sous-maillage ou de raffinement spatiotemporel. Dans un premier exemple, les grilles « fines » sont insérées sur les détails géométriques de l'objet et dans le deuxième exemple, elles sont insérées dans les régions où le champ varie rapidement.

Nous avons pris comme illustration l'exemple d'un boîtier électronique renfermant deux pistes parallèles assimilables à des fils minces. Les dimensions de ce dispositif sont précisées dans la figure 2.1.

Le but des simulations est d'étudier le couplage électromagnétique qui se produit entre les deux fils minces (étude de la diaphonie par exemple).

- Une première simulation est effectuée sans sous-maillage et avec des cellules cubiques de  $2 \text{ mm}$  de côté. Le nombre total de cellules est donc  $100 \times 50 \times 20 = 100\,000$ . Il y a 6 composantes de champ à calculer dans chaque cellule, ce qui fait un total de 600 000 composantes à déterminer. En supposant que chaque composante nécessite une place mémoire de 4 octets (réel simple précision), on obtient finalement une quantité de mémoire requise égale à 2 400 000 octets.
- Une deuxième simulation est effectuée avec un sous-maillage placé sur les deux fils. Il est constitué de deux rangés de 100 cellules cubiques de  $2 \text{ mm}$  de côté (voir figure 2.2). Le reste du volume, c'est à dire le grand maillage, est constitué de cellules cubiques de  $10 \text{ mm}$  de côté. Le petit maillage comporte ainsi 200 cellules, ce qui représente 1200 composantes de champ et donc 4800 octets d'information. Le grand maillage comporte approximativement  $20 \times 10 \times 4 = 800$  cellules, c'est à dire 4800 composantes de champ, soit 19200 octets d'information. La deuxième simulation requiert finalement une quantité de mémoire égale à 24 000 octets.

La simulation faisant intervenir le sous-maillage demande finalement cent fois moins de mémoire

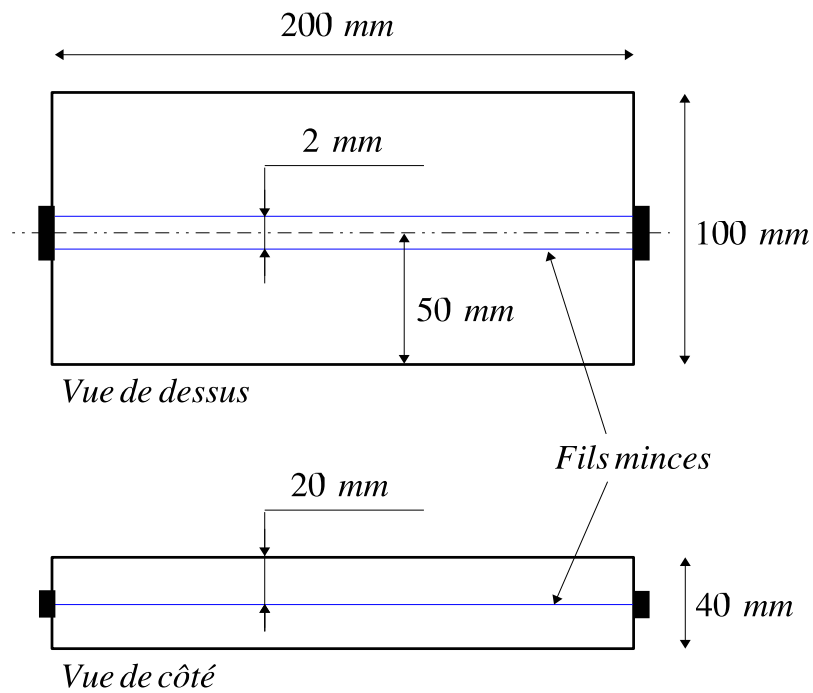


FIG. 2.1 – Boîtier électronique.

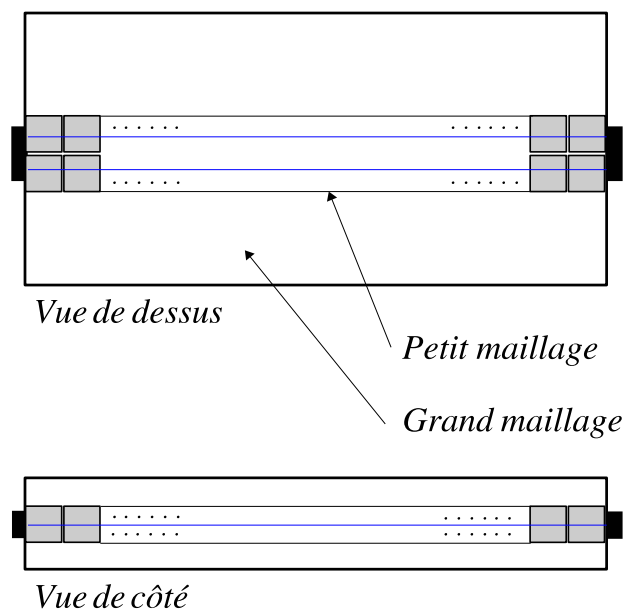


FIG. 2.2 – Sous-maillage des deux fils minces.

que la première simulation ! Elle fait également intervenir cent fois moins de cellules, ce qui va aussi se ressentir sur le temps de calcul. Nous voyons avec cet exemple simple que le sous-maillage permet de réaliser de très grandes économies en moyens informatiques.

Le gain de mémoire et de temps réalisé avec le sous-maillage, croît lorsque le rapport entre les dimensions des grandes cellules et des petites cellules augmente. Ce rapport est appelé facteur de raffinement spatial, on le notera  $r_s$ . Notons que  $r_s$  était égale à 5 dans notre illustration. De la même façon, on définit le facteur de raffinement temporel  $r_t$  comme étant le rapport entre les pas temporels du grand maillage et du petit maillage. Nous verrons dans la suite que  $r_s$  et  $r_t$  peuvent être égaux ou différents.

## 2.2 Etat de l'art

L'idée d'utiliser des grilles raffinées est dans le fond assez simple. Par contre la façon de les mettre en place dans le grand maillage n'est pas évident à réaliser. En effet, à chaque itération temporelle il faut mettre en relation les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre de la frontière qui sépare les deux maillages et les manières de procéder sont multiples !

La littérature sur ce sujet ne manque pas. Nous proposons ici de faire un tour d'horizon des travaux qui ont été réalisés sur le problème du sous-maillage. Nous avons subdivisé cette bibliographie en deux sous-paragraphes, le premier concerne les méthodes d'interpolation et le second concerne les méthodes basées sur la conservation de l'énergie électromagnétique. Etant donné le libellé de notre sujet, nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux publications de sous-maillage relatives à la méthode FDTD utilisant des maillages orthogonaux et uniformes.

### 2.2.1 Bibliographie sur les méthodes d'interpolation

Le premier programme faisant intervenir deux maillages différents, à été élaboré par Kunz et Simpson en 1981 [23]. Leur technique nommée "expansion technique", consistait à effectuer séparément les traitements dans le grand maillage et dans le petit maillage. Un premier calcul effectué dans le domaine grossier, permettait d'obtenir les valeurs du champ électromagnétique sur l'interface au cours du temps. Ces valeurs étaient alors stockées en mémoire pour être ensuite replacées sur l'interface lors d'un deuxième traitement effectué cette fois-ci dans le maillage fin. Le temps d'exécution d'un tel algorithme était cependant prohibitif à cause des opérations de stockage et de lecture des valeurs du champs sur l'interface.

Le premier schéma de sous-maillage faisant intervenir un traitement simultané des deux domaines, à été proposé par Kim et Hoefler en 1990 [24]. Kim et Hoefler ont proposé un tel schéma pour un espace à deux dimensions et pour le mode de propagation transverse électrique. Le même facteur de raffinement a été choisi en espace et en temps, afin d'avoir des critères de stabilité identiques dans chacune des deux grilles. Ce facteur de raffinement était égale à 4. Le schéma proposé était basé sur des relations linéaires d'interpolation en espace et en temps, appliquées aux composantes tangentielles de  $\vec{e}$  situées sur l'interface, et aux composantes de  $\vec{H}$  situées sur les cellules adjacentes à la frontière du côté intérieur. Les auteurs ont appliqué leur algorithme au cas de la diffraction d'une onde électromagnétique par une structure métallique. La comparaison de leurs résultats avec le même problème traité sans le sous-maillage a permis de valider leur méthode. Les auteurs signalent cependant l'existence de réflexions parasites assez importantes surtout lorsque l'échantillonnage spatial est faible.

En 1991 Zivanovic, Yee et Mei [25] ont généralisé l'algorithme de Kim et de Hoefler pour un espace à trois dimensions mais avec des facteurs de raffinement en espace et en temps égaux à deux et non à quatre. Les auteurs ont testé leur nouveau modèle sur un guide d'onde rectangulaire présentant une brutale discontinuité de section, ainsi que sur un guide d'onde rectangulaire et uniforme mais possédant un diaphragme. La comparaison de leurs résultats avec les deux mêmes problèmes traités en maillage uniforme, a permis de valider la méthode. Cette dernière porte le nom de méthode VSSM (Variable Step Size Method). Dans le même article, les auteurs ont ensuite présenté un autre modèle de sous-maillage en trois dimensions mais possédant cette fois-ci des facteurs de raffinement en espace et en temps égaux à trois. Le schéma proposé n'est pas basé sur des interpolations linéaires mais plutôt sur la discrétisation de l'équation de propagation. Cette dernière est en effet utilisée pour calculer les composantes tangentielles de  $\vec{e}$  sur l'interface. Notons que cette méthode nécessite la connaissance du champ  $\vec{e}$  en dehors des limites du petit maillage. Ce dernier a alors été déterminé à partir des composantes de  $\vec{E}$ , à l'aide de relations d'interpolation quadratiques. Cette nouvelle méthode a été validée sur des simulations faisant in-

tervenir des guides d'onde 1D, 2D et 3D et des microstrips. Notons que cette série de tests intitulé dans l'article "Stability tests of the VSSM" concerne la précision de la méthode, plutôt que sa stabilité.

Ce dernier schéma à été repris par Prescott Schuley [26] en 1992 mais seulement dans le cas d'un espace à deux dimensions. Leur schéma diffère du précédent par la méthode de calcul du Laplacien de  $\vec{e}$  sur l'interface. En effet dans la méthode VSSM le champ  $\vec{e}$  situé en dehors des limites du petit maillage est d'abord calculé à partir des composantes de  $\vec{E}$  avoisinantes à l'aide de relations d'interpolation quadratiques et c'est seulement après que le Laplacien est déterminé. Dans cette nouvelle méthode, nommée méthode MRA (Mesh Refinement Algorithm), les composantes du Laplacien de  $\vec{e}$  sont directement interpolées à partir des composantes du Laplacien de  $\vec{E}$ . Les auteurs étudient ensuite le comportement de la réflexion numérique produite par l'interface en fonction de la fréquence. Cette étude est menée lors d'une simulation faisant intervenir un guide d'onde rectangulaire. Des réflexions de 0,65% sont annoncées, cependant les fréquences utilisées ne sont pas précisées.

En 1995 Shimizu, Okoniewski et Stuchly [27] proposent un autre schéma basé sur des interpolations linéaires en espace et en temps. Ces dernières sont appliquées à la fois aux composantes du champ électrique et aux composantes du champ magnétique situées près de l'interface. Les auteurs étudient ensuite le comportement de la réflexion numérique de l'interface en fonction de la fréquence. Pour cela une simulation faisant intervenir un guide d'onde cylindrique est réalisée. Des réflexions de 0.6% sont annoncées pour un échantillonnage spatial  $\frac{\lambda}{\Delta l}$  égale à 20.

En 1997 Chevalier, Luebbers et Cable [28] proposent un schéma de sous-maillage très original en ce sens que des matériaux diélectriques ou parfaitement conducteurs peuvent traverser l'interface. Les frontières qui existent entre ces matériaux et le milieu environnant (l'air ou le vide) doivent être orthogonales à l'interface. En d'autres termes les matériaux peuvent traverser l'interface mais orthogonalement à celle-ci. Pour éviter toute confusion dans les explications qui suivent, l'interface entre les deux maillages sera notée  $\Sigma$  et les frontières citées précédemment seront notées  $F$ . Considérons d'abord le cas d'un diélectrique. Au niveau de  $F$  il y a discontinuité de la composante normale du champ électrique ( $\vec{E}_{1,\perp,F} \neq \vec{E}_{2,\perp,F}$ ) et continuité de la composante normale du champ magnétique ( $\vec{H}_{1,\perp,F} = \vec{H}_{2,\perp,F}$ ). Puisque  $F$  est orthogonale à  $\Sigma$ ,  $\vec{H}_{1,\perp,F}$  et  $\vec{H}_{2,\perp,F}$  s'identifient respectivement à  $\vec{H}_{1,\parallel,\Sigma}$  et à  $\vec{H}_{2,\parallel,\Sigma}$ . Ainsi la relation  $\vec{H}_{1,\perp,F} = \vec{H}_{2,\perp,F}$  entraîne l'égalité  $\vec{H}_{1,\parallel,\Sigma} = \vec{H}_{2,\parallel,\Sigma}$  si bien que l'on peut considérer un unique champ  $\vec{H}_{\parallel,\Sigma}$  en tout point de  $\Sigma$ . Le même raisonnement peut être fait à propos de  $\vec{h}_{\parallel,\Sigma}$ . Finalement le schéma de raccordement entre les deux grilles peut être effectué indépendamment des matériaux si ce dernier est basé sur la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique au niveau de  $\Sigma$ :  $\vec{H}_{\parallel,\Sigma} = \vec{h}_{\parallel,\Sigma}$ . C'est pour cette raison que les emplacements des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ont été permutés dans les cellules de Yee. D'autre part les facteurs de raffinement impairs ont été privilégiés afin que certaines composantes de  $\vec{H}_{\parallel,\Sigma}$  et de  $\vec{h}_{\parallel,\Sigma}$  se situent au même endroit. Le schéma a été programmé pour un espace à trois dimensions et avec un facteur de raffinement égale à trois. Des interpolations temporelles quadratiques ont été utilisées pour déterminer les valeurs de  $\vec{h}_{\parallel,\Sigma}$  aux dates  $(n + 1/3)\Delta t$  et  $(n + 2/3)\Delta t$ . Les composantes de  $\vec{h}_{\parallel,\Sigma}$  qui ne sont pas placées aux mêmes endroits que celles de  $\vec{H}_{\parallel,\Sigma}$  sont quand à elles calculées par des interpolations spatiales linéaires. Pour les matériaux parfaitement conducteurs la démarche précédente est encore valable, elle demande juste une modification des interpolations spatiales au niveau des points de  $\Sigma$  qui sont proches des conducteurs. Notons cependant que certaines corrections ont dues être effectuées sur les composantes de  $\vec{h}$  et de  $\vec{e}$  situées près de  $\Sigma$ , ainsi que les composantes de  $\vec{E}$  placées dans le petit maillage et près de  $\Sigma$ . Sans ces corrections le modèle n'est pas stable. Les auteurs ont validé leur modèle en simulant la diffraction d'une onde par une sphère diélectrique, ainsi que le rayon-

nement émis par un antenne monopolaire.

La même année Okoniewski, Okoniewska et Stuchly [29] proposent un nouveau schéma d'interpolation 3D avec un facteur de raffinement égale à deux. La grille fine est décalée par rapport au grand maillage d'une demi petite cellule dans chacune des trois directions. De plus une zone de recouvrement entre les deux maillages est mise en place. L'épaisseur de cette bande de recouvrement est égale à la largeur d'une grande cellule. Les interpolations utilisées sont de trois types: linéaires, spline cubique et «spline shape preserving». Le but est d'obtenir une réflexion numérique qui soit la plus basse possible. Le schéma utilisant les splines cubiques est le meilleur des trois et il donne une réflexion de -65dB en  $\frac{\lambda}{10}$ .

Toujours en 1997 [30] Kapoor propose à son tour un schéma de sous-maillage avec un facteur de raffinement égale à trois. Ce schéma, qui semble être programmé en 2D, utilise des relations d'interpolations linéaires dans une zone de recouvrement dont l'épaisseur est égale à celle d'une grande cellule. L'auteur présente un procédé de raccordement en 15 étapes. Malheureusement les indices temporels ne sont pas précisés de sorte qu'il est difficile de savoir exactement les traitements qui ont été effectués.

La même année White, Iskander et Huang [31] propose une généralisation de la méthode MRA pour un espace à trois dimensions. De plus le facteur de raffinement peut varier de 2 à 10. Ce nouveau code nommé code MGDM est comparé avec la méthode VSSM lors de simulations faisant intervenir un guide d'onde à section rectangulaire. Il apparait que les erreurs commises avec la méthode MGDM sont plus petites que celles générées par la méthode VSSM. De plus, selon le facteur de raffinement utilisé, le critère CFL doit être abaissé à des valeurs inférieures à 0.5 lors de l'utilisation de la méthode VSSM, alors qu'il reste égale à 0.5 avec le code MGDM dans les mêmes circonstances.

Toujours en 1997 Krishnaiah et Railton [32] adoptent une démarche un peu différente des précédentes, c'est à dire qu'ils modélisent l'interface à l'aide d'un circuit équivalent, cependant des relations d'interpolation sont encore utilisées. Cette méthode est appliquée en 2D pour un facteur de raffinement égale à trois et elle est testée sur des structures diélectriques contenues dans un guide d'onde. Les auteurs ont constaté que leur algorithme est stable sur un grand nombre d'itérations (valeur non précisée).

En 1999 Yu et Mittra [33] élaborent un modèle 3D possédant un facteur de raffinement égale à cinq. Ce modèle possède une région transitoire située entre les deux grilles. Grâce à cette région, les composantes du champ électromagnétique sur la frontière du petit maillage sont calculées à l'aide des champs électriques et magnétiques du grand maillage. Des relations d'interpolation linéaires en espace et en temps sont utilisées. Les auteurs obtiennent une réflexion numérique inférieure à  $-52 dB$  en  $\frac{\lambda}{10}$ , ainsi que la stabilité de l'algorithme lorsque  $dt \leq 0.5 \cdot dt_{max}$  dans les deux grilles. Nous remarquons cependant que la durée de stabilité de l'algorithme n'est pas donnée.

La même année Chaillou Wiart et Tabbara [34] utilisent l'algorithme d'Okoniewski en l'appliquant successivement à plusieurs grilles imbriquées l'une dans l'autre. Les deux maillages sont ainsi séparés par une zone intermédiaire dans laquelle les facteurs de raffinement augmentent progressivement. Les auteurs ont obtenu la stabilité du schéma sur 60 000 itérations pour un facteur de raffinement allant jusqu'à 16. Pour des facteurs de raffinement plus élevés la durée de stabilité du schéma diminue. La réflexion numérique varie de 1% à 4% en  $\frac{\lambda}{10}$  selon le facteur de raffinement envisagé.

En 2001 White, Yun et Iskander [35] proposent une généralisation de la technique de Chevalier Luebbers et Cable. Comme dans cette dernière publication l'interface peut traverser un diélectrique mais cette fois-ci le facteur de raffinement peut-être quelconque. Une étude détaillée est menée à propos de la précision de l'algorithme mais les durées de stabilité obtenues ne sont pas précisées.

En 2002 Wang et Teixeira [36] ont développé un modèle 2D-TE dans lequel les interpolations sont optimisées en fonction de l'angle d'arrivée de l'onde incidente. La méthode est compliquée mais elle permet de réduire la réflexion numérique dans certaines directions (notamment  $45^\circ$ ).

En 2004 Sun et Choi [37] proposent un modèle 2D-TM basé sur la discrétisation spatiale du Laplacien au niveau de l'interface. Une telle discrétisation permet en effet de déterminer les composantes du champ de part et d'autre de la frontière. Ce modèle développé pour un facteur de raffinement égale à trois, est comparé avec d'autres modèles présentés dans la littérature, notamment avec le modèle hybride FDTD (2,4). La stabilité de leur schéma est obtenue sur 20 000 itérations mais pas au-delà.

## 2.2.2 Bibliographie sur les méthodes conservatives

Les travaux sur ce sujet ne sont pas très nombreux, de plus ils font appel à des formalismes mathématiques très élaborés.

Thoma et Weiland [38] et [39] exposent la technique FIT (Finite Integration Technique) qui se présente comme une généralisation de la méthode FDTD. Cette technique utilise les flux et les circulations des composantes du champ électromagnétique dans deux espaces duaux. Une telle formulation se prête bien à l'écriture de la conservation de l'énergie électromagnétique. D'ailleurs un critère de stabilité est établi [39].

Un peu plus tard Bonilla et Wong [40] présentent un schéma de sous-maillage 3D basé sur la méthode des éléments finis. Ce modèle qui utilise un facteur de raffinement égale à trois est utilisé pour modéliser un téléphone mobile. Les auteurs ne mettent pas en avant la conservation de l'énergie électromagnétique et la stabilité du schéma n'est pas testée.

En 2000 Fouquet [42] présente une thèse sur le raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell. Dans la première partie de son document il s'intéresse aux phénomènes d'instabilité produits par les schémas d'interpolation. Dans la deuxième partie il présente deux schémas de sous-maillage basés sur la conservation d'une énergie discrète. Ce travail qui est présenté directement dans le cadre des différences finies centrées, concerne d'abord un modèle 1D puis ensuite un modèle 2D-TE. Dans la dernière partie de ces travaux, Fouquet généralise l'approche précédente en utilisant la méthode des éléments finis. Après avoir ré-écrit le problème sous forme variationnelle, les éléments finis sont introduits puis un schéma de raccordement 3D est explicité en termes de différences finies.

En 2004 Marrone et Mittra [41] utilisent la méthode CM (Cell Method) dans des modèles 2D. Cette méthode qui est très ressemblante à la méthode FIT leur permet de trouver deux critères de stabilité.

## 2.3 Les objectifs fixés

A l'issu de ce tour d'horizon on s'aperçoit qu'il y a deux familles de méthodes pour traiter un problème de sous-maillage. La première est la famille des méthodes d'interpolation. Ces méthodes sont généralement assez simples à mettre en oeuvre, par contre elles ont tendance à produire des instabilités surtout lorsque les durées de simulation sont importantes. La deuxième regroupe les méthodes qui sont basées sur la conservation de l'énergie électromagnétique discrète. Ces dernières sont théoriquement stables mais elles sont difficiles à mettre en oeuvre car elles sont très souvent développées dans des cadres mathématiques abstraits. Nous avons remarqué par ailleurs que les schémas de sous-maillage ne sont pas totalement explicités et que les performances des algorithmes sont établies dans des contextes flous.

Partant de ces divers constats nous nous sommes fixés des objectifs à atteindre, aussi bien pour les méthodes d'interpolation que pour les méthodes basées sur la conservation de l'énergie. Nous avons consigné ces objectifs dans les deux paragraphes qui suivent.

### 2.3.1 Objectifs à atteindre pour les méthodes d'interpolation

- Elaborer un schéma de sous-maillage en 3D présentant une durée de stabilité suffisante.
- Déterminer si les instabilités sont dues au traitement spatial seul, au traitement temporel seul ou bien au deux à la fois.
- A partir de ce qui précède, élaborer une méthode de construction des schémas permettant de mieux maîtriser les instabilités.

### 2.3.2 Objectifs à atteindre pour les méthodes basées sur la conservation de l'énergie

- Présenter une méthode basée sur la conservation de l'énergie, à l'aide d'outils mathématiques accessibles à la plupart des physiciens. Pour cela nous avons pris comme point de départ la méthode variationnelle présentée par T. Fouquet [42].
- Proposer une version simplifiée de cette méthode variationnelle et l'appliquer à la stabilisation d'un algorithme de sous-maillage.

Parallèlement aux objectifs que nous venons de présenter nous avons également tenu à produire un document qui soit aussi clair que possible, *c'est notre objectif pédagogique*. Pour cela nous avons veillé à conserver les mêmes notations tout au long de ce mémoire, nous n'avons pas non plus hésité à présenter des dessins, des courbes et des tableaux à chaque fois que cela nous a paru nécessaire. De nombreux paragraphes et sous-paragraphes ont également été utilisés afin de bien structurer les idées présentées. Ceci se fait parfois au détriment de la longueur de l'exposé, cependant nous espérons que ces longueurs ne nuiront pas à la compréhension du texte.

## 2.4 Méthode de présentation et d'étude des modèles de sous-maillage

Dans ce paragraphe nous expliquons la façon dont nous allons présenter et étudier les modèles de sous-maillage. Il nous a paru important pour la clareté de l'exposé de présenter ces deux aspects avant même de considérer un modèle particulier.

## 2.4.1 Présentation

Afin de bien cadrer notre sujet nous avons limité notre étude aux modèles de sous-maillage utilisant la méthode des différences finies centrées avec des maillages orthogonaux et uniformes. Dans un tel contexte il est possible de donner une représentation simple et concise d'un modèle de sous-maillage. Pour cela on représente sur un axe temporel une suite de figures montrant chacune une vue en coupe de la frontière et des cellules qui y sont accolées. Chaque figure est relative à une seule itération temporelle et montre une seule grande cellule accolée à la frontière, accompagnée des  $r_s^2$  petites cellules qui lui font face du côté du petit maillage. La figure 2.3 apporte une illustration de notre méthode de représentation dans le cas où  $r_s = r_t = 2$ .

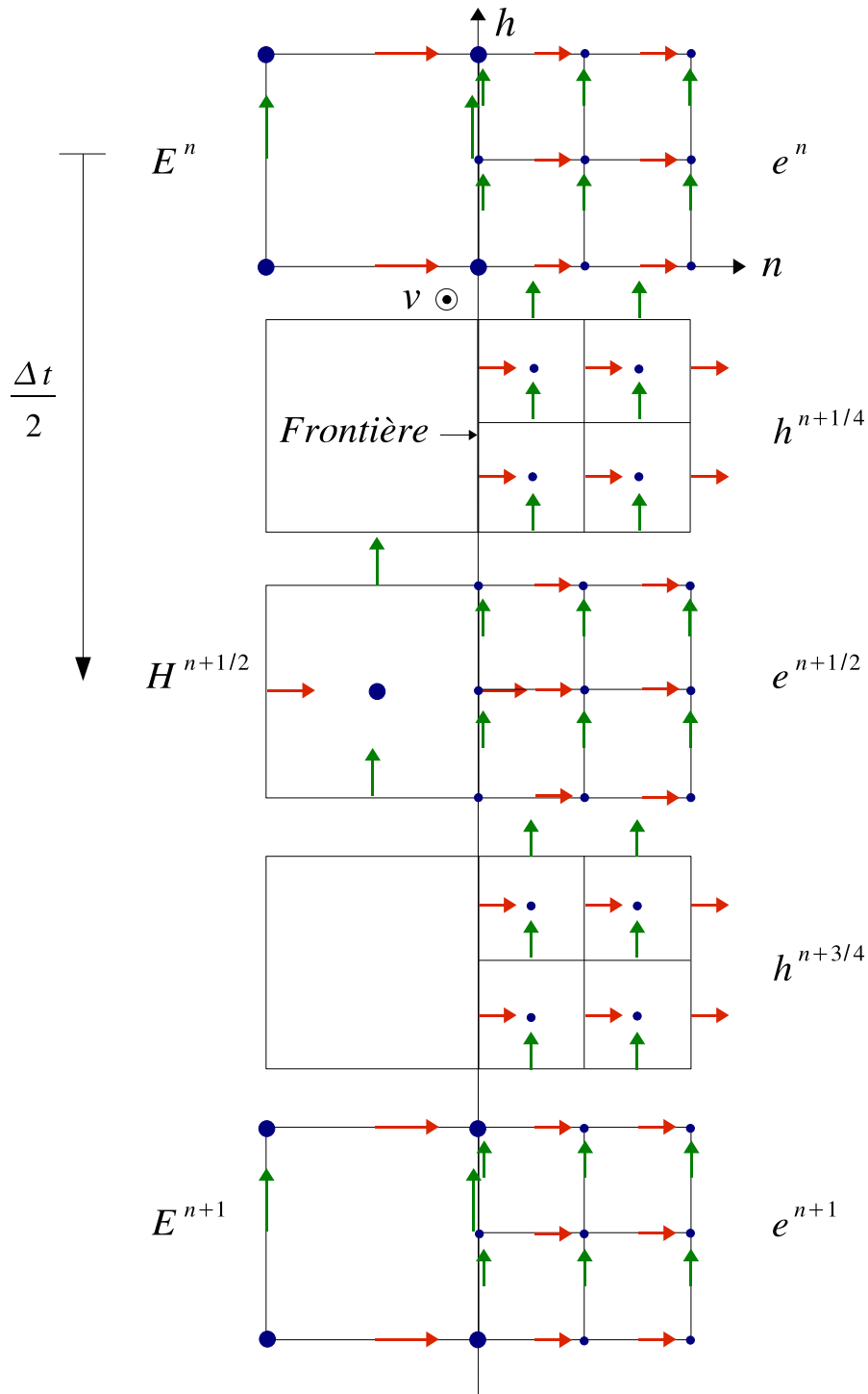


FIG. 2.3 – Représentation d'un schéma de sous-maillage avec  $r_s = r_t = 2$ .



Sur cette figure l'axe temporel est orienté vers le bas, le grand maillage est situé sur la partie gauche du dessin tandis que le petit maillage se situe sur la partie droite. En suivant l'axe du temps du côté du grand maillage, on trouve la séquence de calcul  $E^n$ ,  $H^{n+\frac{1}{2}}$  et  $E^{n+1}$ . On reconnaît ici le schéma de type « saute mouton » relatif au grand maillage. En suivant l'axe du temps du côté du petit maillage, on trouve la séquence de calcul  $e^n$ ,  $h^{n+\frac{1}{4}}$ ,  $e^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $h^{n+\frac{3}{4}}$  et  $e^{n+1}$ . On reconnaît cette fois-ci deux schémas de type « saute mouton » successifs, ce qui est logique puisque le facteur de raffinement temporel  $r_t$  est égale à deux. En d'autres termes il y a bien deux sous-itérations temporelles dans le petit maillage pour une itération temporelle dans le grand maillage. Le facteur de raffinement spatial  $r_s$  étant aussi égale à deux, nous avons quatre petites cellules en face d'une grande cellule.

Les axes utilisés sont notés  $(On)$ ,  $(Oh)$  et  $(Ov)$ . Le plan  $(O, h, v)$  représentera toujours la face que nous étudions. L'axe  $(On)$  est orthogonal à cette face et sera toujours orienté vers l'intérieur du petit maillage <sup>1</sup>. Les composantes du champ électromagnétique sont représentées sur les figures avec la convention suivante pour les couleurs :

- En rouge pour les composantes parallèles à l'axe  $(On)$ ,
- En vert pour les composantes parallèles à l'axe  $(Oh)$ ,
- En bleu pour les composantes parallèles à l'axe et  $(Ov)$ .

La disposition des composantes dans les cellules est conforme au schéma de Yee.

Ce mode de représentation étant adopté il est alors plus facile d'expliquer un modèle de sous-maillage. En effet, il suffira de présenter les relations qui existent entre les composantes des deux maillages et ceci pour chaque itération temporelle. Les composantes concernées par ces relations seront toujours illustrées sur notre dessin, d'autre part elles seront légendées et numérotées. Les relations seront expliquées par des équations et illustrées par des figures supplémentaires. Le schéma de sous-maillage se présentera donc comme une sorte de « listing illustré » des opérations qu'il faut effectuer à chaque itération temporelle.

Précisons pour terminer que les limites du domaine de calcul sont modélisées par des PML.

## 2.4.2 Méthode d'étude

Il nous reste maintenant à préciser la façon dont nous étudierons les modèles élaborés. Les deux propriétés les plus importantes d'un schéma de sous-maillage sont la réflexion numérique et la stabilité. Notre méthode d'étude consistera donc à analyser systématiquement ces deux aspects.

### 2.4.2.1 La réflexion numérique

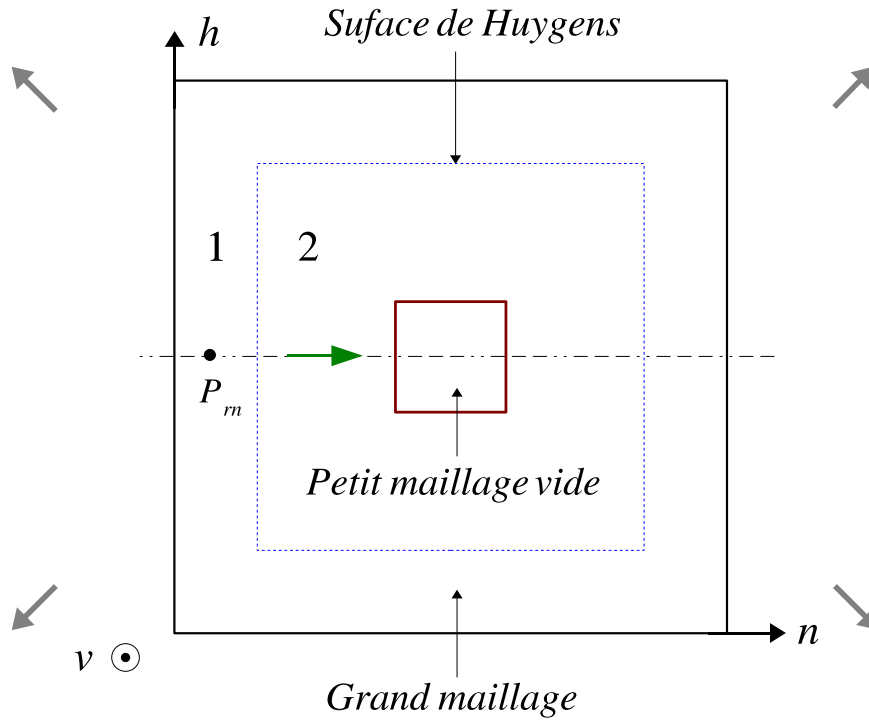
Quelle que soit la méthode utilisée pour traiter l'interface, cette dernière n'est jamais totalement transparente. C'est à dire que toute onde électromagnétique qui traverse la frontière entre les deux maillages produit nécessairement une onde réfléchie. C'est le phénomène de réflexion numérique. La figure 2.4 illustre notre méthode de mesure de la réflexion numérique.

Nous avons fait le choix de mesurer cette réflexion en utilisant une *incidence normale* et ceci pour tous les schémas de sous-maillage que nous avons testés. Par soucis de simplicité, nous avons volontairement laissé de côté l'étude des variations de la réflexion numérique en fonction de l'angle d'incidence <sup>2 3</sup>. L'important pour nous à été d'obtenir à chaque fois *un ordre de grandeur* de la réflexion en utilisant toujours le même procédé de mesure.

<sup>1</sup>Ce choix de notation à été motivé par le fait que nous n'avons pas voulu particulariser notre étude à l'une des six faces constituant la frontière ( $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$  etc...). Par ailleurs c'est cette même notation que nous avons systématiquement utilisée dans les *structures de données* de nos programmes, le principe étant que les « axes généralisés »  $(Oh)$ ,  $(Ov)$  et  $(On)$  s'identifient successivement aux axes réels du repère au cours de l'exécution du programme.

<sup>2</sup>Comme cela se fait souvent en utilisant des guides d'onde en mode  $TE_{10}$ .

<sup>3</sup>De telles variations sont d'ailleurs assez faibles.



1 : zone de champ diffracté

2 : zone de champ total

→ : vers PML

FIG. 2.4 – Mesure de la réflexion numérique.

Une onde électromagnétique plane est générée dans le grand maillage par l'intermédiaire d'une surface de Huygens. L'onde se propage de gauche à droite le long de l'axe  $(On)$  et elle est polarisée linéairement le long de l'axe  $(Ov)$ . Elle traverse le petit maillage qui est vide, de part en part et de gauche à droite. Les six faces qui délimitent le petit maillage et qui constituent l'ensemble de l'interface, produisent des réflexions assimilables à un champ diffracté. Ce champ se retrouve seul dans la zone de champ diffracté située en arrière de la surface de Huygens. C'est ici même que l'on place un point d'observation nommé  $P_m$ <sup>4</sup>. Notons que toutes les dimensions seront précisées pour chaque simulation.

Les variations au cours du temps de  $E_v$  sont caractérisées par une Gaussienne d'amplitude  $1 V/m$ . La plus grande fréquence intervenant dans le spectre de Fourier de cette Gaussienne sera notée  $f_{max}$  et la longueur d'onde correspondante sera notée  $\lambda_{min}$ . Nous avons choisit pour cette composante particulière du spectre un nombre d'échantillonnages spatiaux égale à 10, c'est à dire que si  $\Delta_{max}$  représente le plus grand pas spatial dans le grand maillage alors nous aurons  $\frac{\lambda_{min}}{\Delta_{max}} = 10$ . La valeur de  $\Delta_{max}$  étant fixée, toutes les autres composantes du spectre ont alors un nombre d'échantillonnages spatiaux supérieur à 10. Ainsi l'analyse en fréquence du signal réfléchi nous donnera la réflexion produite par chacun des modes de Fourier sachant que leur nombre d'échantillonnages spatiaux varie de 10 à  $+\infty$ .

Il nous reste maintenant à définir précisément le coefficient de réflexion numérique. Comme nous l'avons dit précédement l'onde réfléchie est analysée en fréquence. Nous notons  $E_{v,r}(t)$  le

<sup>4</sup>Par convention, un point d'observation désigne l'origine de la cellule de Yee dans laquelle les composantes du champ électromagnétique sont relevées.

signal réfléchi et  $\tilde{E}_{v,r}(f)$  sa transformée de Fourier. Le coefficient de réflexion numérique est alors défini par :

$$r_n(f) = 20 \times \log_{10} \left\{ \frac{|\tilde{E}_{v,r}(f)|}{|\tilde{E}_{v,ref}(f)|} \right\}$$

Dans cette relation  $\tilde{E}_{v,ref}(f)$  désigne la transformée de Fourier d'un certain signal de référence. Ce signal est obtenu au point  $P_{rn}$  lors d'une simulation où le petit maillage est absent.

Nous représenterons finalement les variations de  $r_n$  en fonction de la fréquence  $f$  pour  $f \in [0, f_{max}]$ . La correspondance entre  $f$  et  $\frac{\lambda}{\Delta_{max}}$  est illustrée sur la figure 2.5. Nous utiliserons souvent cette correspondance dans les commentaires concernant la réflexion numérique.

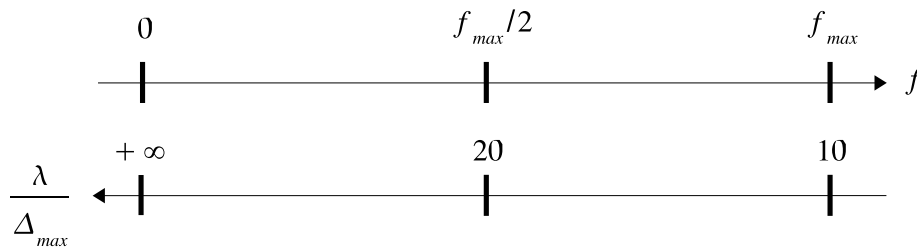


FIG. 2.5 – Correspondance entre  $f$  et  $\frac{\lambda}{\Delta_{max}}$ .

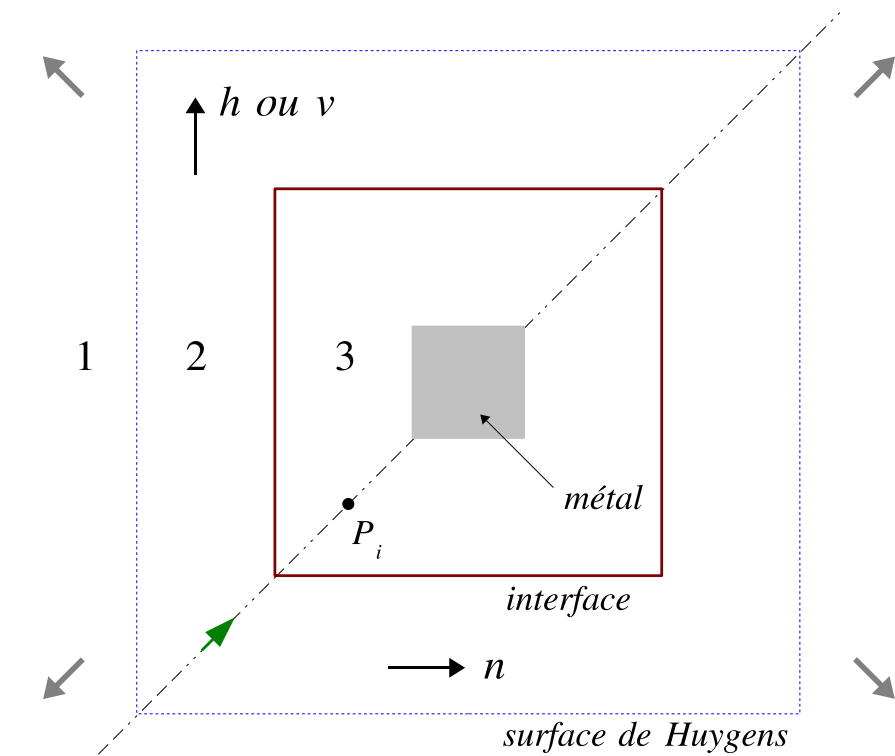
#### 2.4.2.2 La stabilité

De nombreux algorithmes de sous-maillage présentent des problèmes de stabilité lorsque les durées de simulation sont importantes. Cela se manifeste par une divergence dans les deux maillages de toutes les composantes du champ électromagnétique. Pour apprécier la durée de stabilité d'un modèle de raffinement on peut en principe effectuer n'importe quelle simulation. Nous avons cependant pris deux précautions. En premier lieu nous avons évité de faire des simulations avec un sous-maillage vide, de façon à être proche des conditions d'utilisation réelles du programme. Pour cela nous avons placé un bloc métallique dans le petit maillage. Ensuite nous avons fait en sorte de tester chaque modèle dans les mêmes conditions afin d'être sûr de bien comparer ce qui est comparable. Cette dernière précaution est très importante car les durées de stabilité d'un même algorithme peuvent beaucoup varier d'une simulation à l'autre. La figure 2.6 illustre notre méthode de mesure de la stabilité.

Le métal, le petit maillage et le volume délimité par les surfaces de Huygens, possèdent les mêmes proportions et sont centrés les uns par rapport aux autres. Ainsi les plus grandes diagonales de ces trois volumes sont confondues en un seul axe que nous avons choisi comme axe de propagation pour l'onde incidente. L'angle de polarisation de cette onde a été fixé arbitrairement à  $45^\circ$ <sup>5</sup>. Ce dernier est représenté sur la figure 2.7.

Les variations dans le temps de  $\vec{E}$  seront caractérisées par la même fonction Gaussienne que celle que nous utilisons pour mesurer la réflexion numérique. Le champ électromagnétique est observé au cours du temps, dans la zone de champ diffracté (point  $P_d$ ) et à l'intérieur du petit maillage (point  $P_i$ ). On représentera les variations des trois composantes du champ électrique au cours du temps. Notons enfin que toutes les dimensions seront précisées pour chaque simulation.

<sup>5</sup>L'important est de conserver cet angle pour toutes les simulations.



- 1: zone de champ diffracté (GM)
- 2: zone de champ total (GM)
- 3: intérieur du petit maillage (PM)
- : vers PML

FIG. 2.6 – Mesure de la stabilité.

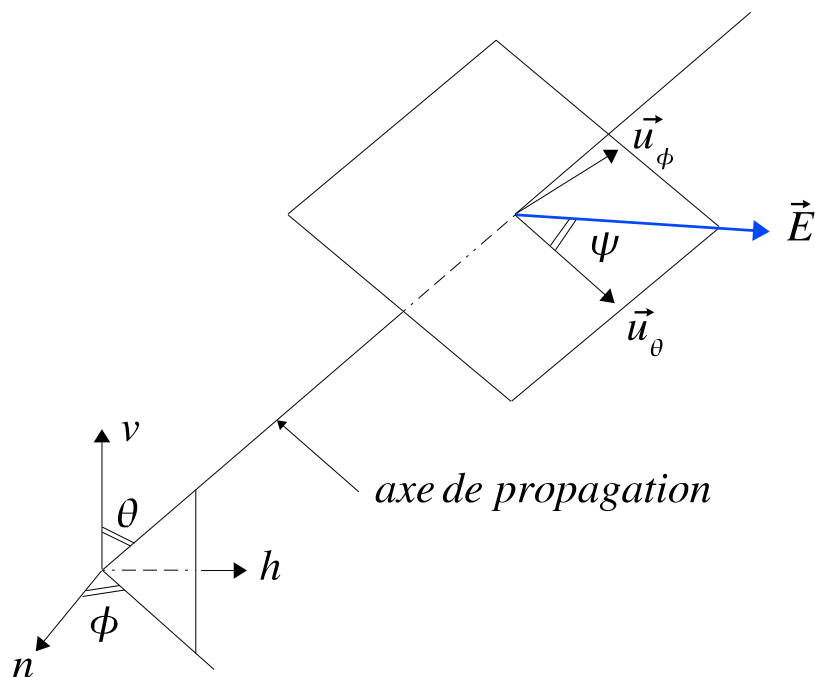


FIG. 2.7 – Définition de l'angle de polarisation.

## **Troisième partie**

# **Modèles de sous-maillage basés sur des méthodes d'interpolation**

Dans cette partie nous commençons par présenter un schéma de sous-maillage basé sur des relations d'interpolation linéaires. Ce schéma est élaboré dans un espace à trois dimensions et pour des facteurs de raffinement en espace et en temps égaux à deux. La réflexion numérique obtenue est convenable, cependant le schéma donne lieu à des phénomènes d'instabilité lorsque les durées de simulation sont importantes.

Nous cherchons alors à en savoir un peu plus sur l'origine de ces instabilités, le but ultime étant de les atténuer voir même de les éliminer. Pour cela nous proposons une méthode originale qui consiste à séparer les traitements temporel et spatial utilisés dans le schéma de sous-maillage de départ. Ce dernier se trouve ainsi décomposé en deux algorithmes successifs qui peuvent être étudiés séparément. L'étude de ces deux algorithmes nous permet alors de prouver que c'est uniquement le traitement spatial qui est à l'origine des instabilités et que c'est également lui qui fixe, à peu de choses près, les qualités du modèle « décomposé ».

A la lumière de ce qui précède nous nous concentrons sur le raffinement spatial. A cette occasion nous avons comparé plusieurs modèles de sous-maillage, le but étant de sélectionner le meilleur d'entre eux.

Dans le dernier chapitre de cette partie nous appliquons notre nouvelle méthode de construction à des schémas de sous-maillage possédant des facteurs de raffinement plus élevés. Nous construisons ainsi des algorithmes temporels et spatiaux possédant des facteurs de raffinement égaux à 3, 4 et 5. Nous montrons alors que tous les modèles de raffinement temporel introduits sont stables et nous mettons en évidence les performances des modèles spatiaux, afin d'en déduire les performances des modèles « décomposés ».

# Chapitre 3

## Présentation d'un schéma basé sur des interpolations

### 3.1 Le schéma

Nous nous plaçons dans un espace à trois dimensions. Les facteurs de raffinement en espace et en temps,  $r_s$  et  $r_t$  sont égaux à deux, ceci nous permet de conserver le même critère CFL dans les deux maillages. Les explications qui suivent ainsi que les notations adoptées sont résumées dans la figure 3.1 qui donne une vue d'ensemble du schéma.

Nous supposons que tous les calculs ont été effectués jusqu'à l'étape  $n$  incluse. Nous devons donc mettre à jour le champ électromagnétique dans le grand maillage aux étapes  $n + \frac{1}{2}$  et  $n + 1$ , ainsi que dans le petit maillage aux étapes  $n + \frac{1}{4}$ ,  $n + \frac{1}{2}$ ,  $n + \frac{3}{4}$  et  $n + 1$ . Pour commencer les calculs suivants sont effectués par différences finies sur les équations de Maxwell :

- *Etape*  $n + \frac{1}{4}$  : Les composantes de  $h$  sont calculées dans le petit maillage, frontières comprises.
- *Etape*  $n + \frac{1}{2}$  : Les composantes de  $e$  sont calculées dans le petit maillage sauf sur les frontières et les composantes de  $H$  sont calculées dans le grand maillage frontières comprises.
- *Etape*  $n + 1$  : Les composantes de  $E$  sont calculées dans le grand maillage, sauf sur les frontières.

Pour que toutes les mises à jour puissent être effectuées, nous devons déterminer les composantes du champ électrique sur les frontières aux étapes  $n + \frac{1}{2}$  et  $n + 1$ . Ces dernières seront notées  $e_{v,f}^{n+1/2}$ ,  $e_{h,f}^{n+1/2}$ ,  $e_{v,f}^{n+1}$  et  $e_{h,f}^{n+1}$ , du côté du petit maillage et  $E_{v,f}^{n+1}$  et  $E_{h,f}^{n+1}$  du côté du grand maillage. Les indices  $v$  et  $h$  se rapportent aux axes  $(Ov)$  et  $(Oh)$  du repère et l'indice  $f$  désigne la frontière. Notons que les composantes  $E_{v,f}^{n+1/2}$  et  $E_{h,f}^{n+1/2}$  n'existent pas dans l'algorithme, elles servent simplement d'intermédiaire de calcul. Dans tout ce qui suit nous travaillons uniquement avec les composantes de type «  $v$  », les calculs étant similaires en tout point pour les composants de type «  $h$  ». Sauf mention contraire les numéros entre parenthèses se rapportent à la figure 3.1.

Le schéma est le suivant :

- Pour commencer on détermine les  $H_{h,i}^{n+1/4}$  (3) et les  $H_{n,f}^{n+1/4}$  (1) à partir des  $h^{n+1/4}$  qui viennent d'être calculés. Pour cela on utilise les relations d'interpolation spatiales suivantes :

$$\begin{cases} H_{h,i}^{n+1/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n+1/4}(i) \\ H_{n,f}^{n+1/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_{n,f}^{n+1/4}(i) \end{cases} \quad (3.1)$$

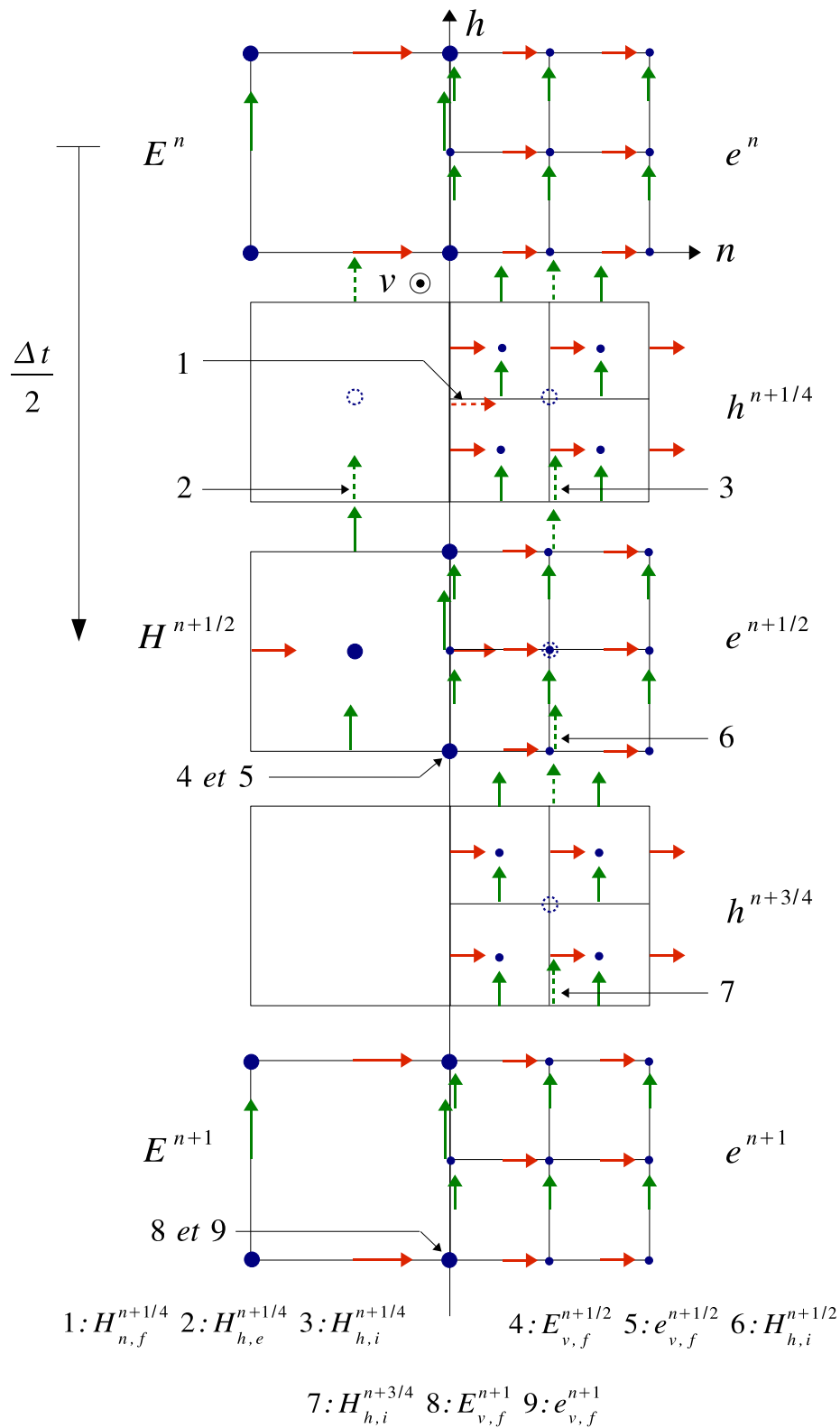


FIG. 3.1 – Vue d’ensemble du schéma d’interpolation.

Ces relations, qui correspondent à un moyennage spatial, sont illustrées sur la figure 3.2. L’indice  $i$  désigne l’intérieur du petit maillage et l’indice  $n$  se rapporte à l’axe  $(On)$ .

- Ensuite on calcule les  $H_{h,e}^{n+1/4}$  (2) à partir des  $H_h^{n-1/2}$  qui ont été mémorisés au tour précédent et des  $H_h^{n+1/2}$  qui viennent d’être déterminés dans la première phase de calcul. Pour cela on utilise l’interpolation temporelle linéaire suivante :



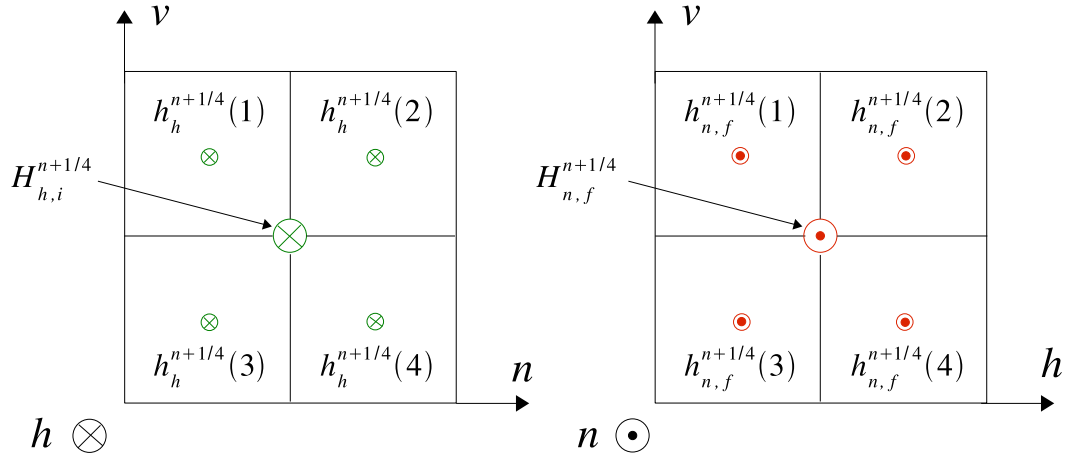


FIG. 3.2 – Détermination des  $H_{h,i}^{n+1/4}$  et des  $H_{n,f}^{n+1/4}$  par moyennage spatial.

$$H_{h,e}^{n+1/4} = \frac{1}{4} \cdot H_h^{n-1/2} + \frac{3}{4} \cdot H_h^{n+1/2} \quad (3.2)$$

Cette relation est illustrée dans la figure 3.3. L'indice  $e$  désigne l'extérieur du petit maillage.

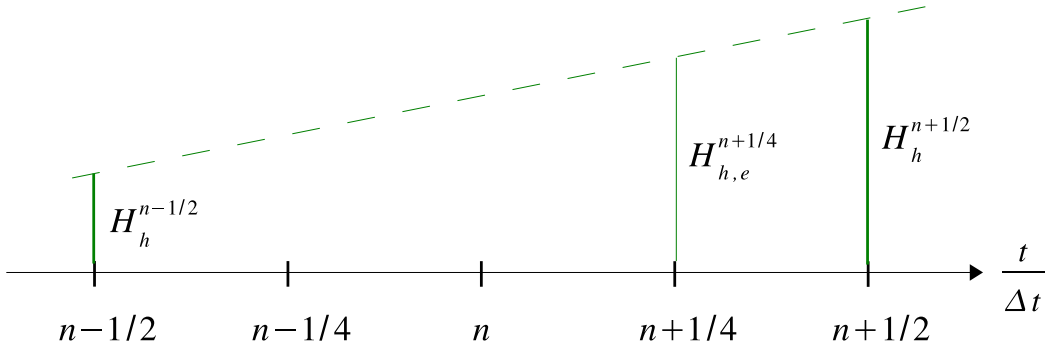


FIG. 3.3 – Détermination des  $H_{h,e}^{n+1/4}$  par interpolation temporelle linéaire.

- A l'aide des équations de Maxwell on peut alors obtenir les  $E_{v,f}^{n+1/2}(4)$ .
- On détermine ensuite les  $e_{v,f}^{n+1/2}$  (5) à partir des  $E_{v,f}^{n+1/2}$  (4) toujours par moyennage spatial. On moyenne d'abord le long de l'axe ( $Ov$ ) et ensuite le long de l'axe ( $Oh$ ) :

$$\begin{cases} e_{v,f,moins}^{n+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,f,0}^{n+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,f,moins}^{n+1/2} \\ e_{v,f,plus}^{n+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,f,0}^{n+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,f,plus}^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$e_{v,f,c}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,f,g}^{n+1/2} + e_{v,f,d}^{n+1/2} \right) \quad (3.4)$$

Les relations 3.3 et 3.4 sont illustrées sur les figures 3.4 et 3.5. Dans ces deux illustrations nous avons  $n' = n + \frac{1}{2}$ . Les indices utilisés se comprennent sans ambiguïté.

- On peut alors calculer les  $h^{n+3/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises, à l'aide des équations de Maxwell.

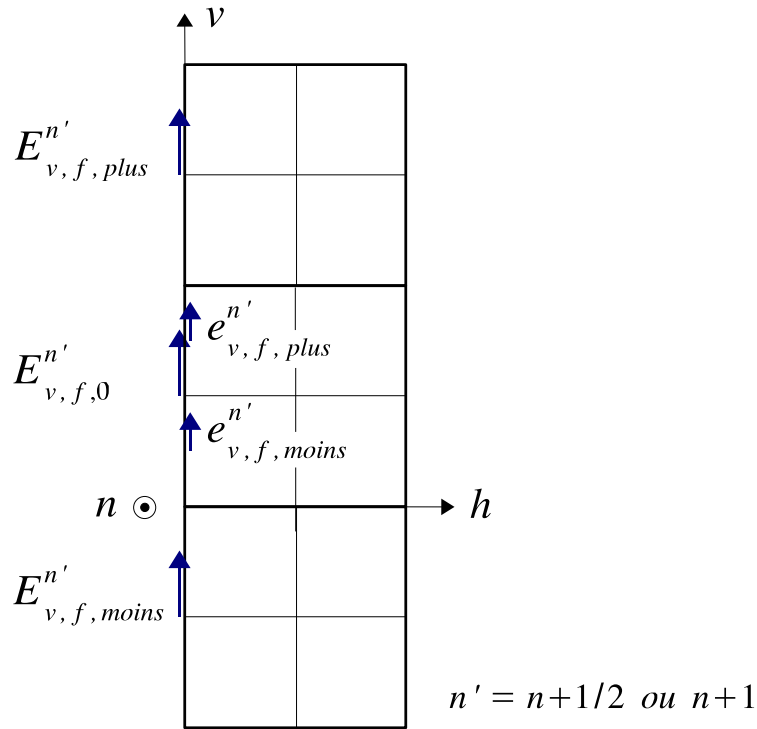


FIG. 3.4 – Calcul des  $e_{v,f,moins}^{n'}$  et des  $e_{v,f,plus}^{n'}$  par moyennage spatial le long de l'axe ( $Ov$ ).

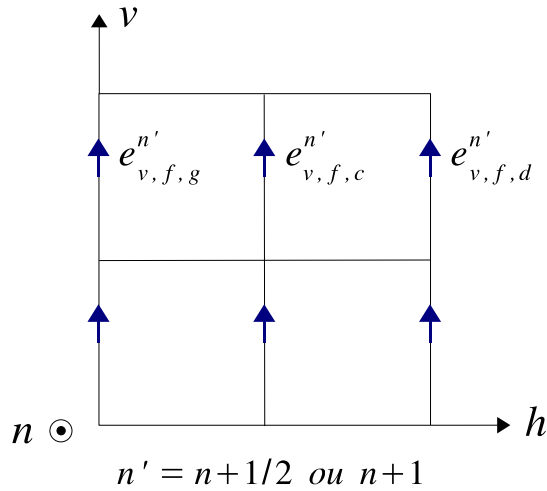


FIG. 3.5 – Calcul des  $e_{v,f,c}^{n'}$  par moyennage spatial le long de l'axe ( $Oh$ ).

- Ensuite on détermine les  $H_{h,i}^{n+\frac{3}{4}}$  (7) à partir des  $h^{n+3/4}$  qui viennent d'être calculés. On utilise les mêmes relations d'interpolation que dans les équations 3.1 :

$$H_{h,i}^{n+3/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n+3/4}(i) \quad (3.5)$$

L'équation 3.5 est illustrée sur la figure 3.6.

- Maintenant on peut obtenir les  $H_{h,i}^{n+\frac{1}{2}}$  (6) par interpolation temporelle linéaire :

$$H_{h,i}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot H_{h,i}^{n+1/4} + \frac{1}{2} \cdot H_{h,i}^{n+3/4} \quad (3.6)$$

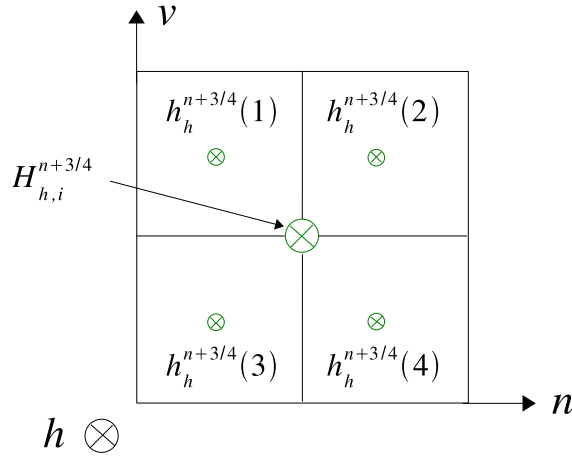


FIG. 3.6 – Détermination des  $H_{h,i}^{n+\frac{3}{4}}$  par moyennage spatial.

Cette relation est illustrée sur la figure 3.7.

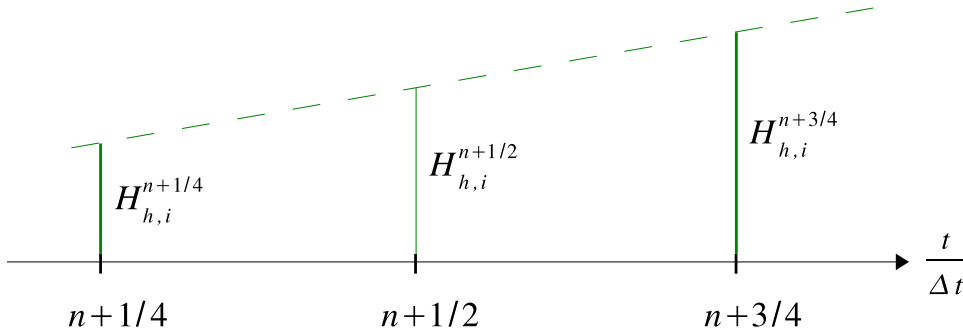


FIG. 3.7 – Détermination des  $H_{h,i}^{n+\frac{1}{2}}$  par interpolation temporelle linéaire.

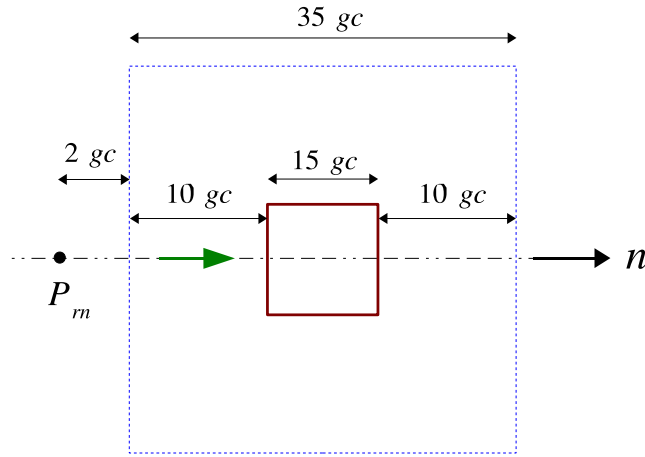
- A l'aide des équations de Maxwell on peut finalement calculer les  $E_{v,f}^{n+1}$  (8), à partir desquels on détermine les  $e_{v,f}^{n+1}$  par moyennage spatial. Ces moyennages (où interpolations) ont déjà été décrites dans les relations 3.3 et 3.4 et illustrées dans les figures 3.4 et 3.5. Il suffit simplement de remplacer  $n + \frac{1}{2}$  par  $n + 1$ .

## 3.2 Résultats des tests

Les tests ont été effectués selon les méthodes présentées dans le paragraphe 2.4.2. Nous présentons ici les valeurs numériques des différents paramètres, puis nous présentons les courbes obtenues accompagnées de commentaires.

### 3.2.1 Réflexion numérique

Les paramètres géométriques sont donnés dans la figure 3.8. Dans le grand maillage nous avons pris  $\Delta_{max} = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.15 m$  ce qui correspond à  $f_{max} = 200 MHz$  pour un échantillonnage spatial minimum égale à 10. Le pas temporel  $\Delta t$  est fixé à 97% du pas temporel maximum  $\Delta t_{max}$ . Dans le petit maillage nous avons évidemment  $\delta x = \delta y = \delta z = 0.075 m$  et  $\delta t = \Delta t/2$  ce qui nous permet de conserver le même critère de stabilité que précédemment :  $\delta t = 0.97 \cdot \delta t_{max}$  (voir relation 1.29 du paragraphe 1.4).



Les cotations sont identiques  
le long des axes (Oh) et (Ov).

FIG. 3.8 – Test de la réflexion numérique.

La réflexion numérique obtenue est représentée sur la figure 3.9. Elle est inférieure à  $-48 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$ , par contre elle croît jusqu'à  $-25 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ . Nous disposons ainsi d'une réflexion numérique assez petite pour un échantillonnage spatial raisonnable ( $r_n = -48 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 20$  par exemple). Ces résultats nous montrent également que le schéma n'est pas utilisable pour des échantillonnages spatiaux inférieurs à 20.

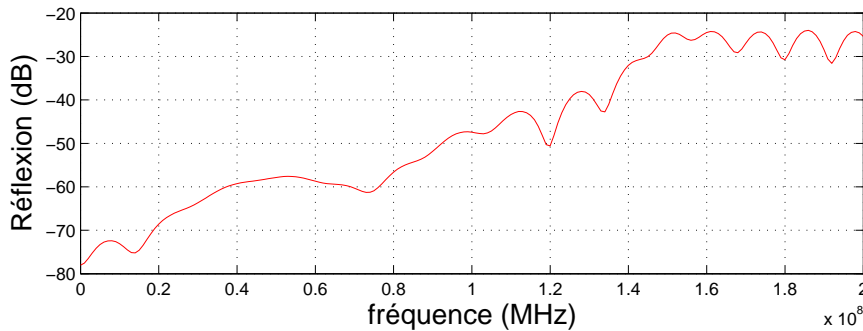


FIG. 3.9 – Réflexion numérique.

### 3.2.2 Stabilité

Toutes les dimensions utilisées dans cette simulation sont résumées dans la figure 3.10. Les pas spatiotemporels sont identiques à ceux de la simulation précédente. La fonction Gaussienne utilisée est également la même et  $f_{max}$  vaut toujours  $200 \text{ MHz}$ . L'onde incidente arrive en incidence oblique c'est à dire que  $\theta = \phi = 45^\circ$  (voir figure 2.7 du paragraphe 2.4.2).

Le champ diffracté est enregistré au point  $P_d$ . Ces variations dans le temps sont représentées dans la figure 3.11. Le champ à l'intérieur du petit maillage est enregistré au point  $P_i$  et ces variations sont représentées dans la figure 3.12.

Sur les deux courbes précédentes nous constatons la présence d'un champ résiduel qui commence à diverger pour  $t_{simu} > t_{stab} = 2 \mu s$ . Ce phénomène qui se produit simultanément dans les deux volumes nous montre que le schéma est instable. Ce comportement est classique lorsque des relations d'interpolation sont utilisées. Notons cependant que notre algorithme pourrait-être

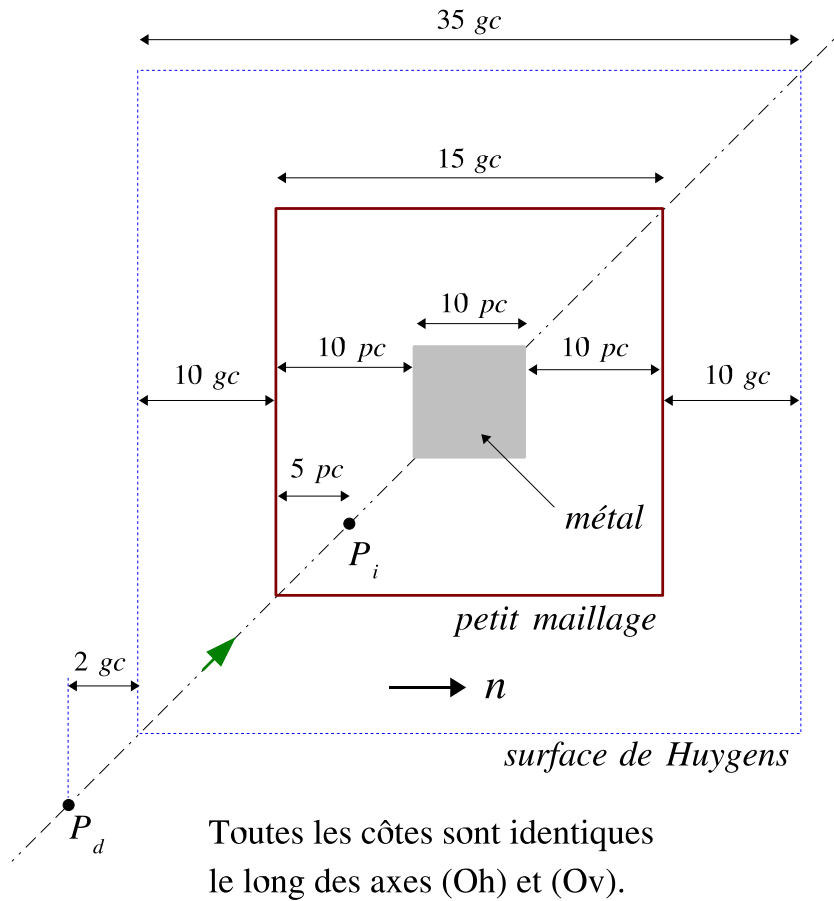


FIG. 3.10 – Test de la stabilité.

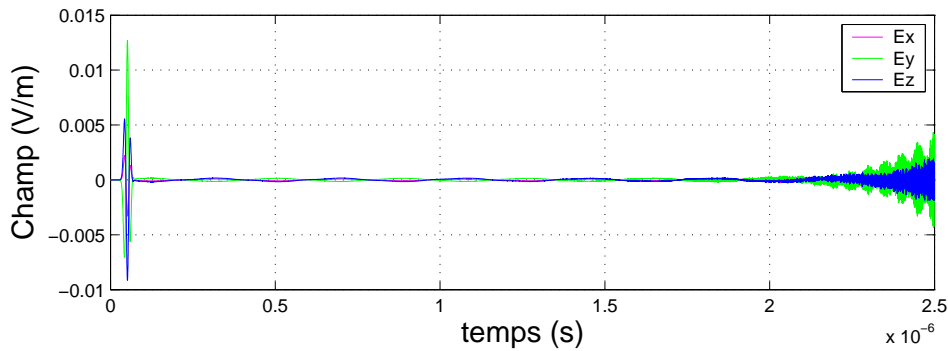


FIG. 3.11 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ).

utilisé dans des problèmes de diffraction, étant donné que ces derniers ne demandent pas toujours des durées de simulation trop grandes.

Avant d'aller plus loin nous devons apporter quelques précisions sur la façon d'estimer les durées de stabilité. En effet, une telle estimation reste toujours un peu suggestive, elle dépend par exemple de l'échelle adoptée sur l'axe des ordonnées. Il faut alors adopter un critère commun d'évaluation de ces durées, même si ce dernier est qualitatif. Nous proposons par exemple de définir la durée de stabilité comme étant la durée au bout de laquelle la remontée du signal atteint 5 à 10% de l'amplitude du signal observé. Ce critère simple sera adopté tout au long de ce mémoire.

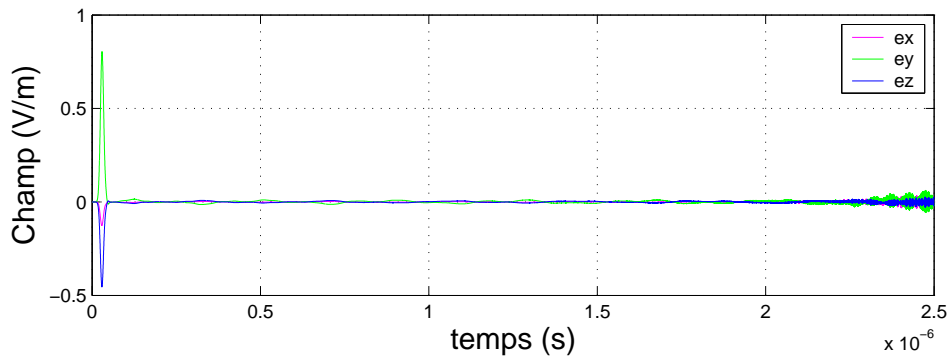


FIG. 3.12 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (spoint  $P_i$ ).

### 3.2.3 Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé

Il nous a paru intéressant d’analyser le comportement des durées de stabilité lorsque le volume du petit maillage augmente, tous les autres paramètres étant fixés. Une telle analyse n’a jamais été présentée dans la littérature et nous semble riche en enseignements, de plus elle nous permettra ultérieurement de faire de meilleures comparaisons entre les différents schémas. La figure 3.13 montre la façon dont nous avons paramétré les dimensions du petit maillage.

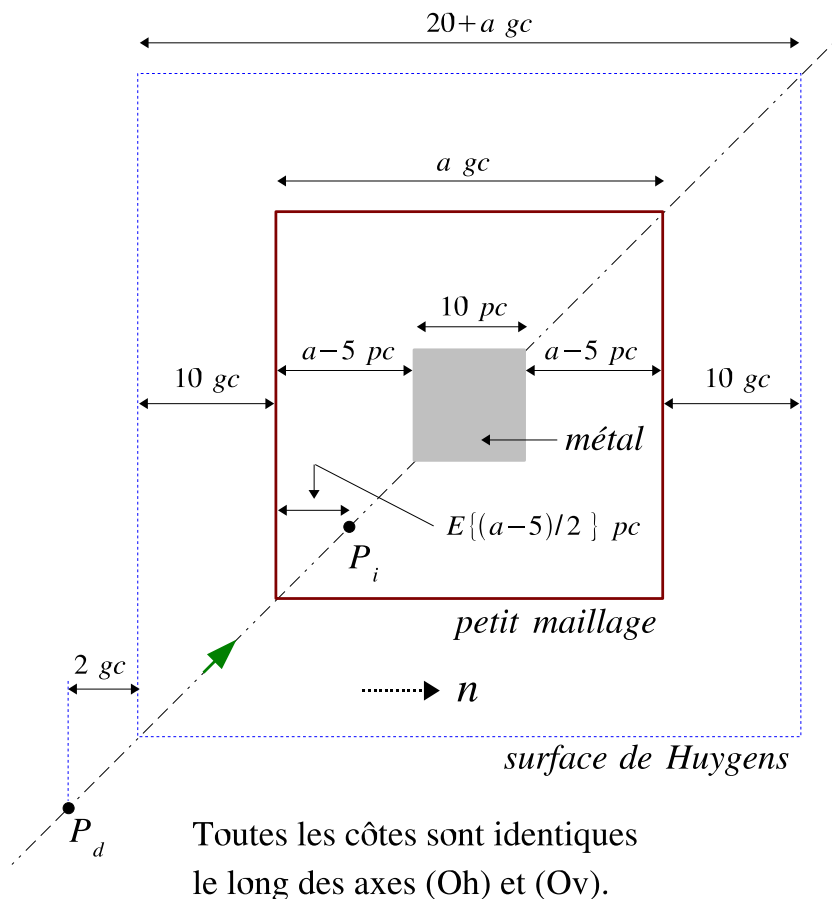


FIG. 3.13 – Tests de la stabilité en fonction du volume sous-maillé.

Le petit volume est un cube dont les arêtes comportent  $a$  grandes cellules. Dans la simulation précédente nous avons  $a = 15$ , ici nous allons travailler avec  $a = 30$ ,  $a = 45$  et  $a = 60$ . Comme précédemment nous avons cherché à placer le point d’observation  $P_i$  entre l’interface et la surface du métal. Cependant le nombre de petites cellules séparant ces deux surfaces peut-être pair ou impair si bien que nous avons choisi de placer entre le point  $P_i$  et l’interface, un nombre de petites

cellules égal à  $E \left\{ \frac{a-5}{2} \right\}$ . Ceci nous permet de placer approximativement le point d'observation entre les deux surfaces.

Les résultats obtenus sont présentés dans les courbes 3.14 à 3.19.

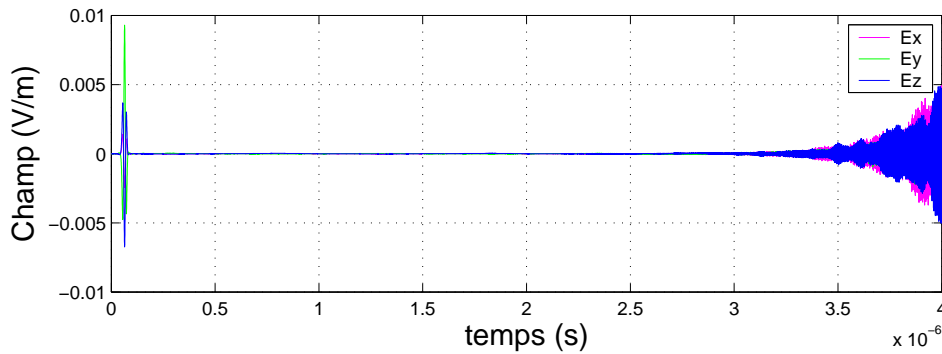


FIG. 3.14 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 30$ .

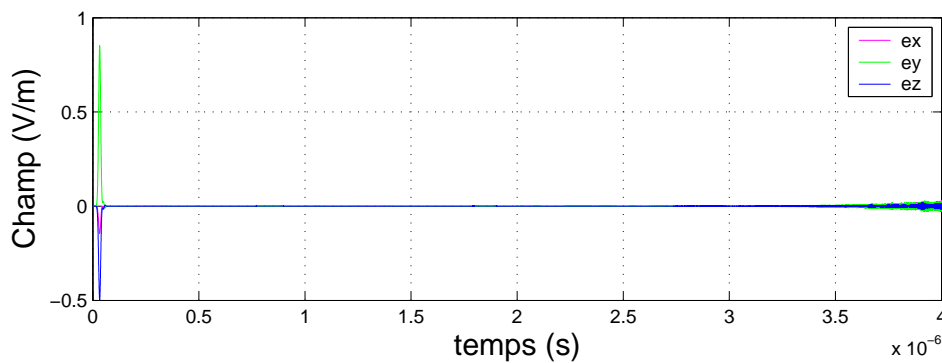


FIG. 3.15 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 30$ .

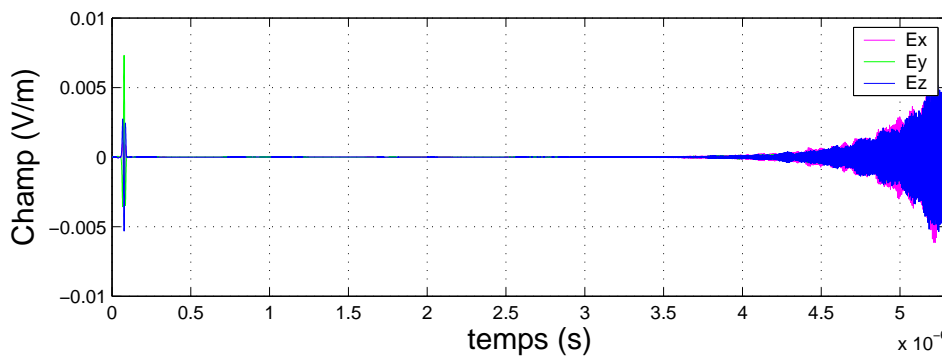


FIG. 3.16 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 45$ .

Nous constatons que l'amplitude du champ résiduel diminue au fur et à mesure que le volume sous-maillé augmente. Ce champ résiduel se voit bien pour  $a = 15$  dans les deux maillages et pour  $a = 30$  dans le grand maillage, puis il disparaît dans les autres cas<sup>1</sup>. D'autre part nous constatons que la durée de stabilité devient de plus en plus grande. Elle passe progressivement de  $2 \mu s$  pour  $a = 15$  à  $4 \mu s$  pour  $a = 60$  dans le grand maillage (point  $P_d$ ) et de  $2 \mu s$  pour  $a = 15$  à  $5.5 \mu s$  pour  $a = 60$  dans le petit maillage (point  $P_i$ ). Ces résultats sont regroupés dans le tableau 3.2.

<sup>1</sup>Ces appréciations dépendent évidemment de l'échelle adoptée. C'est simplement une tendance que nous voulons montrer.

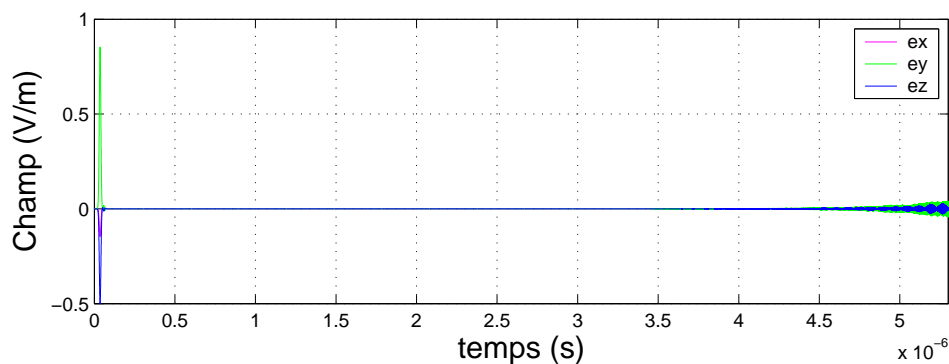


FIG. 3.17 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 45$ .

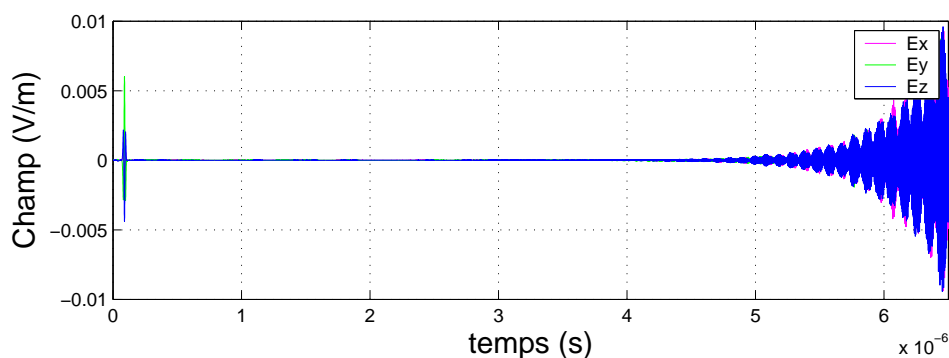


FIG. 3.18 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 60$ .

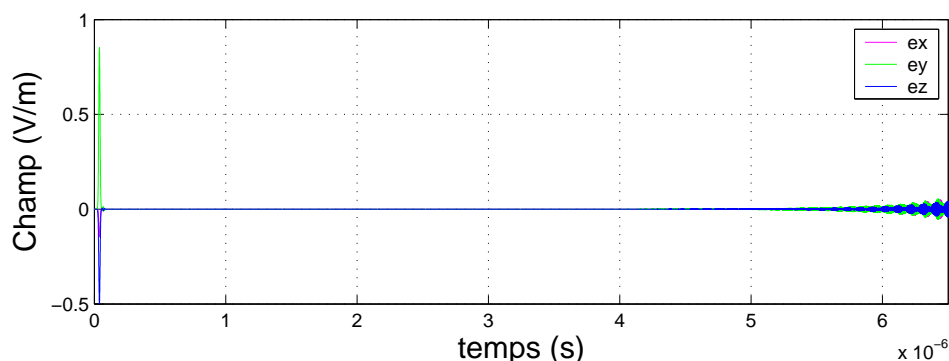


FIG. 3.19 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 60$ .

$a$	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$2 \mu s$	$3 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4.5 \mu s$	$5.5 \mu s$

TAB. 3.2 – Durées de stabilité en fonction de  $a$ .

Ce phénomène n'est pas facile à interpréter. Nous savons que la présence du champ résiduel est due à l'utilisation des relations d'interpolation mais il est difficile de comprendre pourquoi ce dernier s'atténue lorsque le domaine sous-maillé devient plus grand. Une explication possible peut-être proposée si l'on considère le front de l'onde diffractée. Ce dernier présente des petits rayons de courbure dans le voisinage du métal, nous sommes en effet dans la zone de champ proche. Ainsi, des erreurs numériques assez importantes sont générées par les relations d'interpolation spatiales, qui représentent dans ce cas une approximation très grossière des variations spatiales du champ. On comprend alors que ces erreurs puissent diminuer et ainsi retarder le mo-



ment de la divergence lorsque la frontière s'éloigne de la zone de champ proche. Quoiqu'il en soit ce n'est pas la seule explication car ce phénomène se produit également lorsque le petit maillage est vide.

### 3.3 Pour résumer

Nous avons mis en place un schéma de raffinement spatiotemporel basé sur des relations d'interpolation. Il présente une durée de stabilité suffisante pour être utilisé dans des problèmes de diffraction ( $t_{stab} = 2 \mu s$ ), de plus la réflexion numérique est satisfaisante ( $-48 dB$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 20$ ). Par ailleurs nous avons constaté que la durée de stabilité augmente lorsque le volume du petit maillage augmente. Nous verrons dans la suite que ce comportement est assez général.

