

# UNIVERSITE DE LIMOGES

Ecole Doctorale Science Technologie Santé

Faculté des Sciences

Laboratoire UMOP/GESTE/CNRS FRE2701

Année : 2005

N° 11-2005

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline : Electronique des Hautes Fréquences et Optoélectronique

Présentée et soutenue par

Syed Mohamad Jamalullil Bilfagih

Le 31 Mars 2005

## **Transmission multiple porteuses utilisant un codage détecteur/correcteur d'erreur de type LDPC sur canaux MIMO**

**Détection multi-utilisateurs, Turbo égalisation, Diversité Temps, Espace, Fréquence**

**Directeurs de Thèse :** Jean Pierre Cances, Jean Michel Dumas

Jury

<b>Président</b>	Pr. Raymond QUERE, <i>Université de Limoges</i>
<b>Rapporteurs</b>	Pr. Gilles BUREL, <i>Université de Bretagne Occidentale</i> Pr. Jean-François HELARD, <i>INSA Rennes</i>
<b>Examineurs</b>	Pr. Claude BERROU, <i>ENST Bretagne</i> Pr. Jean-Michel DUMAS, <i>ENSIL</i> M. Jean-Pierre CANCES, HDR, <i>ENSIL</i> M Vahid MEGHDADI, <i>ENSIL</i> M. Patrick TORTELIER, <i>France Télécom R&amp;D/RESA</i>



*A mes parents, mes sœurs et ma famille*



## Remerciements

---

*Ce mémoire de thèse est le fruit de 3 années de travail effectué au sein du **Groupe d'Etudes des Systèmes de Télécommunications de l'ENSIL (GESTE)**. Je remercie Jean Michel Dumas de m'avoir accueilli et permis de mener à bien cette thèse.*

*Je remercie particulièrement Telekom Malaysia Berhad de m'avoir donné une chance de poursuivre mes études en France et d'assurer le financement de mon séjour ici dans les meilleures conditions.*

*Mes sincères remerciements à Jean Pierre Cances et Vahid Megdadi pour les confiances qu'ils m'ont accordées. Leurs disponibilités permanentes, leur conseils et soutiens, leur bonne humeur quasi quotidienne m'ont énormément aidé à effectuer ce travail.*

*Je remercie Pr. Raymond QUERE de s'intéresser à ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie également, Pr. Gilles BUREL et Pr. Jean-François HELARD d'avoir accepté la lourde tâche de devenir les rapporteurs de ce mémoire.*

*Je remercie Reza de m'avoir partagé son savoir et ses points de vu tout au long de cette thèse. Je remercie Leïla, Younes, Mohamed, et Amir, mes collègues de bureau d'avoir partagé mes joies et mes peines, et d'avoir patiemment supporter mes sauts d'humeur imprévisibles.*

*Je remercie sincèrement Cyril Franchet d'avoir mis en place (à temps) un système à *cluster* qui fonctionne et de devoir supporter quelques pressions pour que le système se réalise. Remerciement également à Hubert, Aurélien, Jacques et toute l'équipe informatique de l'ENSIL pour leur disponibilité quand des problèmes informatiques (et autres...) ont survenu. Merci aux autres collègues et les personelles de l'ENSIL pour leur gentillesse.*

*Je tiens à exprimer ma plus grande estime aux membres de ma famille qui sont restés à l'écoute de mes problèmes très souvent incompréhensibles pour eux. Leurs encouragements et leurs soutiens m'ont permis de rester en France pendant toutes ces années et de terminer à terme mes études ici.*

*Syed Mohamad Jamalullil*



---

# Table des matières

---

<b>REMERCIEMENTS.....</b>	<b>I</b>
<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>III</b>
<b>RESUME.....</b>	<b>VII</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>IX</b>
<b>RINGKASAN .....</b>	<b>XI</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>XIII</b>
<b>CHAPITRE 1 LOW DENSITY PARITY CHECK CODE.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCTION .....	1
1.2 LES CODES LINEAIRES.....	2
1.3 LA CONSTRUCTION DES MATRICES LDPC.....	3
1.4 LE DECODAGE LDPC.....	5
1.4.1 <i>Le décodage simple</i> .....	5
1.4.2 <i>Le décodeur optimal</i> .....	6
1.4.3 <i>Le décodeur somme - produit</i> .....	6
1.5 LES CODES LDPC IRREGULIERS.....	16
1.6 LES CODES LDPC NON BINAIRE.....	17
1.7 PERFORMANCES DES CODES LDPC.....	18
1.8 PARAMETRES CHOISIS POUR LE CODE LDPC .....	20
1.9 LE COMPORTEMENT DU DECODEUR LDPC .....	22
1.10 CONCLUSION .....	23
<b>CHAPITRE 2 L'ALGORITHME EM.....</b>	<b>25</b>
2.1 INTRODUCTION .....	25
2.2 GENERALITES .....	26
2.3 LE CAS SIMPLE.....	27
2.4 LA DEFINITION GENERALE .....	28
2.5 LES PROPRIETES DE L'ALGORITHME .....	29
2.5.1 <i>La monotonie de l'algorithme</i> .....	29
2.5.2 <i>La convergence de l'algorithme</i> .....	30
2.6 L'APPLICATION DE L'ALGORITHME EM EN COMMUNICATION NUMERIQUE.....	32
2.6.1 <i>L'estimation des paramètres des signaux superposés</i> .....	32
2.6.2 <i>Estimation de canal OFDM avec les diversités en espace</i> .....	37
2.7 L'ALGORITHME SAGE.....	41
2.7.1 <i>Le problème</i> .....	41

2.7.2	<i>L'espace des données cachées</i> .....	42
2.7.3	<i>L'algorithme</i> .....	43
2.8	EXEMPLES DE L'ALGORITHME SAGE .....	44
2.8.1	<i>Mesure gaussienne linéaire</i> .....	44
2.8.2	<i>L'estimation d'un canal OFDM avec les diversités en espace</i> .....	46
2.9	CONCLUSION.....	52
<b>CHAPITRE 3 CODAGE TEMPS ESPACE ET FREQUENCE ESPACE EN BLOC .....</b>		<b>53</b>
3.1	INTRODUCTION .....	53
3.2	LA DIVERSITE ESPACE – TEMPS .....	54
3.2.1	<i>Space time trellis code</i> .....	55
3.2.2	<i>Space Time Block Code</i> .....	56
3.3	LA CONSTRUCTION DE STBC.....	57
3.3.1	<i>La construction d'Alamouti</i> .....	57
3.3.2	<i>La construction généralisée</i> .....	59
3.4	LE DECODAGE DE STBC GENERALISE .....	61
3.4.1	<i>Algorithme de décodage</i> .....	65
3.5	PERFORMANCES DE STBC SUR UN CANAL FADING .....	65
3.6	LA DIVERSITE ESPACE – FREQUENCE.....	71
3.7	LA CONSTRUCTION DU CODE SFBC .....	71
3.7.1	<i>Le cas d'Alamouti</i> .....	71
3.7.2	<i>Le cas sur plusieurs fréquences simultanées</i> .....	74
3.8	LA DIVERSITE ESPACE SUR UN CANAL SELECTIF EN FREQUENCE .....	77
3.9	STBC – OFDM SUR UN CANAL SELECTIF EN FREQUENCE.....	78
3.9.1	<i>Méthode d'émission 1</i> .....	78
3.9.2	<i>Méthode d'émission 2</i> .....	80
3.9.3	<i>Le décodage</i> .....	81
3.10	SFBC SUR UN CANAL SELECTIF EN FREQUENCE .....	82
3.10.1	<i>Les performances</i> .....	84
3.11	LA DIVERSITE ESPACE – TEMPS – FREQUENCE .....	87
3.11.1	<i>Problème à résoudre</i> .....	87
3.12	LA CONSTRUCTION DU CODE STFBC.....	87
3.12.1	<i>Canal non sélectif en fréquence</i> .....	89
3.12.2	<i>Canal sélectif en fréquence</i> .....	92
3.12.3	<i>Le décodage</i> .....	94
3.13	PERFORMANCE DU CODAGE STFBC PROPOSE.....	94
3.14	CONCLUSION.....	97
<b>CHAPITRE 4 SYSTEME TURBO BASE SUR L'ALGORITHME EM.....</b>		<b>99</b>
4.1	INTRODUCTION .....	99
4.2	TURBO EGALISEUR MAP-EM .....	101