# Chapitre 4

## Séparation du traitement spatial et du traitement temporel

Dans ce chapitre nous avons cherché à mieux cerner les phénomènes de divergence rencontrés dans le modèle précédent. L'idée a été d'extraire de ce modèle le traitement temporel d'une part et le traitement spatial d'autre part, afin de savoir quelle est la part de chacun de ces deux traitements dans les phénomènes d'instabilité. En s'appuyant sur les résultats obtenus, nous élaborons alors une nouvelle méthode de conception des schémas de sous-maillage. Ce chapitre est organisé en trois paragraphes :

- Le paragraphe 4.1 est consacré au traitement temporel seul : nous présentons d'abord l'algorithme puis nous comparons ses performances avec celles du schéma spatiotemporel présenté dans le chapitre précédent.
- Dans le paragraphe 4.2 la même étude est réalisée pour le traitement spatial.
- Dans le paragraphe 4.3 nous proposons une nouvelle méthode de construction des schémas de sous-maillage, qui consiste à utiliser successivement les deux algorithmes précédents. Nous montrons alors de quelle façon les performances de ce nouveau modèle « successif » dépendent des algorithmes temporel et spatial qui le constituent.

### 4.1 Le traitement temporel seul

#### 4.1.1 Le schéma

Une vue d'ensemble du schéma temporel est proposée dans la figure 4.1.

L'algorithme est obtenu en ne prenant que la « partie temporelle » des traitements présentés dans le paragraphe 3.1. Ces traitements se résument en fait à deux interpolations temporelles sur les composantes de type «  $h$  » et «  $v$  » du champ magnétique. La première interpolation a lieu dans le grand maillage à la date  $n + 1/4$  et la deuxième a lieu dans le petit maillage à la date  $n + 1/2$ . Cela donne finalement la procédure suivante :

- Calcul des  $H^{n+1/2}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n+1}$  dans le grand maillage, sauf sur les frontières.
- Calcul des  $h^{n+1/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n+1/2}$  dans le petit maillage, sauf sur les frontières.
- Calcul des  $h_{h,e}^{n+1/4}$  (1) par interpolation temporelle à partir des  $H_h^{n-1/2}$  et des  $H_h^{n+1/2}$  (voir figure 4.2) :

$$h_{h,e}^{n+1/4} = \frac{1}{4} \cdot H_h^{n-1/2} + \frac{3}{4} \cdot H_h^{n+1/2} \quad (4.1)$$

- Calcul des  $e_{v,f}^{n+1/2}$  (3) à l'aide des équations de Maxwell

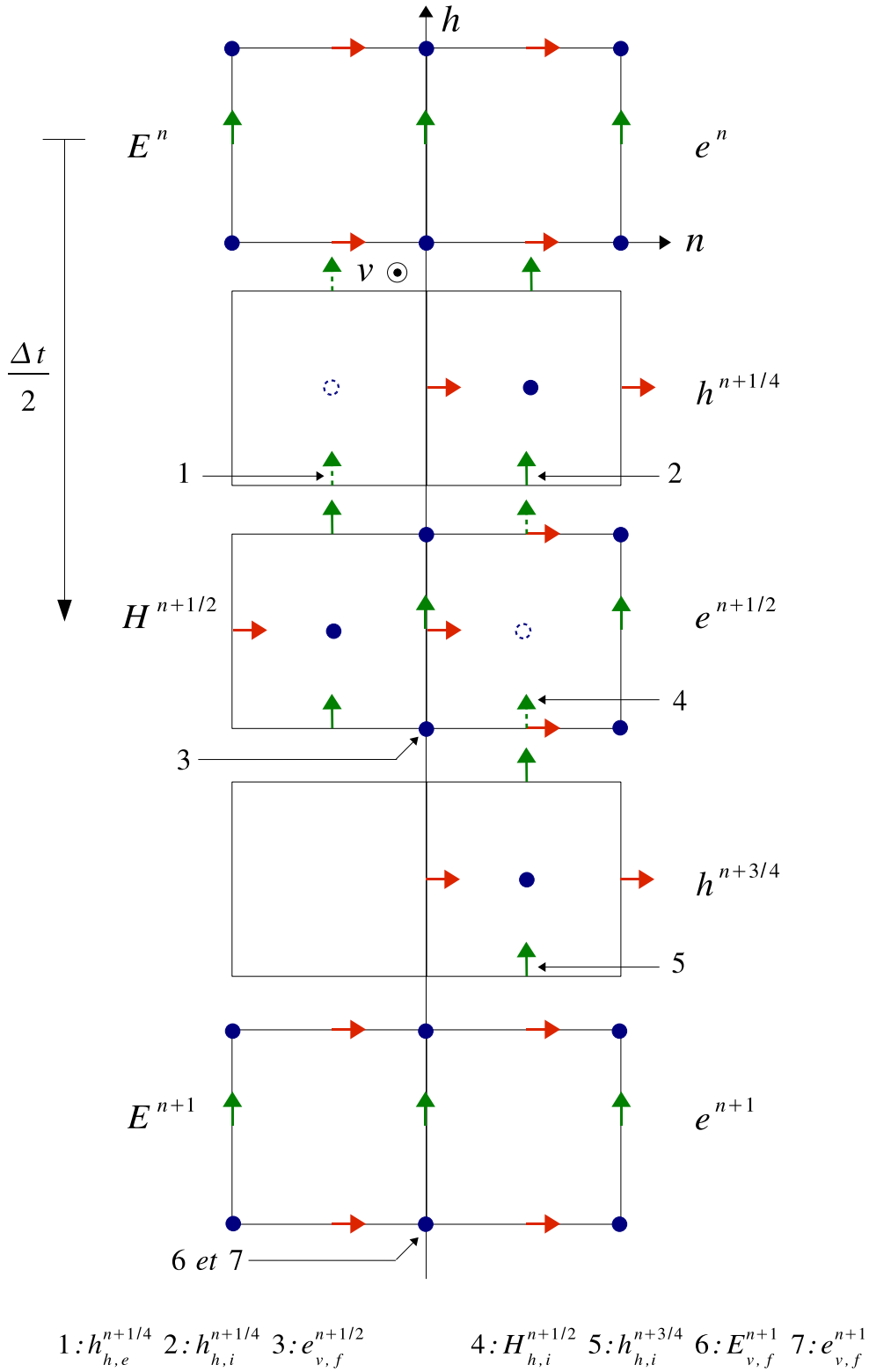


FIG. 4.1 – Vue d’ensemble du schéma temporel.

- Calcul des  $h^{n+3/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n+1/2}$  (4) par interpolation temporelle à partir des  $h_{h,i}^{n+1/4}$  (2) et des  $h_{h,i}^{n+3/4}$  (5) (voir figure 4.3) :

$$H_{h,i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot h_{h,i}^{n+1/4} + \frac{1}{2} \cdot h_{h,i}^{n+3/4} \quad (4.2)$$

- Calcul des  $E_{v,f}^{n+1}$  (6) à l’aide des équations de Maxwell.

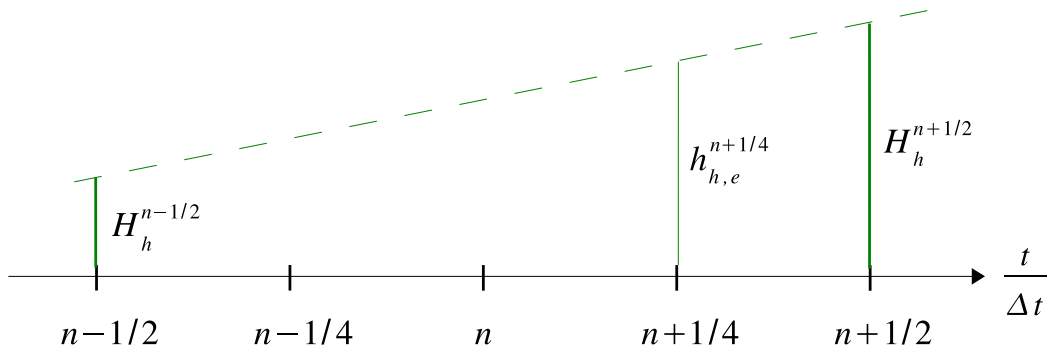


FIG. 4.2 – Détermination des  $h_{h,e}^{n+\frac{1}{4}}$  par interpolation temporelle.

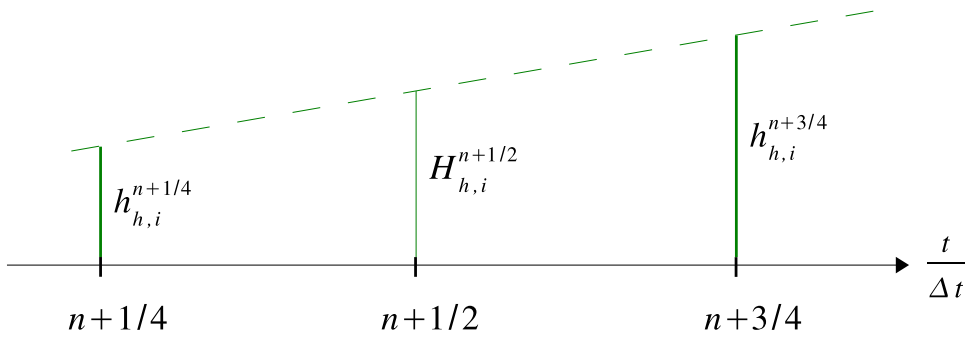


FIG. 4.3 – Détermination des  $H_{h,i}^{n+\frac{1}{2}}$  par interpolation temporelle.

– Calcul des  $e_{v,f}^{n+1}$  (7) par continuité (voir figure 4.4) :

$$E_{v,f}^{n+1} = e_{v,f}^{n+1} \quad (4.3)$$

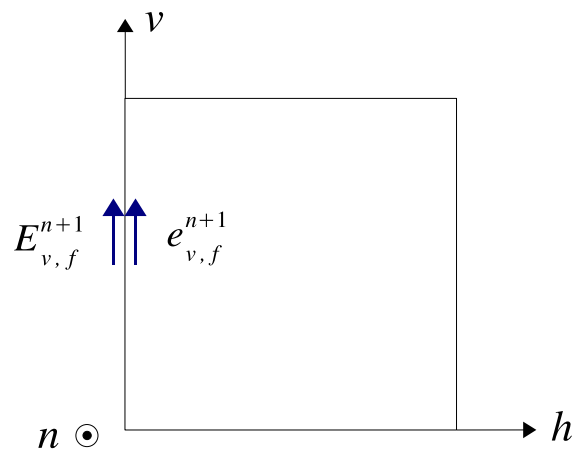
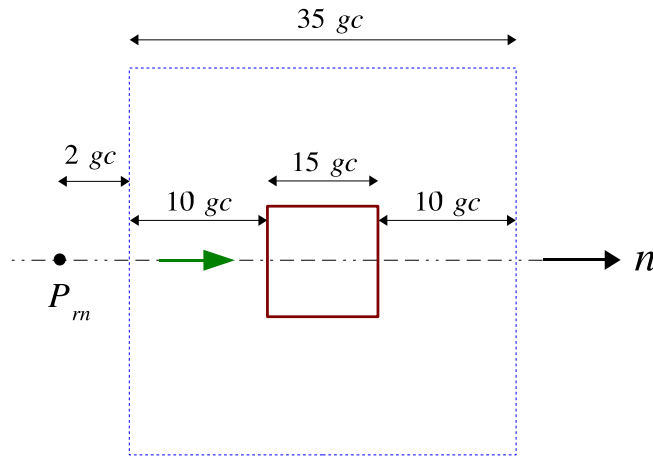


FIG. 4.4 – Continuité entre  $E_{v,f}^{n+1}$  et  $e_{v,f}^{n+1}$ .

## 4.1.2 Résultats des tests

### 4.1.2.1 Réflexion numérique

Tous les paramètres de ce test sont identiques à ceux que nous avons défini dans le paragraphe 3.2.1, excepté les pas spatiaux du petit maillage qui restent identiques à ceux du grand maillage<sup>1</sup>. Les dimensions utilisées sont rappelées dans la figure 4.5.



Toutes les côtes sont identiques le long des axes (Oh) et (Ov).

FIG. 4.5 – Test de la réflexion numérique.

La courbe 4.6 donne la réflexion numérique obtenue (en bleu). Elle est inférieure à  $-55 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$  et elle croît jusqu'à  $-40 \text{ dB}$  seulement pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ . Cette réflexion est inférieure à celle que nous avons obtenue avec le schéma spatiotemporel (en vert). L'écart est de  $20 \text{ dB}$  en moyenne dans le domaine des hautes fréquences ( $\frac{\lambda}{\Delta} \in [10, 20]$ ) et de  $10 \text{ dB}$  en moyenne dans le domaine des basses fréquences ( $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$ ). Finalement ce niveau de réflexion numérique est très satisfaisant même pour un échantillonnage spatial allant jusqu'à 10.

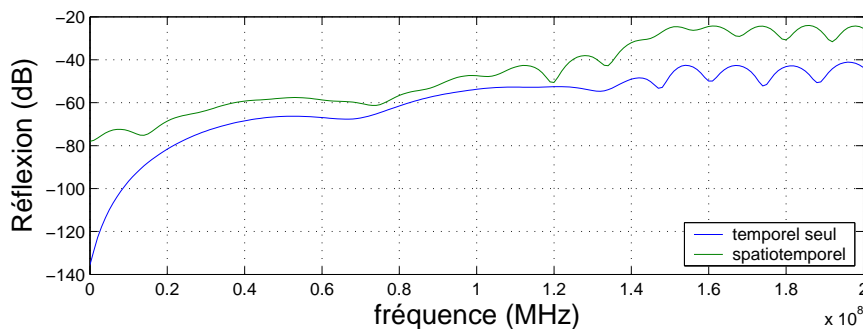


FIG. 4.6 – Réflexion numérique.

### 4.1.2.2 Stabilité

Les paramètres de ce test sont identiques à ceux que nous avons utilisé dans le paragraphe 3.2.2. Encore une fois la seule différence vient du fait qu'il n'y a pas de sous-maillage spatial, si

<sup>1</sup>En vertu de la relation 1.29, cela nous oblige à prendre un critère CFL deux fois plus petit que dans le grand maillage :  $\delta t = 0.485 \cdot \delta t_{max}$ .

bien que l'intérieur du petit domaine est paramétré en termes de grandes cellules. La figure 4.7 résume la situation.

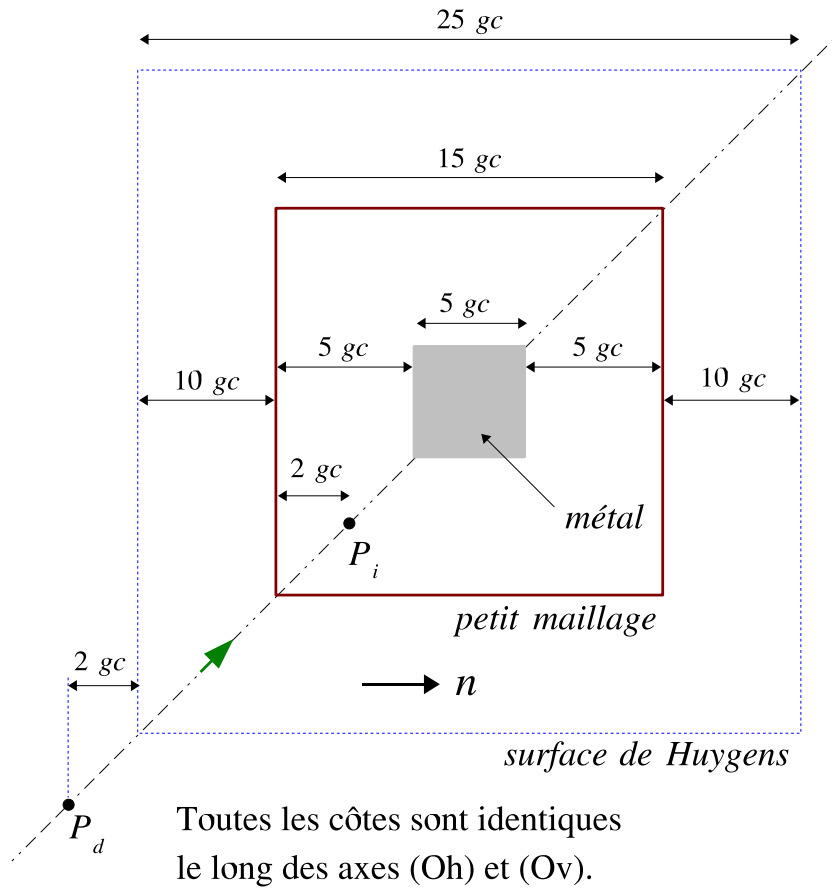


FIG. 4.7 – Test de la stabilité.

Les courbes 4.8 à 4.11 montrent le champ diffracté et le champ total à l'intérieur du petit domaine. La durée totale de la simulation étant importante ( $50 \mu s$ ) nous avons adopté deux points de vue pour la représentation de ces deux champs. La vue en gros plan permet de montrer les variations du champ diffracté et du champ dans le petit domaine, tandis que la vue d'ensemble permet d'apprécier la stabilité de l'algorithme.

Nous constatons qu'il y a très peu de champ résiduel et qu'aucun phénomène de divergence ne se produit pour une durée de simulation allant jusqu'à  $50 \mu s$ . Nous pensons que notre algorithme est stable car l'amplitude du champ résiduel diminue au cours du temps. Cet argument n'est pas une preuve mais simplement un indice, de ce fait, la stabilité de l'algorithme reste à démontrer. Quoi qu'il en soit, tout ce que nous disons dans la suite sera vrai pour une durée de simulation allant jusqu'à  $50 \mu s$  et l'adjectif « stable » sera dorénavant utilisé dans ce contexte.

## 4.2 Le traitement spatial seul

### 4.2.1 Le schéma

Une vue d'ensemble du schéma spatial est proposée dans la figure 4.12.

L'algorithme est obtenu en ne prenant que le traitement spatial relatif à la première sous-itération du schéma présenté dans le paragraphe 3.1. Nous sommes donc dans une certaine sous-itération que nous avons noté :  $(n', n' + \frac{1}{4}, n' + \frac{1}{2})$ . Cela donne en fin de compte la procédure suivante :

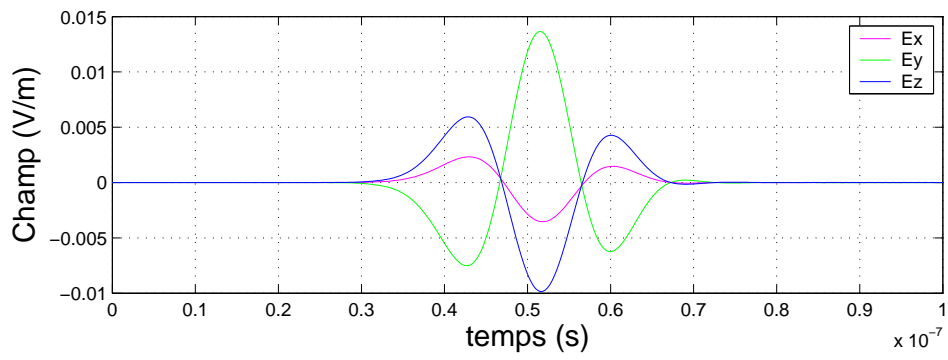


FIG. 4.8 – Champ diffracté (gros plan).

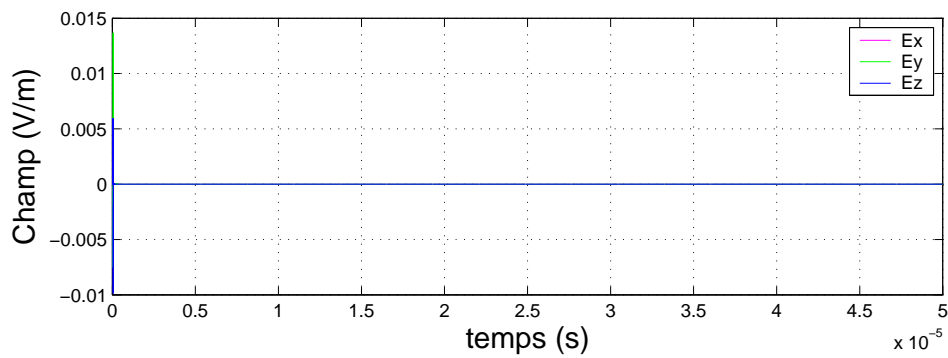


FIG. 4.9 – Stabilité relative au champ diffracté (vue d'ensemble).

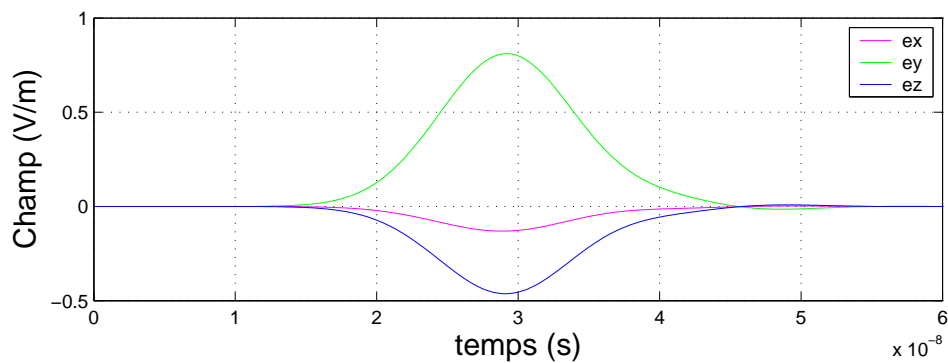


FIG. 4.10 – Champ dans le petit maillage (gros plan).

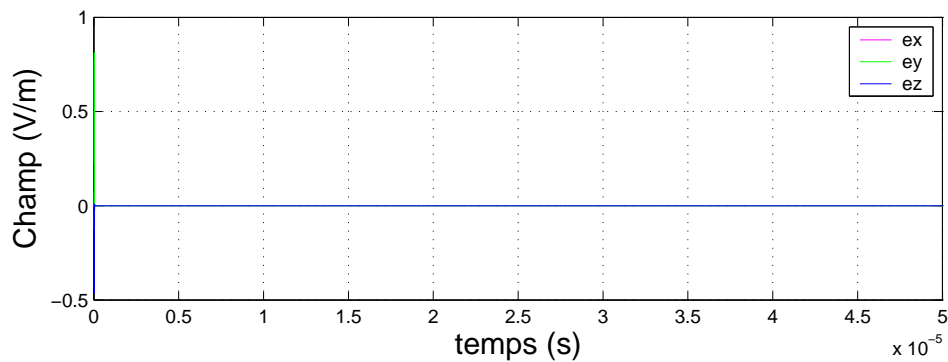


FIG. 4.11 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (vue d'ensemble).

- Calcul des  $H^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, sauf sur les frontières.

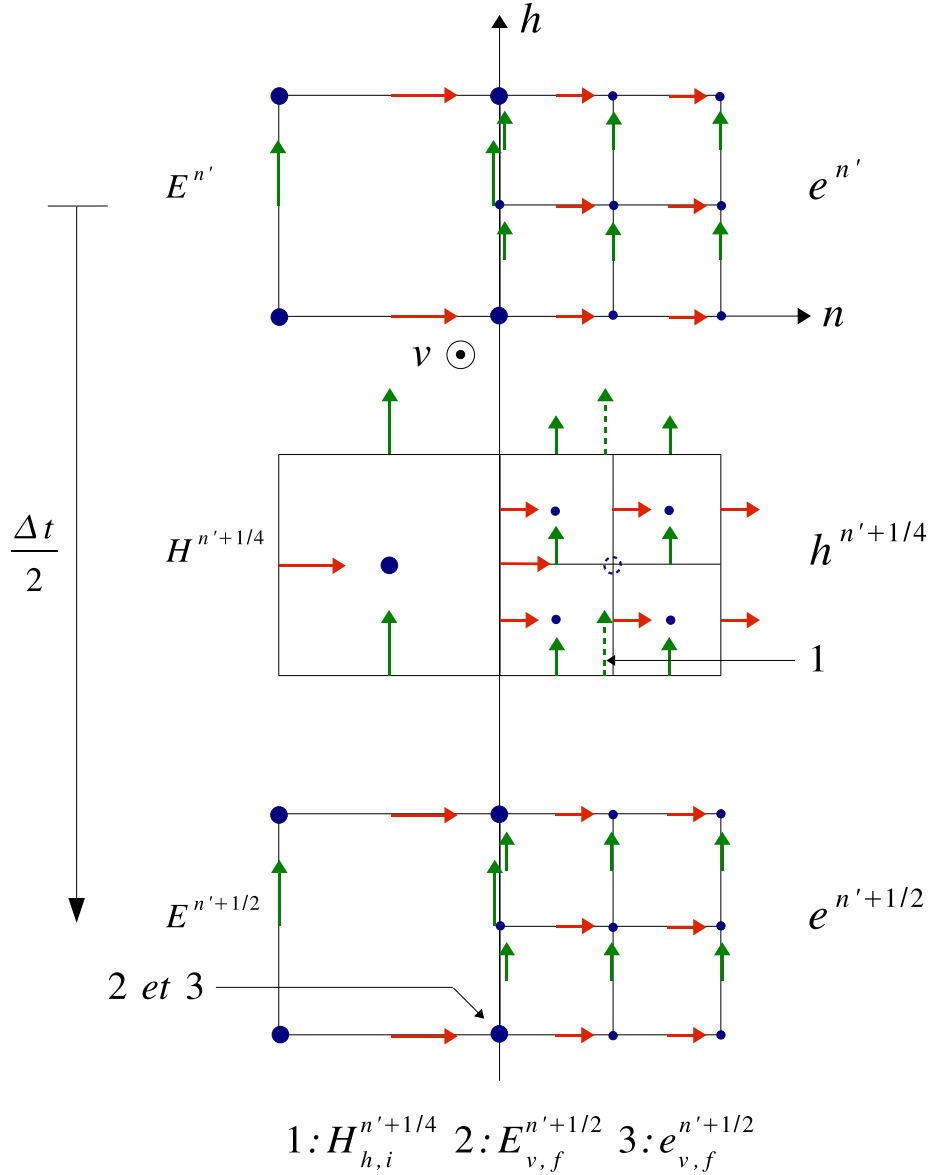


FIG. 4.12 – Vue d’ensemble du schéma spatial.

- Calcul des  $h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, sauf sur les frontières.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n'+1/4}$  (1) à partir des quatre  $h_h^{n'+1/4}(i)$  environnants par interpolation spatiale (voir figure 4.13) :

$$H_{h,i}^{n'+1/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n'+1/4}(i) \quad (4.4)$$

- Calcul des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (2) à l’aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) à partir des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  par interpolations spatiales. On interpole d’abord le long de l’axe  $(Ov)$  et ensuite le long de l’axe  $(Oh)$  (voir les figures 4.14 et 4.15) :

$$\begin{cases} e_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/2} \\ e_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/2} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$e_{v,f,c}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,f,g}^{n'+1/2} + e_{v,f,d}^{n'+1/2} \right) \quad (4.6)$$



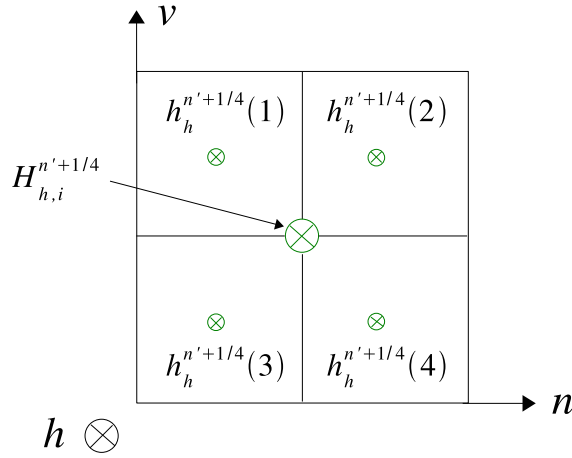


FIG. 4.13 – Détermination des  $H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}}$  par interpolation spatiale.

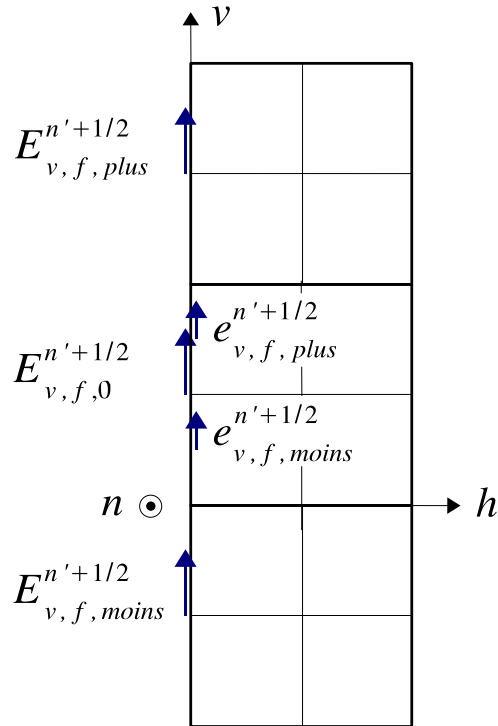


FIG. 4.14 – Calcul des  $e_{v,f,moins}^{n'+\frac{1}{2}}$  et des  $e_{v,f,plus}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation spatiale le long de l'axe  $(Ov)$ .

## 4.2.2 Résultats des tests

### 4.2.2.1 Réflexion numérique

Les conditions du test sont identiques à celles que nous avons présentées dans la paragraphe 3.2.1, excepté le pas temporel du grand maillage qui est identique à celui du petit maillage<sup>2</sup>. Les dimensions utilisées sont rappelées dans la figure 4.16.

<sup>2</sup>Cette fois-ci c'est le critère CFL du grand maillage qui change :  $\Delta t = 0.485 \cdot \Delta t_{max}$ .

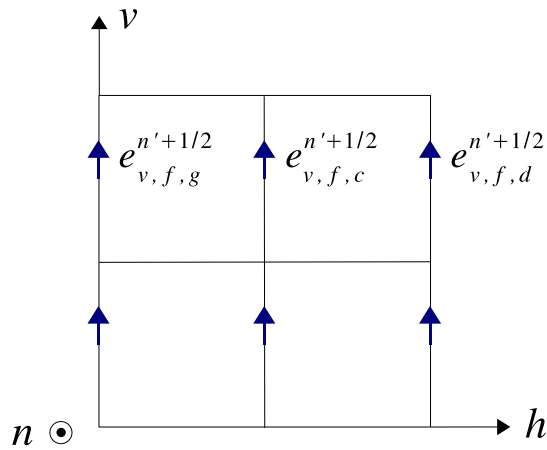
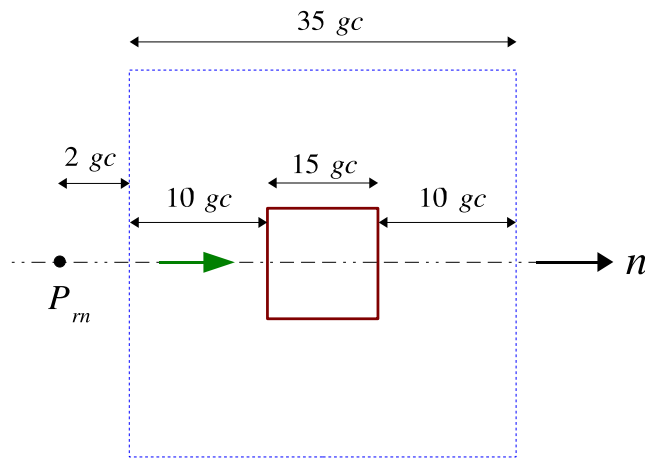


FIG. 4.15 – Calcul des  $e_{v,f,c}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation spatiale le long de l'axe ( $Oh$ ).



Toutes les côtes sont identiques  
le long des axes ( $Oh$ ) et ( $Ov$ ).

FIG. 4.16 – Test de la réflexion numérique.

La courbe 4.17 donne la réflexion numérique obtenue (en bleu). Elle est inférieure à  $-50 dB$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$  et elle croît jusqu'à  $-25 dB$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ . Cette réflexion est très voisine de celle que nous avons obtenue avec le schéma spatiotemporel (en vert). Ceci donne l'impression que le traitement spatial que nous venons d'extraire imposait sa réflexion numérique au modèle spatiotemporel.

#### 4.2.2.2 Stabilité

Nous reprenons les conditions de simulation définies dans le paragraphe 3.2.2. Comme nous l'avons dit précédemment il y a juste le pas temporel du grand maillage qui a changé. Les dimensions utilisées sont résumées dans la figure 4.18.

Les courbes 4.19 et 4.20 montrent de nouveau la présence d'un champ résiduel qui fini par diverger. La durée de stabilité est de  $2 \mu s$  dans le petit maillage comme avec le modèle spatiotemporel, par contre elle est de  $4 \mu s$  dans le grand maillage, c'est à dire deux fois plus grande qu'avec le modèle spatiotemporel. Il semble que le modèle de raffinement spatial seul est un peu plus stable que le modèle de raffinement spatiotemporel. Nous allons voir dans le paragraphe suivant

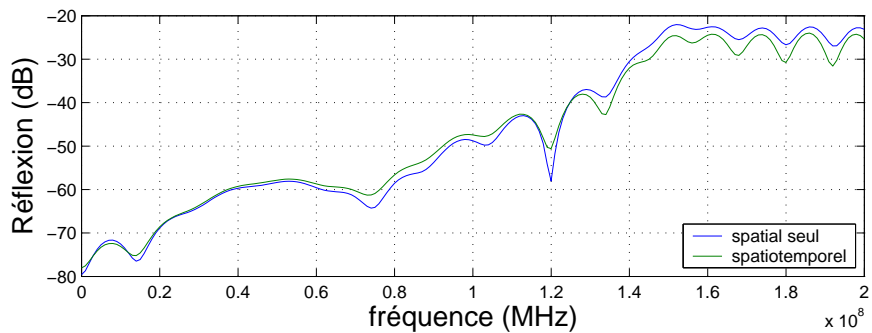


FIG. 4.17 – Réflexion numérique.

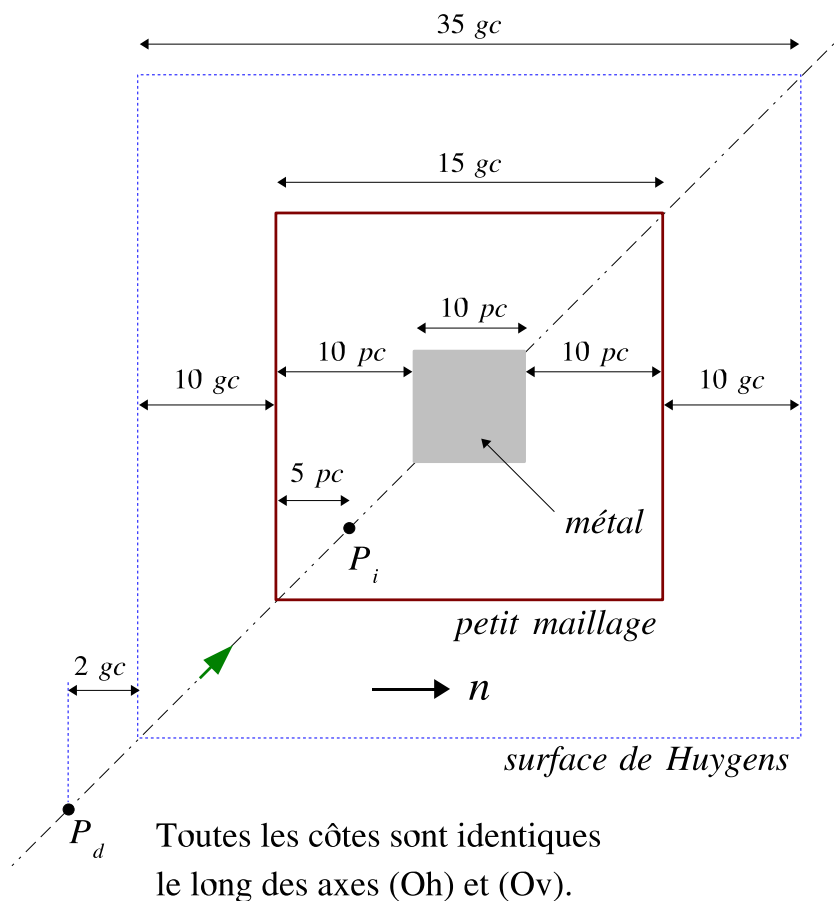


FIG. 4.18 – Test de la stabilité.

que cette tendance se confirme lorsque le volume sous-maillé augmente.

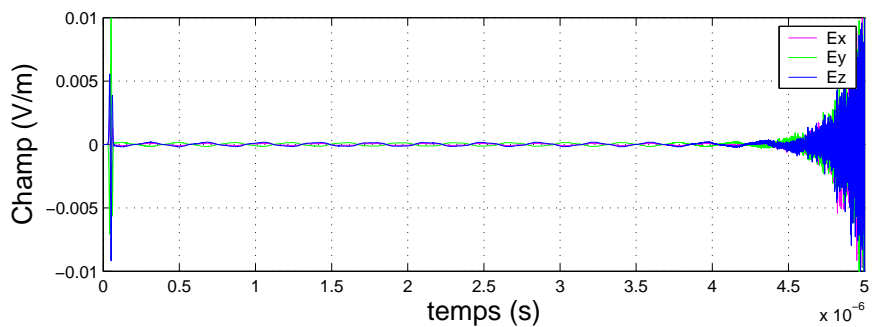


FIG. 4.19 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ).

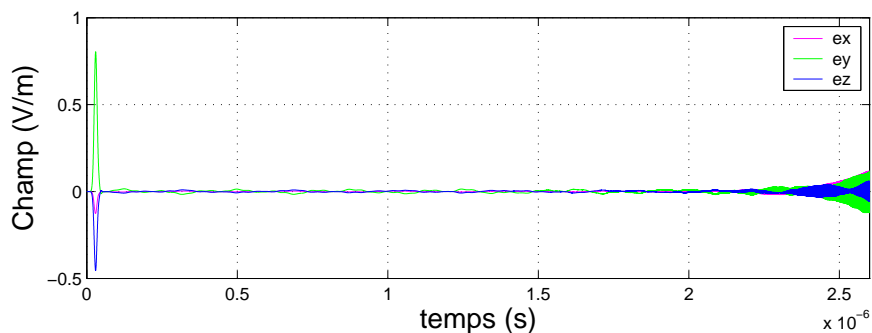
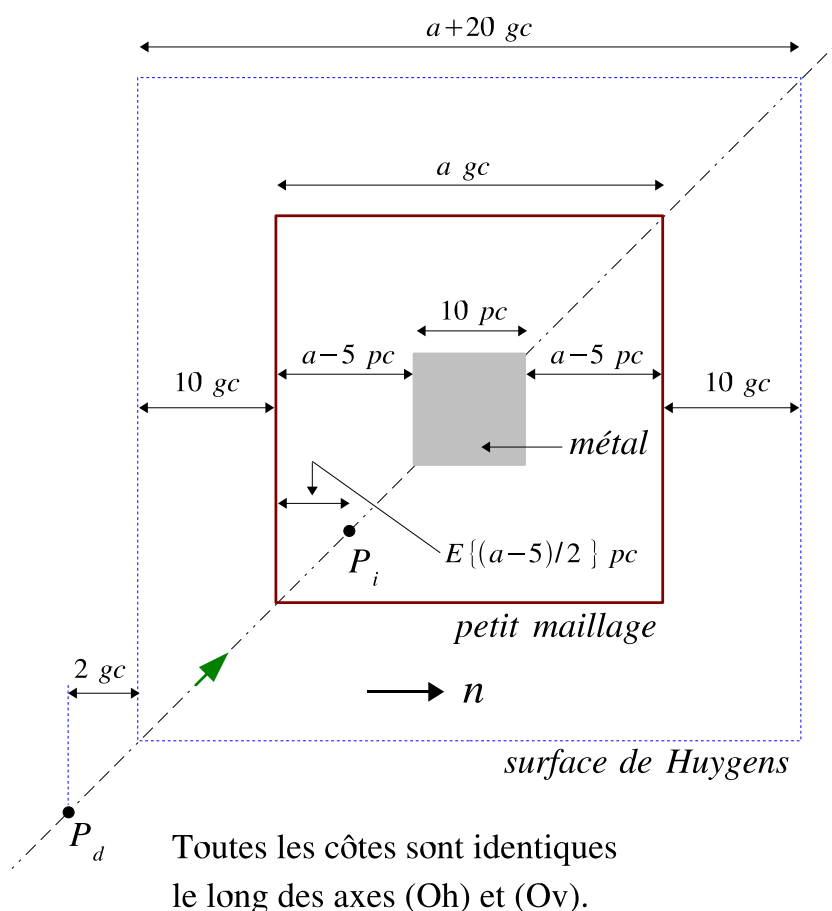


FIG. 4.20 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (spoint  $P_i$ ).

### 4.2.2.3 Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé

Les simulations effectuées ici sont identiques à celles que nous avons faites dans le paragraphe 3.2.3, excepté le pas temporel du grand maillage qui est identique à celui du petit maillage, comme précédemment. Les dimensions utilisées sont résumées dans la figure 4.21.



ne sont pas négligeables montrent que notre modèle de raffinement spatial est plus robuste que le modèle d'origine.

$a$	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$4 \mu s$	$7 \mu s$	$11 \mu s$	$14 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2 \mu s$	$4 \mu s$	$6 \mu s$	$8 \mu s$

TAB. 4.2 – Durées de stabilité pour le modèle spatial.

$a$	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$2 \mu s$	$3 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4.5 \mu s$	$5.5 \mu s$

TAB. 4.4 – Durées de stabilité pour le modèle spatiotemporel.

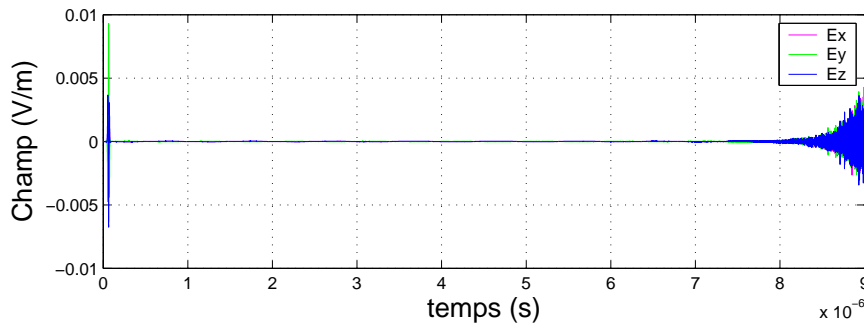


FIG. 4.22 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 30$ .

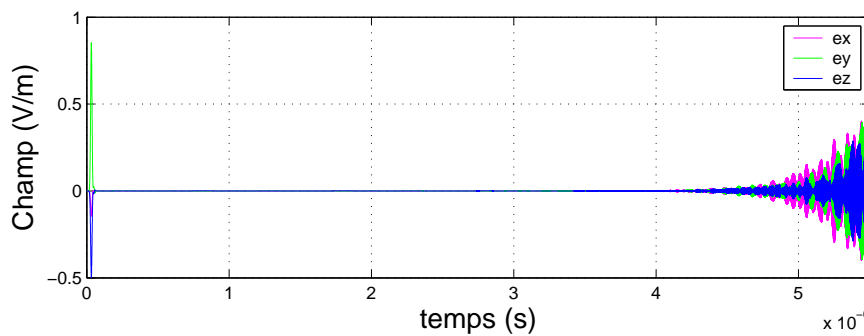


FIG. 4.23 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 30$ .

### 4.3 Le traitement temporel suivi du traitement spatial

Le traitement temporel est stable et il présente une réflexion numérique plus petite que le schéma de départ. Le traitement spatial possède une réflexion numérique comparable à celle du schéma de départ mais il est plus stable que ce dernier. Globalement les deux algorithmes séparés présentent de meilleures propriétés que le schéma de départ. Nous nous sommes alors demandé comment créer un nouveau modèle de raffinement spatiotemporel qui hériterait des qualités des

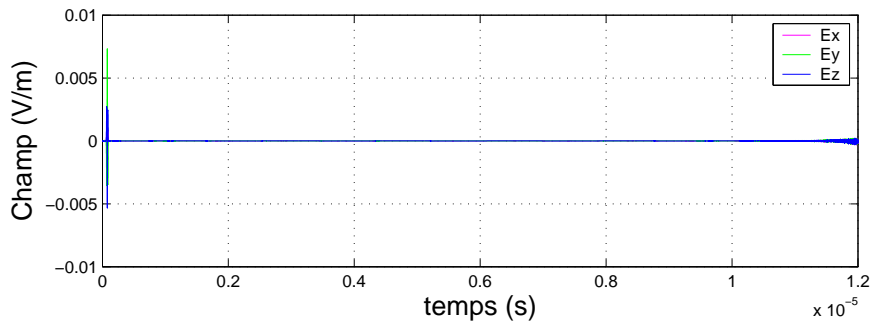


FIG. 4.24 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 45$ .

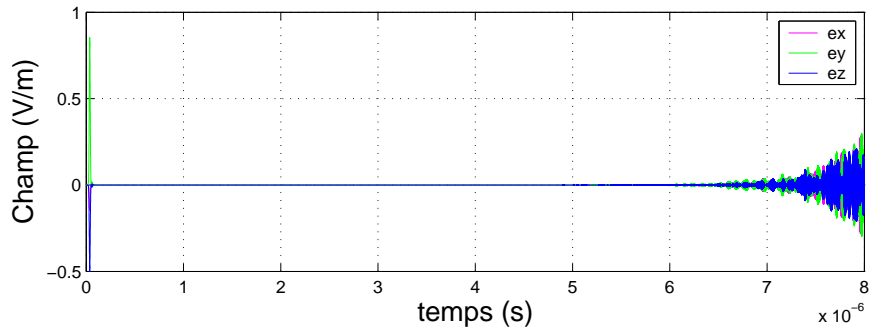


FIG. 4.25 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 45$ .

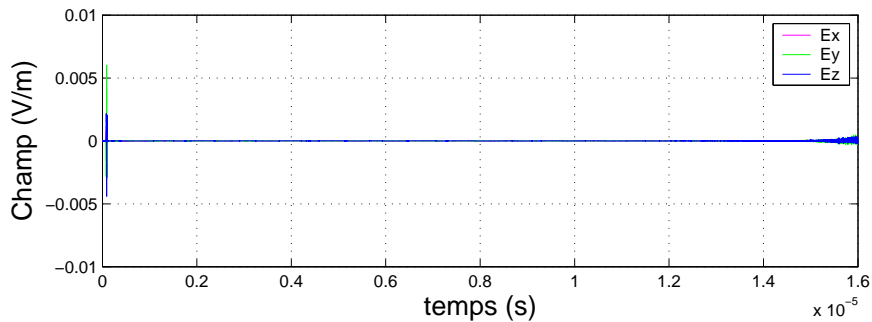


FIG. 4.26 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 60$ .

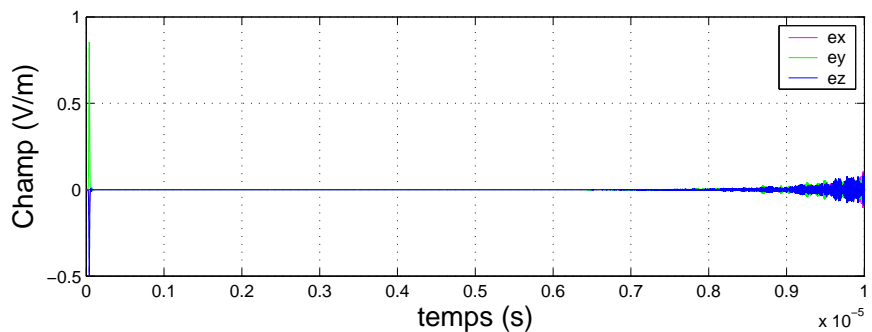


FIG. 4.27 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 60$ .

deux algorithmes précédents. L'idée la plus simple consiste à mettre ces deux programmes bout à bout. Nous avons donc créé un nouveau modèle de sous-maillage qui se présente comme la succession du schéma temporel et du schéma spatial, puis nous avons étudié les propriétés de ce nouveau modèle. Nous pouvons d'hors et déjà remarquer que cette façon de concevoir les schémas de sous-maillage a l'avantage de confiner les instabilités au traitement spatial seul. En effet, nous

venons de montrer que le traitement temporel est stable.

### 4.3.1 Le schéma

Une vue d'ensemble du nouveau modèle est proposée dans la figure 4.28. Il y a cette fois-ci trois domaines à considérer : le grand maillage, la zone intermédiaire, et le petit maillage. La zone intermédiaire d'épaisseur  $q$  grandes cellules est séparée du grand maillage par une frontière que nous avons appelée frontière temporelle puisque c'est elle qui définit le lieu où le traitement temporel commence. Le petit maillage est séparé de la zone intermédiaire par une deuxième frontière que nous avons nommée frontière spatiale puisque c'est ici que le traitement spatial commence.

Le schéma est obtenu en appliquant conjointement l'algorithme du paragraphe 4.1.1 sur la frontière temporelle et l'algorithme du paragraphe 4.2.1 sur la frontière spatiale. Remarquons que le même traitement spatial est appliqué dans les deux sous-itérations  $(n, n + \frac{1}{4}, n + \frac{1}{2})$  et  $(n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{4}, n + 1)$ . Nous n'avons pas détaillé les équations ni les figures dans chacune des étapes de l'algorithme, puisque que cela a déjà été fait dans les deux paragraphes cités précédemment. Les indices «  $zi$  », «  $ft$  », «  $fs$  », «  $ft-e$  » et «  $ft-zi$  », qui apparaissent dans les légendes de la figure 4.28, veulent dire respectivement « zone intermédiaire », « frontière temporelle », « frontière spatiale », « frontière temporelle du côté du grand maillage » et « frontière temporelle du côté de la zone intermédiaire ».

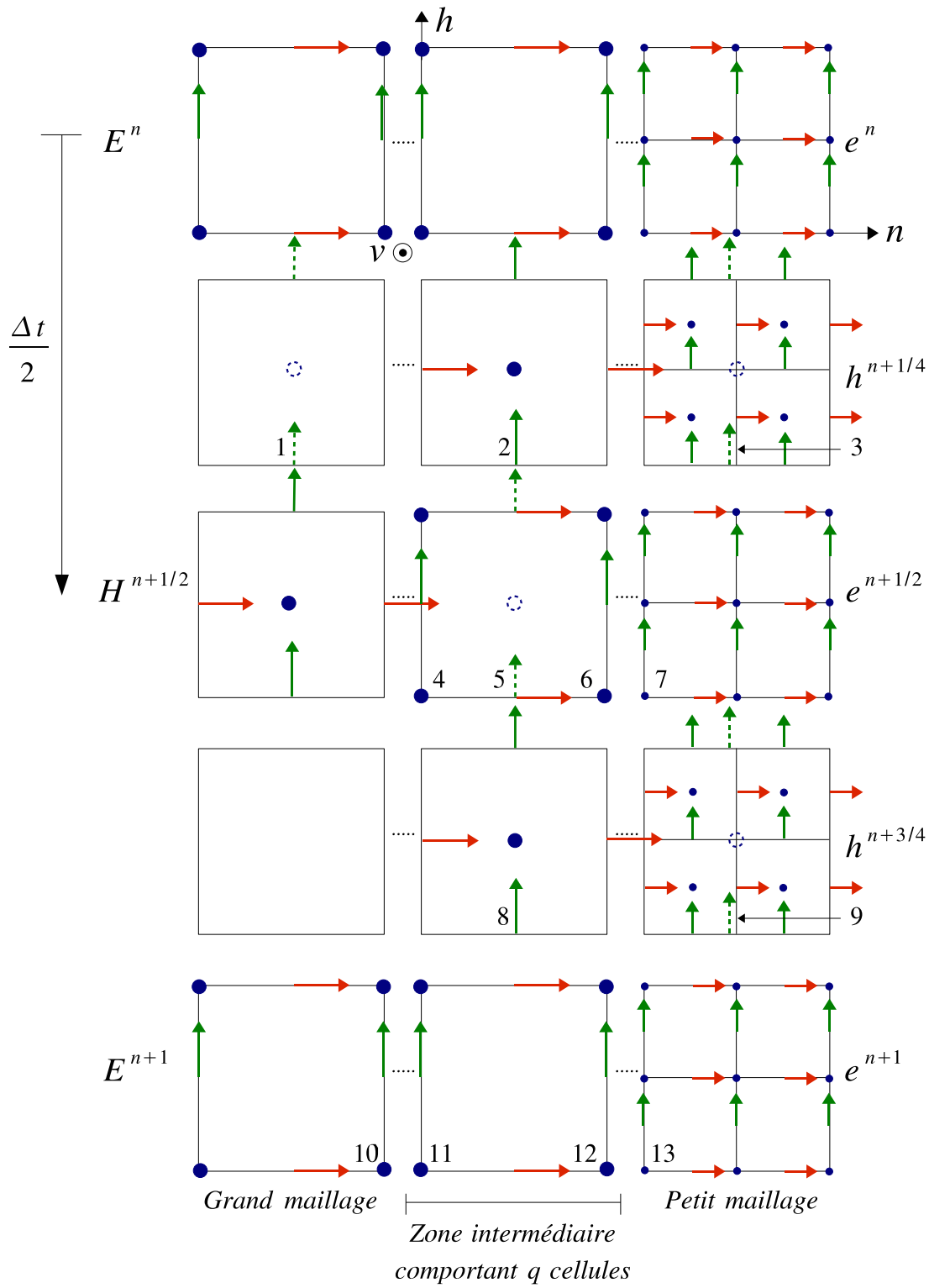
L'algorithme est le suivant :

- Calcul des  $H^{n+1/2}$  dans le grand maillage, frontière temporelle comprise.
- Calcul des  $E^{n+1}$  dans le grand maillage, sauf sur la frontière temporelle.
- Calcul des  $h^{n+1/4}$  dans le petit maillage, frontière spatiale comprise.
- Calcul des  $H^{n+1/4}$  dans la zone intermédiaire, frontières temporelle et spatiale comprises.
- Calcul des  $H_{h,e}^{n+1/4}$  (1) par interpolation temporelle.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n+1/4}$  (3) par interpolation spatiale.
- Calcul des  $E^{n+1/2}$  dans la zone intermédiaire, sauf sur les frontières temporelle et spatiale.
- Calcul des  $e^{n+1/2}$  dans le petit maillage, sauf sur la frontière spatiale.
- Calcul des  $E_{v,ft}^{n+1/2}$  (4) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $E_{v,fs}^{n+1/2}$  (6) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $e_{v,fs}^{n+1/2}$  (7) par interpolations spatiales.
- Calcul des  $H^{n+3/4}$  dans la zone intermédiaire, frontières temporelle et spatiale comprises.
- Calcul des  $h^{n+3/4}$  dans le petit maillage, frontière spatiale comprise.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n+3/4}$  (9) par interpolation spatiale.
- Calcul des  $H_{h,zi}^{n+1/2}$  (5) à partir de (2) et de (8) par interpolation temporelle.
- Calcul des  $E^{n+1}$  dans la zone intermédiaire, sauf sur les frontières temporelle et spatiale.
- Calcul des  $e^{n+1}$  dans le petit maillage, sauf sur la frontière spatiale.
- Calcul des  $E_{v,ft-e}^{n+1}$  (10) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $E_{v,ft-zi}^{n+1}$  (11) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $E_{v,fs}^{n+1}$  (12) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $e_{v,fs}^{n+1}$  (13) par interpolation spatiale.

### 4.3.2 Résultats des tests

#### 4.3.2.1 Comportement de la réflexion numérique en fonction de $q$

Nous avons simulé la réflexion numérique pour plusieurs épaisseurs de la zone intermédiaire. Pour cela nous avons fait varier le nombre  $q$  de grandes cellules de 1 à 5. Les dimensions utilisées sont illustrées dans la figure 4.29. Dans le grand maillage nous avons  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.15 m$  et  $\Delta t = 0.97 \cdot \Delta t_{max}$ . Dans la zone intermédiaire les pas spatiaux sont identiques à ceux du grand



- 1:  $H_{h,e}^{n+1/4}$    2:  $H_{h,zi}^{n+1/4}$    3:  $H_{h,i}^{n+1/4}$    4:  $E_{v,ft}^{n+1/2}$    5:  $H_{h,zi}^{n+1/2}$    6:  $E_{v,fs}^{n+1/2}$    7:  $e_{v,fs}^{n+1/2}$   
 8:  $H_{h,zi}^{n+3/4}$    9:  $H_{h,i}^{n+3/4}$    10:  $E_{v,ft-e}^{n+1}$    11:  $E_{v,ft-zi}^{n+1}$    12:  $E_{v,fs}^{n+1}$    13:  $e_{v,fs}^{n+1}$

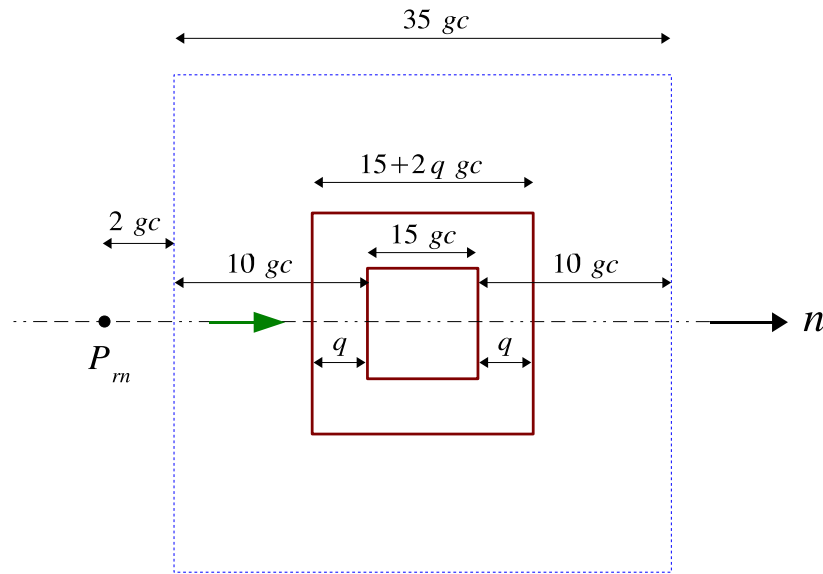
FIG. 4.28 – Vue d’ensemble des schémas temporel et spatial successifs.

maillage et  $\Delta t_{zi} = \Delta t/2^3$ . Dans le petit maillage le pas temporel est identique à celui de la zone

<sup>3</sup>On a dans ce cas :  $\Delta t_{zi} = 0.485 \cdot \Delta t_{max,zi}$ .



intermédiaire et  $\delta x = \delta y = \delta z = 0.075 m$ <sup>4</sup>. L'onde utilisée à les mêmes caractéristiques que dans les simulations précédentes.



Toutes les côtes sont identiques le long des axes (Oh) et (Ov).

FIG. 4.29 – Test de la réflexion numérique.

Le réseau de courbes de la figure 4.30 montre les résultats obtenus. Le premier constat que nous pouvons faire est que la réflexion numérique de notre nouveau modèle ne dépend pas de l'épaisseur de la zone intermédiaire.

La courbe qui est en pointillés noirs à été construite à partir des réflexions numériques du schéma spatial et du schéma temporel. Nous avons additionné ces deux réflexions sur une échelle linéaire puis nous avons retranscrit le résultat obtenu sur une échelle logarithmique. Evidement les réflexions numériques ne s'additionnent pas mais elles se cumulent pour donner un résultat assez voisin<sup>5</sup> de celui obtenu avec notre nouveau modèle.

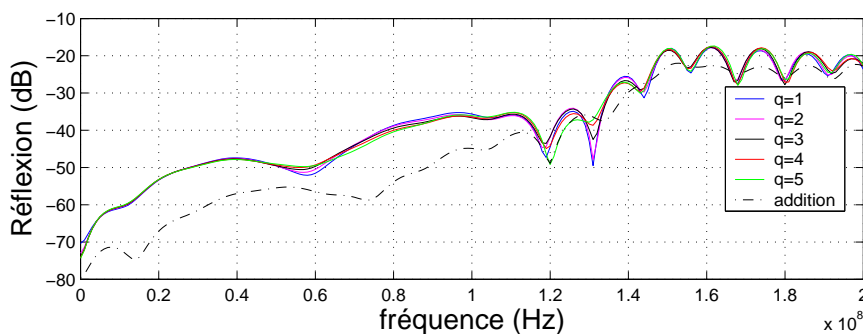


FIG. 4.30 – Réflexion numérique.

#### 4.3.2.2 Comportement de la stabilité en fonction de q

Comme pour la réflexion numérique, nous avons testé la stabilité de notre schéma pour plusieurs épaisseurs de la zone intermédiaire. Les paramètres géométriques de ces tests sont illustrés

<sup>4</sup>On a alors :  $\delta t = 0.97 \cdot \delta t_{max}$ .

<sup>5</sup>A 10 dB près pour les basses fréquences, pour les hautes fréquences la concordance est assez bonne.

dans la figure 4.31. Les paramètres spatiotemporels et les caractéristiques de l'onde n'ont pas changés par rapport au paragraphe précédent.

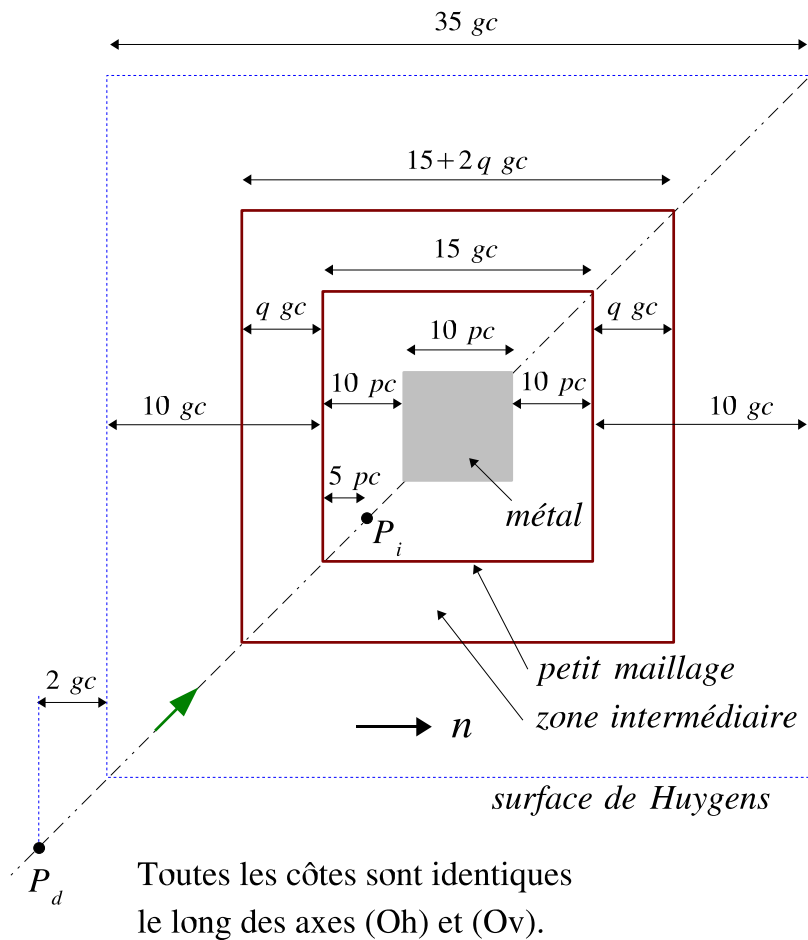


FIG. 4.31 – Test de la stabilité.

Les courbes obtenues sont dans l'annexe B. Nous constatons que la durée de stabilité reste égale à  $2.25 \mu s$  dans le petit maillage quelle que soit la valeur de  $q$ . Dans le grand maillage la situation est un peu différente, la durée de stabilité a tendance à augmenter lorsque  $q$  augmente. Nous avons résumé ces résultats dans le tableau 4.6.

Ce comportement peut s'interpréter en terme de couplage entre les deux interfaces. Lorsque  $q = 1$  les deux frontières sont proches l'une de l'autre si bien que notre modèle a tendance à se comporter comme le modèle spatiotemporel de départ : nous obtenons effectivement les mêmes durées de stabilité dans les deux maillages. Lorsque  $q$  augmente, les deux frontières deviennent indépendantes l'une de l'autre. Dans ce cas, le champ du grand maillage tend à ne dépendre que de la frontière temporelle, si bien que ce dernier devient de plus en plus stable. Le champ du petit maillage a quant à lui tendance à ne dépendre que de la frontière spatiale, si bien que ce dernier hérite de la durée de stabilité du modèle spatial qui est toujours égale à  $2.25 \mu s$  lorsque le volume est fixé.

$q$	1	2	3	4	5
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$2.25 \mu s$	$2.5 \mu s$	$3 \mu s$	$3.25 \mu s$	$3.5 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2.25 \mu s$	$2.25 \mu s$	$2.25 \mu s$	$2.25 \mu s$	$2.25 \mu s$

TAB. 4.6 – Durées de stabilité en fonction de  $q$ .

### 4.3.2.3 Comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé pour $q=1$

Nous avons intérêt à ce que la zone intermédiaire soit la plus petite possible, nous avons donc choisit  $q = 1$ . Ensuite nous avons testé le comportement de la stabilité en fonction du volume sous-maillé afin de voir si notre modèle hérite bien de la robustesse du schéma de raffinement spatial seul. Les dimensions utilisées sont résumées dans la figure 4.32. Une fois de plus les paramètres sont identiques à ceux que nous avons utilisés dans le paragraphe précédent, excepté la direction d'arrivé de l'onde incidente.

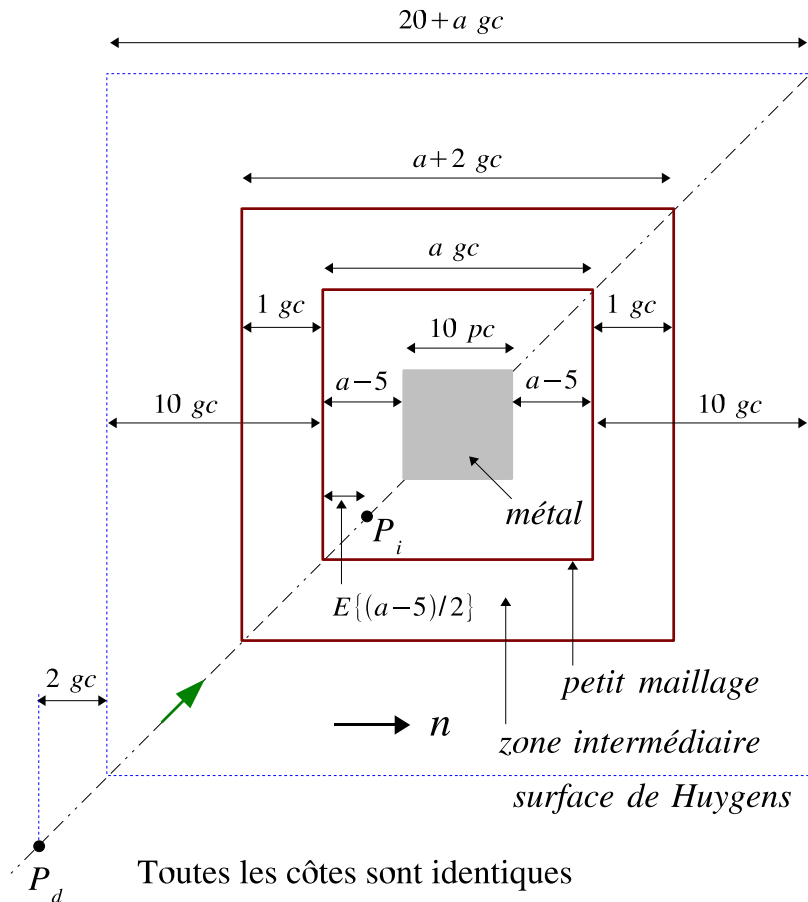


FIG. 4.32 – Tests de la stabilité en fonction du volume sous-maillé.

Les courbes 4.33 à 4.40 montrent les résultats obtenus. Nous avons regroupé les durées de stabilité dans le tableau 4.8. A titre de comparaison nous avons également recopié les tableaux obtenus avec le modèle spatiotemporel et avec le modèle spatial (tableaux 4.10 et 4.12).

Notre nouveau schéma hérite partiellement des qualités du modèle de raffinement spatial. En effet, les durées de stabilité obtenues dans le petit maillage augmentent de la même manière qu'avec le modèle de raffinement spatial, par contre dans le grand maillage ces durées augmentent moins <sup>6</sup> mais elles sont tout de même plus importantes qu'avec le modèle spatiotemporel de départ.

<sup>6</sup>Elles sont approximativement deux fois plus petites qu'avec le modèle de raffinement spatial seul.

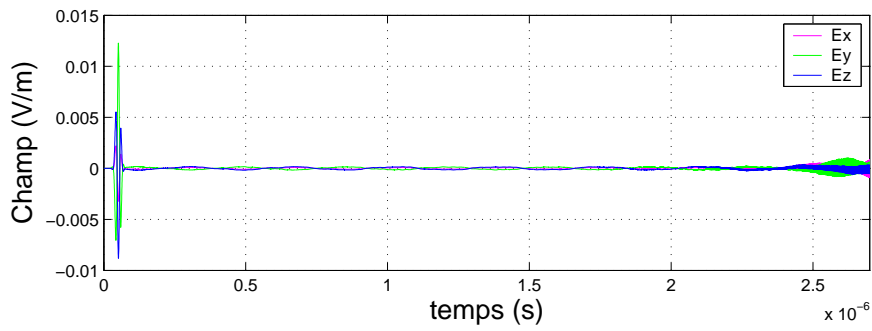


FIG. 4.33 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 15$ .

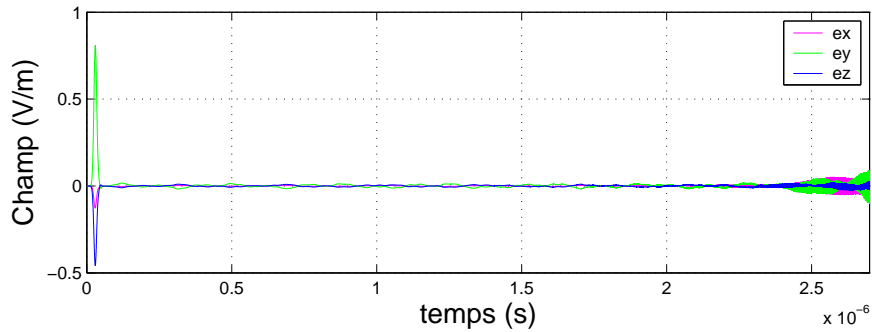


FIG. 4.34 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 15$ .

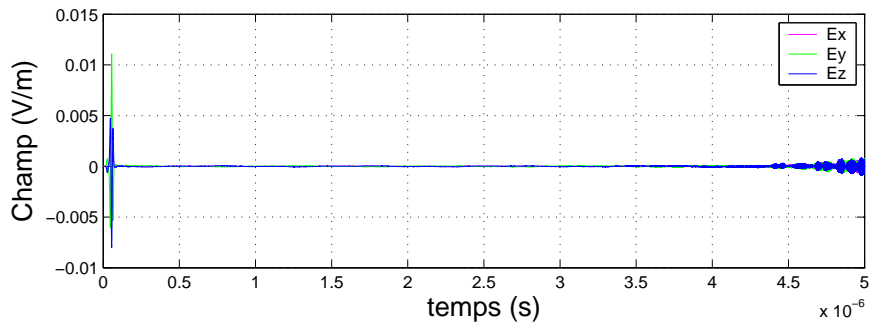


FIG. 4.35 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 30$ .

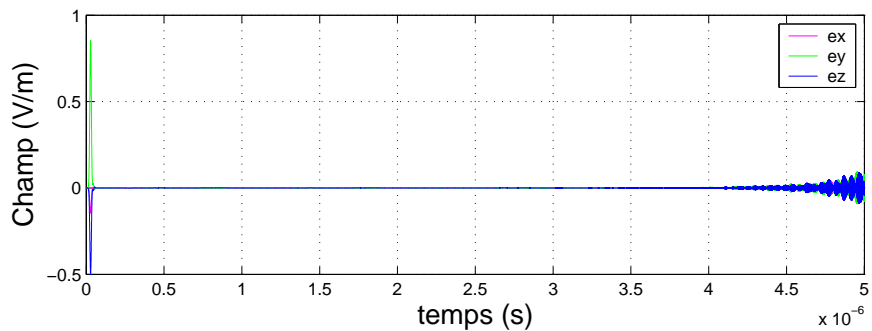


FIG. 4.36 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 30$ .

## 4.4 Pour résumer

Nous sommes partis d'un schéma de sous-maillage basé sur des relations d'interpolation. Nous avons montré que ce schéma possède une réflexion numérique et une durée de stabilité convenables. Ensuite nous en avons extrait deux algorithmes que nous avons étudié séparément. Le

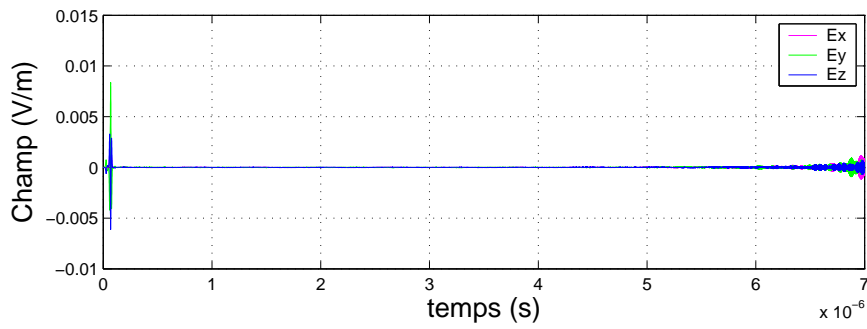


FIG. 4.37 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 45$ .

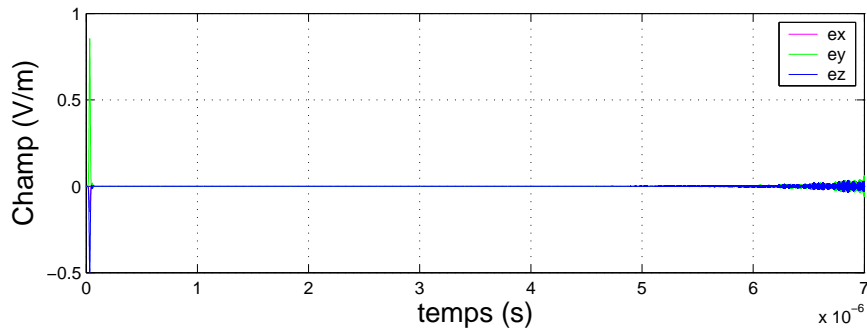


FIG. 4.38 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 45$ .

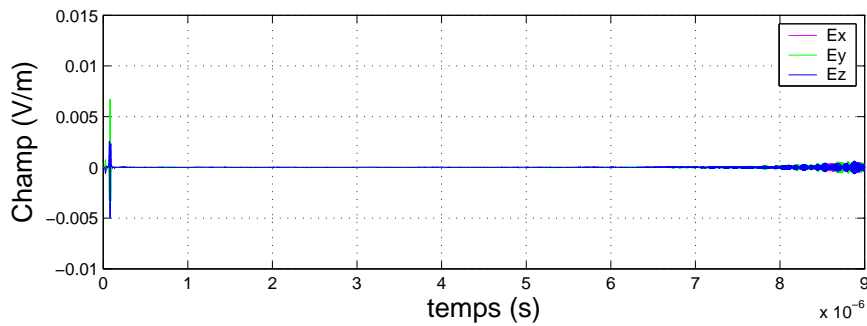


FIG. 4.39 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $a = 60$ .

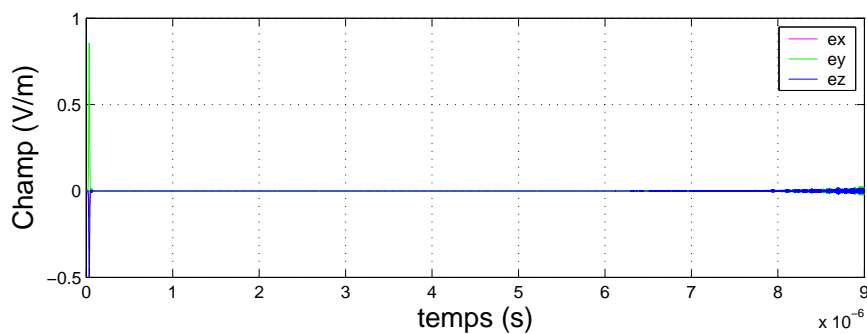


FIG. 4.40 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $a = 60$ .

premier d'entre eux, l'algorithme temporel, est stable et présente une réflexion numérique plus basse que le schéma de départ. Le deuxième, l'algorithme spatial, présente une réflexion numérique comparable au schéma de départ tout en étant un peu plus stable que ce dernier. Finalement nous avons obtenu la réponse à la question que nous nous posions au début : « C'est le raffinement spatial qui est à l'origine des instabilités ».

<i>a</i>	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$2.25 \mu s$	$4 \mu s$	$6 \mu s$	$7 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2.25 \mu s$	$4 \mu s$	$6 \mu s$	$8 \mu s$

TAB. 4.8 – Durées de stabilité obtenues.

<i>a</i>	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$2 \mu s$	$3 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4.5 \mu s$	$5.5 \mu s$

TAB. 4.10 – Durées de stabilité obtenues avec le modèle spatiotemporel.

<i>a</i>	15	30	45	60
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$4 \mu s$	$7 \mu s$	$11 \mu s$	$14 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2 \mu s$	$4 \mu s$	$6 \mu s$	$8 \mu s$

TAB. 4.12 – Durées de stabilité obtenues avec le modèle spatial.

Le fait d'avoir un algorithme temporel stable nous a donné l'idée de concevoir les schémas de sous-maillage comme la succession d'un algorithme temporel et d'un algorithme spatial. Cette façon de faire permet à coup sûr de confiner les problèmes d'instabilité au modèle de raffinement spatial seul, de plus elle simplifie la programmation et enfin elle nous permet maintenant de nous concentrer uniquement sur le raffinement spatial.

Ensuite nous avons cherché les liens entre les propriétés de ce nouveau modèle « successif » et les propriétés des algorithmes temporel et spatial séparés. Finalement le modèle « successif » présente des qualités très voisines de celles du schéma de raffinement spatial seul. De plus nous avons montré qu'il est meilleur que le schéma spatiotemporel de départ mais ceci est accessoire.

A la lumière de ce qui précède il faut maintenant chercher un schéma de raffinement spatial performant et pourquoi pas, stable. C'est le but du chapitre qui suit.

# Chapitre 5

## Recherche du meilleur schéma spatial

Dans ce chapitre nous avons comparé plusieurs modèles de raffinement spatial. Les trois premiers modèles qui ne font intervenir qu'une seule frontière, utilisent des techniques d'interpolation inspirées de ce que l'on peut trouver dans la littérature. Le quatrième modèle est un modèle de recouvrement.

### 5.1 Trois méthodes de raffinement spatial n'utilisant qu'une seule frontière

#### 5.1.1 Présentation des trois schémas

##### 5.1.1.1 Vue d'ensemble des trois schémas au cours du temps

Les trois schémas présentés ci-après peuvent être illustrés avec la même vue d'ensemble que nous avons représenté dans la figure 5.1. Rappelons que l'indice  $n'$  peut-être égale à  $n$  ou à  $n + 1/2$  selon que l'on se trouve dans la première ou la deuxième sous-itération temporelle.

##### 5.1.1.2 Une méthode de type « gradient »

Cette méthode consiste à déterminer les  $h_{h,e}^{n'+1/4}$  (1) à partir des variations spatiales des  $H_h^{n'+1/4}$  environnants, afin de pouvoir calculer les  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) avec les équations de Maxwell. Ensuite les  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) sont déterminés à partir des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) par des relations d'interpolation spatiales. C'est en quelque sorte le modèle inverse de celui que nous avons utilisé jusqu'à présent.

Pour être plus précis, l'algorithme est le suivant :

- Calcul des  $H_h^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $h_h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n'+1/4}$  (2) par interpolation spatiale à partir des quatre  $h_h^{n'+1/4}$  environnants (voir figure 5.2) :

$$H_{h,i}^{n'+1/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n'+1/4}(i) \quad (5.1)$$

- Calcul des  $h_{h,e}^{n'+1/4}$  (1) par interpolations spatiales à partir des  $H_h^{n'+1/4}$  environnants. On interpole d'abord dans les plans parallèles au plan  $(O, n, v)$  (voir figure 5.3), ce qui permet de déterminer les  $h_{h,e,plus}^{n'+1/4}$  et les  $h_{h,e,moins}^{n'+1/4}$  puis ensuite le long de l'axe  $(Oh)$  (voir figure

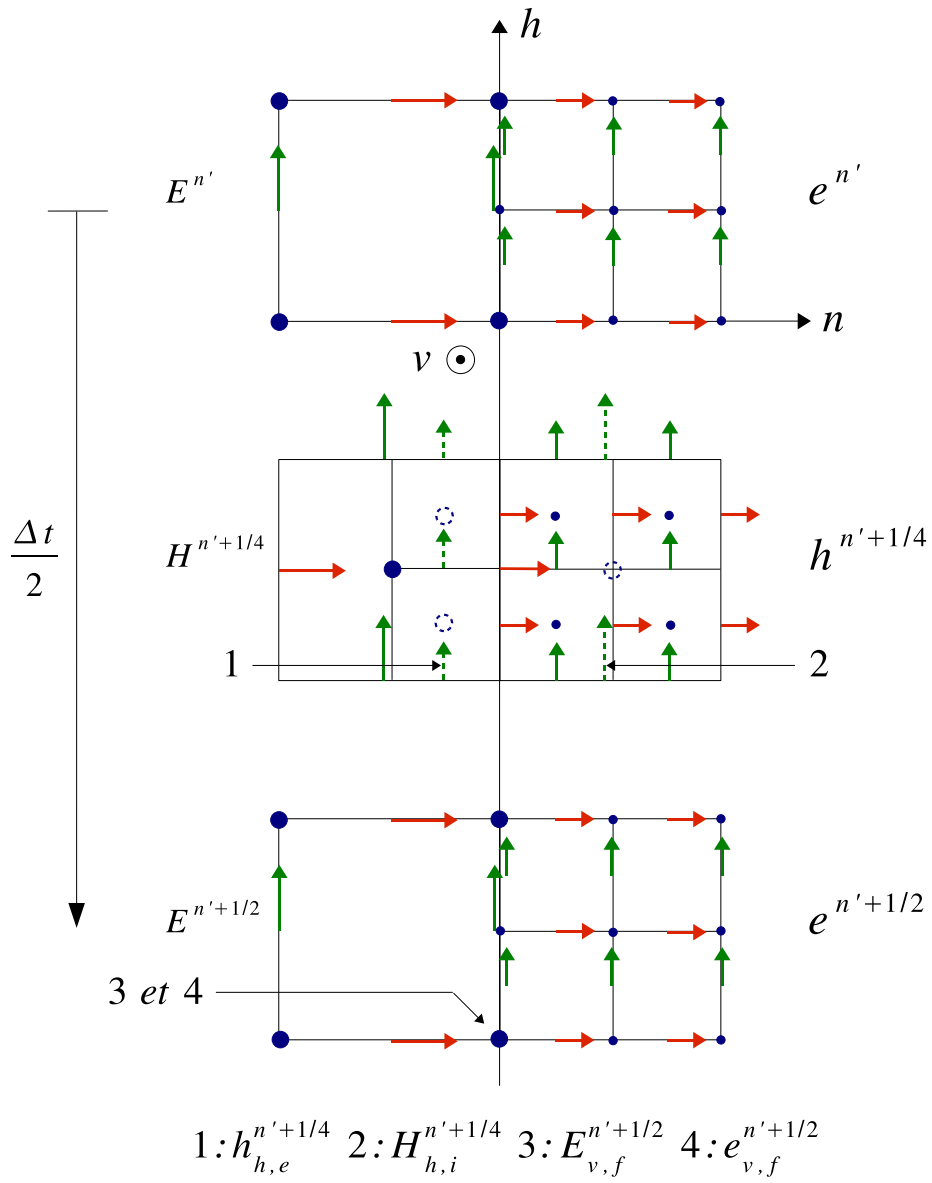


FIG. 5.1 – Vue d’ensemble des trois schémas spatiaux.

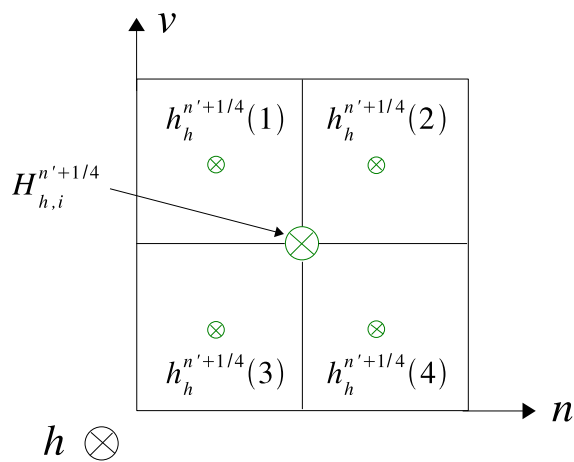


FIG. 5.2 – Calcul des  $H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}}$  par interpolation spatiale.



5.4), ce qui permet de déterminer les  $h_{h,e,c}^{n'+1/4}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{h,e,plus}^{n'+1/4} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,0}^{n'+1/4} \right) + \\ \quad \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,plus}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,plus}^{n'+1/4} \right) \\ \\ h_{h,e,moins}^{n'+1/4} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,0}^{n'+1/4} \right) + \\ \quad \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,moins}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,moins}^{n'+1/4} \right) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$h_{h,e,c}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot \left( h_{h,e,plus}^{n'+1/4} + h_{h,e,moins}^{n'+1/4} \right) \quad (5.3)$$

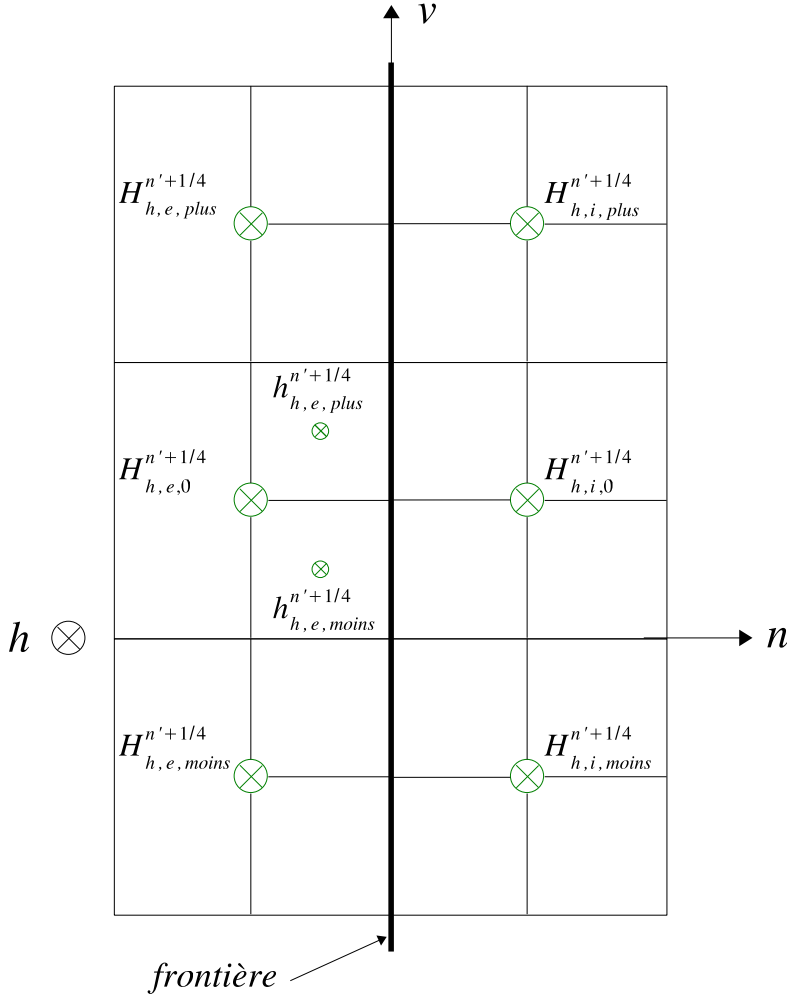


FIG. 5.3 – Interpolations dans les plans parallèles au plan  $(O, n, v)$ .

- Calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) par interpolation spatiale (voir figure 5.5) :

$$E_{v,f}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,f,plus}^{n'+1/2} + e_{v,f,moins}^{n'+1/2} \right) \quad (5.4)$$

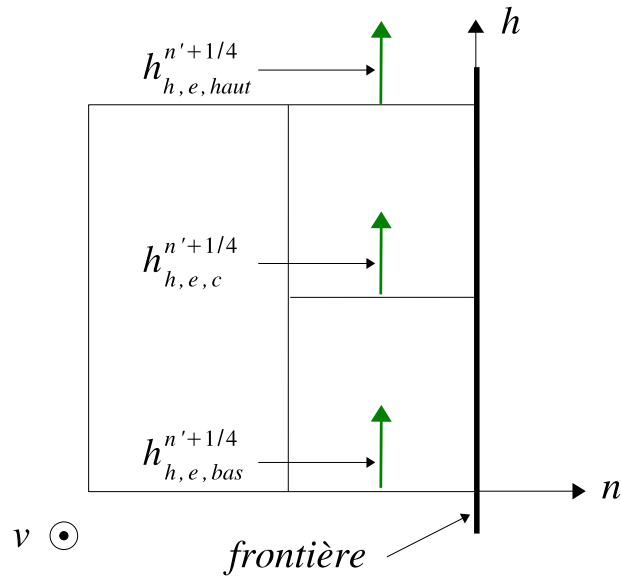


FIG. 5.4 – Interpolation le long de l'axe ( $Oh$ ).

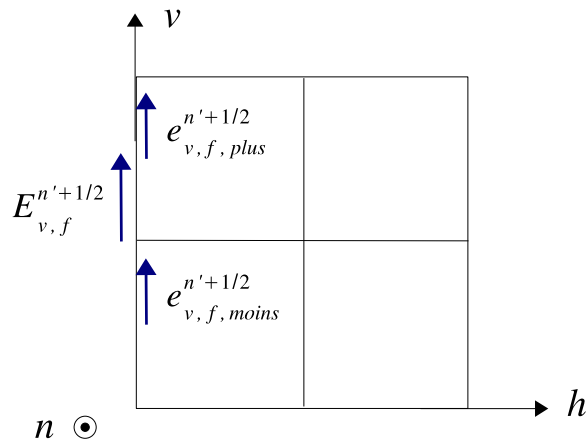


FIG. 5.5 – Calcul des  $E_{v,f}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation spatiale.

### 5.1.1.3 Une méthode « réciproque »

Cette méthode consiste à symétriser les traitements effectués de part et d'autre de la frontière, c'est pour cette raison que nous l'avons qualifié de « réciproque ». Ainsi les  $h_{h,e}^{n'+1/4}$  (1) et les  $H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}}$  (2), qui sont situés de part et d'autre de l'interface, sont déterminés par des relations d'interpolations spatiales, ce qui permet alors de calculer les  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) et les  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) avec les équations de Maxwell. Le but de cette méthode est de ne stipuler aucune relation d'interpolation entre les composantes du champ électrique sur la frontière.

Cela donne l'algorithme suivant :

- Calcul des  $H^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}}$  (2) par interpolation spatiale à partir des quatre  $h_h^{n'+1/4}$  environnants

(voir figure 5.6) :

$$H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n'+1/4}(i) \quad (5.5)$$

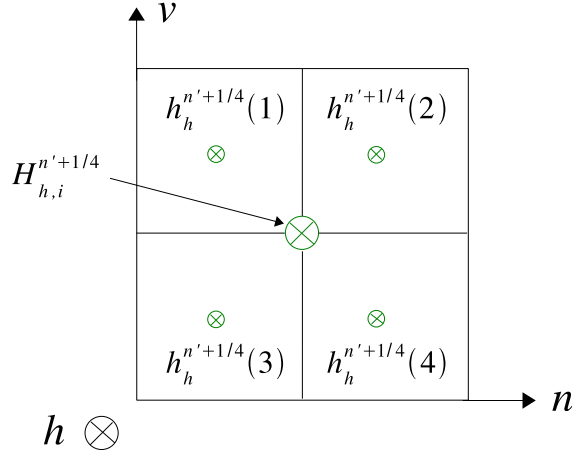


FIG. 5.6 – Calcul des  $H_{h,i}^{n'+\frac{1}{4}}$  par interpolation spatiale.

- Calcul des  $h_{h,e}^{n'+1/4}$  (1) par interpolations spatiales à partir des  $H_h^{n'+1/4}$  environnants. On interpole d'abord dans les plans parallèles au plan  $(O, n, v)$  (voir figure 5.7), ce qui permet de déterminer les  $h_{h,e,plus}^{n'+1/4}$  et les  $h_{h,e,moins}^{n'+1/4}$  puis ensuite le long de l'axe  $(Oh)$  (voir figure 5.8), ce qui permet de déterminer les  $h_{h,e,c}^{n'+1/4}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{h,e,plus}^{n'+1/4} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,0}^{n'+1/4} \right) + \\ \quad \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,plus}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,plus}^{n'+1/4} \right) \\ \\ h_{h,e,moins}^{n'+1/4} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,0}^{n'+1/4} \right) + \\ \quad \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot H_{h,e,moins}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot H_{h,i,moins}^{n'+1/4} \right) \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$h_{h,e,c}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot \left( h_{h,e,haut}^{n'+1/4} + h_{h,e,bas}^{n'+1/4} \right) \quad (5.7)$$

- Calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) à l'aide des équations de Maxwell.

#### 5.1.1.4 Une méthode d'interpolation quadratique

Cette méthode n'est pas très différente de celle que nous avons présenté dans le paragraphe 4.2, nous avons simplement remplacé la méthode de calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) le long de l'axe  $(Ov)$ , par une méthode polynomiale. Au lieu d'utiliser une relation d'interpolation linéaire, nous avons cherché le polynôme de degré deux qui passe par les trois valeurs de champ  $E_{v,f,moins}^{n'+1/2}$ ,  $E_{v,f,0}^{n'+1/2}$  et  $E_{v,f,plus}^{n'+1/2}$ , puis nous en avons déduit les  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (voir l'équation 5.9 et la figure 5.10). Cette méthode permet d'établir un lien du second ordre entre les diverses composantes du champ électrique

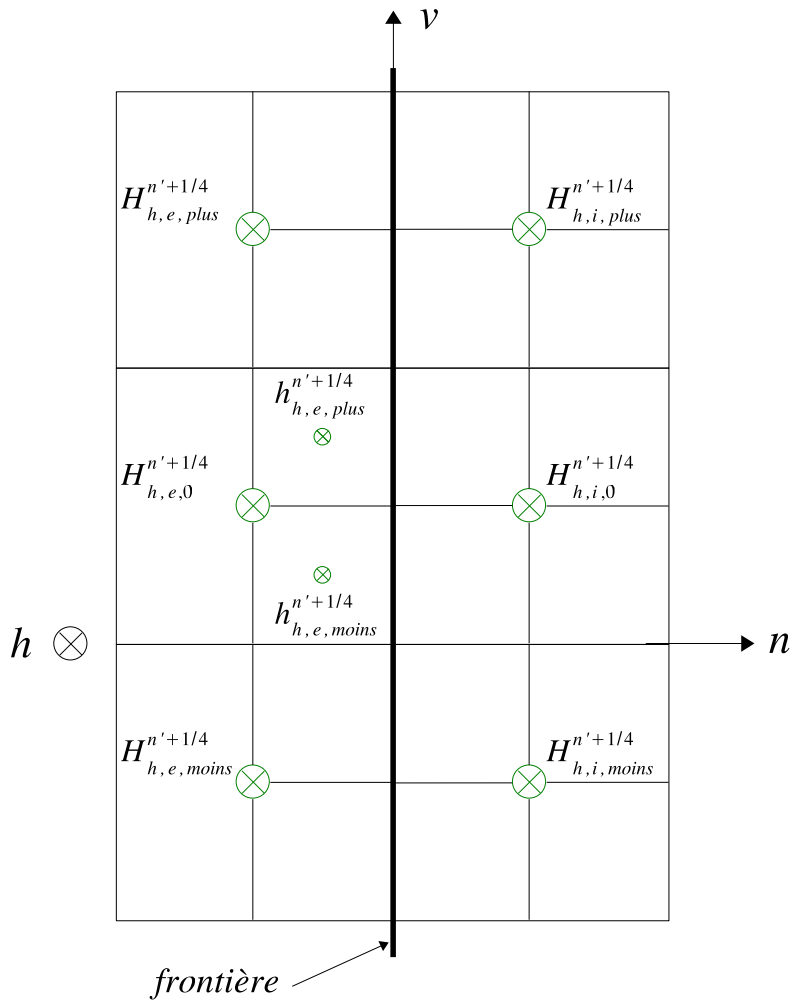


FIG. 5.7 – Interpolations dans les plans parallèles au plan  $(O, n, v)$ .

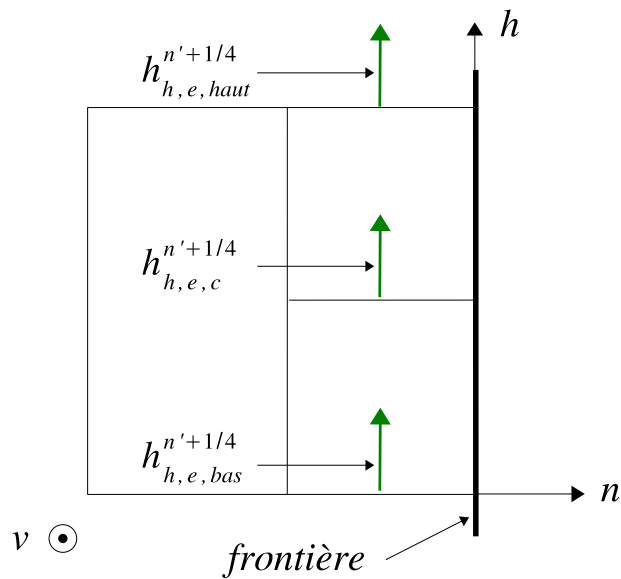


FIG. 5.8 – Interpolation le long de l'axe  $(Oh)$ .

sur l'interface. Notons que l'utilisation d'une interpolation quadratique n'est pas utile le long de l'axe  $(Oh)$  car les valeurs à déterminer sont centrées, si bien que la demi-somme des valeurs de gauche et des valeurs de droite est déjà une relation à l'ordre deux. Remarquons pour finir que

notre méthode revient à utiliser un développement de Taylor Mac-Laurin à l'ordre deux dans lequel les dérivées première et seconde sont des dérivées centrées.

L'algorithme est le suivant :

- Calcul des  $H^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n'+1/4}$  (2) par interpolation spatiale à partir des quatre  $h_h^{n'+1/4}$  environnants (voir figure 5.9) :

$$H_{h,i}^{n'+1/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 h_h^{n'+1/4}(i) \quad (5.8)$$

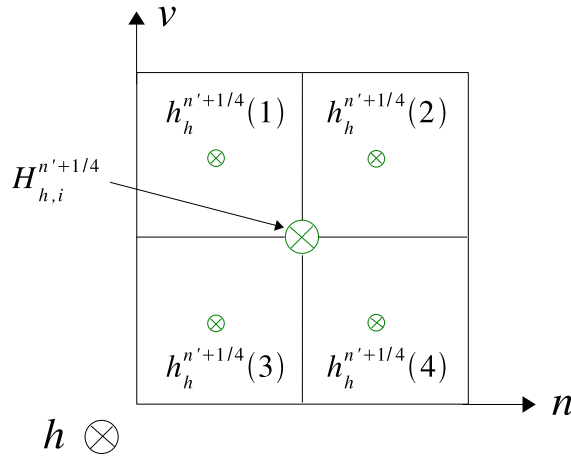


FIG. 5.9 – Calcul des  $H_{h,i}^{n'+1/4}$  par interpolation spatiale.

- Calcul des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3) par les équations de Maxwell.
- Calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/2}$  (4) à partir des  $E_{v,f}^{n'+1/2}$  (3). Une interpolation quadratique est utilisée le long de l'axe  $(Ov)$  (voir figure 5.10) tandis qu'une interpolation linéaire est utilisée le long de l'axe  $(Oh)$  (voir figure 5.11) :

$$\begin{cases} e_{v,f,plus}^{n'+1/2} = \frac{1}{32} \cdot \left( -3 \cdot E_{v,f,moins}^{n'+1/2} + 30 \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/2} + 5 \cdot E_{v,f,plus}^{n'+1/2} \right) \\ e_{v,f,moins}^{n'+1/2} = \frac{1}{32} \cdot \left( 5 \cdot E_{v,f,moins}^{n'+1/2} + 30 \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/2} - 3 \cdot E_{v,f,plus}^{n'+1/2} \right) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$e_{v,f,c}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,f,g}^{n'+1/2} + e_{v,f,d}^{n'+1/2} \right) \quad (5.10)$$

## 5.1.2 Résultats des tests

### 5.1.2.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation utilisées ici sont les mêmes que celles que nous avons adopté dans le paragraphe 4.2.2.1 (voir figure 4.16). Les réflexions numériques des trois modèles que nous venons de présenter sont illustrées dans la figure 5.12. Le modèle « réciproque » présente une réflexion numérique acceptable uniquement pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 40$ , dans le cas contraire ce modèle

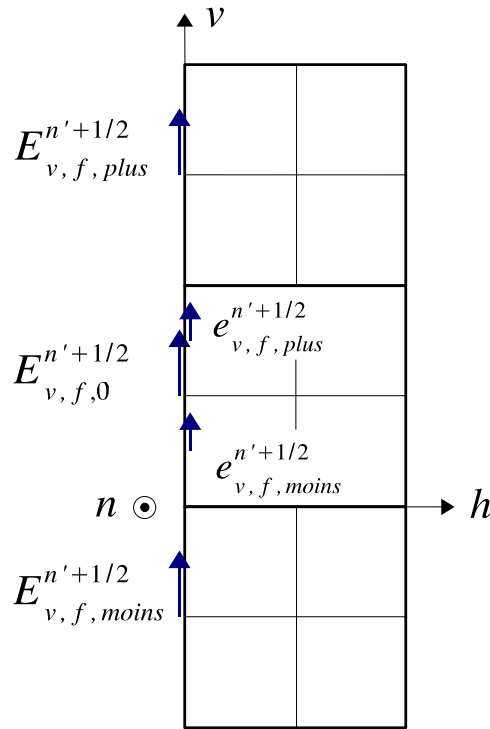


FIG. 5.10 – Interpolations quadratiques le long de l'axe ( $Ov$ ).

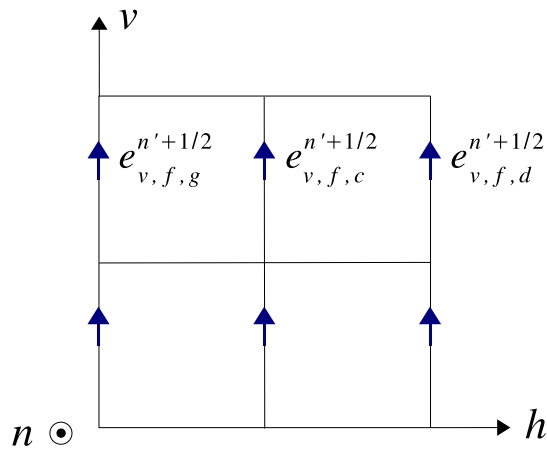


FIG. 5.11 – Interpolation linéaire le long de l'axe ( $Oh$ ).

est très mauvais, il présente même une réflexion supérieure à l'unité lorsque  $f \geq 1.4 \text{ MHz}$  ! Les autres modèles présentent des réflexions convenable dès que  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$ . Remarquons que le modèle quadratique n'est pas meilleur que son homologue linéaire, leurs réflexions numériques respectives sont d'ailleurs quasiment identiques.

### 5.1.2.2 Stabilité

Les conditions de simulation utilisées pour mesurer la stabilité sont les mêmes que celles que nous avons adopté dans le paragraphe 4.2.2.2 (voir figure 4.18). Les résultats obtenus sont illustrés dans les courbes 5.13 à 5.18. Une fois de plus nous constatons que le modèle « réciproque » n'est pas très bon puisqu'il présente des durées de stabilité inférieures à  $1 \mu s$  dans les deux domaines, de plus le niveau de champ résiduel est très important dans le grand maillage. Le modèle « qua-

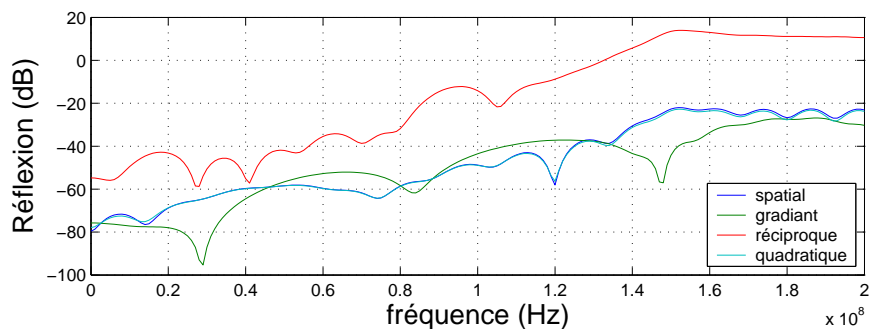


FIG. 5.12 – Réflexions numériques des trois schémas.

dratique » est comparable au modèle spatial que nous avons développé dans le paragraphe 4.2, les durées de stabilité et les niveaux de champ résiduel sont en effet similaires. Finalement le modèle de type « gradient » est le seul qui peut faire concurrence au modèle spatial évoqué ci-dessus. En effet, non seulement les durées de stabilité sont du même ordre de grandeur mais en plus il n’y a pas de champ résiduel.

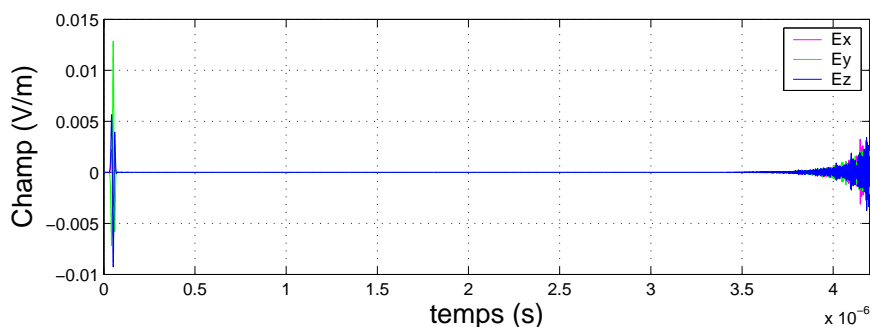


FIG. 5.13 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour le modèle de type « gradient ».

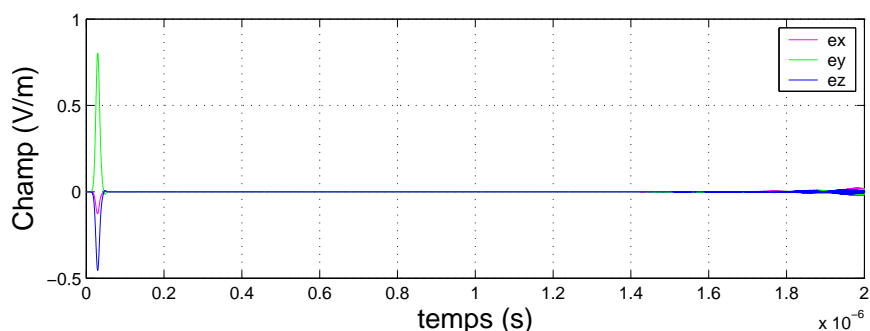


FIG. 5.14 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour le modèle de type « gradient ».

## 5.2 Une méthode de recouvrement

Nous avons mis ce modèle de raffinement spatial dans un paragraphe à part car il est structurellement différent des trois modèles que nous venons de présenter : il présente en effet deux frontières qui encadrent une zone de recouvrement commune aux deux maillages.

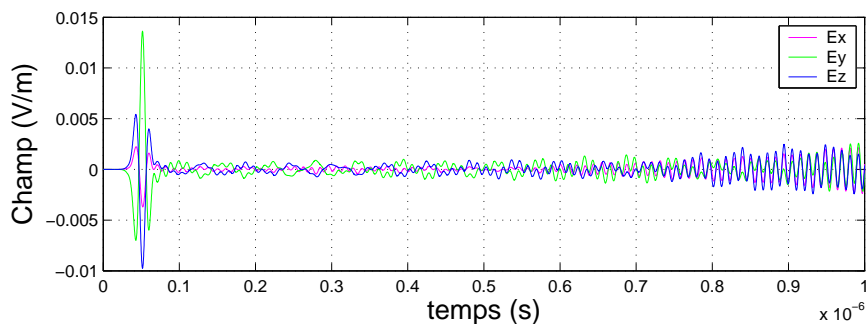


FIG. 5.15 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour le modèle « réciproque ».

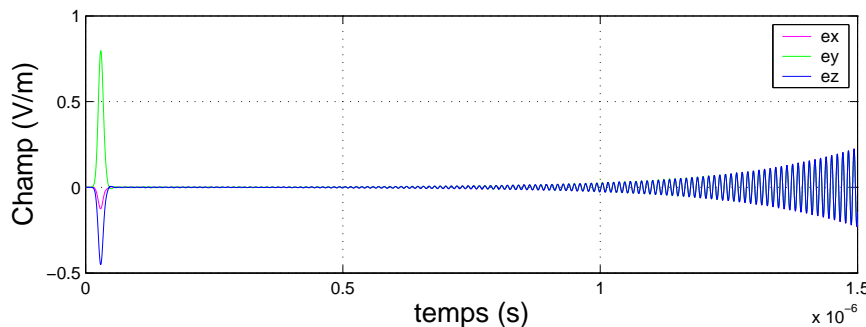


FIG. 5.16 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour le modèle « réciproque ».

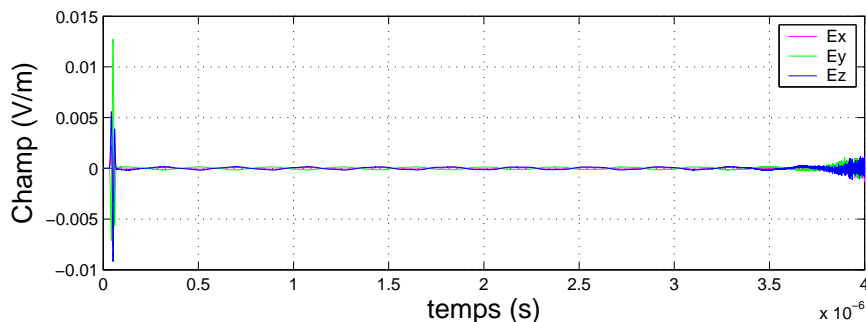


FIG. 5.17 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour le modèle de « quadratique ».

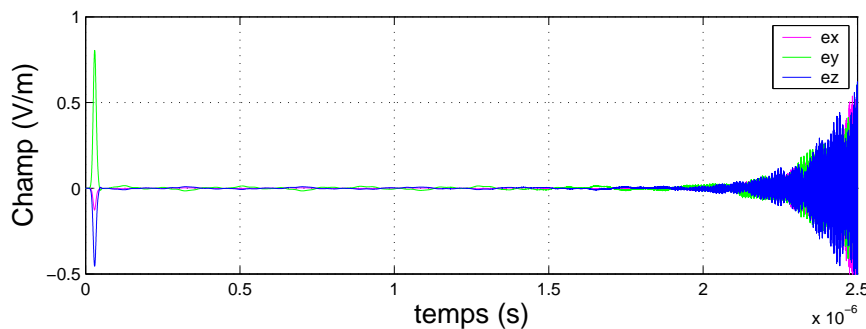


FIG. 5.18 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour le modèle de type « quadratique ».

### 5.2.1 Le schéma

Une vue d'ensemble de ce schéma est présentée dans la figure 5.19. L'idée est d'utiliser la zone commune aux deux maillages pour calculer directement<sup>1</sup> les  $e_{v,fg}^{n'+1/2}$  (2) à partir des  $E_{v,fg}^{n'+1/2}$

<sup>1</sup>C'est à dire sans utiliser les équations de Maxwell.



(1) sur la frontière du petit maillage (frontière de gauche) et les  $E_{v,fd}^{n'+1/2}$  (3) à partir des  $e_{v,fd}^{n'+1/2}$  (4) sur la frontière du grand maillage (frontière de droite).

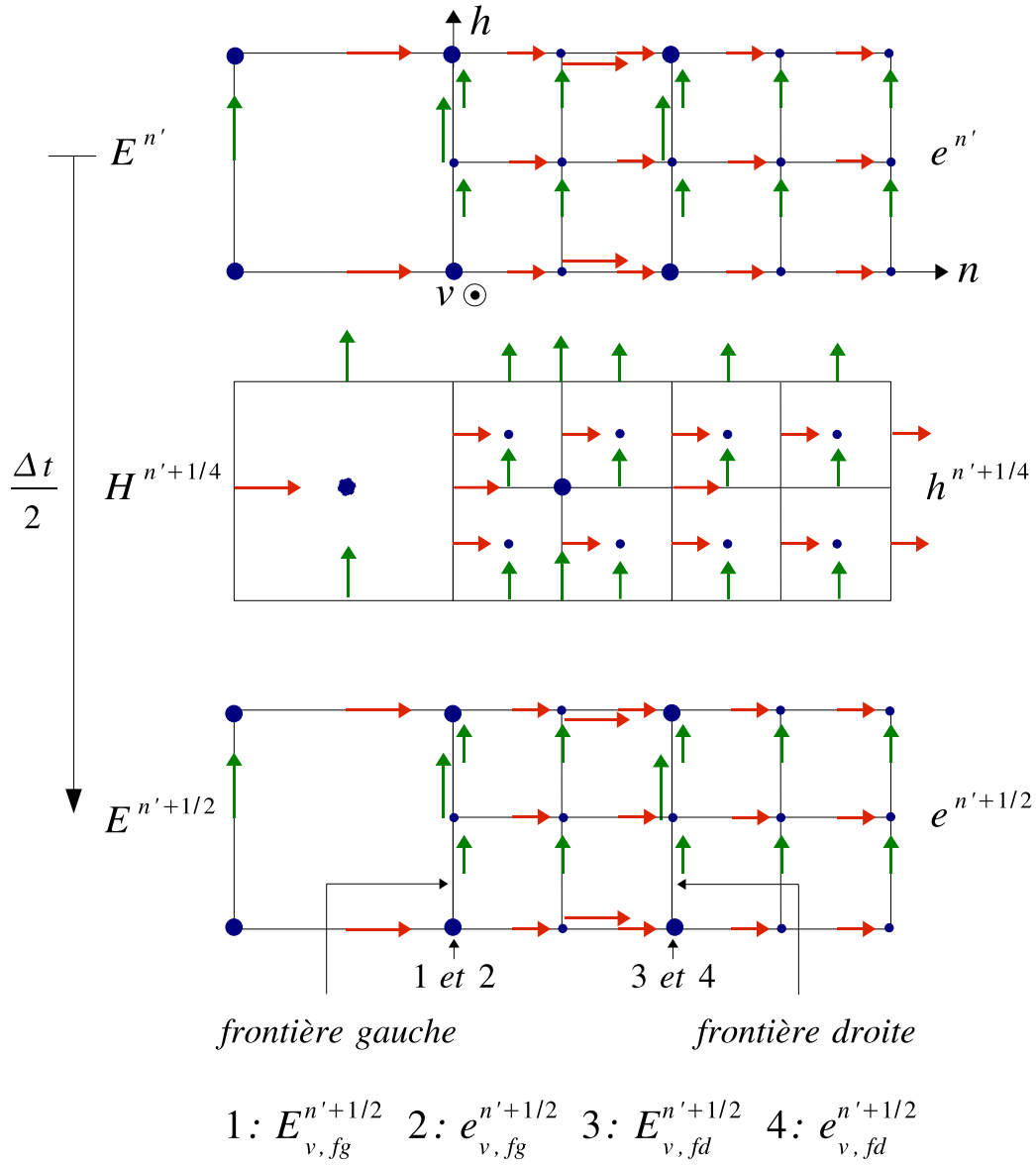


FIG. 5.19 – Vue d'ensemble du schéma de recouvrement.

Cela donne l'algorithme suivant :

- Calcul des  $H^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontière de droite comprise.
- Calcul des  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontière de droite exclue.
- Calcul des  $h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontière de gauche comprise.
- Calcul des  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, frontière de gauche exclue.
- Calcul des  $E_{v,fd}^{n'+1/2}$  (3) à partir des  $e_{v,fd}^{n'+1/2}$  (4) par interpolation spatiale (voir figure 5.20) :

$$E_{v,fd}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,fd,plus}^{n'+1/2} + e_{v,fd,moins}^{n'+1/2} \right) \quad (5.11)$$

- Calcul des  $e_{v,fg}^{n'+1/2}$  (2) à partir des  $E_{v,fg}^{n'+1/2}$  (1) par interpolation spatiale. On interpole d'abord

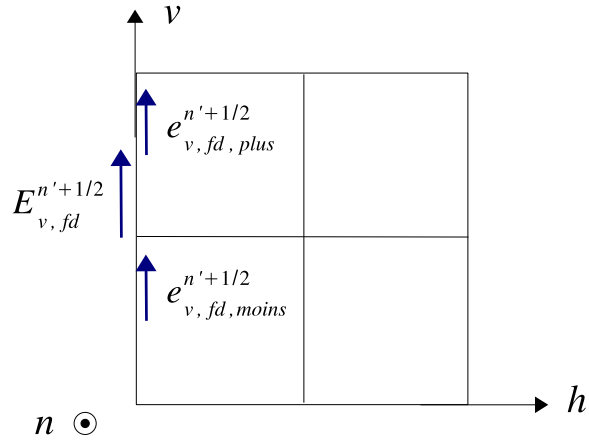


FIG. 5.20 – Calcul des  $E_{v,fd}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation spatiale.

le long de l'axe  $(Ov)$  (voir figure 5.21) et ensuite le long de l'axe  $(Oh)$  (voir figure 5.22) :

$$\begin{cases} e_{v,fg,plus}^{n'+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,fg,0}^{n'+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,fg,plus}^{n'+1/2} \\ e_{v,fg,moins}^{n'+1/2} = \frac{3}{4} \cdot E_{v,fg,0}^{n'+1/2} + \frac{1}{4} \cdot E_{v,fg,moins}^{n'+1/2} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$e_{v,fg,c}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{v,fg,g}^{n'+1/2} + e_{v,fg,d}^{n'+1/2} \right) \quad (5.13)$$

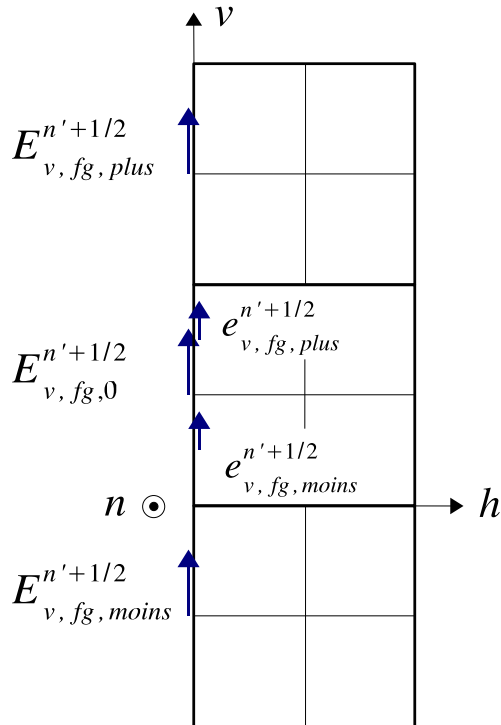


FIG. 5.21 – Calcul des  $e_{v,fg,moins}^{n'+\frac{1}{2}}$  et des  $e_{v,fg,plus}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation le long de l'axe  $(Ov)$ .

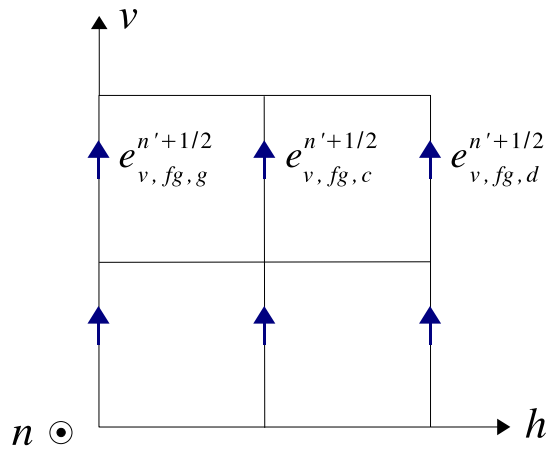


FIG. 5.22 – Calcul des  $e_{v,fg,c}^{n'+\frac{1}{2}}$  par interpolation le long de l'axe  $(Oh)$ .

## 5.2.2 Résultats des tests

### 5.2.2.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation sont toujours les mêmes. La réflexion numérique obtenue est représentée dans la figure 5.23. Elle est inférieure à  $-40$  dB pour un échantillonnage spatial supérieur à 40, dans le cas contraire la réflexion devient assez forte ( $-30$  dB pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 20$  et  $0$  dB pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ ). Finalement ce modèle ne peut pas être utilisé pour des échantillonnages spatiaux plus petits que 40 ce qui est assez contraignant au niveau des ressources en mémoire vive.

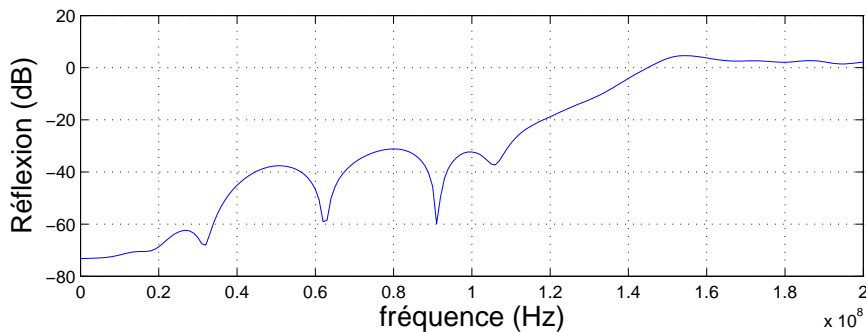


FIG. 5.23 – Réflexion numérique.

### 5.2.2.2 Stabilité

Là aussi les conditions de simulation sont les mêmes que précédemment. Le champ diffracté et le champ à l'intérieur du petit maillage sont représentés dans les figures 5.24 et 5.25. Les durées de stabilité obtenues sont insuffisantes (de l'ordre de  $0.5 \mu s$  dans les deux maillages) et le niveau de champ résiduel est très important dans le grand maillage.

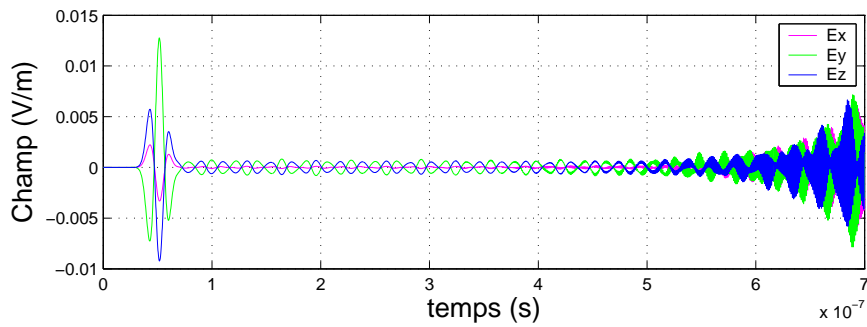


FIG. 5.24 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ).

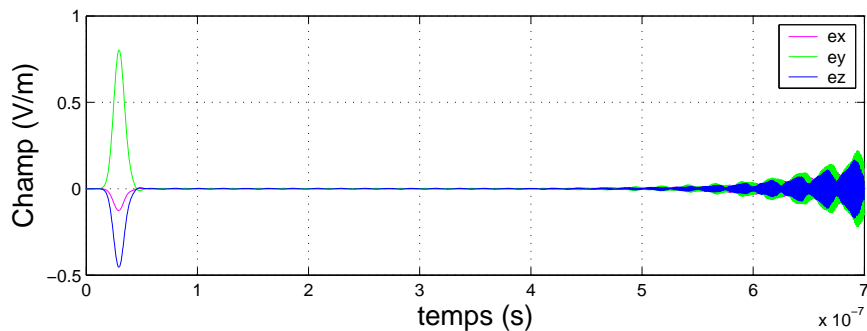


FIG. 5.25 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ).

### 5.3 Pour résumer

Les schémas que nous avons essayé ne sont pas très performants. Seul le modèle de type « gradient » est intéressant car il ne présente pas de champ résiduel et les durées de stabilité obtenues sont convenables.

Des variantes de ces modèles peuvent-être proposées dans chacune des quatre catégories précédentes. Nous en avons testé quelques unes mais sans succès. Rappelons cependant que le modèle spatial du paragraphe 4.2 ainsi que le modèle de type « gradient » que nous venons de présenter sont utilisables dans des problèmes de diffraction. Rappelons également que les niveaux de champ résiduel diminuent et que les durées de stabilité augmentent lorsque le volume sous-maillé augmente, ce comportement peut s'avérer avantageux dans des simulations qui nécessitent des volumes raffinés de grande taille.

# Chapitre 6

## Généralisation du principe de séparation avec des facteurs de raffinement plus élevés

Dans ce qui précède nous avons mis à jour une méthode de construction des schémas de sous-maillage qui fait intervenir successivement, un modèle de raffinement temporel stable et un certain modèle de raffinement spatial. Une conséquence de la stabilité du modèle temporel concerne les propriétés du schéma final qui sont fixées à peu de choses près <sup>1</sup> par le modèle spatial seul. Ce dernier point est intéressant car il nous donne un moyen de prédire les performances du modèle « successif » avant même de l’avoir construit.

Nous nous sommes alors demandé si de telles prédictions sont possibles avec des schémas possédant des facteurs de raffinement en espace et en temps plus élevés. En d’autres termes existe-t-il des schémas de raffinement temporel stables lorsque  $r_t > 2$  ? Si la réponse est affirmative alors nous n’avons plus que les propriétés des algorithmes spatiaux à présenter, puisque ce sont eux qui fixent les qualités de l’ensemble.

- Le premier paragraphe de ce chapitre apporte la réponse à la question posée : des schémas temporels stables existent bien pour  $r_t > 2$  et en plus ils sont basés sur de simples relations d’interpolations linéaires.
- Suivant notre démarche, nous étudions alors dans le deuxième paragraphe, les performances de trois algorithmes spatiaux susceptibles de succéder aux modèles de raffinement temporel introduits ci-dessus, puis nous en déduisons les performances des modèles « successifs ».

### 6.1 Raffinement temporel avec $r_t = 3, 4$ et $5$

#### 6.1.1 Présentation des schémas

##### 6.1.1.1 $r_t = 3$

Une vue d’ensemble du schéma est proposée dans les figures 6.1 et 6.2. De façon à être synthétique nous présentons ici simplement les étapes clés du schéma, étant entendu que les équations de Maxwell sont utilisées normalement lorsqu’aucune précision particulière n’est apportée.

- Les  $h_{h,e}^{n+1/6}$  (1) sont déterminés par interpolation temporelle linéaire à partir des  $H_h^{n+1/2}$  déjà calculés et des  $H_h^{n-1/2}$  stockés en mémoire :

$$h_{h,e}^{n+1/6} = \frac{2}{3} \cdot H_h^{n+1/2} + \frac{1}{3} \cdot H_h^{n-1/2} \quad (6.1)$$

- Les  $e_{v,f}^{n+1/3}$  (3) sont alors calculables et il en est de même pour tous les  $h^{n+1/2}$ , tous les  $e^{n+2/3}$  (y compris 5) et tous les  $h^{n+5/6}$ .

---

<sup>1</sup>Cela dépend de la distance qui sépare la frontière temporelle de la frontière spatiale (voir le paragraphe 4.3.2).

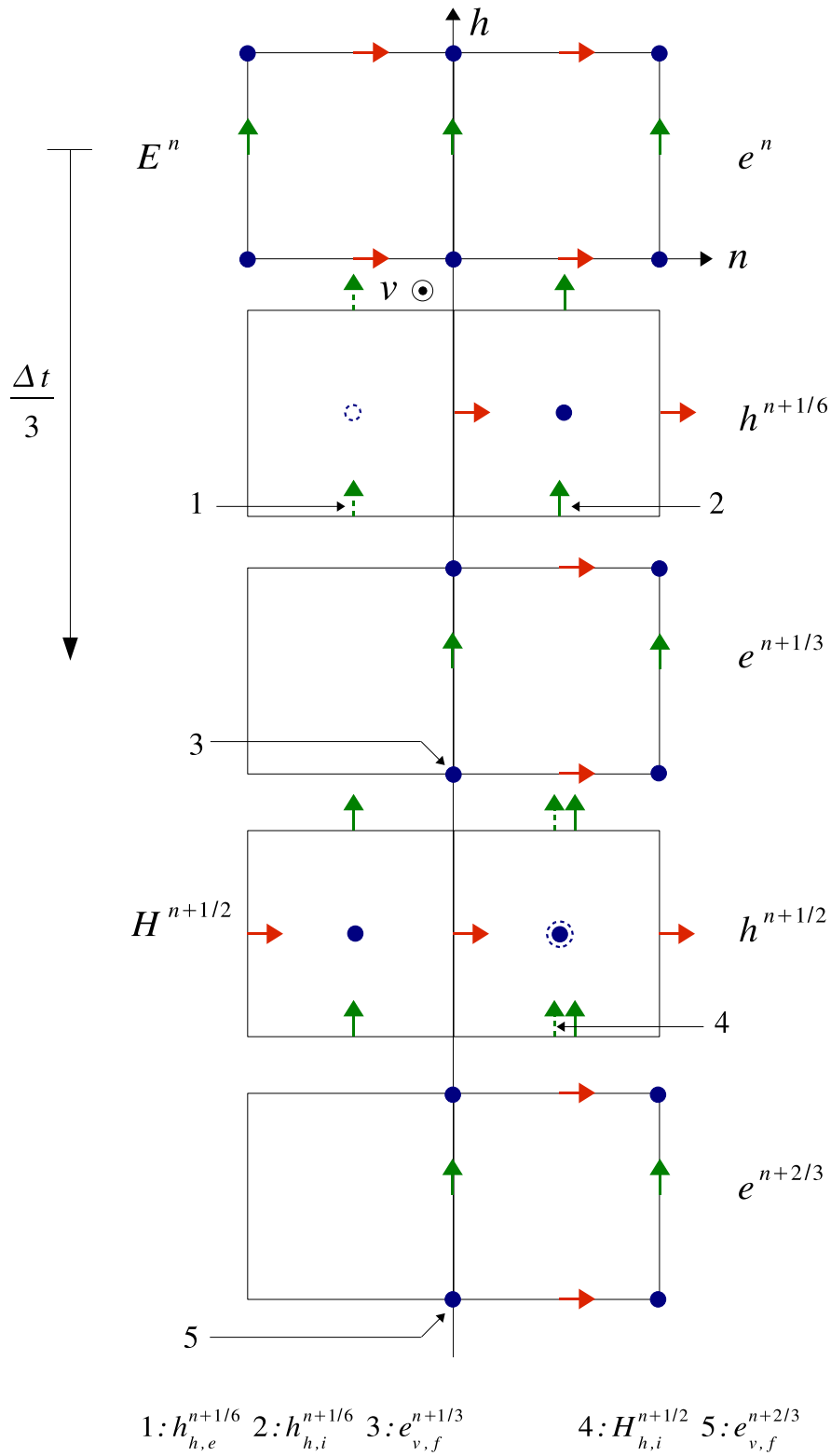


FIG. 6.1 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 3$  (partie a).

- On détermine ensuite les  $H_{h,i}^{n+1/2}$  (4) par interpolation temporelle linéaire à partir des  $h_{h,i}^{n+1/6}$  (2) et des  $h_{h,i}^{n+5/6}$  (6) :

$$H_{h,i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( h_{h,i}^{n+1/6} + h_{h,i}^{n+5/6} \right) \quad (6.2)$$

- Les  $E_{v,f}^{n+1}$  (7) sont alors calculables.

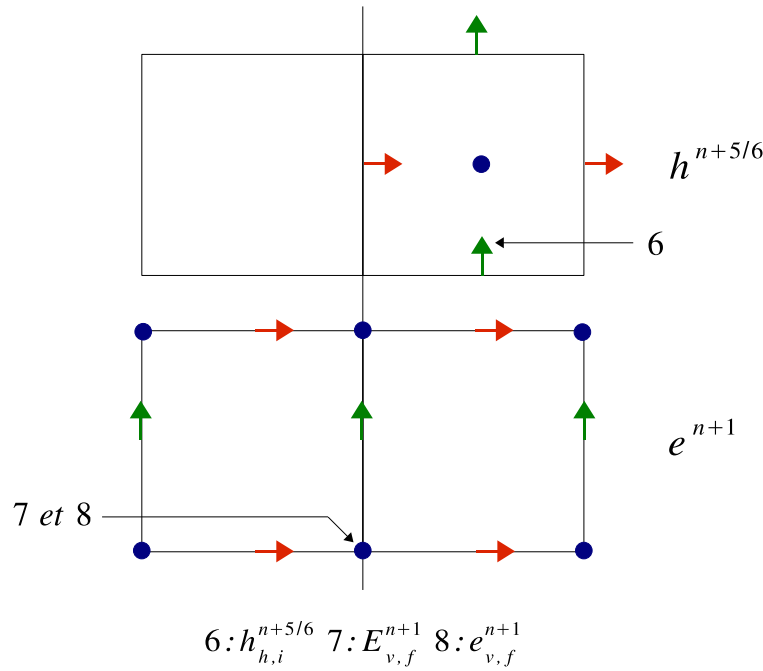


FIG. 6.2 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 3$  (partie b).

- Enfin on détermine les  $e_{v,f}^{n+1}$  (8) par continuité :

$$e_{v,f}^{n+1} = E_{v,f}^{n+1} \quad (6.3)$$

### 6.1.1.2 $r_t = 4$

Une vue d’ensemble du schéma est proposée dans les figures 6.3 et 6.4. Nous posons les mêmes prérequis que précédemment.

- Trois relations d’interpolation temporelle linéaire sont utilisées pour déterminer les  $h_{h,e}$  aux dates  $n + 1/8$ ,  $n + 3/8$  et  $n + 5/8$  (voir 1, 3 et 7) :

$$\begin{cases} h_{h,e}^{n+1/8} = \frac{5}{8} \cdot H_h^{n+1/2} + \frac{3}{8} \cdot H_h^{n-1/2} \\ h_{h,e}^{n+3/8} = \frac{7}{8} \cdot H_h^{n+1/2} + \frac{1}{8} \cdot H_h^{n-1/2} \\ h_{h,e}^{n+5/8} = \frac{9}{8} \cdot H_h^{n+1/2} - \frac{1}{8} \cdot H_h^{n-1/2} \end{cases} \quad (6.4)$$

- Dans ce cas toutes les composantes du petit maillage sont calculables jusqu’à la date  $(n + 7/8) \Delta t$  frontières comprises et jusqu’à la date  $(n + 1) \Delta t$  frontières exclues (voir notamment 2, 5 et 9).
- On détermine ensuite les  $H_{h,i}^{n+1/2}$  (6) par interpolation temporelle linéaire à partir des  $h_{h,i}^{n+3/8}$  (4) et des  $h_{h,i}^{n+5/8}$  (8) :

$$H_{h,i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( h_{h,i}^{n+3/8} + h_{h,i}^{n+5/8} \right) \quad (6.5)$$

- Les  $E_{v,f}^{n+1}$  (10) sont alors calculables.
- Enfin on détermine les  $e_{v,f}^{n+1}$  (11) par continuité :

$$e_{v,f}^{n+1} = E_{v,f}^{n+1} \quad (6.6)$$

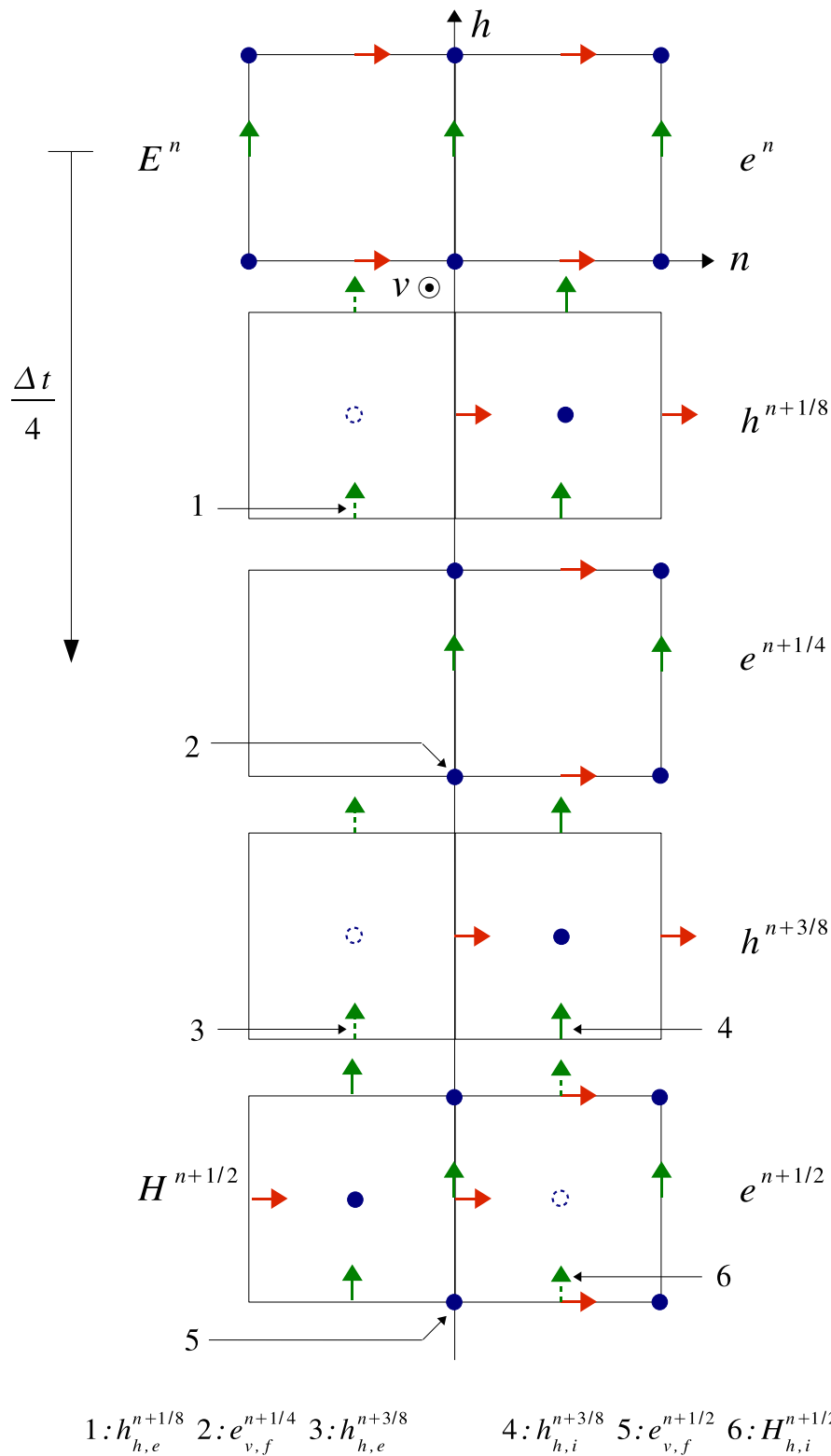


FIG. 6.3 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 4$  (partie a).

### 6.1.1.3 $r_t = 5$

Une vue d’ensemble du schéma est proposée dans les figures 6.5 et 6.6. Nous posons les mêmes prérequis que précédemment.

- Trois relations d’interpolation temporelle linéaires sont utilisées pour déterminer les  $h_{h,e}$



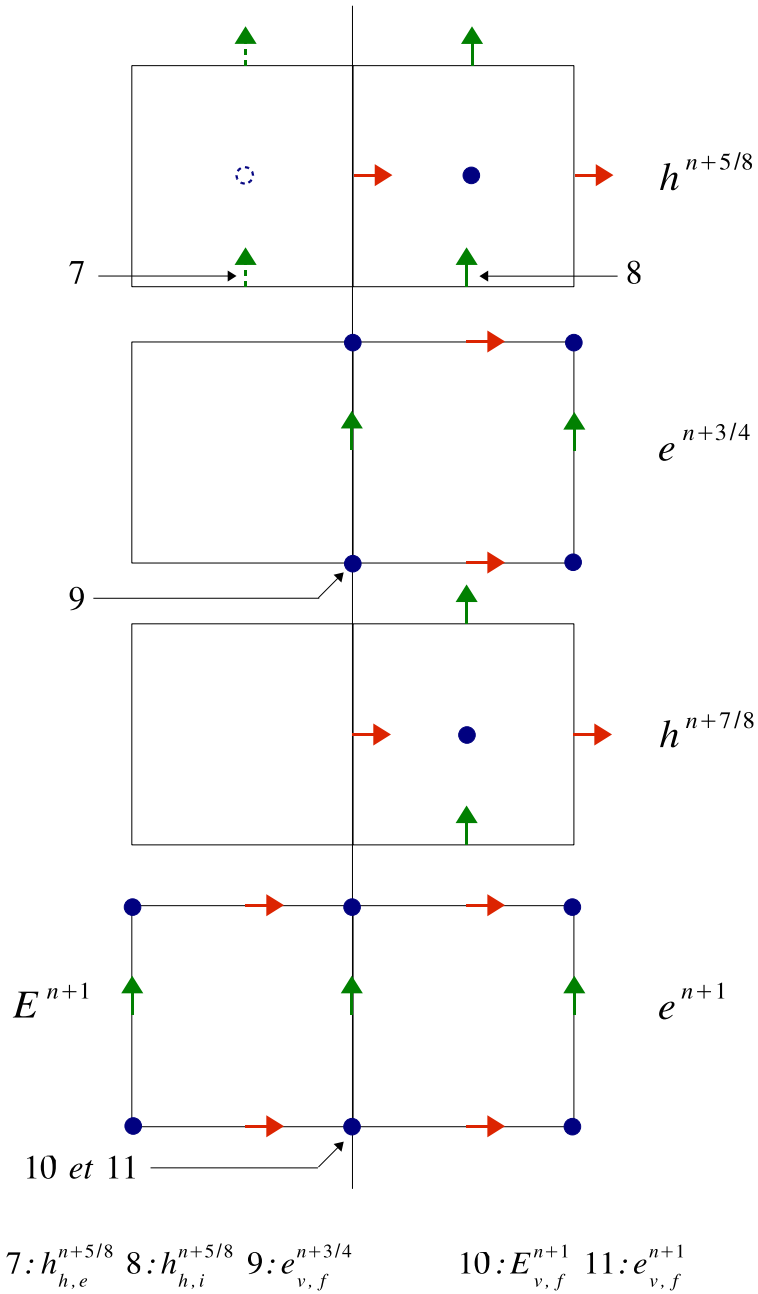


FIG. 6.4 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 4$  (partie b).

aux dates  $n + 1/10$ ,  $n + 3/810$  et  $n + 7/10$  (voir 1, 3 et 7) :

$$\begin{cases}
 h_{h,e}^{n+1/10} = \frac{6}{10} \cdot H_h^{n+1/2} + \frac{4}{10} \cdot H_h^{n-1/2} \\
 h_{h,e}^{n+3/10} = \frac{8}{10} \cdot H_h^{n+1/2} + \frac{2}{10} \cdot H_h^{n-1/2} \\
 h_{h,e}^{n+7/10} = \frac{11}{10} \cdot H_h^{n+1/2} - \frac{1}{10} \cdot H_h^{n-1/2}
 \end{cases} \quad (6.7)$$

- Dans ce cas toutes les composantes du petit maillage sont calculables jusqu’à la date  $(n + 9/10) \Delta t$  frontières comprises et jusqu’à la date  $(n + 1) \Delta t$  frontières exclues (voir notamment 2, 5 et 9).
- On détermine ensuite les  $H_{h,i}^{n+1/2}$  (6) par interpolation temporelle linéaire à partir des  $h_{h,i}^{n+3/10}$

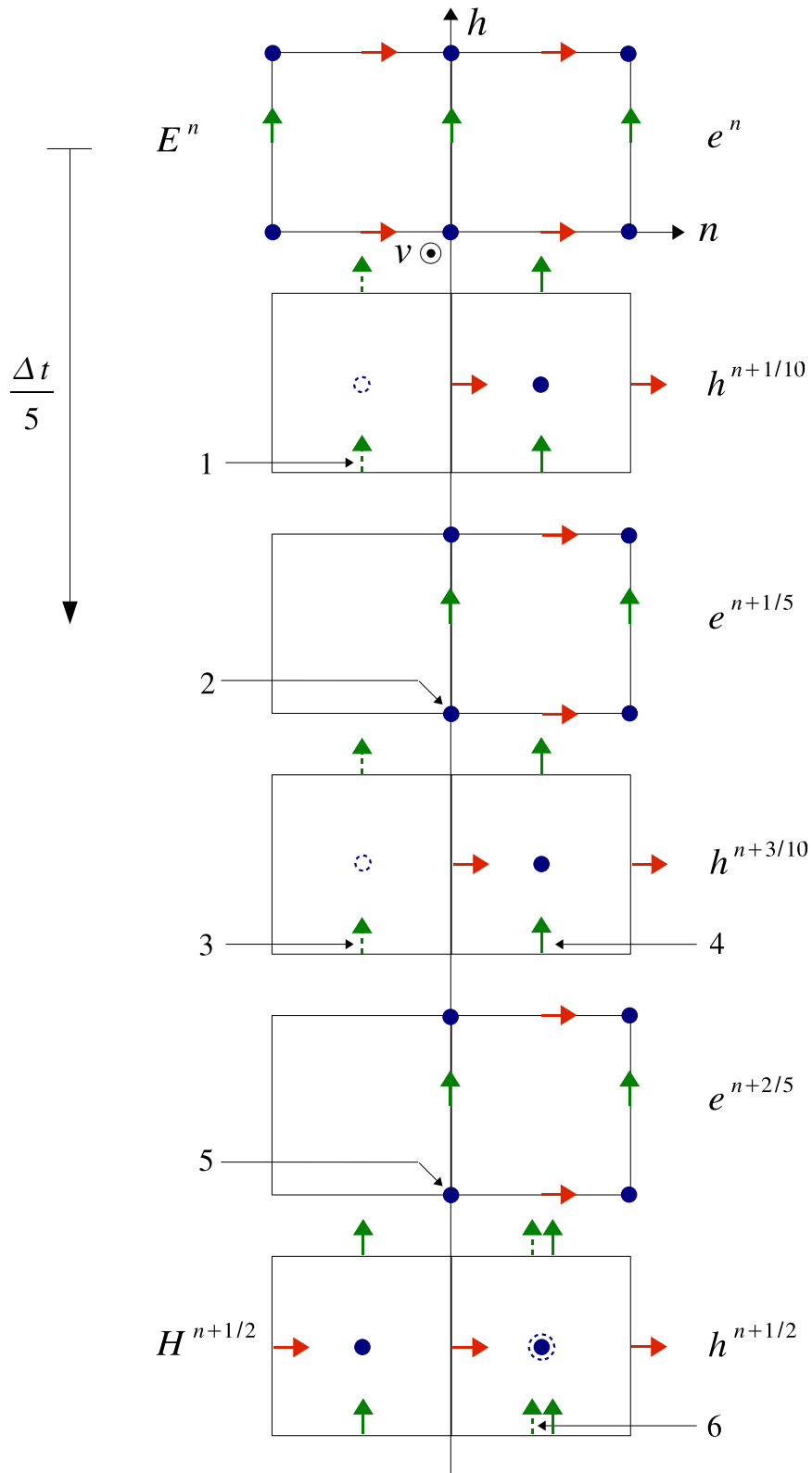


FIG. 6.5 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 5$  (partie a).

(4) et des  $h_{h,i}^{n+7/10}$  (8) :

$$H_{h,i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left( h_{h,i}^{n+3/10} + h_{h,i}^{n+7/10} \right) \quad (6.8)$$

- Les  $E_{v,f}^{n+1}$  (10) sont alors calculables.
- Enfin on détermine les  $e_{v,f}^{n+1}$  (11) par continuité :

$$e_{v,f}^{n+1} = E_{v,f}^{n+1} \quad (6.9)$$

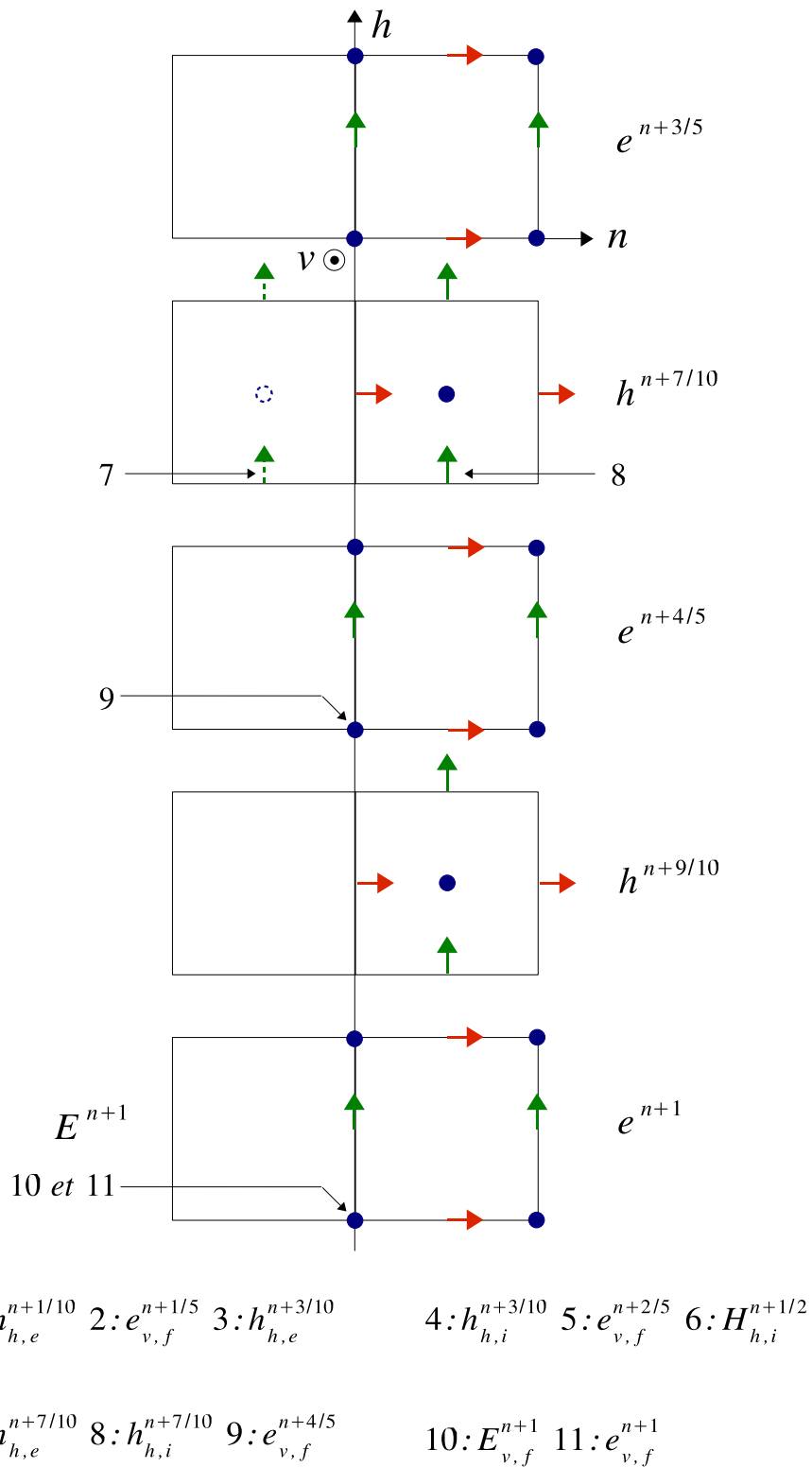


FIG. 6.6 – Vue d’ensemble du schéma temporel pour  $r_t = 5$  (partie b).

## 6.1.2 Résultats des tests

### 6.1.2.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation sont les mêmes que celles que nous avons utilisé dans le paragraphe 4.1.2.1 (voir la figure 4.5), excepté le critère CFL du petit maillage qui cette fois-ci doit-être divisé par  $r_t$ . La figure 6.7 montre les réflexions numériques obtenues. Nous constatons qu’elles

sont pratiquement identiques d'un facteur de raffinement à l'autre, de plus les niveaux de réflexion atteints sont faibles puisque nous avons  $r_n \leq -50 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$  et  $r_n \simeq -40 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ .

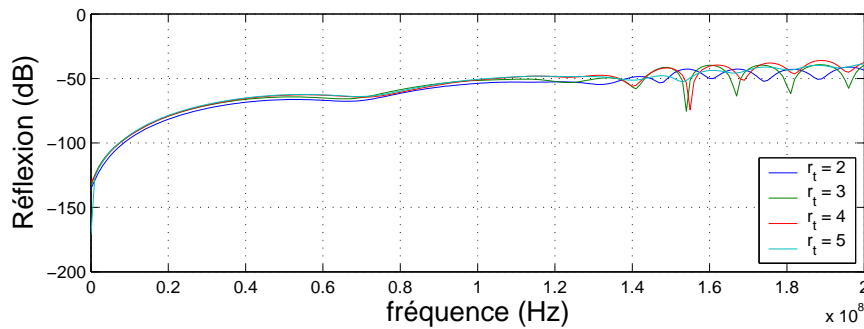


FIG. 6.7 – Réflexions numériques.

### 6.1.2.2 Stabilité

Les conditions de simulation sont les mêmes que celles que nous avons utilisé dans le paragraphe 4.1.2.2 (voir la figure 4.7), excepté, encore une fois, le critère CFL du petit maillage qui doit-être divisé par  $r_t$ . Les figures 6.8 et 6.9 représentent les variations de la composante  $E_v$  du champ électrique diffracté pour les différentes valeurs de  $r_t$ . La première figure est une vue en gros plan tandis que la deuxième figure donne une vision d'ensemble du champ. Nous avons adopté le même type de représentation pour la composante  $e_v$  du champ électrique à l'intérieur du petit maillage (voir les figures 6.10 et 6.11). Nous constatons qu'aucun phénomène d'instabilité ne se produit sur une durée de simulation de  $50 \mu\text{s}$ , de plus il n'y a pas de champ résiduel. Ces résultats ne donnent pas la preuve formelle de la stabilité de nos trois modèles, là encore l'adjectif « stable » sera utilisé dans le contexte que nous avons expliqué dans la paragraphe 4.1.2.2.

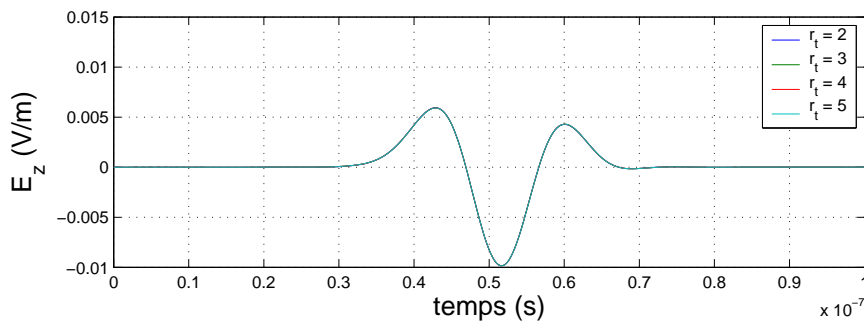


FIG. 6.8 – Champs diffractés (gros plan).

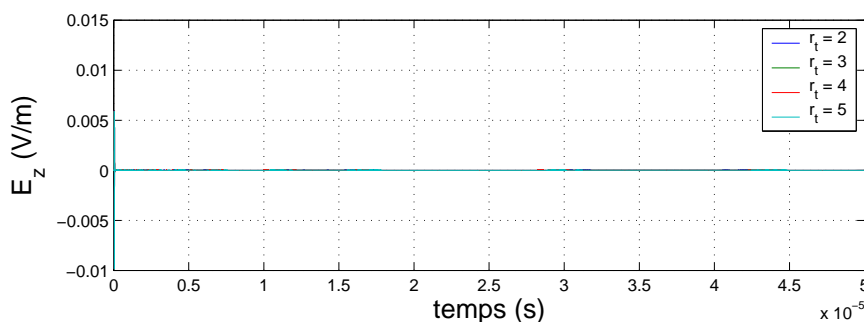


FIG. 6.9 – Stabilité relative aux champs diffractés (vue d'ensemble).

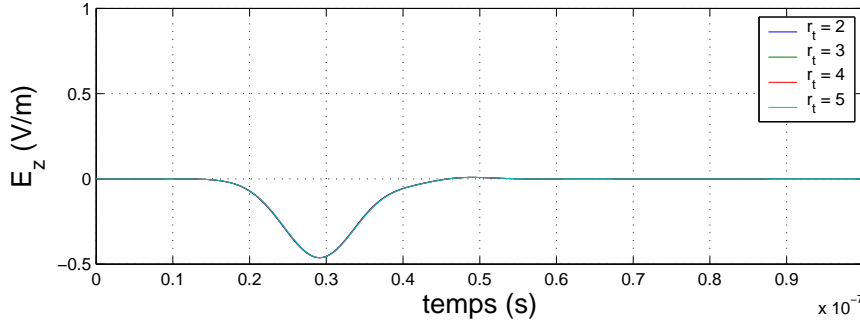


FIG. 6.10 – Champs dans le petit maillage (gros plan).

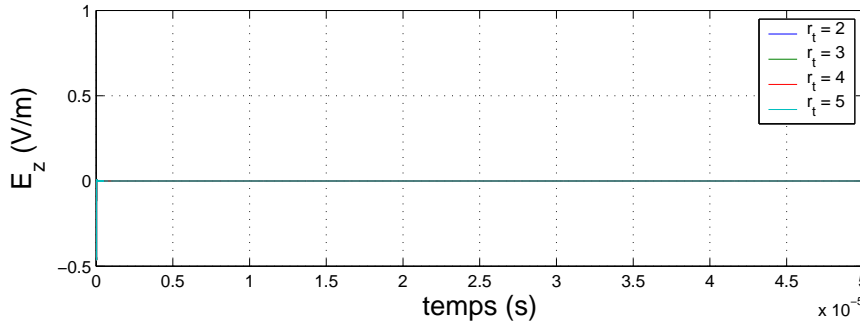


FIG. 6.11 – Stabilité relative aux champs dans le petit maillage (vue d'ensemble).

## 6.2 Raffinement spatial avec $r_s = 3, 4$ et $5$

Maintenant que nous avons des schémas de raffinement temporel stables pour  $r_t = 3, 4$  et  $5$ , nous pouvons nous intéresser aux modèles de sous-maillage spatiaux correspondant afin de prédire les performances des modèles « successifs ». Nous étudions ainsi les propriétés de trois algorithmes dont les facteurs de raffinement en espace valent  $3, 4$  et  $5$ . Ces trois algorithmes ont été choisis comme la généralisation aux facteurs de raffinement précédents, du schéma spatial du paragraphe 4.2.

### 6.2.1 Présentation des schémas

#### 6.2.1.1 Algorithme généralisé

Les trois schémas auxquels nous nous intéressons peuvent être illustrés avec la même vue d'ensemble que nous avons représenté dans la figure 6.12. La séquence de calcul  $\left(n', n' + \frac{1}{2 \cdot r_s}, n' + \frac{1}{r_s}\right)$  est écrite de façon généralisée et elle peut se placer dans n'importe laquelle des  $r_t$  sous-itérations du schéma de raffinement temporel mis en place en amont. L'algorithme est le même quel que soit le facteur de raffinement spatial considéré, ce sont simplement les relations d'interpolations spatiales qui changent en fonction de la valeur de  $r_s$ . Nous présentons cet algorithme généralisé dès maintenant alors que les relations d'interpolations sont détaillées dans les trois paragraphes qui suivent.

- Calcul des  $H^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$  dans le grand maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $E^{n'+1/r_s}$  dans le grand maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $h^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$  dans le petit maillage, frontières comprises.
- Calcul des  $e^{n'+1/r_s}$  dans le petit maillage, frontières exclues.
- Calcul des  $H_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$  (1) par moyennage spatial à partir des  $h^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$  environnants (voir le paragraphe 6.2.1.2).

- Calcul des  $E_{v,f}^{n'+1/r_s}$  (2) à l'aide des équations de Maxwell.
- Calcul des  $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$  (3) à partir des  $E_{v,f}^{n'+1/r_s}$  (2) par moyennage spatial. On interpole d'abord le long de l'axe  $(Ov)$  (voir le paragraphe 6.2.1.3) et ensuite le long de l'axe  $(Oh)$  (voir le paragraphe 6.2.1.4).

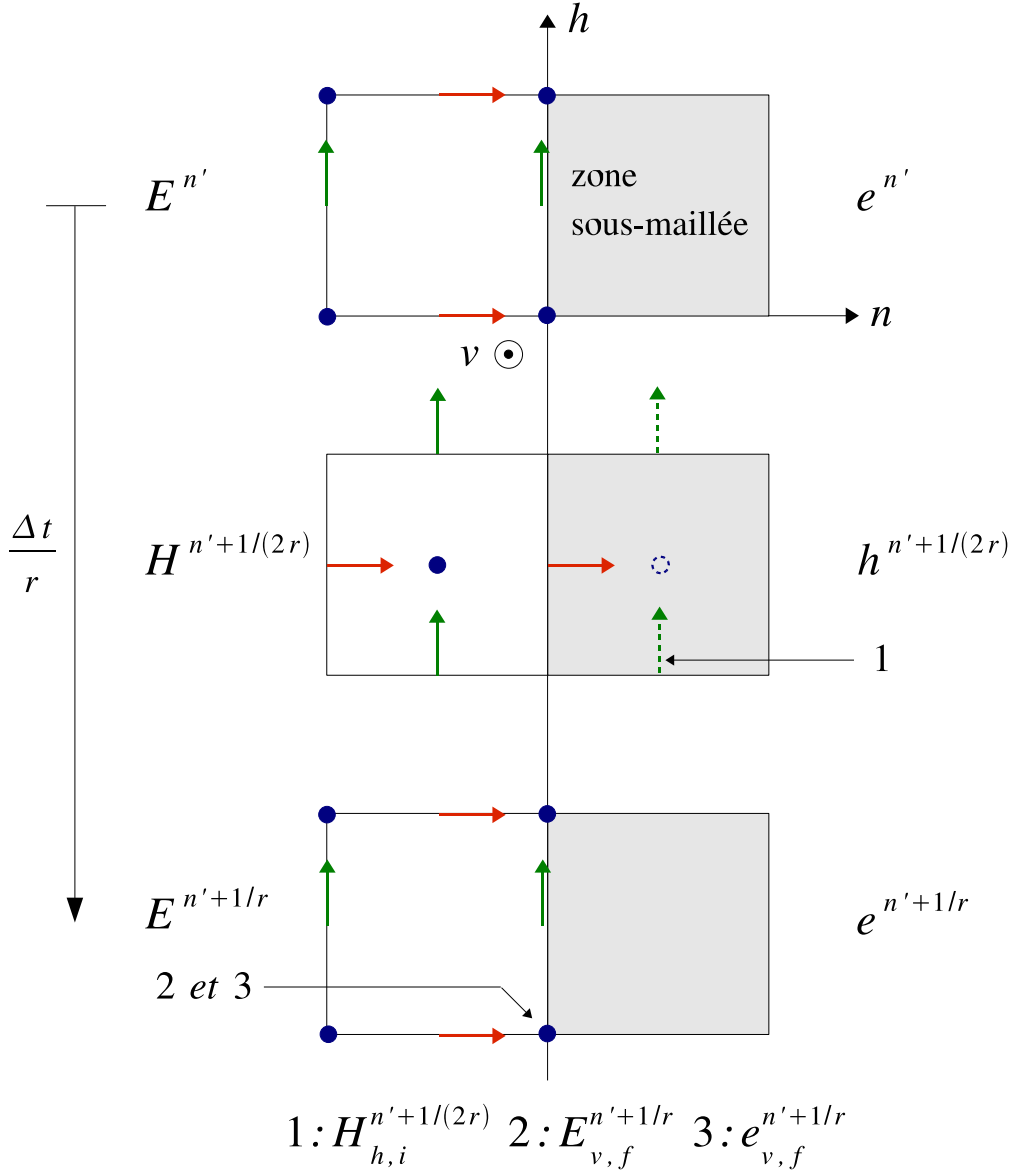


FIG. 6.12 – Vue d'ensemble des trois schémas ( $r_s$  quelconque).

### 6.2.1.2 Calcul des $H_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$

Le calcul de  $H_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)}$  se généralise facilement pour toutes les valeurs de  $r_s$ , on a :

$$H_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)} = \frac{1}{r_s^2} \cdot \sum_{i=1}^{r_s^2} h_{h,i}^{n'+1/(2 \cdot r_s)}(i) \quad (6.10)$$

La figure 6.13 illustre l'équation 6.10 dans le cas particulier où  $r_s = 3$ .

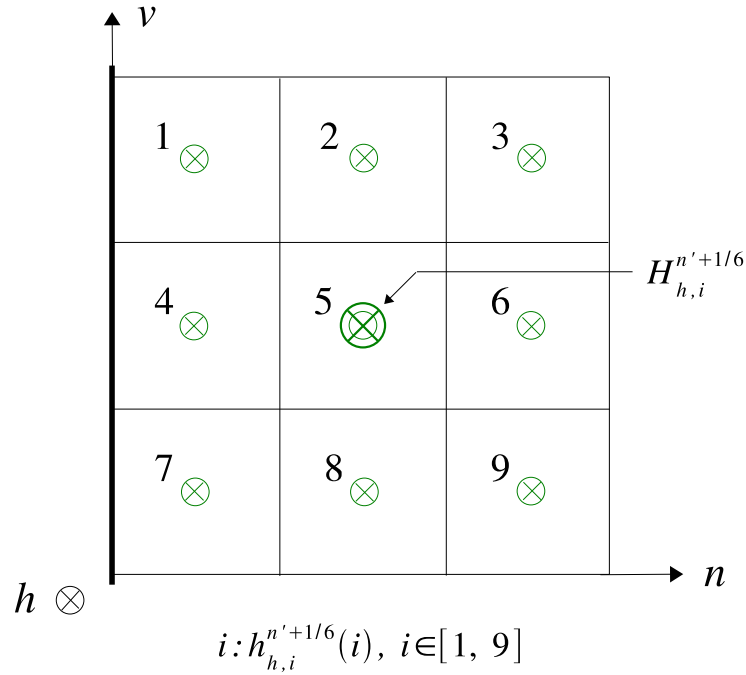


FIG. 6.13 – Moyennage spatial des  $h_{h,i}^{n'+1/r_s}$  avec  $r_s = 3$ .

### 6.2.1.3 Calcul des $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$ le long de l'axe ( $Ov$ )

Ici nous avons détaillé le calcul de  $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$  en fonction de la valeur prise par  $r_s$ . En effet, les formules générales ne sont pas les mêmes selon que  $r_s$  est pair ou impair, ce qui rend les formules générales peu lisibles. Cette remarque vaut également pour le paragraphe suivant.

– Pour  $r_s = 3$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/3} = \frac{4}{6} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/3} + \frac{2}{6} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/3} \\ e_{v,f,0}^{n'+1/3} = E_{v,f,0}^{n'+1/3} \\ e_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/3} = \frac{4}{6} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/3} + \frac{2}{6} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/3} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

voir la figure 6.14.

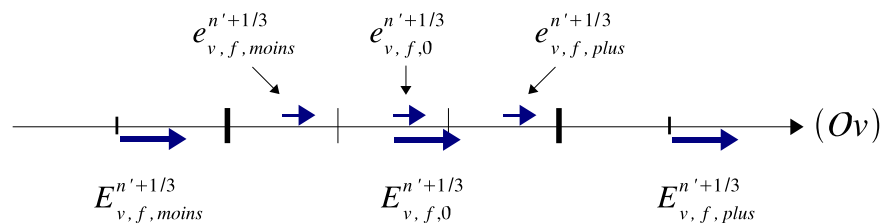


FIG. 6.14 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{3}}$  le long de l'axe ( $Ov$ ) ( $r_s = 3$ ).

– Pour  $r_s = 4$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{v,f,1}^{n'+1/4} = \frac{5}{8} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/4} + \frac{3}{8} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/4} \\ e_{v,f,2}^{n'+1/4} = \frac{7}{8} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{8} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/4} \\ e_{v,f,3}^{n'+1/4} = \frac{7}{8} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/4} + \frac{1}{8} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/4} \\ e_{v,f,4}^{n'+1/4} = \frac{5}{8} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/4} + \frac{3}{8} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/4} \end{array} \right. \quad (6.12)$$

voir la figure 6.15.

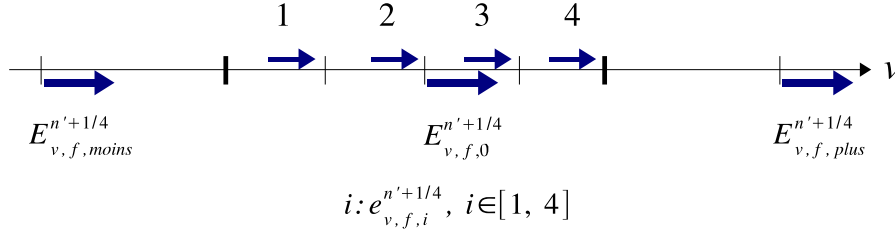


FIG. 6.15 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{4}}$  le long de l'axe  $(Ov)$  ( $r_s = 4$ ).

– Et pour  $r_s = 5$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{v,f,1}^{n'+1/5} = \frac{6}{10} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/5} + \frac{4}{10} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,2}^{n'+1/5} = \frac{8}{10} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/5} + \frac{2}{10} \cdot E_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,3}^{n'+1/5} = E_{v,f,0}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,4}^{n'+1/5} = \frac{8}{10} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/5} + \frac{2}{10} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,5}^{n'+1/5} = \frac{6}{10} \cdot E_{v,f,0}^{n'+1/5} + \frac{4}{10} \cdot E_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/5} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Voir la figure 6.16.

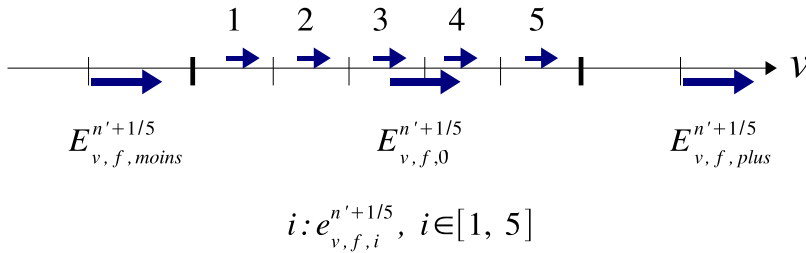


FIG. 6.16 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{5}}$  le long de l'axe  $(Ov)$  ( $r_s = 5$ ).

#### 6.2.1.4 Calcul des $e_{v,f}^{n'+1/r_s}$ le long de l'axe $(Oh)$

– Pour  $r_s = 3$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{v,f,\text{moins}}^{n'+1/3} = \frac{2}{3} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/3} + \frac{1}{3} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/3} \\ e_{v,f,\text{plus}}^{n'+1/3} = \frac{1}{3} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/3} + \frac{2}{3} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/3} \end{array} \right. \quad (6.14)$$



Voir la figure 6.17.

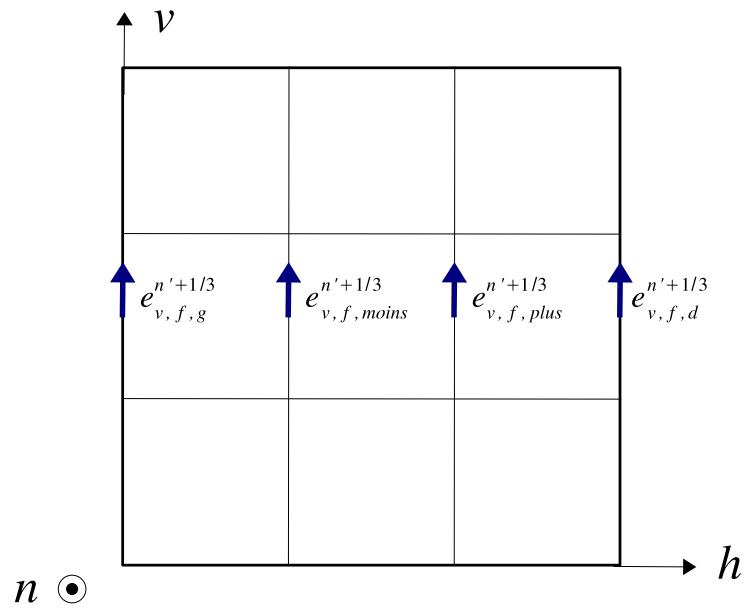


FIG. 6.17 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{3}}$  le long de l'axe  $(Oh)$  ( $r_s = 3$ ).

– Pour  $r_s = 4$  on a :

$$\begin{cases} e_{v,f,moins}^{n'+1/4} = \frac{3}{4} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/4} + \frac{1}{4} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/4} \\ e_{v,f,0}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/4} + \frac{1}{2} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/4} \\ e_{v,f,plus}^{n'+1/4} = \frac{1}{4} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/4} + \frac{3}{4} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/4} \end{cases} \quad (6.15)$$

Voir la figure 6.18.

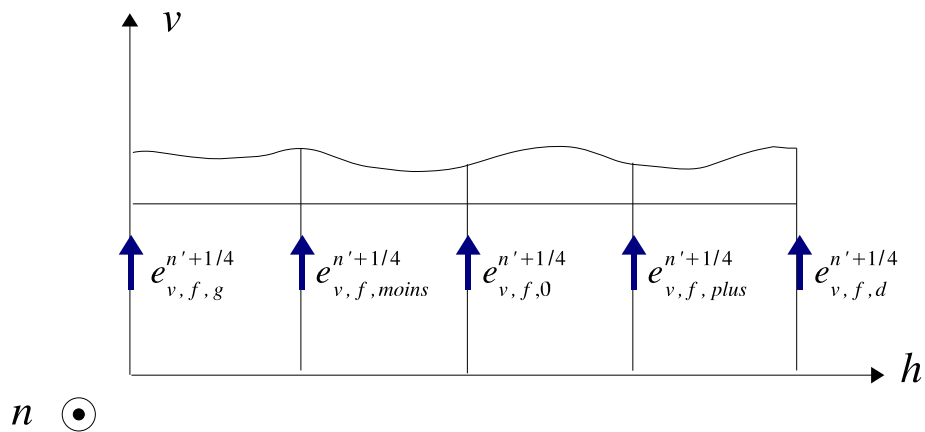


FIG. 6.18 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{4}}$  le long de l'axe  $(Oh)$  ( $r_s = 4$ ).

– Et pour  $r_s = 5$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{v,f,1}^{n'+1/5} = \frac{4}{5} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/5} + \frac{1}{5} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,2}^{n'+1/5} = \frac{3}{5} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/5} + \frac{2}{5} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,3}^{n'+1/5} = \frac{2}{5} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/5} + \frac{3}{5} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/5} \\ e_{v,f,4}^{n'+1/5} = \frac{1}{5} \cdot e_{v,f,g}^{n'+1/5} + \frac{4}{5} \cdot e_{v,f,d}^{n'+1/5} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Voir la figure 6.19.

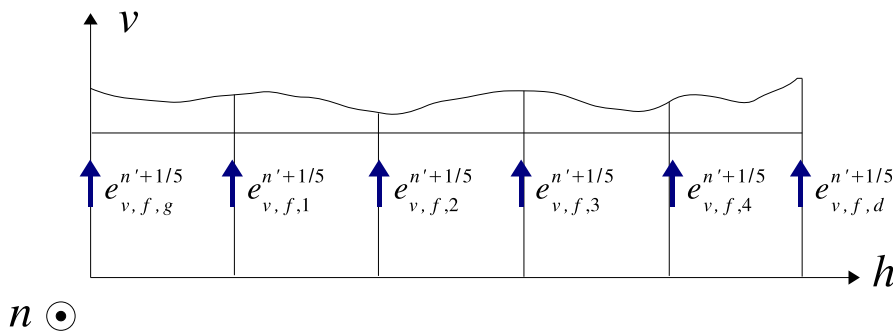


FIG. 6.19 – Interpolation des  $e_{v,f}^{n'+\frac{1}{5}}$  le long de l'axe  $(Oh)$  ( $r_s = 5$ ).

## 6.2.2 Résultats des tests

### 6.2.2.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation sont les mêmes que celles que nous avons utilisé dans le paragraphe 4.2.2.1 (voir la figure 4.16), excepté le critère CFL du grand maillage qui doit-être divisé par  $r_s$ . La figure 6.20 montre les réflexions numériques obtenues pour les différentes valeurs de  $r_s$ . Les courbes sont très ressemblantes et font apparaître des niveaux de réflexion convenable ( $r_n < -40dB$ ) tant que  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$ .

Il est difficile de prévoir exactement les réflexions numériques des modèles « successifs » que l'on peut construire avec les algorithmes que nous venons de présenter<sup>2</sup>. Nous avons vu en effet que les réflexions numériques ne s'additionnent pas, la réflexion du modèle « successif » est même supérieur de  $10dB$  à la valeur calculée par addition (voir le paragraphe 4.3.2.1). En appliquant cette petite règle empirique nous obtenons tout de même un ordre de grandeur. Dans le cas présent cela nous donnerait approximativement  $r_n \leq -35 dB$  lorsque  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$ , pour les trois modèles.

<sup>2</sup>Nous avons manqué de temps pour les tester.

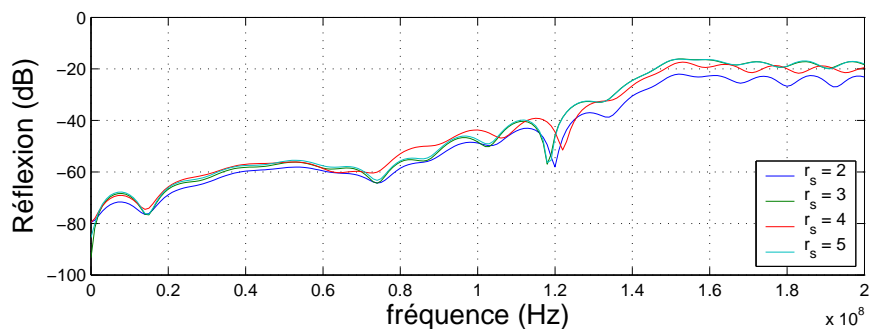


FIG. 6.20 – Reflexions numériques.

### 6.2.2.2 Stabilité

Les conditions de simulation sont les mêmes que celles que nous avons utilisé dans le paragraphe 4.2.2.2 (voir la figure 4.18), excepté encore une fois, le critère CFL du grand maillage qui doit-être divisé par  $r_s$ . Les figures 6.21 à 6.26 montrent le champ diffracté ainsi que le champ à l'intérieur du petit maillage pour les différentes valeurs de  $r_s$ . Nous avons regroupé les durées de stabilité obtenues dans le tableau 6.2. Nous constatons que ces durées de stabilité augmentent légèrement lorsque le facteur de raffinement croît et qu'elles sont plus importantes dans le grand maillage.

Nous avons vu dans le paragraphe 4.3.2.3, que la durée de stabilité du modèle « successif » est égale à celle du modèle spatial dans le petit maillage. Dans le grand maillage par contre, la durée de stabilité du modèle « successif » est environ deux fois plus petite que celle du modèle spatial. Finalement nous pouvons nous attendre à des durées de stabilité variant entre  $2 \mu s$  et  $4 \mu s$  pour des modèles « successifs » possédant des facteurs de raffinement égaux à 3, 4 et 5.

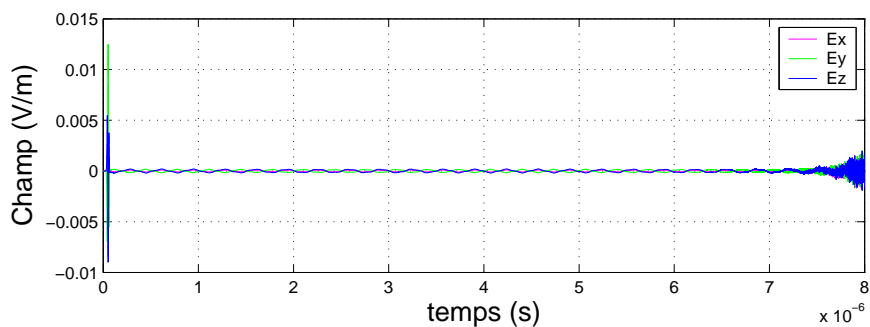


FIG. 6.21 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $r_s = 3$ .

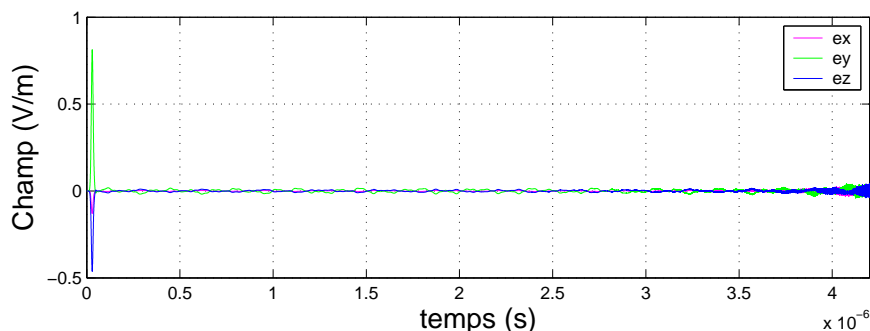


FIG. 6.22 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $r_s = 3$ .

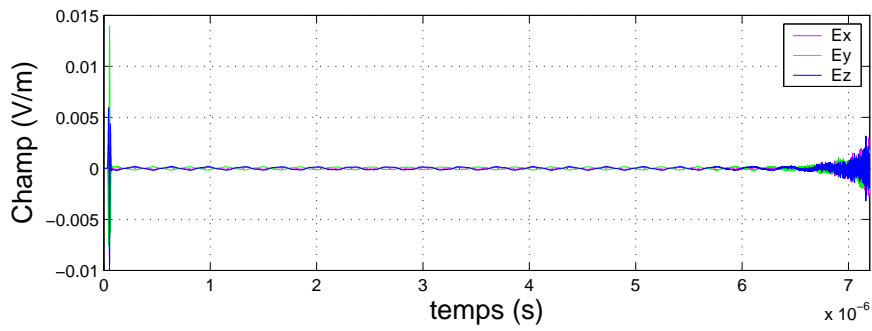


FIG. 6.23 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $r_s = 4$ .

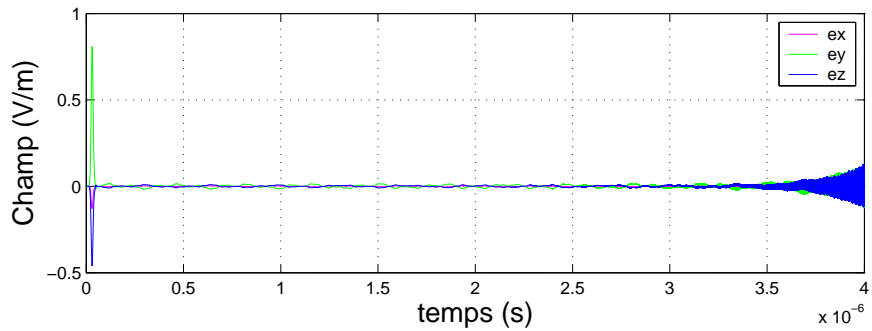


FIG. 6.24 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $r_s = 4$ .

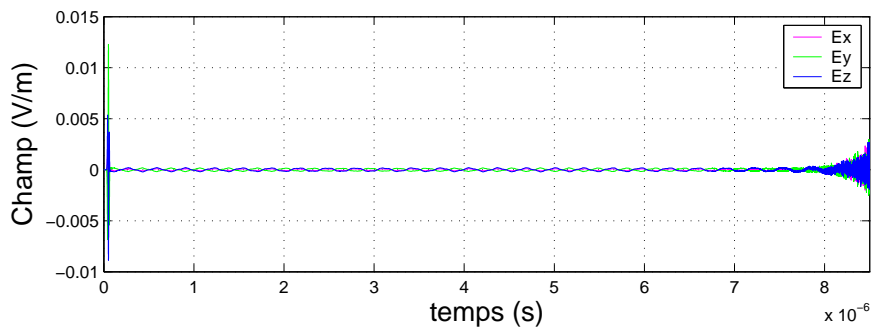


FIG. 6.25 – Stabilité relative au champ diffracté (point  $P_d$ ) pour  $r_s = 5$ .

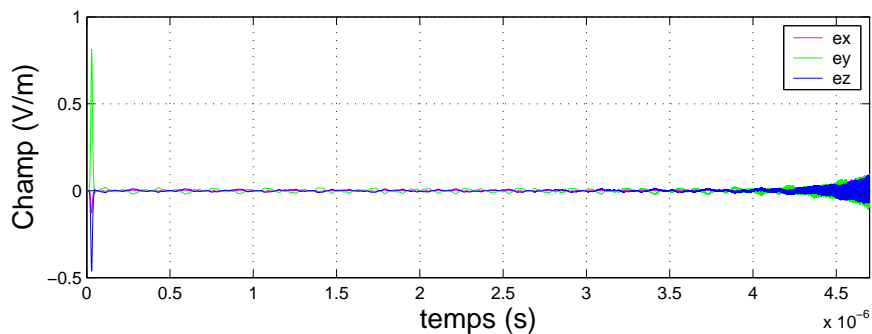


FIG. 6.26 – Stabilité relative au champ dans le petit maillage (point  $P_i$ ) pour  $r_s = 5$ .

### 6.3 Pour résumer

La méthode de construction des modèles de sous-maillage que nous avons présenté dans le paragraphe 4.3 semble se généraliser à des modèles possédant des facteurs de raffinement plus élevé. A cette occasion nous avons mis à jour les durées de stabilité ainsi que les réflexions nu-

$r_s$	2	3	4	5
$t_{stab}$ (point $P_d$ )	$4.5 \mu s$	$7 \mu s$	$6.5 \mu s$	$8 \mu s$
$t_{stab}$ (point $P_i$ )	$2.25 \mu s$	$4 \mu s$	$3.5 \mu s$	$4.25 \mu s$

TAB. 6.2 – Durées de stabilité en fonction de  $r_s$ .

mériques auxquelles on peut s'attendre, pour des modèles « successifs » faisant intervenir des facteurs de raffinement égaux à 3, 4 et 5. Avec le modèle de raffinement spatial choisi, nous obtenons  $2 \mu s \leq t_{stab} \leq 4 \mu s$  et  $r_n \simeq -35 dB$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 20$ . Rappelons pour finir que ces résultats sont approximatifs et qu'ils dépendent du nombre de couches  $q$  séparant les frontières temporel et spatial, ici nos résultats sont exprimés pour  $q = 1$ .

# Chapitre 7

## Conclusion

A la lumière des résultats précédents, nous pouvons dire que nous avons atteint les objectifs que nous nous étions fixé dans le paragraphe 2.3.1.

- Nous avons tout d’abord construit un schéma de sous-maillage dans un espace à trois dimensions, possédant une durée de stabilité suffisante pour être utilisé dans des problèmes de diffraction. Ce schéma à été élaboré avec des facteurs de raffinement spatiotemporels égaux à deux. La durée de stabilité obtenue est égale à  $2 \mu s$  dans les deux maillages pour un volume raffiné comportant  $15 \times 15 \times 15$  grandes cellules et nous avons montré que cette durée augmente lorsque le volume du petit maillage augmente. En ce qui concerne la réflexion numérique, nous avons obtenu un niveau de champ réfléchi égale à  $-48 dB$  pour un échantillonnage spatial égale à 20.
- Par la suite nous avons pu démontrer que les instabilités de ce schéma étaient uniquement dues aux relations d’interpolation qui interviennent dans le traitement spatial. Ceci à été montré en étudiant séparément les parties temporelle et spatiale du schéma.
- Le fait d’avoir un algorithme temporel stable nous a donné l’idée de concevoir les schémas de sous-maillage comme la succession du traitement temporel précédent et d’un certain traitement spatial. Nous avons ainsi créé un modèle « successif » dont les performances sont liées à celles des deux traitements séparés. Nous avons étudié ce lien et nous avons montré qu’il dépend à la fois du schéma spatial seul et de la distance séparant les deux frontières mises en place dans ce nouveau modèle. Nous avons alors cherché des modèles spatiaux possédant de meilleures qualités que le modèle d’origine, malheureusement nous n’en avons pas trouvé.
- Pour finir, nous avons généralisé notre méthode de construction à des schémas de sous-maillage possédant des facteurs de raffinement plus élevés. Nous avons travaillé avec des facteurs de raffinement égaux à trois, quatre et cinq. A cette occasion nous avons montré la stabilité des modèles temporels et nous avons mis à jour les performances des schémas spatiaux utilisés, afin de prédire les qualités des modèles « successifs » ainsi créés.

L’étude que nous venons de mener est riche en enseignements mais il nous manque finalement l’essentiel, c’est à dire la stabilité des schémas de sous-maillages spatiaux. Nous savons qu’une telle stabilité peut-être obtenue dans le cadre de méthodes conservatives, c’est à dire en utilisant le principe de conservation de l’énergie électromagnétique entre les deux maillages. Ce dernier point fait l’objet de la partie suivante.

## **Quatrième partie**

### **Modèles de sous-maillage basés sur des méthodes de conservation de l'énergie**

Nous avons vu dans le paragraphe 2.2.2 que les modèles de sous-maillage conservatifs sont le plus souvent présentés dans le cadre d'une méthode variationnelle. Ceci s'explique par le fait qu'une telle méthode offre un environnement mathématique, dans lequel on démontre aisément, que c'est la conservation de l'énergie qui assure la stabilité du schéma. Il est alors bien naturel de retrouver ces modèles conservatifs dans un contexte variationnel.

Il faut noter que la méthode variationnelle à l'avantage d'être très générale, puisqu'elle permet d'aborder dans un même formalisme des problèmes qui relèvent des différences finies, des volumes finis ou bien des éléments finis. Par contre, elle est abstraite et elle conduit souvent à des programmes difficiles à mettre en oeuvre.

Partant de ce constat, nous avons dans un premier temps cherché à « traduire » cette méthode dans un langage compréhensible par la majorité des physiciens. Ensuite nous l'avons appliquée de façon simplifiée aux modèles de raffinement spatiaux 2D-TE et 2D-TM. Pour terminer nous avons essayé de construire un modèle de raffinement spatial en 3D en nous inspirant des deux modèles précédents. Cette partie est organisée de la façon suivante :

- Nous présentons d'abord la méthode variationnelle dans son aspect le plus général. Pour cela nous nous sommes basé sur les travaux de Thierry Fouquet [42].
- Ensuite nous avons appliqué une version simplifiée de cette méthode au schéma de raffinement spatial 2D-TE.
- A partir des résultats précédents nous avons construit le schéma de raffinement spatial 2D-TM.
- Pour finir nous parlons très brièvement de la méthode que nous avons envisagé d'utiliser pour le modèle 3D conservatif. Nous parlons au passé car cette méthode n'a pas fonctionné.



# Chapitre 8

## La méthode variationnelle

### 8.1 Présentation du problème

Comme dans les développements précédents nous avons à résoudre un problème de transmission entre deux domaines. Le domaine fin sera représenté par un parallélépipède rectangle que l'on notera  $D$ . Ce dernier est entouré par un domaine grossier que l'on appellera  $D_{ext}$ ,  $D_{ext}$  est un ouvert. On notera  $\Sigma$  la surface de séparation entre les deux domaines et  $\vec{n}_{ext}(M)$  et  $\vec{n}_{int}(M)$  les normales à  $\Sigma$  au point  $M$ , qui sont orientées respectivement vers l'extérieur de  $D$  et vers l'intérieur de  $D$ . Remarquons que  $\vec{n}_{ext}(M)$  est la normale associée à  $D$  et que  $\vec{n}_{int}(M)$  est la normale associée à  $D_{ext}$ . Ces conventions d'orientation sont classiques. Le champ électromagnétique sera noté  $(\vec{e}, \vec{h})$  dans le petit maillage et  $(\vec{E}, \vec{H})$  dans le grand maillage. La concaténation des deux champs sera notée  $(\vec{E}_o, \vec{H}_o)$ . Précisons que  $D$  et  $D_{ext}$  sont placés dans le vide, caractérisé par les constantes diélectriques et magnétiques  $\epsilon_o$  et  $\mu_o$ . L'ensemble de ces notations sont résumées dans la figure suivante :

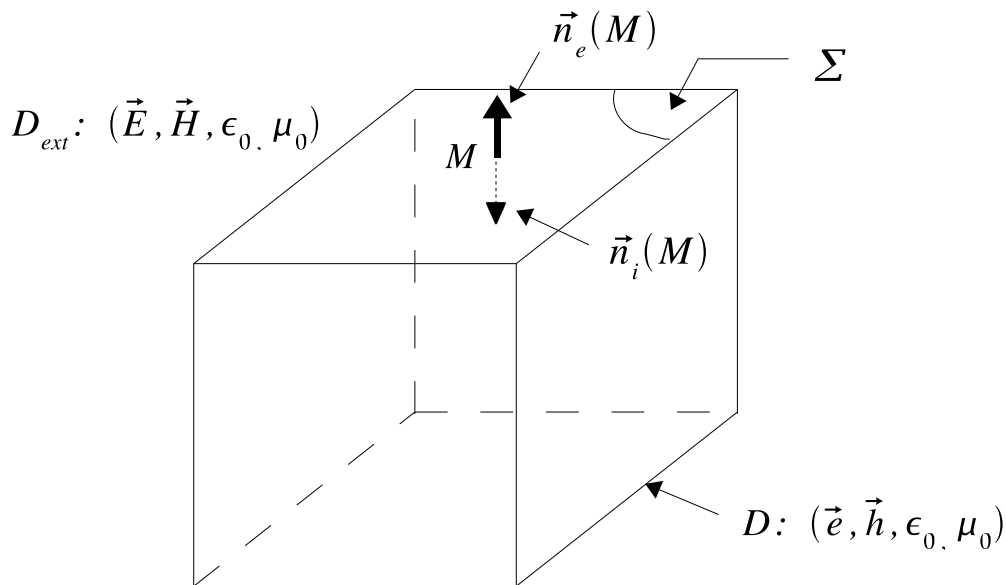


FIG. 8.1 – Vue d'ensemble du problème.

Dans  $D \cup D_{ext}$ , les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}(\vec{E}_o) = -\mu_o \cdot \frac{\partial \vec{H}_o}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}(\vec{H}_o) = \epsilon_o \cdot \frac{\partial \vec{E}_o}{\partial t} \end{cases} \quad (8.1)$$

Notre problème revient à déterminer le champ électromagnétique sur  $\Sigma$ , qui va assurer le bon couplage entre les deux domaines. Bien entendu,  $\Sigma$  devra au final se comporter comme une surface transparente, c'est à dire qu'elle devra gêner le moins possible le passage de l'onde d'un maillage à l'autre. Précisons pour terminer que nous cherchons à construire un schéma de sous-maillage stable.

## 8.2 Découplage des deux domaines

De façon à découpler les deux domaines on introduit comme variables supplémentaires les grandeurs  $\vec{j}$  et  $\vec{J}$  définies sur l'interface  $\Sigma$  de la façon suivante <sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \vec{J}(M, t) = \vec{H}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{int}(M) \\ \vec{j}(M, t) = \vec{h}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{ext}(M) \end{cases} \quad (8.2)$$

La continuité du champ magnétique sur l'interface  $\Sigma$  nous permet d'écrire que :

$$\vec{H}_{|\Sigma}(M, t) = \vec{h}_{|\Sigma}(M, t) \quad (8.3)$$

de sorte que  $\vec{J}$  et  $\vec{j}$  sont liés par la relation :

$$\vec{J} = -\vec{j} \quad (8.4)$$

puisque :

$$\vec{n}_{ext}(M) = -\vec{n}_{int}(M) \quad (8.5)$$

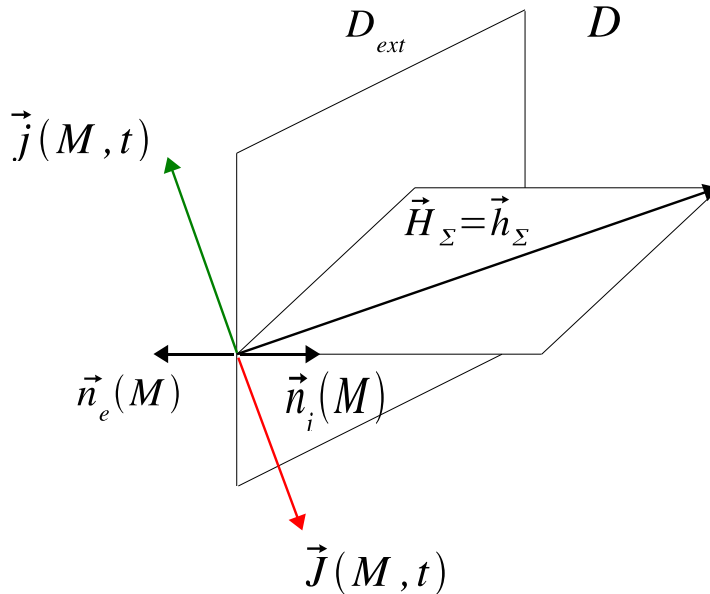


FIG. 8.2 – Définitions de  $\vec{J}(M, t)$  et de  $\vec{j}(M, t)$  .

Supposons un instant que  $\vec{J}$  soit connu, alors il en est de même de  $\vec{H}_{|\Sigma, t} = \vec{h}_{|\Sigma, t}$  <sup>2</sup>, ce qui est suffisant pour calculer séparément le champ électromagnétique dans chacun des deux domaines.

<sup>1</sup>Nous avons noté ces variables supplémentaires  $\vec{J}$  et  $\vec{j}$  car elles s'identifient physiquement à des courants surfaciques.

<sup>2</sup>En effet :  $\vec{H}_{|\Sigma, t} = \vec{n}_{int} \wedge \vec{J}$  et  $\vec{h}_{|\Sigma, t} = \vec{n}_{ext} \wedge \vec{j}$  . On peut alors vérifier à l'aide de 8.4 et de 8.5 que ces deux quantités sont bien égales. De plus elles sont connues dès que  $\vec{J}$  est connu.

Ainsi nous avons bien réalisé un découplage. Il reste maintenant à déterminer  $\vec{J}$ . Nous verrons un peu plus loin que cette inconnue supplémentaire est déterminée, dès que l'on écrit la continuité des traces tangentielles du champ électrique sur l'interface  $\Sigma$  :

$$\vec{E}_{|\Sigma,t}(M,t) = \vec{e}_{|\Sigma,t}(M,t) \quad (8.6)$$

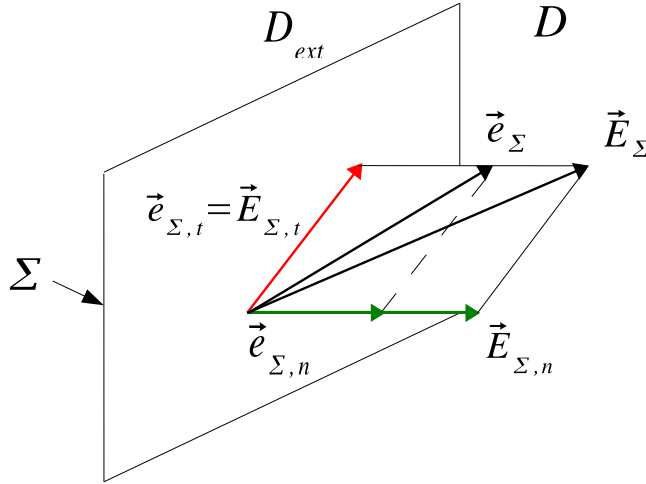


FIG. 8.3 – Continuité des traces tangentielles du champ électrique sur  $\Sigma$ .

Compte tenu de ce qui précède, le système d'équations 8.1 peut se mettre sous la forme suivante :

dans le grand maillage :

$$\begin{cases} \varepsilon_o \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) - \overrightarrow{rot}(\vec{H}(M,t)) = \vec{0} \\ \mu_o \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(M,t) + \overrightarrow{rot}(\vec{E}(M,t)) = \vec{0} \\ \vec{J}(M,t) = \vec{H}_{|\Sigma}(M,t) \wedge \vec{n}_{int}(M) \end{cases} \quad (8.7)$$

dans le petit maillage :

$$\begin{cases} \varepsilon_o \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}(M,t) - \overrightarrow{rot}(\vec{h}(M,t)) = \vec{0} \\ \mu_o \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}(M,t) + \overrightarrow{rot}(\vec{e}(M,t)) = \vec{0} \\ \vec{j}(M,t) = \vec{h}_{|\Sigma}(M,t) \wedge \vec{n}_{ext}(M) \end{cases} \quad (8.8)$$

avec la condition de raccord <sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{int}(M) \wedge \left[ \vec{E}_{|\Sigma}(M,t) \wedge \vec{n}_{int}(M) \right] = \\ \vec{n}_{ext}(M) \wedge \left[ \vec{e}_{|\Sigma}(M,t) \wedge \vec{n}_{ext}(M) \right] \end{aligned} \quad (8.9)$$

<sup>3</sup>Les relations 8.9 et 8.6 sont bien équivalentes, puisque  $\vec{a}_t = \vec{n} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{n})$ . En effet :  $\vec{n} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{n}) = \vec{a} \cdot (\vec{n} \bullet \vec{n}) - \vec{n} \cdot (\vec{a} \bullet \vec{n}) = \vec{a} - a_n \cdot \vec{n} = \vec{a} - \vec{a}_n = \vec{a}_t$ .

## 8.3 Ecriture variationnelle du problème

### 8.3.1 Pourquoi l'écriture variationnelle ?

Intéressons nous un instant à la discrétisation spatiale du système d'équation précédent. La démarche adoptée est très classique, elle consiste à choisir des éléments finis pour les approximations en espace du champ électromagnétique et du courant. Pour être plus précis, on dit que l'équivalent discret d'un champ scalaire  $a(M, t)$  s'écrit sous la forme :

$$a_{discret}(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{i,j,k}(t) \cdot \Phi_{i,j,k}(M)$$

où  $\Phi_{i,j,k}(M)$  est une fonction parfaitement connue, appelée *élément fini*. La construction précise des éléments finis  $\Phi_{i,j,k}(M)$  n'est pas ce qui nous préoccupe pour le moment, nous y reviendrons plus en détail dans la suite de cet exposé. Retenons simplement que  $\Phi_{i,j,k}(M)$  est non nulle dans un certain voisinage  $V$  de la cellule  $(i, j, k)$  et qu'elle est nulle en dehors de ce voisinage. Dans la mesure où le maillage est suffisamment serré par rapport aux variations spatiales de  $a(M, t)$ , on peut écrire que :

$$a_{reel}(M, t) = a_{discret}(M, t)$$

Ceci étant posé, précisons que les éléments finis associés aux composantes de  $\vec{E}_{discret}$  de  $\vec{H}_{discret}$  et de  $\vec{J}_{discret}$  ne sont généralement pas les mêmes, de sorte que l'on écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^\sigma(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k E_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \Gamma_{i,j,k}^\sigma(M) \\ H^\sigma(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k H_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \Delta_{i,j,k}^\sigma(M) \\ J^\sigma(M, t) = \sum_l \sum_m J_{l,m}^\sigma(t) \cdot \Pi_{l,m}^\sigma(M) \end{array} \right. \quad (8.10)$$

dans le grand maillage et :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^\sigma(M, t) = \sum_p \sum_q \sum_r e_{p,q,r}^\sigma(t) \cdot \gamma_{p,q,r}^\sigma(M) \\ h^\sigma(M, t) = \sum_p \sum_q \sum_r h_{p,q,r}^\sigma(t) \cdot \delta_{p,q,r}^\sigma(M) \\ j^\sigma(M, t) = \sum_s \sum_t j_{s,t}^\sigma(t) \cdot \pi_{s,t}^\sigma(M) \end{array} \right. \quad (8.11)$$

dans le petit maillage.

Dans ce qui précède  $\sigma$  s'identifie à  $x$  à  $y$  ou à  $z$ . Les indices  $i, j$  et  $k$  sont ceux de la discrétisation dans le grand maillage, tandis que  $p, q$  et  $r$  sont les indices de discrétisation dans le petit maillage. Ces deux séries d'indices sont reliées par des équations qui dépendent du facteur de raffinement spatial  $r_s$ . Pour le moment nous n'avons pas besoin de préciser ces équations, nous le ferons au moment opportun. Remarquons enfin que les courants sont décomposés sur des éléments finis à deux indices. Ceci tient au fait qu'ils sont définis sur une surface et non dans un volume. A ce propos, nous pouvons préciser que le lien qui existe entre les indices  $l$  et  $m$  et les indices  $i, j$  et  $k$  dépend de la façon dont on paramètre la surface  $\Sigma^4$ . Nous reviendrons plus tard sur ce paramétrage, cette question n'est pas essentielle pour le moment.

<sup>4</sup>Ce paramétrage conditionne aussi le lien qui existe entre les indices  $s$  et  $t$  et les indices  $p, q$  et  $r$ .

L'objectif est de déterminer les variations dans le temps des coefficients qui interviennent dans les équations 8.10 et 8.11. Si on remplace directement ces dernières relations dans 8.7, 8.8 et 8.9, on obtient un système très difficilement exploitable. A titre d'exemple la première équation qui figure dans 8.7 donnerait en projection sur l'axe  $(Ox)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \cdot \sum_i \sum_j \sum_k \frac{d}{dt} (E_{i,j,k}^x) \cdot \Gamma_{i,j,k}^x - \\ \sum_i \sum_j \sum_k H_{i,j,k}^z \cdot \frac{d}{dy} (\Delta_{i,j,k}^z) + \\ \sum_i \sum_j \sum_k H_{i,j,k}^y \cdot \frac{d}{dz} (\Delta_{i,j,k}^y) = 0 \end{array} \right.$$

L'idée est de remanier la formulation de 8.7, 8.8 et 8.9 pour obtenir un lien plus simple entre les inconnues. C'est le but de l'écriture variationnelle qui va faire l'objet du paragraphe suivant.

### 8.3.2 Ecriture variationnelle

Soit  $\vec{\Omega}$  une fonction vectorielle indépendante du temps définie sur  $D_{ext}$ . Multiplions scalairement par  $\vec{\Omega}$  la première équation qui figure dans 8.7 et intégrons le produit scalaire obtenu sur le domaine  $D_{ext}$ . On obtient :

$$\int_{D_{ext}} \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \bullet \vec{\Omega}(M) \cdot dV - \int_{D_{ext}} \vec{rot}(\vec{H}(M, t)) \bullet \vec{\Omega}(M) \cdot dV = 0 \quad (8.12)$$

Nous réalisons maintenant une permutation de  $\vec{H}$  et de  $\vec{\Omega}$  dans la deuxième intégrale. Pour cela nous utilisons l'identité vectorielle suivante :

$$div(\vec{H} \wedge \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \bullet \vec{rot}(\vec{H}) - \vec{H} \bullet \vec{rot}(\vec{\Omega})$$

que nous intégrons sur  $D_{ext}$  :

$$\int_{D_{ext}} div(\vec{H} \wedge \vec{\Omega}) \cdot dV = \int_{D_{ext}} \vec{\Omega} \bullet \vec{rot}(\vec{H}) \cdot dV - \int_{D_{ext}} \vec{H} \bullet \vec{rot}(\vec{\Omega}) \cdot dV$$

Enfin nous utilisons le théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_{D_{ext}} div(\vec{H} \wedge \vec{\Omega}) \cdot dV = \oint_{\Sigma} (\vec{H}_{|\Sigma} \wedge \vec{\Omega}) \bullet d\vec{\Sigma}$$

Nous obtenons alors pour le deuxième terme de 8.12 :

$$\int_{D_{ext}} \vec{\Omega} \bullet \vec{rot}(\vec{H}) \cdot dV = \int_{D_{ext}} \vec{H} \bullet \vec{rot}(\vec{\Omega}) \cdot dV + \oint_{\Sigma} (\vec{H}_{|\Sigma} \wedge \vec{\Omega}) \bullet d\vec{\Sigma} \quad (8.13)$$

Pour finir, arrangeons un peu le produit mixte qui apparaît dans l'intégrale de surface :

$$(\overrightarrow{H}_{|\Sigma} \wedge \overrightarrow{\Omega}) \bullet d\overrightarrow{\Sigma} = (\overrightarrow{H}_{|\Sigma} \wedge \overrightarrow{\Omega}) \bullet \overrightarrow{n}_{int} \cdot d\Sigma = (\overrightarrow{n}_{int} \wedge \overrightarrow{H}_{|\Sigma}) \bullet \overrightarrow{\Omega} \cdot d\Sigma \quad (8.14)$$

Nous pouvons écrire ce dernier terme en fonction de  $\overrightarrow{J}$ . Pour cela calculons la quantité  $\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{n}_{int} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{n}_{int})$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{n}_{int} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{n}_{int}) &= \overrightarrow{J} \bullet [\overrightarrow{\Omega} - \overrightarrow{n}_{int} \cdot (\overrightarrow{\Omega} \bullet \overrightarrow{n}_{int})] \\ &= \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{\Omega} - (\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{n}_{int}) \cdot (\overrightarrow{\Omega} \bullet \overrightarrow{n}_{int}) \end{aligned}$$

Or  $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{H}_{|\Sigma} \wedge \overrightarrow{n}_{int}$ , donc :

$$\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{n}_{int} = (\overrightarrow{H}_{|\Sigma} \wedge \overrightarrow{n}_{int}) \bullet \overrightarrow{n}_{int} = \overrightarrow{0}$$

ainsi :

$$\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{n}_{int} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{n}_{int}) = \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{\Omega} = (\overrightarrow{H}_{|\Sigma} \wedge \overrightarrow{n}_{int}) \bullet \overrightarrow{\Omega} \quad (8.15)$$

Nous obtenons l'opposé du deuxième membre de 8.14.

Maintenant, on remplace 8.15 dans 8.14 puis 8.14 dans 8.13 et enfin 8.13 dans 8.12. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \int_{D_{ext}} \overrightarrow{E}(M, t) \bullet \overrightarrow{\Omega}(M) \cdot dV - \int_{D_{ext}} \overrightarrow{H}(M, t) \bullet \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\Omega}(M)) \cdot dV + \\ \oint_{\Sigma} \overrightarrow{J}(M, t) \bullet \left\{ \overrightarrow{n}_{int}(M) \wedge [\overrightarrow{\Omega}(M) \wedge \overrightarrow{n}_{int}(M)] \right\} \cdot d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Pour la deuxième équation de 8.7 la démarche est similaire mais plus simple car nous n'effectuons pas de permutation. Soit donc  $\overrightarrow{\phi}$  une autre fonction vectorielle indépendante du temps définie sur  $D_{ext}$ . Comme précédemment nous multiplions scalairement par  $\overrightarrow{\phi}$  la deuxième équation de 8.7 et nous intégrons sur  $D_{ext}$ . Nous obtenons alors directement :

$$\mu_o \cdot \frac{d}{dt} \int_{D_{ext}} \overrightarrow{H}(M, t) \bullet \overrightarrow{\phi}(M) \cdot dV + \int_{D_{ext}} \overrightarrow{\phi}(M) \bullet \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}(M, t)) \cdot dV = 0 \quad (8.17)$$

Dans le petit maillage nous adoptons exactement la même technique de calcul. Ainsi en introduisant  $\overrightarrow{\omega}$  et  $\overrightarrow{\varphi}$ , les équivalents dans le petit maillage de  $\overrightarrow{\Omega}$  et de  $\overrightarrow{\phi}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \int_D \overrightarrow{e}(M, t) \bullet \overrightarrow{\omega}(M) \cdot dV - \int_D \overrightarrow{h}(M, t) \bullet \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\omega}(M)) \cdot dV + \\ \oint_{\Sigma} \overrightarrow{j}(M, t) \bullet \left\{ \overrightarrow{n}_{ext}(M) \wedge [\overrightarrow{\omega}(M) \wedge \overrightarrow{n}_{ext}(M)] \right\} \cdot d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

et :

$$\mu_o \cdot \frac{d}{dt} \int_D \overrightarrow{h}(M, t) \bullet \overrightarrow{\varphi}(M) \cdot dV + \int_D \overrightarrow{\varphi}(M) \bullet \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{e}(M, t)) \cdot dV = 0 \quad (8.19)$$

Il reste maintenant à écrire la condition de raccord en faisant apparaître  $\vec{J}$ . Pour cela on multiplie scalairement l'équation 8.9 par  $\vec{J}$  et on intègre sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{J}(M, t) \bullet \left\{ \vec{n}_{int}(M) \wedge \left[ \vec{E}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{int}(M) \right] \right\} \cdot d\Sigma = \\ \oint_{\Sigma} \vec{J}(M, t) \bullet \left\{ \vec{n}_{ext}(M) \wedge \left[ \vec{e}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{ext}(M) \right] \right\} \cdot d\Sigma \end{aligned} \quad (8.20)$$

Finalemnt en remplaçant  $\vec{j}$  par  $-\vec{J}$  dans 8.18 on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \int_{D_{ext}} \vec{E} \bullet \vec{\Omega} \cdot dV - \int_{D_{ext}} \vec{H} \bullet \vec{rot}(\vec{\Omega}) \cdot dV \\ & + \oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet \left\{ \vec{n}_{int} \wedge \left[ \vec{\Omega} \wedge \vec{n}_{int} \right] \right\} \cdot d\Sigma = 0 \\ & \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \int_{D_{ext}} \vec{H} \bullet \vec{\phi} \cdot dV + \int_{D_{ext}} \vec{\phi} \bullet \vec{rot}(\vec{E}) \cdot dV = 0 \end{aligned} \right. \quad (8.21)$$

dans le grand maillage, puis :

$$\left\{ \begin{aligned} & \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \int_D \vec{e} \bullet \vec{\omega} \cdot dV - \int_D \vec{h} \bullet \vec{rot}(\vec{\omega}) \cdot dV \\ & - \oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet \left\{ \vec{n}_{ext} \wedge \left[ \vec{\omega} \wedge \vec{n}_{ext} \right] \right\} \cdot d\Sigma = 0 \\ & \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \int_D \vec{h} \bullet \vec{\varphi} \cdot dV + \int_D \vec{\varphi} \bullet \vec{rot}(\vec{e}) \cdot dV = 0 \end{aligned} \right. \quad (8.22)$$

dans le petit maillage, avec la condition de raccord :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet \left\{ \vec{n}_{int} \wedge \left[ \vec{E}_{|\Sigma} \wedge \vec{n}_{int} \right] \right\} \cdot d\Sigma = \\ \oint_{\Sigma} \vec{J} \bullet \left\{ \vec{n}_{ext} \wedge \left[ \vec{e}_{|\Sigma} \wedge \vec{n}_{ext} \right] \right\} \cdot d\Sigma \end{aligned} \quad (8.23)$$

### 8.3.3 Notation en terme de produits scalaires et d'opérateurs

De façon à finaliser l'écriture des équations 8.21, 8.22 et 8.23 nous introduisons un certain nombre de produits scalaires et d'opérateurs.

D'abord nous supposons que les couples de fonctions  $(\vec{E}, \vec{\Omega})$ ,  $(\vec{H}, \vec{\phi})$ ,  $(\vec{e}, \vec{\omega})$ ,  $(\vec{h}, \vec{\varphi})$  et ainsi que  $\vec{J}$ , appartiennent chacun à un certain sous-espace vectoriel de fonctions. Ainsi on écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} & (\vec{E}, \vec{\Omega}) \in V \times V \\ & (\vec{H}, \vec{\phi}) \in W \times W \\ & (\vec{e}, \vec{\omega}) \in v \times v \\ & (\vec{h}, \vec{\varphi}) \in w \times w \\ & \vec{J} \in M \end{aligned} \right.$$

Nous définissons alors les produits scalaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle , \rangle_V / : \quad \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_V = \int_{D_{ext}} \vec{f} \bullet \vec{g} \cdot dV \\ \langle , \rangle_W / : \quad \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_W = \int_{D_{ext}} \vec{f} \bullet \vec{g} \cdot dV \\ \langle , \rangle_v / : \quad \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_v = \int_D \vec{f} \bullet \vec{g} \cdot dV \\ \langle , \rangle_w / : \quad \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_w = \int_D \vec{f} \bullet \vec{g} \cdot dV \end{array} \right.$$

et les opérateurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} B/ : \quad B(\vec{f}, \vec{g}) = \int_{D_{ext}} \overrightarrow{rot}(\vec{f}) \bullet \vec{g} \cdot dV \\ C/ : \quad C(\vec{f}, \vec{g}) = \oint_{\Sigma} \vec{f} \bullet \{ \vec{n}_{int} \wedge [\vec{g} \wedge \vec{n}_{int}] \} \cdot d\Sigma \\ b/ : \quad b(\vec{f}, \vec{g}) = \int_D \overrightarrow{rot}(\vec{f}) \bullet \vec{g} \cdot dV \\ c/ : \quad c(\vec{f}, \vec{g}) = \oint_{\Sigma} \vec{f} \bullet \{ \vec{n}_{ext} \wedge [\vec{g} \wedge \vec{n}_{ext}] \} \cdot d\Sigma \end{array} \right.$$

Remarquons au passage que les opérateurs  $C$  et  $c$  sont égaux par construction.

Finalement les équations 8.21, 8.22 et 8.23 s'écrivent sous la forme opérationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{E}, \vec{\Omega} \rangle_V - B(\vec{\Omega}, \vec{H}) + C(\vec{J}, \vec{\Omega}) = 0 \\ \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{H}, \vec{\phi} \rangle_W + B(\vec{E}, \vec{\phi}) = 0 \end{array} \right. \quad (8.24)$$

dans le grand maillage, puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{e}, \vec{\omega} \rangle_v - b(\vec{\omega}, \vec{h}) - c(\vec{J}, \vec{\omega}) = 0 \\ \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{h}, \vec{\varphi} \rangle_w + b(\vec{e}, \vec{\varphi}) = 0 \end{array} \right. \quad (8.25)$$

dans le petit maillage, avec la condition de raccord :

$$C(\vec{J}, \vec{E}) = c(\vec{J}, \vec{e}) \quad (8.26)$$

Cette écriture variationnelle de notre problème de départ est très peu intuitive. Cependant, nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'elle permet d'établir des relations simples entre les différentes inconnues. En effet nous allons obtenir un simple système matriciel d'équations.

## 8.4 Discrétisation spatiale

Nous allons maintenant reprendre la technique de discrétisation dont on a parlé dans le paragraphe 8.3.1. Avec l'écriture variationnelle que nous venons de mettre en place, nous allons voir que cette technique de discrétisation conduit cette fois-ci à un système matriciel tout à fait exploitable. A ce stade de notre développement le facteur de raffinement spatial  $r_s$  reste quelconque, cette remarque est valable pour l'ensemble du paragraphe 8.4.



### 8.4.1 Discrétisation des équations variationnelles

Soit  $\vec{E}_d$  et  $\vec{\Omega}_d$  les équivalents discrets des deux éléments de  $V$  :  $\vec{E}$  et  $\vec{\Omega}$ . On notera  $V_d$  l'espace vectoriel d'appartenance de  $\vec{E}_d$  et de  $\vec{\Omega}_d$ . Remarquons que  $V_d$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . On peut représenter schématiquement l'opération de discrétisation de la façon suivante :

$$(\vec{E}, \vec{\Omega}) \in V \times V \rightsquigarrow (\vec{E}_d, \vec{\Omega}_d) \in V_d \times V_d$$

Nous faisons de même pour les autres vecteurs. Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}, \vec{\Omega}) \in V \times V \rightsquigarrow (\vec{E}_d, \vec{\Omega}_d) \in V_d \times V_d \\ (\vec{H}, \vec{\phi}) \in W \times W \rightsquigarrow (\vec{H}_d, \vec{\phi}_d) \in W_d \times W_d \\ (\vec{e}, \vec{\omega}) \in v \times v \rightsquigarrow (\vec{e}_d, \vec{\omega}_d) \in v_d \times v_d \\ (\vec{h}, \vec{\varphi}) \in w \times w \rightsquigarrow (\vec{h}_d, \vec{\varphi}_d) \in w_d \times w_d \\ \vec{J} \in M \rightsquigarrow \vec{J}_d \in M_d \end{array} \right.$$

La version discrétisée des équations 8.24, 8.25 et 8.26 s'écrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{E}_d, \vec{\Omega}_d \rangle_{V_d} - B(\vec{\Omega}_d, \vec{H}_d) + C(\vec{J}_d, \vec{\Omega}_d) = 0 \\ \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{H}_d, \vec{\phi}_d \rangle_{W_d} + B(\vec{E}_d, \vec{\phi}_d) = 0 \end{array} \right. \quad (8.27)$$

pour le grand maillage et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{e}_d, \vec{\omega}_d \rangle_{v_d} - b(\vec{\omega}_d, \vec{h}_d) - c(\vec{J}_d, \vec{\omega}_d) = 0 \\ \mu_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{h}_d, \vec{\varphi}_d \rangle_{w_d} + b(\vec{e}_d, \vec{\varphi}_d) = 0 \end{array} \right. \quad (8.28)$$

pour le petit maillage. La condition de raccord donne quand à elle :

$$C(\vec{J}_d, \vec{E}_d) = c(\vec{J}_d, \vec{e}_d) \quad (8.29)$$

### 8.4.2 Passage à l'écriture matricielle

Nous allons maintenant décomposer sur des éléments finis tous les vecteurs discrets qui interviennent. Pour cela nous choisissons des éléments finis différents dans chacun des espaces vectoriels (ev) considérés. Ils seront notés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{i,j,k}^\sigma \text{ dans } V_d, \text{ ev d'appartenance de } \vec{E}_d \text{ et de } \vec{\Omega}_d. \\ \Delta_{i,j,k}^\sigma \text{ dans } W_d, \text{ ev d'appartenance de } \vec{H}_d \text{ et de } \vec{\phi}_d. \\ \gamma_{p,q,r}^\sigma \text{ dans } v_d, \text{ ev d'appartenance de } \vec{e}_d \text{ et de } \vec{\omega}_d. \\ \delta_{p,q,r}^\sigma \text{ dans } w_d, \text{ ev d'appartenance de } \vec{h}_d \text{ et de } \vec{\varphi}_d. \\ \Pi_{l,m}^\sigma \text{ dans } M_d, \text{ ev d'appartenance de } \vec{J}_d. \end{array} \right.$$

Nous avons déjà présenté ces notations dans le paragraphe 8.3.1 (voir les équations 8.10 et 8.11 ). Notons d'hors et déjà que l'élément fini  $\pi_{s,t}^\sigma$  n'intervient plus puisqu'il est relatif à  $\vec{j}$  et que ce dernier à été remplacé par  $-\vec{J}$  dans l'équation 8.18. Enfin reppelons que  $\sigma$  désigne toujours  $x, y$  ou  $z$ .

A titre d'exemple écrivons la décomposition obtenue pour  $\vec{E}_d$ , élément de  $V_d$  :

$$\vec{E}_d(M, t) = \sum_{\sigma=x,y,z} E^\sigma(M, t) \cdot \vec{i}_\sigma$$

avec :  $\vec{i}_x = \vec{i}$ ,  $\vec{i}_y = \vec{j}$  et  $\vec{i}_z = \vec{k}$ . Compte tenu de 8.10 cela donne :

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(M, t) &= \sum_{\sigma=x,y,z} \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k E_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \Gamma_{i,j,k}^\sigma(M) \right\} \cdot \vec{i}_\sigma \\ &= \sum_{\sigma=x,y,z} \sum_i \sum_j \sum_k E_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \vec{\Gamma}_{i,j,k}^\sigma(M) \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}_{i,j,k}^\sigma(M) = \Gamma_{i,j,k}^\sigma(M) \cdot \vec{i}_\sigma$$

Pour alléger l'écriture de cette décomposition, on attribue un numéro à chacun des quadruplets d'indices  $(\sigma, i, j, k)$ <sup>5</sup>. Ce numéro sera désigné par la lettre  $\alpha$ . Avec cette nouvelle notation on peut écrire plus simplement :

$$\vec{E}_d(M, t) = \sum_{\alpha} E_\alpha(t) \cdot \vec{\Gamma}_\alpha(M) \quad (8.30)$$

Pour finir on introduit le vecteur colonne  $\mathbf{E}(t)$  définit par :

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \vdots \\ E_\alpha(t) \\ \vdots \end{bmatrix}_{\{\vec{\Gamma}_\alpha\}} \quad (8.31)$$

$\mathbf{E}(t)$  représente alors le vecteur  $\vec{E}_d$  dans la base d'éléments finis constituée par  $\{\vec{\Gamma}_\alpha\}_\alpha$ .

Nous faisons la même chose pour les autres vecteurs discrétisés. Ainsi on aura l'ensemble des vecteurs colonne suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}(t), \mathbf{\Omega}(t)) \text{ représentant de } (\vec{E}_d, \vec{\Omega}_d) \text{ dans } \{\vec{\Gamma}_\alpha\} \text{ base de } V_d \\ (\mathbf{H}(t), \mathbf{\phi}(t)) \text{ représentant de } (\vec{H}_d, \vec{\phi}_d) \text{ dans } \{\vec{\Delta}_\alpha\} \text{ base de } W_d \\ (\mathbf{e}(t), \mathbf{\omega}(t)) \text{ représentant de } (\vec{e}_d, \vec{\omega}_d) \text{ dans } \{\vec{\gamma}_\beta\} \text{ base de } v_d \\ (\mathbf{h}(t), \mathbf{\varphi}(t)) \text{ représentant de } (\vec{h}_d, \vec{\varphi}_d) \text{ dans } \{\vec{\delta}_\beta\} \text{ base de } w_d \\ \mathbf{J}(t) \text{ représentant de } \vec{J}_d \text{ dans } \{\vec{\Pi}_\epsilon\} \text{ base de } M_d \end{array} \right. \quad (8.32)$$

Dans ce qui précède  $\beta$  et  $\epsilon$  sont les numéros respectifs des quadruplets d'indices  $(\sigma, p, q, r)$  et  $(\sigma, l, m)$ . Ces décompositions étant faites, nous pouvons les remplacer dans le système variationnel 8.27, 8.28 et 8.29, en posant toutefois :

<sup>5</sup>On reviendra plus en détail dans la suite sur la manière de numéroter les quadruplets.

- $\vec{\Omega}_d = \vec{\Gamma}_\alpha$  pour la première équation de 8.27.
- $\vec{\phi}_d = \vec{\Delta}_\alpha$  pour la deuxième équation de 8.27.
- $\vec{\omega}_d = \vec{\gamma}_\beta$  pour la première équation de 8.28.
- Et enfin  $\vec{\varphi}_d = \vec{\delta}_\beta$  pour la deuxième équation de 8.28.

Ceci revient à projeter chacune des équations sur l'un des éléments de base de l'espace vectoriel qui lui est associé.

Regardons ce que cela donne pour la première équation de 8.27. Sa projection sur l'élément de base  $\vec{\Gamma}_\alpha$  de  $V_d$  s'écrit :

$$\epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{E}_d, \vec{\Gamma}_\alpha \rangle_{V_d} - B(\vec{\Gamma}_\alpha, \vec{H}_d) + C(\vec{J}_d, \vec{\Gamma}_\alpha) = 0 \quad (8.33)$$

Pour que la première équation de 8.27 soit valable quel que soit  $\vec{\Omega}_d \in V_d$ , il suffit que 8.33 soit vérifiée quel que soit l'élément de base  $\vec{\Gamma}_\alpha$  de  $V_d$ , c'est à dire finalement quelque soit  $\alpha$ .

Remplaçons maintenant les décompositions de  $\vec{E}_d$  de  $\vec{H}_d$  et de  $\vec{J}_d$  dans cette dernière relation :

*Pour le premier terme on obtient :*

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_d, \vec{\Gamma}_\alpha \rangle_{V_d} &= \langle \sum_{\alpha'} E_{\alpha'}(t) \cdot \vec{\Gamma}_{\alpha'}(M), \vec{\Gamma}_\alpha(M) \rangle_{V_d} \\ &= \sum_{\alpha'} E_{\alpha'}(t) \cdot \langle \vec{\Gamma}_{\alpha'}(M), \vec{\Gamma}_\alpha(M) \rangle_{V_d} \end{aligned}$$

On pose :

$$(\mathbf{M}_E)_{\alpha', \alpha} = \langle \vec{\Gamma}_{\alpha'}(M), \vec{\Gamma}_\alpha(M) \rangle_{V_d}$$

remarquons au passage que :

$$(\mathbf{M}_E)_{\alpha', \alpha} = (\mathbf{M}_E)_{\alpha, \alpha'}$$

Alors :

$$\langle \vec{E}_d, \vec{\Gamma}_\alpha \rangle_{V_d} = \sum_{\alpha'} (\mathbf{M}_E)_{\alpha, \alpha'} \cdot E_{\alpha'}(t) \quad (8.34)$$

*Pour le deuxième terme on obtient :*

$$\begin{aligned} B(\vec{\Gamma}_\alpha, \vec{H}_d) &= B\left(\vec{\Gamma}_\alpha(M), \sum_{\alpha'} H_{\alpha'}(t) \cdot \vec{\Delta}_{\alpha'}(M)\right) \\ &= \sum_{\alpha'} H_{\alpha'}(t) \cdot B\left(\vec{\Gamma}_\alpha(M), \vec{\Delta}_{\alpha'}(M)\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$(\mathbf{B})_{\alpha, \alpha'} = B\left(\vec{\Gamma}_\alpha(M), \vec{\Delta}_{\alpha'}(M)\right)$$

Alors :

$$B(\vec{\Gamma}_\alpha, \vec{H}_d) = \sum_{\alpha'} (\mathbf{B})_{\alpha, \alpha'} \cdot H_{\alpha'}(t) \quad (8.35)$$

Pour le troisième terme on obtient :

$$\begin{aligned} C(\vec{J}_d, \vec{\Gamma}_\alpha) &= C\left(\sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \vec{\Gamma}_{\alpha}(M)\right) \\ &= \sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot C\left(\vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \vec{\Gamma}_{\alpha}(M)\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$(\mathbf{C})_{\epsilon, \alpha} = C\left(\vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \vec{\Gamma}_{\alpha}(M)\right)$$

Il vient alors :

$$C(\vec{J}_d, \vec{\Gamma}_\alpha) = \sum_{\epsilon} (\mathbf{C})_{\epsilon, \alpha} \cdot J_{\epsilon}(t)$$

ou encore :

$$C(\vec{J}_d, \vec{\Gamma}_\alpha) = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon} \cdot J_{\epsilon}(t) \quad (8.36)$$

Considérons maintenant les trois vecteurs colonne suivants :

$$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \langle \vec{E}_d, \vec{\Gamma}_\alpha \rangle_{V_d} \\ \vdots \end{array} \right]_{\alpha} \quad \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ B(\vec{\Gamma}_\alpha, \vec{H}_d) \\ \vdots \end{array} \right]_{\alpha} \quad \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ C(\vec{J}_d, \vec{\Gamma}_\alpha) \\ \vdots \end{array} \right]_{\alpha}$$

En utilisant les relations 8.34, 8.35 et 8.36 ces trois vecteurs colonne peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}_E \mathbf{E}(t), \quad \mathbf{B} \mathbf{H}(t) \quad \text{et} \quad {}^t\mathbf{C} \mathbf{J}(t)$$

avec :

$$\mathbf{M}_E = (((\mathbf{M}_E)_{\alpha, \alpha'}))_{\alpha \alpha'}$$

$$\mathbf{B} = ((\mathbf{B}_{\alpha, \alpha'}))_{\alpha, \alpha'}$$

$$\mathbf{C} = ((\mathbf{C}_{\epsilon, \alpha}))_{\epsilon, \alpha}$$

Puisque la relation 8.33 doit être vraie quel que soit  $\alpha$ , on peut écrire finalement la relation matricielle suivante :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt}(t) - \mathbf{B} \mathbf{H}(t) + {}^t\mathbf{C} \mathbf{J}(t) = \mathbf{0} \quad (8.37)$$

Pour les autres équations de 8.27 et de 8.28 on obtient de la même manière :

$$\mu_o \cdot \mathbf{M}_H \frac{d\mathbf{H}}{dt}(t) + {}^t\mathbf{B} \mathbf{E}(t) = \mathbf{0} \quad (8.38)$$

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt}(t) - \mathbf{b} \mathbf{h}(t) - {}^t\mathbf{c} \mathbf{J}(t) = \mathbf{0} \quad (8.39)$$

$$\text{et : } \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \frac{d\mathbf{h}}{dt}(\mathbf{t}) + {}^t\mathbf{b}\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (8.40)$$

ou l'on à introduit les nouvelles matrices  $\mathbf{M}_H$ ,  $\mathbf{m}_e$ ,  $\mathbf{m}_h$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ . Les définitions de ces nouvelles matrices sont consignées dans l'annexe C.

Pour la condition de raccord 8.29 on obtient en remplaçant les développements de  $\vec{J}_d$  de  $\vec{E}_d$  et de  $\vec{e}_d$  :

$$C \left( \sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \sum_{\alpha} E_{\alpha}(t) \cdot \vec{\Gamma}_{\alpha}(M) \right) = \\ c \left( \sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \sum_{\beta} e_{\beta}(t) \cdot \vec{\gamma}_{\beta}(M) \right)$$

ce qui donne :

$$\sum_{\epsilon} \sum_{\alpha} J_{\epsilon}(t) \cdot E_{\alpha}(t) \cdot C \left( \vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \vec{\Gamma}_{\alpha}(M) \right) = \\ \sum_{\epsilon} \sum_{\beta} J_{\epsilon}(t) \cdot e_{\beta}(t) \cdot c \left( \vec{\Pi}_{\epsilon}(M), \vec{\gamma}_{\beta}(M) \right)$$

soit :

$$\sum_{\epsilon} \sum_{\alpha} J_{\epsilon}(t) \cdot (\mathbf{C})_{\epsilon,\alpha} \cdot E_{\alpha}(t) = \\ \sum_{\epsilon} \sum_{\beta} J_{\epsilon}(t) \cdot (\mathbf{c})_{\epsilon,\beta} \cdot e_{\beta}(t)$$

ou encore :

$$\sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \left\{ \sum_{\alpha} (\mathbf{C})_{\epsilon,\alpha} \cdot E_{\alpha}(t) \right\} = \\ \sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \left\{ \sum_{\beta} (\mathbf{c})_{\epsilon,\beta} \cdot e_{\beta}(t) \right\}$$

Cette dernière équation est vérifiée quelque soit  $\epsilon$ , si on écrit :

$$\sum_{\alpha} (\mathbf{C})_{\epsilon,\alpha} \cdot E_{\alpha}(t) = \\ \sum_{\beta} (\mathbf{c})_{\epsilon,\beta} \cdot e_{\beta}(t)$$

Relation que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{c}\mathbf{e}(\mathbf{t})$$

Résumons ce que nous avons obtenu :  
dans le grand maillage :

$$\begin{cases} \epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt}(\mathbf{t}) - \mathbf{B}\mathbf{H}(\mathbf{t}) + {}^t\mathbf{C}\mathbf{J}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \\ \mu_o \cdot \mathbf{M}_H \frac{d\mathbf{H}}{dt}(\mathbf{t}) + {}^t\mathbf{B}\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (8.41)$$

dans le petit maillage :

$$\begin{cases} \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\mathbf{h}(\mathbf{t}) - {}^t\mathbf{c}\mathbf{J}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \\ \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \frac{d\mathbf{h}}{dt}(\mathbf{t}) + {}^t\mathbf{b}\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (8.42)$$

condition de raccord :

$$\mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{c}\mathbf{e}(\mathbf{t}) \quad (8.43)$$

Les définitions détaillées de toutes les matrices qui interviennent dans ce système sont dans l'annexe A.

Finalemnt les relations 8.41, 8.42 et 8.43 constituent un système matriciel que l'on n'aurait pas pu obtenir sans l'écriture variationnelle. C'est en s'appuyant sur ce système matriciel que nous allons petit à petit mettre en place un schéma de raffinement spatio-temporel conservatif et donc stable.

### 8.4.3 Détermination du courant sur l'interface

Comme on le disait au début de cette partie c'est la condition de raccord 8.43 <sup>6</sup> qui permet de déterminer le courant sur l'interface  $\Sigma$ . Nous pouvons à présent montrer ceci à l'aide du système matriciel que l'on vient d'obtenir.

Multiplions la première équation de 8.41 par  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1}$  puis la première équation de 8.42 par  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{m}_e^{-1}$  et enfin faisons la différence entre les deux relations obtenues. Il vient après réorganisation des termes :

$$\begin{aligned} \epsilon_o \cdot \left( \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} - \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{t}) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{t})) \\ = - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot {}^t\mathbf{C} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot {}^t\mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

Or d'après la condition de raccord 8.43, on a :

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{t})$$

soit :

$$\mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot {}^t\mathbf{C} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot {}^t\mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{t}) \\ = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{t}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (8.44)$$

## 8.5 Discrétisation temporelle

A partir d'ici nous nous plaçons dans le cas particulier où les facteurs de raffinement en temps et en espace sont égaux à deux :  $r_t = 2, r_s = 2$ .

<sup>6</sup>Continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  sur l'interface.

### 8.5.1 Schéma temporel de type « saute-mouton »

Comme le titre l'indique nous adoptons un schéma temporel de type « saute-mouton ». Si tous les champs sont calculés dans l'intervalle de temps  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  où  $\Delta t$  est le pas temporel dans le grand maillage, alors :

- $\mathbf{E}(t)$  est remplacé par la séquence  $\mathbf{E}^n, \mathbf{E}^{n+1}$ .
- $\mathbf{H}(t)$  est remplacé par  $\mathbf{H}^{n+1/2}$ .
- $\mathbf{e}(t)$  est remplacé par la séquence  $\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^{n+1/2}, \mathbf{e}^{n+1}$ .
- $\mathbf{h}(t)$  est remplacé par la séquence  $\mathbf{h}^{n+1/4}, \mathbf{h}^{n+3/4}$ .
- $\mathbf{J}(t)$  est remplacé par  $\mathbf{J}^{n+1/2}$ .

Ces notations sont résumées sur la figure suivante :

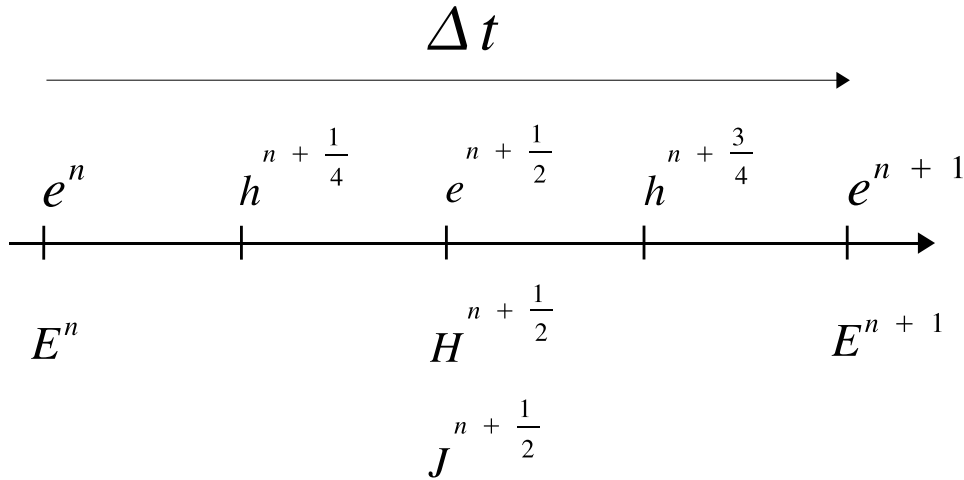


FIG. 8.4 – Discrétisation temporelle de type « saute mouton ».

En ce qui concerne les opérateurs  $\frac{d}{dt}$ , nous faisons l'approximation classique de la dérivée centrée (approximation à l'ordre deux). Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{gm}^{n+1/2} \sim \frac{\mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{A}^n}{\Delta t} \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{pm}^{n+1/4} \sim \frac{\mathbf{a}^{n+1/2} - \mathbf{a}^n}{\frac{\Delta t}{2}} \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{pm}^{n+3/4} \sim \frac{\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} \end{array} \right.$$

Ceci étant posé, nous obtenons la discrétisation temporelle suivante pour notre système matriciel :

dans le grand maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} + {}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = 0 \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} + {}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = 0 \end{array} \right. \quad (8.45)$$

dans le petit maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \cdot \frac{\mathbf{h}^{n+1/4} - \mathbf{h}^{n-1/4}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}^n = \mathbf{0} \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{\mathbf{e}^{n+1/2} - \mathbf{e}^n}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{0} \\ \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \cdot \frac{\mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{h}^{n+1/4}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} = \mathbf{0} \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (8.46)$$

On choisit d'exprimer la condition de raccord 8.43 à la date  $t = \{1 + \frac{1}{2}\} \Delta t$ . Pour cela on effectue les moyennes temporelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2} \\ \mathbf{e}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{e}^{n+1/4} + \mathbf{e}^{n+3/4}}{2} \end{array} \right. \quad (8.47)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}^{n+1/4} = \frac{\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n+1/2}}{2} \\ \mathbf{e}^{n+3/4} = \frac{\mathbf{e}^{n+1/2} + \mathbf{e}^{n+1}}{2} \end{array} \right. \quad (8.48)$$

Cela donne :

$$\mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2} = \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{e}^n + 2 \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} + \mathbf{e}^{n+1}}{4} \quad (8.49)$$

Nous verrons un peu plus loin que cette façon de faire permet d'écrire la conservation de l'énergie électromagnétique.

La discrétisation temporelle étant faite, montrons que toutes les inconnues sont calculables si la quantité  $\mathbf{J}^{n+1/2}$  est connue :

- La première équation de 8.45 permet de calculer  $\mathbf{H}^{n+1/2}$  en fonction de  $\mathbf{H}^{n-1/2}$  et de  $\mathbf{E}^n$ , qui sont les conditions initiales dans le grand maillage.
- La deuxième équation de 8.45 permet alors de déterminer  $\mathbf{E}^{n+1}$ .
- La première équation de 8.46 permet de calculer  $\mathbf{h}^{n+1/4}$  en fonction de  $\mathbf{h}^{n-1/4}$  et de  $\mathbf{e}^n$ .
- la deuxième équation de 8.46 permet ensuite de calculer  $\mathbf{e}^{n+1/2}$ .
- La troisième équation de 8.46 permet alors de calculer  $\mathbf{h}^{n+3/4}$  en fonction de  $\mathbf{h}^{n+1/4}$  et de  $\mathbf{e}^{n+1/2}$ .
- La quatrième équation de 8.46 permet enfin de déterminer  $\mathbf{e}^{n+1}$ .

## 8.5.2 Calcul de $\mathbf{J}^{n+1/2}$

Il faut maintenant déterminer  $\mathbf{J}^{n+1/2}$  c'est à dire l'équivalent discret de la relation 8.44 du paragraphe 8.4.3.



Faisons la différence entre la quatrième équation de 8.46 et la deuxième équation de 8.46. On obtient après réorganisation des termes :

$$2 \cdot \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \left( \frac{\mathbf{e}^{n+1} - 2 \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} + \mathbf{e}^n}{\Delta t} \right) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{h}^{n+1/4}) = 0$$

A l'aide de la troisième équation de 8.46 on remplace  $\mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{h}^{n+1/4}$  en fonction de  $\mathbf{e}^{n+1/2}$ . On obtient :

$$\frac{\mathbf{e}^{n+1} + 2 \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} + \mathbf{e}^n}{4} = \left( \mathbf{I}_d - \frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{16} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_h^{-1} \cdot {}^t \mathbf{b} \right) \cdot \mathbf{e}^{n+1/2}$$

A l'aide de la deuxième équation de 8.46 on peut aussi écrire :

$$\mathbf{e}^{n+1/2} = \mathbf{e}^n + \frac{\Delta t}{2 \cdot \epsilon_o} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot {}^t \mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2 \cdot \epsilon_o} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4}$$

En remplaçant cette dernière équation dans la précédente on obtient :

$$\frac{\mathbf{e}^{n+1} + 2 \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} + \mathbf{e}^n}{4} = \frac{\Delta t}{2 \cdot \epsilon_o} \cdot (\mathbf{a} \cdot {}^t \mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} + \mathbf{t}^{n+1/2}) \quad (8.50)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{m}_e^{-1} - \frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{16} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_h^{-1} \cdot {}^t \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \\ \mathbf{t}^{n+1/2} = \mathbf{a} \cdot \left( \frac{2 \cdot \epsilon_o}{\Delta t} \cdot \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{e}^n + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} \right) \end{cases} \quad (8.51)$$

Maintenant à partir de la deuxième équation de 8.45 on peut écrire :

$$\frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} = -\frac{\Delta t}{2 \cdot \epsilon_o} \cdot (\mathbf{M}_E^{-1} \cdot {}^t \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} - \mathbf{T}^{n+1/2}) \quad (8.52)$$

avec :

$$\mathbf{T}^{n+1/2} = \mathbf{M}_E^{-1} \cdot \left( \frac{2 \cdot \epsilon_o}{\Delta t} \cdot \mathbf{M}_E \cdot \mathbf{E}^n + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} \right) \quad (8.53)$$

Pour finir nous remplaçons 8.50 et 8.52 dans 8.49. On obtient alors :

$$\{ \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot {}^t \mathbf{C} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot {}^t \mathbf{c} \} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{n+1/2} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{t}^{n+1/2} \quad (8.54)$$

Cette équation est très importante car elle montre qu'il est possible d'obtenir le courant et donc toutes les composantes du champ électromagnétique, dès que les calculs sont effectués à l'étape  $n + 1/4$  dans le petit maillage et à l'étape  $n + 1/2$  dans le grand maillage.

### 8.5.3 Condition de raccord discrète et conservation de l'énergie

La discrétisation que nous avons choisie pour la condition de raccord 8.43 n'est pas des plus intuitive ! En effet, on aurait pu prendre directement  $e^{n+1/2}$  comme approximation de  $e(t)$  à la date  $t = (n + 1/2) \cdot \Delta t$ . Au lieu de cela nous avons posé (voir 8.47 et 8.48) :

$$e \{t = (n + 1/2) \cdot \Delta t\} \sim \frac{e^{n+1/4} + e^{n+3/4}}{2} = \frac{e^n + 2 \cdot e^{n+1/2} + e^{n+1}}{4}$$

En fait cette façon de faire permet de respecter la conservation de l'énergie électromagnétique. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

Reprenons les équations variationnelles obtenues au paragraphe 8.4.1. La première équation de 8.27 était :

$$\epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{E}_d, \vec{\Omega}_d \rangle_{V_d} - B(\vec{\Omega}_d, \vec{H}_d) + C(\vec{J}_d, \vec{\Omega}_d) = 0$$

Ecrivons cette relation à la date  $t = (n + 1/2) \cdot \Delta t$ . Il vient :

$$\epsilon_o \cdot \langle \frac{\vec{E}_d^{n+1} - \vec{E}_d^n}{\Delta t}, \vec{\Omega}_d \rangle_{V_d} - B(\vec{\Omega}_d, \vec{H}_d^{n+1/2}) + C(\vec{J}_d^{n+1/2}, \vec{\Omega}_d) = 0$$

Posons :  $\vec{\Omega}_d = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n)$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon_o \cdot \langle \frac{\vec{E}_d^{n+1} - \vec{E}_d^n}{\Delta t}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \rangle_{V_d} - \\ B \left\{ \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n), \vec{H}_d^{n+1/2} \right\} + C \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.55)$$

La deuxième équation de 8.27 donne à la date  $t = n \cdot \Delta t$  :

$$\mu_o \cdot \langle \frac{\vec{H}_d^{n+1/2} - \vec{H}_d^{n-1/2}}{\Delta t}, \vec{\phi}_d \rangle_{W_d} = -B(\vec{E}_d^n, \vec{\phi}_d)$$

et à la date  $t = (n + 1) \cdot \Delta t$  :

$$\mu_o \cdot \langle \frac{\vec{H}_d^{n+3/2} - \vec{H}_d^{n+1/2}}{\Delta t}, \vec{\phi}_d \rangle_{W_d} = -B(\vec{E}_d^{n+1}, \vec{\phi}_d)$$

En faisant la demi-somme des deux relations précédentes et en posant  $\vec{\phi}_d = \vec{H}_d^{n+1/2}$  on peut remplacer le deuxième terme de 8.55. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_o}{2 \cdot \Delta t} \cdot \langle \vec{E}_d^{n+1}, \vec{E}_d^{n+1} \rangle_{V_d} - \frac{\epsilon_o}{2 \cdot \Delta t} \cdot \langle \vec{E}_d^n, \vec{E}_d^n \rangle_{V_d} + \\ \frac{\mu_o}{2 \cdot \Delta t} \cdot \langle \vec{H}_d^{n+3/2}, \vec{H}_d^{n+1/2} \rangle_{W_d} - \frac{\mu_o}{2 \cdot \Delta t} \cdot \langle \vec{H}_d^{n+1/2}, \vec{H}_d^{n-1/2} \rangle_{W_d} = \\ -C \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \right\} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Cette dernière équation fait apparaître la variation de l'énergie électromagnétique discrète  $E_{em}^n$  du système. En effet :

$$E_{em}^n = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_o \cdot \langle \vec{E}_d^n, \vec{E}_d^n \rangle + \frac{1}{2} \cdot \mu_o \cdot \langle \vec{H}_d^{n+1/2}, \vec{H}_d^{n-1/2} \rangle \quad (8.57)$$

si bien que 8.56 s'écrit :

$$\frac{E_{em}^{n+1} - E_{em}^n}{\Delta t} = -C \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \right\} \quad (8.58)$$

Nous faisons le même type de calculs dans le petit maillage. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_{em}^{n+1/2} - e_{em}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = c \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{e}_d^{n+1/2} + \vec{e}_d^n) \right\} \\ \frac{e_{em}^{n+1} - e_{em}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} = c \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{e}_d^{n+1} + \vec{e}_d^{n+1/2}) \right\} \end{array} \right. \quad (8.59)$$

Or la conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit :

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{e_{em}^{n+1/2} - e_{em}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{e_{em}^{n+1} - e_{em}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} \right) + \frac{E_{em}^{n+1} - E_{em}^n}{\Delta t} = 0 \quad (8.60)$$

Si bien que nous obtenons :

$$\begin{aligned} & c \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{4} \cdot (\vec{e}_d^n + 2 \cdot \vec{e}_d^{n+1/2} + \vec{e}_d^{n+1}) \right\} - \\ & C \left\{ \vec{J}_d^{n+1/2}, \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

Finalement si on compare cette dernière équation avec 8.29 :

$$C(\vec{J}_d, \vec{E}_d) = c(\vec{J}_d, \vec{e}_d)$$

on obtient bien les approximations qui suivent à la date  $t = \{n + 1/2\} \cdot \Delta t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_d \{t = (n + 1/2) \cdot \Delta t\} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_d^{n+1} + \vec{E}_d^n) \\ \vec{e}_d \{t = (n + 1/2) \cdot \Delta t\} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{e}_d^n + 2 \cdot \vec{e}_d^{n+1/2} + \vec{e}_d^{n+1}) \end{array} \right.$$

Nous venons de démontrer que la façon de discrétiser la condition de raccord 8.43 est associée à la conservation de l'énergie électromagnétique du système.

## 8.6 Choix des espaces d'approximation

Dans le paragraphe 8.3.1 nous avons expliqué brièvement la technique de discrétisation spatiale. C'est à dire que les champs sont remplacés par leurs équivalents discrets, qui eux-mêmes sont décomposés sur un certain nombre d'éléments finis. Nous n'avons pas alors précisé la méthode de construction de ces derniers. C'est ce que nous allons faire maintenant. Nous verrons petit à petit que les éléments finis choisis pour  $(\vec{E}_d, \vec{e}_d)$ ,  $(\vec{H}_d, \vec{h}_d)$  et  $\vec{J}_d$  sont ceux qui conduisent au schéma de Yee dans chacun des deux domaines<sup>7</sup>.

### 8.6.1 Choix des éléments finis pour $\vec{E}_d$

Dans cette partie nous allons donc présenter la façon dont sont construits les éléments finis associés aux champs électriques.

Reprenons le développement de  $\vec{E}_d(M, t)$  dont nous avons parlé dans le paragraphe 8.4.2. On avait :

$$\vec{E}_d(M, t) = \sum_{\sigma=x,y,z} \sum_i \sum_j \sum_k E_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \vec{\Gamma}_{i,j,k}^\sigma(M)$$

avec :

$$\vec{\Gamma}_{i,j,k}^\sigma(M) = \Gamma_{i,j,k}^\sigma(M) \cdot \vec{i}_\sigma$$

Précisons maintenant ce que sont les  $\Gamma_{i,j,k}^\sigma(M)$ . Avant cela nous introduisons les deux fonctions  $A_L$  et  $B_L$  définies de la façon suivante :

$$A_L(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta s} \cdot \{s - (L-1) \cdot \Delta s\} & \text{si : } s \in [(L-1)\Delta s, L\Delta s] \\ \frac{1}{\Delta s} \cdot \{-s + (L+1) \cdot \Delta s\} & \text{si : } s \in [L\Delta s, (L+1)\Delta s] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.62)$$

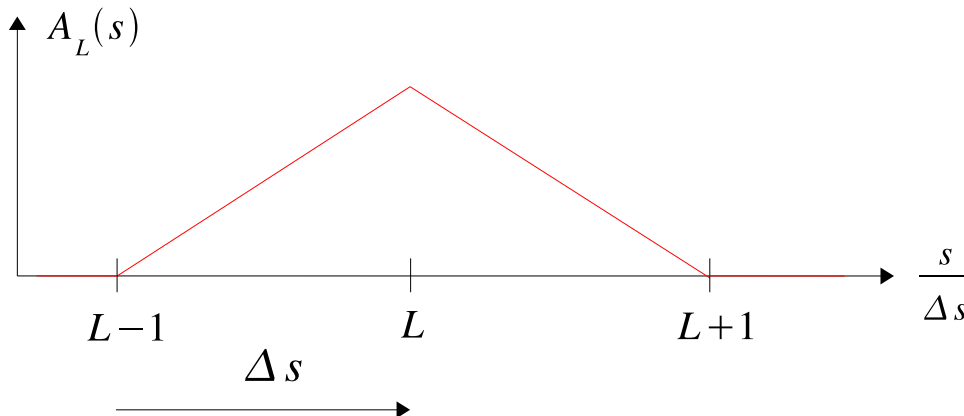


FIG. 8.5 – Représentation graphique de la fonction  $A_L$

et :

<sup>7</sup>Le choix des éléments finis est indépendant des facteurs de raffinements  $r_s$  et  $r_t$ . Rappelons que ces deux derniers sont égaux à deux.

$$B_L(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } : s \in [L\Delta s, (L+1)\Delta s] \\ 0 & \text{si } : s \notin [L\Delta s, (L+1)\Delta s] \end{cases} \quad (8.63)$$

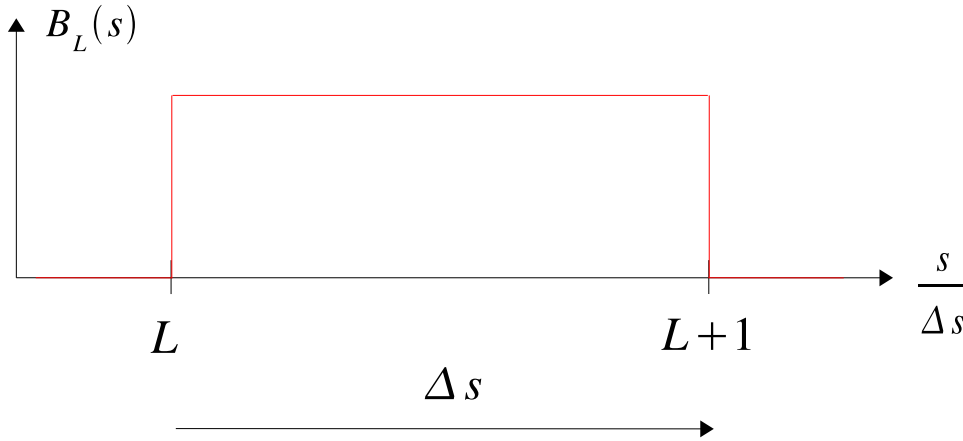


FIG. 8.6 – Représentation graphique de la fonction  $B_L$ .

Bien entendu  $\Delta s$  représente le pas spatial sur l'axe  $(Os)$  dans le grand maillage.

Les fonctions  $A_L$  et  $B_L$  étant données, nous définissons les éléments finis  $\Gamma_{i,j,k}^\sigma(M)$  par :

$$\begin{cases} \Gamma_{i,j,k}^x(x, y, z) = B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z) \\ \Gamma_{i,j,k}^y(x, y, z) = A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \\ \Gamma_{i,j,k}^z(x, y, z) = A_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \end{cases} \quad (8.64)$$

Afin de bien visualiser les choses nous avons représenté les variations de la fonction  $\Gamma_{i,j,k}^x$  dans un plan de coupe du type  $x = cst$ .

Si  $x \in [i\Delta x, (i+1)\Delta x]$ , alors  $B_i(x) = 1$  si bien que les variations par rapport à  $y$  et à  $z$  de l'élément fini  $\Gamma_{i,j,k}^x$  sont données par les fonctions  $A_j$  et  $A_k$  :

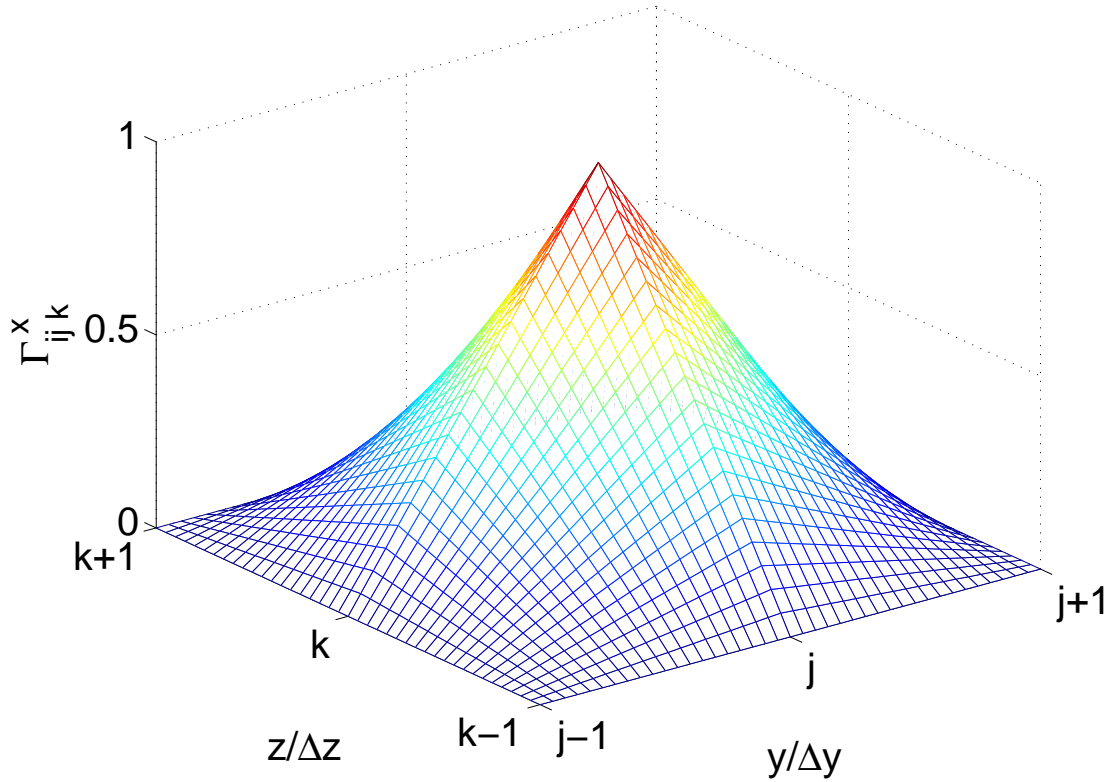


FIG. 8.7 – Variations de  $\Gamma_{i,j,k}^x$  par rapport aux variables  $y$  et  $z$ .

Si  $x \notin [i\Delta x, (i+1)\Delta x]$ , alors  $B_i(x) = 0$  si bien que  $\Gamma_{i,j,k}^x$  reste nulle quelque soit  $y$  et  $z$ .  
Remarquons que le segment d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = j\Delta y \\ z = k\Delta z \\ x \in [i\Delta x, (i+1)\Delta x] \end{array} \right.$$

est axe de symétrie de  $\Gamma_{i,j,k}^x$ .

Pour finir il faut noter que les éléments finis du grand maillage peuvent être considérés comme nuls dans le petit maillage. Ceci tient au fait que les  $\Gamma_{i,j,k}^\sigma$  ne sont pas définis dans le petit maillage.