4.2.1	<i>Description</i> .....	101
4.2.2	<i>Le modèle du système</i> .....	104
4.2.3	<i>Démodulateur MAP-EM</i> .....	105
4.2.4	<i>Les performances</i> .....	111
4.3	LA STRUCTURE MODIFIEE .....	115
4.3.1	<i>L'initialisation et l'estimation de canal par l'algorithme SAGE</i> .....	117
4.3.2	<i>Les performances</i> .....	119
4.4	CONCLUSION .....	128
<b>CHAPITRE 5 SYSTEMES MULTI UTILISATEURS AVEC LA DIVERSITE SPATIALE.....</b>		<b>129</b>
5.1	INTRODUCTION .....	129
5.2	LA TECHNIQUE DU CYCLIC PREFIX CDMA .....	131
5.2.1	<i>L'émetteur</i> .....	131
5.2.2	<i>Le récepteur</i> .....	133
5.2.3	<i>Les performances</i> .....	135
5.3	COMBINED ARRAY PROCESSING.....	138
5.3.1	<i>Système mono porteuse sur le canal fading</i> .....	138
5.3.2	<i>Système mono porteuse sur le canal sélectif en fréquence</i> .....	144
5.3.3	<i>Système multi porteuses sur le canal sélectif en fréquence</i> .....	151
5.3.4	<i>Remarques et considérations d'implémentations</i> .....	155
5.4	LE SYSTEME MULTI UTILISATEURS A PRECODEUR.....	156
5.4.1	<i>Le modèle du système</i> .....	156
5.4.2	<i>La construction du code</i> .....	159
5.4.3	<i>Le décodage</i> .....	160
5.4.4	<i>La construction du précodeur</i> .....	162
5.4.5	<i>Les performances</i> .....	163
5.5	STBC-M.....	166
5.5.1	<i>Généralités</i> .....	166
5.5.2	<i>Le modèle du système</i> .....	167
5.5.3	<i>Le récepteur</i> .....	171
5.5.4	<i>Les performances</i> .....	174
5.5.5	<i>L'extension pour un système à très haut débit</i> .....	181
5.6	SFBC-M.....	185
5.6.1	<i>Introduction</i> .....	185
5.6.2	<i>L'émetteur</i> .....	186
5.6.3	<i>Le récepteur</i> .....	188
5.6.4	<i>Les performances</i> .....	191
5.7	CONCLUSION .....	195
<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....</b>		<b>197</b>
<b>ANNEXE I DIAGONALISATION DE LA MATRICE CIRCULANTE.....</b>		<b>199</b>

<b>ANNEXE II</b>	<b>EXEMPLES DES CANAUX UTILISES.....</b>	<b>203</b>
<b>BIBLIOGRAPHIES .....</b>		<b>211</b>

---

## Résumé

---

La demande croissante en services pour les radiocommunications mobiles de plus en plus performants, et donc gourmands en terme de bande passante, pousse les concepteurs à chercher des systèmes de transmissions avec de fortes efficacités spectrales et pourvus de codes correcteurs d'erreurs puissants. L'utilisation (i) des techniques de transmission multi porteuses combinées avec des turbo-codes ou des codes LDPC, et (ii) des techniques de diversité apportent une réponse prometteuse à cette course vers la recherche d'une utilisation optimale de la capacité du canal.

Nous nous plaçons dans le cadre de ce travail de recherche dans le contexte de l'utilisation de codes LDPC (Low Density Parity Check Code). Ces codes initialement étudiés par Gallager au début des années soixante et récemment approfondis par Mackay constituent une alternative aux turbo-codes proposés initialement par Berrou et Glavieux.

De plus, le contexte des systèmes MIMO est abordé, incluant différents schémas de diversité spatiale temporelle et fréquentielle. Nous avons traité le problème de la diversité spatio-temporelle à l'aide des codes spatio-temporels en blocs (codage STBC : Space Time Block Code). Nous avons généralisé leur utilisation au cas de la diversité fréquentielle (codage SFBC : Space Frequency Block Code) pour la modulation OFDM et nous avons proposé une méthode pour combiner à la fois la diversité spatiale et la diversité fréquentielle

Puis, nous avons présenté, une structure de turbo-égaliseur basé sur les travaux antérieurs de Lu, utilisant le codage LDPC. La pondération des symboles codés à l'entrée du décodeur LDPC se fait à l'aide de l'algorithme EM (Expectation-Maximization) ou d'une variante plus élaborée qui est appelée SAGE (Space Alternating Generalized Expectation Maximization). Par la suite, nous avons suggéré une nouvelle méthode d'estimation des paramètres du canal de propagation elle-même basée sur l'algorithme EM.

Enfin le contexte multi utilisateurs est également traité. Nous étudions les performances d'un système MC-DS-CDMA quasi-synchrone équipé d'un code LDPC avec la diversité espace - temps et espace - fréquence. Deux types de systèmes multi utilisateurs avec diversité spatio-temporelle ayant les mêmes performances qu'en mono utilisateur ont été proposés. Finalement, nous avons présenté un système hybride original très haut débit par le mélange du système élaboré MC-DS-CDMA et le système *Combined Array Processing* proposé à l'origine par Calderbank.

**Mots clés :** LDPC, algorithme EM, SAGE, codage STBC, SFBC, STFBC, diversité espace-temps, diversité espace-fréquence, OFDM, turbo égaliseur, système MC-DS-CDMA



---

# Abstract

---

We are continuously looking for high-speed mobile system using at it best all the allocated and available radio resources. In order to increase the communication reliability and quantity, the error correcting codes such as LDPC and turbo detection are often used together with diversity techniques.

In this thesis, four major points have been investigated.

The first point relates to the transmitter created space, time and frequency diversity techniques. Diversity methods namely STBC, SFBC and STFBC were studied here. A novel matrix representation for SFBC and STFBC have been elaborated and presented.

The second point focus on the turbo equalizer for space-time diversity systems. Our studies were based on the structure proposed by Lu. LDPC code and EM algorithm were the basic blocs of the turbo receiver. Some modifications have been made to the basic receiver structure especially on the initialization method in order to increase the systems performances. The SAGE algorithm was applied to speed up the overall convergence rate of the system.

The third point was the uplink quasi synchronous multiple user detection in MIMO systems. We proposed two multiple user systems with an equivalent performances as single user system when some conditions were fulfilled. We have also elaborated in our proposed system that the potential very high rate system mixing and the Combined Array Processing techniques as proposed by Calder bank.

Finally, in the fourth point, we presented using computer simulations proven that, in some cases, an additional symbol interleaver is required for multiple carrier space diversity system to concatenate with LDPC codes over frequency selective channels. It is well known that the LDPC codes have an intrinsic interleaver. However, the computer simulations showed that the intrinsic interleaver might be insufficient in this configuration.

**Keywords:** LDPC, EM algorithm, SAGE algorithm, STBC, SFBC, STFBC, space diversity, multiple user systems, multiple carrier, turbo receiver ...



---

# Ringkasan

---

Para penyelidik masa kini sentiasa mencari cara-cara terbaik untuk menggunakan semua sumber radio yang dibekalkan dan yang tersedia untuk membina sistem telekomunikasi yang lebih pantas. Pelbagai teknik digunakan untuk menjamin kualiti komunikasi. Kod betul ralat seperti kod LDPC sering digunakan bersama-sama algoritma pengesanan dan pengasingan yang semakin canggih dan sukar. Teknik – teknik pelbagaian juga dapat membantu untuk meningkatkan prestasi sesebuah sistem komunikasi.

Empat perkara utama telah dikaji di dalam tesis ini.

Perkara pertama adalah berkenaan dengan kepelbagaian ruang, masa dan frekuensi yang dibina oleh penyiar maklumat. Teknik – teknik kepelbagaian seperti kod pelbagaian ruang dan masa berkumpulan (STBC), kod pelbagaian ruang dan frekuensi berkumpulan (SFBC) dan kod pelbagaian ruang, masa dan frekuensi berkumpulan (STFBC) telah dikaji. Cara pemodelan baru secara matriks diketengahkan untuk SFBC dan STFBC.

Perkara kedua merangkum teknik pengimbangan isyarat berlelar untuk sistem STBC. Struktur asas penerima turbo telah diajukan oleh Lu. Kod LDPC dan algoritma *Expectation-Maximization* merupakan nadi utama penerima turbo ini. Struktur asas telah diubahsuai di dalam tesis ini. Proses permulaan algoritma juga diubah supaya prestasi sistem meningkat. Kadar penyelesaian ditingkatkan dengan penggunaan algoritma SAGE.