Compte tenu de 8.64 on peut écrire pour  $\vec{E}_d(M, t)$  la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k \left\{ E_{i,j,k}^x(t) \cdot B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z) \cdot \vec{i} + \right. \\ E_{i,j,k}^y(t) \cdot A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot \vec{j} + \\ \left. E_{i,j,k}^z(t) \cdot A_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

Dans le petit maillage on fait la même chose, c'est à dire que l'on écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{p,q,r}^x(x, y, z) = b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z) \\ \gamma_{p,q,r}^y(x, y, z) = a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \\ \gamma_{p,q,r}^z(x, y, z) = a_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \end{array} \right. \quad (8.65)$$

avec :

$$a_l(s) = \begin{cases} \frac{1}{\delta s} \cdot \{s - (l-1) \cdot \delta s\} & \text{si : } s \in [(l-1)\delta s, l\delta s] \\ \frac{1}{\delta s} \cdot \{-s + (l+1) \cdot \delta s\} & \text{si : } s \in [l\delta s, (l+1)\delta s] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.66)$$

et :

$$b_l(s) = \begin{cases} 1 & \text{si : } s \in [l\delta s, (l+1)\delta s] \\ 0 & \text{si : } s \notin [l\delta s, (l+1)\delta s] \end{cases} \quad (8.67)$$

où  $\delta s$  représente le pas spatial sur l'axe ( $Os$ ) dans le petit maillage.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{e}_d(M, t) = \sum_p \sum_q \sum_r \left\{ e_{p,q,r}^x(t) \cdot b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z) \cdot \vec{i} + \right. \\ e_{p,q,r}^y(t) \cdot a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \cdot \vec{j} + \\ \left. e_{p,q,r}^z(t) \cdot a_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \cdot \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

## 8.6.2 Choix des éléments finis pour $\vec{H}_d$

Nous adoptons ici des définitions similaires à celles du paragraphe précédent. Le développement de  $\vec{H}_d(M, t)$  s'écrit :

$$\vec{H}_d(M, t) = \sum_{\sigma=x,y,z} \sum_i \sum_j \sum_k H_{i,j,k}^\sigma(t) \cdot \overrightarrow{\Delta}_{i,j,k}^\sigma(M)$$

avec :

$$\overrightarrow{\Delta}_{i,j,k}^\sigma(M) = \Delta_{i,j,k}^\sigma(M) \cdot \vec{i}_\sigma$$

Nous construisons les éléments finis  $\Delta_{i,j,k}^\sigma$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Delta_{i,j,k}^x(x, y, z) = A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot B_k(z) \\ \Delta_{i,j,k}^y(x, y, z) = B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \\ \Delta_{i,j,k}^z(x, y, z) = B_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \end{cases} \quad (8.68)$$

Les fonctions  $A_L$  et  $B_L$  sont les mêmes que celles que nous avons définies dans le paragraphe précédent.

On a représenté les variations de  $\Delta_{i,j,k}^x$  dans un plan de coupe du type  $x = cst$  :

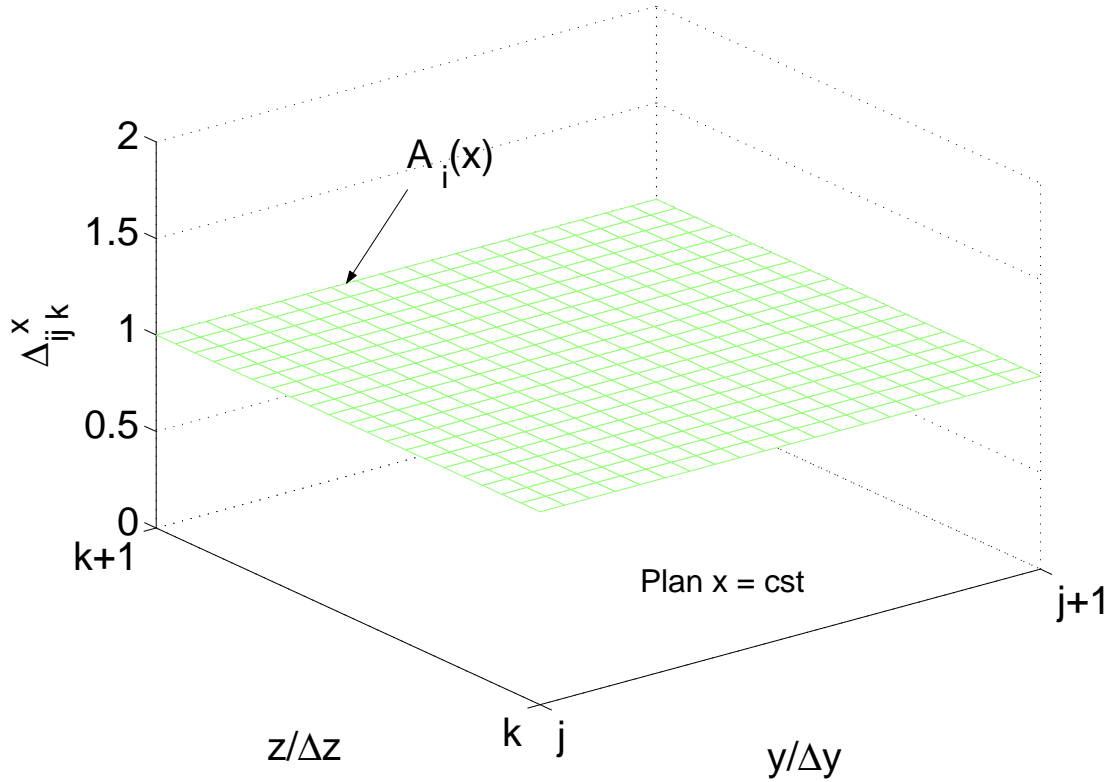


FIG. 8.8 – Variations de  $\Delta_{i,j,k}^x$  dans le plan  $x = cst$ ,  $x \in [(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x]$ .

Nous remarquons cette fois-ci que le secteur plan d'équation :

$$\begin{cases} x = i\Delta x \\ y \in [j\Delta y, (j+1)\Delta y] \\ z \in [k\Delta z, (k+1)\Delta z] \end{cases}$$

est plan de symétrie pour  $\Delta_{i,j,k}^x$ .

Là aussi les éléments finis  $\Delta_{i,j,k}^\sigma$  ne sont définis que dans le grand maillage, c'est à dire qu'ils peuvent être considérés comme nuls dans le petit maillage.

En remplaçant 8.68 dans le développement de  $\vec{H}_d(M, t)$  on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \vec{H}_d(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k \left\{ H_{i,j,k}^x(t) \cdot A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot B_k(z) \cdot \vec{i} + \right. \\ \left. H_{i,j,k}^y(t) \cdot B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot \vec{j} + \right. \\ \left. H_{i,j,k}^z(t) \cdot B_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

Dans le petit maillage on fait la même chose, c'est à dire que l'on pose :

$$\begin{cases} \delta_{p,q,r}^x(x, y, z) = a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot b_r(z) \\ \delta_{p,q,r}^y(x, y, z) = b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \\ \delta_{p,q,r}^z(x, y, z) = b_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \end{cases} \quad (8.69)$$



Là aussi les fonctions  $a_l$  et  $b_l$  sont les mêmes que celles que nous avons définies dans le paragraphe précédent.

Ainsi on a pour  $\vec{h}_d(M, t)$  :

$$\begin{aligned} \vec{h}_d(M, t) = & \sum_p \sum_q \sum_r \left\{ h_{p,q,r}^x(t) \cdot a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot b_r(z) \cdot \vec{i} + \right. \\ & h_{p,q,r}^y(t) \cdot b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \cdot \vec{j} + \\ & \left. h_{p,q,r}^z(t) \cdot b_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \cdot \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

### 8.6.3 Choix des éléments finis pour $\vec{J}_d$

Pour le courant la construction des éléments finis est un peu plus délicate car  $\vec{J}$  est défini sur la surface fermée  $\Sigma$  qui est constituée par la réunion de six faces. Ainsi nous devons construire, face par face, les éléments finis associés à  $\vec{J}$ . Afin de ne pas répéter six fois la même chose nous travaillerons sur une surface générique qui pourra s'identifier à n'importe laquelle des six faces. Ainsi on désigne par  $(uOv)$  notre surface de référence, sachant que  $(uOv)$  pourra être  $(xOy)$  ou  $(zOx)$  ou encore  $(yOz)$ . Ces notations étant posées, on développe  $\vec{J}_d(M, t)$  comme nous l'avons fait dans le paragraphe 8.4.2 pour  $\vec{E}_d(M, t)$ . Cela donne :

$$\vec{J}_d(M, t) = \sum_{\epsilon} J_{\epsilon}(t) \cdot \vec{\Pi}_{\epsilon}(M)$$

Rappelons que dans une telle décomposition  $\epsilon$  désigne le numéro du triplet d'indices  $(\sigma, l, m)$ . Avec les notations que nous venons d'introduire  $\sigma$  s'identifie à  $u$  ou à  $v$  et les indices  $l$  et  $m$  sont les indices de discrétisation des axes  $(Ou)$  et  $(Ov)$ . Finalement on peut écrire pour la face considérée :

$$\vec{J}_d(M, t) = \sum_{\sigma=u,v} \sum_l \sum_m J_{l,m}^{\sigma}(t) \cdot \vec{\Pi}_{l,m}^{\sigma}(M)$$

avec :

$$\vec{\Pi}_{l,m}^{\sigma}(M) = \Pi_{l,m}^{\sigma}(M) \cdot \vec{i}_{\sigma}$$

Nous définissons les éléments finis  $\Pi_{l,m}^{\sigma}(M)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Pi_{l,m}^u(u, v) = A_l(u) \cdot B_m(v) \\ \Pi_{l,m}^v(u, v) = B_l(u) \cdot A_m(v) \end{cases} \quad (8.70)$$

Les fonctions  $A_L$  et  $B_L$  sont les mêmes que celles que nous avons définies lors de la construction des éléments finis associés à  $\vec{E}_d(M, t)$  et à  $\vec{H}_d(M, t)$ .

Par définition, le vecteur  $\vec{\Pi}_{l,m}^u$  sera rattaché au centre de l'arête d'équation :

$$\begin{cases} u = l\Delta u \\ v \in [m\Delta v, (m+1)\Delta v] \end{cases}$$

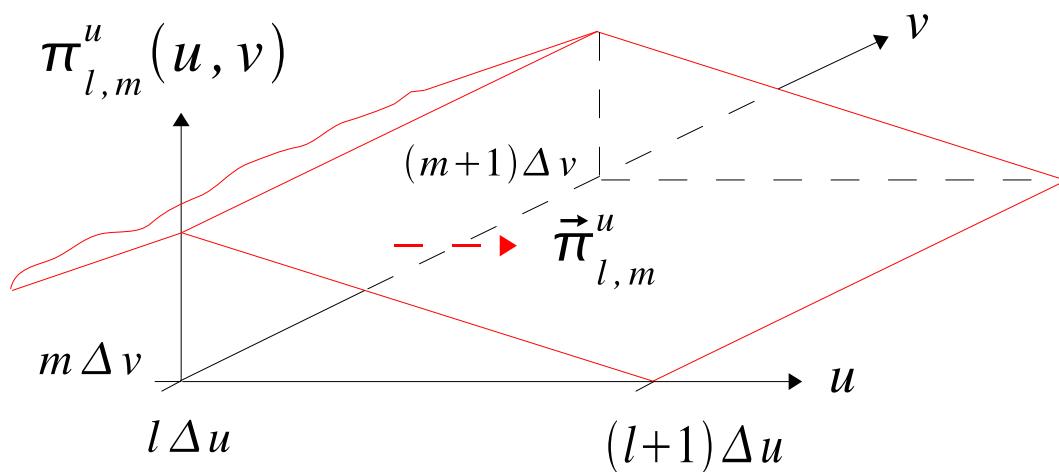


FIG. 8.9 – Variations de  $\Pi_{l,m}^u$  par rapport aux variables  $u$  et  $v$ .

et le vecteur  $\overrightarrow{\Pi_{l,m}^v}$  sera rattaché au centre de l'arête d'équation :

$$\begin{cases} u \in [l\Delta u, (l+1)\Delta u] \\ v = m\Delta v \end{cases}$$

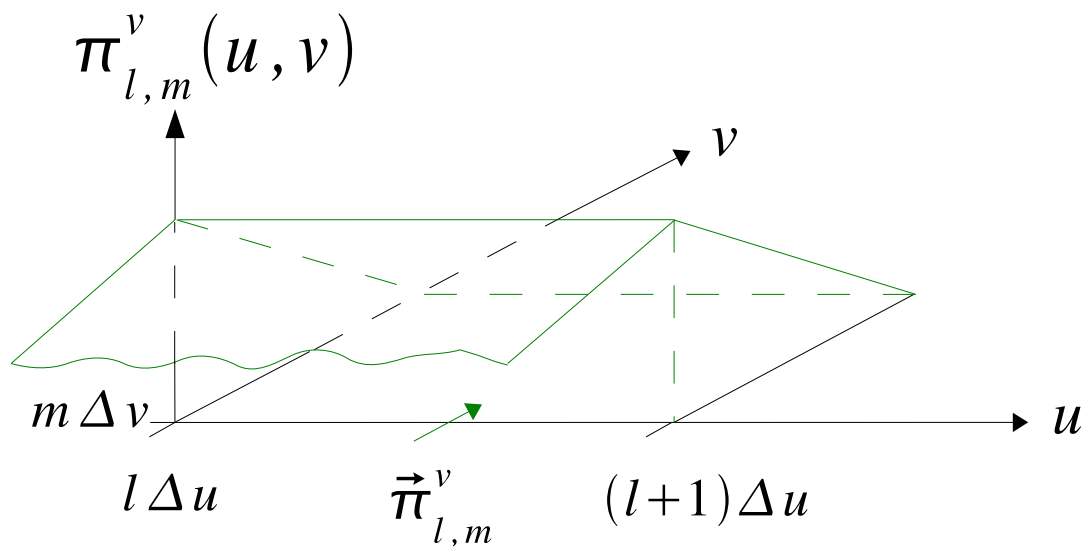


FIG. 8.10 – Variations de  $\Pi_{l,m}^v$  par rapport aux variables  $u$  et  $v$ .

Sur les arêtes qui délimitent la face étudiée on a des « demi-éléments finis »  $\overline{\Pi}_{l,m}^\sigma$ . Les autres moitiés de ces « demi-éléments finis »  $\overline{\Pi}_{l,m}^\sigma$  sont « reprises » sur les faces adjacentes aux quatre arêtes qui délimitent notre face.

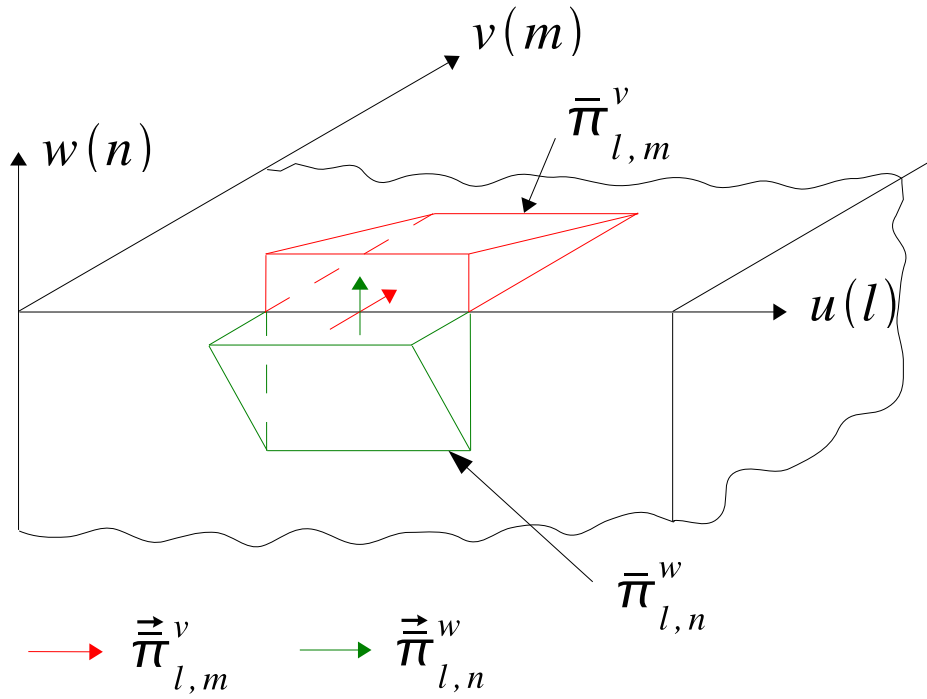


FIG. 8.11 – Association de deux « demi éléments finis » sur une arête.

Maintenant nous devons nous assurer de la conservation du courant sur l'interface  $\Sigma$  :

$$\text{div} \left( \vec{J}_d(M, t) \right) = \vec{0} \quad (8.71)$$

Pour que cette conservation soit bien vérifiée il y a une petite condition à respecter. Cette condition est la suivante :

LES COEFFICIENTS DE DÉCOMPOSITION RELATIFS A DEUX « DEMI-ÉLÉMENTS FINIS » ASSOCIÉS SUR UNE ARÊTE, DOIVENT-ÊTRE LES MÊMES.

Sur l'exemple qui est illustré dans la figure 8.11 cela donnerait :

$$\bar{J}_{l,n}^w = \bar{J}_{l,m}^v \quad (8.72)$$

La démonstration complète de ce résultat est dans l'annexe D.

## 8.7 Calcul des matrices

Avant de se lancer dans le calcul des différentes matrices, résumons les éléments que nous avons en notre possession :

- En premier lieu, il y a les équations de Maxwell discrétisées en espace et en temps dans chacun des deux domaines.

Dans le grand maillage on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} + {}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = 0 \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} + {}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = 0 \end{array} \right.$$

Et dans le petit maillage on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \cdot \frac{\mathbf{h}^{n+1/4} - \mathbf{h}^{n-1/4}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}^n = \mathbf{0} \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{\mathbf{e}^{n+1/2} - \mathbf{e}^n}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{0} \\ \mu_o \cdot \mathbf{m}_h \cdot \frac{\mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{h}^{n+1/4}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}^{n+1/2} = \mathbf{0} \\ \epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

- Ensuite nous avons l'expression discrétisée du courant que l'on a obtenue à partir de la condition de raccord 8.43. Rappelons que la méthode de discrétisation temporelle de 8.43 est équivalente à la conservation de l'énergie électromagnétique et donc équivalente à la stabilité du schéma. Il en résulte que l'expression suivante du courant discret « comporte en elle » la stabilité du schéma :

$$\{ \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_E^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{c} \} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{n+1/2} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{t}^{n+1/2}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \mathbf{m}_e^{-1} - \frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{16} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_h^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_e^{-1} \\ \mathbf{t}^{n+1/2} = \mathbf{a} \cdot \left( \frac{2 \cdot \epsilon_o}{\Delta t} \cdot \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{e}^n + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} \right) \\ \mathbf{T}^{n+1/2} = \mathbf{M}_E^{-1} \cdot \left( \frac{2 \cdot \epsilon_o}{\Delta t} \cdot \mathbf{M}_E \cdot \mathbf{E}^n + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} \right) \end{array} \right.$$

- Enfin nous avons les définitions des éléments finis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{i,j,k}^x(x, y, z) = B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z) \\ \Gamma_{i,j,k}^y(x, y, z) = A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \\ \Gamma_{i,j,k}^z(x, y, z) = A_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \\ \Delta_{i,j,k}^x(x, y, z) = A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot B_k(z) \\ \Delta_{i,j,k}^y(x, y, z) = B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \\ \Delta_{i,j,k}^z(x, y, z) = B_i(x) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \\ \gamma_{p,q,r}^x(x, y, z) = b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z) \\ \gamma_{p,q,r}^y(x, y, z) = a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \\ \gamma_{p,q,r}^z(x, y, z) = a_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{p,q,r}^x(x, y, z) = a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot b_r(z) \\ \delta_{p,q,r}^y(x, y, z) = b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot b_r(z) \\ \delta_{p,q,r}^z(x, y, z) = b_p(x) \cdot b_q(y) \cdot a_r(z) \end{array} \right.$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{l,m}^u(u, v) = A_l(u) \cdot B_m(v) \\ \Pi_{l,m}^v(u, v) = B_l(u) \cdot A_m(v) \end{array} \right.$$

Maintenant nous devons calculer les matrices  $\mathbf{m}_e$ ,  $\mathbf{m}_h$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  relatives au petit maillage, ainsi que les matrices  $\mathbf{M}_E$ ,  $\mathbf{M}_H$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  relatives au grand maillage. D'autre part il faudra aussi déterminer  $\mathbf{m}_e^{-1}$ ,  $\mathbf{m}_h^{-1}$ ,  ${}^t\mathbf{b}$  et  ${}^t\mathbf{c}$  puis  $\mathbf{M}_E^{-1}$ ,  $\mathbf{M}_H^{-1}$ ,  ${}^t\mathbf{B}$  et  ${}^t\mathbf{C}$ . Ce travail est long à effectuer car les matrices sont nombreuses et leurs composantes<sup>8</sup> n'ont pas les mêmes valeurs selon les emplacements des cellules que l'on considère ! Ceci va nous obliger à examiner beaucoup de cas particuliers.

*Cependant se sont les composantes de toutes ces matrices qui déterminent les divers coefficients qui vont intervenir dans le schéma final. C'est pour cette raison que nous avons tenu à présenter ce travail dans sa totalité et tout en restant précis. Toutefois pour ne pas trop allourdir l'exposé, nous avons reporté les calculs des toutes ces matrices dans l'annexe E<sup>9</sup>.*

## 8.8 Déduction du schéma spatio-temporel 3D

Nous avons enfin tous les éléments en main pour donner le schéma de raccordement spatio-temporel. Les développements présentés dans les annexes E à L ont été long et parfois difficiles, cependant ce travail a été nécessaire pour bien expliquer toutes les difficultés liées à la méthode variationnelle. Nous allons maintenant pouvoir récolter les fruits de ces efforts.

Pour obtenir les équations du schéma, il suffit de développer les relations matricielles 8.45 et 8.46 que nous avons obtenues dans le paragraphe 8.5.1. Lors de ce développement, il faudra bien sûr remplacer les composantes des matrices par les valeurs que nous avons obtenues dans l'annexe E. Signalons avant de commencer que le schéma est donné en fonction des composantes du courant  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$ , ce dernier étant solution du système matriciel 8.54.

### 8.8.1 Emplacements des composantes

Pour bien comprendre le schéma de raccordement, il est nécessaire d'apporter des précisions quant aux emplacements des composantes du champ électrique et du champ magnétique<sup>10</sup>. Pour cela nous allons nous baser sur les symétries des éléments finis.

#### 8.8.1.1 Composantes du champ électrique

D'après les équations 8.10 du paragraphe 8.3.1, on peut écrire :

$$E^x(M, t) = \sum_i \sum_j \sum_k E_{i,j,k}^x(t) \cdot \Gamma_{i,j,k}^x(M)$$

<sup>8</sup>Dans le petit maillage (resp. grand maillage) nous appelons « *composantes* » d'une matrice  $a$  (resp.  $A$ ) les quantités de la forme  $a_{pqr, p'q'r'}$  (resp.  $A_{ijk, i'j'k'}$ ) et nous appelons « *éléments de matrice* » de  $a$  (resp.  $A$ ) les quantités  $a_{\beta, \beta'}$  (resp.  $A_{\alpha, \alpha'}$ ).

<sup>9</sup>Notons que ce dernier fait également référence aux annexes F à L.

<sup>10</sup>Pour les composantes du courant les emplacements ont été définis dans le paragraphe 8.6.3.

Dans ce développement la composante  $E_{i,j,k}^x$  s'interprète comme le coefficient de décomposition de  $E^x$  sur l'élément fini  $\Gamma_{i,j,k}^x$ . Or ce dernier admet comme axe de symétrie le segment d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = j\Delta y \\ z = k\Delta z \\ x \in [i\Delta x, (i+1)\Delta x] \end{array} \right.$$

Il est alors naturel de rattacher la composante  $E_{i,j,k}^x$  à ce segment. De plus la valeur de cette composante ne change pas le long du segment si bien que  $E_{i,j,k}^x$  peut-être précisément rattachée au centre de celui-ci. *Finally les composantes du champ électrique sont placées au milieu des arêtes des cellules.*

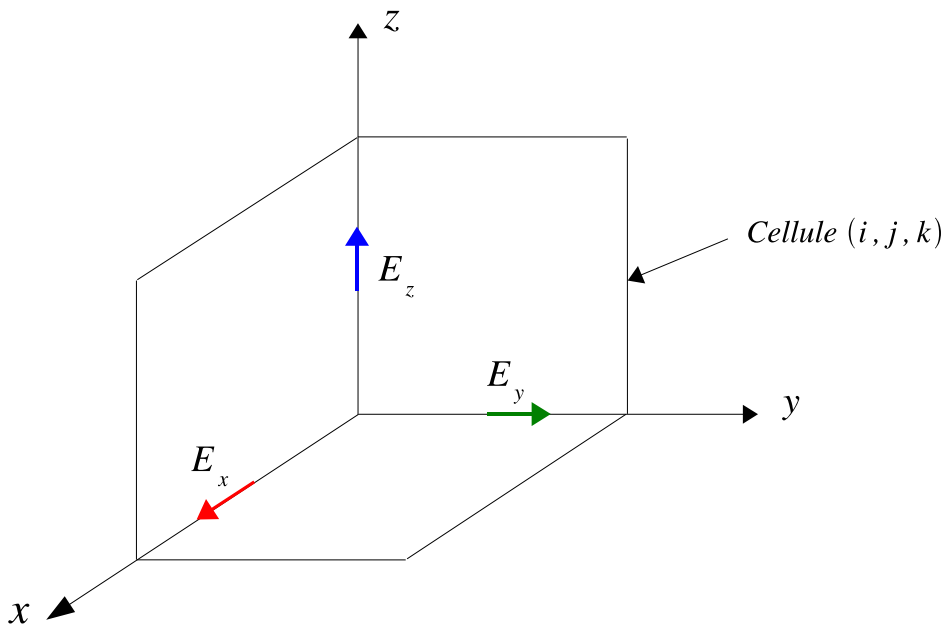


FIG. 8.12 – Emplacements des composantes du champ électrique.

### 8.8.1.2 Composantes du champ magnétique

Nous faisons le même raisonnement pour les composantes du champ magnétique. L'élément fini  $\Delta_{i,j,k}^x$  admet comme plan de symétrie le secteur plan d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = i\Delta x \\ y \in [j\Delta y, (j+1)\Delta y] \\ z \in [k\Delta z, (k+1)\Delta z] \end{array} \right.$$

Ainsi la composante  $H_{i,j,k}^x$  peut-être rattachée à ce secteur plan. De plus la valeur de cette composante reste inchangée dans tout le secteur plan si bien que  $H_{i,j,k}^x$  peut-être précisément rattachée au centre de ce secteur plan. *Finally les composantes du champ magnétique sont placées au centre des faces des cellules.*

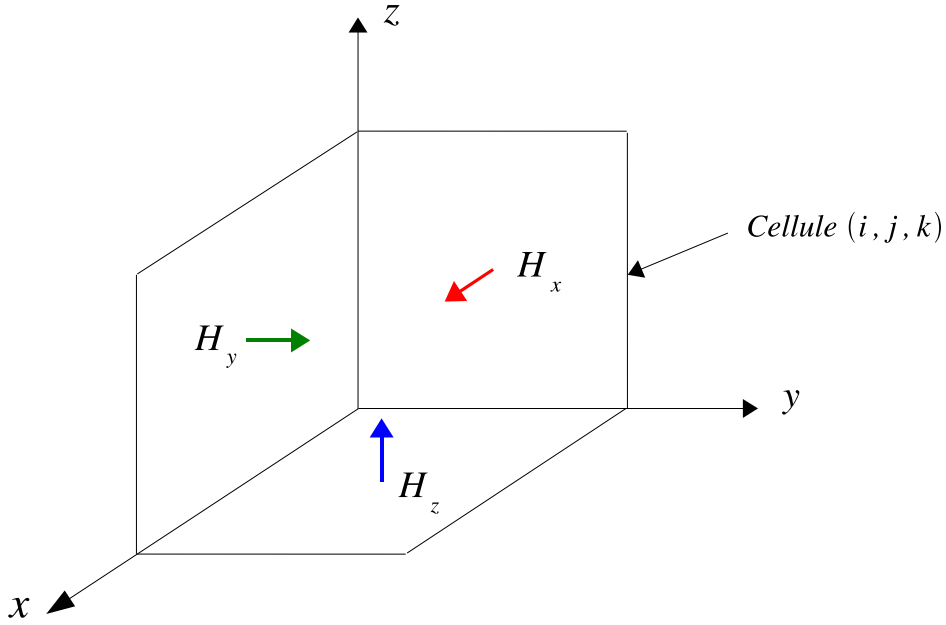


FIG. 8.13 – Emplacements des composantes du champ magnétique.

### 8.8.1.3 Conclusion

Les emplacements des composantes du champ électromagnétique sont ceux du schéma de Yee. Ceci est bien sûr intimement lié aux choix qui ont été fait pour les éléments finis.

## 8.8.2 Schéma pour les composantes appartenant au grand maillage

Dans ce paragraphe, ainsi que dans les trois suivants, nous développons les équations du schéma uniquement pour les composantes  $(E_x, e_x)$  et  $(H_x, h_x)$ . Pour toutes les autres composantes les résultats seront identiques à des permutations circulaires d'indices près.

Pour les composantes du champ électromagnétique situées dans les cellules appartenant à  $D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ , le schéma de raccordement est donné par le système matriciel 8.45 dans lequel on a supprimé le courant  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$  :

$$\mu_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} + {}^t \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = 0 \quad (8.73)$$

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} = 0 \quad (8.74)$$

Nous devons maintenant développer ces équations.

### 8.8.2.1 Développement du premier terme de l'équation 8.73

$$\begin{aligned} \mu_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} &= \frac{\mu_o}{\Delta t} \cdot \sum_{\alpha'} (\mathbf{M}_{\mathbf{H}})_{\alpha, \alpha'} \cdot \left[ H_{\alpha'}^{n+\frac{1}{2}} - H_{\alpha'}^{n-\frac{1}{2}} \right] = \\ & \frac{\mu_o}{\Delta t} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} (\mathbf{M}_{\mathbf{H}})_{ijk, i'j'k'}^{\sigma, \sigma'} \cdot \left[ H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} - H_{i'j'k'}^{\sigma', n-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit en introduction, nous développons les équations du schéma uniquement pour les composantes de type "x". Ainsi il vient :

$$\mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{\Delta t} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} (\mathbf{M}_H)_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} \cdot \left[ H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} - H_{i'j'k'}^{\sigma', n-\frac{1}{2}} \right]$$

D'après E.9 on a :

$$(\mathbf{M}_H)_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \Delta v \cdot N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\} \cdot \delta_{x, \sigma'}$$

Rappelons que dans cette formule  $N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\}$  désigne le nombre de cellules qui en même temps,  $\in D_{ext}$  et sont adjacentes à la face de la cellule  $(i, j, k)$  qui est orthogonale à la direction "x". Pour une cellule  $\in D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ ,  $N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\} = 2$  si bien que :

$$(\mathbf{M}_H)_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} = \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \Delta v$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = \\ \frac{\mu_0}{\Delta t} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \left[ H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} - H_{i'j'k'}^{\sigma', n-\frac{1}{2}} \right] \cdot \Delta v \end{aligned}$$

c'est à dire après « action » des symboles de Kroneker :

$$\mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{\Delta t} \cdot \left[ H_{ijk}^{x, n+\frac{1}{2}} - H_{ijk}^{x, n-\frac{1}{2}} \right] \cdot \Delta v$$

soit en changeant un petit peu les notations :

$$\mu_o \cdot \mathbf{M}_H \cdot \frac{\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{\Delta t} \cdot \left[ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \right] \cdot \Delta v \quad (8.75)$$

### 8.8.2.2 Développement du deuxième terme de l'équation 8.73

$${}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = \sum_{\alpha'} ({}^t\mathbf{B})_{\alpha, \alpha'} \cdot E_{\alpha'}^n$$

c'est à dire avec  $\sigma = x$  :

$${}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} ({}^t\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} \cdot E_{i'j'k'}^{\sigma', n}$$



Or d'après E.24 on a :

$$({}^t\mathbf{B})_{ijk,i',j',k'}^{x,\sigma'} = \delta_{z,\sigma'} \cdot (1 - \theta_i) \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \cdot (\delta_{j+1,j'} - \delta_{j,j'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z -$$

$$\delta_{y,\sigma'} \cdot (1 - \theta_i) \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Dans cette formule, la quantité  $\theta_i$  est nulle tant que l'indice  $i$  se rapporte à une cellule  $\in D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ , ce qui est bien le cas dans la situation que nous considérons ici.

Ainsi on obtient :

$${}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{z,\sigma'} \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \cdot (\delta_{j+1,j'} - \delta_{j,j'}) \cdot E_{i'j'k'}^{\sigma',n} \cdot \Delta x \cdot \Delta z -$$

$$\sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{y,\sigma'} \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) \cdot E_{i'j'k'}^{\sigma',n} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

soit après « action » des symboles de kroneker :

$${}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = (E_{i,j+1,k}^{z,n} - E_{i,j,k}^{z,n}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - (E_{i,j,k+1}^{y,n} - E_{i,j,k}^{y,n}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

c'est à dire en changeant un petit peu les notations :

$${}^t\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}^n = (E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)) \cdot \Delta x \cdot \Delta z -$$

$$(E_y^n(i, j, k+1) - E_y^n(i, j, k)) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (8.76)$$

Maintenant on remplace 8.75 et 8.76 dans l'équation 8.73, puis on divise le tout par  $\Delta v$ . Il vient alors :

$$\mu_0 \cdot \frac{(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k))}{\Delta t} + \frac{(E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k))}{\Delta y} -$$

$$- \frac{(E_y^n(i, j, k+1) - E_y^n(i, j, k))}{\Delta z} = 0 \quad (8.77)$$

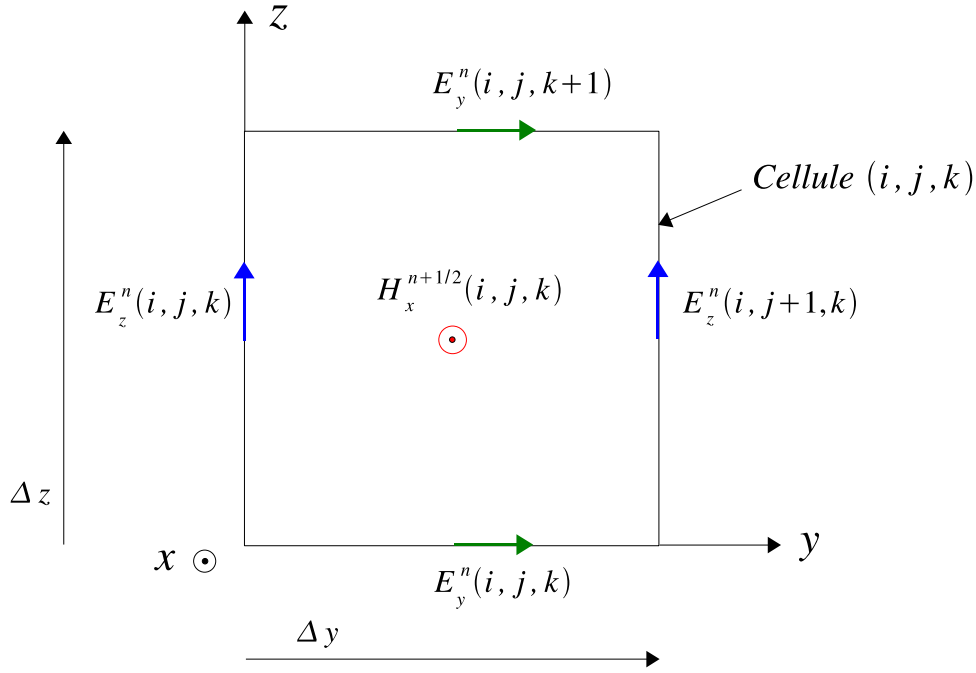


FIG. 8.14 – Calcul de  $H_x^{n+\frac{1}{2}}$  dans le grand maillage.

### 8.8.2.3 développement du premier terme de l'équation 8.74

on a :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{\epsilon_o}{\Delta t} \cdot \sum_{\alpha'} (\mathbf{M}_{\mathbf{E}})_{\alpha, \alpha'} \cdot [E_{\alpha'}^{n+1} - E_{\alpha'}^n]$$

Puisque  $\sigma = x$ , cela donne :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{\epsilon_o}{\Delta t} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} (\mathbf{M}_{\mathbf{E}})_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} \cdot [E_{i'j'k'}^{\sigma', n+1} - E_{i'j'k'}^{\sigma', n}]$$

D'après E.8 on a :

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{E}})_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \Delta v \cdot N_c \{A_x(i, j, k)\} \cdot \delta_{x, \sigma'}$$

Rappelons que dans cette formule, la quantité  $N_c \{A_x(i, j, k)\}$  représente le nombre de cellules qui en même temps,  $\in D_{ext}$  et sont adjacentes à l'arête "x" de la cellule  $(i, j, k)$ . Pour une cellule  $\in D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ ,  $N_c \{A_x(i, j, k)\} = 4$  si bien que :

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{E}})_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} = \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \Delta v$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \epsilon_o \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \\ \frac{\epsilon_o}{\Delta t} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot [E_{i'j'k'}^{\sigma', n+1} - E_{i'j'k'}^{\sigma', n}] \cdot \Delta v \end{aligned}$$

soit après « action » des symboles de Kroneker :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{\epsilon_o}{\Delta t} \cdot [E_{ijk}^{x, n+1} - E_{ijk}^{x, n}] \cdot \Delta v$$

c'est à dire avec nos petits changements de notations :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{\epsilon_o}{\Delta t} \cdot [E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k)] \cdot \Delta v \quad (8.78)$$

#### 8.8.2.4 développement du deuxieme terme de l'équation 8.74

on a :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} = \sum_{\alpha'} \mathbf{B}_{\alpha, \alpha'} \cdot H_{\alpha'}^{n+\frac{1}{2}}$$

puisque  $\sigma = x$ , on obtient :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} = \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \mathbf{B}_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} \cdot H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}}$$

D'après E.23 on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x, \sigma'} &= \delta_{z, \sigma'} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{k, k'} \{ (1 - \theta_k \cdot g_j) \cdot \delta_{j, j'} - (1 - \theta_k \cdot d_j) \cdot \delta_{j-1, j'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ &\quad \delta_{y, \sigma'} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \{ (1 - \theta_j \cdot g_k) \cdot \delta_{k, k'} - (1 - \theta_j \cdot d_k) \cdot \delta_{k-1, k'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Les coefficients  $\theta_j$  et  $\theta_k$  sont nuls puisque nous sommes dans une cellule qui  $\in D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ .

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} &= \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{z, \sigma'} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot (\delta_{j, j'} - \delta_{j-1, j'}) \cdot H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ &\quad \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \delta_{y, \sigma'} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot (\delta_{k, k'} - \delta_{k-1, k'}) \cdot H_{i'j'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

c'est à dire après « action » des symboles de Kroneker :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} &= \left( H_{i, j, k}^{z, n+\frac{1}{2}} - H_{i, j-1, k}^{z, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ &\quad \left( H_{i, j, k}^{y, n+\frac{1}{2}} - H_{i, j, k-1}^{y, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

soit plus simplement :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} = & \left( H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ & \left( H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (8.79)$$

Maintenant on remplace 8.78 et 8.79 dans l'équation 8.74, puis on divise le tout par  $\Delta v$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{(E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k))}{\Delta t} - \frac{\left( H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right)}{\Delta y} + \\ \frac{\left( H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right)}{\Delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.80)$$

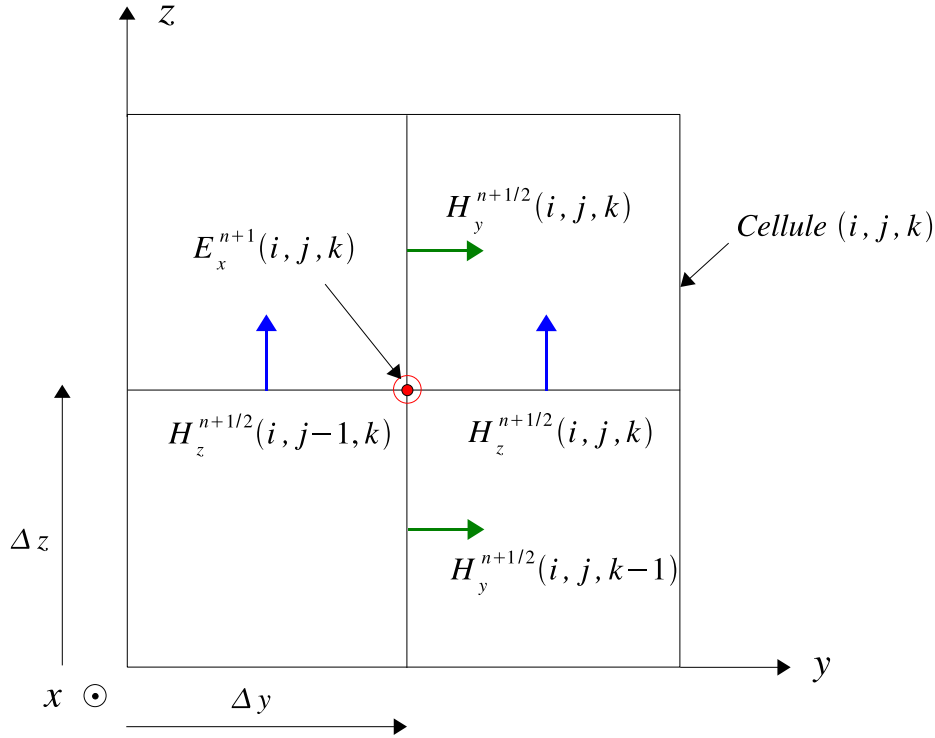


FIG. 8.15 – Calcul de  $E_x^{n+1}$  dans le grand maillage.

Les relations 8.77 et 8.80 sont celles du schéma de Yee. On ne s'étonnera pas trop de ce résultat puisque nous avons déjà vu que le choix des éléments finis, conduit à des emplacements de composantes qui sont ceux du schéma de Yee.

### 8.8.3 Schéma pour les composantes appartenant au petit maillage

Pour les composantes du champ électromagnétique situées dans les cellules appartenant à  $D \setminus \{\Sigma\}$ , les calculs sont exactement les mêmes, aussi nous donnons directement les résultats :

pour la composante  $h_x$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \cdot \frac{\left( h_x^{n+\frac{1}{4}}(p,q,r) - h_x^{n-\frac{1}{4}}(p,q,r) \right)}{\delta t} + \frac{\left( e_z^n(p,q+1,r) - e_z^n(p,q,r) \right)}{\delta y} - \\ \frac{\left( e_y^n(p,q,r+1) - e_y^n(p,q,r) \right)}{\delta z} = 0 \\ \\ \mu_0 \cdot \frac{\left( h_x^{n+\frac{3}{4}}(p,q,r) - h_x^{n+\frac{1}{4}}(p,q,r) \right)}{\delta t} + \frac{\left( e_z^{n+\frac{1}{2}}(p,q+1,r) - e_z^{n+\frac{1}{2}}(p,q,r) \right)}{\delta y} - \\ \frac{\left( e_y^{n+\frac{1}{2}}(p,q,r+1) - e_y^{n+\frac{1}{2}}(p,q,r) \right)}{\delta z} = 0 \end{array} \right. \quad (8.81)$$

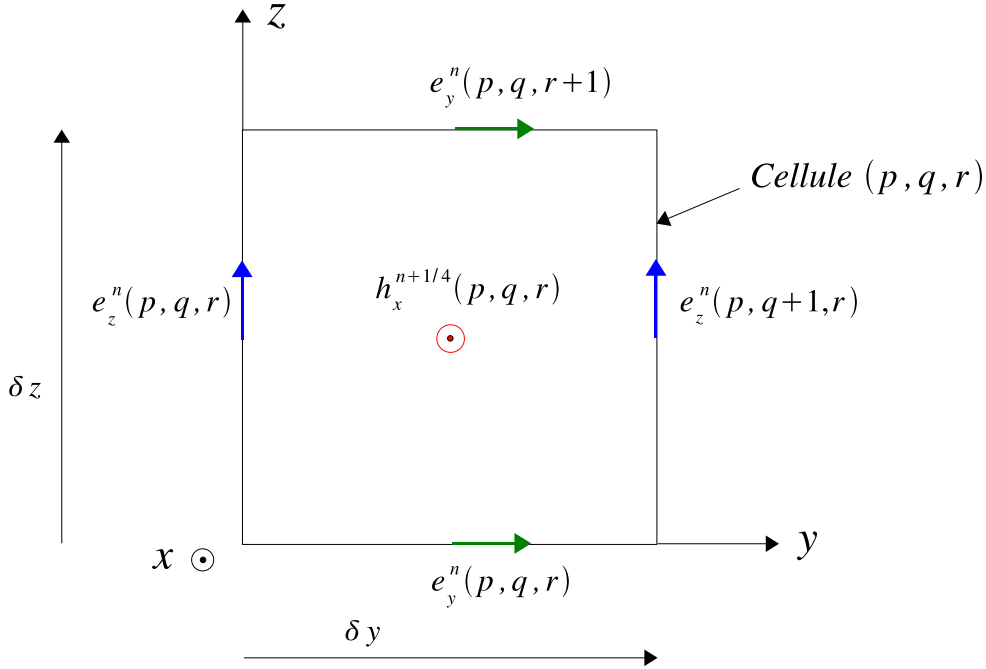


FIG. 8.16 – Calcul de  $h_x^{n+\frac{1}{4}}$  dans le petit maillage.

pour la composante  $e_x$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p,q,r) - e_x^n(p,q,r) \right)}{\delta t} - \frac{\left( h_z^{n+\frac{1}{4}}(p,q,r) - h_z^{n+\frac{1}{4}}(p,q-1,r) \right)}{\delta y} + \\ \frac{\left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p,q,r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p,q,r-1) \right)}{\delta z} = 0 \\ \\ \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+1}(p,q,r) - e_x^{n+\frac{1}{2}}(p,q,r) \right)}{\delta t} - \frac{\left( h_z^{n+\frac{3}{4}}(p,q,r) - h_z^{n+\frac{3}{4}}(p,q-1,r) \right)}{\delta y} + \\ \frac{\left( h_y^{n+\frac{3}{4}}(p,q,r) - h_y^{n+\frac{3}{4}}(p,q,r-1) \right)}{\delta z} = 0 \end{array} \right. \quad (8.82)$$

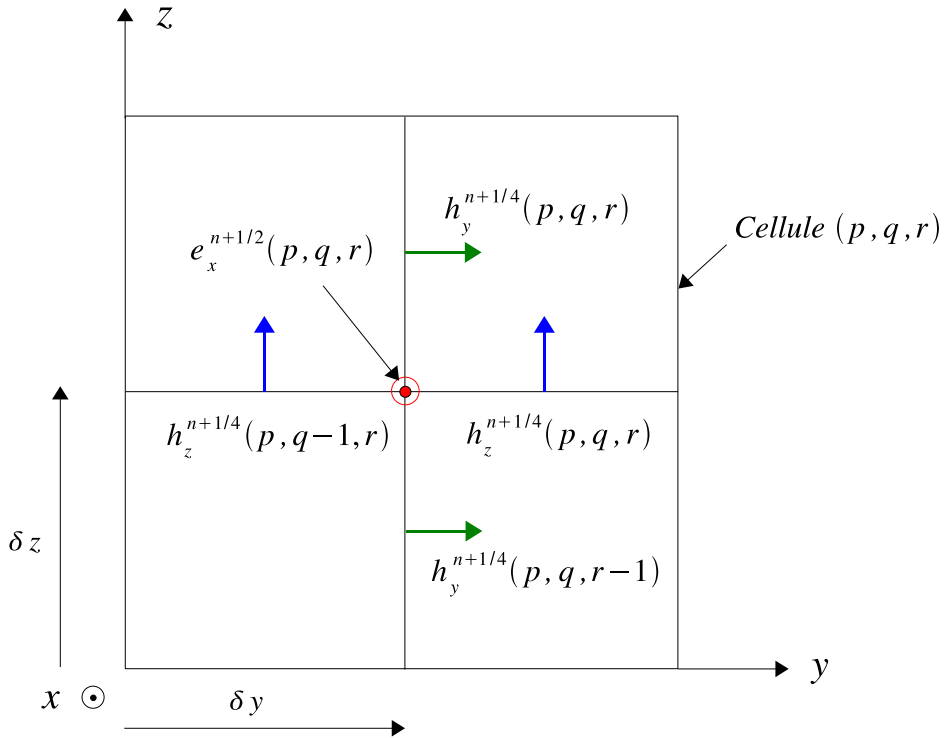


FIG. 8.17 – Calcul de  $e_x^{n+\frac{1}{2}}$  dans le petit maillage.

#### 8.8.4 Schéma pour les composantes du grand maillage, situées près de l'interface ou sur l'interface

Les composantes du champ électromagnétique qui sont situées dans le voisinage de l'interface  $\Sigma$ , peuvent être classées en quatre catégories.

La *première catégorie* concerne les composantes  $H_x$  qui sont parallèles à l'interface. Ces composantes appartiennent aux cellules qui sont accolées aux faces  $Y^-$ ,  $Y^+$ ,  $Z^-$  et  $Z^+$  du côté extérieur :

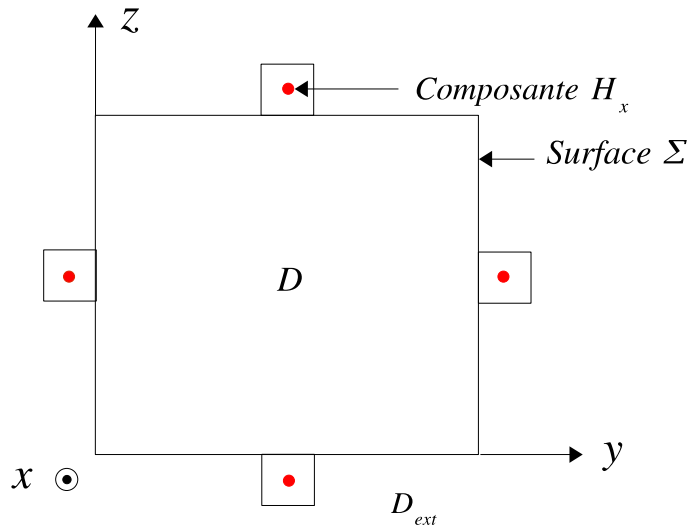


FIG. 8.18 – Cellules portant des composantes  $H_x$  parallèles à l'interface  $\Sigma$ .

La *deuxième catégorie* concerne les composantes  $H_x$  qui sont orthogonales à l'interface. Ces

composantes appartiennent aux cellules qui sont accolées à la face  $X^-$  du côté intérieur ou aux cellules qui sont accolées à la face  $X^+$  du côté extérieur :

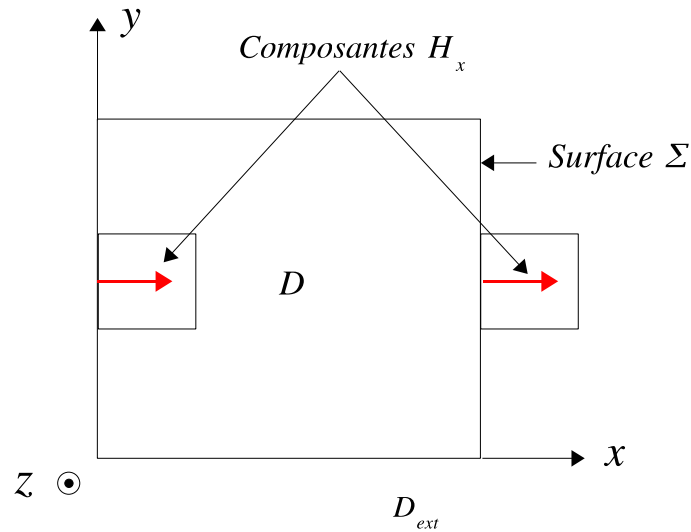


FIG. 8.19 – Cellules portant des composantes  $H_x$  orthogonales à l’interface  $\Sigma$ .

La troisième catégorie concerne les composantes  $E_x$  qui sont orthogonales à l’interface. Ces composantes appartiennent aux cellules qui sont accolées aux faces  $X^-$  et  $X^+$  du côté extérieur :

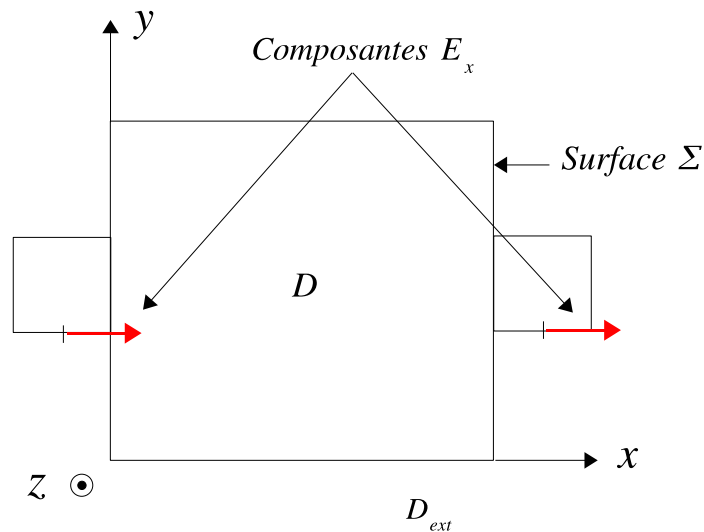


FIG. 8.20 – Cellules portant des composantes  $E_x$  orthogonales à l’interface  $\Sigma$ .

La quatrième catégorie concerne les composantes  $E_x$  qui sont dans l’interface. Ces composantes appartiennent aux cellules qui sont accolées aux faces  $Y^-$  et  $Z^-$  du côté intérieur, et aux cellules qui sont accolées aux faces  $Y^+$  et  $Z^+$  du côté extérieur :

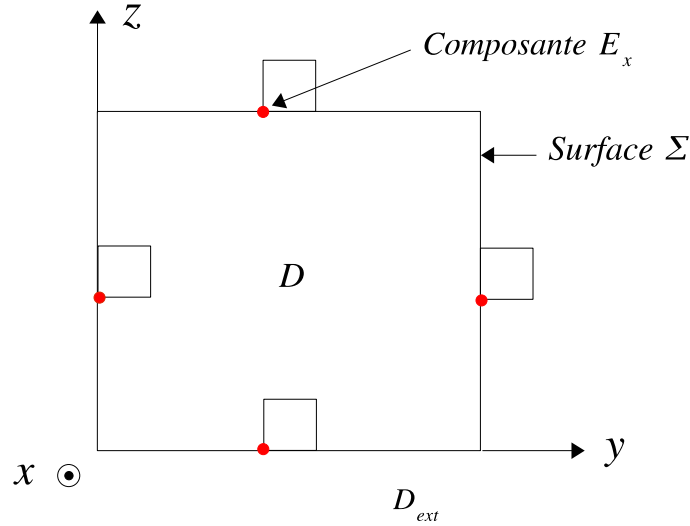


FIG. 8.21 – Cellules portant des composantes  $E_x$  dans l'interface  $\Sigma$ .

Cette petite classification va nous être utile par la suite car nous devons distinguer le cas où les composantes calculées sont parallèles à l'interface, du cas où elles sont orthogonales à cette même interface.

#### 8.8.4.1 Schéma pour les composantes $H_x$ qui sont parallèles à l'interface $\Sigma$

Ici on peut reprendre point par point les calculs qui ont été fait dans les parties 1 et 2 du paragraphe 8.8.2. Les seules choses qui peuvent éventuellement changer sont les valeurs des quantités  $N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\}$  et  $\theta_i$  qui interviennent dans les matrices  $\mathbf{M}_H$  et  ${}^t\mathbf{B}$ . On peut vérifier facilement que pour toutes les cellules qui sont accolées aux faces  $Y^-$ ,  $Y^+$ ,  $Z^-$  et  $Z^+$  du côté extérieur, ces dernières valeurs ne changent pas. C'est à dire que  $N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\}$  reste égale à 2 et que  $\theta_i$  reste nulle. Dans ce cas l'équation 8.77 est encore valable pour toutes les composantes  $H_x$  qui sont parallèles à l'interface  $\Sigma$ .

#### 8.8.4.2 Schéma pour les composantes $H_x$ qui sont orthogonales à l'interface $\Sigma$

On se réfère toujours aux calculs qui ont été fait dans les parties 1 et 2 du paragraphe 8.8.2 mais cette fois-ci nous devons considérer les cellules qui sont accolées à la face  $X^+$  du côté extérieur et celles qui sont accolées à la face  $X^-$  du côté intérieur. Pour de telles cellules  $N_c \{F_{\perp x}(i, j, k)\} = 1$  et  $\theta_i = \frac{1}{2}$ , ce qui revient à introduire un facteur  $\frac{1}{2}$  dans chacun des deux termes de l'équation 8.77. Ce facteur  $\frac{1}{2}$  se simplifie si bien que 8.77 reste vraie pour toutes les composantes  $H_x$  qui sont orthogonales à l'interface  $\Sigma$ .

#### 8.8.4.3 Schéma pour les composantes $E_x$ qui sont orthogonales à l'interface $\Sigma$

Dans cette section nous reprenons les calculs qui ont été fait dans les parties 3 et 4 du paragraphe 8.8.2 et nous considérons les cellules qui sont accolées aux faces  $X^-$  et  $X^+$  du côté extérieur. Pour de telles cellules on peut vérifier que la quantité  $N_c \{A_x(i, j, k)\}$  est égale à 4 et que les termes  $\theta_j$  et  $\theta_k$  qui interviennent dans la matrice  $\mathbf{B}$  sont nuls. De plus les éléments de matrice de  ${}^t\mathbf{C}$  sont également nuls. En fait tout se passe comme si l'interface n'intervenait pas. Dans ce cas l'équation 8.80 que nous avons obtenu reste valable pour les composantes qui sont orthogonales à l'interface  $\Sigma$ .



### 8.8.4.4 Schéma pour les composantes $E_x$ qui sont dans l'interface

Ce cas est plus compliqué que les précédents car cette fois-ci la composante  $E_x$  appartient à l'interface, si bien que les éléments de matrice de  ${}^t\mathbf{C}$  ne sont pas nuls<sup>11</sup>. D'autre part les quantités  $N_c \{A_x(i, j, k)\}$ ,  $\theta_L$ ,  $g_L$  et  $d_L$  prennent des valeurs différentes selon que l'on se situe au milieu de la face ou dans le voisinage d'une arête. Nous allons travailler avec la face  $Y^-$ , sachant que les résultats obtenus pourront se transposer facilement aux autres faces.

a) Cas où  $E_x$  est dans la face  $Y^-$  hors arêtes :

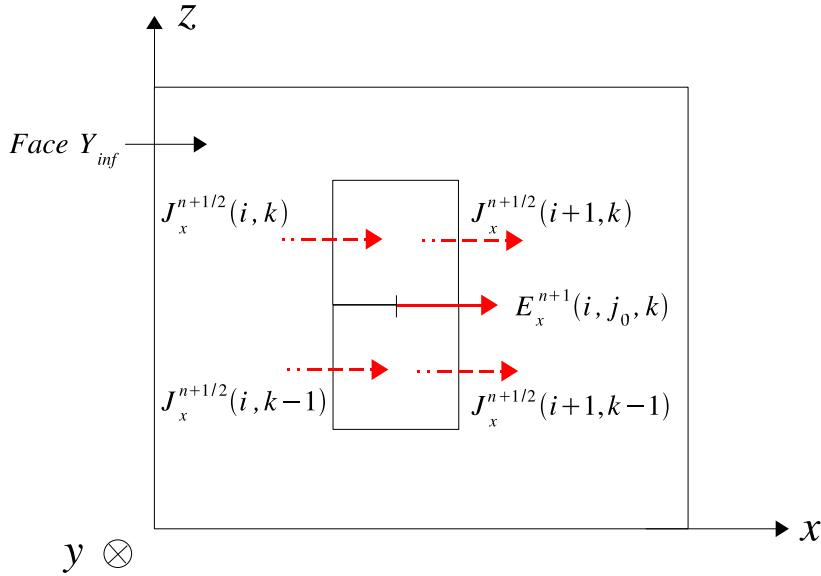


FIG. 8.22 – Composante  $E_x$  dans  $Y^-$  (hors arêtes) avec les quatres courants environnant.

Dans cette situation  $N_c \{A_x(i, j, k)\} = 2$ ,  $\theta_{j_0} = \frac{1}{2}$ ,  $g_{j_0} = 1$ ,  $d_{j_0} = 0$ ,  $\theta_k = 1$ ,  $g_k = 1$  et  $d_k = 1$ . Nous pouvons alors écrire les deux premiers termes de la deuxième équation de 8.45. Techniquement on fait comme dans les parties 3 et 4 du paragraphe 8.8.2 on trouve :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{M}_E \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{\epsilon_o}{2 \cdot \Delta t} \cdot [E_x^{n+1}(i, j_0, k) - E_x^n(i, j_0, k)] \cdot \Delta v \quad (8.83)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} &= -H_z^{n+1/2}(i, j_0 - 1, k) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ &\frac{1}{2} \cdot \left( H_y^{n+1/2}(i, j_0, k) - H_y^{n+1/2}(i, j_0, k - 1) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (8.84)$$

Il faut maintenant calculer  ${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$ . On a :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+1/2}$$

avec :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon}^n$$

<sup>11</sup>En fait on doit développer la deuxième équation de 8.45.

Or la face  $Y^-$  correspond à  $n = 3$ , ainsi :

$$({}^tC)_{\alpha,\epsilon} = ({}^tC)_{\alpha,\epsilon}^3$$

Donc :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^3 \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+1/2}$$

c'est à dire que :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} ({}^t\mathbf{C})_{i,j,k,i',k'}^{3,\sigma,\sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma',n+1/2}$$

A partir de la relation E.31 qui donne  $({}^t\mathbf{C})_{i,j,k,i',k'}^{1,\sigma,\sigma'}$ , il est facile d'obtenir  $({}^t\mathbf{C})_{i,j,k,i',k'}^{3,\sigma,\sigma'}$ . On raisonne par analogie ou on effectue une permutation circulaire sur les indices et les variables. Cela donne :

$$\begin{aligned} ({}^tC)_{i,j,k,i',k'}^{3,\sigma,\sigma'} &= \frac{1}{4} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{j,j_0} \cdot \{ \delta_{x,\sigma} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot (g_k \cdot \delta_{k,k'} + d_k \cdot \delta_{k-1,k'}) + \\ &\quad \delta_{z,\sigma} \cdot (g_i \cdot \delta_{i,i'} + d_i \cdot \delta_{i-1,i'}) \cdot (\delta_{k,k'} + \delta_{k+1,k'}) \} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Sur  $Y^-$  on a  $j = j_0$ . De plus on travail pour  $\sigma = x$ , ainsi la relation précédente se simplifie :

$$({}^tC)_{i,j_0,k,i',k'}^{3,x,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot (g_k \cdot \delta_{k,k'} + d_k \cdot \delta_{k-1,k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Vu que nous ne sommes pas dans le voisinage des arêtes, on peut dire que  $g_k$  et  $d_k$  sont tous les deux égaux à 1. Finalement on obtient après développement des termes :

$$({}^tC)_{i,j_0,k,i',k'}^{3,x,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} + \delta_{i+1,i'} \cdot \delta_{k,k'} + \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k-1,k'} + \delta_{i+1,i'} \cdot \delta_{k-1,k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Maintenant on peut exprimer  ${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} + \delta_{i+1,i'} \cdot \delta_{k,k'}) \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma',n+1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \\ &\quad \frac{1}{4} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} \cdot \delta_{k-1,k'} + \delta_{i+1,i'} \cdot \delta_{k-1,k'}) \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma',n+1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned}$$

soit après « action » des symboles de Kronecker :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left( \mathbf{J}_{i,k}^{x,n+1/2} + \mathbf{J}_{i+1,k}^{x,n+1/2} + \mathbf{J}_{i,k-1}^{x,n+1/2} + \mathbf{J}_{i+1,k-1}^{x,n+1/2} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

c'est à dire en changeant un peu les notations :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \\ \frac{1}{4} \left( J_x^{n+1/2}(i, k) + J_x^{n+1/2}(i+1, k) + J_x^{n+1/2}(i, k-1) + J_x^{n+1/2}(i+1, k-1) \right) \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (8.85)$$

Maintenant on reporte 8.83, 8.84 et 8.85 dans la deuxième équation de 8.45. Cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2 \cdot \Delta t} \cdot [E_x^{n+1}(i, j_0, k) - E_x^n(i, j_0, k)] \cdot \Delta v + H_z^{n+1/2}(i, j_0 - 1, k) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \\ \frac{1}{2} \cdot \left( H_y^{n+1/2}(i, j_0, k) - H_y^{n+1/2}(i, j_0, k-1) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \\ \frac{1}{4} \cdot \left( J_x^{n+1/2}(i, k) + J_x^{n+1/2}(i+1, k) + J_x^{n+1/2}(i, k-1) + J_x^{n+1/2}(i+1, k-1) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned}$$

soit après réorganisation des termes :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{(E_x^{n+1}(i, j_0, k) - E_x^n(i, j_0, k))}{\Delta t} + \frac{2 \cdot H_z^{n+1/2}(i, j_0 - 1, k)}{\Delta y} + \\ \frac{\left( H_y^{n+1/2}(i, j_0, k) - H_y^{n+1/2}(i, j_0, k-1) \right)}{\Delta z} + \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( J_x^{n+1/2}(i, k) + J_x^{n+1/2}(i+1, k) + J_x^{n+1/2}(i, k-1) + J_x^{n+1/2}(i+1, k-1) \right)}{\Delta y} = 0 \end{aligned} \quad (8.86)$$

b) Cas ou  $E_x$  est située sur l'arête  $X_1$  :

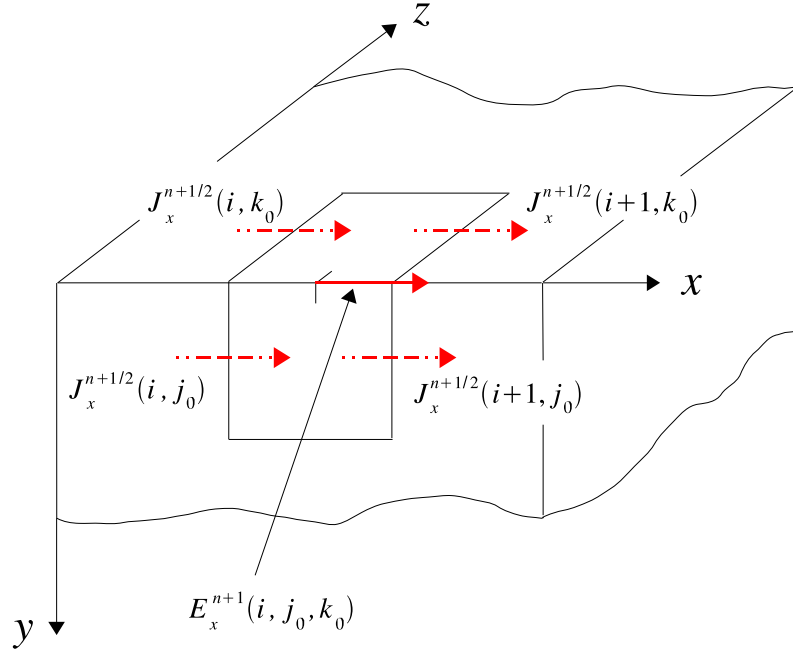


FIG. 8.23 – Composante  $E_x$  située sur l'arête  $X_1$ , avec les quatre courants environnant.

Dans cette situation  $N_c \{A_x(i, j, k)\} = 3$ ,  $\theta_{j_0} = \frac{1}{2}$ ,  $g_{j_0} = 1$ ,  $d_{j_0} = 0$ ,  $\theta_{k_0} = \frac{1}{2}$ ,  $g_{k_0} = 1$  et  $d_{k_0} = 0$ . Nous pouvons de nouveau écrire les deux premiers termes de la deuxième équation de 8.45, on trouve :

$$\epsilon_0 \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \frac{3 \cdot \epsilon_0}{4 \cdot \Delta t} \cdot [E_x^{n+1}(i, j_0, k_0) - E_x^n(i, j_0, k_0)] \cdot \Delta v \quad (8.87)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{n+1/2} = & \left\{ \frac{1}{2} H_z^{n+1/2}(i, j_0, k_0) - H_z^{n+1/2}(i, j_0 - 1, k_0) \right\} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ & \left\{ \frac{1}{2} H_y^{n+1/2}(i, j_0, k_0) - H_y^{n+1/2}(i, j_0, k_0 - 1) \right\} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (8.88)$$

Pour  ${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  on a toujours :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+1/2}$$

avec :

$$({}^tC)_{\alpha, \epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^tC)_{\alpha, \epsilon}^n$$

Mais cette fois-ci la composante  $E_x$  que nous calculons est située sur l'arête  $X_1$  qui est l'intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$ . Nous devons donc considérer les éléments de matrice de  ${}^t\mathbf{C}$  sur ces deux faces. Ainsi la somme précédente devient :

$$({}^tC)_{\alpha, \epsilon} = ({}^tC)_{\alpha, \epsilon}^3 + ({}^tC)_{\alpha, \epsilon}^5$$

Donc :

$${}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} \{ ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon}^3 + ({}^t\mathbf{C})_{\alpha, \epsilon}^5 \} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+1/2}$$

c'est à dire que :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{C} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = & \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} ({}^t\mathbf{C})_{ijk, i'k'}^{3, \sigma, \sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma', n+1/2} + \\ & \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} ({}^t\mathbf{C})_{ijk, i'j'}^{5, \sigma, \sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i'j'}^{\sigma', n+1/2} \end{aligned}$$

Par analogie avec la relation E.31 on peut exprimer facilement  $({}^t\mathbf{C})_{ijk, i'k'}^{3, \sigma, \sigma'}$  et  $({}^t\mathbf{C})_{ijk, i'j'}^{5, \sigma, \sigma'}$ . On trouve :

$$\begin{aligned} ({}^tC)_{ijk, i'k'}^{3, \sigma, \sigma'} = & \frac{1}{4} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{j, j_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_k \cdot \delta_{k, k'} + d_k \cdot \delta_{k-1, k'}) + \\ & \delta_{z, \sigma} \cdot (g_i \cdot \delta_{i, i'} + d_i \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} ({}^tC)_{ijk, i'j'}^{5, \sigma, \sigma'} = & \frac{1}{4} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{k, k_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_j \cdot \delta_{j, j'} + d_j \cdot \delta_{j-1, j'}) + \\ & \delta_{y, \sigma} \cdot (g_i \cdot \delta_{i, i'} + d_i \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (\delta_{j, j'} + \delta_{j+1, j'}) \} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Sur l'arête  $X_1$  on a  $j = j_0$  et  $k = k_0$ . De plus on travail pour  $\sigma = x$ , ainsi les deux relations précédentes se simplifient :

$$({}^tC)_{i, j_0, k_0, i', k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{k_0} \cdot \delta_{k_0, k'} + d_{k_0} \cdot \delta_{k_0-1, k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$({}^t C)_{i,j_0,k_0,i',j'}^{5,x,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot (g_{j_0} \cdot \delta_{j_0,j'} + d_{j_0} \cdot \delta_{j_0-1,j'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Pour les quantités  $g_L$  et  $d_L$  qui interviennent dans le calcul de  ${}^t C$ , on a  $g_{L_0} = 1$  et  $d_{L_0} = 0$ . On obtient alors :

$$({}^t C)_{i,j_0,k_0,i',k'}^{3,x,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$({}^t C)_{i,j_0,k_0,i',j'}^{5,x,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Maintenant on peut exprimer  ${}^t C \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  :

$${}^t C \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \mathbf{J}_{i'j'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

soit après « action » des symboles de Kronecker :

$${}^t C \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left( \mathbf{J}_{i,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}_{i+1,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \mathbf{J}_{i,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}_{i+1,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

c'est à dire en changeant un peu les notations :

$${}^t C \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (8.89)$$

Maintenant on reporte 8.87, 8.88 et 8.89 dans la deuxième équation de 8.45. Cela donne :

$$\frac{3 \cdot \epsilon_0}{4 \cdot \Delta t} \cdot [E_x^{n+1}(i, j_0, k_0) - E_x^n(i, j_0, k_0)] \cdot \Delta v -$$

$$\left\{ \frac{1}{2} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - 1, k_0) \right\} \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$\left\{ \frac{1}{2} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0 - 1) \right\} \cdot \Delta x \cdot \Delta y +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = 0$$

soit après réorganisation des termes :

$$\epsilon_0 \cdot \frac{(E_x^{n+1}(i, j_0, k_0) - E_x^n(i, j_0, k_0))}{\Delta t} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{4}{6} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0) - \frac{4}{3} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - 1, k_0)}{\Delta y} + \\
& \frac{\frac{4}{6} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0) - \frac{4}{3} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0, k_0 - 1)}{\Delta z} + \\
& \frac{1}{3} \cdot \frac{\left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, k_0) \right)}{\Delta y} + \\
& \frac{1}{3} \cdot \frac{\left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j_0) \right)}{\Delta z} = 0
\end{aligned} \tag{8.90}$$

#### 8.8.4.5 Conclusion

Le schéma spatiotemporel obtenu pour la composante  $H_x(i, j, k)$ , est toujours donné par l'équation 8.77 quel que soit son emplacement. Pour la composante  $E_x(i, j, k)$ , le schéma est donné par 8.80 tant qu'elle n'est pas dans l'interface  $\Sigma$ . Lorsque la composante  $E_x$  est dans  $\Sigma$ , il faut utiliser l'équation 8.90.

### 8.8.5 Schéma pour les composantes du petit maillage, situées près de l'interface ou sur l'interface

Pour les composantes du champ électromagnétique du petit maillage qui sont situées dans le voisinage de  $\Sigma$ , les résultats sont similaires. Le calcul de la composante  $h_x$  se fait toujours avec les équations 8.81 quel que soit son emplacement. La composante  $e_x$  se calcule avec les équations 8.82 tant qu'elle n'est pas située sur l'interface  $\Sigma$ . Lorsque la composante  $e_x$  est située sur l'interface  $\Sigma$ , il faut utiliser des équations spécifiques qui font intervenir les courants. Ce sont ces équations que nous allons déterminer. Pour cela il faut développer les deux équations matricielles de 8.46 qui sont relatives au champ électrique :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{e^{n+1/2} - e^n}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = 0 \tag{8.91}$$

et :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{e^{n+1} - e^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+3/4} - \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = 0 \tag{8.92}$$

Comme précédemment nous allons travailler sur la face  $Y^-$ , sachant que les résultats obtenus pourront se transposer facilement aux autres faces.

### 8.8.5.1 Cas où $e_x$ est dans la face $Y^-$ hors voisinage des arêtes

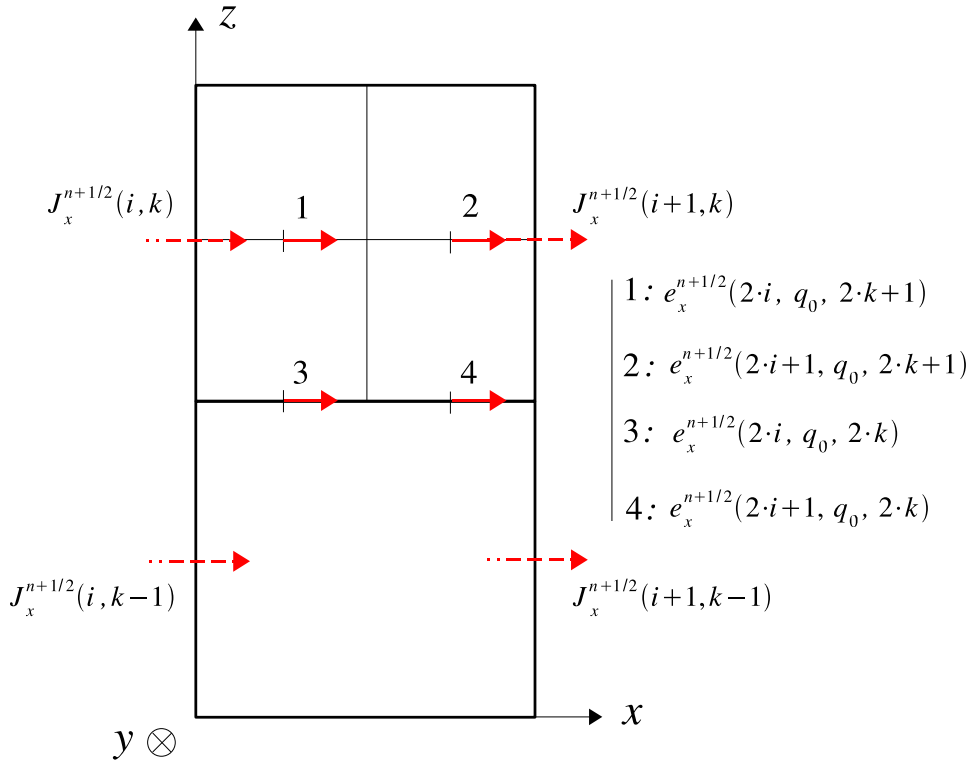


FIG. 8.24 – Composantes  $e_x$  dans  $Y^-$  (hors arêtes) avec les quatre courants environant.

Pour les deux premiers membres des équations 8.91 et 8.92, les calculs sont similaires à ce que nous avons fait dans le grand maillage. Nous allons donner les résultats relatifs à l'équation 8.91, sachant que pour l'autre équation il suffira simplement de changer les indices temporels :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{e^{n+\frac{1}{2}} - e^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\epsilon_o}{2 \cdot \frac{\Delta t}{2}} \cdot \left[ e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r) - e_x^n(p, q_0, r) \right] \cdot \delta v \quad (8.93)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} &= h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) \cdot \delta x \cdot \delta z - \\ \frac{1}{2} \cdot \left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r-1) \right) &\cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned} \quad (8.94)$$

Il faut maintenant calculer  ${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$ . On a :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+\frac{1}{2}}$$

avec :

$$({}^tC)_{\beta, \epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^tC)_{\beta, \epsilon}^n$$

Or la face  $Y^-$  correspond à  $n = 3$ , ainsi :

$$({}^tC)_{\beta, \epsilon} = ({}^tC)_{\epsilon, \epsilon}^3$$

Donc :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{\beta, \epsilon}^3 \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+1/2}$$

c'est à dire que :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\sigma'} \sum_{p'} \sum_{r'} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i',k'}^{\sigma', n+1/2}$$

A partir de des relations E.35 à E.38 qui donnent les composantes  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{1, \sigma, \sigma'}$ , il est facile d'obtenir les quantités  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'}$ . On raisonne par analogie ou on effectue une permutation circulaire sur les indices et les variables. Cela donne :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q,2k,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) + \delta_{z, \sigma} \cdot (g_{2i} \cdot \delta_{i, i'} + d_{2i} \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (3 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q,2k+1,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{z, \sigma} \cdot 2 \cdot \delta_{i, i'} \cdot (\delta_{k, k'} + 3 \cdot \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q,2k,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) + \delta_{z, \sigma} \cdot 2 \cdot \delta_{i, i'} \cdot (3 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q,2k+1,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{z, \sigma} \cdot (g_{2i} \cdot \delta_{i, i'} + d_{2i} \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + 3 \cdot \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

Sur  $Y^-$  on a  $q = q_0$ . De plus on travail pour  $\sigma = x$ , ainsi les relations précédentes se simplifient :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q_0,2k,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q_0,2k+1,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q_0,2k,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q_0,2k+1,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$



Vu que nous ne sommes pas dans le voisinage des arêtes, on peut dire que  $g_l$  et  $d_l$  sont tous les deux égaux à 1. Finalement on obtient après développement des termes :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i, q_0, 2k, i', k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1, q_0, 2k+1, i', k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1, q_0, 2k, i', k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i, q_0, 2k+1, i', k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

Maintenant on peut exprimer  $\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k-1, k'}) \cdot J_{i', k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot J_{i', k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k-1, k'}) \cdot J_{i', k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} \cdot J_{i', k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

soit après « action » des symboles de Kronecker :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot J_{i, k}^{x, n+\frac{1}{2}} + 3 \cdot J_{i, k-1}^{x, n+\frac{1}{2}} + J_{i+1, k}^{x, n+\frac{1}{2}} + J_{i+1, k-1}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 2 \cdot J_{i, k}^{x, n+\frac{1}{2}} + 6 \cdot J_{i+1, k}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( J_{i, k}^{x, n+\frac{1}{2}} + J_{i, k-1}^{x, n+\frac{1}{2}} + 3 \cdot J_{i+1, k}^{x, n+\frac{1}{2}} + 3 \cdot J_{i+1, k-1}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 6 \cdot J_{i,k}^{x, n+\frac{1}{2}} + 2 \cdot J_{i+1,k}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

c'est à dire en changeant un peu les notations :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k-1) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k-1) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 2 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 6 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k-1) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k-1) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left( 6 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 2 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

Maintenant on reporte 8.93, 8.94 et les quatre relations précédentes dans l'équation 8.91. Cela donne :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r) - e_x^n(p, q_0, r) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r)}{\delta y} + \frac{\left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r-1) \right)}{\delta z} \\ - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k-1) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k-1) \right)}{\delta y} = 0 \end{aligned} \quad (8.95)$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r) - e_x^n(p, q_0, r) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r)}{\delta y} + \frac{\left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r-1) \right)}{\delta z} \\ - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( 2 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 6 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) \right)}{\delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.96)$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r) - e_x^n(p, q_0, r) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r)}{\delta y} + \frac{\left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r-1) \right)}{\delta z} \\ - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + j_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k-1) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) + 3 \cdot j_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k-1) \right)}{\delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.97)$$

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r) - e_x^n(p, q_0, r) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r)}{\delta y} + \frac{\left( h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r) - h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r-1) \right)}{\delta z} \\ - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( 6 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + 2 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k) \right)}{\delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.98)$$

### 8.8.5.2 Cas où $e_x$ est située sur l'arête $X_1$

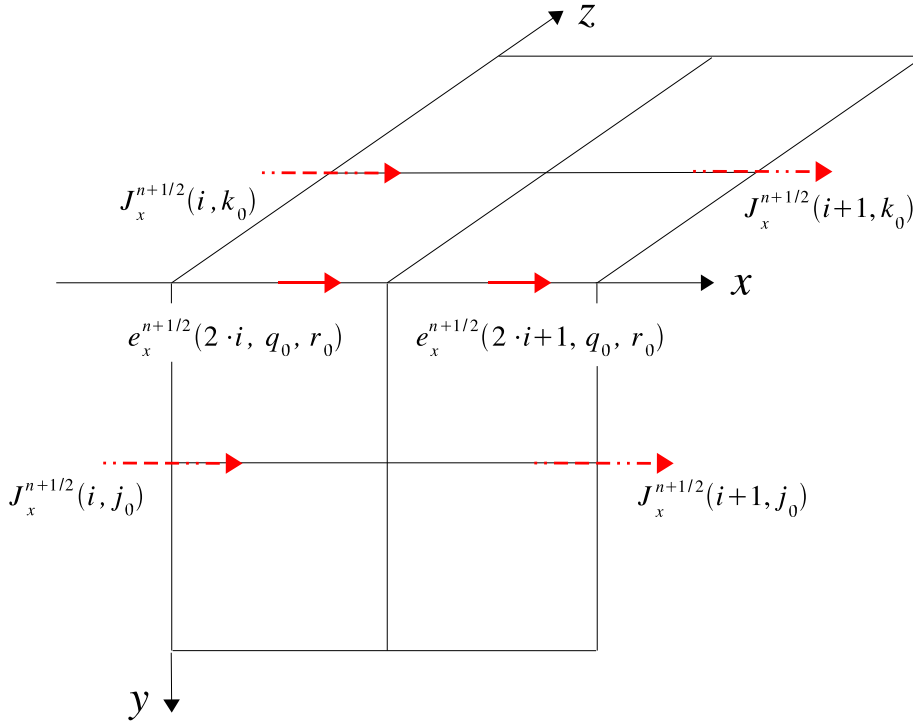


FIG. 8.25 – Composantes  $e_x$  située sur l'arête  $X_1$ , avec les quatre courants environnant.