Perkara ketiga adalah berkenaan dengan teknik pengesanan para pengguna di dalam penghubungan menaik serentak di dalam sistem kepelbagaian ruang. Dua struktur baru untuk penggunaan bersama telah dicadangkan dan sistem ini mampu beroperasi dengan prestasi yang sama seperti sistem pengguna unik apabila beberapa syarat dipenuhi. Satu sistem hibrid yang sesuai untuk aplikasi amat pantas telah juga diajukan di dalam tesis ini.

Keperluan satu sistem penyusunan semula simbol maklumat secara rawak apabila sistem kepelbagaian ruang digunakan bersama kod LDPC diketengahkan sebagai perkara keempat. Maklumat yang didapati dari simulasi komputer menunjukkan bahawa sistem penyusunan semula intrinsik yang terdapat di dalam kod LDPC mungkin tidak mencukupi di dalam saluran yang selektif pada frekuensi.

**Kata Kunci** : LDPC, algoritma EM, algoritma SAGE, STBC, SFBC, STFBC, kepelbagaian ruang, sistem berbilang pengguna, sistem berbilang frekuensi, penerima berlelar,...



---

# Introduction

---

Le marché des systèmes radio mobiles se développe très rapidement avec la généralisation des téléphones portables. Les avancées technologiques, qu'elles soient matérielles ou logicielles sont proposées quasiment chaque jour. Les nouvelles normes naissent sans cesse pour introduire les technologies les mieux adaptées à ce marché très diversifié. Ces normes assurent un minimum de compatibilité et permettent d'éviter les interférences entre des systèmes différents. Les développements des circuits microélectroniques permettent d'implanter les techniques de traitements des signaux de plus en plus complexes.

Parallèlement, la demande croissante en services pour les radiocommunications mobiles de plus en plus performants et donc gourmands en terme de bande passante, pousse les concepteurs à chercher des systèmes de transmission avec de fortes efficacités spectrales et pourvus de codes correcteur d'erreurs puissants. L'utilisation des techniques de transmission multiporteuses combinée avec des turbo-codes ou des codes LDPC et l'utilisation des techniques de diversité apporte une réponse prometteuse à cette course vers la recherche d'une utilisation optimale de la capacité du canal.

Nous nous plaçons dans le cadre ce travail de recherche dans le contexte de l'utilisation de codes LDPC (Low Density Parity Check Code) pour des turbo récepteurs. Ces codes initialement étudiés par Gallager au début des années soixante et récemment approfondis par Mackay constituent une alternative aux turbo codes proposés initialement par Berrou et Glavieux. Le premier chapitre est consacré à l'étude du LDPC avec la présentation des principaux algorithmes de décodage. Cette thèse n'a pas pour but de comparer ces deux codes car une comparaison juste entre ces deux types de codage doit inclure de nombreux paramètres autres que la performance pure tels que la complexité et le coût d'implantation. Ce que l'on peut dire de façon sûre c'est que LDPC et turbo-codes présentent des performances très proches. Le LDPC a été choisi dans cette thèse pour acquérir de nouvelles compétences dans le domaine du codage de canal. Les systèmes basés sur les turbo codes ont déjà été étudiés lors de thèses précédentes et ils sont encore en cours d'études dans ce laboratoire notamment au niveau des turbo codes temps-espace . C'est la première thèse du laboratoire où les codes LDPC sont utilisés.

Le but de ce travail de recherche était plutôt d'utiliser les codes LDPC dans des architectures de récepteurs numériques pour faire converger des algorithmes d'égalisation (turbo-égaliseur). C'est ainsi que nous présentons dans le chapitre 4 une structure de turbo égaliseur utilisant le codage LDPC. Par rapport à la structure initiale proposée par Lu & Wang, nous avons rajouté

des algorithmes d'estimation du canal basés eux-aussi sur l'algorithme EM et sur une version améliorée appelée SAGE (Space Alternating Generalized Expectation Maximization). Nous montrons dans le deuxième chapitre que ces algorithmes permettent d'obtenir des estimations fiables avec moins de complexité comparé aux algorithmes ML ou MMSE sans perte significative de performances. Nous rappelons les propriétés les plus importantes de ces deux algorithmes en s'appuyant sur des exemples présentés à la fin de la description de chaque algorithme.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des systèmes à diversité d'espace en émission. Les diversités étudiées sont les diversités espace – temps, espace – fréquence et espace – temps – fréquence. Les codes de diversités en blocs, *Space Time Block Code* (STBC), *Space Frequency Block Code* (SFBC) et *Space Time Frequency Block Code* (STFBC) sont proposés. Les premières contributions scientifiques de cette thèse apparaissent dans ce chapitre. Des écritures matricielles ont été proposées pour ces trois systèmes qui permettent d'adapter facilement les systèmes SFBC et STFBC aux systèmes utilisant le codage STBC déjà développés. En plus, le code STFBC proposé ici est, à ma connaissance, nouveau, même s'il est inspiré du système proposé par Liu *et al.*. L'étude approfondie de ce code sera faite ultérieurement au sein de notre groupe de recherche.

Enfin le contexte multi utilisateurs est traité dans le cinquième chapitre. Nous nous intéressons aux systèmes multi utilisateurs multi porteuse quasi synchrones en voie montante. Nous proposons, tout d'abord deux systèmes MC-DS-CDMA quasi-synchrones avec les diversités espace – temps et espace – fréquence ayant les mêmes performances qu'en mono utilisateur. Nous proposons ensuite un système hybride original hauts débits par le mélange du système élaboré MC-DS-CDMA spatio – temporel et le système *Combined Array Processing* proposé à l'origine par Calderbank. Les performances des systèmes de base concaténés avec un code LDPC dans des canaux sélectifs en fréquence sont données. La dernière contribution significative de cette thèse est la mise en évidence par simulation que l'entrelaceur intrinsèque LDPC peut être insuffisant pour les systèmes proposés dans certaines conditions. Un entrelaceur de symboles supplémentaire permet d'améliorer les performances de façon conséquente.

Je suis conscient que cette thèse peut être difficile à lire au vu du nombre d'informations qu'elle contient. Pour minimiser ce problème, cette thèse a été rédigée de telle sorte que les chapitres soient le plus indépendant possible. Il en est de même pour les sous-sections de chapitres. Il y a donc parfois des répétitions surtout pour la définition des canaux. C'est le prix à payer pour obtenir un manuscrit que j'espère plus facile à suivre.

---

# Chapitre 1 Low Density Parity Check Code

..... / ..... / ..... /  
..... / .....

---

## 1.1 Introduction

Pendant une communication, l'information reproduite en un point doit être parfaitement égale ou au moins le plus proche possible de celle provenant d'un autre point. Malheureusement il y a beaucoup de perturbations possibles qui peuvent se produire pendant le transfert de ces informations. Un message d'information peut être altéré, une partie supprimée, ou peut subir l'insertion d'informations parasites dans sa séquence d'origine. Un code de détection ou de correction d'erreur joue donc un rôle très important dans une chaîne de communication. L'apparition de circuits numériques performants à faible coût facilite le développement de ces codes.

Il existe beaucoup de codes correcteurs d'erreurs avec des performances et des applications variables. Le principe de base reste le même : ajouter de la redondance intelligemment et utiliser cette surinformation pour déterminer la fiabilité du message (détection d'erreur), puis, si possible, reconstruire le message d'origine au mieux (correction d'erreur). En règle générale, plus il y a de redondance, plus il sera facile de détecter et de corriger les erreurs éventuelles.

On s'intéresse dans cette thèse à un milieu de propagation bruité. La perturbation considérée est l'altération du message due à la superposition des signaux parasites sur le message d'origine. La manifestation de ce type d'erreur, dans un espace fini des messages numériques, se traduit par une modification de l'alphabet des messages transmis possibles. Les deux grandes familles de code correcteur d'erreurs pour ce type de perturbation sont les codes convolutifs et les codes en blocs ou les codes linéaires.

Le plus célèbre des codes convolutifs est le turbo code inventé en 1993 par Berrou, Glavieux et Thitimajshima [2]. Le turbo code utilise deux (ou plus) encodeurs de type codes convolutifs. Par exemple, en concaténation parallèle, les encodeurs de type systématique récursif transmettent les bits sources directement sur la première sortie des codeurs et transmettent les symboles de parité soit directement, soit après un entrelaceur. Le décodage est fait itérativement pour chaque code convolutif via un algorithme de pondération de type SISO (MAP, log-MAP, max-log MAP etc...). Les sorties extrinsèques d'un décodeur (informations à postériori) sont utilisées après

entrelacement/désentrelacement pour être réinjectées à l'entrée de l'autre décodeur comme information à priori.

On utilise, dans cette thèse, un code en bloc inventé par Gallager bien avant l'apparition des turbo codes [3][4], mais tombé dans les oubliettes jusqu'à récemment [5][6]: les codes Low Density Parity Check (LDPC). Il s'agit du plus puissant code en bloc connu jusqu'à présent.

Dans ce chapitre, on examine d'abord les propriétés des codes linéaires et puis on présente les deux grandes familles de codes LDPC : les codes dits réguliers et irréguliers, avant d'exposer les algorithmes usuels pour le décodage.

## 1.2 Les codes linéaires

Un code correcteur d'erreur linéaire est représenté par une matrice  $\mathbf{G}$  de taille  $N \times K$  appelée la matrice génératrice. Cette matrice transforme un message binaire  $\mathbf{s}$  de  $K$  bits en un message  $\mathbf{t}$  de taille  $N$  ( $N > K$ ) par la relation

$$\mathbf{t} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} [\text{mod } 2] \quad (1)$$

$[\text{mod } 2]$  signifie que l'on effectue les opérations en base 2.

La matrice  $\mathbf{G}$  peut être sous forme systématique, c'est-à-dire, les informations du message  $\mathbf{s}$  seront copiées dans le message  $\mathbf{t}$  en plus des informations redondantes. Ces informations copiées sont appelées les bits systématiques. Les positions de ces bits systématiques peuvent être mélangées et donc on ne retrouve pas nécessairement le même ordre que le message  $\mathbf{s}$  d'origine.

Dans le cas où les bits systématiques sont copiés séquentiellement dans  $\mathbf{t}$ , la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  a la forme

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_K \\ \dots \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}_{N \times K} \quad (2)$$

avec  $\mathbf{I}_K$  la matrice identité  $K \times K$  et  $\mathbf{P}$  une matrice binaire  $(N-K) \times K$ .

Le message  $\mathbf{t}$  est transmis dans le canal et un bruit  $\mathbf{n}$  s'ajoute à ce dernier. Le message reçu  $\mathbf{r}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{t} + \mathbf{n} [\text{mod } 2] \\ &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} [\text{mod } 2] \end{aligned} \quad (3)$$

Le récepteur doit déduire le message binaire  $\mathbf{s}$  à partir des signaux reçus et la détection se fait en tenant compte la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ . Sauf contre indication spécifique, toutes les opérations

suivantes sont faites en base 2 ([mod 2]) et on supposera que le canal est un canal à bruit additif Gaussien.

Le décodeur optimal trouve le message  $\mathbf{s}$  qui minimise la probabilité d'erreur *a posteriori*

$$P(\mathbf{s}|\mathbf{r}, \mathbf{G}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{G}) \cdot P(\mathbf{s})}{P(\mathbf{r}|\mathbf{G})} \quad (4)$$

Malheureusement, en pratique, le décodeur optimal est difficile à réaliser à cause de sa complexité **NP-complet**<sup>1</sup>. Si l'on suppose que la probabilité *a priori* de  $\mathbf{s}$  est uniforme, et que  $\mathbf{n}$  est indépendant de  $\mathbf{s}$ , il est plus simple d'introduire une autre matrice  $\mathbf{H}$  de taille  $(N-K) \times N$  qu'on appelle la matrice de parité. La propriété principale de cette matrice est

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Ceci nous donne, à partir de (3) et (5), la relation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

On appelle  $\mathbf{z} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}$  le syndrome et le décodeur doit trouver le bruit  $\mathbf{n}$  le plus probable pour satisfaire

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z} \quad (7)$$

On peut aussi faire varier  $\mathbf{r}$  pour trouver une configuration de message reçu sans bruit. Dans ce cas, on cherche à vérifier

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (8)$$

### 1.3 La construction des matrices LDPC

Les codes LDPC appartiennent à la catégorie des codes correcteurs d'erreurs linéaires en bloc. Ils ont été proposés initialement par R.C.Gallager [3][4] en 1962 et retrouvés récemment par Mackay en 1995 [5][6]. La particularité de ce type de code est que sa matrice de parité  $\mathbf{H}$  est très « creuse », c'est-à-dire que le rapport entre le nombre de "1" et de "0" dans la matrice de

---

<sup>1</sup> Un problème est dit **NP** (Nondeterministic Polynomial time) s'il est soluble en temps polynomiale par une machine de Turing non déterministe. On peut résoudre un problème dans un temps polynomiale si le nombre d'étapes pour compléter l'algorithme associée une entrée donnée est  $\mathcal{O}(n^k)_{k \geq 0}$  avec  $n$  la complexité de l'entrée. Un problème **NP-complet** est un problème **NP** et **NP-hard**. Un problème est dit **NP-hard** si l'algorithme pour le résoudre peut être adapté pour résoudre d'autres problèmes **NP**. ([7]-[10])

parité tend vers 0. De ce fait, les processus de décodage et les calculs de syndrome peuvent être effectués plus rapidement si l'on exploite les propriétés de la matrice creuse. Par contre, la matrice de codage devient « dense » et entraîne une complexité plus importante pour le codeur.

Avant d'aller plus loin, voici quelques définitions des termes utilisés pour décrire une matrice de parité.

- le nombre de "1" dans un vecteur binaire est appelé le **poide**s. Une colonne ou une ligne d'une matrice quelconque peuvent être considérée comme un vecteur. Donc, le **poide**s d'une colonne de la matrice correspond aussi au nombre de "1" dans cette colonne.
- le **chevauchement** entre deux vecteurs correspond au nombre de "1" qui se trouvent aux mêmes positions dans les deux vecteurs.

On pose  $K$  la taille du message d'information à coder et  $N$  la taille du message codé.  $M=N-K$  est le nombre de vérifications de parité effectuées par le code. Le poids,  $\tau$ , de chaque colonne de la matrice de parité  $\mathbf{H}$  est un entier supérieur ou égal à 3. La matrice  $\mathbf{H}$  aura la taille  $M \times N$  et est remplie avec exactement  $\tau$  "1" par colonne et avec un poids par ligne le plus uniforme possible. Les "1" peuvent être placés aléatoirement dans la matrice  $\mathbf{H}$  tout en respectant au mieux les contraintes préfixés, à savoir, le poids des colonnes et des lignes pour les codes LDPC réguliers, et le chevauchement des colonnes de la matrice de parité.

Le Figure 1 montre un exemple de la matrice  $\mathbf{H}$  proposée par Gallager avec un poids  $\tau = 3$  par colonne et un poids de 4 par ligne [4].

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

FIGURE 1 : UN EXEMPLE DE LA MATRICE DE PARITE PROPOSEE PAR GALLAGER

Avec le codage systématique, le message  $\mathbf{t}$  à transmettre est divisé en deux parties :

- les bits d'informations systématiques  $\mathbf{s}$
- les bits de redondance  $\mathbf{c}$  due au codage

On cherche à satisfaire  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Comme expliqué précédemment, on peut chercher un vecteur  $\mathbf{n}$  qui décrit au mieux les symboles reçus par  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z}$ , ou, on peut modifier le vecteur  $\mathbf{r}$  pour arriver, après décodage, à d'un message sans bruit qui vérifie  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = 0$ .

La dernière relation sera choisie pour construire la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ .

Afin de construire la matrice  $\mathbf{G}$ , on divise également la matrice  $\mathbf{H}$  en deux parties

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{A}_{M \times M} \mid \mathbf{B}_{M \times (N-M)} \right]_{M \times N} \quad (9)$$

Arbitrairement, on place les bits systématiques  $\mathbf{s}$  après les bits redondants  $\mathbf{c}$  tout en sachant que ceci n'est pas obligatoire et n'est pas toujours possible.

Le message codé à transmettre  $\mathbf{t}$  est donc sous la forme suivante:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \vdots \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (10)$$

Si l'équation (8) est satisfaite, on a alors  $\mathbf{r} = \mathbf{t}$  et

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \vdots \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

ou encore

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (12)$$

On rappelle que le but de la matrice génératrice est de créer les bits redondants  $\mathbf{c}$ . Selon (12), on peut créer  $\mathbf{c}$  si  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont connues, ce qui est le cas. On obtient alors

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} \quad (13)$$

Dans le cas où on envoie des bits systématiques, la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  ne sert seulement qu'à créer les bits redondants. Ainsi, la matrice  $\mathbf{G}$  peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{(N-M)} \end{bmatrix}_{N \times (N-M)} \quad (14)$$

## 1.4 Le décodage LDPC

### 1.4.1 Le décodage simple

Gallager a proposé un décodeur très simple pour le LDPC [4] bien adapté dans le cas du canal binaire symétrique (BSC), avec des performances assez éloignées de la capacité théorique du canal de Shannon.