Pour les deux premiers membres de l'équation 8.91 les calculs sont similaires à ce que nous avons fait du côté du grand maillage sur l'arête  $X_1$ . Nous obtenons :

$$\epsilon_o \cdot \mathbf{m}_e \cdot \frac{\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\epsilon_o}{4 \cdot \frac{\Delta t}{2}} \cdot \left[ e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r_0) - e_x^n(p, q_0, r_0) \right] \cdot \delta v \quad (8.99)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^{n+1/4} &= \frac{1}{2} \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0) \cdot \delta x \cdot \delta z - \\ &\frac{1}{2} \cdot h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0) \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned} \quad (8.100)$$

Pour  ${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  on a toujours :

$${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} ({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+\frac{1}{2}}$$

avec :

$$({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon}^n$$

Mais cette fois-ci la composante  $e_x$  que nous calculons est située sur l'arête  $X_1$  qui est l'intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$ . Nous devons donc considérer les éléments de matrice de  ${}^t\mathbf{c}$  sur ces deux faces. Ainsi la somme précédente devient :

$$({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon} = ({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon}^3 + ({}^t\mathbf{c})_{\beta, \epsilon}^5$$

Donc :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} = \sum_{\epsilon} \{ (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{\beta, \epsilon}^3 + (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{\beta, \epsilon}^5 \} \cdot \mathbf{J}_{\epsilon}^{n+\frac{1}{2}}$$

c'est à dire que :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{pqr, i'k'}^{3, \sigma, \sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} + \\ &\quad \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{pqr, i'j'}^{5, \sigma, \sigma'} \cdot \mathbf{J}_{i'j'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A partir des relations E.35 à E.38 qui donnent les composantes  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{1, \sigma, \sigma'}$ , il est facile d'obtenir les quantités  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'}$  et  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',j'}^{5, \sigma, \sigma'}$ . On raisonne par analogie ou on effectue une permutation circulaire sur les indices et les variables. Remarquons que pour les composantes  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'}$  l'indice  $r$  est nécessairement pair et que pour les composantes  $(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{p,q,r,i',j'}^{5, \sigma, \sigma'}$  l'indice  $q$  est nécessairement pair. Ceci tient au fait que la composante  $e_x$  est située sur l'arête  $X_1$ . On a donc :

– pour  $p = 2i$  et  $r = 2k$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q,2k,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) + \\ &\quad \delta_{z, \sigma} \cdot (g_{2i} \cdot \delta_{i, i'} + d_{2i} \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (3 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i$  et  $q = 2j$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,2j,r,i',j'}^{5, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{r, r_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2j} \cdot \delta_{j, j'} + d_{2j} \cdot \delta_{j-1, j'}) + \\ &\quad \delta_{y, \sigma} \cdot (g_{2i} \cdot \delta_{i, i'} + d_{2i} \cdot \delta_{i-1, i'}) \cdot (3 \cdot \delta_{j, j'} + \delta_{j+1, j'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r = 2k$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q,2k,i',k'}^{3, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{q, q_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) + \\ &\quad \delta_{z, \sigma} \cdot 2 \cdot \delta_{i, i'} \cdot (3 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta z \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $q = 2j$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,2j,r,i',j'}^{5, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{r, r_0} \cdot \{ \delta_{x, \sigma} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2j} \cdot \delta_{j, j'} + d_{2j} \cdot \delta_{j-1, j'}) + \\ &\quad \delta_{y, \sigma} \cdot 2 \cdot \delta_{i, i'} \cdot (3 \cdot \delta_{j, j'} + \delta_{j+1, j'}) \} \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

Sur l'arête  $X_1$  on a  $q = q_0$  et  $r = r_0$ . De plus on travaille pour  $\sigma = x$ , ainsi les relations précédentes se simplifient :

– pour  $p = 2i$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,q_0,2k_0,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k_0} \cdot \delta_{k_0, k'} + d_{2k_0} \cdot \delta_{k_0-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $q_0 = 2j_0$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i,2j_0,r_0,i',j'}^{5, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i, i'} + \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2j_0} \cdot \delta_{j_0, j'} + d_{2j_0} \cdot \delta_{j_0-1, j'}) \cdot \delta x \cdot \delta y$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$(\mathbf{t}_{\mathbf{c}})_{2i+1,q_0,2k_0,i',k'}^{3, x, \sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot (\delta_{i, i'} + 3 \cdot \delta_{i+1, i'}) \cdot (g_{2k_0} \cdot \delta_{k_0, k'} + d_{2k_0} \cdot \delta_{k_0-1, k'}) \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $q_0 = 2j_0$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{2i+1,2j_0,r_0}^{5,x,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + 3 \cdot \delta_{i+1,i'}) \cdot (g_{2j_0} \cdot \delta_{j_0,j'} + d_{2j_0} \cdot \delta_{j_0-1,j'}) \cdot \delta x \cdot \delta y$$

Pour les quantités  $g_{2L}$  et  $d_{2L}$  qui interviennent dans le calcul de  ${}^t\mathbf{c}$ , on a  $g_{2L_0} = 1$  et  $d_{2L_0} = 0$ .  
On obtient alors :

– pour  $p = 2i$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{2i,q_0,2k_0}^{3,x,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i$  et  $q_0 = 2j_0$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{2i,2j_0,r_0}^{5,x,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \delta x \cdot \delta y$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{2i+1,q_0,2k_0}^{3,x,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + 3 \cdot \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \delta x \cdot \delta z$$

– pour  $p = 2i + 1$  et  $q_0 = 2j_0$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{2i+1,2j_0,r_0}^{5,x,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + 3 \cdot \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \delta x \cdot \delta y$$

Maintenant on peut exprimer  ${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}$  :

– pour  $p = 2i$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (3 \cdot \delta_{i,i'} + \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \mathbf{J}_{i'j'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i + 1$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{k'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + 3 \cdot \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{k_0,k'} \cdot \mathbf{J}_{i'k'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\frac{1}{8} \cdot \sum_{\sigma'} \sum_{i'} \sum_{j'} \delta_{x,\sigma'} \cdot (\delta_{i,i'} + 3 \cdot \delta_{i+1,i'}) \cdot \delta_{j_0,j'} \cdot \mathbf{J}_{i'j'}^{\sigma', n+\frac{1}{2}} \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

soit après « action » des symboles de Kronecker :

– pour  $p = 2i$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot \mathbf{J}_{i,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}_{i+1,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot \mathbf{J}_{i,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}_{i+1,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i + 1$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \left( \mathbf{J}_{i,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + 3 \cdot \mathbf{J}_{i+1,k_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\frac{1}{8} \cdot \left( \mathbf{J}_{i,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} + 3 \cdot \mathbf{J}_{i+1,j_0}^{x, n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

c'est à dire en changeant un peu les notations :

– pour  $p = 2i$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\quad \frac{1}{8} \cdot \left( 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

– pour  $p = 2i + 1$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{J}^{n+1/2} &= \frac{1}{8} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right) \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ &\quad \frac{1}{8} \cdot \left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned}$$

Maintenant on reporte 8.99, 8.100 et les deux relations précédentes dans l'équation 8.91. Cela donne :

pour  $p = 2i$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r_0) - e_x^n(p, q_0, r_0) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0)}{\delta y} + \frac{2 \cdot h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0)}{\delta z} - \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right)}{\delta y} - \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right)}{\delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.101)$$

pour  $p = 2i + 1$ ,  $q_0 = 2j_0$  et  $r_0 = 2k_0$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{\left( e_x^{n+\frac{1}{2}}(p, q_0, r_0) - e_x^n(p, q_0, r_0) \right)}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{2 \cdot h_z^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0)}{\delta y} + \frac{2 \cdot h_y^{n+\frac{1}{4}}(p, q_0, r_0)}{\delta z} - \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_0) + 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, k_0) \right)}{\delta y} - \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( J_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0) + 3 \cdot J_x^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j_0) \right)}{\delta z} = 0 \end{aligned} \quad (8.102)$$

## 8.9 Pour résumer

La méthode variationnelle que nous venons d'exposer peut se résumer de la façon suivante :

- Dans un premier temps nous avons découpé les domaines  $D$  et  $D_{ext}$  en introduisant des courants surfaciques  $\vec{J}$  et  $\vec{j}$ . La continuité du champ magnétique sur l'interface permet de ne considérer qu'un seul de ces deux courants ( $\vec{J}$ ), si bien que le champ électromagnétique se calcule en fonction de ce courant et ceci de façon autonome dans les deux domaines. C'est la continuité de la trace tangentielle du champ électrique qui fournit ensuite l'équation en  $\vec{J}$  et qui donne finalement la solution du problème.
- Ensuite nous avons procédé à la discrétisation spatiale des équations découplées. La méthode utilisée est celle des éléments finis. Cette méthode est très générale mais elle conduit à un système d'équations inextricable si le problème n'est pas formulé dans un « langage » adapté. L'utilisation de ce « langage » (l'écriture variationnelle) conduit finalement à un système d'équations matriciel plus facilement exploitable.

- Dès lors la discrétisation temporelle a pu être abordée. Cette dernière est basée sur le très classique schéma « saute-moutton ». A cette occasion nous avons montré que c'est la discrétisation temporelle de l'équation de continuité du champ électrique qui conduit à la conservation de l'énergie et donc à la stabilité du schéma. Nous avons également mis à jour le système d'équations relatif à  $J^{n+\frac{1}{2}}$ .
- Les équations discrètes étant obtenues, nous avons choisi les éléments finis afin de calculer toutes les matrices intervenant dans le problème.
- Finalement nous avons développé les équations matricielles pour obtenir une écriture explicite du schéma de raccordement spatiotemporel.

## Chapitre 9

# Proposition d'une version simplifiée de la méthode variationnelle pour le sous-maillage spatial en 2D-TE

La méthode variationnelle développée dans le chapitre précédent consiste finalement à découpler les domaines  $D$  et  $D_{ext}$  en introduisant une variable d'échange ( $\vec{J}$ ). En effet, les relations 8.21 et 8.22 montrent que le champ électromagnétique peut-être calculé uniquement en fonction de cette variable et ceci de façon indépendante dans chacun des deux domaines. Cette variable d'échange  $\vec{J}$ , est déterminée par la condition de raccord 8.23 qui exprime simplement la continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur l'interface. Regardons d'un peu plus près la relation 8.23. Elle s'écrit :

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \left\{ \vec{n}_{int} \wedge \left[ \vec{E}_{|\Sigma} \wedge \vec{n}_{int} \right] \right\} \cdot d\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \left\{ \vec{n}_{ext} \wedge \left[ \vec{e}_{|\Sigma} \wedge \vec{n}_{ext} \right] \right\} \cdot d\Sigma$$

Les deux termes entre accolades ne sont autres que les composantes tangentes des champs électriques, si bien que la relation se simplifie en :

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{E}_{|\Sigma,t} \cdot d\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{e}_{|\Sigma,t} \cdot d\Sigma$$

ou encore<sup>1</sup> :

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{E}_{|\Sigma} \cdot d\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{e}_{|\Sigma} \cdot d\Sigma$$

Dans le membre de gauche nous remplaçons  $\vec{J}$  par son expression « grand maillage » :

$$\vec{J}(M, t) = \vec{H}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{int}(M)$$

tandis que dans le membre de droite nous le remplaçons par son expression « petit maillage »<sup>2</sup> :

$$\vec{j}(M, t) = \vec{h}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{ext}(M)$$

Il vient :

$$\oint_{\Sigma} \left\{ \vec{H}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{int}(M) \right\} \cdot \vec{E}_{|\Sigma} \cdot d\Sigma = \oint_{\Sigma} \left\{ \vec{h}_{|\Sigma}(M, t) \wedge \vec{n}_{ext}(M) \right\} \cdot \vec{e}_{|\Sigma} \cdot d\Sigma$$

<sup>1</sup>  $\vec{J}$  est orthogonal à l'interface donc  $\vec{J} \cdot \vec{E}_{|\Sigma,n} = 0$  si bien que  $\vec{J} \cdot \vec{E}_{|\Sigma} = \vec{J} \cdot (\vec{E}_{|\Sigma,t} + \vec{E}_{|\Sigma,n}) = \vec{J} \cdot \vec{E}_{|\Sigma,t}$ .  
Même raisonnement pour le membre de droite.

<sup>2</sup> Voir équation 8.2.



Ce qui donne après une permutation circulaire des variables dans les deux produits mixtes :

$$\oint_{\Sigma} \left\{ \vec{E}_{|\Sigma} \wedge \vec{H}_{|\Sigma}(M, t) \right\} \bullet d\vec{\Sigma}_{int} = \oint_{\Sigma} \left\{ \vec{e}_{|\Sigma} \wedge \vec{h}_{|\Sigma}(M, t) \right\} \bullet d\vec{\Sigma}_{ext}$$

Finalemment la condition de raccord 8.23 est l'expression du théorème de Poynting. Cependant ce théorème est exploité ici d'une façon un peu particulière, puisqu'il permet uniquement de déterminer la valeur commune<sup>3</sup> du champ magnétique tangentiel à l'interface<sup>4</sup>. C'est à partir de cette valeur que l'on calcule ensuite le champ électromagnétique dans les deux domaines. Notons également que le théorème de Poynting ne suffit pas à cette détermination, puisqu'il faut y adjoindre la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

A la lumière de ce qui précède nous proposons une simplification de la méthode variationnelle. Elle consiste à exploiter de façon beaucoup plus directe le théorème de Poynting. Nous l'avons illustré sur un schéma de sous-maillage spatial pour un espace à deux dimensions et pour le mode de propagation transverse électrique. Les simplifications auxquelles nous avons pensé consistent bien sûr à exploiter le théorème de Poynting sur l'interface mais aussi à découpler les équations obtenues afin qu'elles soient indépendantes d'une grande cellule à l'autre.

Le théorème de Poynting possède en effet l'avantage de décrire la conservation de l'énergie uniquement sur l'interface c'est à dire localement, alors que la relation  $\frac{d}{dt}(E_{em}) + \frac{d}{dt}(e_{em}) = 0$  décrit cette même loi de conservation dans l'ensemble des deux maillages c'est à dire globalement. Ceci constitue une première simplification non négligeable. La deuxième simplification provient de la possibilité d'écrire la conservation du flux du vecteur de Poynting de façon autonome dans chaque grande cellule.

## 9.1 Exploitation du théorème de Poynting

La façon la plus simple d'expliquer la manière dont nous utilisons le théorème de Poynting est de donner directement une vue d'ensemble du schéma. Cette dernière est illustrée dans la figure 9.1.

Puisque le mode de propagation est le mode transverse électrique, nous n'avons que des composantes de type «  $h$  » à traiter au niveau de l'interface<sup>5</sup>, remarquons également que le schéma est conçu pour un facteur de raffinement égale à deux. La séquence temporelle  $(n', n' + 1/4, n' + 1/2)$  est écrite de façon généralisée, puisqu'elle doit s'insérer dans chacune des deux sous-itérations d'un certain schéma de raffinement temporel placé en amont.

Le but est d'obtenir un système de trois équations faisant intervenir les trois inconnues suivantes :  $E_{h,f}^{n'+1/2}$  (5),  $e_{h,f,plus}^{n'+1/2}$  (4) et  $e_{h,f,moins}^{n'+1/2}$  (6). Avec de telles inconnues ce système est en effet nécessairement relatif à une seule grande cellule<sup>6</sup> si bien que nous réalisons le découplage dont nous parlions précédemment. Pour commencer nous écrivons la conservation du flux du vecteur de Poynting à la date  $(n' + 1/4) \Delta t$ , ensuite nous émettons une hypothèse qui va nous permettre d'obtenir le système d'équations découplées. Remarquons que le fait de travailler à la date  $(n' + 1/4) \Delta t$  nous amène à considérer temporairement les variables  $E_{h,f}^{n'+1/4}$  (2),  $e_{h,f,plus}^{n'+1/4}$  (1) et  $e_{h,f,moins}^{n'+1/4}$  (3). Elle sont bien sûr définies par les relations suivantes :

<sup>3</sup>Commune car il y a continuité.

<sup>4</sup>C'est  $\vec{J}$  qui joue le rôle de cette valeur commune.

<sup>5</sup>Pour le champ électrique.

<sup>6</sup>Et aux deux petites cellules qui l'accompagnent.

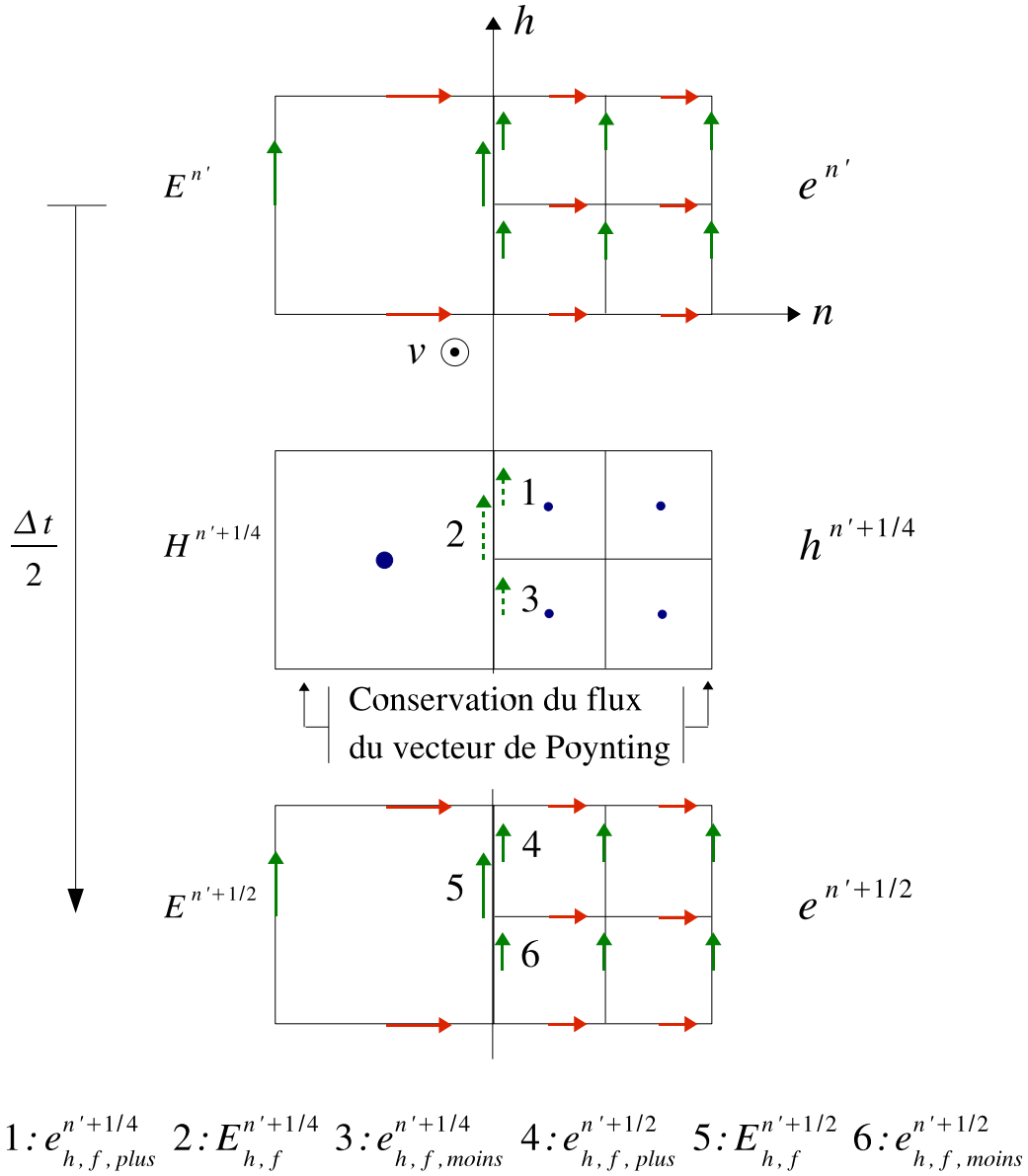


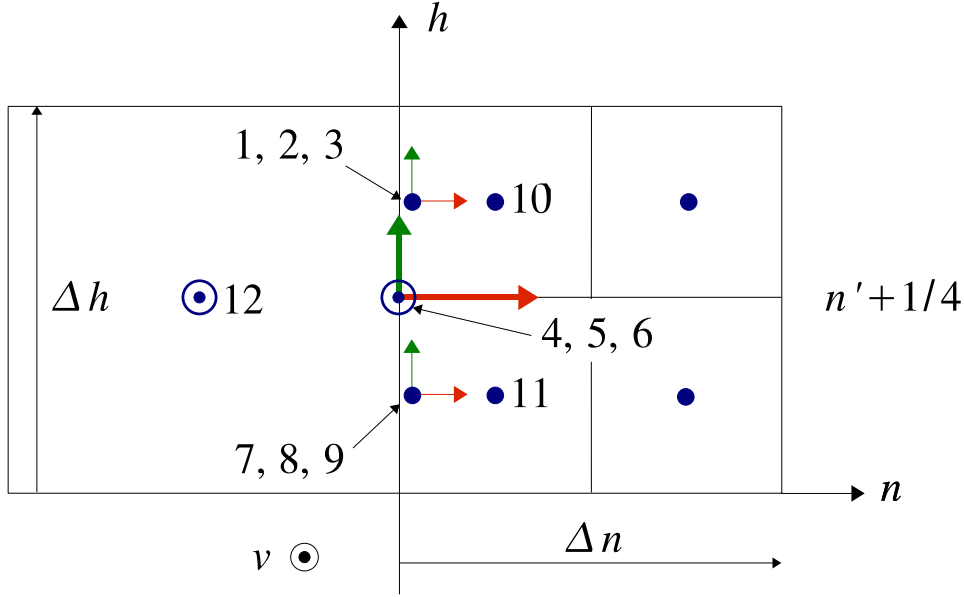
FIG. 9.1 – Exploitation du théorème de Poynting.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{h,f}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot (E_{h,f}^{n'} + E_{h,f}^{n'+1/2}) \\ e_{h,f,plus}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot (e_{h,f,plus}^{n'} + e_{h,f,plus}^{n'+1/2}) \\ e_{h,f,moins}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot (e_{h,f,moins}^{n'} + e_{h,f,moins}^{n'+1/2}) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

## 9.2 Mise en équation

### 9.2.1 Construction des flux

Pour les explications concernant la construction des flux on se portera à la figure 9.2.



- 1:  $h_{v,f,plus}^{n'+1/4}$    2:  $e_{h,f,plus}^{n'+1/4}$    3:  $s_{n,plus}^{n'+1/4}$    4:  $H_{v,f}^{n'+1/4}$    5:  $E_{h,f}^{n'+1/4}$    6:  $S_n^{n'+1/4}$   
 7:  $h_{v,f,moins}^{n'+1/4}$    8:  $e_{h,f,moins}^{n'+1/4}$    9:  $s_{n,moins}^{n'+1/4}$    10:  $h_{v,i,plus}^{n'+1/4}$    11:  $h_{v,i,moins}^{n'+1/4}$    12:  $H_{v,e}^{n'+1/4}$

FIG. 9.2 – Construction des flux à la date  $(n' + 1/4) \Delta t$ .

Sur le tronçon de frontière délimité par la grande cellule, le flux du vecteur de Poynting s'écrit sous la forme :

$$\phi^{n'+1/4} = S_n^{n'+1/4} \cdot \Delta h \quad (9.2)$$

Dans cette relation,  $S_n^{n'+1/4}$  (6) est la composante du vecteur de Poynting orthogonale à la frontière. Cette composante est construite à partir de  $E_{h,f}^{n'+1/4}$  (5) et de  $H_{v,f}^{n'+1/4}$  (4) par la relation :

$$S_n^{n'+1/4} = E_{h,f}^{n'+1/4} \cdot H_{v,f}^{n'+1/4} \quad (9.3)$$

Sur les deux tronçons de frontière délimités par les deux petites cellules, les flux des vecteurs de Poynting s'écrivent sous la forme :

$$\varphi_{plus}^{n'+1/4} = s_{n,plus}^{n'+1/4} \cdot \frac{\Delta h}{2} \quad (9.4)$$

pour le tronçon supérieur et :

$$\varphi_{moins}^{n'+1/4} = s_{n,moins}^{n'+1/4} \cdot \frac{\Delta h}{2} \quad (9.5)$$

pour le tronçon inférieur.

Dans ces deux relations,  $s_{n,plus}^{n'+1/4}$  (3) et  $s_{n,moins}^{n'+1/4}$  (9) sont les composantes orthogonales à la frontière des deux vecteurs de Poynting relatifs aux tronçons supérieur et inférieur. Ces deux composantes sont construites à partir de  $e_{h,f,plus}^{n'+1/4}$  (2),  $h_{v,f,plus}^{n'+1/4}$  (1),  $e_{h,f,moins}^{n'+1/4}$  (8) et  $h_{v,f,moins}^{n'+1/4}$  (7)

à l'aide des relations :

$$\begin{cases} s_{n,plus}^{n'+1/4} = e_{h,f,plus}^{n'+1/4} \cdot h_{v,f,plus}^{n'+1/4} \\ s_{n,moins}^{n'+1/4} = e_{h,f,moins}^{n'+1/4} \cdot h_{v,f,moins}^{n'+1/4} \end{cases} \quad (9.6)$$

## 9.2.2 Conservation du flux sur l'interface

Maintenant que nous avons construit les flux, nous pouvons écrire la relation de conservation qu'ils vérifient à la date  $(n' + 1/4) \Delta t$ . Cela donne :

$$\phi^{n'+1/4} = \varphi_{plus}^{n'+1/4} + \varphi_{moins}^{n'+1/4} \quad (9.7)$$

c'est à dire en utilisant les relations du paragraphe précédent :

$$E_{h,f}^{n'+1/4} \cdot H_{v,f}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{h,f,plus}^{n'+1/4} \cdot h_{v,f,plus}^{n'+1/4} + e_{h,f,moins}^{n'+1/4} \cdot h_{v,f,moins}^{n'+1/4} \right) \quad (9.8)$$

## 9.2.3 Hypothèse et obtention d'un système d'équations découplées

A partir de l'équation 9.8 nous devons obtenir un système de trois équations faisant intervenir les inconnues  $E_{h,f}^{n'+1/2}$ ,  $e_{h,f,plus}^{n'+1/2}$  et  $e_{h,f,moins}^{n'+1/2}$ . Pour cela, nous nous inspirons de la démarche que nous avons exposée dans la chapitre 8 à propos de la méthode variationnelle : Nous avons introduit les courants surfaciques  $\vec{J}$  et  $\vec{j}$  à partir des champs  $\vec{H}$  et  $\vec{h}$ , puis nous avons écrit la continuité du champ magnétique sur l'interface pour en déduire l'égalité  $\vec{J} = -\vec{j}$ . Dès lors, le champ électromagnétique pouvait être calculé indépendamment dans les deux maillages uniquement à partir de  $\vec{J}$ , ce dernier courant étant déterminé par la relation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur l'interface.

Si à partir de la relation 9.8 nous voulons écrire la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, nous devons poser :

$$\begin{cases} H_{v,f}^{n'+1/4} = h_{v,f,plus}^{n'+1/4} \\ H_{v,f}^{n'+1/4} = h_{v,f,moins}^{n'+1/4} \end{cases} \quad (9.9)$$

Dès lors, la relation 9.8 se réduit bien à une telle relation de continuité :

$$E_{h,f}^{n'+1/4} = \frac{1}{2} \cdot \left( e_{h,f,plus}^{n'+1/4} + e_{h,f,moins}^{n'+1/4} \right) \quad (9.10)$$

Nous obtenons ainsi les trois équations recherchées. A partir de maintenant les relations 9.9 constituent notre hypothèse et la relation 9.10 en est la conséquence.

Remarquons que 9.9 et 9.10 sont respectivement les équivalents locaux des relations 8.3 et 8.6 que nous avons obtenu dans le paragraphe 8.2. La différence entre notre hypothèse et la méthode variationnelle est qu'ici nous n'avons pas de courants surfaciques, ces derniers sont directement remplacés par les composantes du champ magnétique sur la frontière, précisons également que la résolution des équation va-être beaucoup plus directe.

## 9.2.4 Développement du système d'équation

Nous devons maintenant faire apparaître explicitement les inconnues dans les équations 9.9 et 9.10. Pour cela il faut exprimer  $H_{v,f}^{n'+1/4}$ ,  $h_{v,f,plus}^{n'+1/4}$  et  $h_{v,f,moins}^{n'+1/4}$  à partir des champs environnants.

Nous allons expliquer le principe du calcul pour  $H_{v,f}^{n'+1/4}$  puis nous donnerons directement les résultats pour  $h_{v,f,plus}^{n'+1/4}$  et  $h_{v,f,moins}^{n'+1/4}$ .

On utilise le développement de Taylor Mac-Laurin de  $H_v^{n'+1/4}$  à l'ordre un, dans le voisinage de  $-\frac{\Delta n}{2}$  (voir (4) et (12) dans la figure 9.2). Cela donne :

$$H_v^{n'+1/4}\left(-\frac{\Delta n}{2}\right) = H_v^{n'+1/4}(0) - \frac{\Delta n}{2} \cdot \left(\frac{\partial H_v^{n'+1/4}}{\partial n}\right) \quad (0)$$

La variable  $n = 0$  représentant la frontière, nous obtenons :

$$H_{v,e}^{n'+1/4} = H_{v,f}^{n'+1/4} - \frac{\Delta n}{2} \cdot \left(\frac{\partial H_v^{n'+1/4}}{\partial n}\right)_f$$

Nous utilisons maintenant l'équation de Maxwell-Ampère pour exprimer  $\left(\frac{\partial H_v^{n'+1/4}}{\partial n}\right)_f$  en fonction des composantes du champ électrique sur l'interface. Cela donne, en utilisant les dérivées centrées pour l'opérateur temporel :

$$\left(\frac{\partial H_v^{n'+1/4}}{\partial n}\right)_f = -\varepsilon_0 \cdot \frac{\left(E_{h,f}^{n'+1/2} - E_{h,f}^{n'}\right)}{\Delta t}$$

Finalement on obtient :

$$H_{v,f}^{n'+1/4} = H_{v,e}^{n'+1/4} - \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta n}{2 \cdot \Delta t} \cdot \left(E_{h,f}^{n'+1/2} - E_{h,f}^{n'}\right) \quad (9.11)$$

De la même façon on trouve pour les deux autres champs magnétiques les relations suivantes ( voir (10), (11), (1) et (7) dans la figure 9.2) :

$$h_{v,f,plus/moins}^{n'+1/4} = h_{v,i,plus/moins}^{n'+1/4} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta n}{4 \cdot \Delta t} \cdot \left(e_{h,f,plus/moins}^{n'+1/2} - e_{h,f,plus/moins}^{n'}\right) \quad (9.12)$$

On remplace les relations 9.11 et 9.12 dans 9.9, on obtient alors les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} H_{v,e}^{n'+1/4} - \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta n}{2 \cdot \Delta t} \cdot \left(E_{h,f}^{n'+1/2} - E_{h,f}^{n'}\right) = \\ h_{v,i,plus/moins}^{n'+1/4} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta n}{4 \cdot \Delta t} \cdot \left(e_{h,f,plus/moins}^{n'+1/2} - e_{h,f,plus/moins}^{n'}\right) \end{cases} \quad (9.13)$$

Pour terminer on remplace les définitions 9.1 dans l'équation 9.10, cela donne :

$$E_{h,f}^{n'} + E_{h,f}^{n'+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(e_{h,f,plus}^{n'} + e_{h,f,moins}^{n'} + e_{h,f,plus}^{n'+1/2} + e_{h,f,moins}^{n'+1/2}\right) \quad (9.14)$$

## 9.2.5 Solution

Les équations 9.13 et 9.14 constituent un système de trois équations dont les inconnues sont  $E_{h,f}^{n'+1/2}$ ,  $e_{h,f,moins}^{n'+1/2}$  et  $e_{h,f,plus}^{n'+1/2}$ , les autres quantités sont connues car elles sont exprimées aux dates  $n' \Delta t$  et  $(n' + 1/4) \Delta t$ . Notre objectif est donc atteint. Il nous reste maintenant à donner les solutions de ce système, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{h,f}^{n'+1/2} = \frac{1}{3} \cdot E_{h,f}^{n'} + \frac{1}{3} \cdot (e_{h,f,moins}^{n'} + e_{h,f,plus}^{n'}) + \\ \frac{2 \cdot \Delta t}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot \Delta n} \cdot \left( 2 \cdot H_{v,e}^{n'+1/4} - h_{v,i,moins}^{n'+1/4} - h_{v,i,plus}^{n'+1/4} \right) \\ \\ e_{h,f,moins/plus}^{n'+1/2} = e_{h,f,moins/plus}^{n'} - 2 \cdot \left( E_{h,f}^{n'+1/2} - E_{h,f}^{n'} \right) + \\ \frac{4 \cdot \Delta t}{\epsilon_0 \cdot \Delta n} \cdot \left( H_{v,e}^{n'+1/4} - h_{v,i,moins/plus}^{n'+1/4} \right) \end{array} \right. \quad (9.15)$$

Remarquons que la deuxième équation de 9.15 nécessite d'abord le calcul de  $E_{h,f}^{n'+1/2}$  à l'aide de la première équation. Du point de vue mathématique la résolution du système n'est pas achevée mais du point de vue numérique une telle méthode de résolution, que l'on peut qualifier de « successive », ne pose aucun problème.

### 9.3 Algorithme

Il est maintenant facile de donner l'algorithme correspondant au schéma :

- On calcule les  $H^{n'+1/4}$  dans le grand maillage.
- On calcule les  $E^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontière exclue.
- On calcule les  $h^{n'+1/4}$  dans le petit maillage.
- On calcule les  $e^{n'+1/2}$  dans le petit maillage frontière exclue.
- On complète le schéma en déterminant d'abord les  $E_{h,f}^{n'+1/2}$  avec la première équation de 9.15 et ensuite les  $e_{h,f,moins/plus}^{n'+1/2}$  à l'aide de la deuxième équation.

## 9.4 Résultats

### 9.4.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation que nous avons prises pour la réflexion numérique sont illustrées dans la figure 9.3.

Le grand maillage comporte  $45 \times 45$  grandes cellules de dimensions  $\Delta x = \Delta y = 0.15 \text{ m}$  (non représenté sur la figure). Le petit maillage et les surfaces de Huygens sont *centrés* à l'intérieur du grand maillage, toutes les dimensions relatives à ce centrage sont précisées sur la figure. Le facteur de raffinement utilisé ici est égale à deux, si bien que le petit maillage comporte  $30 \times 30$  petites cellules de dimensions  $\delta x = \delta y = 0.075 \text{ m}$ . Nous rappelons que dans ce type de test, le petit maillage est vide et que l'onde incidente se propage de gauche à droite le long de l'axe  $(On)$ <sup>7</sup>. L'onde réfléchie est enregistrée au point  $P_{rn}$  situé deux grandes cellules avant la surface de Huygens (zone de champ diffracté). Les variations temporelles du champ électrique  $\vec{E}$  associé à l'onde incidente, sont représentées par une fonction Gaussienne d'amplitude  $\|\vec{E}\| = 1 \text{ V/m}$ . La plus grande fréquence qui intervient dans le spectre de Fourier de cette onde est  $f_{max} = 200 \text{ MHz}$ . Ceci correspond à un échantillonnage spatial minimum ( $\frac{\lambda_{min}}{\Delta x = \Delta y}$ ) égale à 10 dans le grand maillage. Nous rappelons également que l'onde réfléchie est analysée en fréquence. C'est à dire que nous mesurons, en fonction de la fréquence et au point  $P_{rn}$ , la quantité :

$$r_n(f) = 20 \cdot \log \left\{ \frac{\left| \tilde{E}_{h,rfliche}(f) \right|}{\left| \tilde{E}_{h,rfrence}(f) \right|} \right\}$$

<sup>7</sup>Le lecteur pourra se reporter au paragraphe 2.4.2.1 pour obtenir plus de détails sur ce type de simulation.

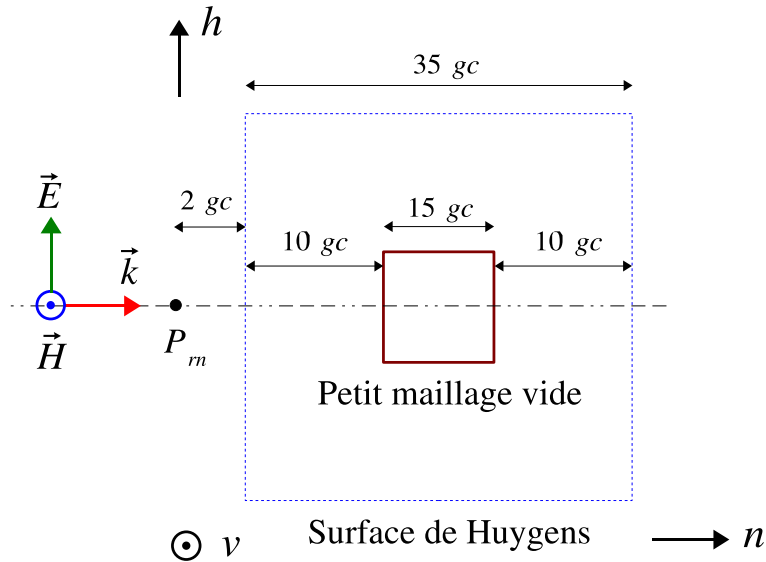


FIG. 9.3 – Test de la réflexion numérique.

si on analyse le champ électrique, ou bien la quantité :

$$r_n(f) = 20 \cdot \log \left\{ \frac{\left| \tilde{H}_{v, r\acute{e}fl\acute{e}chie}(f) \right|}{\left| \tilde{H}_{v, r\acute{e}f\acute{e}rence}(f) \right|} \right\}$$

si on analyse le champ magnétique. Pour terminer, précisons que le critère CFL du grand maillage est égale à 0.485 tandis que celui du petit maillage est égale à 0.97.

Maintenant que les choses sont bien posées nous pouvons présenter les résultats obtenus. Nous avons mesuré les réflexions numériques relatives aux composantes  $E_h$  et  $H_v$ . Elles sont représentées dans la figure 9.4.

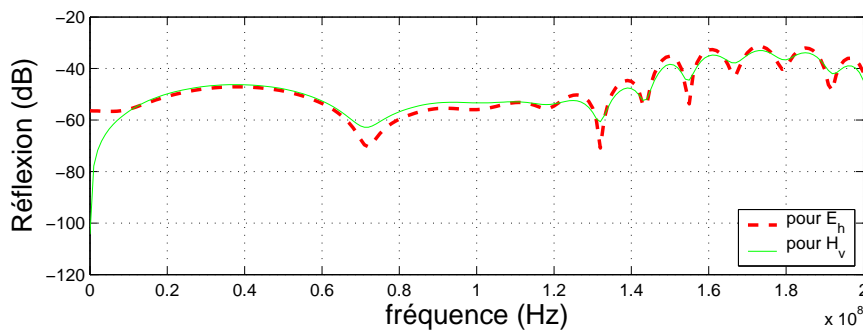


FIG. 9.4 – Réflexions numériques pour  $E_h$  et  $H_v$  mesurées au point  $P_{rn}$ .

Dans les deux cas nous obtenons  $r_n \leq -48 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$  ce qui est satisfaisant. Pour  $10 \leq \frac{\lambda}{\Delta} \leq 20$  la réflexion augmente jusqu'à  $-30 \text{ dB}$ .

## 9.4.2 Stabilité

Les conditions de simulation que nous avons prises pour tester la stabilité sont illustrées dans la figure 9.5. Le grand maillage comporte toujours  $45 \times 45$  grandes cellules de dimensions  $\Delta x = \Delta y = 0.15 \text{ m}$ . Le petit maillage, les surfaces de Huygens et la structure métallique sont

centrés à l'intérieur du grand maillage, toutes les dimensions relatives à ces centrages sont précisées sur la figure. Le facteur de raffinement utilisé ici est toujours égale à deux, si bien que le petit maillage comporte encore une fois  $30 \times 30$  petites cellules de dimensions  $\delta x = \delta y = 0.075 m$ . Nous rappelons que dans ce type de test, le petit maillage comporte une structure métallique diffractante et que l'onde incidente se propage en incidence oblique<sup>8</sup>. Le champ électromagnétique est enregistré à l'intérieur du petit maillage (point  $P_i$  sur la figure) ainsi que dans la zone de champ diffracté (point  $P_d$  sur la figure). Les variations temporelles du champ électrique  $\vec{E}$  associé à l'onde incidente, sont toujours représentées par une fonction Gaussienne d'amplitude  $\|\vec{E}\| = 1 V/m$ . La plus grande fréquence qui intervient dans le spectre de Fourier de cette onde est encore  $f_{max} = 200 MHz$ . Ceci correspond à un échantillonnage spatial minimum ( $\frac{\lambda_{min}}{\Delta x = \Delta y}$ ) égale à 10 dans le grand maillage, comme dans la simulation précédente.

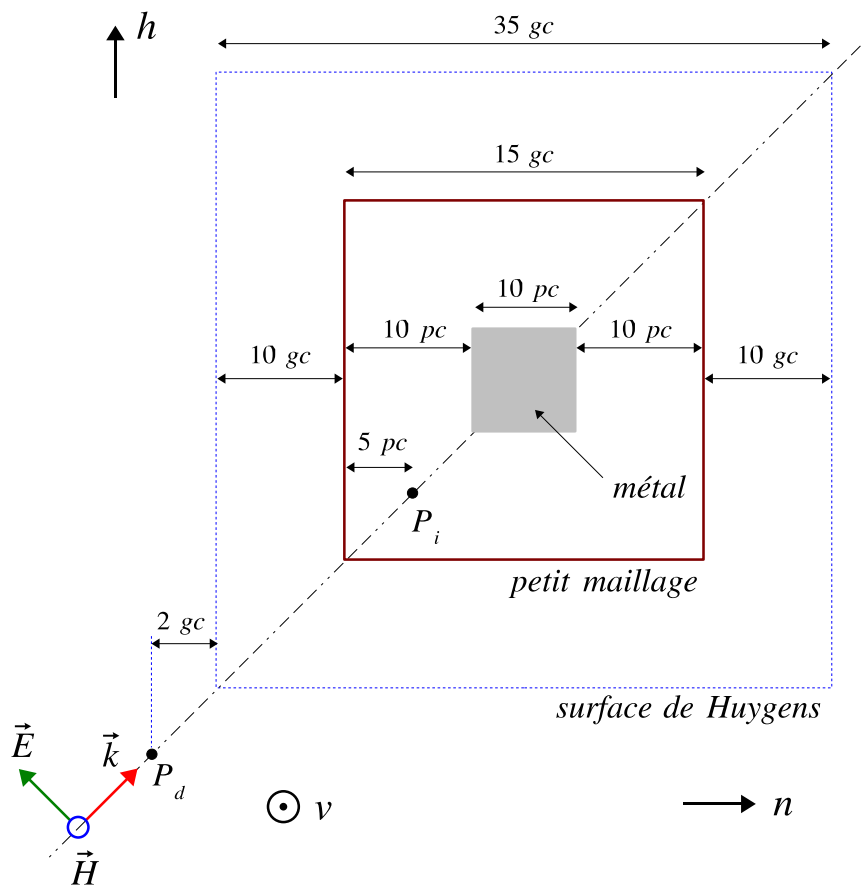


FIG. 9.5 – Test de la stabilité.

Les courbes 9.6 à 9.9 montrent le champ  $H_v$  diffracté (point  $P_d$ ) ainsi que le champ  $h_v$  à l'intérieur du petit maillage (point  $P_i$ ) avec deux points de vue différents. Une vue en gros plan est proposée afin de montrer les variations du champ magnétique et la vue d'ensemble permet d'apprécier la stabilité de l'algorithme. Pour chaque courbe nous avons également représenté les variations des champs magnétiques obtenus sans la présence du sous-maillage. Les résultats obtenus montrent que l'algorithme est stable et qu'il calcule correctement les champs, notons tout de même que c'est également le cas pour le schéma d'interpolation correspondant, si bien que l'application de la conservation de l'énergie n'était pas nécessaire ici. Cependant nous avons montré la possibilité de mettre en oeuvre une telle méthode, méthode qui sera par contre incontournable dans le cas du modèle 2D-TM.

<sup>8</sup>Le lecteur pourra se reporter cette fois-ci au paragraphe 2.4.2.2 pour obtenir plus de détails sur ce type de simulation.



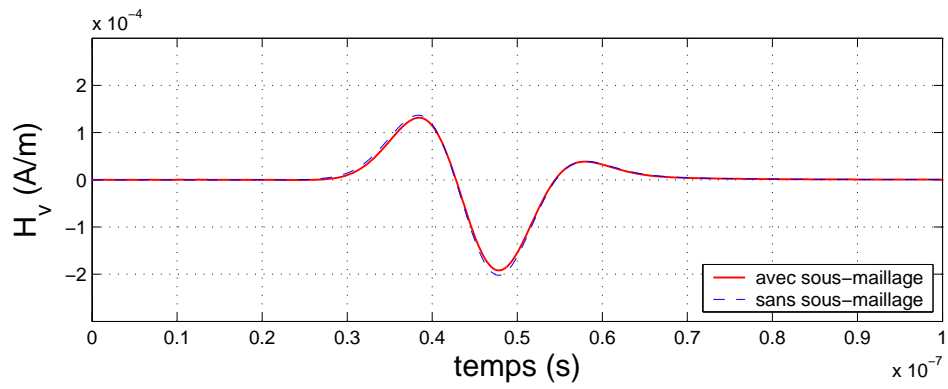


FIG. 9.6 – Champs magnétiques diffractés relevés au point  $P_d$  (vue en gros plan).

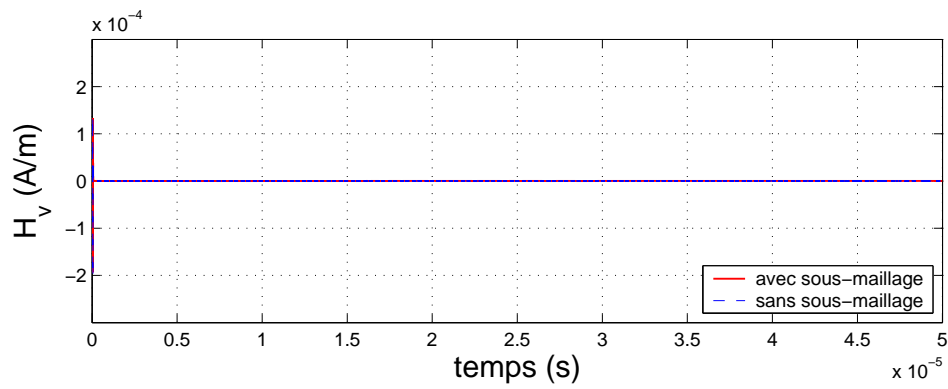


FIG. 9.7 – Champs magnétiques diffractés relevés au point  $P_d$  (vue d'ensemble).

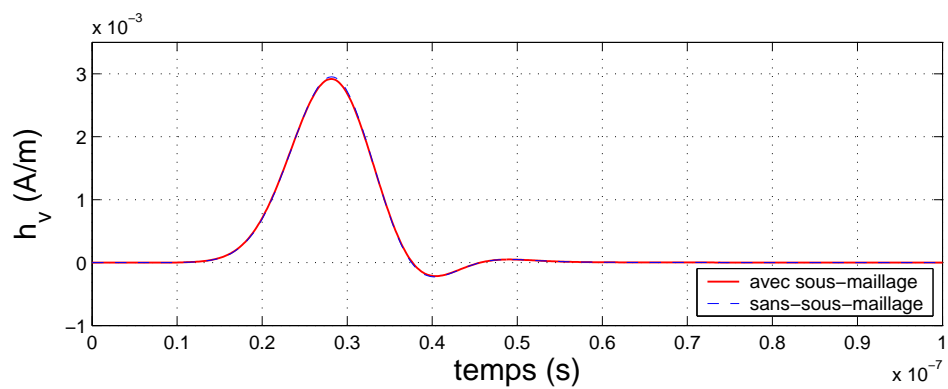


FIG. 9.8 – Champs magnétiques dans le petit maillage relevés au point  $P_i$  (vue en gros plan).

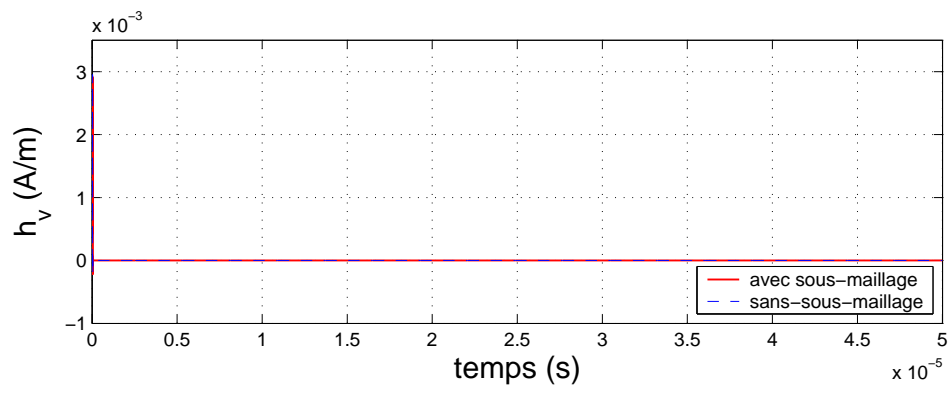


FIG. 9.9 – Champs magnétiques dans le petit maillage relevés au point  $P_i$  (vue d'ensemble).

# Chapitre 10

## Proposition d'une méthode variationnelle simplifiée pour le sous-maillage spatial en 2D-TM

Nous pouvons passer du modèle 2D-TE au modèle 2-TM en permutant les rôles de  $\vec{E}$  et de  $\vec{H}$ . Cependant nous ne devons pas considérer la même frontière que précédemment car la permutation dont nous venons de parler nous amènerait alors à deux situations radicalement différentes pour les emplacements des composantes sur l'interface. Notre méthode consiste d'abord à décaler le petit maillage par rapport au grand maillage d'une demi-petite cellule dans les deux directions, puis ensuite à considérer l'interface qui est extérieure au petit maillage et qui est distante d'une demi-petite cellule de ce dernier (voir la figure 10.1). Dans ce cas la conservation du flux du vecteur de Poynting s'applique exactement comme dans le modèle 2D-TM à ceci près que les rôles de  $\vec{E}$  et de  $\vec{H}$  sont permutés. Remarquons également que cette méthode nous permet d'éviter un traitement spécifique pour les composantes du champ électrique qui sont situées dans les coins (voir figure 10.2).

### 10.1 Principe du modèle 2D-TM

La figure 10.1 illustre la situation géométrique dans laquelle nous nous plaçons maintenant, elle donne également une vue d'ensemble du schéma.

La figure 10.2 montre l'emplacement des divers composantes de champ dans le voisinage d'un coin.

Nous pouvons distinguer trois frontières : la frontière du grand maillage (GM), la frontière du petit maillage (PM) et entre les deux, l'interface (I) sur laquelle la conservation du flux est prise en compte.

Les rôles de  $\vec{E}$  et de  $\vec{H}$  ont été permuté dans l'algorithme mais pas dans les cellules de Yee. Compte tenu de la nouvelle géométrie de notre problème, cela nous permet de mettre en équation sur l'interface (I) les composantes  $H_{h,f}^{n'+1/2}$  (2),  $h_{h,f,moins}^{n'+1/2}$  (3) et  $h_{h,f,plus}^{n'+1/2}$  (1) comme nous l'avons fait pour les composantes  $E_{h,f}^{n'+1/2}$ ,  $e_{h,f,moins}^{n'+1/2}$  et  $e_{h,f,plus}^{n'+1/2}$  dans le modèle 2D-TE. A la lumière de

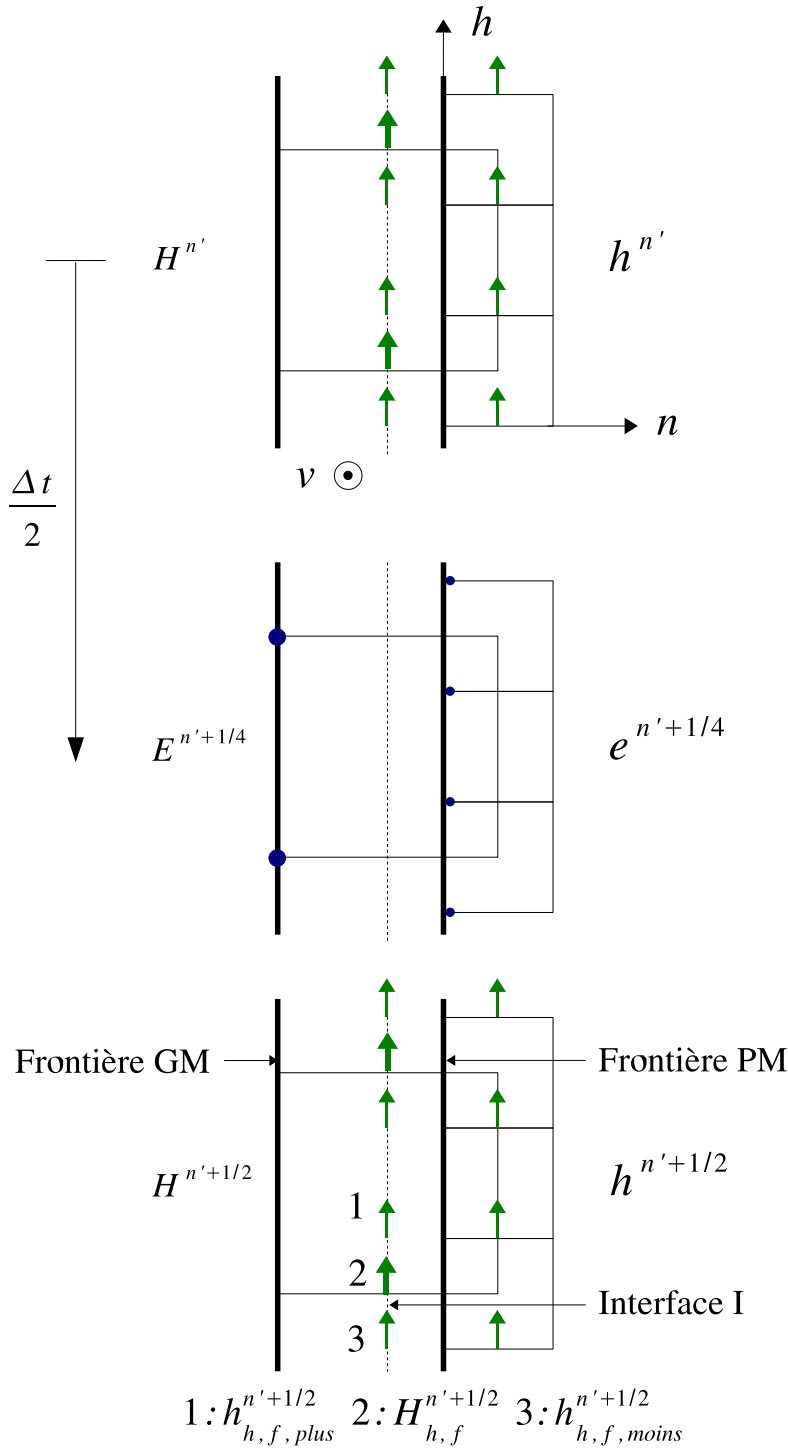


FIG. 10.1 – Géométrie et vue d'ensemble du schéma 2D-TM.

ce qui précède nous pouvons donner directement les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 H_{h,f}^{n'+1/2} = \frac{1}{3} \cdot H_{h,f}^{n'} + \frac{1}{3} \cdot (h_{h,f,moins}^{n'} + h_{h,f,plus}^{n'}) - \\
 \frac{2 \cdot \Delta t}{3 \cdot \mu_0 \cdot \Delta n} \cdot (2 \cdot E_{v,e}^{n'+1/4} - e_{v,i,moins}^{n'+1/4} - e_{v,i,plus}^{n'+1/4}) \\
 h_{h,f,moins/plus}^{n'+1/2} = h_{h,f,moins/plus}^{n'} - 2 \cdot (H_{h,f}^{n'+1/2} - H_{h,f}^{n'}) - \\
 \frac{4 \cdot \Delta t}{\mu_0 \cdot \Delta n} \cdot (e_{v,e}^{n'+1/4} - e_{v,i,moins/plus}^{n'+1/4})
 \end{array} \right. \quad (10.1)$$

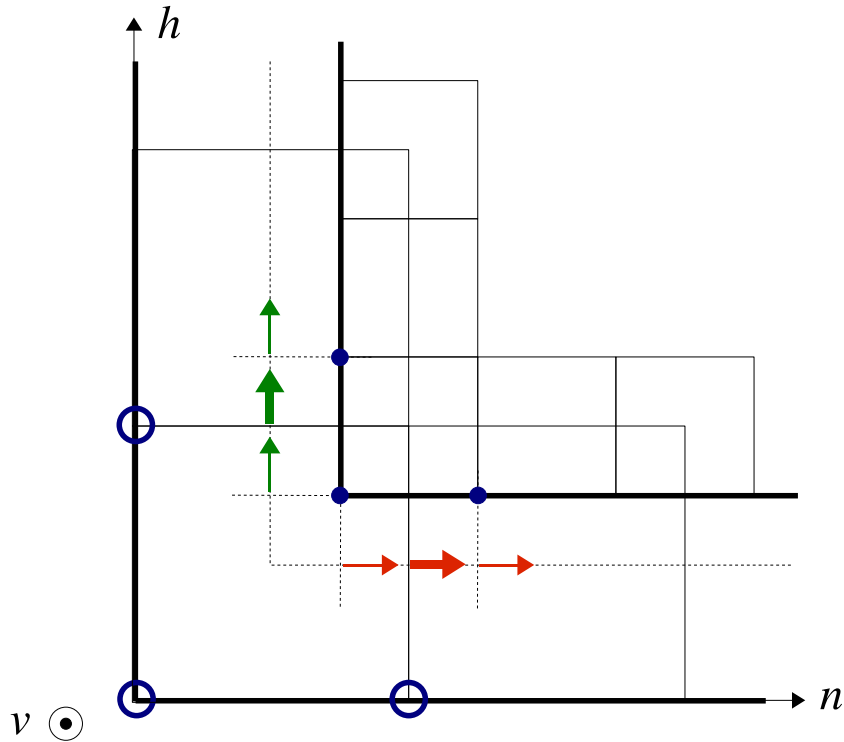


FIG. 10.2 – Voisinage d'un coin.

## 10.2 Algorithme

L'algorithme est similaire à celui du modèle 2D-TE sauf que les rôles de  $\vec{E}$  et de  $\vec{H}$  sont permutés :

- On calcule les  $E^{n'+1/4}$  dans le grand maillage, frontière GM comprise.
- On calcule les  $H^{n'+1/2}$  dans le grand maillage, frontière GM comprise.
- On calcule les  $e^{n'+1/4}$  dans le petit maillage, frontière PM comprise.
- On calcule les  $h^{n'+1/2}$  dans le petit maillage, frontière PM comprise.
- On complète le schéma en déterminant d'abord les  $H_{h,f}^{n'+1/2}$  (2) avec la première équation de 10.1 et ensuite les  $h_{h,f,moins/plus}^{n'+1/2}$  (1 et 3) à l'aide de la deuxième équation. Cette détermination se fait sur l'interface (I) qui est située entre les frontières du grand maillage et du petit maillage (voir la figure 10.1).

## 10.3 Résultats

### 10.3.1 Réflexion numérique

Les conditions de simulation que nous avons prises pour la réflexion numérique sont illustrées dans la figure 9.10. Le grand maillage comporte  $45 \times 45$  grandes cellules de dimensions  $\Delta x = \Delta y = 0.15 \text{ m}$  (non représenté sur la figure). Le petit maillage et les surfaces de Huygens sont centrés à l'intérieur du grand maillage, toutes les dimensions relatives à ce centrage sont précisées sur la figure. Le facteur de raffinement utilisé ici est égale à deux, mais le petit maillage comporte  $31 \times 31$  petites cellules de dimensions  $\delta x = \delta y = 0.075 \text{ m}$ . Cette situation est due au fait que nous avons décalé le petit maillage d'une demi petite cellule dans chaque direction, nous avons alors nécessairement un nombre impair de petites cellules. Nous rappelons que dans ce type de test, le petit maillage est vide et que l'onde incidente se propage de gauche à droite le long de l'axe

( $On$ )<sup>1</sup>. L'onde réfléchiée est enregistrée au point  $P_{rn}$  situé deux grandes cellules avant la surface de Huygens (zone de champ diffracté). Les variations temporelles du champ électrique  $\vec{E}$  associé à l'onde incidente, sont représentées par une fonction Gaussienne d'amplitude  $\|\vec{E}\| = 1 V/m$ . La plus grande fréquence qui intervient dans le spectre de Fourier de cette onde est  $f_{max} = 200 MHz$ . Ceci correspond à un échantillonnage spatial minimum ( $\frac{\lambda_{min}}{\Delta x = \Delta y}$ ) égale à 10 dans le grand maillage. Nous rappelons également que l'onde réfléchiée est analysée en fréquence. C'est à dire que nous mesurons, en fonction de la fréquence et au point  $P_{rn}$ , la quantité :

$$r_n(f) = 20 \cdot \log \left\{ \frac{|\tilde{E}_{v, r\text{flchie}}(f)|}{|\tilde{E}_{v, r\text{frence}}(f)|} \right\}$$

si on analyse le champ électrique, ou bien la quantité :

$$r_n(f) = 20 \cdot \log \left\{ \frac{|\tilde{H}_{h, r\text{flchie}}(f)|}{|\tilde{H}_{h, r\text{frence}}(f)|} \right\}$$

si on analyse le champ magnétique. Pour terminer, précisons que le critère CFL du grand maillage est égale à 0.42 tandis que celui du petit maillage est égale à 0.84. Ces critères ont dus être diminués par rapport au cas 2D-TE afin que l'algorithme ne diverge pas dès le début de la simulation.

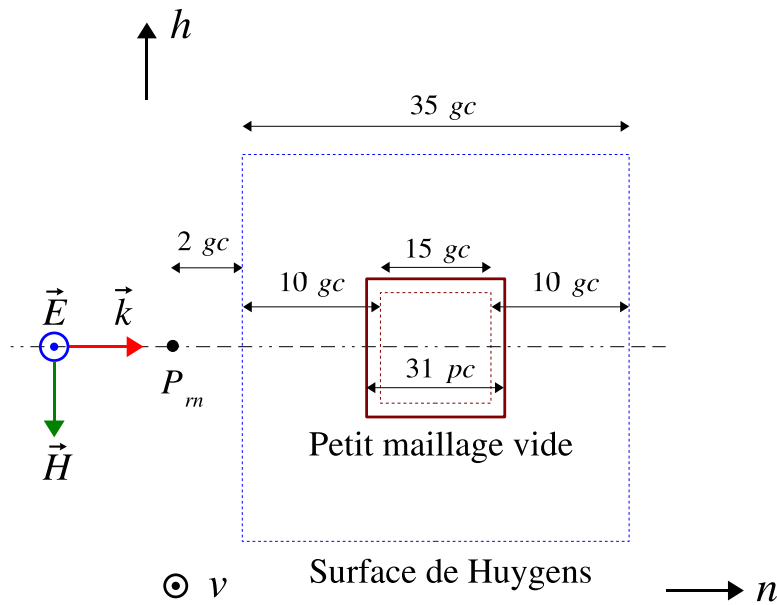


FIG. 10.3 – Test de la réflexion numérique.

Nous avons mesuré les réflexions numériques relatives aux composantes  $E_v$  et  $H_h$ . Elles sont représentées dans la figure 10.4. Dans les deux cas nous obtenons  $r_n \leq -48 dB$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} \geq 20$  ce qui est satisfaisant. Pour  $10 \leq \frac{\lambda}{\Delta} \leq 20$  la réflexion augmente jusqu'à  $-30 dB$ . Nous constatons que les niveaux de réflexion obtenus sont comparables à ceux que nous avons obtenus avec le modèle 2D-TE. Ceci n'est pas très étonnant puisque les modèles 2D-TE et 2D-TM sont réciproques<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Le lecteur pourra se reporter au paragraphe 2.4.2.1 pour obtenir plus de détails sur ce type de simulation.

<sup>2</sup>A ceci près que le modèle 2DTM présente un petit maillage décalé d'une demi petit cellule dans chaque direction. Ce décalage n'existe pas avec le modèle 2DTE.

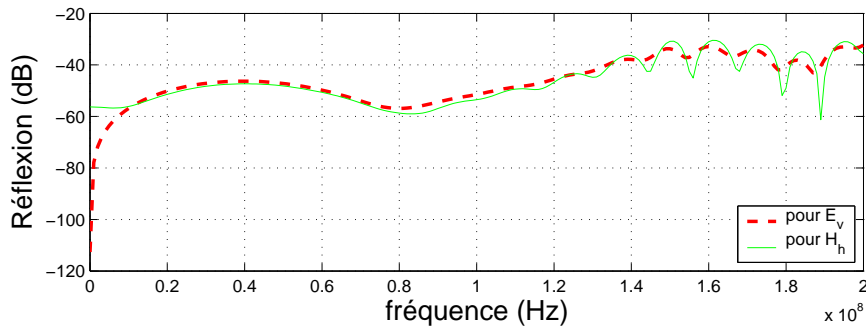


FIG. 10.4 – Réflexions numériques pour  $E_v$  et  $H_h$  mesurées au point  $P_{rn}$ .

### 10.3.2 Stabilité

Les conditions de simulation que nous avons prises pour tester la stabilité sont illustrées dans la figure 10.5. Le grand maillage comporte toujours  $45 \times 45$  grandes cellules de dimensions  $\Delta x = \Delta y = 0.15 m$ . Le petit maillage et les surfaces de Huygens sont *centrés* à l'intérieur du grand maillage, par contre la structure métallique n'est *pas exactement centrée* sur le petit maillage puisque ce dernier comporte un nombre impair de petites cellules. Toutes les dimensions relatives à ces centrages, qu'ils soient exacts ou non, sont précisées sur la figure. Le facteur de raffinement utilisé ici est toujours égale à deux. Le petit maillage comporte encore une fois  $31 \times 31$  petites cellules de dimensions  $\delta x = \delta y = 0.075 m$ . Nous rappelons que dans ce type de test, le petit maillage comporte une structure métallique diffractante et que l'onde incidente se propage en incidence oblique<sup>3</sup>. Le champ électromagnétique est enregistré à l'intérieur du petit maillage (point  $P_i$  sur la figure) ainsi que dans la zone de champ diffracté (point  $P_d$  sur la figure). Les variations temporelles du champ électrique  $\vec{E}$  associé à l'onde incidente, sont toujours représentées par une fonction Gaussienne d'amplitude  $\|\vec{E}\| = 1 V/m$ . La plus grande fréquence qui intervient dans le spectre de Fourier de cette onde est encore  $f_{max} = 200 MHz$ . Ceci correspond à un échantillonnage spatial minimum ( $\frac{\lambda_{min}}{\Delta x = \Delta y}$ ) égale à 10 dans le grand maillage, comme dans la simulation précédente.

Les courbes 10.6 à 10.9 montrent le champ  $E_v$  diffracté (point  $P_d$ ) ainsi que le champ  $e_v$  à l'intérieur du petit maillage (point  $P_i$ ) avec deux points de vue différents. Une vue en gros plan est proposée afin de montrer les variations du champ électrique et la vue d'ensemble permet d'apprécier la stabilité de l'algorithme. Pour chaque courbe nous avons également représenté les variations des champs électriques obtenus sans la présence du sous-maillage. Nous constatons une fois de plus que l'algorithme est stable et qu'il calcule correctement les champs, alors que la version interpolée de ce modèle n'est pas stable<sup>4</sup>. Finalement la conservation de l'énergie s'applique aussi simplement que dans le cas du modèle 2D-TE et elle permet de plus d'obtenir la stabilisation du modèle 2D-TM.

<sup>3</sup>Le lecteur pourra se reporter cette fois-ci au paragraphe 2.4.2.2 pour obtenir plus de détails sur ce type de simulation.

<sup>4</sup>Non représentée ici.

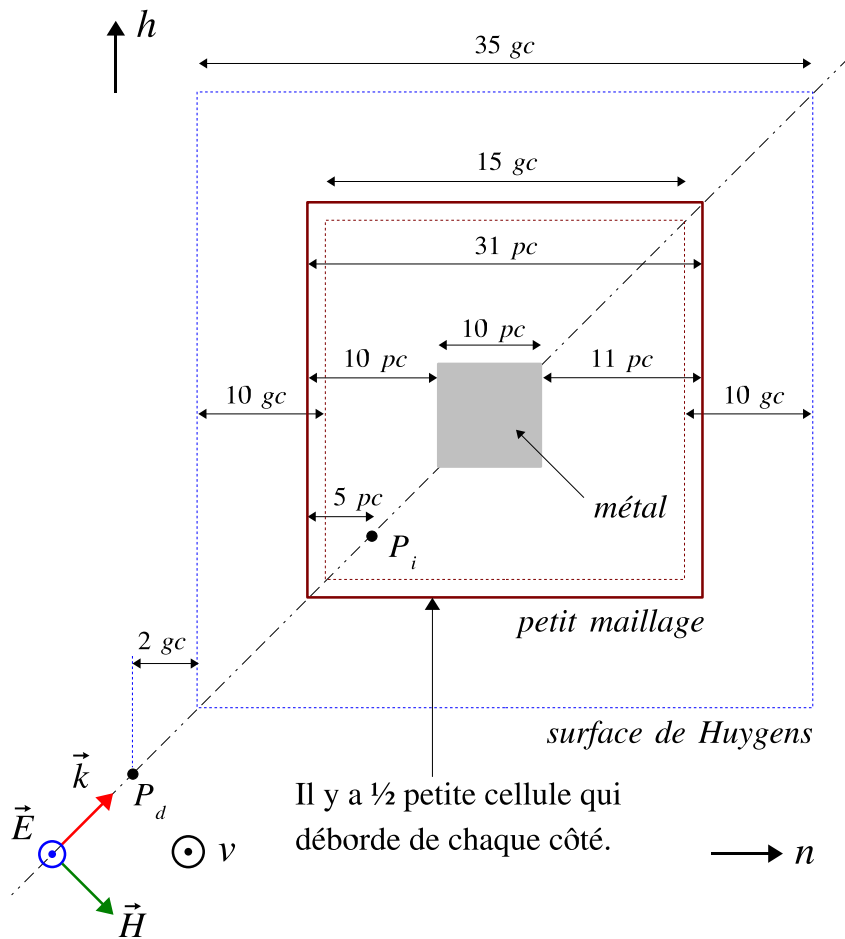


FIG. 10.5 – Test de la stabilité.

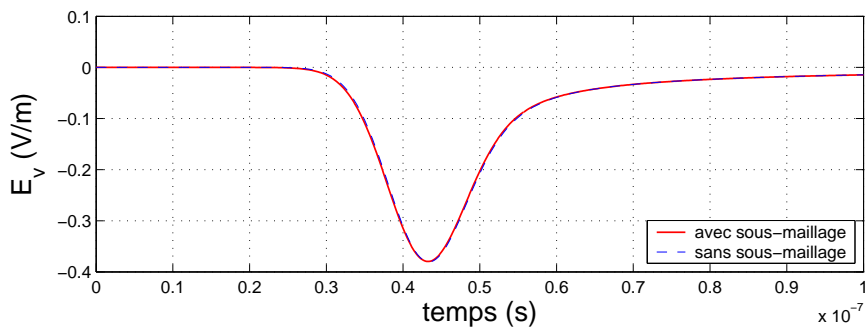


FIG. 10.6 – Champs électriques diffractés relevés au point  $P_d$  (vue en gros plan).

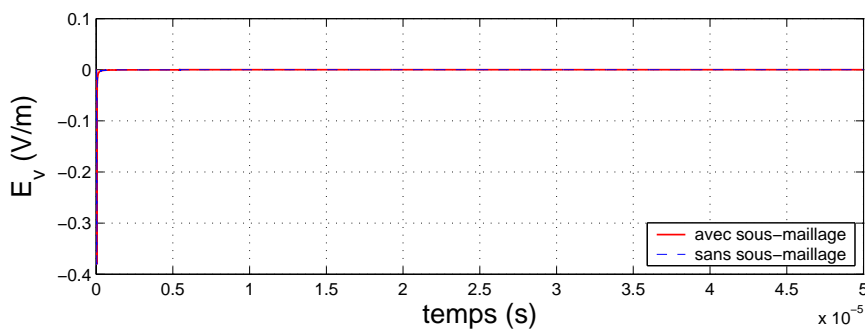


FIG. 10.7 – Champs électriques diffractés relevés au point  $P_d$  (vue d'ensemble).



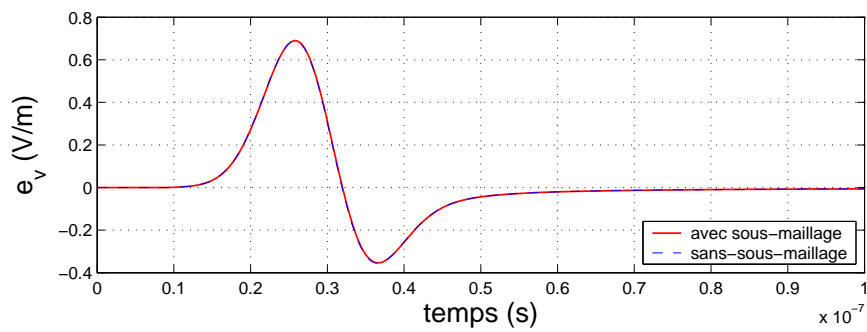


FIG. 10.8 – Champs électriques dans le petit maillage relevés au point  $P_i$  (vue en gros plan).

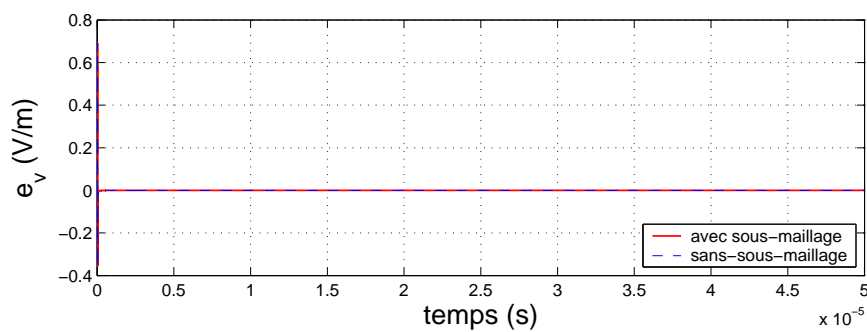


FIG. 10.9 – Champs électriques dans le petit maillage relevés au point  $P_i$  (vue d'ensemble).

# Chapitre 11

## Conclusion

Dans cette partie nous avons répondu partiellement aux objectifs que nous nous étions fixé dans le paragraphe 2.3.2. Nous avons bien présenté la méthode variationnelle en détail et en utilisant des outils mathématiques simples ; mais nous n'avons réalisé la stabilisation des modèles de sous-maillage que dans un espace à deux dimensions et seulement avec une version simplifiée de la méthode variationnelle. De plus l'élaboration d'un schéma de raffinement spatial 3D basé uniquement sur le théorème de Poynting, semble difficile à réaliser à l'aide de simples équations de flux découplées. Cela tient à la disposition des composantes  $(E_h, e_h)$  et  $(E_v, e_v)$ . En effet, on ne peut pas utiliser en même temps la méthode du modèle 2D-TE pour le couple  $(E_h, e_h)$  et la méthode du modèle 2D-TM pour le couple  $(E_v, e_v)$ , à cause du décalage des cellules que cette dernière méthode implique. Cela aurait été pourtant la méthode la plus simple. Nous avons alors construit un modèle utilisant des flux centrés <sup>1</sup> sur les faces et un traitement spécifique sur les arêtes. Malheureusement cette stratégie n'a pas fonctionné, les algorithmes relatifs aux faces et aux arêtes sont stables lorsqu'ils fonctionnent séparément mais ils produisent des instabilités lorsqu'ils fonctionnent ensemble. Nous pensons que ce comportement est dû au fait que nos équations de conservation sont écrites localement sur chaque grande cellule. Il semblerait que le découplage des équations de flux, qui donne de bons résultats en deux dimensions, ne soit pas applicable dans un espace à trois dimensions.

---

<sup>1</sup>Ceci permet d'écrire le même système d'équations pour les deux couples d'inconnues  $(E_h, e_h)$  et  $(E_v, e_v)$ .

**Cinquième partie**

**Conclusion générale et perspectives**

Nous avons commencé par élaborer un schéma de sous-maillage 3D basé sur des relations d'interpolation. Ce schéma, qui a été conçu avec un facteur de raffinement égale à deux, produit des instabilités. Ce comportement est classique lorsque des relations d'interpolation sont utilisées. La réflexion numérique obtenue ( $-50 \text{ dB}$  pour  $\frac{\lambda}{\Delta} = 20$ ) est satisfaisante et la durée de stabilité ( $t_{stab} = 2 \mu s$ ) est suffisamment grande pour que le schéma puisse être utilisé dans des problèmes de diffraction. Nous avons également montré que la durée de stabilité de l'algorithme augmente au fur et à mesure que le volume du petit maillage augmente. Ce point, qui n'a jamais été signalé dans la littérature, favorise les grandes simulations.

Ensuite nous avons prouvé que les instabilités de ce modèle sont dues uniquement au raffinement spatial. Pour cela nous avons extrait les parties temporelle et spatiale et nous les avons étudié séparément. A l'issue de cette étude nous avons en effet constaté que l'algorithme temporel ne présente aucun phénomène de divergence sur une durée de simulation allant jusqu'à  $50 \mu s$ . Nous avons ainsi mis à jour la stabilité numérique de la partie temporelle du schéma initial. Nous pensons que l'algorithme temporel est conservatif mais nous ne l'avons pas démontré, ce point pourra faire l'objet de futures recherches.

Le simple fait d'avoir obtenu un traitement temporel stable nous a donné l'idée de concevoir les schémas de sous-maillage comme la succession d'un algorithme temporel stable et d'un certain algorithme spatial. Dans le cadre de cette nouvelle conception, nous avons cherché à établir le lien qui existe entre les propriétés du modèle successif et les propriétés des algorithmes séparés. Nous avons d'abord montré que ce lien dépend peu de l'épaisseur qui sépare les frontières temporelle et spatiale du modèle successif. La durée de stabilité dans le petit maillage et la réflexion numérique ne dépendent pas de cette épaisseur, seule la durée de stabilité dans le grand maillage augmente lorsque l'épaisseur augmente. Ensuite nous avons fixé au minimum cette épaisseur et nous avons montré que les propriétés du modèle successif sont approximativement fixés par celles du modèle spatial seul.

A la lumière de l'étude précédente, nous nous sommes concentré sur les modèles de raffinement spatiaux. Nous avons testé un schéma de type « gradient » dans lequel les composantes de  $\vec{h}$  situées à l'extérieur du petit maillage sont déterminés à l'aide des variations spatiales de  $\vec{H}$ . Ensuite nous avons essayé un autre schéma que nous avons qualifié de « réciproque » dans lequel nous avons symétrisé les traitements effectués de part et d'autre de la frontière. Nous avons également testé un modèle utilisant des relations d'interpolation quadratiques, et pour finir nous avons essayé un schéma de recouvrement. Les résultats obtenus montrent que tous ces schémas ont des comportement similaires, c'est à dire qu'ils sont tous tôt où tard le siège d'instabilités. Nous avons tout de même remarqué que le schéma de type gradient possède des propriétés convenables, il ne produit pas de champ résiduel et la durée de stabilité obtenue est comparable à celle du schéma de départ.

Pour finir cette partie concernant les interpolations, nous avons généralisé notre méthode de conception à des schémas possédant des facteurs de raffinement plus élevés. C'est ainsi que nous mettons à jour des algorithmes temporels stables pour des facteurs de raffinement égaux à trois, quatre et cinq. Comme précédemment la stabilité est obtenue sur une durée de simulation égale à  $50 \mu s$  et nous pensons là aussi que ces trois schémas temporels sont conservatifs, bien sûr ceci reste à démontrer mathématiquement. Trois modèles de sous-maillage spatial sont finalement étudiés (un pour chaque facteur de raffinement), les durées de stabilité obtenues sont alors semblables à celles du modèle spatial pour lequel  $r_s = 2$ .

Partant de ce dernier constat nous avons abordé les méthodes de sous-maillage basées sur la

conservation de l'énergie électromagnétique. Ces méthodes permettent en effet d'obtenir la stabilité des algorithmes, cependant elles sont développées dans des cadres mathématiques abstraits si bien qu'elles sont difficilement transposables dans le cadre des différences finies centrées. Ainsi nous avons repris la méthode variationnelle en l'expliquant dans tous ces détails. Ce travail pédagogique devait être fait afin de rendre cette méthode plus accessible. Nous sommes partis des équations de Maxwell écrites dans les deux domaines, nous avons ensuite découplé ces équations en introduisant des courants surfaciques, le système obtenu a ensuite été écrit sous forme variationnelle afin que la décomposition en éléments finis mène à un système matriciel exploitable. Nous avons ensuite procédé à la discrétisation temporelle du système matriciel et nous avons montré le lien qui existe entre la conservation de l'énergie et la manière de discrétiser la condition de continuité du champ électrique sur l'interface. Nous avons finalement développé tous les éléments de matrice du système d'équations et ainsi obtenu le schéma final de raccordement.

Même lorsqu'elle est traduite en termes simples la méthode variationnelle reste compliquée à mettre en oeuvre. Nous avons alors cherché une méthode équivalente et plus simple. Pour cela nous avons utilisé directement le théorème de Poynting sur l'interface, puis nous avons proposé une hypothèse permettant de découpler les équations discrètes de conservation. Cette méthode simplifiée a été appliquée avec succès aux modèles spatiaux 2D-TE et 2D-TM, la stabilisation de ces deux schémas a effectivement été obtenue. Naturellement nous avons essayé d'appliquer notre méthode au modèle spatial 3D. La disposition des composantes que l'on trouve dans ce cas, nous a alors amenée à utiliser des flux centrés sur les faces et à effectuer un traitement particulier au niveau des arêtes. Cette dernière méthode n'a pas fonctionné et nous pensons que cela est dû au découplage des équations. Ce dernier point devrait faire l'objet de futures recherches, nous pensons qu'il est possible de trouver une autre simplification de la méthode variationnelle qui soit applicable au modèle spatial 3D. Si cela n'est pas le cas nous aurons toujours la possibilité d'adapter la méthode variationnelle initiale au cas du sous-maillage spatial 3D.

# **Sixième partie**

## **Annexes**

# Annexe A

## Equations de Maxwell discrétisées

### A.1 Equations discrètes dans le vide

#### A.1.1 Pour les composantes du champ électrique

$$E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^{n+1} \simeq E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \frac{H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right\}$$

$$E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^{n+1} \simeq E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \frac{H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right\}$$

$$E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^{n+1} \simeq E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \cdot \left\{ \frac{H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y, i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x, i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right\}$$

#### A.1.2 Pour les composantes du champ magnétique

$$H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \frac{E_{z, i, j+1, k+\frac{1}{2}}^n - E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - \frac{E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k+1}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta z} \right\}$$

$$H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k+1}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z, i+1, j, k+\frac{1}{2}}^n - E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right\}$$

$$H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} \simeq H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \left\{ \frac{E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}, k}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta x} - \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j+1, k}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta y} \right\}$$

## A.2 Equations discrètes dans les milieux diélectriques et magnétiques

### A.2.1 Pour les composantes du champ électrique

$$\begin{aligned}
 E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^{n+1} &\simeq A_x \cdot E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n + \\
 B_x \cdot \frac{\Delta t}{\varepsilon_x} &\cdot \left\{ \frac{H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right\} \\
 E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^{n+1} &\simeq A_y \cdot E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n + \\
 B_y \cdot \frac{\Delta t}{\varepsilon_y} &\cdot \left\{ \frac{H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right\} \\
 E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^{n+1} &\simeq A_z \cdot E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n + \\
 B_z \cdot \frac{\Delta t}{\varepsilon_z} &\cdot \left\{ \frac{H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y, i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{x, i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right\}
 \end{aligned}$$

### A.2.2 Pour les composantes du champ magnétique

$$\begin{aligned}
 H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &\simeq H_{x, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \\
 B_x \cdot \frac{\Delta t}{\mu_x} &\cdot \left\{ \frac{E_{z, i, j+1, k+\frac{1}{2}}^n - E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - \frac{E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k+1}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta z} \right\} \\
 H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &\simeq H_{y, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \\
 B_y \cdot \frac{\Delta t}{\mu_y} &\cdot \left\{ \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k+1}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z, i+1, j, k+\frac{1}{2}}^n - E_{z, i, j, k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right\} \\
 H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n+\frac{1}{2}} &\simeq H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{n-\frac{1}{2}} - \\
 B_z \cdot \frac{\Delta t}{\mu_z} &\cdot \left\{ \frac{E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}, k}^n - E_{y, i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta x} - \frac{E_{x, i+\frac{1}{2}, j+1, k}^n - E_{x, i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta y} \right\}
 \end{aligned}$$

Les coefficients  $A_l$  et  $B_l$  sont donnés par :

$$A_l = \frac{1 - \frac{\sigma_l \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_l}}{1 + \frac{\sigma_l \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_l}}$$

et :

$$B_l = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_l \cdot \Delta t}{2 \cdot \varepsilon_l}}$$

avec  $l = x, y$  ou  $z$ .



# Annexe B

## Champ diffracté et champ à l'intérieur du petit maillage en fonction du nombre de cellules $q$

### B.1 Champs diffractés

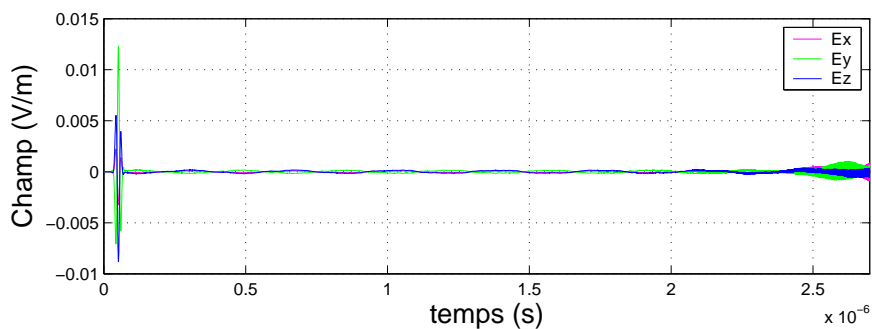


FIG. B.1 – Champ diffracté pour  $q = 1$ .

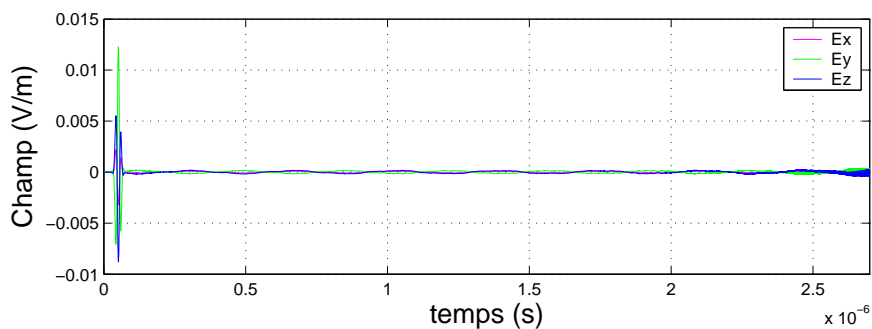


FIG. B.2 – Champ diffracté pour  $q = 2$ .

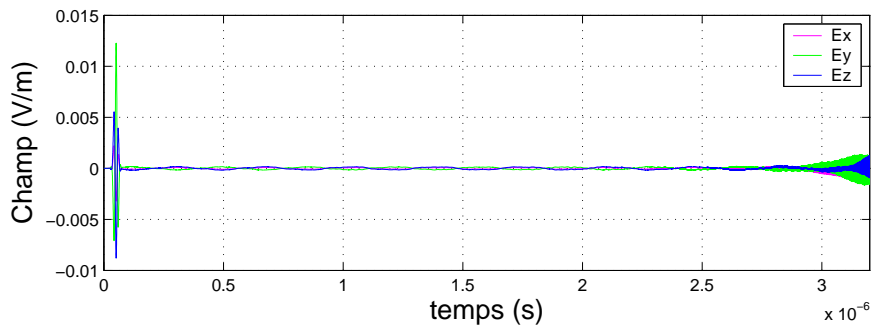


FIG. B.3 – Champ diffracté pour  $q = 3$ .

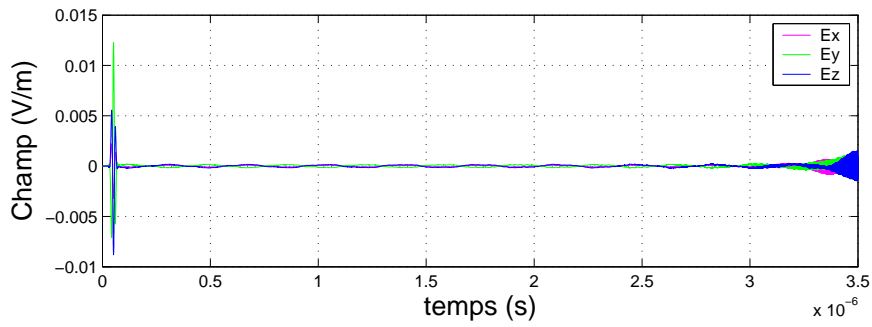


FIG. B.4 – Champ diffracté pour  $q = 4$ .

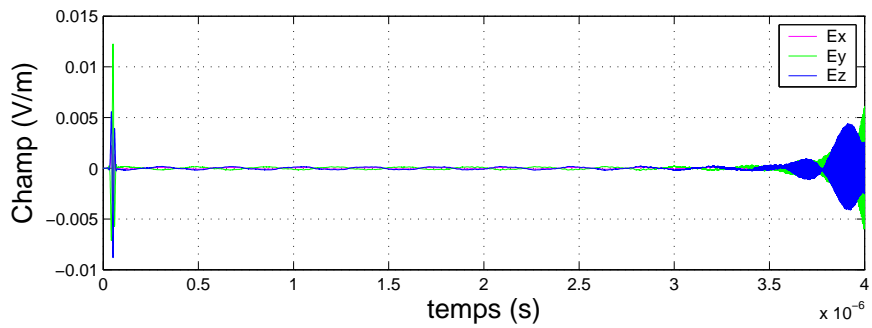


FIG. B.5 – Champ diffracté pour  $q = 5$ .