Le décodeur examine toutes les équations de parité (les lignes dans la matrice de parité  $\mathbf{H}$ ) et rassemble les équations qui ne sont pas vérifiées par le calcul de syndrome dans (8). Puis le décodeur identifie les bits qui sont communs à ces équations et inverse les bits qui se trouvent dans plus de  $X$  équations de parités.  $X$  est un seuil entier préalablement défini. Le décodeur

répète les opérations d'inversion jusqu'à ce que l'équation (8) soit validée ou après avoir effectué un certain nombre d'itérations.

### 1.4.2 Le décodeur optimal

Un décodeur optimal recherche le vecteur  $\mathbf{n}$  le plus probable qui vérifie l'équation (7). Le décodeur calcule la probabilité d'obtenir le vecteur  $\mathbf{s}$  à partir du message  $\mathbf{r}$  reçu et en fonction de la matrice génératrice.

$$P(\mathbf{s}|\mathbf{r}, \mathbf{G}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{G}) \cdot P(\mathbf{s})}{P(\mathbf{r}|\mathbf{G})} \quad (15)$$

Il peut aussi calculer la probabilité de reproduire le bruit du canal  $\mathbf{n}$  (équation (8))

$$P(\mathbf{n}|\mathbf{r}, \mathbf{H}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{n}, \mathbf{H}) \cdot P(\mathbf{n})}{P(\mathbf{r}|\mathbf{H})} \quad (16)$$

Le décodage optimal est un problème **NP**-complet [6]. Mackay a donné les bornes inférieures et supérieures du décodeur optimal quelconque [6]. Ceci donne une idée de la performance optimale du décodeur et une base pour comparer les performances des autres décodeurs sous optimaux.

### 1.4.3 Le décodeur somme - produit

Avant d'aller plus loin, examinons d'abord la théorie des graphes bi-parties et l'exemple simple suivant.

#### 1.4.3.1 Le graphe biparties

La notion de graphe dans l'étude des communications numériques a été d'abord introduite par Tanner [12] et généralisée par Wiberg [13]. Wiberg a mis en évidence que le code LDPC peut être représenté sous la forme d'un graphe de Tanner. La représentation du code LDPC sous cette forme permet de mieux comprendre le processus de décodage LDPC. Etudions l'exemple suivant :

#### 1.4.3.2 Un exemple

Considérons la matrice de parité  $\mathbf{H}$  :

$$\begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } c_m \text{ les contraintes de parité}$$

et  $\mathbf{t} : [t_0 \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5 \ t_6]^T$  est le message reçu

On peut voir que pour chaque contrainte  $c_m$ , il n'y a que certains symboles de  $\mathbf{t}$  qui y participent. Dans cet exemple, on voit facilement la dépendance entre les bits et les contrôles de parité dans le Tableau 1 ci-dessous.

**TABLEAU 1 : LA DEPENDANCE ENTRE LES BITS ET LES CONTROLES DE PARITES**

$(t_0, t_2, t_4, t_5) \xrightarrow{r_0} c_0$	$(t_1, t_3, t_5) \xrightarrow{r_1} c_1$
$(t_1, t_2, t_6) \xrightarrow{r_2} c_2$	$(t_0, t_3, t_4, t_6) \xrightarrow{r_3} c_3$

$r_m$  représente la relation qui lie les bits du message reçu au contrôle de parité  $c_m$ . On peut voir que la valeur de chaque symbole de  $\mathbf{t}$  influence au moins un contrôle de parité  $c_m$ .

On remarque aussi qu'il y a deux contraintes qui contrôlent chaque bit. On peut supposer que le bit  $n$  est correct si toutes les contraintes sont vérifiées. On peut également voir le résumé de ces liens dans le Tableau 2.

**TABLEAU 2 : LES LIENS ENTRE LES CONTROLES DE PARITES ET LES BITS**

$(c_0, c_3) \xrightarrow{g_0} t_0$	$(c_1, c_2) \xrightarrow{g_1} t_1$	$(c_0, c_2) \xrightarrow{g_2} t_2$	$(c_1, c_3) \xrightarrow{g_3} t_3$
$(c_0, c_4) \xrightarrow{g_4} t_4$	$(c_0, c_1) \xrightarrow{g_5} t_5$	$(c_2, c_3) \xrightarrow{g_6} t_6$	

Si l'état des contraintes était utilisé pour modifier (dans le but de corriger le message) les bits qui lui sont directement associés, alors, l'état d'une contrainte et l'action prise en conséquence influenceraient les autres contraintes via les bits modifiés et ces contraintes modifiées vont à leur tour influencer l'état des bits qui leur sont associés.

**En clair, la décision prise pour un symbole influencera plusieurs contraintes et donc influencera indirectement les autres symboles.**

Le graphe bi-parties est un outil privilégié pour représenter graphiquement ces interdépendances entre  $c_m$  et  $t_n$  résumées dans les tableaux précédents. La Figure 2 donne la représentation du code par le graphe bi-parties pour l'exemple ci-dessus. Grâce à ce graphe, on peut voir le chemin de l'interdépendance entre les symboles.

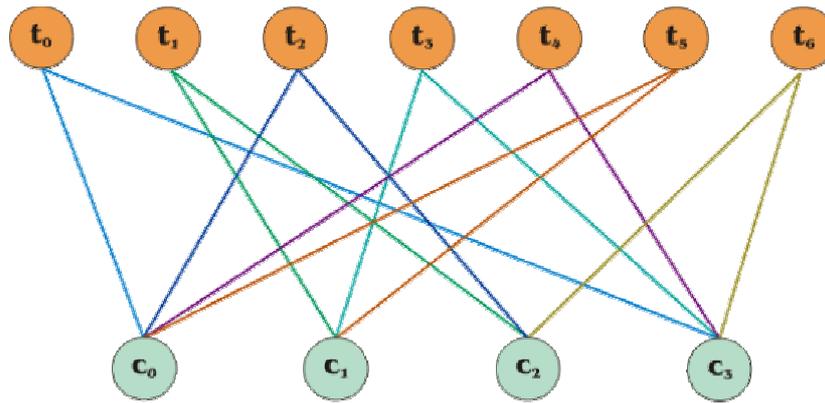


FIGURE 2 : LA REPRESENTATION DE CODE LDPC PAR LE GRAPHE BI-PARTIES

Imaginons que chaque nœud d'une partie du graphe reçoit et envoie aux autres nœuds connectés de l'autre partie du graphe un message contenant les informations suivantes :

- l'envoi de son état présumé par tous les autres nœuds connectés de l'autre partie du graphe
- la réception, à partir des nœuds de l'autre partie du graphe, d'un message sur l'état qu'il est censé être après que le nœud *expéditeur* a considéré les messages qu'il a reçu à partir des autres nœuds qui se trouvent dans la même partie du graphe que le *destinataire*

Si chaque nœud sait exploiter les messages reçus intelligemment et modifier son état si nécessaire avant de renvoyer une nouvelle information aux autres nœuds concernés sur l'autre partie du graphe, on aura un système itératif qui permet peut-être de mieux décoder les messages en apportant de façon itérative une information de fiabilité. Cette façon de passer les messages entre nœuds est très connue dans le milieu de l'intelligence artificielle sous le nom "*belief propagation*" et "*message passing*".

Le décodeur somme produit est présenté ci après.

#### 1.4.3.3 Le décodeur somme - produit

Ce décodeur exploite les messages entre les nœuds comme cela a été expliqué précédemment. Mackay [6] a proposé l'utilisation de cet algorithme dans un décodeur LDPC. On note  $z_m$  la valeur de parité qui correspond au  $m^{ieme}$  contrôle de parité,  $c_m$ , dans la matrice  $\mathbf{H}$ .

Les bits  $r_n$  et  $z_m$  forment un réseau « *belief* » ou un réseau Bayésien. Chaque bit  $r_n$  est parent de  $\tau_n$  valeurs de contrôle  $z_m$  et chaque  $z_m$  est fils de  $\rho_m$  parents. On rappelle que  $\tau_n$  est le poids de la colonne  $n$  de la matrice  $\mathbf{H}$  et  $\rho_m$  est le poids de la ligne  $m$  de la même matrice. Avec les contrôles  $c_m$  observés, on calcule la probabilité marginale *a posteriori*  $P(\mathbf{r}_n = 1 | \mathbf{c}, \mathbf{H})$  pour chaque bit  $r_n$  dans le message.

L'algorithme présenté ci-dessous est approprié pour un canal BSC ou avec un canal gaussien dont le bruit est indépendant des bits du message.

On pose  $\mathcal{N}(m)$  l'ensemble des bits  $r_n$  qui participent au  $m^{i\text{eme}}$  contrôle de parité. On pose également  $\mathcal{M}(n)$  l'ensemble des contrôles  $c_m$  dans lequel le bit  $r_n$  participe.

$$\mathcal{M}(n) = \{ m : H_{mn} = 1 \} \quad (17)$$

$$\mathcal{N}(m) = \{ n : H_{mn} = 1 \} \quad (18)$$

On pose  $\mathcal{N}(m) \setminus n$  le sous ensemble obtenu à partir de  $\mathcal{N}(m)$  moins le bit  $n$  et  $\mathcal{M}(n) \setminus m$  le sous ensemble obtenu à partir de  $\mathcal{M}(n)$  sans le contrôle  $c_m$ .

Intuitivement, à partir du graphe bi-partie présenté dans l'exemple, on peut déduire qu'il y a deux types de messages à passer :

- i) des nœuds de contrôle de parité vers les bits,  $q_{mn}$
- ii) des bits vers les équations de parité,  $r_{mn}$

$r_{mn}$  et  $q_{mn}$  sont associés aux éléments non nuls de la matrice  $\mathbf{H}$ .

**$q_{mn}$  est la probabilité que le bit  $n$  de  $\mathbf{r}$  ait une valeur fixée, en fonction des informations obtenues par tous les noeuds de contrôle sauf le  $m^{i\text{eme}}$ .**

**$r_{mn}$  est la probabilité que le  $m^{i\text{eme}}$  contrôle soit satisfait si le bit  $n$  de  $\mathbf{r}$  est fixé à  $x$  et que les autres bits ont une distribution séparée obtenue par  $q_{mn'}, n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n$ .**

L'algorithme de décodage se divise en trois parties : l'initialisation, l'étape horizontale et l'étape verticale. Ce sont les deux dernières parties qui itèrent jusqu'au décodage sans erreur ou jusqu'au nombre d'itérations maximal initialement défini.

Le déroulement de l'algorithme est présenté ci-dessous.

### 1) Initialisation

Soit  $p_n^0 = P(r_n = 0)$  la probabilité *a priori* que le bit  $r_n$  est égal à  $\mathbf{0}$  et  $p_n^1 = p(r_n = 1) = 1 - p_n^0$ . On note  $f_n$  la probabilité d'erreur induite par le canal. Si la distribution du bruit dans le canal est connue, on initialise  $p_n^1$  à la valeur de vraisemblance normalisée. On initialise aussi les valeurs de  $q_{mn}^0$  et  $q_{mn}^1$  égales à  $p_n^0$  et  $p_n^1$  respectivement.

### 2) Etape horizontale

On parcourt toutes les équations de parité et on calcule pour chaque bit  $n$  deux probabilités,  $r_{mn}^0$  et  $r_{mn}^1$ , avec

$r_{mn}^0$  : la probabilité que la valeur du contrôle de parité  $z_m$  ait sa valeur actuelle si l'on impose  $r_n=0$  sachant que les autres bits  $r_{n'}, n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n$  ont une distribution séparée décrite par  $q_{mn}^0$  et  $q_{mn}^1$ .

$$r_{mn}^0 = \sum_{r_{n'}: n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} P(z_m | r_n=0, \{r_{n'}: n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n\}) \prod_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} q_{mn'}^{r_{n'}} \quad (19)$$

$r_{mn}^1$  : la probabilité que la valeur du contrôle de parité  $z_m$  ait sa valeur actuelle si l'on impose  $r_n=1$  sachant que les autres bits  $r_{n'}, n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n$  ont une distribution séparée décrite par  $q_{mn}^0$  et  $q_{mn}^1$ .

$$r_{mn}^1 = \sum_{r_{n'}: n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} P(z_m | r_n=1, \{r_{n'}: n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n\}) \prod_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} q_{mn'}^{r_{n'}} \quad (20)$$

Les valeurs de la probabilité conditionnelle dans la somme sont soit  $\mathbf{0}$  soit  $\mathbf{1}$ , dépendant de  $z_m, r_n$  et  $r_{n'}$ . Une manière pratique d'appliquer les équations précédentes est d'utiliser la différence de ces probabilités. Ainsi, on pose

$$\delta q_{mn} = q_{mn}^0 - q_{mn}^1 \quad (21)$$

$$\delta r_{mn} = r_{mn}^0 - r_{mn}^1 \quad (22)$$

Suivant [6]

$$\delta r_{mn} = (-1)^{z_m} \prod_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \delta q_{mn'} \quad (23)$$

$$r_{mn}^x = \frac{(1 - (-1)^x \delta r_{mn})}{2}, x \in \{0, 1\} \quad (24)$$

### 3) Etape verticale

A partir des valeurs de  $r_{mn}^x$ , le décodeur met à jour les valeurs des probabilités  $q_{mn}^0$  et  $q_{mn}^1$ . Donc pour chaque  $n$ , on calcule

$$q_{mn}^0 = \alpha_{mn} p_n^0 \prod_{m' \in \mathcal{N}(n) \setminus m} r_{m'n}^0 \quad (25)$$

$$q_{mn}^1 = \alpha_{mn} p_n^1 \prod_{m' \in \mathcal{N}(n) \setminus m} r_{m'n}^1 \quad (26)$$

La valeur de  $\alpha_{mn}$  est fixée de façon à obtenir

$$q_{mn}^0 + q_{mn}^1 = 1 \quad (27)$$

On peut aussi calculer la probabilité *a posteriori* des bits  $n$ ,  $q_n^0$  et  $q_n^1$  par

$$q_n^0 = \alpha_n p_n^0 \prod_{m \in \mathcal{N}(n)} r_{mn}^0 \quad (28)$$

$$q_n^1 = \alpha_n p_n^1 \prod_{m \in \mathcal{N}(n)} r_{mn}^1 \quad (29)$$

Avec les valeurs de  $q_n^x, x \in \{0,1\}$ , on peut effectuer une décision hard pour tester tous les syndromes  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z}$ . En cas de succès, on arrête le décodage, ou sinon, on répète les deux dernières étapes un certain nombre de fois ou jusqu'au succès du décodage.

#### 1.4.3.4 Le décodage LLR *a posteriori*

Le décodeur présenté précédemment peut être réécrit en utilisant le rapport de vraisemblance logarithmique (LLR). Cette représentation a un avantage si l'on veut interfacer le LDPC avec un autre bloc et former un system itératif (turbo). Dans ce cas, le décodeur LDPC reçoit les valeurs LLR fournies par le bloc de communication précédent et puis fournit à son tour, les LLR des bits qu'il a décidés après le décodage.

On utilisera la notation suivante :

$F_n$  : LLR du bit  $n$  dérivé de la valeur reçu  $r_n$ . On l'initialise avec  $F_n = \frac{4}{N_0} r_n$ .

$L_{mn}$  : LLR du bit  $n$  en fonction de tous les contrôles de parité de la matrice de parité  $\mathbf{H}$  sauf le  $m^{ieme}$ .

$z_{mn}$  : LLR du bit  $n$  qui est envoyé vers les contrôles de parité  $c_m$  à partir des informations  $F_n$  et  $L_{m'n}$ .

$z_n$  : LLR *a posteriori* du bit  $n$  à chaque itération

L'algorithme de ce décodeur est présenté ci-dessous [14]

##### 1) Initialisation

Pour chaque  $m$  et  $n$ ,

$$z_{mn} = F_n \quad (30)$$

##### 2) Etape horizontale

Pour chaque  $m$  et  $n$ , calculer

$$T_{mn} = \prod_{n' \in \mathcal{N}'(m)_n} \frac{1 - e^{(z_{mn'})}}{1 + e^{(z_{mn'})}} \quad (31)$$

$$L_{mn} = \ln \left( \frac{1 - T_{mn}}{1 + T_{mn}} \right) \quad (32)$$

3) *Etape verticale*

Pour chaque  $m$  et  $n$ ,

$$z_{mn} = F_n + \sum_{m' \in \mathcal{M}(n) \setminus m} L_{m'n} \quad (33)$$

et mettre à jour

$$z_n = F_n + \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} L_{mn} \quad (34)$$

4) *Décision hard et test*

On crée un vecteur  $\hat{\mathbf{r}} = \{\hat{r}_n\}$  tel que

$$\hat{r}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } z_n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (35)$$

Si  $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ , on a un syndrome valide et  $\hat{\mathbf{r}}$  est le message effectivement transmis. Sinon, on réitère les trois dernières étapes.