## B.2 Champs à l'intérieur du petit maillage

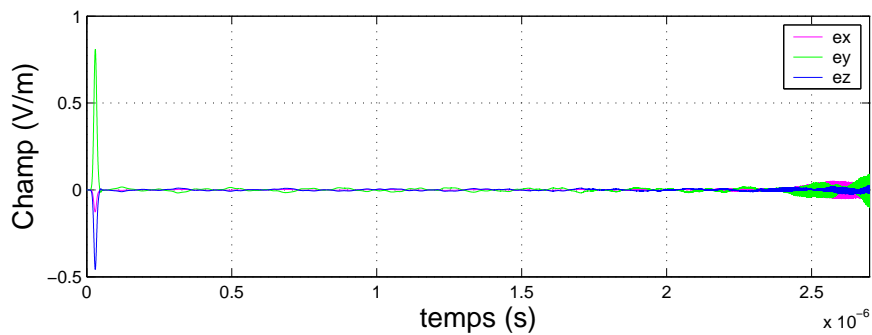


FIG. B.6 – Champ dans le petit maillage pour  $q = 1$ .

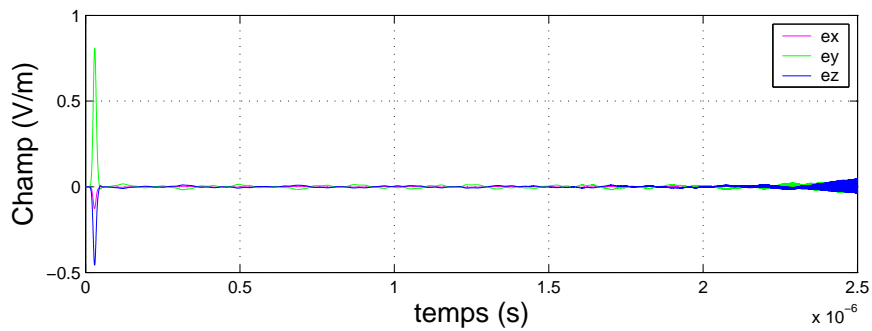


FIG. B.7 – Champ dans le petit maillage pour  $q = 2$ .

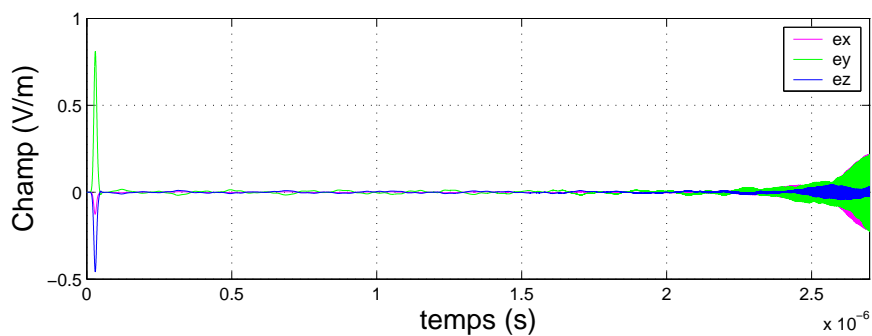


FIG. B.8 – Champ dans le petit maillage pour  $q = 3$ .

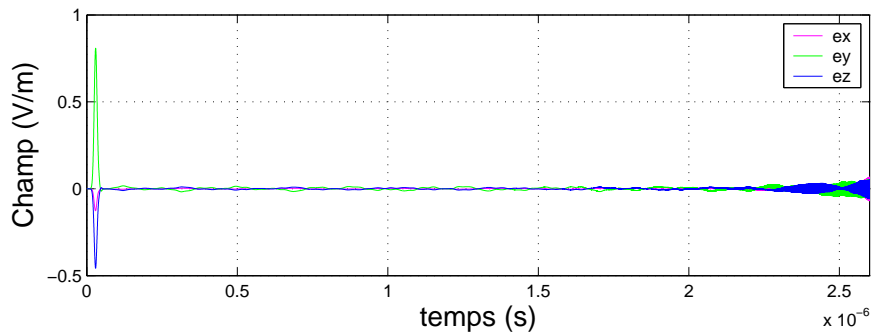


FIG. B.9 – Champ dans le petit maillage pour  $q = 4$ .

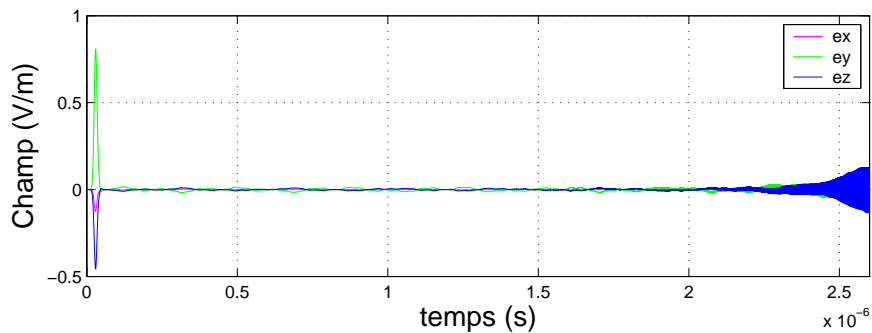


FIG. B.10 – Champ dans le petit maillage pour  $q = 5$ .

# Annexe C

## Définition des matrices

Les matrices  $\mathbf{M}_E$ ,  $\mathbf{M}_H$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont relatives au grand maillage et elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_E = (((\mathbf{M}_E)_{\alpha,\alpha'}))_{\alpha\alpha'} \\ \mathbf{M}_H = (((\mathbf{M}_H)_{\alpha,\alpha'}))_{\alpha,\alpha'} \\ \mathbf{B} = ((\mathbf{B}_{\alpha,\alpha'}))_{\alpha,\alpha'} \\ \mathbf{C} = ((\mathbf{C}_{\epsilon,\alpha}))_{\epsilon,\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{M}_E)_{\alpha,\alpha'} = \langle \vec{\Gamma}_\alpha(M), \vec{\Gamma}_{\alpha'}(M) \rangle_{V_d} \\ (\mathbf{M}_H)_{\alpha,\alpha'} = \langle \vec{\Delta}_\alpha(M), \vec{\Delta}_{\alpha'}(M) \rangle_{W_d} \\ (\mathbf{B})_{\alpha,\alpha'} = B \left( \vec{\Gamma}_\alpha(M), \vec{\Delta}_{\alpha'}(M) \right) \\ (\mathbf{C})_{\epsilon,\alpha} = C \left( \vec{\Pi}_\epsilon(M), \vec{\Gamma}_\alpha(M) \right) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

Les matrices  $\mathbf{m}_e$ ,  $\mathbf{m}_h$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont relatives au petit maillage et elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_e = (((\mathbf{m}_e)_{\beta,\beta'}))_{\beta,\beta'} \\ \mathbf{m}_h = (((\mathbf{m}_h)_{\beta,\beta'}))_{\beta,\beta'} \\ \mathbf{b} = ((\mathbf{b}_{\beta,\beta'}))_{\beta,\beta'} \\ \mathbf{c} = ((\mathbf{c}_{\epsilon,\beta}))_{\epsilon,\beta} \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{m}_e)_{\beta,\beta'} = \langle \vec{\gamma}_\beta(M), \vec{\gamma}_{\beta'}(M) \rangle_{v_d} \\ (\mathbf{m}_h)_{\beta,\beta'} = \langle \vec{\delta}_\beta(M), \vec{\delta}_{\beta'}(M) \rangle_{w_d} \\ (\mathbf{b})_{\beta,\beta'} = b \left( \vec{\gamma}_\beta(M), \vec{\delta}_{\beta'}(M) \right) \\ (\mathbf{c})_{\epsilon,\beta} = c \left( \vec{\Pi}_\epsilon(M), \vec{\gamma}_\beta(M) \right) \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

## Annexe D

### Conservation de $\vec{J}_d$ sur $\Sigma$

Prenons la divergence du courant discret  $\vec{J}_d$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \vec{J}_d(M, t) \right) &= \sum_l \sum_m J_{l,m}^u(t) \cdot \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\Pi}_{l,m}^u(M) \right) + \\ &\quad \sum_l \sum_m J_{l,m}^v(t) \cdot \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\Pi}_{l,m}^v(M) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A l'aide des relations 8.70, 8.62 et 8.63 et en introduisant la fonction  $\mathbf{Y}_{l,m}$  définie par :

$$\mathbf{Y}_{l,m}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si : } (u, v) \in [l\Delta u, (l+1)\Delta u] \times [m\Delta v, (m+1)\Delta v] \\ 0 & \text{si : } (u, v) \notin [l\Delta u, (l+1)\Delta u] \times [m\Delta v, (m+1)\Delta v] \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

on montre que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\Pi}_{l,m}^u(M) \right) = \frac{\partial \Pi_{l,m}^u}{\partial u}(M) = \mathbf{Y}_{l-1,m}(u, v) - \mathbf{Y}_{l,m}(u, v) \\ \text{et : } \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\Pi}_{l,m}^v(M) \right) = \frac{\partial \Pi_{l,m}^v}{\partial v}(M) = \mathbf{Y}_{l,m-1}(u, v) - \mathbf{Y}_{l,m}(u, v) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Avec cependant les quatres cas particuliers suivants, relatifs aux arêtes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\Pi}_{1,m}^u}{\partial u}(M) = -\mathbf{Y}_{1,m}(u, v) \\ \frac{\partial \overline{\Pi}_{l_m+1,m}^u}{\partial u}(M) = \mathbf{Y}_{l_m,m}(u, v) \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\Pi}_{l,1}^v}{\partial v}(M) = -\mathbf{Y}_{l,1}(u, v) \\ \frac{\partial \overline{\Pi}_{l,m_m+1}^v}{\partial v}(M) = \mathbf{Y}_{l,m_m}(u, v) \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

En remplaçant D.3 , D.4 et D.5 dans D.1 on trouve :

$$\operatorname{div} \left( \vec{J}_d(M, t) \right) = - \sum_{m=1}^{m_m+1} J_{1,m}^u \cdot \mathbf{Y}_{1,m} + \sum_{m=1}^{m_m+1} J_{l_m+1,m}^u \cdot \mathbf{Y}_{l_m,m} +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=2}^{l_m} \sum_{m=1}^{m_{m+1}} J_{l,m}^u \cdot (\mathbf{Y}_{l-1,m} - \mathbf{Y}_{l,m}) - \\
& \sum_{l=1}^{l_m+1} J_{l,1}^v \cdot \mathbf{Y}_{l,1} + \sum_{l=1}^{l_m+1} J_{l,m_{m+1}}^v \cdot \mathbf{Y}_{l,m_{m+1}} + \\
& \sum_{m=2}^{m_m} \sum_{l=1}^{l_m+1} J_{l,m}^v \cdot (\mathbf{Y}_{l,m-1} - \mathbf{Y}_{l,m})
\end{aligned}$$

soit après réorganisation des termes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left( \vec{J}_d(M, t) \right) &= \sum_{m=1}^{m_{m+1}} \sum_{l=1}^{l_m} (J_{l+1,m}^u - J_{l,m}^u) + \\
& \sum_{l=1}^{l_m+1} \sum_{m=1}^{m_m} (J_{l,m+1}^v - J_{l,m}^v)
\end{aligned}$$

Dans chaque double somme de cette dernière expression les termes s'annulent deux à deux, sauf le premier et le dernier. Il reste donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left( \vec{J}_d(M, t) \right) &= \sum_{m=1}^{m_{m+1}} [J_{l_{m+1},m}^u - J_{1,m}^u] + \\
& \sum_{l=1}^{l_m+1} [J_{l,m_{m+1}}^v - J_{l,1}^v]
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Ainsi sur la face considérée, nous trouvons que la divergence n'est pas nulle à cause des coefficients de décomposition  $J_{l,m}^\sigma(t)$  qui se situent sur les arêtes. Ces coefficients sont heureusement compensés par leurs homologues des faces adjacentes, à condition toutefois de garder le même coefficient de décomposition pour chacun des couples qui sont constitués par deux « demi éléments finis ».

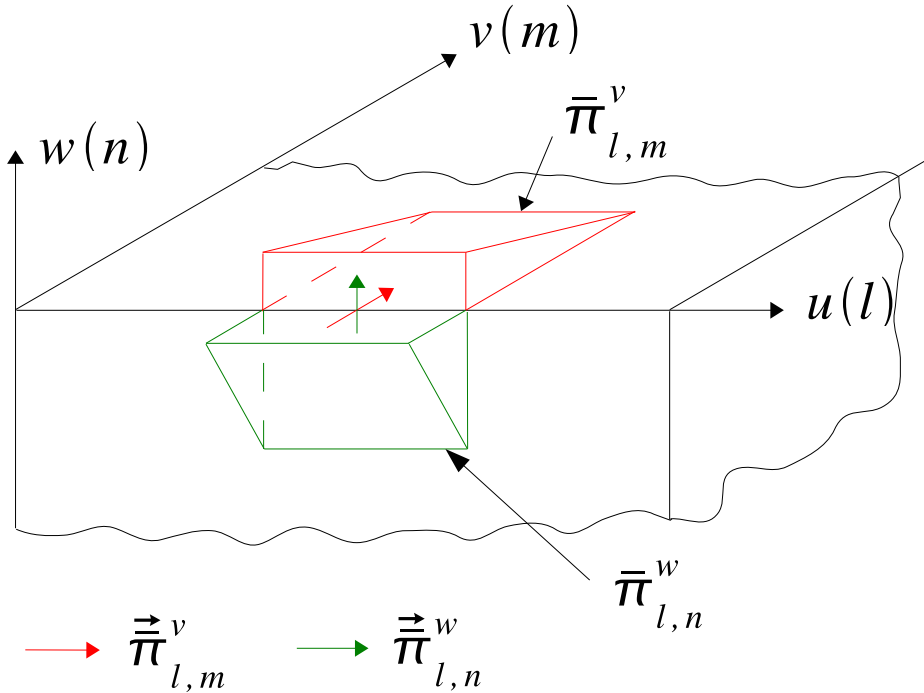


FIG. D.1 – Association de deux « demi éléments finis » sur une arête.

Avec cette condition nous avons bien sûr l'ensemble de la surface  $\Sigma$  :

$$\operatorname{div}(\vec{J}_d(M, t)) = \vec{0} \quad (\text{D.7})$$

# Annexe E

## Calcul des matrices

Avant de commencer précisons une convention d'écriture. Elle est la suivante : lorsque l'on calcule la quantité  $(X)_{a,a'}$  ou bien la quantité transposée  $(X)_{a',a}$ , il est supposé que les indices représentés par  $a$  sont *fixés* et que les indices représentés par  $a'$  sont *variables*.

### E.1 Calcul des composantes de $\mathbf{m}_e$

#### E.1.1 Calculs généraux

D'après les relations de définition C.4, on a :

$$(\mathbf{m}_e)_{\beta,\beta'} = \langle \vec{\gamma}_\beta(M), \vec{\gamma}_{\beta'}(M) \rangle_{v_d} = \int_D \vec{\gamma}_\beta(M) \bullet \vec{\gamma}_{\beta'}(M) \cdot dV_M$$

Or :

$$\begin{cases} \beta = (\sigma, p, q, r) \\ \text{et : } \beta' = (\sigma', p', q', r') \end{cases}$$

donc :

$$(\mathbf{m}_e)_{\beta,\beta'} = \int_D \gamma_{p,q,r}^\sigma(M) \cdot \gamma_{p',q',r'}^{\sigma'}(M) \cdot \vec{i}_\sigma \bullet \vec{i}_{\sigma'} \cdot dV_M$$

Mais :

$$\vec{i}_\sigma \bullet \vec{i}_{\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'}$$

où  $\delta_{\sigma,\sigma'}$  représente le symbole de Kronecker. Si bien que :

$$(\mathbf{m}_e)_{\beta,\beta'} = (\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma'} = \int_D \gamma_{p,q,r}^\sigma(M) \cdot \gamma_{p',q',r'}^{\sigma'}(M) \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot dV_M$$

Cette dernière relation nous montre que la composante  $(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma'}$  est nulle lorsque  $\sigma' \neq \sigma$ . Ainsi les seuls termes que nous avons à déterminer sont de la forme  $(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma}$ . Dans ce cas il est possible d'écrire une version simplifiée de la relation précédente, c'est à dire :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma'} = (\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'}$$

avec :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma,\sigma} = \int_D \gamma_{p,q,r}^\sigma(M) \cdot \gamma_{p',q',r'}^\sigma(M) \cdot dV_M$$



Dans tout ce qui suit nous prenons  $\sigma = x$ , sachant que les résultats obtenus se transposeront facilement aux cas où  $\sigma = y$  et  $z$ . En remplaçant la relation de définition 8.65 de l'élément fini  $\gamma_{p,q,r}^x$  dans la relation précédente, on obtient :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \int_D b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z) \cdot b_{p'}(x) \cdot a_{q'}(y) \cdot a_{r'}(z) \cdot dV_M$$

Dans cette dernière expression, l'intégrand est un produit de fonctions d'une seule variable. Dans ce cas l'intégrale sur le domaine  $D$  peut s'écrire comme le produit de trois intégrales simples :  $\int_D dV_M \equiv \int_x dx \cdot \int_y dy \cdot \int_z dz$ . Ainsi :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \int_x b_p \cdot b_{p'} \cdot dx \cdot \int_y a_q \cdot a_{q'} \cdot dy \cdot \int_z a_r \cdot a_{r'} \cdot dz$$

Posons :

$$\begin{cases} A_{l, l'} = \int_s a_l(s) \cdot a_{l'}(s) \cdot ds \\ \text{et : } B_{l, l'} = \int_s b_l(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Dans ce cas on obtient :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot B_{p, p'} \cdot A_{q, q'} \cdot A_{r, r'} \quad (\text{E.2})$$

Il faut maintenant déterminer les expressions des quantités  $B_{p, p'}$ ,  $A_{q, q'}$  et  $A_{r, r'}$ . De manière plus générale cela revient à calculer les coefficients  $A_{l, l'}$  et  $B_{l, l'}$ . Les détails de leurs calculs sont exposés dans les annexes F et G. Les résultats sont les suivants :

$$B_{l, l'} = \delta_{l, l'} \cdot \delta s$$

et :

$$A_{l, l'} = \theta_l \cdot \delta_{l, l'} \cdot \delta s$$

avec :

- $\theta_l = \frac{1}{2}$  si  $M(p, q, r)$  appartient au plan d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ou bien au plan d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$ .
- $\theta_l = 1$  dans les autres cas.

Maintenant que les coefficients  $A_{l, l'}$  et  $B_{l, l'}$  sont connus, on peut reporter leurs expressions dans E.2. Cela donne :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \theta_q \cdot \delta_{q, q'} \cdot \theta_r \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v \quad (\text{E.3})$$

avec  $\delta v = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ .

Nous voyons que le résultat obtenu dépend de l'emplacement du point  $M(p, q, r)$  via les deux coefficients  $\theta_q$  et  $\theta_r$ .

## E.1.2 récapitulatif

Pour cette partie on se rapportera à la figure suivante :

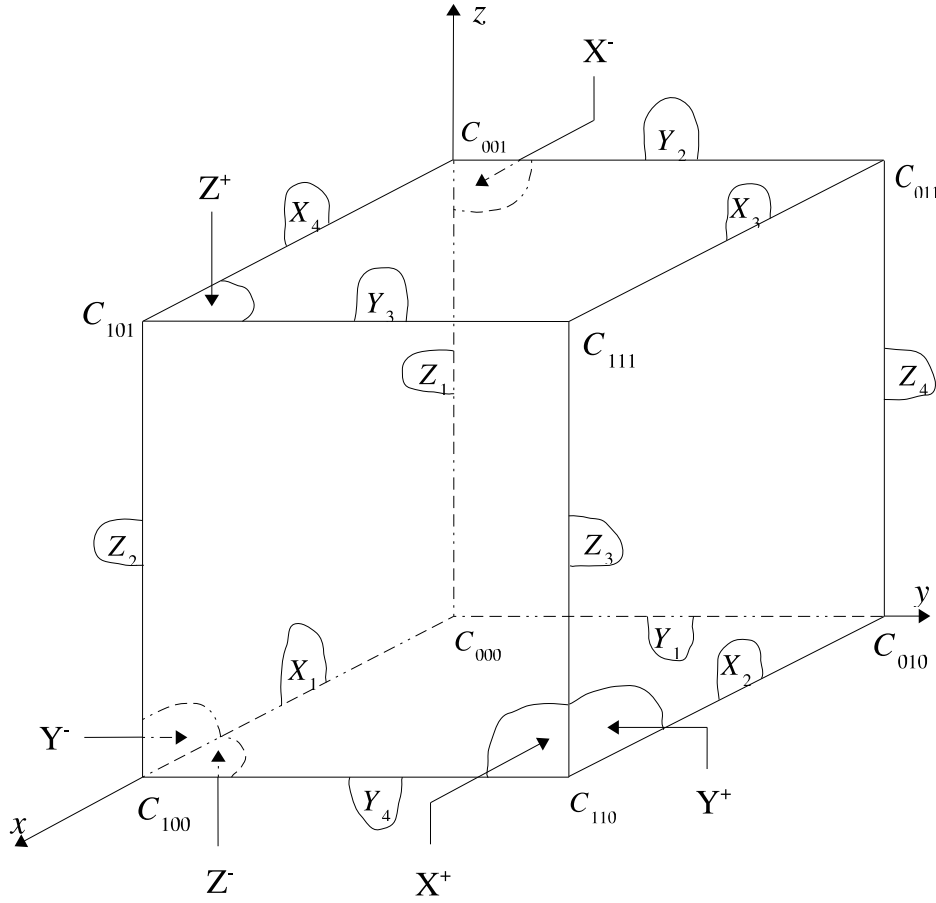


FIG. E.1 – Vue d'ensemble des faces, des arêtes et des coins.

Dans l'expression E.3 le terme  $\theta_q \cdot \theta_r$  peut prendre les valeurs  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  ou 1 selon l'emplacement du point  $M(p, q, r)$ . En fait il y a trois cas à envisager.

a) Le point  $M(p, q, r)$  est situé sur :

- Les faces  $Y^-$  et  $Y^+$ , arêtes  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  incluses et arêtes  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  exclues.
- Les faces  $Z^-$  et  $Z^+$ , arêtes  $Y_1, Y_2, Y_3$  et  $Y_4$  incluses et arêtes  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  exclues.

Alors  $\theta_q \cdot \theta_r = \frac{1}{2}$  si bien que :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v$$

b) Le point  $M(p, q, r)$  est situé sur les arêtes  $X_1, X_2, X_3$  ou  $X_4$ . Alors  $\theta_q \cdot \theta_r = \frac{1}{4}$  si bien que :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v$$

c) Le point  $M(p, q, r)$  est situé :

- dans  $\in D \setminus \{\Sigma\}$ .
- sur les faces  $X^-$  et  $X^+$ , arêtes exclues.

Alors,  $\theta_q \cdot \theta_r = 1$  si bien que :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v$$

Nous pouvons résumer ces trois cas en écrivant :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{p,p'} \cdot \delta_{q,q'} \cdot \delta_{r,r'} \cdot \delta v \cdot N_c \{a_x(p, q, r)\} \cdot \delta_{x, \sigma'}$$

où  $N_c \{a_x(p, q, r)\}$  est le nombre de cellules qui en même temps appartiennent à  $\mathcal{D}$  et ont en commun l'arête  $x$  de la cellule  $(p, q, r)$ , c'est à dire l'arête d'équation :

$$\begin{cases} x \in [p\delta x, (p+1)\delta x] \\ y = q\delta y \\ z = r\delta z \end{cases}$$

Pour les composantes  $(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{y, \sigma'}$  et  $(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{z, \sigma'}$ , nous obtenons deux relations similaires, si bien que l'on peut écrire le résultat général suivant :

$$(\mathbf{m}_e)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{p,p'} \cdot \delta_{q,q'} \cdot \delta_{r,r'} \cdot \delta v \cdot N_c \{a_\sigma(p, q, r)\} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (\text{E.4})$$

avec :  $N_c \{a_\sigma(p, q, r)\} =$  le nombre de cellules qui en même temps,  $\in \mathcal{D}$  et ont en commun l'arête  $\sigma$  de la cellule  $(p, q, r)$ .

## E.2 Calcul des composantes de $\mathbf{m}_e^{-1}$

Nous venons de montrer que la matrice  $\mathbf{m}_e$  est diagonale. Dans ce cas  $\mathbf{m}_e^{-1}$  est également diagonale et les éléments diagonaux de  $\mathbf{m}_e^{-1}$  sont les inverses des éléments diagonaux de  $\mathbf{m}_e$ .

## E.3 Calcul des composantes de $\mathbf{m}_h$

Nous allons montrer dans cette partie qu'il est également possible d'écrire une formule générale analogue à E.4 pour les composantes de  $\mathbf{m}_h$ .

### E.3.1 Calculs généraux

D'après la relation de définition C.4, on a :

$$(\mathbf{m}_h)_{\beta, \beta'} = \langle \vec{\delta}_\beta(M), \vec{\delta}_{\beta'}(M) \rangle_{w_d} = \int_D \vec{\delta}_\beta(M) \bullet \vec{\delta}_{\beta'}(M) \cdot dV_M$$

Or :

$$\begin{cases} \beta = (\sigma, p, q, r) \\ \text{et : } \beta' = (\sigma', p', q', r') \end{cases}$$

donc :

$$(\mathbf{m}_h)_{\beta, \beta'} = \int_D \delta_{p,q,r}^\sigma(M) \cdot \delta_{p',q',r'}^{\sigma'}(M) \cdot \vec{i}_\sigma \bullet \vec{i}_{\sigma'} \cdot dV_M$$

Mais :

$$\vec{i}_\sigma \bullet \vec{i}_{\sigma'} = \delta_{\sigma, \sigma'}$$

si bien que :

$$(\mathbf{m}_h)_{\beta, \beta'} = (\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'} = \int_D \delta_{p,q,r}^\sigma(M) \cdot \delta_{p',q',r'}^{\sigma'}(M) \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot dV_M$$

Cette dernière relation nous montre que les composantes  $(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'}$  sont nulles lorsque  $\sigma' \neq \sigma$ . Ainsi les seuls termes que nous avons à déterminer sont de la forme  $(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma}$ . Dans ce cas il est possible d'écrire une version simplifiée de la relation précédente, c'est à dire :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'} = (\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'}$$

avec :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma} = \int_D \delta_{p,q,r}^{\sigma}(M) \cdot \delta_{p',q',r'}^{\sigma}(M) \cdot dV_M$$

Dans tout ce qui suit nous prenons  $\sigma = x$ , sachant que les résultats obtenus se transposent facilement aux cas où  $\sigma = y$  et  $z$ . A l'aide des relations de définition 8.69 des éléments finis  $\delta_{p,q,r}^x$ , la relation précédente devient :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \int_D a_p(x) \cdot b_q(y) \cdot b_r(z) \cdot a_{p'}(x) \cdot b_{q'}(y) \cdot b_{r'}(z) \cdot dV_M$$

L'intégrand qui intervient dans cette dernière expression est un produit de fonctions d'une seule variable, si bien que l'intégrale sur le domaine  $D$  peut s'écrire comme le produit de trois intégrales simples :  $\int_D dV_M = \int_x dx \cdot \int_y dy \cdot \int_z dz$ . Donc :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \int_x a_p \cdot a_{p'} \cdot dx \cdot \int_y b_q \cdot b_{q'} \cdot dy \cdot \int_z b_r \cdot b_{r'} \cdot dz$$

C'est à dire compte tenu de E.1 :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot A_{p,p'} \cdot B_{q,q'} \cdot B_{r,r'} \quad (\text{E.5})$$

Les expressions des quantités  $A_{i,l'}$  et  $B_{i,l'}$  ont déjà été établies dans les annexes F et G. Nous pouvons donc remplacer leurs expressions dans E.5. Cela donne :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \theta_p \cdot \delta_{p,p'} \cdot \delta_{q,q'} \cdot \delta_{r,r'} \cdot \delta v \quad (\text{E.6})$$

Cette fois-ci nous voyons que le résultat obtenu dépend de l'emplacement du point  $M(p, q, r)$  via le coefficients  $\theta_p$ .

### E.3.2 récapitulatif

Dans cette partie on se reportera de nouveau à la figure E.1.

Dans l'expression E.6 le terme  $\theta_p$  peut prendre les valeurs  $\frac{1}{2}$  ou 1 selon l'emplacement du point  $M(p, q, r)$ . En fait il n'y a que deux cas à envisager.

a) Le point  $M(p, q, r)$  est situé sur les faces  $X^-$  et  $X^+$ , arêtes et coins inclus. Alors  $\theta_p = \frac{1}{2}$  si bien que :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p,p'} \cdot \delta_{q,q'} \cdot \delta_{r,r'} \cdot \delta v$$

b) Le point  $M(p, q, r)$  est situé :

– dans  $D \setminus \{\Sigma\}$ .

- sur les faces  $Y^-$  et  $Y^+$ , arêtes  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  exclues et arêtes  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  incluses (sans les coins).
- sur les faces  $Z^-$  et  $Z^+$ , arêtes  $Y_1, Y_2, Y_3$  et  $Y_4$  exclues et arêtes  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  incluses (sans les coins).

Alors  $\theta_p = 1$  si bien que :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v$$

Nous pouvons résumer ces deux cas en écrivant :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v \cdot N_c \{f_{\perp x}(p, q, r)\} \cdot \delta_{x, \sigma'}$$

où  $N_c \{f_{\perp x}(p, q, r)\}$  représente le nombre de cellules qui en même temps,  $\in D$  et ont en commun la face de la cellule  $(p, q, r)$  orthogonal à la direction  $x$ , c'est à dire le secteur plan d'équation :

$$\begin{cases} x = p\delta x \\ y \in [q\delta y, (q+1)\delta y] \\ z \in [r\delta z, (r+1)\delta z] \end{cases}$$

Pour les composantes  $(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{y, \sigma'}$  et  $(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{z, \sigma'}$  nous obtenons deux relations similaires, si bien que l'on peut écrire le résultat général suivant :

$$(\mathbf{m}_h)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \delta v \cdot N_c \{f_{\perp \sigma}(p, q, r)\} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (\text{E.7})$$

avec :  $N_c \{f_{\perp \sigma}(p, q, r)\} =$  nombre de cellules qui en même temps,  $\in D$  et ont en commun la face de la cellule  $(p, q, r)$  orthogonal à la direction  $\sigma$ .

## E.4 Calcul des composantes de $\mathbf{m}_h^{-1}$

Nous venons de montrer que la matrice  $\mathbf{m}_h$  est diagonale. Dans ce cas  $\mathbf{m}_h^{-1}$  est également diagonale et les éléments diagonaux de  $\mathbf{m}_h^{-1}$  sont les inverses des éléments diagonaux de  $\mathbf{m}_h$ .

## E.5 Résultats pour les composantes de $\mathbf{M}_E, \mathbf{M}_E^{-1}, \mathbf{M}_H,$ et $\mathbf{M}_H^{-1}$

### E.5.1 Pour $\mathbf{M}_E$

La règle pratique que nous avons trouvé pour  $\mathbf{m}_e$  (E.4) se généralise dans le grand maillage, il suffit simplement d'adapter les notations. Ainsi :

$$(\mathbf{M}_E)_{ijk, i'j'k'}^{\sigma, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \Delta v \cdot N_c \{A_\sigma(i, j, k)\} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (\text{E.8})$$

avec :  $N_c \{A_\sigma(i, j, k)\} =$  nombre de cellules qui en même temps,  $\in D_{ext}$  et ont en commun l'arête  $\sigma$  de la cellule  $(i, j, k)$ . Dans la relation E.8 on a bien sûr :  $\Delta v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ .

## E.5.2 Pour $M_E^{-1}$

$M_E^{-1}$  est diagonale et les éléments diagonaux de  $M_E^{-1}$  sont les inverses des éléments diagonaux de  $M_E$ .

## E.5.3 Pour $M_H$

Là aussi la règle pratique que nous avons trouvé pour  $m_h$  (E.7) se généralise dans le grand maillage, il suffit comme précédemment d'adapter les notations. Ainsi :

$$(M_H)_{ij'k, i'j'k'}^{\sigma, \sigma'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{i, i'} \cdot \delta_{j, j'} \cdot \delta_{k, k'} \cdot \Delta v \cdot N_c \{F_{\perp\sigma}(i, j, k)\} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (E.9)$$

avec :  $N_c \{F_{\perp\sigma}(i, j, k)\}$  = nombre de cellules qui en même temps,  $\in D_{ext}$  et ont en commun la face de la cellule  $(i, j, k)$  orthogonal à la direction  $\sigma$ .

## E.5.4 Pour $M_H^{-1}$

$M_H^{-1}$  est diagonale et les éléments diagonaux de  $M_H^{-1}$  sont les inverses des éléments diagonaux de  $M_H$ .

# E.6 Calcul des composantes de $b$

## E.6.1 Calculs généraux

D'après la relation C.4, nous avons :

$$(b)_{\beta, \beta'} = b \left( \vec{\gamma}_{\beta}(M), \vec{\delta}_{\beta'}(M) \right) = \int_D \overrightarrow{rot}(\vec{\gamma}_{\beta}(M)) \bullet \vec{\delta}_{\beta'}(M) \cdot dV_M$$

Or :

$$\begin{cases} \beta = (\sigma, p, q, r) \\ \text{et : } \beta' = (\sigma', p', q', r') \end{cases}$$

ainsi :

$$(b)_{\beta, \beta'} = (b)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'} = \int_D \overrightarrow{rot} \left( \gamma_{p,q,r}^{\sigma}(M) \cdot \vec{i}_{\sigma} \right) \bullet \delta_{p',q',r'}^{\sigma'}(M) \cdot \vec{i}_{\sigma'} \cdot dV_M$$

A ce stade du calcul, nous devons déterminer les valeurs de  $\sigma'$  qui conduisent à une composante  $(b)_{pqr, p'q'r'}^{\sigma, \sigma'}$  non nulle lorsque  $\sigma$  est fixé. Pour cela il faut d'abord calculer la quantité  $\overrightarrow{rot} \left( \gamma_{p,q,r}^{\sigma} \cdot \vec{i}_{\sigma} \right)$  pour les trois valeurs possibles de  $\sigma$ . Cela donne :

– Pour  $\sigma = x$  :

$$\overrightarrow{rot} \left( \gamma_{p,q,r}^x \cdot \vec{i}^x \right) = \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_z \gamma_{p,q,r}^x \\ -\partial_y \gamma_{p,q,r}^x \end{vmatrix}$$

– Pour  $\sigma = y$  :

$$\overrightarrow{rot} \left( \gamma_{p,q,r}^y \cdot \vec{j}^y \right) = \begin{vmatrix} -\partial_z \gamma_{p,q,r}^y \\ 0 \\ \partial_x \gamma_{p,q,r}^y \end{vmatrix}$$

– Et pour  $\sigma = z$  :

$$\vec{rot} \left( \gamma_{p,q,r}^z \cdot \vec{k} \right) = \begin{vmatrix} \partial_y \gamma_{p,q,r}^z \\ -\partial_x \gamma_{p,q,r}^z \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ceci étant fait, nous voyons que pour  $\sigma = x$  il y a deux valeurs de  $\sigma'$ ,  $\sigma' = y$  et  $\sigma' = z$ , qui conduisent à des composantes non nulles. Ces deux composantes sont :

$$\begin{cases} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,y} = \int_D \partial_z \gamma_{p,q,r}^x \cdot \delta_{p',q',r'}^y \cdot dV_M \\ \text{et : } (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,z} = - \int_D \partial_y \gamma_{p,q,r}^x \cdot \delta_{p',q',r'}^z \cdot dV_M \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

Lorsque  $\sigma = y$  les composantes sont non nulles pour  $\sigma' = x$  et pour  $\sigma' = z$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y,x} = - \int_D \partial_z \gamma_{p,q,r}^y \cdot \delta_{p',q',r'}^x \cdot dV_M \\ \text{et : } (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y,z} = \int_D \partial_x \gamma_{p,q,r}^y \cdot \delta_{p',q',r'}^z \cdot dV_M \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

Enfin, lorsque  $\sigma = z$  les composantes sont non nulles pour  $\sigma' = x$  et pour  $\sigma' = y$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z,x} = \int_D \partial_y \gamma_{p,q,r}^z \cdot \delta_{p',q',r'}^x \cdot dV_M \\ \text{et : } (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z,y} = - \int_D \partial_x \gamma_{p,q,r}^z \cdot \delta_{p',q',r'}^y \cdot dV_M \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

Maintenant il faut expliciter toutes les quantités qui apparaissent dans E.10 , E.11 et E.12. Pour cela nous nous servons des relations de définition 8.65 et 8.69 des éléments finis  $\gamma_{p,q,r}^\sigma(M)$  et  $\delta_{p,q,r}^\sigma(M)$  . Nous allons voir ce que cela donne pour la première expression de E.10, puis nous donnerons directement les résultats pour les autres.

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,y} &= \int_D \partial_z \gamma_{p,q,r}^x \cdot \delta_{p',q',r'}^y \cdot dV_M = \\ & \int_D \partial_z \{ b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z) \} \cdot \{ b_{p'}(x) \cdot a_{q'}(y) \cdot b_{r'}(z) \} \cdot dV_M \end{aligned}$$

Une fois de plus l'intégrant et un produit de fonctions d'une seule variable, si bien que l'intégrale sur le domaine  $D$  peut s'écrire sous la forme :  $\int_D dV_M = \int_x dx \cdot \int_y dy \cdot \int_z dz$  . Ainsi :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,y} = \int_x b_p(x) \cdot b_{p'}(x) \cdot dx \cdot \int_y a_q(y) \cdot a_{q'}(y) \cdot dy \cdot \int_z \frac{\partial a_r}{\partial z}(z) \cdot b_{r'}(z) \cdot dz$$

c'est à dire que :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,y} = B_{p,p'} \cdot A_{q,q'} \cdot \int_z \frac{\partial a_r}{\partial z} \cdot b_{r'} \cdot dz$$

On pose :

$$D_{l,l'}^s = \int_s \frac{\partial a_l}{\partial s}(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds \quad (\text{E.13})$$

Il vient alors :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,y} = B_{p,p'} \cdot A_{q,q'} \cdot D_{r,r'}^z \quad (\text{E.14})$$

Pour les autres expressions de E.10 , E.11 et E.12 nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x,z} = -B_{p,p'} \cdot D_{q,q'}^y \cdot A_{r,r'} \\ (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y,x} = -A_{p,p'} \cdot B_{q,q'} \cdot D_{r,r'}^z \\ (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y,z} = D_{p,p'}^x \cdot B_{q,q'} \cdot A_{r,r'} \\ (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z,x} = A_{p,p'} \cdot D_{q,q'}^y \cdot B_{r,r'} \\ (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z,y} = -D_{p,p'}^x \cdot A_{q,q'} \cdot B_{r,r'} \end{array} \right. \quad (\text{E.15})$$

Finalement pour  $\sigma = x$  on peut écrire la composante  $(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'}$  sous la forme :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{y, \sigma'} \cdot (B_{p,p'} \cdot A_{q,q'} \cdot D_{r,r'}^z) - \delta_{z, \sigma'} \cdot (B_{p,p'} \cdot D_{q,q'}^y \cdot A_{r,r'}) \quad (\text{E.16})$$

De même pour  $\sigma = y$  on écrira :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y, \sigma'} = \delta_{z, \sigma'} \cdot (D_{p,p'}^x \cdot B_{q,q'} \cdot A_{r,r'}) - \delta_{x, \sigma'} \cdot (A_{p,p'} \cdot B_{q,q'} \cdot D_{r,r'}^z) \quad (\text{E.17})$$

Et enfin pour  $\sigma = z$  on aura :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z, \sigma'} = \delta_{x, \sigma'} \cdot (A_{p,p'} \cdot D_{q,q'}^y \cdot B_{r,r'}) - \delta_{y, \sigma'} \cdot (D_{p,p'}^x \cdot A_{q,q'} \cdot B_{r,r'}) \quad (\text{E.18})$$

Nous voyons bien apparaitre les trois composantes du rotationnel.

Les quantités  $B_{l,l'}$  et  $A_{l,l'}$  sont déjà connues, il ne nous reste plus qu'à déterminer le coefficient  $D_{l,l'}^s$ . Les calculs de ce dernier sont dans l'annexe H. Pour résumer on a :

$$B_{l,l'} = \delta_{l,l'} \cdot \delta s$$

puis :

$$A_{l,l'} = \theta_l \cdot \delta_{l,l'} \cdot \delta s$$

avec :

- $\theta_l = \frac{1}{2}$  si  $M(p, q, r)$  appartient au plan d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ou bien au plan d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$ .
- $\theta_l = 1$  dans les autres cas.

et enfin :

$$D_{l,l'}^s = - (g_l \cdot \delta_{l,l'} - d_l \cdot \delta_{l-1,l'})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (g_l, d_l) = (1, 0) \quad \text{si : } l = l_0 \\ (g_l, d_l) = (0, 1) \quad \text{si : } l = l_m + 1 \\ (g_l, d_l) = (1, 1) \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$



## E.6.2 Expression des composantes de $b$

Maintenant nous pouvons remplacer les expressions des coefficients  $A_{l,l'}$ ,  $B_{l,l'}$  et  $D_{l,l'}^s$  dans les équations E.16, E.17 et E.18. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} &= \delta_{z, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \{\theta_r \cdot \delta_{r, r'} \cdot (g_q \cdot \delta_{q, q'} - d_q \cdot \delta_{q-1, q'})\} \cdot \delta x \cdot \delta z - \\ &\quad \delta_{y, \sigma'} \cdot \delta_{p, p'} \cdot \{\theta_q \cdot \delta_{q, q'} \cdot (g_r \cdot \delta_{r, r'} - d_r \cdot \delta_{r-1, r'})\} \cdot \delta x \cdot \delta y \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

pour  $\sigma = x$  puis :

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{y, \sigma'} &= \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \{\theta_p \cdot \delta_{p, p'} \cdot (g_r \cdot \delta_{r, r'} - d_r \cdot \delta_{r-1, r'})\} \cdot \delta y \cdot \delta x - \\ &\quad \delta_{z, \sigma'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot \{\theta_r \cdot \delta_{r, r'} \cdot (g_p \cdot \delta_{p, p'} - d_p \cdot \delta_{p-1, p'})\} \cdot \delta y \cdot \delta z \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

pour  $\sigma = y$  et enfin :

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{z, \sigma'} &= \delta_{y, \sigma'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \{\theta_q \cdot \delta_{q, q'} \cdot (g_p \cdot \delta_{p, p'} - d_p \cdot \delta_{p-1, p'})\} \cdot \delta z \cdot \delta y - \\ &\quad \delta_{x, \sigma'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot \{\theta_p \cdot \delta_{p, p'} \cdot (g_q \cdot \delta_{q, q'} - d_q \cdot \delta_{q-1, q'})\} \cdot \delta z \cdot \delta x \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

pour  $\sigma = z$ .

## E.7 Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{b}$

Cette fois il faut calculer les éléments de matrice  $({}^t\mathbf{b})_{\beta, \beta'}$ . Rappelons que d'après notre convention d'écriture, les indices  $\beta$  sont fixés et les indices  $\beta'$  sont variables. Par définition de l'opération de transposition, on peut dire que  $({}^t\mathbf{b})_{\beta, \beta'} = \mathbf{b}_{\beta', \beta}$  ainsi nous devons calculer les composantes  $\mathbf{b}_{p'q'r', pqr}^{\sigma', \sigma}$ , les indices  $(\sigma, p, q, r)$  étant fixés. Comme dans le paragraphe précédent nous travaillons pour  $\sigma = x$ . Il faut alors déterminer les valeurs de  $\sigma'$  qui donnent des composantes  $\mathbf{b}_{p'q'r', pqr}^{\sigma', x}$  non nulles. D'après E.15 ces composantes sont non nulles lorsque  $\sigma' = y$  ou  $z$  et on a<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{p'q'r', pqr}^{y, x} &= -A_{p', p} \cdot B_{q', q} \cdot D_{r', r}^z \\ \mathbf{b}_{p'q'r', pqr}^{z, x} &= A_{p', p} \cdot D_{q', q}^y \cdot B_{r', r} \end{aligned}$$

Maintenant il faut déterminer les « coefficients transposés »  $A_{l', l}$ ,  $B_{l', l}$  et  $D_{l', l}^s$ , l'indice  $l$  étant bien sûr fixé. Pour  $B_{l', l}$  c'est très simple puisque ce coefficient est proportionnel au symbole de Kroneker  $\delta_{l', l}$ . Dans ce cas on peut directement écrire la relation  $B_{l', l} = B_{l, l'}$ . Pour  $A_{l', l}$  c'est également assez simple. Nous partons de son expression :

$$A_{l', l} = \theta_{l'} \cdot \delta_{l', l} \cdot \delta s$$

Il suffit de remarquer que  $A_{l, l}$  est la seule valeur non nulle de  $A$  et que de ce fait, la discussion sur l'indice  $l'$ , valeur de  $\theta_{l'}$ , se ramène à une discussion sur l'indice  $l$ . En d'autres termes  $\theta_{l'} = \theta_l$  si bien que :

$$A_{l', l} = \theta_l \cdot \delta_{l', l}$$

Or  $\delta_{l', l} = \delta_{l, l'}$  si bien que  $A_{l', l} = A_{l, l'}$ . Pour le coefficient  $D_{l', l}^s$  le résultat ne s'obtient pas si facilement. Il faut reprendre point par point la méthode de calcul que nous avons exposé dans l'annexe H, en tenant compte du fait que c'est l'indice de droite qui est fixé. Nous donnons directement le résultat :

$$D_{l', l}^s = \delta_{l+1, l'} - \delta_{l, l'}$$

<sup>1</sup>A une permutation d'indices près.

Compte tenu de ce qui précède, on peut écrire :

$$({}^t\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \mathbf{b}_{p'q'r', pqr}^{\sigma', x} =$$

$$\delta_{z, \sigma'} \cdot A_{p', p} \cdot D_{q', q}^y \cdot B_{r', r} - \delta_{y, \sigma'} \cdot A_{p', p} \cdot B_{q', q} \cdot D_{r', r}^z =$$

$$\delta_{z, \sigma'} \cdot A_{p, p'} \cdot D_{q', q}^y \cdot B_{r, r'} - \delta_{y, \sigma'} \cdot A_{p, p'} \cdot B_{q, q'} \cdot D_{r', r}^z$$

soit :

$$({}^t\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, \sigma'} = \delta_{z, \sigma'} \cdot \theta_p \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{r, r'} \cdot (\delta_{q+1, q'} - \delta_{q, q'}) \cdot \delta x \cdot \delta z -$$

$$\delta_{y, \sigma'} \cdot \theta_p \cdot \delta_{p, p'} \cdot \delta_{q, q'} \cdot (\delta_{r+1, r'} - \delta_{r, r'}) \cdot \delta x \cdot \delta y \quad (\text{E.22})$$

Pour  $\sigma = y$  et  $z$  on a des résultats similaires que l'on peut obtenir en faisant des permutations circulaires sur les indices.

## E.8 Calcul des composantes de $\mathbf{B}$

Pour cette partie nous nous basons sur les calculs du paragraphe E.6. Nous avons obtenu :

$$(\mathbf{b})_{pqr, p'q'r'}^{x, y} = \int_D \partial_z \{b_p(x) \cdot a_q(y) \cdot a_r(z)\} \cdot \{b_{p'}(x) \cdot a_{q'}(y) \cdot b_{r'}(z)\} \cdot dV_M$$

Nous pouvons écrire l'équivalent de cette relation dans le grand maillage, pour cela il suffit simplement de changer les notations. On obtient :

$$(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x, y} = \int_{D_{ext}} \partial_z \{B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z)\} \cdot \{B_{i'}(x) \cdot A_{j'}(y) \cdot B_{k'}(z)\} \cdot dV_M$$

Par contre, on ne peut pas cette fois-ci écrire l'intégrale sur le domaine  $D_{ext}$  comme un produit de trois intégrales simples. Ceci est dû au fait que l'intégrand lui-même n'est pas un produit de fonctions d'une seule variable, contrairement aux apparences. Pour bien comprendre ceci, reportons nous aux figures qui suivent et prenons l'exemple de la fonction  $A_j(y)$ .

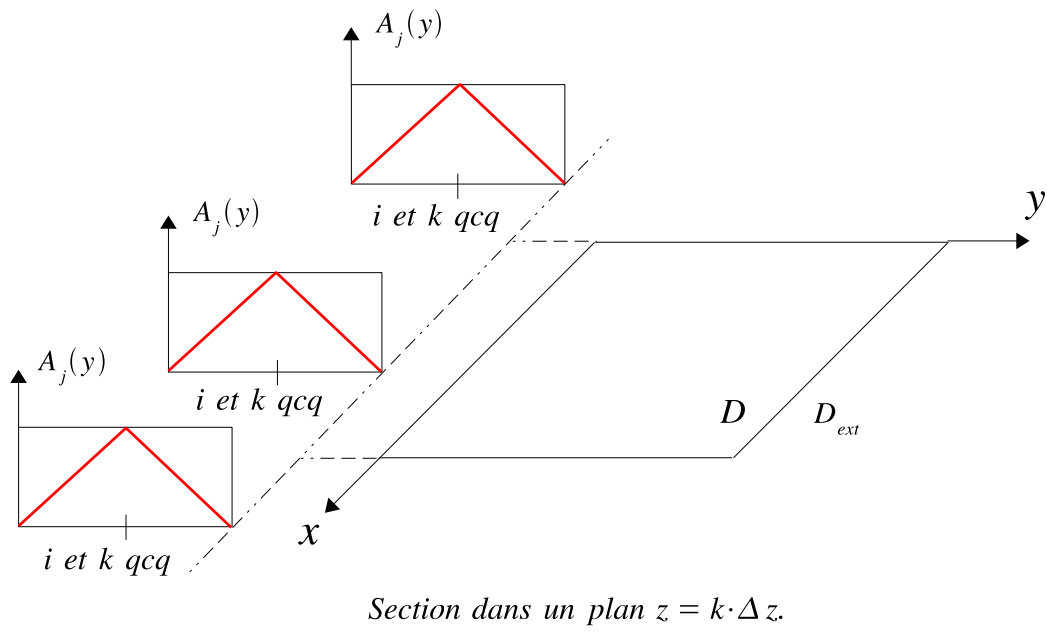


FIG. E.2 – Fonctions  $A_j(y)$  lorsque  $j \in ] - \infty, j_0 - 1] \cup [j_m + 2, +\infty[$ .

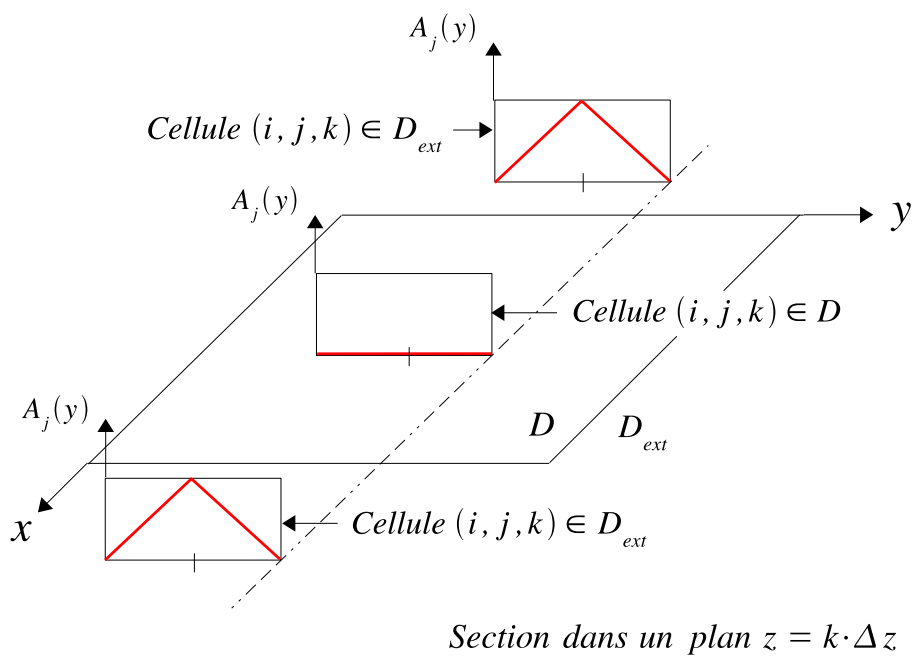


FIG. E.3 – Fonctions  $A_j(y)$  lorsque  $j \in [j_0 + 1, j_m]$ .

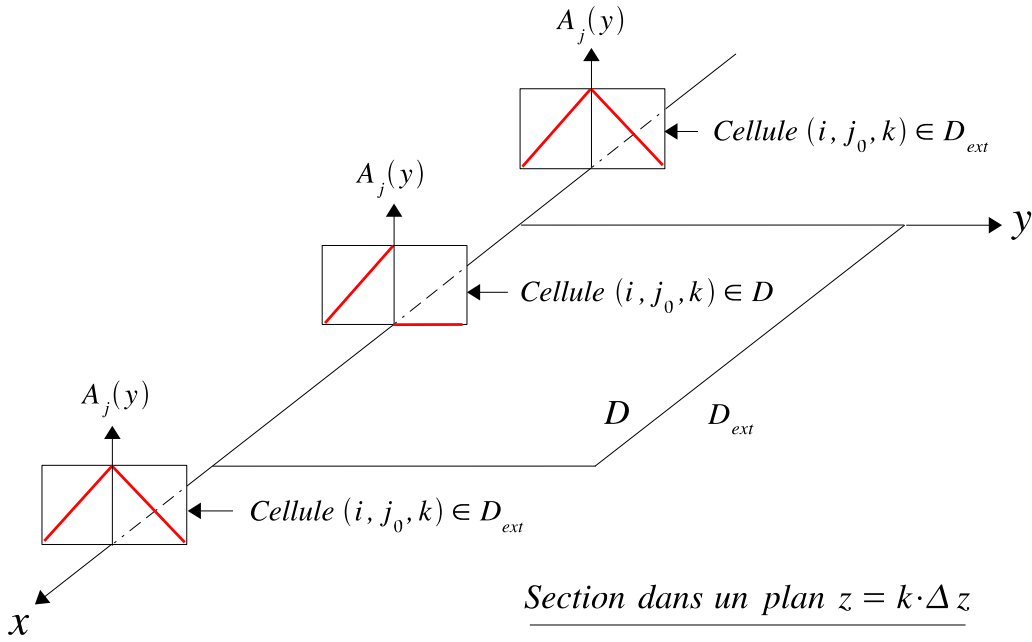


FIG. E.4 – Fonctions  $A_j(y)$  lorsque  $j = j_0$ .

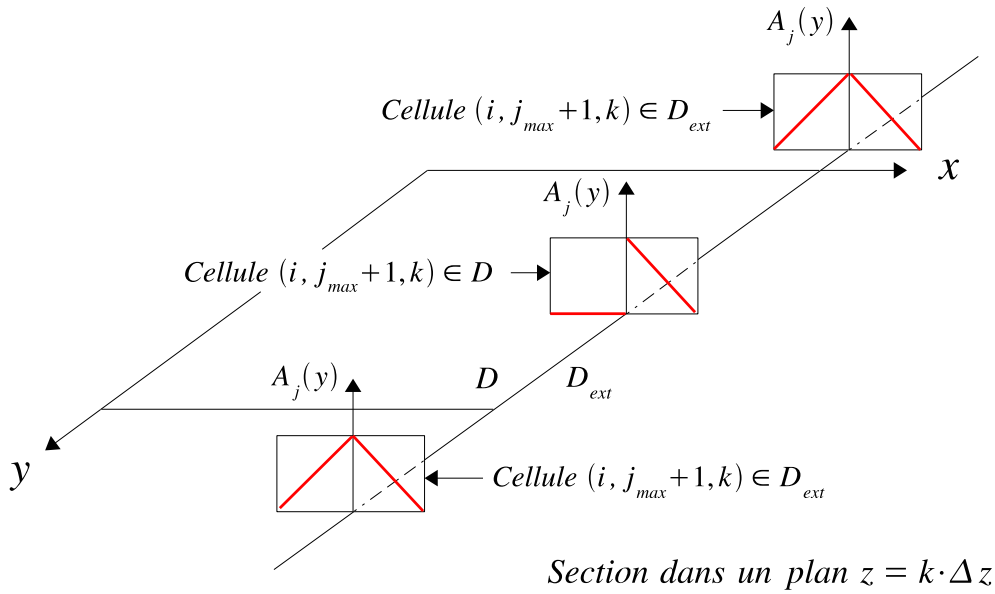


FIG. E.5 – fonctions  $A_j(y)$  lorsque  $j = j_m + 1$ .

Si  $j \in ]-\infty, j_0 - 1] \cup [j_m + 2, +\infty[$  (voir E.2) les variations par rapport à  $y$  de la fonction  $A_j(y)$  sont toujours les mêmes quelles que soit les valeurs des indices  $i$  et  $k$ . Si  $j \in [j_0 + 1, j_m]$  (voir E.3) la fonction  $A_j(y)$  est nulle lorsque les indices  $i$  et  $k$  désignent une cellule  $\in D$  et cette même fonction est non nulle lorsque les indices  $i$  et  $k$  désignent une cellule  $\in D_{ext}$ . Enfin, si  $j = j_0$  ou  $j_m + 1$  (voir E.4 et E.5) la fonction  $A_j(y)$  n'est jamais nulle mais elle n'est pas la même selon que les indices  $i$  et  $k$  désignent une cellule  $\in D$  ou une cellule  $\in D_{ext}$ . En fin de compte il existe des valeurs de  $j$  pour lesquelles la fonction  $A_j(y)$  dépend implicitement des variables  $x$  et  $z$ . De la même façon il existe des valeurs de l'indice  $k$  pour lesquelles la fonction  $\frac{\partial A_k}{\partial z}(z)$  dépend implicitement des variables  $x$  et  $y$ . On peut faire la même analyse pour les fonctions  $A_{j'}$ ,  $B_i$  et  $B_{i'}$ . Finalement les fonctions qui interviennent dans l'intégrant ne dépendent pas réellement d'une

seule variable, c'est pour cette raison que nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Fubini.

Pour ce sortir de cette impasse, on écrit :

$$\int_{D_{ext}} f(M) \cdot dV_M = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(M) \cdot dV_M - \int_D f(M) \cdot dV_M$$

L'avantage d'une telle décomposition est que dans chacune des deux intégrales du membre de droite le problème précédent ne se présente plus. En effet pour une fonction quelconque du type  $Q_L(s)$ , il n'existe aucune valeur de  $L$  pour laquelle les variations de  $Q_L$  seraient dépendantes de variables autres que  $s$ . Ainsi nous pouvons appliquer le théorème de Fubini.

Compte tenu de ce que nous venons de dire  $(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y}$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y} &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \partial_z \{B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z)\} \cdot \{B_{i'}(x) \cdot A_{j'}(y) \cdot B_{k'}(z)\} \cdot dV_M - \\ &\int_D \partial_z \{B_i(x) \cdot A_j(y) \cdot A_k(z)\} \cdot \{B_{i'}(x) \cdot A_{j'}(y) \cdot B_{k'}(z)\} \cdot dV_M \end{aligned}$$

c'est à dire en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y} &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} B_i \cdot B_{i'} \cdot dx \cdot \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} A_j \cdot A_{j'} \cdot dy \cdot \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{\partial A_k}{\partial z} \cdot B_{k'} \cdot dz - \\ &\int_D B_i \cdot B_{i'} \cdot dx \cdot \int_D A_j \cdot A_{j'} \cdot dy \cdot \int_D \frac{\partial A_k}{\partial z} \cdot B_{k'} \cdot dz \end{aligned}$$

Maintenant on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{A_{L,L'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \int_{s \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} A_L(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds \\ \{B_{L,L'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \int_{s \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} B_L(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \\ \{D_{L,L'}^s\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \int_{s \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{\partial A_L}{\partial s}(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \\ \{A_{L,L'}\}_D = \int_{s \in D} A_L(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds \cdot ds \\ \{B_{L,L'}\}_D = \int_{s \in D} B_L(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \cdot ds \\ \{D_{L,L'}^s\}_D = \int_{s \in D} \frac{\partial A_L}{\partial s}(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \cdot ds \end{array} \right.$$

Alors l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y} &= \{B_{i,i'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \cdot \{A_{j,j'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \cdot \{D_{k,k'}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} - \\ &\{B_{i,i'}\}_D \cdot \{A_{j,j'}\}_D \cdot \{D_{k,k'}^z\}_D \end{aligned}$$

En se reportant à l'annexe F, il est facile de constater que  $\{B_{i,i'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{B_{i,i'}\}_D = B_{i,i'} = \delta_{i,i'} \cdot \Delta x$ .

Les calculs de  $\{A_{j,j'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  et de  $\{D_{k,k'}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  se font comme dans la partie 3 des annexes G et H. On trouve :

$$\{A_{j,j'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \delta_{j,j'} \cdot \Delta y$$

et :

$$\{D_{k,k'}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = -(\delta_{k,k'} - \delta_{k-1,k'})$$

Pour les quantités  $\{A_{j,j'}\}_D$  et  $\{D_{k,k'}^z\}_D$ , il suffit de reprendre les résultats finaux obtenus dans les annexes G et H <sup>2</sup> en adoptant toutefois les notations du grand maillage. Il y a tout de même une petite nuance à apporter, à savoir que par définition, les quantités précédentes sont nulles si le point  $M(i, j, k) \in D_{ext} \setminus \{\Sigma\}$ . Cette petite nuance nous oblige à modifier la discussion sur les valeurs prises par la grandeur  $\theta_L$  (voir annexe G). Compte tenu de ces remarques on a :

$$\{A_{j,j'}\}_D = \theta_j \cdot \delta_{j,j'} \cdot \Delta y$$

avec :

- $\theta_j = \frac{1}{2}$  si la cellule  $(i, j, k)$  est accolée à la face  $Y^-$  du côté intérieur ou à la face  $Y^+$  du côté extérieur.
- $\theta_j = 1$  si la cellule  $(i, j, k) \in D \setminus \{\text{cellules accolées à } Y^-\}$ .
- $\theta_j = 0$  dans tous les autres cas.

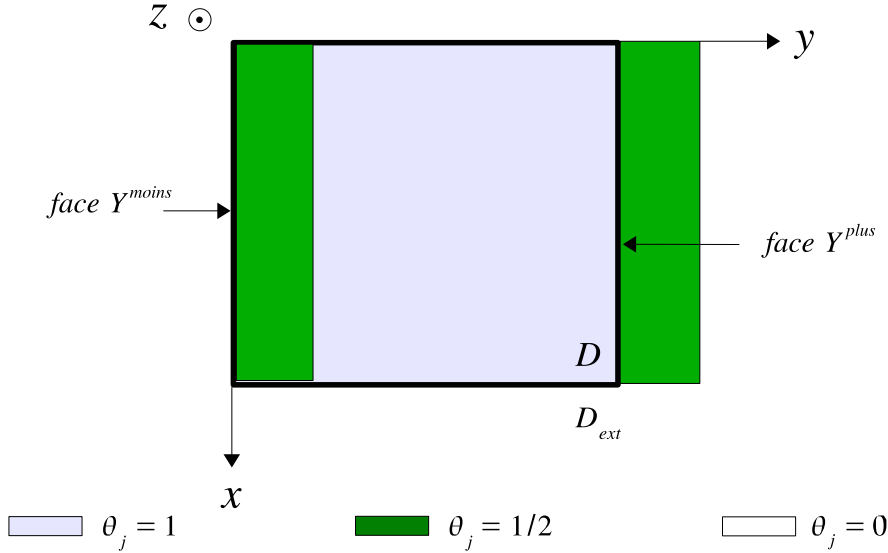


FIG. E.6 – Valeurs prises par  $\theta_j$ .

et :

$$\{D_{k,k'}^z\}_D = -(g_k \cdot \delta_{k,k'} - d_k \cdot \delta_{k-1,k'})$$

avec :

$$\begin{cases} (g_k, d_k) = (1, 0) & \text{si : } k = k_0 \\ (g_k, d_k) = (0, 1) & \text{si : } k = k_m + 1 \\ (g_k, d_k) = (1, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant nous pouvons regrouper tout ceci dans l'expression de  $(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y} = & -\delta_{i,i'} \cdot \Delta x \cdot \delta_{j,j'} \cdot \Delta y \cdot (\delta_{k,k'} - \delta_{k-1,k'}) + \\ & \delta_{i,i'} \cdot \Delta x \cdot \theta_j \cdot \delta_{j,j'} \cdot \Delta y \cdot (g_k \cdot \delta_{k,k'} - d_k \cdot \delta_{k-1,k'}) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En effet dans ces deux annexes les calculs ont été effectués dans le domaine  $D$ .

Soit en factorisant :

$$(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,y} = -\delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \{ (1 - \theta_j \cdot g_k) \cdot \delta_{k,k'} - (1 - \theta_j \cdot d_k) \cdot \delta_{k-1,k'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Par analogie avec la relation précédente on a pour  $(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,z}$  :

$$(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,z} = \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \{ (1 - \theta_k \cdot g_j) \cdot \delta_{j,j'} - (1 - \theta_k \cdot d_j) \cdot \delta_{j-1,j'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

En compactant ces deux dernières relations on obtient le terme général  $(\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,\sigma'}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{ijk, i'j'k'}^{x,\sigma'} &= \delta_{z,\sigma'} \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \{ (1 - \theta_k \cdot g_j) \cdot \delta_{j,j'} - (1 - \theta_k \cdot d_j) \cdot \delta_{j-1,j'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\ &\delta_{y,\sigma'} \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \{ (1 - \theta_j \cdot g_k) \cdot \delta_{k,k'} - (1 - \theta_j \cdot d_k) \cdot \delta_{k-1,k'} \} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Lorsque  $\sigma = y$  et  $z$  on obtient des relations du même type. Pour les obtenir, on fait des permutations circulaires sur les indices et les variables.

## E.9 Résultats pour les composantes de ${}^t\mathbf{B}$

Dans cette partie nous devons déterminer les éléments de matrice  $({}^t\mathbf{B})_{\alpha,\alpha'}$ . Rappelons que d'après notre convention d'écriture les indices  $\alpha$  sont fixés et les indices  $\alpha'$  sont variables. Par définition de l'opération de transposition, on peut dire que  $({}^t\mathbf{B})_{\alpha,\alpha'} = \mathbf{B}_{\alpha',\alpha}$ . Ainsi nous devons calculer les composantes  $\mathbf{B}_{i'j'k',ijk}^{\sigma',\sigma}$ , les indices  $(\sigma, i, j, k)$  étant fixés. Comme dans les paragraphes précédents nous travaillons pour  $\sigma = x$ . Il faut alors déterminer les valeurs de  $\sigma'$  qui donnent des composantes  $\mathbf{B}_{i'j'k',ijk}^{\sigma',x}$  non nulles. En permutant les indices « prime » et non « prime » on peut dire que cela revient à chercher les valeurs de  $\sigma$  pour lesquelles les quantités  $\mathbf{B}_{ijk, i',j',k'}^{\sigma,x}$  sont non nulles. Nous pouvons nous inspirer des relations E.10, E.11 et E.12 du paragraphe E.6, en adoptant toutefois les notations du grand maillage. On trouve alors que les composantes sont non nulles lorsque  $\sigma' = y$  ou  $z$  et on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_{i',j',k',ijk}^{y,x} &= - \int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M \\ (\mathbf{B})_{i',j',k',ijk}^{z,x} &= \int_{D_{ext}} \partial_y \Gamma_{i',j',k'}^z \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M \end{aligned}$$

Finalement  $({}^t\mathbf{B})_{ijk, i',j',k'}^{x,\sigma'}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} ({}^t\mathbf{B})_{ijk, i',j',k'}^{x,\sigma'} &= \delta_{z,\sigma'} \cdot \int_{D_{ext}} \partial_y \Gamma_{i',j',k'}^z \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M - \\ &\delta_{y,\sigma'} \cdot \int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M \end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous occuper de la quantité  $-\int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M$ . En utilisant les relations de définition 8.64 et 8.68 des éléments finis  $\Gamma_{i,j,k}^\sigma$  et  $\Delta_{ijk}^\sigma$ , on peut écrire que :

$$-\int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M =$$

$$-\int_{D_{ext}} \partial_z \{A_{i'}(x) \cdot B_{j'}(y) \cdot A_{k'}(z)\} \cdot \{A_i(x) \cdot B_j(y) \cdot B_k(z)\} \cdot dV_M$$

Comme dans le paragraphe précédent, il n'est pas possible d'écrire l'intégrale sur le domaine  $D_{ext}$  comme le produit de trois intégrales simples. Ceci tient au fait que l'intégrand ne s'écrit pas comme le produit de fonctions d'une seule variable. On utilise alors la même astuce que dans le paragraphe précédent, c'est à dire que l'on écrit :

$$\int_{D_{ext}} f(M) \cdot dV_M = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(M) \cdot dV_M - \int_D f(M) \cdot dV_M$$

Dans ce cas on obtient :

$$-\int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M =$$

$$-\{A_{i,i'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \cdot \{B_{j,j'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \cdot \{D_{k',k}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} +$$

$$\{A_{i,i'}\}_D \cdot \{B_{j,j'}\}_D \cdot \{D_{k',k}^z\}_D$$

Ces quantités ont déjà été calculées dans le paragraphe précédent, mis à part  $\{D_{k',k}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  et  $\{D_{k',k}^z\}_D$ . On a donc :

$$\{B_{j,j'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{B_{j,j'}\}_D = B_{j,j'} = \delta_{j,j'} \cdot \Delta y$$

puis :

$$\{A_{i,i'}\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \delta_{i,i'} \cdot \Delta x$$

et :

$$\{A_{i,i'}\}_D = \theta_i \cdot \delta_{i,i'} \cdot \Delta x$$

avec :

- $\theta_i = \frac{1}{2}$  si la cellule  $(i, j, k)$  est accolée à la face  $X^-$  du côté intérieur ou à la face  $X^+$  du côté extérieur.
- $\theta_i = 1$  si la cellule  $(i, j, k) \in D \setminus \{\text{cellules accolées à } X^-\}$ .
- $\theta_i = 0$  dans tous les autres cas.

Pour  $\{D_{k',k}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  on reprend la même technique de calcul que dans la partie 3 de l'annexe H, sauf que l'indice fixé se situe à droite et non à gauche. On trouve :

$$\{D_{k',k}^z\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'})$$

Pour  $\{D_{k',k}^z\}_D$  on trouve le même résultat :

$$\{D_{k',k}^z\}_D = (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'})$$



Maintenant nous pouvons regrouper nos résultats. On obtient :

$$\begin{aligned}
& - \int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M = \\
& - \delta_{i,i'} \cdot \Delta x \cdot \delta_{j,j'} \cdot \Delta y \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) + \\
& \theta_i \cdot \delta_{i,i'} \cdot \Delta x \cdot \delta_{j,j'} \cdot \Delta y \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'})
\end{aligned}$$

C'est à dire en factorisant :

$$\begin{aligned}
& - \int_{D_{ext}} \partial_z \Gamma_{i',j',k'}^y \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M = \\
& - (1 - \theta_i) \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y
\end{aligned}$$

Pour  $\int_{D_{ext}} \partial_y \Gamma_{i',j',k'}^z \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M$  on trouve par analogie :

$$\begin{aligned}
& \int_{D_{ext}} \partial_y \Gamma_{i',j',k'}^z \cdot \Delta_{ijk}^x \cdot dV_M = \\
& (1 - \theta_i) \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \cdot (\delta_{j+1,j'} - \delta_{j,j'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z
\end{aligned}$$

Finalement la quantité  $({}^t\mathbf{B})_{ijk,i',j',k'}^{x,\sigma'}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
({}^t\mathbf{B})_{ijk,i',j',k'}^{x,\sigma'} &= \delta_{z,\sigma'} \cdot (1 - \theta_i) \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{k,k'} \cdot (\delta_{j+1,j'} - \delta_{j,j'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \\
& \delta_{y,\sigma'} \cdot (1 - \theta_i) \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'} \cdot (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Lorsque  $\sigma = y$  et  $z$  on obtient des relations du même type. Pour les obtenir, on fait des permutations circulaires sur les indices et les variables.

## E.10 Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{C}$

### E.10.1 Calculs généraux

D'après la relation de définition C.2, on a :

$$\begin{aligned}
({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon} &= \mathbf{C}_{\epsilon,\alpha} = C \left[ \vec{\Pi}_\epsilon(M), \vec{\Gamma}_\alpha(M) \right] = \\
& \oint_{\Sigma} \vec{\Pi}_\epsilon(M) \bullet \left\{ \vec{n}_{int} \wedge \left( \vec{\Gamma}_\alpha(M) \wedge \vec{n}_{int} \right) \right\} \cdot d\Sigma
\end{aligned}$$

Or  $\vec{n}_{int} \wedge \left( \vec{\Gamma}_\alpha(M) \wedge \vec{n}_{int} \right) = \vec{\Gamma}_{\alpha|\Sigma,t}(M)$  où la quantité  $\vec{\Gamma}_{\alpha|\Sigma,t}(M)$  désigne la partie tangentielle de la restriction de  $\vec{\Gamma}_\alpha$  sur  $\Sigma$ . Dans ce cas on a :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon} = \oint_{\Sigma} \vec{\Pi}_\epsilon(M) \bullet \vec{\Gamma}_{\alpha|\Sigma,t}(M) \cdot d\Sigma$$

La surface  $\Sigma$  est constituée par la réunion de six faces, ce que l'on peut écrire sous la forme  $\Sigma = \bigcup_{n=1}^6 \Sigma_n$ . Ainsi on peut écrire :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^n \quad (\text{E.25})$$

avec :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^n = \oint_{\Sigma_n} \vec{\Pi}_\epsilon(M) \bullet \vec{\Gamma}_{\alpha|\Sigma_n,t}(M) \cdot d\Sigma_n \quad (\text{E.26})$$

Notre objectif est donc de déterminer les  $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^n$  pour  $n \in [1, 6]$ . Nous allons juste faire le calcul de  $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^1$ <sup>3</sup>, sachant que pour les autres composantes  $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^n$  les résultats s'obtiennent par permutation circulaire des indices.

### E.10.2 Calcul de $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^1$

–  $\vec{\Gamma}_\alpha$  est de la forme  $\Gamma_{i,j,k}^\sigma \cdot \vec{i}_\sigma$  avec  $\sigma = x, y$  ou  $z$ . Dans ce cas la restriction de  $\vec{\Gamma}_\alpha$  sur la face  $X^-$  s'écrit simplement :

$$\vec{\Gamma}_{\alpha|X^-} = \Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma \cdot \vec{i}_\sigma$$

avec  $\sigma = x, y$  ou  $z$  et la partie tangentielle de cette restriction s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_{\alpha|X^-,t} = \Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma \cdot \vec{i}_\sigma$$

avec  $\sigma = y$  ou  $z$  seulement.

– Sur la face  $X^-$  l'élément fini  $\vec{\Pi}_\epsilon$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{\Pi}_\epsilon = \Pi_{j',k'}^{\sigma'} \cdot \vec{i}_{\sigma'}$$

avec  $\sigma' = y$  ou  $z$  seulement.

Ainsi :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^1 = \oint_{X^-} \Pi_{j',k'}^{\sigma'} \cdot \vec{i}_{\sigma'} \bullet \Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma \cdot \vec{i}_\sigma \cdot dy \cdot dz$$

c'est à dire que :

$$({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}^1 = ({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \oint_{X^-} \Pi_{j',k'}^{\sigma'} \cdot \Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma \cdot dy \cdot dz$$

Cette dernière relation nous montre que les composantes  $({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma'}$  sont nulles lorsque  $\sigma' \neq \sigma$ . Ainsi les seuls termes que nous avons à déterminer sont de la forme  $({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma}$ . Dans ce cas il est possible d'écrire une version simplifiée de la relation précédente, c'est à dire :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = ({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{E.27})$$

avec :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma} = \oint_{X^-} \Pi_{j',k'}^\sigma \cdot \Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma \cdot dy \cdot dz \quad (\text{E.28})$$

<sup>3</sup>La correspondance entre l'indice  $n$  et les différentes faces est la suivante :  $n = (1, 2)$  correspond aux faces  $X^-$  et  $X^+$ ,  $n = (3, 4)$  correspond aux faces  $Y^-$  et  $Y^+$  et enfin  $n = (5, 6)$  correspond aux faces  $Z^-$  et  $Z^+$ .

Maintenant il faut expliciter la quantité  $\Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma$  :

Sur  $X^-$  on a  $\sigma = y$  ou  $\sigma = z$  si bien que  $\Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma = \Gamma_{i,j,k|X^-}^y$  ou  $\Gamma_{i,j,k|X^-}^z$ . Ainsi :

$$\Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma = \begin{cases} A_i(x)|_{X^-} \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) & \text{si : } \sigma = y \\ A_i(x)|_{X^-} \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) & \text{si : } \sigma = z \end{cases}$$

Dans les deux cas il faut déterminer la restriction de la fonction  $A_i(x)$  sur  $X^-$ . Nous avons représenté sur le même graphique les variations des fonctions  $A_i$  lorsque  $i = i_0 - 1, i_0$  et  $i_0 + 1$  :

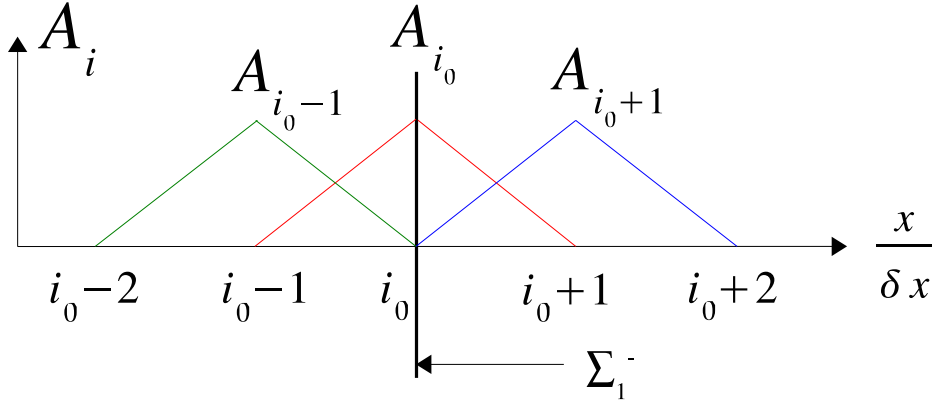


FIG. E.7 – Représentation graphique des fonctions  $A_{i_0-1}, A_{i_0}$  et  $A_{i_0+1}$ .

Le seul cas où la restriction de  $A_i$  sur  $X^-$  est non nulle, est le cas où  $i = i_0$  et cette restriction vaut 1. Ainsi :

$$A_i(x)|_{X^-} = \delta_{i_0,i}$$

Dans ce cas :

$$\Gamma_{i,j,k|X^-}^\sigma = \begin{cases} B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot \delta_{i_0,i} & \text{si : } \sigma = y \\ A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot \delta_{i_0,i} & \text{si : } \sigma = z \end{cases}$$

En reportant ce dernier résultat dans E.28 on obtient :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma} = \begin{cases} \delta_{i,i_0} \cdot \int_{X^-} \Pi_{j'k'}^y \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot dy \cdot dz & \text{si : } \sigma = y \\ \delta_{i,i_0} \cdot \int_{X^-} \Pi_{j'k'}^z \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot dy \cdot dz & \text{si : } \sigma = z \end{cases}$$

ce que l'on peut compacter en écrivant :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma} = \delta_{i,i_0} \cdot \left\{ \delta_{y,\sigma} \cdot \int_{X^-} \Pi_{j'k'}^y \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot dy \cdot dz + \delta_{z,\sigma} \cdot \int_{X^-} \Pi_{j'k'}^z \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot dy \cdot dz \right\}$$

soit compte tenu des relations de définition 8.70 des éléments finis  $\Pi_{l,m}^\sigma$  :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk,j'k'}^{1,\sigma,\sigma} = \delta_{i,i_0} \cdot \left\{ \delta_{y,\sigma} \cdot \int_{X^-} A_{j'}(y) \cdot B_{k'}(z) \cdot B_j(y) \cdot A_k(z) \cdot dy \cdot dz + \right.$$

$$\delta_{z,\sigma} \cdot \int_{X^-} B_{j'}(y) \cdot A_{k'}(z) \cdot A_j(y) \cdot B_k(z) \cdot dy \cdot dz \Big\}$$

c'est à dire après réorganisation des termes :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk, j'k'}^{1, \sigma, \sigma} = \delta_{i, i_0} \cdot \left\{ \delta_{y, \sigma} \cdot \int_y B_j \cdot A_{j'} \cdot dy \cdot \int_z A_k \cdot B_{k'} \cdot dz + \right. \\ \left. \delta_{z, \sigma} \cdot \int_y A_j \cdot B_{j'} \cdot dy \cdot \int_z B_k \cdot A_{k'} \cdot dz \right\}$$

Maintenant on pose :

$$\begin{cases} F_{L, L'} = \int_s A_L(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \\ G_{L, L'} = \int_s B_L(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds \end{cases} \quad (\text{E.29})$$

Il vient alors :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk, j'k'}^{1, \sigma, \sigma} = \delta_{i, i_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot G_{j, j'} \cdot F_{k, k'} + \delta_{z, \sigma} \cdot F_{j, j'} \cdot G_{k, k'} \}$$

Enfin en tenant compte de E.27, on obtient le résultat final suivant :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk, j'k'}^{1, \sigma, \sigma'} = \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{i, i_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot G_{j, j'} \cdot F_{k, k'} + \delta_{z, \sigma} \cdot F_{j, j'} \cdot G_{k, k'} \} \quad (\text{E.30})$$

Les calculs des coefficients  $F_{L, L'}$  et  $G_{L, L'}$  sont dans les annexes I et J. Les résultats sont les suivants :

$$F_{L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (g_L \cdot \delta_{L, L'} + d_L \cdot \delta_{L-1, L'}) \cdot \Delta s$$

avec :

$$(g_L, d_L) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } L = L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } L = L_m + 1 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

puis :

$$G_{L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L, L'} + \delta_{L+1, L'}) \cdot \Delta s$$

Maintenant il ne reste plus qu'à remplacer les expressions des coefficients  $F_{L, L'}$  et  $G_{L, L'}$  dans E.30. Cela donne :

$$({}^t\mathbf{C})_{ijk, j'k'}^{1, \sigma, \sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{i, i_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot (\delta_{j, j'} + \delta_{j+1, j'}) \cdot (g_k \cdot \delta_{k, k'} + d_k \cdot \delta_{k-1, k'}) + \\ \delta_{z, \sigma} \cdot (g_j \cdot \delta_{j, j'} + d_j \cdot \delta_{j-1, j'}) \cdot (\delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{E.31})$$

## E.11 Calcul des composantes de C

Cette fois-ci on doit calculer les éléments de matrice  $C_{\epsilon,\alpha}$  sachant que les indices  $\epsilon$  sont fixés et que les indices  $\alpha$  sont variables. Nous pouvons reprendre les résultats obtenus dans le paragraphe précédent en permutant les indices. Cela donne :

$$C_{\epsilon,\alpha} = \sum_{n=1}^6 C_{\epsilon,\alpha}^n$$

avec :

$$C_{\epsilon,\alpha}^n = \oint_{\Sigma_n} \vec{\Pi}_\epsilon(M) \bullet \vec{\Gamma}_{\alpha|\Sigma_n,t}(M) \cdot d\Sigma_n$$

Une fois de plus on se concentre uniquement sur le calcul de la composante  $C_{\epsilon,\alpha}^1$ . On trouve :

$$C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'}$$

avec :

$$C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma} = \oint_{X^-} \Pi_{j,k}^\sigma \cdot \Gamma_{i',j',k'|X^-}^\sigma \cdot dy \cdot dz$$

Le calcul de l'intégrale se fait comme dans le paragraphe précédent, il y a juste les indices « prime » et non « prime » à permuter. Ainsi :

$$C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{i',i_0} \cdot \left\{ \delta_{y,\sigma} \cdot \int_y B_{j'} \cdot A_j \cdot dy \cdot \int_z A_{k'} \cdot B_k \cdot dz + \delta_{z,\sigma} \cdot \int_y A_{j'} \cdot B_j \cdot dy \cdot \int_z B_{k'} \cdot A_k \cdot dz \right\}$$

Compte tenu de E.29 cela donne :

$$C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{i',i_0} \cdot \{ \delta_{y,\sigma} \cdot F_{j,j'} \cdot G_{k,k'} + \delta_{z,\sigma} \cdot G_{j,j'} \cdot F_{k,k'} \}$$

Pour terminer, les expressions des coefficients  $F_{L,L'}$  et  $G_{L,L'}$  sont remplacées dans la relation précédente. Il vient alors :

$$C_{jk,i'j'k'}^{1,\sigma,\sigma'} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{i',i_0} \cdot \{ \delta_{y,\sigma} \cdot (g_j \cdot \delta_{j,j'} + d_j \cdot \delta_{j-1,j'}) \cdot (\delta_{k,k'} + \delta_{k+1,k'}) + \delta_{z,\sigma} \cdot (\delta_{j,j'} + \delta_{j+1,j'}) \cdot (g_k \cdot \delta_{k,k'} + d_k \cdot \delta_{k-1,k'}) \} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{E.32})$$

## E.12 Calcul des composantes de ${}^t\mathbf{c}$

La technique de calcul des  $({}^t\mathbf{c})_{\beta,\epsilon}$  est la même que celle des  $({}^t\mathbf{C})_{\alpha,\epsilon}$ , il faut simplement tenir compte du fait que les deux maillages sont traités en même temps. Dans ce cas, les résultats du paragraphe E.10 sont transposés en remplaçant les indices  $\alpha$  par les indices  $\beta$ . On a ainsi :

$$({}^t\mathbf{c})_{\beta,\epsilon} = \sum_{n=1}^6 ({}^t\mathbf{c})_{\beta,\epsilon}^n$$

avec :

$$({}^t\mathbf{c})_{\beta,\epsilon}^n = \oint_{\Sigma_n} \vec{\Pi}_\epsilon(M) \bullet \vec{\gamma}_{\beta|\Sigma_n,t}(M) \cdot d\Sigma_n$$

Et pour  $n = 1$ , on trouve :

$$({}^t\mathbf{c})_{pqr}^{1,\sigma,\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{p,p_0} \cdot \left\{ \delta_{y,\sigma} \cdot \int_y b_q \cdot A_{j'} \cdot dy \cdot \int_z a_r \cdot B_{k'} \cdot dz + \delta_{z,\sigma} \cdot \int_y a_q \cdot B_{j'} \cdot dy \cdot \int_z b_r \cdot A_{k'} \cdot dz \right\}$$

On pose :

$$\begin{cases} F_{l,L'} = \int_s a_l(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds \\ G_{l,L'} = \int_s b_l(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

si bien que :

$$({}^t\mathbf{c})_{pqr}^{1,\sigma,\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{p,p_0} \cdot \{ \delta_{y,\sigma} \cdot G_{q,j'} \cdot F_{r,k'} + \delta_{z,\sigma} \cdot F_{q,j'} \cdot G_{r,k'} \} \quad (\text{E.34})$$

Les calculs détaillés des coefficients  $F_{l,L'}$  et  $G_{l,L'}$  sont dans les annexes K et L. Les résultats sont les suivants :

– pour  $l = 2L$  :

$$F_{2L,L'} = \frac{1}{2} \cdot (g_{2L} \cdot \delta_{L,L'} + d_{2L} \cdot \delta_{L-1,L'}) \cdot \delta s$$

avec :

$$(g_{2L}, d_{2L}) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } l = 2L = 2L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } l = 2L = 2L_m + 2 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$G_{2L,L'} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \delta_{L,L'} + \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s$$

– pour  $l = 2L + 1$  :

$$F_{2L+1,L'} = \delta_{L,L'} \cdot \delta s$$

et :

$$G_{2L+1,L'} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_{L,L'} + 3 \cdot \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s$$

Maintenant il ne reste plus qu'à remplacer ces expressions dans E.34. Le résultat obtenu ne va pas être le même selon que les indices  $q$  et  $r$  sont pairs ou impairs. Il y a donc quatre cas à envisager :

1)  $q = 2j$  et  $r = 2k$  :

$$({}^t\mathbf{c})_{p,2j,2k}^{1,\sigma,\sigma'} = \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \cdot \delta_{p,p_0} \cdot \{ \delta_{y,\sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{j,j'} + \delta_{j+1,j'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k,k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1,k'}) + \delta_{z,\sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{k,k'} + \delta_{k+1,k'}) \cdot (g_{2j} \cdot \delta_{j,j'} + d_{2j} \cdot \delta_{j-1,j'}) \} \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (\text{E.35})$$

2)  $q = 2j + 1$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\begin{aligned} ({}^t\mathbf{c})_{pqr, j'k'}^{1, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p, p_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot (\delta_{j, j'} + 3 \cdot \delta_{j+1, j'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} + \\ &\delta_{z, \sigma} \cdot (\delta_{k, k'} + 3 \cdot \delta_{k+1, k'}) \cdot 2 \cdot \delta_{j, j'} \} \cdot \delta y \cdot \delta z \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

3)  $q = 2j + 1$  et  $r = 2k$  :

$$\begin{aligned} ({}^t\mathbf{c})_{pqr, j'k'}^{1, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p, p_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot (\delta_{j, j'} + 3 \cdot \delta_{j+1, j'}) \cdot (g_{2k} \cdot \delta_{k, k'} + d_{2k} \cdot \delta_{k-1, k'}) + \\ &\delta_{z, \sigma} \cdot 2 \cdot \delta_{j, j'} \cdot (3 \cdot \delta_{k, k'} + \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta y \cdot \delta z \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

4)  $q = 2j$  et  $r = 2k + 1$  :

$$\begin{aligned} ({}^t\mathbf{c})_{pqr, j'k'}^{1, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p, p_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot (3 \cdot \delta_{j, j'} + \delta_{j+1, j'}) \cdot 2 \cdot \delta_{k, k'} + \\ &\delta_{z, \sigma} \cdot (g_{2j} \cdot \delta_{j, j'} + d_{2j} \cdot \delta_{j-1, j'}) \cdot (\delta_{k, k'} + 3 \cdot \delta_{k+1, k'}) \} \cdot \delta y \cdot \delta z \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

## E.13 Calcul des composantes de $\mathbf{c}$

Nous devons déterminer les éléments de matrice  $\mathbf{c}_{\epsilon, \beta}$ . La technique de calcul est la même que pour les éléments de matrices  $\mathbf{c}_{\epsilon, \alpha}$ , il suffit simplement de remplacer les indices  $\alpha$  par les indices  $\beta$ . Comme dans le paragraphe précédent, cela revient à tenir compte des deux maillages simultanément. Ainsi en s'inspirant des résultats du paragraphe E.11 on peut écrire :

$$\mathbf{c}_{\epsilon, \beta} = \sum_{n=1}^6 \mathbf{c}_{\epsilon, \beta}^n$$

avec :

$$\mathbf{c}_{\epsilon, \beta}^n = \oint_{\Sigma_n} \vec{\Pi}_{\epsilon}(M) \bullet \vec{\Gamma}_{\beta|\Sigma_n, t}(M) \cdot d\Sigma_n$$

Et pour  $n = 1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{jk, p'q'r'}^{1, \sigma, \sigma'} &= \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p', p_0} \cdot \left\{ \delta_{y, \sigma} \cdot \int_y b_{q'} \cdot A_j \cdot dy \cdot \int_z a_{r'} \cdot B_k \cdot dz + \right. \\ &\left. \delta_{z, \sigma} \cdot \int_y a_{q'} \cdot B_j \cdot dy \cdot \int_z b_{r'} \cdot A_k \cdot dz \right\} \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} F_{L, l'} = \int_s A_L(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds \\ G_{L, l'} = \int_s B_L(s) \cdot a_{l'}(s) \cdot ds \end{cases} \quad (\text{E.39})$$

si bien que :

$$\mathbf{c}_{jk, p'q'r'}^{1, \sigma, \sigma'} = \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p', p_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot F_{j, q'} \cdot G_{k, r'} + \delta_{z, \sigma} \cdot G_{j, q'} \cdot F_{k, r'} \} \quad (\text{E.40})$$

Les calculs détaillés des coefficients  $F_{L,l'}$  et  $G_{L,l'}$  sont dans les annexes K et L. Les résultats sont les suivants :

$$F_{L,l'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{2L,l'} + 2 \cdot \delta_{2L+1,l'} + \delta_{2L+2,l'}) \cdot \delta s$$

et :

$$G_{L,l'} = \frac{1}{4} \cdot (d_L \cdot \delta_{2L-2,l'} + 3 \cdot d_L \cdot \delta_{2L-1,l'} + 3 \cdot g_L \cdot \delta_{2L,l'} + g_L \cdot \delta_{2L+1,l'}) \cdot \delta s$$

avec :

$$(g_L, d_L) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } L = L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } L = L_m + 1 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

En remplaçant ces dernières expressions dans E.40 on trouve finalement :

$$\begin{aligned} c_{jk, p'q'r'}^{1, \sigma, \sigma'} &= \frac{1}{8} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{p', p_0} \cdot \{ \delta_{y, \sigma} \cdot (\delta_{2j, q'} + 2 \cdot \delta_{2j+1, q'} + \delta_{2j+2, q'}) \cdot \\ &\quad (d_k \cdot \delta_{2k-2, r'} + 3 \cdot d_k \cdot \delta_{2k-1, r'} + 3 \cdot g_k \cdot \delta_{2k, r'} + g_k \cdot \delta_{2k+1, r'}) + \\ &\quad \delta_{z, \sigma} \cdot (\delta_{2k, r'} + 2 \cdot \delta_{2k+1, r'} + \delta_{2k+2, r'}) \cdot \\ &\quad (d_j \cdot \delta_{2j-2, q'} + 3 \cdot d_j \cdot \delta_{2j-1, q'} + 3 \cdot g_j \cdot \delta_{2j, q'} + g_j \cdot \delta_{2j+1, q'}) \} \cdot \delta y \cdot \delta z \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$



# Annexe F

## Calcul des $B_{l,l'}$

Rappelons que :

$$B_{l,l'} = \int_s b_l(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds$$

Nous avons représenté sur la même figure les variations de la fonction  $b_l$  ainsi que les variations des fonctions  $b_{l'}$  lorsque  $l' = l - 1, l$  et  $l + 1$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de la surface  $S^-$  d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ( $l = l_0$ ) voir figure F.1.
- Près de la surface  $S^+$  d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$  ( $l = l_m$ ) voir figure F.2.
- Entre les surfaces  $S^-$  et  $S^+$  ( $l_0 < l < l_m$ ) voir figure F.3.