Cet algorithme cherche bien sûr à reconstituer le message transmis au lieu de trouver le bruit qui s'ajoute au message comme dans le décodeur probabiliste. Il est plus simple de procéder ainsi car l'information fournie par et à fournir au décodeur LDPC est habituellement le rapport de vraisemblance de chaque bit du message et non pas la fiabilité du bruit trouvée.

#### 1.4.3.5 *Le décodeur de plus forte puissance universelle*

Il est connu que le temps nécessaire pour calculer un produit est beaucoup plus long que le temps nécessaire pour calculer une somme. Fossorier a proposé de simplifier les calculs précédents de  $T_{mn}$ , (31), et  $L_{mn}$ , (32), en faisant quelques approximations [14].

A partir de (23)-(24), et en prenant la valeur de  $\alpha_n$  adéquate pour respecter (27), on fait l'approximation suivante :

$$\prod_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} (1 - 2q_{n'}) \approx 1 - 2 \cdot \max_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \{q_{n'}\} \quad (36)$$

on trouve,

$$\begin{aligned} r_{mn}^0 &\approx \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - 2 \cdot \max_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \{q_{n'}\} \right) \right) \\ &\approx \max_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \{q_{n'}\} \end{aligned} \quad (37)$$

Dans un canal à bruit additif gaussien, on a

$$q_n = \frac{e^{-|4y_n/N_0|}}{1+e^{-|4y_n/N_0|}} \quad (38)$$

Alors,

$$\begin{aligned} r_{mn}^0 &\approx \max_{n' \in \mathcal{N}'(m) \setminus n} \left\{ \frac{e^{-|4y_n/N_0|_{\min}}}{1+e^{-|4y_n/N_0|_{\min}}} \right\} \\ &\approx \frac{e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}}{1+e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}} \end{aligned} \quad (39)$$

avec  $\tilde{y}_{mn'} = \min_{n' \in \mathcal{N}'(m) \setminus n} \{y_{mn'}\}$ .

On rappelle que  $q_n$  est la probabilité *a priori* que le bit  $n$  est erroné. On note  $\hat{q}_n$  la probabilité *a posteriori* que le bit  $n$  est erroné. On note aussi  $\sigma_m$  le résultat de la  $m^{\text{ième}}$  équation de parité et  $\bar{\sigma}_m$  son complément modulo 2.

En se rappelant que  $r_{mn}^x$  est la probabilité que le  $m^{\text{ième}}$  contrôle de parité est erroné si le bit  $n$  était fixé à  $x$ , le rapport de vraisemblance *a posteriori*  $\hat{q}_n$  est défini par

$$\frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n} = \left( \frac{1-q_n}{q_n} \right) \cdot \prod_{m \in \mathcal{M}(n)} \left( \frac{1-r_{mn}^0}{r_{mn}^0} \right)^{\bar{\sigma}_m} \left( \frac{r_{mn}^0}{1-r_{mn}^0} \right)^{\sigma_m} \quad (40)$$

On a évoqué la complexité supérieure des opérations de multiplications par rapport aux additions. En calculant le rapport de vraisemblance *a posteriori* logarithmique, on convertit les produits en somme. On obtient donc

$$\ln \left( \frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n} \right) = \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} \bar{\sigma}_m \ln \left( \frac{1-r_{mn}^0}{r_{mn}^0} \right) + \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} \sigma_m \ln \left( \frac{r_{mn}^0}{1-r_{mn}^0} \right) \quad (41)$$

$$\ln \left( \frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n} \right) = \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_m - \sigma_m) \ln \left( \frac{1-r_{mn}^0}{r_{mn}^0} \right) \quad (42)$$

$$\ln \left( \frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n} \right) = \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_m - \sigma_m) \cdot \left( \ln \left( 1 - \frac{e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}}{1+e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}} \right) - \ln \left( \frac{e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}}{1+e^{-\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}}} \right) \right) \quad (43)$$

$$\ln \left( \frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n} \right) = \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_m - \sigma_m) \cdot \ln \left( e^{\frac{4}{N_0}\tilde{y}_{mn'}} \right) \quad (44)$$

$$\ln\left(\frac{1-\hat{q}_n}{\hat{q}_n}\right) = \frac{4}{N_0} \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_m - \sigma_m) \cdot \tilde{y}_{mn'} \quad (45)$$

L'équation (45) servira pour obtenir les décisions hard. Il suffit d'adapter celle-ci pour construire un système itératif.

1) *Initialisation*

On pose  $x_n = \text{decision}(y_n)$  et  $r_n$  est le rapport de vraisemblance *a priori* de  $y_n$ .

2) *Etape 1*

Pour chaque  $n$  et pour chaque  $m \in \mathcal{M}(n)$ , on calcule le bit de contrôle de parité

$$\alpha_m = \sum_{n' \in \mathcal{M}(n) \setminus n} x_{n'} \quad (46)$$

et on identifie

$$\hat{y}_{mn} = \min_{n' \in \mathcal{M}(m) \setminus n} \{|y_{n'}|\} \quad (47)$$

3) *Etape 2*

Pour chaque  $n$ , on calcule

$$z_n = |r_n| + \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_m - \sigma_m) \hat{y}_{mn} \quad (48)$$

4) *Etape 3*

Si  $z_n < 0$ , on modifie  $x_n = \bar{x}_n$ . Dans le cas où la relation  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = 0$  n'est pas vérifiée, la valeur de  $y_n$  est mise à jour par  $y_n = z_n$  et on répète l'étape 1 jusqu'à l'étape 3. Sinon, on arrête le décodage en considérant qu'il y a eu succès.

Le nom "La plus forte puissance universelle" (*Uniformly Most Powerful, UMP*) est dû au fait que la connaissance de la puissance du bruit additif n'est pas nécessaire au déroulement de l'algorithme.

Notons que les mêmes approximations sont possibles pour le décodage BP. Le seul souci est que, au cours de la même itération, on peut trouver deux valeurs de contrôle de parité différentes en fonction des décisions hard à partir de  $q_{mn}$  et  $q_n$ . Or, ceci n'est pas possible dans le décodeur ci-dessus. Avec le décodeur précédent, les valeurs hard des symboles sont déterminées à partir des valeurs hard de l'itération précédente. Avec le décodeur BP, les décisions hard de l'itération précédente ne sont pas forcément identiques aux décisions hard à partir de  $q_{mn}$ . Compte tenu de ces remarques, la décision hard est légèrement modifiée, et l'algorithme simplifié UMP basé sur l'algorithme BP est présenté ci-dessous [14],

1) *Initialisation*

Pour chaque  $n$  et pour chaque  $m \in \mathcal{M}(n)$ , les décisions hard  $x_{mn}$  et  $x_n$  sont déterminées à partir des valeurs reçus  $r_n$ . On pose  $r_n^i = r_n$  et pour chaque  $m \in \mathcal{M}(n)$ ,  $y_{mn} = y_n$

2) *Etape 1*

Pour chaque  $n$  et pour chaque  $m \in \mathcal{M}(n)$ , on calcule la valeur du contrôle de parité

$$\sigma_{mn} = x_n \oplus \sum_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} x_{mn'} \quad (49)$$

$$\bar{\sigma}_{mn} = \sigma_{mn} \oplus 1 \quad (50)$$

et on cherche

$$\hat{y}_{mn} = \min_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \{|y_{mn'}|\} \quad (51)$$

3) *Etape 2*

Pour chaque  $n$  et chaque  $m \in M(n)$ ,

$$z_{mn} = |r_n^i| + \sum_{m' \in \mathcal{M}(n) \setminus n} (\bar{\sigma}_{m'n} - \sigma_{m'n}) \cdot \hat{y}_{m'n} \quad (52)$$

Pour chaque  $n$ ,

$$z_n = |r_n^i| + \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} (\bar{\sigma}_{mn} - \sigma_{mn}) \cdot \hat{y}_{mn} \quad (53)$$

4) *Etape 3*

Pour chaque  $m \in \mathcal{M}(n)$ ,

$$x_{mn} = \begin{cases} x_n, & \text{si } z_{mn} > 0 \\ \bar{x}_n, & \text{sinon} \end{cases} \quad (54)$$

Pour chaque  $n$ ,

$$x_n = \bar{x}_n \text{ si } z_n < 0. \quad (55)$$

Pour chaque  $m \in M(n)$ ,

$$y_{mn} = z_{mn} \quad (56)$$

Tester si  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = 0$  est vérifiée. Répéter étapes 1 à 3 si ce n'est pas le cas.