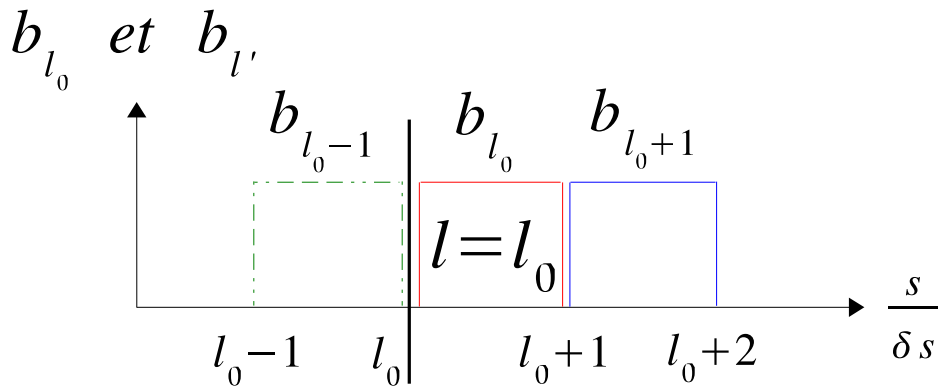


FIG. F.1 – Représentations graphiques des fonctions  $b_{l_0}$  et  $b_{l'}$ .

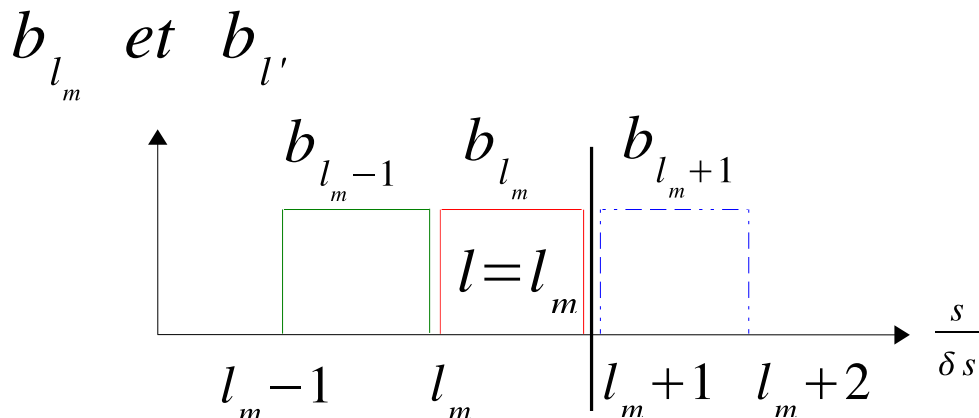


FIG. F.2 – Représentations graphiques des fonctions  $b_{l_m}$  et  $b_{l'}$ .

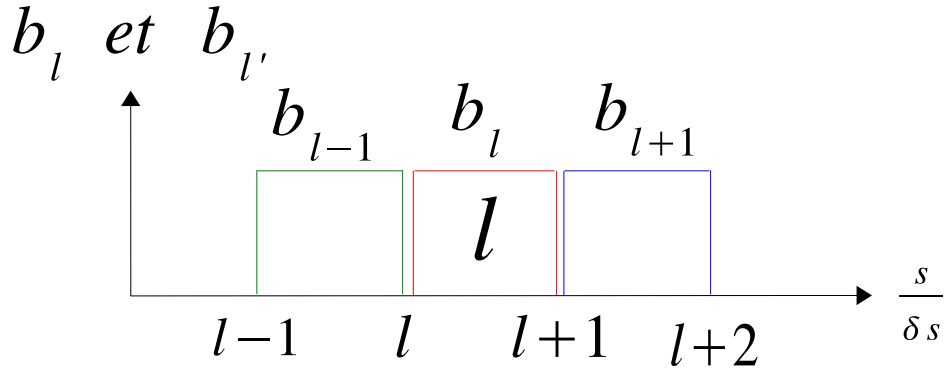


FIG. F.3 – Représentations graphiques des fonctions  $b_l$  et  $b_{l'}$ .

Rappelons que les éléments finis  $\gamma_{p,q,r}^\sigma$  sont nuls à l'extérieur du petit maillage. Ainsi les fonctions  $b_{l_0}$  et  $b_{l_{m+1}}$  qui ont leur support dans le grand maillage, peuvent être considérées comme nulles. C'est pour cette raison que nous les avons représenté en pointillé. A l'aide des trois figures précédentes on constate aisément que les fonction  $b_l$  et  $b_{l'}$  ont des supports disjoints lorsque  $l' \neq l$ . Ainsi  $b_l \cdot b_{l'} \equiv 0$  si  $l \neq l'$  et :

$$b_l^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } s \in [l\delta s, (l+1)\delta s] \\ 0 & \text{si : } s \notin [l\delta s, (l+1)\delta s] \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} B_{l,l'} &= \int_s b_l(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds = \delta_{l,l'} \cdot \int_s b_l^2(s) \cdot ds \\ &= \delta_{l,l'} \cdot \int_{l \cdot \delta_s}^{(l+1) \cdot \delta_s} 1 \cdot ds = \delta_{l,l'} \cdot \delta s \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que :

$$B_{l,l'} = \delta_{l,l'} \cdot \delta s \tag{F.1}$$

# Annexe G

## Calcul des $A_{l,l'}$

Rappelons que :

$$A_{l,l'} = \int_s a_l(s) \cdot a_{l'}(s) \cdot ds$$

Comme dans l'annexe précédent nous avons représenté sur la même figure les variations de la fonction  $a_l$  ainsi que les variations des fonctions  $a_{l'}$  lorsque  $l' = l - 1, l$  et  $l + 1$ . Encore une fois nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de la surface  $S^-$  d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ( $l = l_0$ ) voir figure G.1.
- Près de la surface  $S^+$  d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$  ( $l = l_m + 1$ ) voir figure G.2.
- Entre les surfaces  $S^-$  et  $S^+$  ( $l_0 < l < l_m + 1$ ) voir figure G.3.

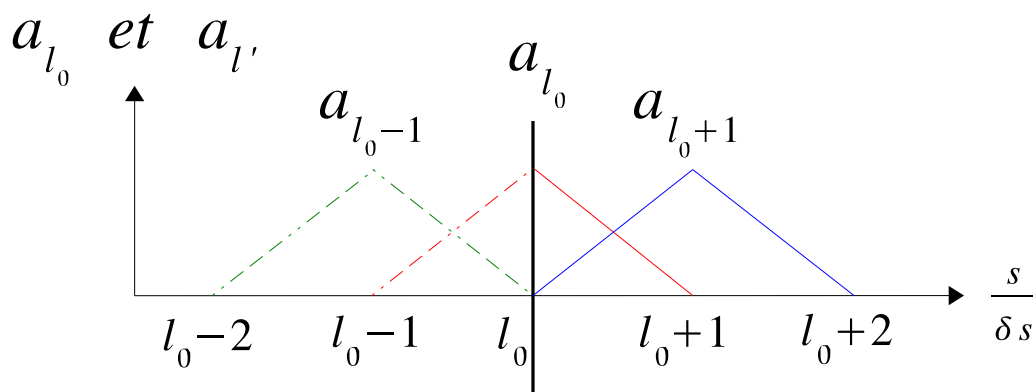


FIG. G.1 – Représentations graphiques des fonctions  $a_{l_0}$  et  $a_{l'}$ .

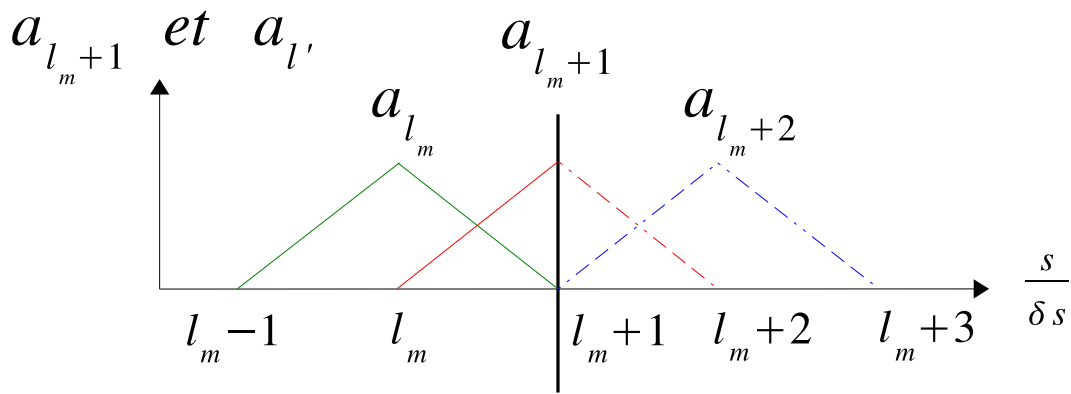


FIG. G.2 – Représentations graphiques des fonctions  $a_{l_m+1}$  et  $a_{l_m}$ .

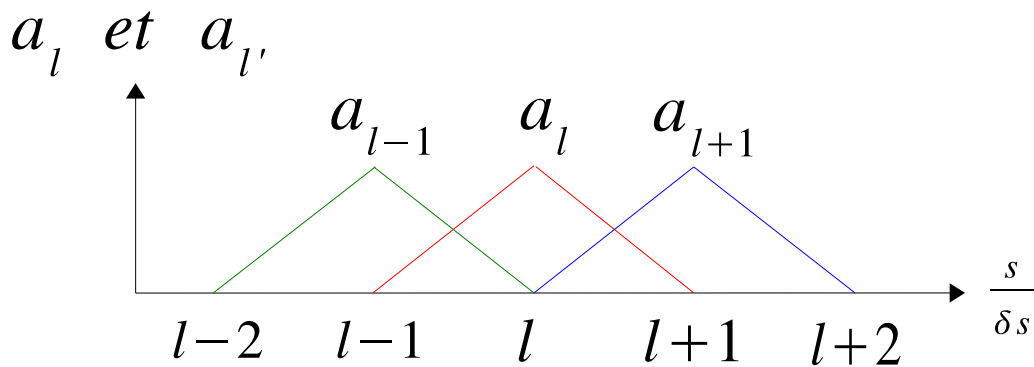


FIG. G.3 – Représentations graphiques des fonctions  $a_l$  et  $a_{l'}$ .

Comme dans l'annexe précédent nous avons représenté en pointillé les fonctions  $a_l$  qui ont leur support, ou une partie de leur support, dans le grand maillage.

1) Regardons ce qui se passe près de  $S^-$  :

Les fonctions  $a_{l_0}$  et  $a_{l'}$  ont des supports disjoints si  $l' \leq l_0 - 2$  et si  $l' \geq l_0 + 2$ , on en déduit que  $A_{l_0, l'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste donc à examiner les cas où  $l' = l_0 - 1, l_0$  et  $l_0 + 1$ .

- Pour  $l' = l_0 - 1$ , on a  $a_{l_0} \cdot a_{l_0-1} = 0$ . En effet le support de la fonction  $a_{l_0-1}$  étant entièrement inclus dans le grand maillage, on peut considérer que cette dernière est nulle. Ainsi  $A_{l_0, l_0-1} = 0$ .
- Pour  $l' = l_0$ , on a  $a_{l_0} \cdot a_{l_0} \neq 0$  mais dans le calcul de  $A_{l_0, l_0}$  on ne doit prendre en compte que « la partie de la fonction »  $a_{l_0}$  qui a son support dans le petit maillage. En d'autre terme on considère la restriction de la fonction  $a_{l_0}$  sur l'intervalle  $[l_0 \delta s, (l_0 + 1) \delta s]$ . Ainsi :

$$A_{l_0, l_0} = \int_{l_0 \cdot \delta s}^{(l_0+1) \cdot \delta s} a_{l_0}^2(s) \cdot ds = \int_{l_0 \cdot \delta s}^{(l_0+1) \cdot \delta s} \frac{1}{\delta s^2} \cdot (-s + (l_0 + 1) \cdot \delta s) ds = \frac{1}{3} \cdot \delta s$$

- Pour  $l' = l_0 + 1$ , on a  $a_{l_0} \cdot a_{l_0+1} \neq 0$  et pour le calcul de  $A_{l_0, l_0+1}$  on prend en compte l'intersection des supports de  $a_{l_0}$  et de  $a_{l_0+1}$ , c'est à dire l'intervalle  $[l_0 \delta s, (l_0 + 1) \delta s]$ . Ainsi :

$$A_{l_0, l_0+1} = \int_{l_0 \cdot \delta s}^{(l_0+1) \cdot \delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (l_0 + 1) \cdot \delta s) \cdot \frac{1}{\delta s} \cdot (s - l_0 \delta s) ds = \frac{1}{6} \cdot \delta s$$

On peut regrouper ces trois résultats dans le tableau suivant :

$l'$	$l_0 - 1$	$l_0$	$l_0 + 1$
$A_{l_0, l'}$	0	$\frac{1}{3} \cdot \delta s$	$\frac{1}{6} \cdot \delta s$

TAB. G.1 – Valeurs de  $A_{l_0, l'}$  près de  $S^-$ .

2) Près de  $S^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve le résultat suivant :

$l'$	$l_m$	$l_m + 1$	$l_m + 2$
$A_{l_m+1, l'}$	$\frac{1}{6} \cdot \delta s$	$\frac{1}{3} \cdot \delta s$	0

TAB. G.2 – Valeurs de  $A_{l_m+1, l'}$  près de  $S^+$ .

3) Entre  $S^-$  et  $S^+$  :

Les fonctions  $a_l$  et  $a_{l'}$  ont des supports disjoints si  $l' \leq l - 2$  et si  $l' \geq l + 2$ , on en déduit que  $A_{l, l'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste maintenant à examiner les cas où  $l' = l - 1$ ,  $l$  et  $l + 1$ .

– Pour  $l' = l - 1$ , on a  $a_l \cdot a_{l-1} \neq 0$  et le calcul de  $A_{l, l-1}$  se fait sur  $\{\text{support de } a_l\} \cap \{\text{support de } a_{l-1}\} = [(l - 1)\delta s, l\delta s]$ . Ainsi :

$$A_{l, l-1} = \int_{(l-1)\delta s}^{l\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - (l - 1) \cdot \delta s) \cdot \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + l \cdot \delta s) ds = \frac{1}{6} \cdot \delta s$$

– Pour  $l' = l$ , on a bien sûr  $a_l \cdot a_l \neq 0$  et le calcul de  $A_{l, l}$  se fait sur le support de  $a_l$ , c'est à dire l'intervalle  $[(l - 1)\delta s, (l + 1)\delta s]$ . Ainsi :

$$A_{l, l} = \int_{(l-1)\delta s}^{l\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - (l - 1) \cdot \delta s)^2 \cdot ds +$$

$$\int_{l\delta s}^{(l+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (l + 1) \cdot \delta s)^2 \cdot ds = \frac{2}{3} \cdot \delta s$$

– Pour  $l' = l + 1$ , on a  $a_l \cdot a_{l+1} \neq 0$  et le calcul de  $A_{l, l+1}$  se fait sur  $\{\text{support de } a_l\} \cap \{\text{support de } a_{l+1}\} = [l\delta s, (l + 1)\delta s]$ . Ainsi :

$$A_{l, l+1} = \int_{l\delta s}^{(l+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - l \cdot \delta s) \cdot \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (l + 1) \cdot \delta s) ds = \frac{1}{6} \cdot \delta s$$

Nous avons regroupé les résultats dans le tableau suivant :

$l'$	$l - 1$	$l$	$l + 1$
$A_{l, l'}$	$\frac{1}{6} \cdot \delta s$	$\frac{2}{3} \cdot \delta s$	$\frac{1}{6} \cdot \delta s$

TAB. G.3 – Valeurs de  $A_{l, l'}$  entre  $S^-$  et  $S^+$ .

Les résultats précédents montrent que les quantités  $A_{l, l'}$  sont non diagonales. Pour remédier à ce problème on utilise une approximation nommée « condensation de masse ». Cette approximation consiste à annuler les valeurs de  $A_{l, l'}$  pour lesquelles  $l' \neq l$  et à ajouter à la quantité  $A_{l, l}$  les valeurs que nous avons supprimées. Il a été montré que cette façon de faire ne change pas l'ordre d'approximation du modèle, c'est à dire ici l'ordre deux. L'application de cette approximation aux quantités  $A_{l, l'}$  donne les résultats suivants :

$l'$	$l_0 - 1$	$l_0$	$l_0 + 1$
$A_{l_0, l'}$	0	$\frac{1}{3} \cdot \delta s + \frac{1}{6} \cdot \delta s = \frac{1}{2} \cdot \delta s$	0

TAB. G.4 – Valeurs de  $A_{l_0, l'}$  près de  $S^-$  après « condensation de masse ».

soit :

$$A_{l_0, l'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{l_0, l'} \cdot \delta s$$

$l'$	$l_m$	$l_m + 1$	$l_m + 2$
$A_{l_m+1, l'}$	0	$\frac{1}{6} \cdot \delta s + \frac{1}{3} \cdot \delta s = \frac{1}{2} \cdot \delta s$	0

TAB. G.5 – Valeurs de  $A_{l_m+1, l'}$  près de  $S^+$  après « condensation de masse ».

soit :

$$A_{l_m+1, l'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{l_m+1, l'} \cdot \delta s$$

$l'$	$l - 1$	$l$	$l + 1$
$A_{l, l'}$	0	$\frac{1}{6} \cdot \delta s + \frac{2}{3} \cdot \delta s + \frac{1}{6} \cdot \delta s = \delta s$	0

TAB. G.6 – Valeurs de  $A_{l, l'}$  entre  $S^-$  et  $S^+$  après « condensation de masse ».

soit :

$$A_{l, l'} = \delta_{l, l'} \cdot \delta s$$

Ces trois dernières relations peuvent être compactées en écrivant :

$$A_{l, l'} = \theta_l \cdot \delta_{l, l'} \cdot \delta s \quad (\text{G.1})$$

avec :

- $\theta_l = \frac{1}{2}$  si  $M(p, q, r)$  appartient au plan d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ou bien au plan d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$ .
- $\theta_l = 1$  dans les autres cas.

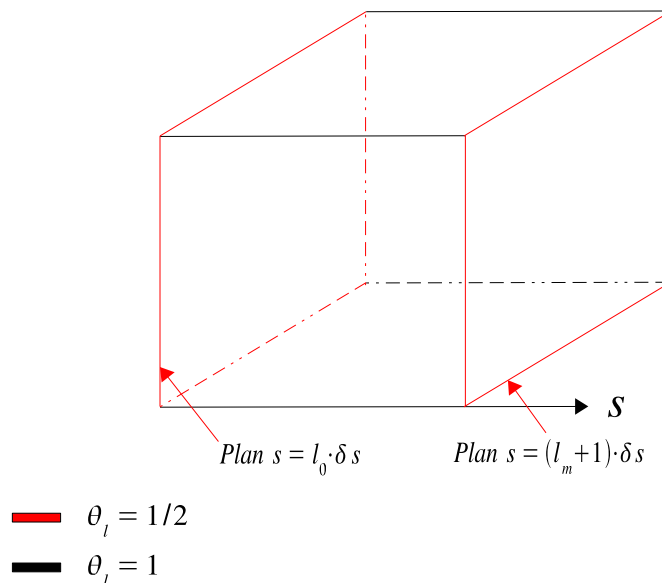


FIG. G.4 – Valeurs prises par  $\theta_l$ .

# Annexe H

## Calcul des $D_{l,l'}^s$

Nous avons représenté sur la même figure les variations de la fonction  $\frac{\partial a_l}{\partial s}$  ainsi que les variations des fonctions  $b_{l'}$  lorsque  $l' = l - 1$  et  $l$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de la surface  $S^-$  d'équation  $s = l_0 \cdot \delta s$  ( $l = l_0$ ) voir figure H.1.
- Près de la surface  $S^+$  d'équation  $s = (l_m + 1) \cdot \delta s$  ( $l = l_m + 1$ ) voir figure H.2.
- Entre les surfaces  $S^-$  et  $S^+$  ( $l_0 < l < l_m + 1$ ) voir figure H.3.

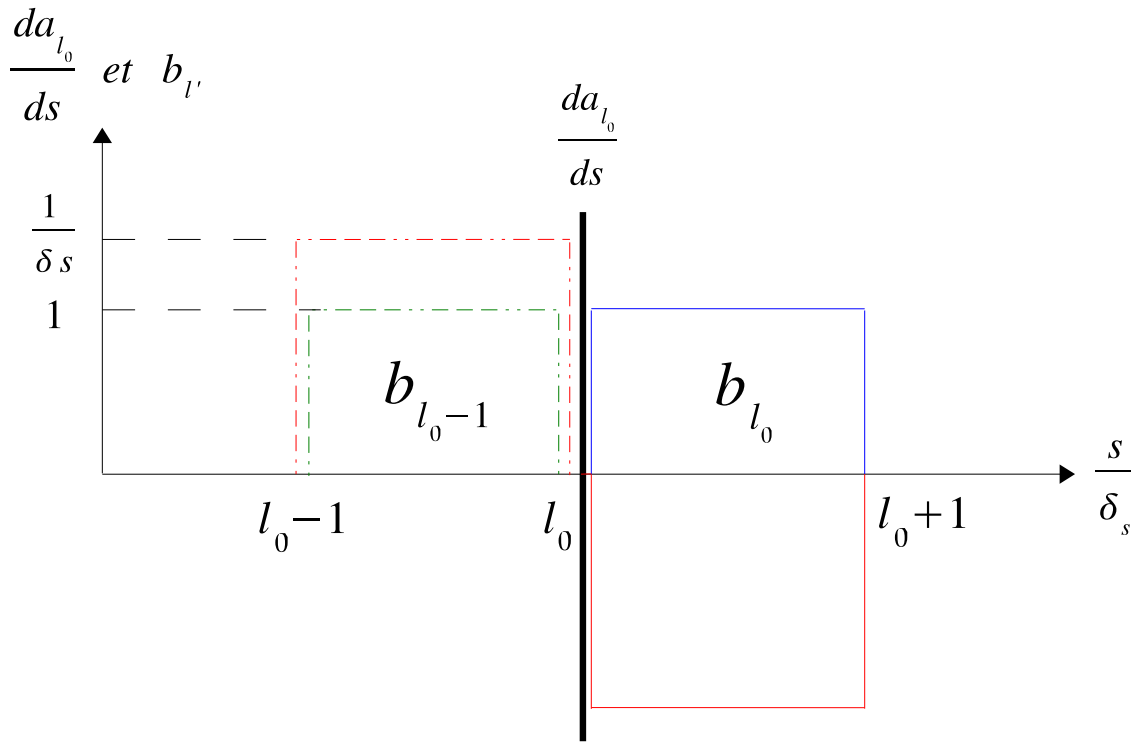


FIG. H.1 – Représentations graphiques des fonctions  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s}$  et  $b_{l'}$ .

Nous avons représenté en pointillé les fonctions qui ont leur support, ou une partie de leur support, dans le grand maillage.

1) Regardons ce qui se passe près de  $S^-$  :

Les fonctions  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s}$  et  $b_{l'}$  ont des supports disjoints si  $l' \geq l_0 + 1$  et si  $l' \leq l_0 - 2$ , on en déduit que  $D_{l_0,l'}^s = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste à examiner les cas où  $l' = l_0 - 1$  et  $l_0$ .

- Pour  $l' = l_0 - 1$ , on a  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s} \cdot b_{l_0-1} = 0$ . En effet le support de la fonction  $b_{l_0-1}$  étant entièrement

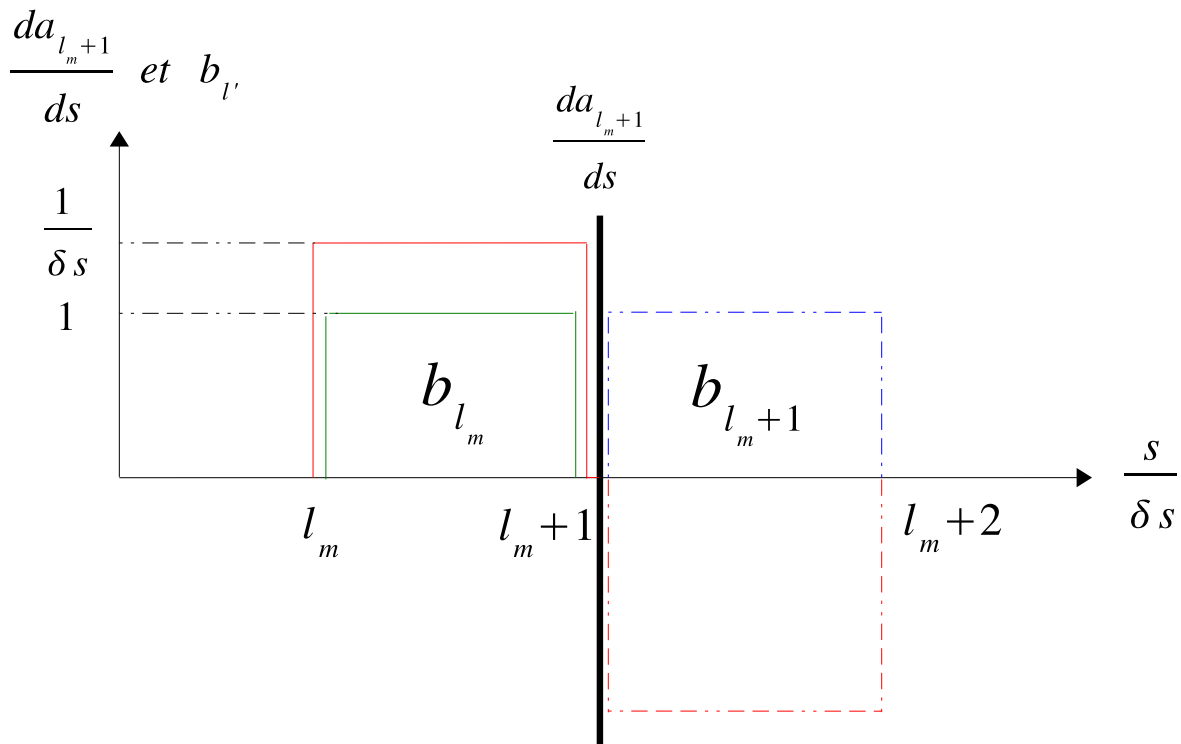


FIG. H.2 – Représentations graphiques des fonctions  $\frac{\partial a_{l_m+1}}{\partial s}$  et  $b_{l'}$ .

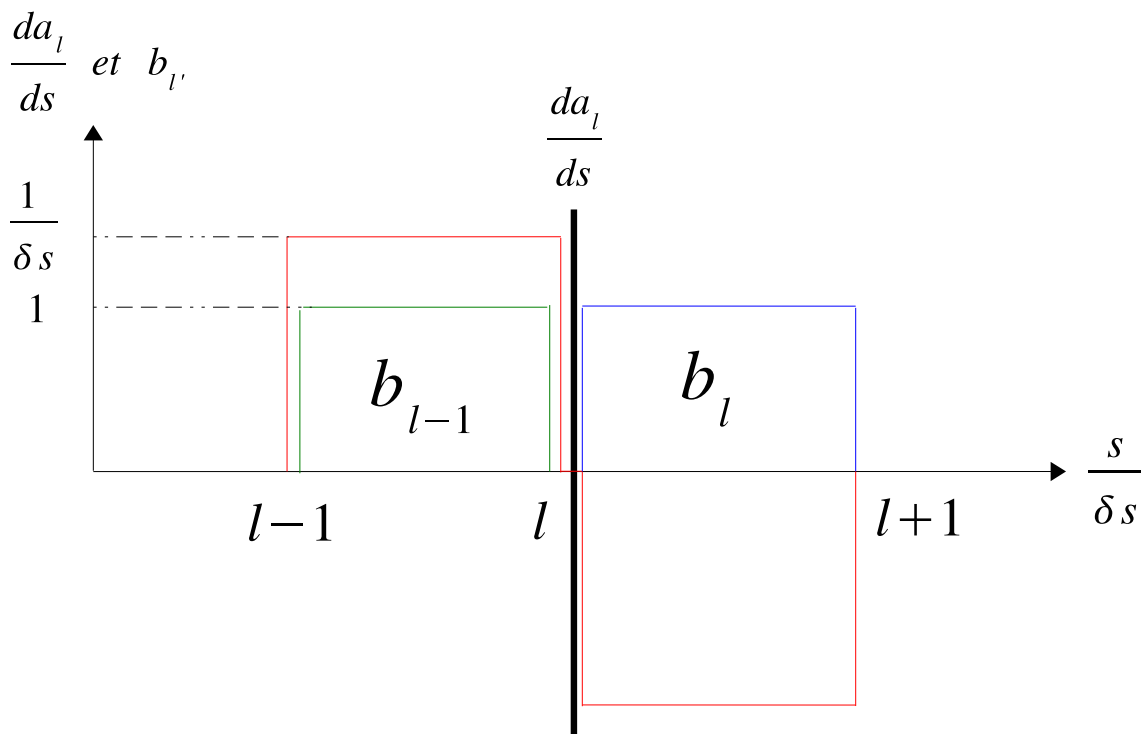


FIG. H.3 – Représentations graphiques des fonctions  $\frac{\partial a_l}{\partial s}$  et  $b_{l'}$ .

- inclu dans le grand maillage, on peut considérer que cette dernière est nulle. Ainsi  $D_{l_0, l_0-1}^s = 0$ .
- Pour  $l' = l_0$ , on a  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s} \cdot b_{l_0} \neq 0$  mais dans le calcul de  $D_{l_0, l_0}^s$  on ne doit prendre en compte



que « la partie de la fonction »  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s}$  qui a son support dans le petit maillage. En d'autre terme on considère la restriction de la fonction  $\frac{\partial a_{l_0}}{\partial s}$  sur l'intervalle  $[l_0\delta_s, (l_0 + 1)\delta_s]$ . Ainsi :

$$D_{l_0, l_0}^s = \int_{l_0 \cdot \delta_s}^{(l_0+1) \cdot \delta_s} \frac{\partial a_{l_0}}{\partial s} \cdot b_{l_0} \cdot ds = \frac{1}{\delta_s} \cdot \int_{l_0 \cdot \delta_s}^{(l_0+1) \cdot \delta_s} -1 \cdot 1 \cdot ds = -1$$

Finalemnt :

$$D_{l_0, l'}^s = -\delta_{l_0, l'} \quad \text{sur : } S^-$$

2) Près de  $S^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve :

$$D_{l_m+1, l'}^s = \delta_{l_m, l'} \quad \text{sur : } S^+$$

3) Entre  $S^-$  et  $S^+$  :

Les fonctions  $\frac{\partial a_l}{\partial s}$  et  $b_{l'}$  ont des supports disjoints si  $l' \leq l - 2$  et si  $l' \geq l + 1$ , on en déduit que  $D_{l, l'}^s = 0$  dans ces deux cas. Il faut maintenant examiner les cas où  $l' = l - 1$  et  $l$ .

– Pour  $l' = l - 1$ , on a  $\frac{\partial a_l}{\partial s} \cdot b_{l-1} \neq 0$  et le calcul de  $D_{l, l-1}^s$  se fait sur  $\{\text{support de } \frac{\partial a_l}{\partial s}\} \cap \{\text{support de } b_{l-1}\} = [(l - 1)\delta_s, l\delta_s]$ . Ainsi :

$$D_{l, l-1}^s = \int_{(l-1) \cdot \delta_s}^{l \cdot \delta_s} \frac{1}{\delta_s} \cdot ds = 1$$

– Pour  $l' = l$ , on a bien sûr  $\frac{\partial a_l}{\partial s} \cdot b_l \neq 0$  et le calcul de  $D_{l, l}^s$  se fait sur  $\{\text{support de } \frac{\partial a_l}{\partial s}\} \cap \{\text{support de } b_l\} = [l\delta_s, (l + 1)\delta_s]$ . Ainsi :

$$D_{l, l}^s = \int_{l \cdot \delta_s}^{(l+1) \cdot \delta_s} -\frac{1}{\delta_s} \cdot ds = -1$$

Finalemnt on a entre  $S^-$  et  $S^+$  :

$$D_{l, l'}^s = (\delta_{l-1, l'} - \delta_{l, l'})$$

Les trois résultats que nous venons d'obtenir peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$D_{l, l'}^s = -(g_l \cdot \delta_{l, l'} - d_l \cdot \delta_{l-1, l'}) \quad (\text{H.1})$$

avec :

$$\begin{cases} (g_l, d_l) = (1, 0) & \text{si : } l = l_0 \\ (g_l, d_l) = (0, 1) & \text{si : } l = l_m + 1 \\ (g_l, d_l) = (1, 1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{H.2})$$

# Annexe I

## Calcul des $F_{L,L'}$

Rappelons que :

$$F_{L,L'} = \int_s A_L(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds$$

Nous avons représenté sur le même graphique les variations de la fonction  $A_L$  ainsi que les variations des fonctions  $B_{L'}$  lorsque  $L' = L$  et  $L - 1$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de l'arête  $A^-$  d'équation  $s = L_0 \Delta s$  ( $L = L_0$ ) voir figure I.1.
- Près de l'arête  $A^+$  d'équation  $s = (L_m + 1) \Delta s$  ( $L = L_m + 1$ ) voir figure I.2.
- Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  ( $L_0 < L < L_m + 1$ ) voir figure I.3.

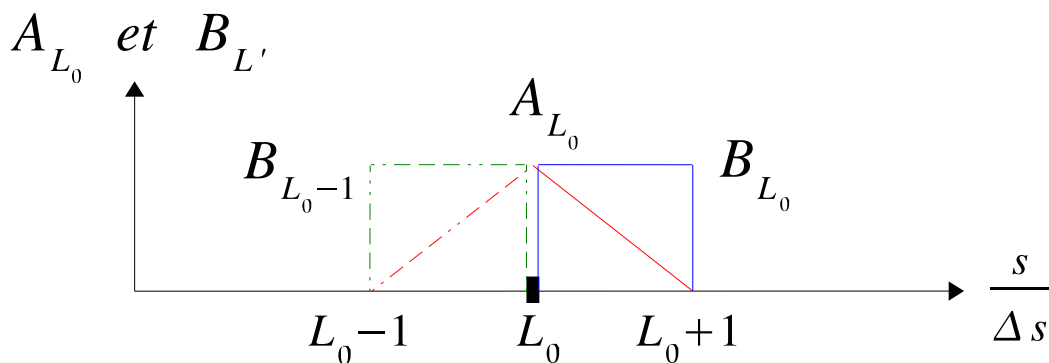


FIG. I.1 – Représentations graphiques des fonctions  $A_{L_0}$  et  $B_{L'}$ .

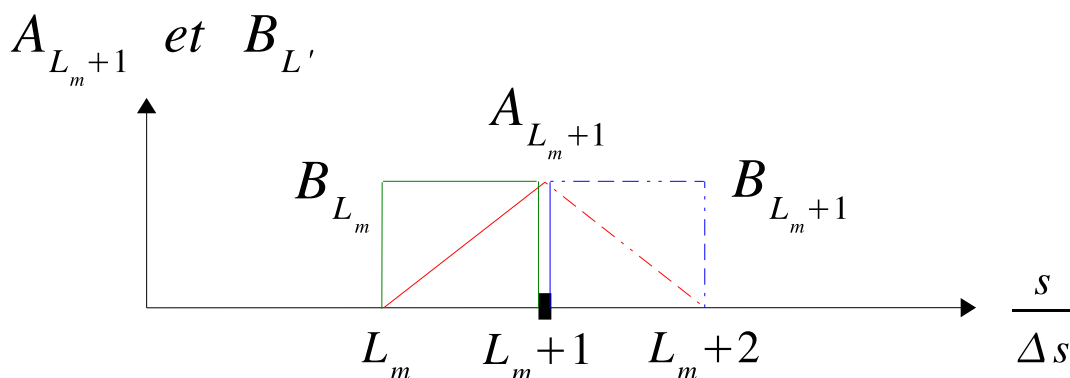


FIG. I.2 – Représentations graphiques des fonctions  $A_{L_m+1}$  et  $B_{L'}$ .

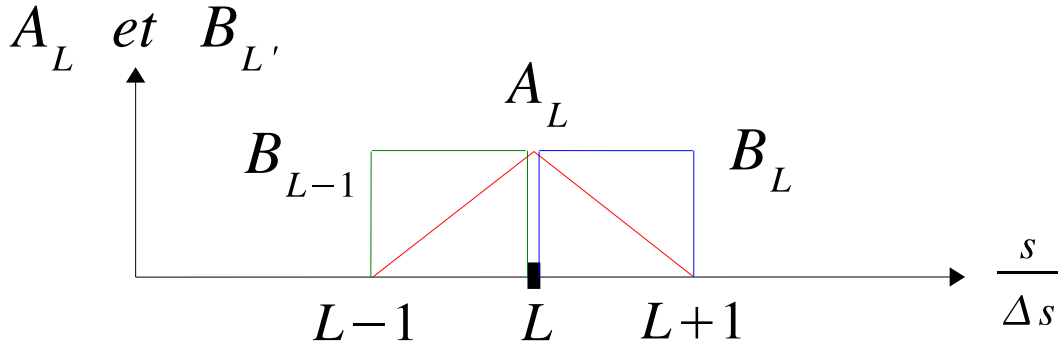


FIG. I.3 – Représentations graphiques des fonctions  $A_L$  et  $B_{L'}$ .

1) Regardons ce qui se passe près de l'arête  $A^-$  :

Les fonctions  $A_{L_0}$  et  $B_{L'}$  ont des supports disjoints si  $L' \leq L_0 - 2$  et si  $L' \geq L_0 + 1$ . Ainsi  $F_{L_0, L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste à examiner les cas où  $L' = L_0 - 1$  et  $L_0$ .

- Pour  $L' = L_0 - 1$ , on a  $A_{L_0} \cdot B_{L_0-1} = 0$  car la fonction  $B_{L_0-1}$  a son support en dehors de la surface  $\Sigma$ . Donc :  $F_{L_0, L_0-1} = 0$ .
- Pour  $L' = L_0$  :

$$F_{L_0, L_0} = \int_{L_0 \Delta s}^{(L_0+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L_0 + 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

Ainsi :

$$F_{L_0, L'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{L_0, L'} \cdot \Delta s$$

2) Près de l'arête  $A^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve :

$$F_{L_m+1, L'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{L_m, L'} \cdot \Delta s$$

3) Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  :

Les fonctions  $A_L$  et  $B_{L'}$  ont des supports disjoints si  $L' \leq L - 2$  et si  $L' \geq L + 1$ . Ainsi  $F_{L, L'} = 0$  dans ces deux cas. Il faut maintenant examiner les cas où  $L' = L - 1$  et  $L$ .

- Pour  $L' = L - 1$  :

$$F_{L, L-1} = \int_{(L-1)\Delta s}^{L\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - (L - 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

- Pour  $L' = L$  :

$$F_{L, L} = \int_{L\Delta s}^{(L+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L + 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

Ainsi :

$$F_{L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L-1, L'} + \delta_{L, L'}) \cdot \Delta s$$

On peut regrouper ces trois résultats en écrivant :

$$F_{L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (g_L \cdot \delta_{L, L'} + d_L \cdot \delta_{L-1, L'}) \cdot \Delta s \quad (\text{I.1})$$

avec :

$$(g_L, d_L) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } L = L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } L = L_m + 1 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

# Annexe J

## Calcul des $G_{L,L'}$

Rappelons que :

$$G_{L,L'} = \int_s B_L(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds$$

Nous avons représenté sur le même graphique les variations de la fonction  $B_L$  ainsi que les variations des fonctions  $A_{L'}$  lorsque  $L' = L$  et  $L + 1$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de l'arête  $A^-$  d'équation  $s = L_0 \Delta s$  ( $L = L_0$ ) voir figure J.1.
- Près de l'arête  $A^+$  d'équation  $s = (L_m + 1) \Delta s$  ( $L = L_m$ ) voir figure J.2.
- Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  ( $L_0 < L < L_m$ ) voir figure J.3.

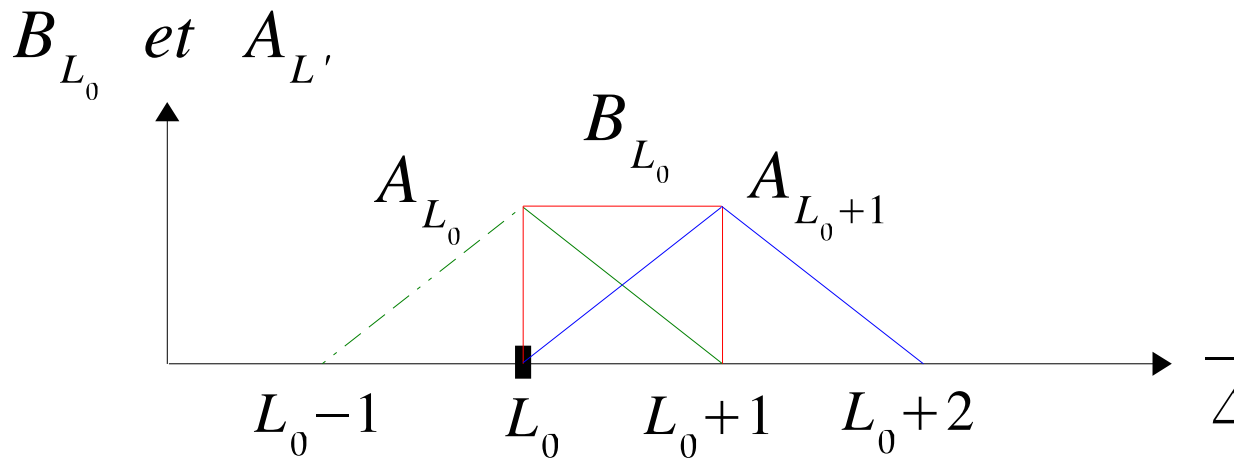


FIG. J.1 – Représentations graphiques des fonctions  $B_{L_0}$  et  $A_{L'}$ .

1) Regardons ce qui se passe près de l'arête  $A^-$  :

Les fonctions  $B_{L_0}$  et  $A_{L'}$  ont des supports disjoints si  $L' \leq L_0 - 1$  et si  $L' \geq L_0 + 2$ . Ainsi  $G_{L_0,L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste à examiner les cas où  $L' = L_0$  et  $L_0 + 1$ .

- Pour  $L' = L_0$  :

$$G_{L_0,L_0} = \int_{L_0 \Delta s}^{(L_0+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L_0 + 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

- Pour  $L' = L_0 + 1$  :

$$G_{L_0,L_0+1} = \int_{L_0 \Delta s}^{(L_0+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L_0 \Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

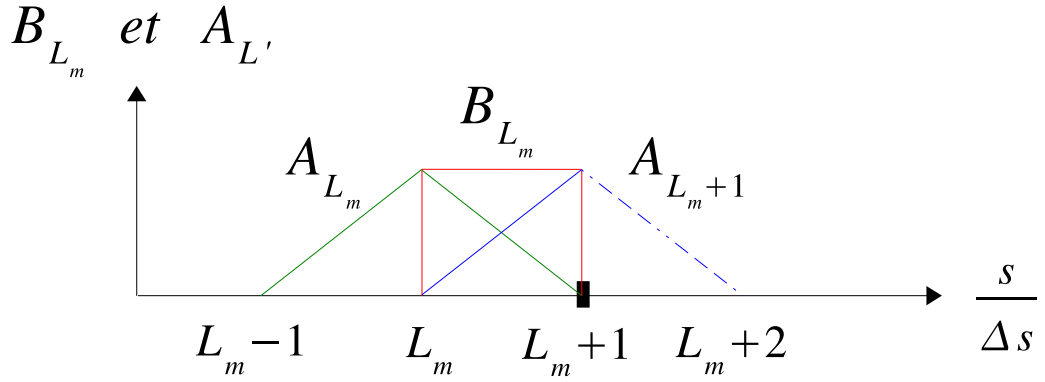


FIG. J.2 – Représentations graphiques des fonctions  $B_{L_m}$  et  $A_{L'}$ .

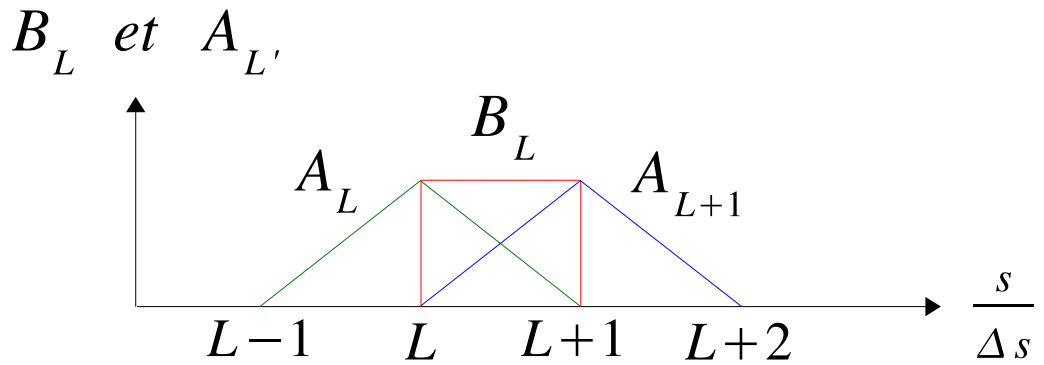


FIG. J.3 – Représentations graphiques des fonctions  $B_L$  et  $A_{L'}$ .

Ainsi :

$$G_{L_0, L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L_0, L'} + \delta_{L_0+1, L'}) \cdot \Delta s$$

2) Près de l'arête  $A^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve :

$$G_{L_m, L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L_m, L'} + \delta_{L_m+1, L'}) \cdot \Delta s$$

3) Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  :

Les fonctions  $B_L$  et  $A_{L'}$  ont des supports disjoints si  $L' \leq L - 1$  et si  $L' \geq L + 2$ . Ainsi  $G_{L, L'} = 0$  dans ces deux cas. Il faut maintenant examiner les cas où  $L' = L$  et  $L + 1$ .

– Pour  $L' = L$  :

$$G_{L, L} = \int_{L\Delta s}^{(L+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L+1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

– Pour  $L' = L + 1$  :

$$G_{L, L+1} = \int_{L\Delta s}^{(L+1)\Delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta s$$

Ainsi :

$$G_{L,L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L,L'} + \delta_{L+1,L'}) \cdot \Delta s$$

On peut regrouper ces trois résultats en écrivant :

$$G_{L,L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L,L'} + \delta_{L+1,L'}) \cdot \Delta s \quad (\text{J.1})$$

# Annexe K

## Calcul des $F_{l,L'}$ et des $F_{L,l'}$

### K.1 Calcul des $F_{l,L'}$

Rappelons que :

$$F_{l,L'} = \int_s a_l(s) \cdot B_{L'}(s) \cdot ds$$

Nous avons représenté sur le même graphique les variations des fonctions  $a_l$  lorsque  $l = 2L$  et lorsque  $l = 2L + 1$ , ainsi que les variations des fonctions  $B_{L'}$  lorsque  $L' = L$  et  $L - 1$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de l'arête  $A^-$  d'équation  $s = 2L_0\delta s$  ( $l = 2L_0$  et  $2L_0 + 1$ ) voir figure K.1.
- Près de l'arête  $A^+$  d'équation  $s = (2L_m + 2)\delta s$  ( $l = 2L_m + 1$  et  $2L_m + 2$ ) voir figure K.2.
- Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  ( $l = 2L$  et  $2L + 1$ ) voir figure K.3.

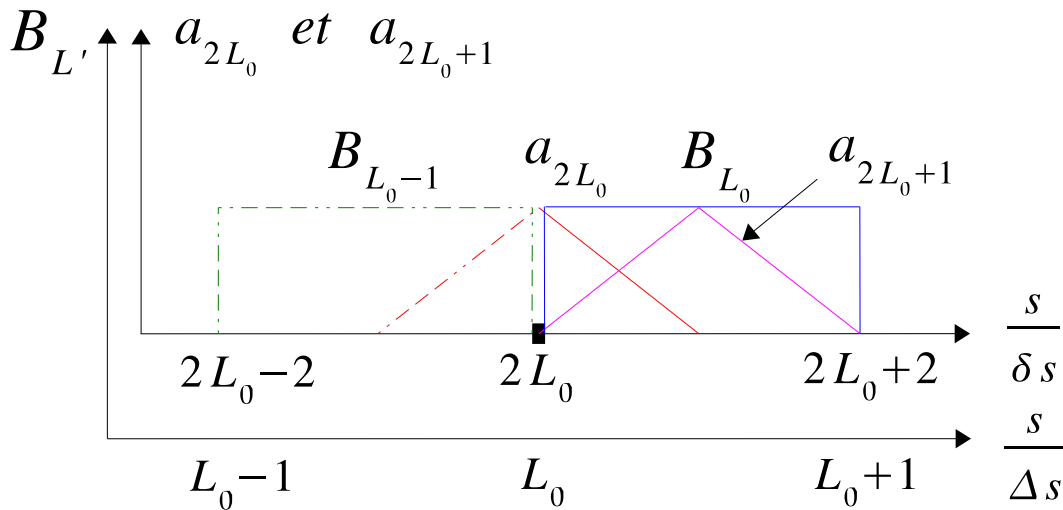


FIG. K.1 – Représentations graphiques des fonctions  $a_{2L_0}$ ,  $a_{2L_0+1}$  et  $B_{L'}$ .

1) Regardons ce qui se passe près de l'arête  $A^-$  :

Lorsque  $L' \leq L_0 - 2$  et lorsque  $L' \geq L_0 + 1$ , le support de la fonction  $B_{L'}$  n'a aucune partie commune avec le support de la fonction  $a_{2L_0}$ , ni avec celui de la fonction  $a_{2L_0+1}$ . On en déduit que  $F_{2L_0,L'} = 0$  et que  $F_{2L_0+1,L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste donc à examiner les cas où  $L' = L_0 - 1$  et  $L_0$ .

- Pour  $L' = L_0 - 1$  la fonction  $B_{L_0-1}$  est nulle, car son support est en dehors de la surface  $\Sigma$ . Ainsi  $a_{2L_0} \cdot B_{L_0-1} = 0$  et  $a_{2L_0+1} \cdot B_{L_0-1} = 0$ . On en déduit que  $F_{2L_0,L_0-1} = 0$  et que  $F_{2L_0+1,L_0-1} = 0$ .



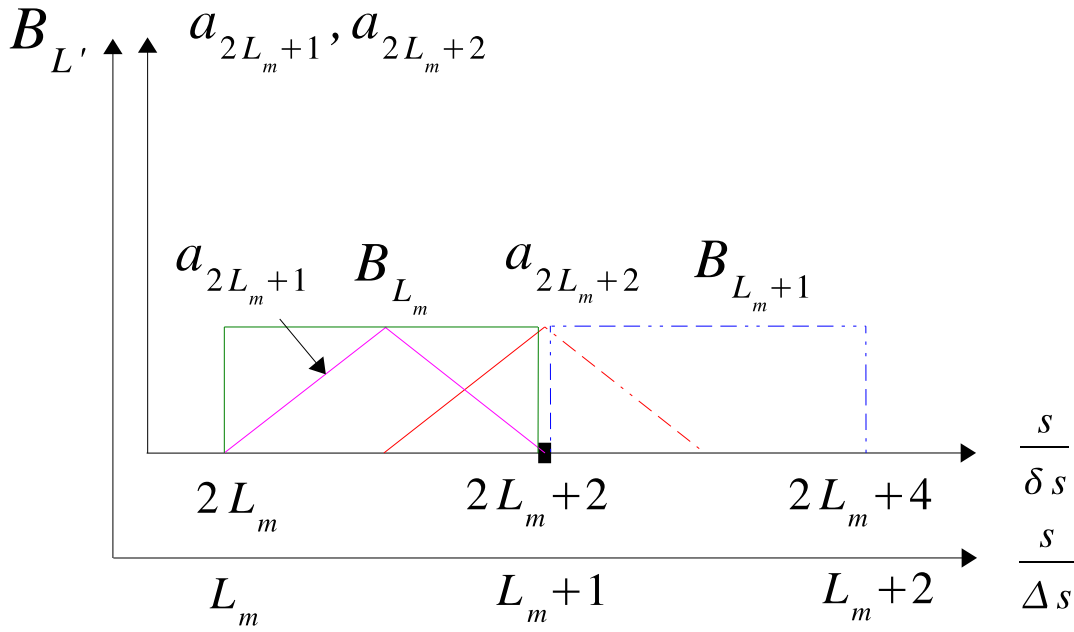


FIG. K.2 – Représentations graphiques des fonctions  $a_{2L_m+1}$ ,  $a_{2L_m+2}$  et  $B_{L'}$ .

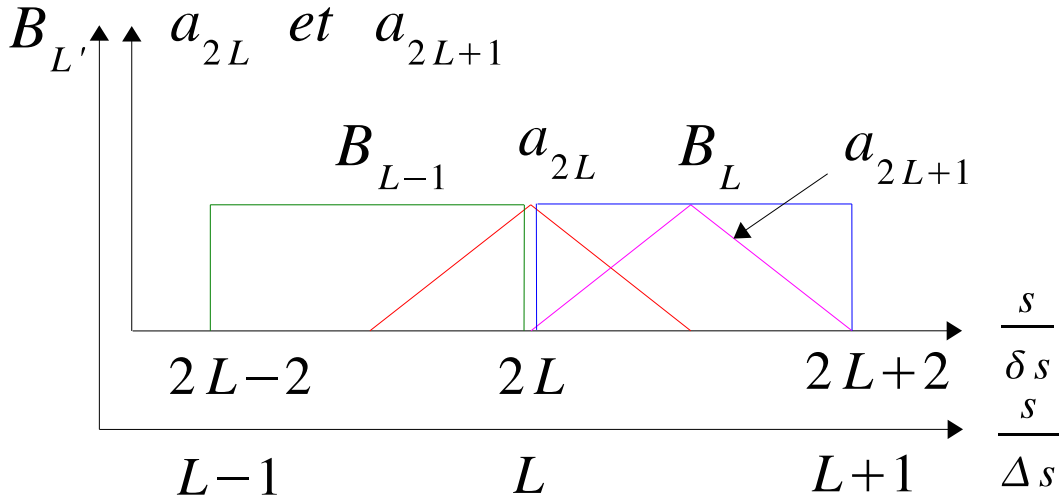


FIG. K.3 – Représentations graphiques des fonctions  $a_{2L}$ ,  $a_{2L+1}$  et  $B_{L'}$ .

– Pour  $L' = L_0$ , on a  $a_{2L_0} \cdot B_{L_0} \neq 0$  et  $a_{2L_0+1} \cdot B_{L_0} \neq 0$  et :

$$F_{2L_0, L_0} = \int_s a_{2L_0}(s) \cdot B_{L_0}(s) \cdot ds =$$

$$\int_{2L_0\delta s}^{(2L_0+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (2L_0 + 1)\delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \delta s$$

Puis :

$$F_{2L_0+1, L_0} = \int_s a_{2L_0+1}(s) \cdot B_{L_0}(s) \cdot ds =$$

$$\int_{2L_0\delta s}^{(2L_0+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - 2L_0\delta s) \cdot ds + \int_{(2L_0+1)\delta s}^{(2L_0+2)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (2L_0 + 2)\delta s) \cdot ds = \delta s$$

Ainsi :

$$\begin{cases} F_{2L_0, L'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{L_0, L'} \cdot \delta s \\ F_{2L_0+1, L'} = \delta_{L_0, L'} \cdot \delta s \end{cases}$$

2) Près de l'arête  $A^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve :

$$\begin{cases} F_{2L_m+1, L'} = \delta_{L_m, L'} \cdot \delta s \\ F_{2L_0+2, L'} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{L_m, L'} \cdot \delta s \end{cases}$$

3) Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  :

Pour  $L' \leq L - 2$  et pour  $L' \geq L + 1$ , le support de la fonction  $B_{L'}$  n'a aucune partie commune avec le support de la fonction  $a_{2L}$ , ni avec celui de la fonction  $a_{2L+1}$ . On en déduit que  $F_{2L, L'} = 0$  et que  $F_{2L+1, L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste donc à examiner les cas où  $L' = L - 1$  et  $L$ .

– Pour  $L' = L - 1$ , on a  $a_{2L} \cdot B_{L-1} \neq 0$  et  $a_{2L+1} \cdot B_{L-1} = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} F_{2L, L-1} &= \int_s a_{2L}(s) \cdot B_{L-1}(s) \cdot ds = \\ &= \int_{(2L-1)\delta s}^{2L\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - (2L - 1)\delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \delta s \end{aligned}$$

et :

$$F_{2L+1, L-1} = \int_s a_{2L+1}(s) \cdot B_{L-1}(s) \cdot ds = 0$$

– Pour  $L' = L$ , on a  $a_{2L} \cdot B_L \neq 0$  et  $a_{2L+1} \cdot B_L \neq 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} F_{2L, L} &= \int_s a_{2L}(s) \cdot B_L(s) \cdot ds = \\ &= \int_{2L\delta s}^{(2L+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s + (2L + 1)\delta s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \delta s \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} F_{2L+1, L} &= \int_s a_{2L+1}(s) \cdot B_L(s) \cdot ds = \\ &= \int_{2L\delta s}^{(2L+1)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (s - 2L\delta s) \cdot ds + \int_{(2L+1)\delta s}^{(2L+2)\delta s} \frac{1}{\delta s} \cdot (-s - (2L + 2)\delta s) \cdot ds = \delta s \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} F_{2L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{L-1, L'} + \delta_{L, L'}) \cdot \delta s \\ F_{2L+1, L'} = \delta_{L, L'} \cdot \delta s \end{cases}$$

On peut regrouper tous ces résultats en écrivant :

$$F_{2L, L'} = \frac{1}{2} \cdot (g_{2L} \cdot \delta_{L-1, L'} + d_{2L} \cdot \delta_{L, L'}) \cdot \delta s \quad (\text{K.1})$$

avec :

$$(g_{2L}, d_{2L}) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } l = 2L = 2L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } l = 2L = 2L_m + 2 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{K.2})$$

et :

$$F_{2L+1, L'} = \delta_{L, L'} \cdot \delta s \quad (\text{K.3})$$

## K.2 Calcul des $F_{L, l'}$

Rappelons que :

$$F_{L, l'} = \int_s A_L(s) \cdot b_{l'}(s) \cdot ds$$

La technique de calcul est toujours un peu la même, c'est à dire que l'on se base sur les représentations graphiques des fonctions  $A_L$  et  $b_{l'}$  afin de déterminer les intersections de leurs supports. Après on intègre sur ces intersections les produits  $A_L \cdot b_{l'}$ . Le résultat est le suivant :

$$F_{L, l'} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{2L, l'} + 2 \cdot \delta_{2L+1, l'} + \delta_{2L+2, l'}) \cdot \delta s \quad (\text{K.4})$$

# Annexe L

## Calcul des $G_{l,L'}$ et des $G_{L,l'}$

### L.1 Calcul des $G_{l,L'}$

Rappelons que :

$$G_{l,L'} = \int_s b_l(s) \cdot A_{L'}(s) \cdot ds$$

Nous avons représenté sur le même graphique les variations des fonctions  $b_l$  lorsque  $l = 2L$  et  $2L + 1$ , ainsi que les variations des fonctions  $A_{L'}$  lorsque  $L' = L$  et  $L + 1$ . Nous avons fait ces représentations dans les trois situations géométriques suivantes :

- Près de l'arête  $A^-$  d'équation  $s = 2L_0\delta s$  ( $l = 2L_0$  et  $2L_0 + 1$ ) voir figure L.1.
- Près de l'arête  $A^+$  d'équation  $s = (2L_m + 2)\delta s$  ( $l = 2L_m$  et  $2L_m + 1$ ) voir figure L.2.
- Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  ( $l = 2L$  et  $2L + 1$ ) voir figure L.3.

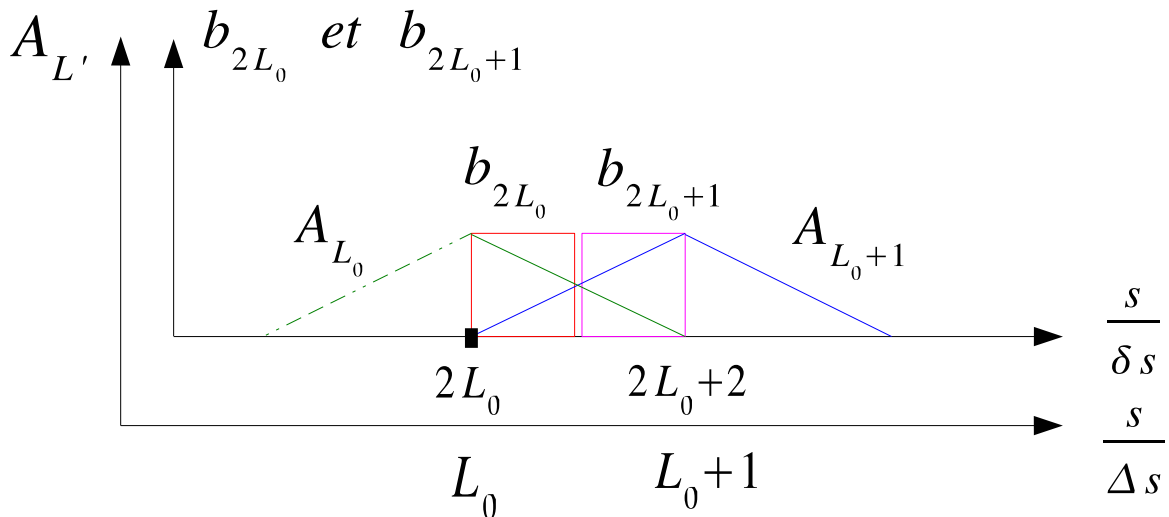


FIG. L.1 – Représentations graphiques des fonctions  $b_{2L_0}$ ,  $b_{2L_0+1}$  et  $A_{L'}$ .

1) Regardons ce qui se passe près de l'arête  $A^-$  :

Lorsque  $L' \leq L_0 - 1$  et lorsque  $L' \geq L_0 + 2$ , le support de la fonction  $A_{L'}$  n'a aucune partie commune avec le support de la fonction  $b_{2L_0}$ , ni avec celui de la fonction  $b_{2L_0+1}$ . On en déduit que  $G_{2L_0,L'} = 0$  et que  $F_{2L_0+1,L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste donc à examiner les cas où  $L' = L_0$  et  $L_0 + 1$ .

- Pour  $L' = L_0$ , on a  $b_{2L_0} \cdot A_{L_0} \neq 0$  et  $b_{2L_0+1} \cdot A_{L_0} \neq 0$  et :

$$G_{2L_0,L_0} = \int_s b_{2L_0}(s) \cdot A_{L_0}(s) \cdot ds =$$

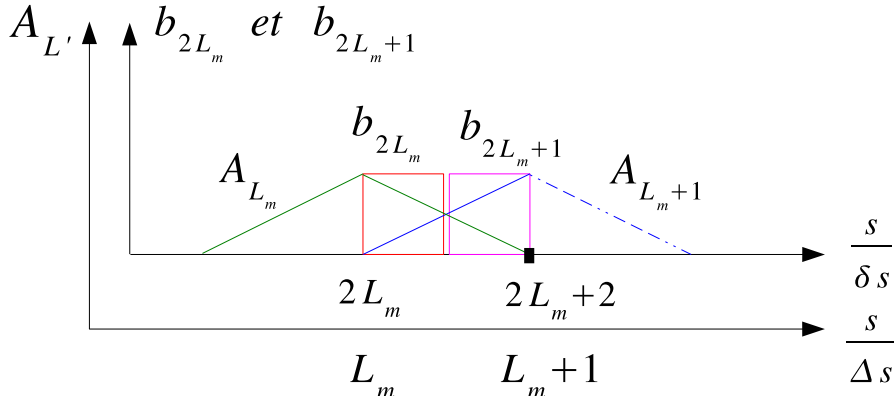


FIG. L.2 – Représentations graphiques des fonctions  $b_{2L_m}$ ,  $b_{2L_m+1}$  et  $A_{L'}$ .

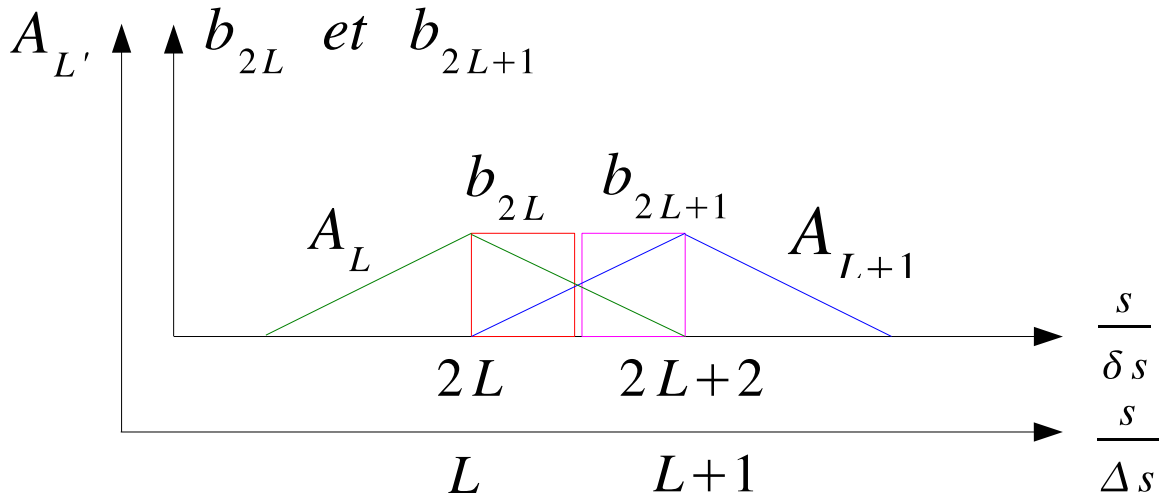


FIG. L.3 – Représentations graphiques des fonctions  $b_{2L}$ ,  $b_{2L+1}$  et  $A_{L'}$ .

$$\int_{2L_0\delta s}^{(2L_0+1)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L_0 + 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{3}{4} \cdot \delta s$$

Puis :

$$G_{2L_0+1, L_0} = \int_s b_{2L_0+1}(s) \cdot A_{L_0}(s) \cdot ds =$$

$$\int_{(2L_0+1)\delta s}^{(2L_0+2)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L_0 + 1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{4} \cdot \delta s$$

– Pour  $L' = L_0 + 1$ , on a  $b_{2L_0} \cdot A_{L_0+1} \neq 0$  et  $b_{2L_0+1} \cdot A_{L_0+1} \neq 0$  et :

$$G_{2L_0, L_0+1} = \int_s b_{2L_0}(s) \cdot A_{L_0+1}(s) \cdot ds =$$

$$\int_{2L_0\delta s}^{(2L_0+1)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L_0\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{4} \cdot \delta s$$

puis :

$$G_{2L_0+1, L_0+1} = \int_s b_{2L_0+1}(s) \cdot A_{L_0+1}(s) \cdot ds =$$

$$\int_{(2L_0+1)\delta s}^{(2L_0+2)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L_0\Delta s) \cdot ds = \frac{3}{4} \cdot \delta s$$

Ainsi :

$$\begin{cases} G_{2L_0,L'} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \delta_{L_0,L'} + \delta_{L_0+1,L'}) \cdot \delta s \\ G_{2L_0+1,L'} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_{L_0,L'} + 3 \cdot \delta_{L_0+1,L'}) \cdot \delta s \end{cases}$$

2) Près de l'arête  $A^+$  :

La situation est la même que la précédente à une symétrie près. On trouve :

$$\begin{cases} G_{2L_m,L'} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \delta_{L_m,L'} + \delta_{L_m+1,L'}) \cdot \delta s \\ G_{2L_m+1,L'} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_{L_m,L'} + 3 \cdot \delta_{L_m+1,L'}) \cdot \delta s \end{cases}$$

3) Entre les arêtes  $A^-$  et  $A^+$  :

Pour  $L' \leq L - 1$  et pour  $L' \geq L + 2$ , le support de la fonction  $A_{L'}$  n'a aucune partie commune avec le support de la fonction  $b_{2L}$ , ni avec celui de la fonction  $b_{2L+1}$ . On en déduit que  $G_{2L,L'} = 0$  et que  $G_{2L+1,L'} = 0$  dans ces deux cas. Il nous reste donc à examiner les cas où  $L' = L$  et  $L + 1$ .

– Pour  $L' = L$ , on a  $b_{2L} \cdot A_L \neq 0$  et  $b_{2L+1} \cdot A_L \neq 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} G_{2L,L} &= \int_s b_{2L}(s) \cdot A_L(s) \cdot ds = \\ &= \int_{2L\delta s}^{(2L+1)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L+1)\Delta s) \cdot ds = \frac{3}{4} \cdot \delta s \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} G_{2L+1,L} &= \int_s b_{2L+1}(s) \cdot A_L(s) \cdot ds = \\ &= \int_{(2L+1)\delta s}^{(2L+2)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (-s + (L+1)\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{4} \cdot \delta s \end{aligned}$$

– Pour  $L' = L + 1$ , on a  $b_{2L} \cdot A_{L+1} \neq 0$  et  $b_{2L+1} \cdot A_{L+1} \neq 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} G_{2L,L+1} &= \int_s b_{2L}(s) \cdot A_{L+1}(s) \cdot ds = \\ &= \int_{2L\delta s}^{(2L+1)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L\Delta s) \cdot ds = \frac{1}{4} \cdot \delta s \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} G_{2L+1,L+1} &= \int_s b_{2L+1}(s) \cdot A_{L+1}(s) \cdot ds = \\ &= \int_{(2L+1)\delta s}^{(2L+2)\delta s} \frac{1}{\Delta s} \cdot (s - L\Delta s) \cdot ds = \frac{3}{4} \cdot \delta s \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} G_{2L,L'} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \delta_{L,L'} + \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s \\ G_{2L+1,L'} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_{L,L'} + 3 \cdot \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s \end{cases}$$

On peut regrouper tous ces résultats en écrivant :

$$\begin{cases} G_{2L,L'} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \delta_{L,L'} + \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s \\ G_{2L+1,L'} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_{L,L'} + 3 \cdot \delta_{L+1,L'}) \cdot \delta s \end{cases} \quad (\text{L.1})$$

quelque soit  $L \in [L_0, L_m]$ .

## L.2 Calcul des $G_{L,l'}$

Rappelons que :

$$G_{L,l'} = \int_s B_L(s) \cdot a_{l'}(s) \cdot ds$$

On se base sur les représentations graphiques des fonctions  $B_L$  et  $a_{l'}$  afin de déterminer les intersections de leurs supports. Après cela on intègre sur ces intersections les produits  $B_L \cdot a_{l'}$ . On trouve :

$$G_{L,l'} = \frac{1}{4} \cdot (d_L \cdot \delta_{2L-2,l'} + 3 \cdot d_L \cdot \delta_{2L-1,l'} + 3 \cdot g_L \cdot \delta_{2L,l'} + g_L \cdot \delta_{2L+1,l'}) \cdot \delta s \quad (\text{L.2})$$

avec :

$$(g_L, d_L) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si : } L = L_0 \\ (0, 1) & \text{si : } L = L_m + 1 \\ (1, 1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{L.3})$$

# Bibliographie

- [1] K. S. Yee, « Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, » *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302-307, 1996.
- [2] A. Taflove et M. E. Brodwin, « Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations, » *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, vol. 23, n°8, août 1975.
- [3] M. Mrozowski, « Stability condition for the explicit algorithm of the time domain analysis of Maxwell's equations, » *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, n°8, août 1994.
- [4] F. B. Hildebrand, « Introduction to Numerical Analysis, » *seconde édition Dover Publication*.
- [5] Umashankar, K. R. and A. Taflove, « A novel method to analyse electromagnetic scattering of complex objects, » *IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility*, vol. 24, pp. 397-405, 1982.
- [6] C. Baum, « Toward an engineering of electromagnetic scattering, » *Academic press*, 1972.
- [7] JP. Sceaux, « Etude de la susceptibilité aux parasites électromagnétiques transitoires des antennes plaquées utilisées dans le domaine spatial, » *Thèse de l'Université de Limoges Faculté des Sciences*.
- [8] C. Guiffaut, « Contribution à la méthode FDTD pour l'étude d'antennes et de la diffraction d'objets enfouis, » *Thèse de l'Université de Rennes I*.
- [9] R. Holland et L. Simpson, « A free field EMP coupling and scattering code, » *IEEE, Transaction on Nuclear Sciences*, vol. 6, n°24, pp. 2416-2421, 1997.
- [10] A. Bayliss, et E. Turkel, « Radiation boundary conditions for wave-like equations, » *Comm. Pur. Appl. Math.*, vol. 23, pp. 707-725, 1980.
- [11] B. Engquist et A. Majda, « Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, » *Mathematics of computation*, vol. 31, pp. 629-651, 1977.
- [12] G. Mur, « Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations, » *IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility*, vol. 23, pp. 377-382, 1981.
- [13] P. Joly, B. Mercier, « Une nouvelle condition transparente d'ordre 2 pour les équations de Maxwell en dimension 3, » *Rapport de recherche n°1047, programme 7*, juin 1989.
- [14] L. Trefethen et L. Halpern, « Well-posedness of one way wave equations and Absorbing boundary conditions, » *Mathematics of computation*, vol. 47, pp. 421-435, 1986.
- [15] R. Higdon, « Absorbing boundary conditions for difference approximation to the multidimensional wave equation, » *Mathematics of computation*, vol. 47, pp. 437-459, 1986.
- [16] K. Mei et J. Fang, « Superabsorption - a method to improve Absorbing boundary conditions, » *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 1001-1010, 1992.
- [17] Z. Liao et Al, « A transmitting boundary for transient waves analyses, » *Scientia Sinica*, (series A), vol. 27, pp. 1063-1076, 1984.



- [18] J-P. Bérenger, « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, » *J. Computational Physics*, vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [19] J-P. Bérenger, « A perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems, » *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 44, n°1, pp. 1-8, January 1996.
- [20] J. Bernabeu Verdu, R. Gillard, K. Moustadir et J. Citerne, « An extension of the PML technique to the FDTD analysis of multilayer planar circuits and antennas, » *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 10, n°6, pp. 323-327, December 1995.
- [21] F. Collino, S. Garcés et P. Joly : « A fictitious domain method for conformal modeling of the perfect electric conductors in the FDTD method », *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 46, n°10, October 1998.
- [22] A. Taflové, « Advances in computational electrodynamics », Artech House, Inc, 1998.
- [23] K. S. Kunz and L. Simpson, « A technique for increasing the resolution of finite-difference solution of the Maxwell equation, » *IEEE transaction on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-23, pp. 419-422, Nov. 1981.
- [24] I. S. Kim and W. J. R. Hoefer, « A local mesh refinement algorithm for the time-domain finite-difference method using Maxwell's curl equations, » *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 38, no. 6, pp. 812-815, June 1990.
- [25] S. S. Zivanovic, K. S. Yee, and K. K. Mei, « A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations, » *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, pp. 471-479, Mar. 1991.
- [26] D. T. Prescott and N. V. Shuley, « A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique, » *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 2, pp. 434-436, Nov. 1992.
- [27] D. T. Shimizu, M. Okoniewski, and M. A. Stuchly, « An efficient subgridding algorithm for FDTD, » in *Conf. Proc. 11th Ann. Rev. Progress Appl. Computat. Electromagn.*, Monterey, CA, Mar. 1995, pp. 762-766.
- [28] M. W. Chevalier, R. J. Luebbers, and V. P. Cable, « FDTD local grid with material traverse, » *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 45 , pp. 411-421, 1997.
- [29] M. Okoniewski, E. Okoniewska, and M. A. Stuchly, « Three-dimensional subgridding algorithm for TDTD », *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 45, pp. 422-429, 1997.
- [30] S. Kapoor, « IEEE Trans. Microwave Theory Tech Sub-cellular technique for finite-difference time-domain method, » *IEEE trans. Microwave Theory Tech.* vol. 45, pp. 673-677, 1997.
- [31] M. J. White, M. F. Iskander, and Z. Huang, « Development of a Multigrid FDTD Code for Three-Dimensional Applications, » *IEEE transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, n°10, pp.1512-1517, Oct. 1997.
- [32] K. M. Krishnaiah, C. J. Railton, « Passive equivalent circuit of FDTD : An application to subgridding, » *Electronics letters*, vol. 33, n°15, July 1997.
- [33] W. Yu, R. Mittra, « A new subgridding method for the finite-difference time-domain (FDTD) algorithm, » *Microwave and optical technology letters*, vol. 21, n°5, pp. 330-333, June 1999.
- [34] S. Chaillou, J. Wiart, and W. Tabbara, « A subgridding scheme based on mesh nesting for the FDTD method, » *Microwave and optical technology letters*, vol. 22, n°3, pp.211-214, August 1999.
- [35] M. J. White, Z. Yun, and M. F. Iskander, « A New 3-D FDTD Multigrid Technique with Dielectric Traverse Capabilities, » *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 49, n°3, pp. 422-430, Mar. 2001.

- [36] S. Wang, F. L. Teixeira, R. Lee, and J. F. Lee, « Optimization of Subgridding Schemes for FDTD, » *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 12, n°6, pp. 223-225, June 2002.
- [37] S-H. Sun, and C. T. M. Choi, « A New Multilevel Subgridding Scheme for Two-Dimensional FDTD Method, » *IEEE transactions on Magnetics*, vol. 40, n°2, pp. 1025-1028, March 2004.
- [38] P. Thoma, and T. Weiland, « A Consistent Subgridding Scheme for the Finite Difference Time Domain Method, » *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 9, pp. 359-374, 1996.
- [39] P. Thoma, and T. Weiland, « Numerical Stability of Finite Difference Time Domain Methods, » *IEEE transactions on Magnetics*, vol.34, n°5, pp. 2740-2743, September 1998.
- [40] M. Bonilla, M-F. Wong, J. Wiart, G. Alquié, and V. F. Hanna, « 3D-FDTD Subgridding Technique Applied to Radiating Structures, » *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, pp. 2035-2038, 2001.
- [41] M. Marrone, and R. Mittra, « A Theoretical Study of the Stability Criteria for Hybridized FDTD Algorithms for Multiscale Analysis, » *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, n°8, August 2004.
- [42] T. Fouquet, « Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell, » Thèse de l'Université de Paris IX Dauphine, Juin 2000.

## Résumé

Dans ce rapport nous commençons par élaborer un schéma de sous-maillage 3D basé sur des relations d'interpolation. Le facteur de raffinement utilisé est égale à deux. La réflexion numérique et la stabilité que nous obtenons nous permettent alors de traiter des problèmes de diffraction. Nous étudions ensuite séparément les parties temporelle et spatiale de ce schéma puis nous montrons la stabilité numérique de l'algorithme temporel. Ainsi nous prouvons que les instabilités produite par le schéma sont dues à l'algorithme spatial seul, de plus nous mettons à jour une nouvelle façon de concevoir les schémas de sous-maillage, puisque dorénavant ces derniers sont conçus comme la succession d'un algorithme temporel stable et d'un certain schéma de raffinement spatial.

Nous montrons finalement que cette nouvelle méthode de construction peut s'appliquer aussi à des schémas de sous-maillage possédant des facteurs de raffinement plus élevés (3, 4 et 5), en particulier nous démontrons la stabilité numérique des schémas de raffinement temporels en  $1/3$ ,  $1/4$  et  $1/5$ .

Dans la seconde partie de ce rapport nous expliquons en détail la formulation variationnelle de la méthode des éléments finis présentée par T. Fouquet dans sa thèse. Par la suite nous proposons une version simplifiée de cette formulation basée sur le théorème de Poynting, puis nous l'appliquons avec succès à la stabilisation des schémas de sous-maillage 2D-TE et 2D-TM.