Noter que l'algorithme UMP-BP a une moins bonne performance que l'algorithme BP mais due à sa complexité réduite, cet algorithme a été retenu pour le bloc de décodage LDPC dans cette thèse. Tous les résultats de simulations intégrant le LDPC utilisent cet algorithme de décodage (sauf contre-indication).

## 1.5 Les codes LDPC irréguliers

Gallager a initialement proposé un code régulier, c'est-à-dire que le poids de chaque colonne de la matrice de parité  $\mathbf{H}$  est fixé à  $\tau$ .

Les codes irréguliers n'utilisent plus la notion de  $\tau$  fixe pour toutes les colonnes. On construit une matrice de parité avec un poids de colonne non uniforme.

Un code LDPC irrégulier est décrit par le poids des colonnes et des lignes. On définit  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, \tau_{max}\}$  le pourcentage d'avoir des colonnes de poids  $i$ . Ainsi  $\lambda_i = (0, 0.05, 0.75, 0.15, 0.05)$  signifie qu'on a 0 colonne de poids 1, 5% de colonnes de poids 2, 75% des colonnes de poids 3 et ainsi de suite.

On définit similairement  $\rho_r$  le poids de la ligne  $r$  de la matrice de parité  $\mathbf{H}$ .

Luby *et al.* ont montré que la performance d'un code LDPC irrégulier bien construit peut dépasser celle des codes réguliers [15][16]. On peut tenter d'expliquer ce fait par la remarque suivante : Imaginons une situation de tests cliniques d'une maladie nouvelle. Nous avons des médicaments nouveaux à tester sur un groupe de personnes malades volontaires. Ces personnes sont malades d'une maladie spécifique, mais il y a une partie non déterminée de ces personnes qui ont d'autres maladies. Si le médicament est testé par le maximum de personnes, alors on aura plus d'information sur sa capacité à guérir. Mais, en augmentant le nombre de personnes concernées pour tester un médicament, les risques d'incompatibilité avec les traitements suivis par ces personnes qui ont d'autres maladies augmentent.

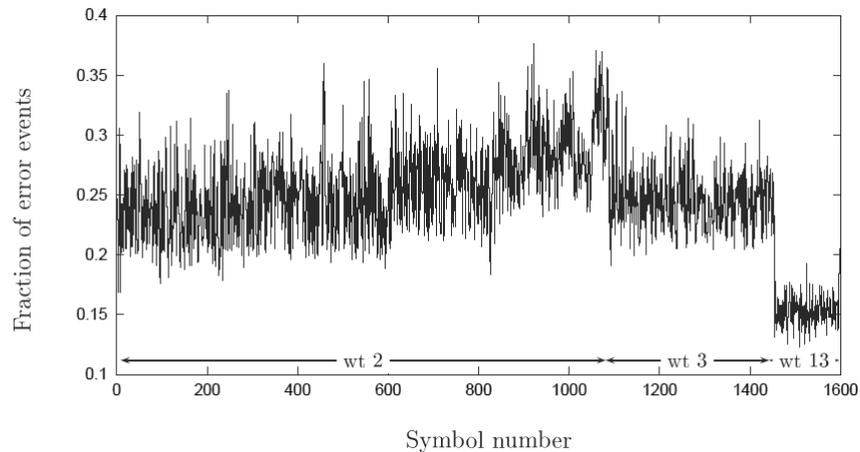
Donc, à défaut de répertorier toutes les maladies de tout le monde, on privilégiera un ou deux médicaments à tester sur le plus de monde et le résultat des tests servira de référence pour les autres cas.

Cette analogie se résume ainsi pour les codes LDPC irréguliers.

**Plus un bit de message est lié à un nombre élevé d'équations de parité, meilleure sera l'information sur la fiabilité de ce bit. Mais, chaque équation de parité doit contenir le moins possible de bits d'un message associé pour donner une meilleure appréciation sur chaque bit.**

Il est évident qu'on ne peut pas augmenter le poids de toutes les colonnes indéfiniment sous peine d'obtenir un code moins performant. On sélectionne alors quelques colonnes pour avoir un poids plus grand et donc donner une meilleure fiabilité pour ces bits sélectionnés qu'on appellera les bits "élites". Ces bits à haute fiabilité serviront comme référence pour décoder les autres bits moins fiables.

La Figure 3 met en évidence que les bits élites subissent beaucoup moins d'erreurs que les autres bits. On a presque moitié moins d'erreurs sur les bits liés à 13 contrôles de parité comparé au bits qui participent à 2 ou 3 contrôles



**FIGURE 3 : LA FRACTION D'ÉVÉNEMENT D'ERREUR SUR LES SYMBOLES INDIVIDUELLES À SNR ÉGALE À 0.2DB POUR UN CODE LDPC IRREGULIER GF(8). IL Y A 1086 COLONNES DE POIDS 2 (WT2), 367 COLONNES DE POIDS 3 (WT3) ET 147 COLONNES DE POIDS 13 (WT13) [11]**

On peut alors imaginer de placer les bits d'informations sur les colonnes élites pour améliorer la performance du système, mais ceci a très peu d'intérêt car le nombre de ces positions d'élites est souvent petit.

Il a été montré aussi qu'on peut construire un profil des colonnes et des lignes spécifique adapté à un profil de canal spécifique. On trouvera plus de détails à ce sujet dans [11], [15]-[17]

## 1.6 Les codes LDPC non binaire

Il existe des codes LDPC non binaires avec des éléments qui font partie du corps de Galois,  $GF(q)$  et des opérations qui suivent l'algèbre de Galois. Leurs performances, comme on verra dans la partie suivante, sont meilleures que les codes LDPC binaires. Malheureusement, l'étude de ces codes n'était pas prévue dans cette thèse. On se contentera de remarquer que ces codes existent et qu'ils ont des meilleures performances.

## 1.7 Performances des codes LDPC

On commence par comparer les performances des codes LDPC par rapport aux autres codes connus. Les codes considérés et leurs paramètres sont présentés dans le Tableau 3

TABLEAU 3 : CONFIGURATION DES CODES DE RENDEMENT 1/4 POUR COMPARAISON AVEC LDPC [11]

Intitulé du code	Nom du code	Type	Algebre	taille d'un bloc
IrregGF(8)	Mackay LDPC	Irrégulier	GF(8)	48000
Turbo	JPL TurboCode[18]	-	-	65536
RegGF(16)	Mackay LDPC	Régulier	GF(16)	24448
IrregGF(2)	Mackay LDPC	Irrégulier	GF(2)	16000
Luby	Luby LDPC [15]	Irrégulier	GF(2)	64000
Galliléo	JPL Galliléo [18]	code convolutif concaténé	-	longueur de contrainte : 15
RegGF(2)	Gallager-Mackay LDPC	Régulier	GF(2)	40000

Les codes LDPC préfixés "Mackay" ont été construits suivant les méthodes proposées dans [6],[11]. Les codes JPL sont les codes développés par le *Jet Propulsion Lab* de la NASA.

On peut voir, dans la Figure 4, que le code LDPC irrégulier GF(8) est meilleur que le turbo codes JPL et constitue peut-être le meilleur code correcteur d'erreurs connu à ce jour dans un canal gaussien.

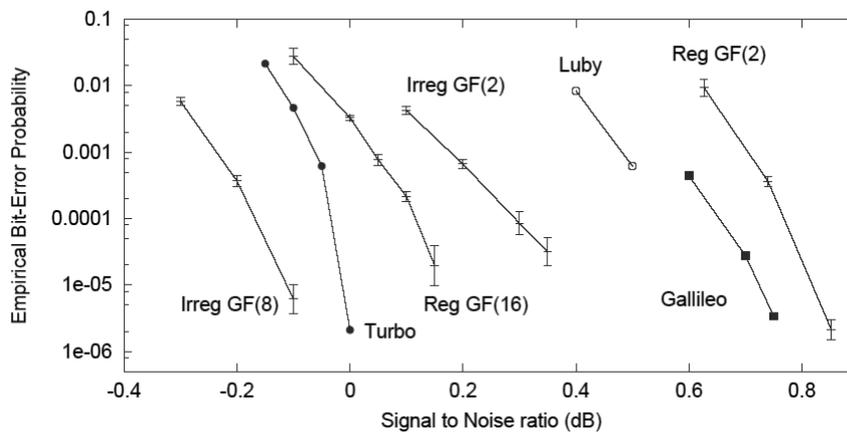
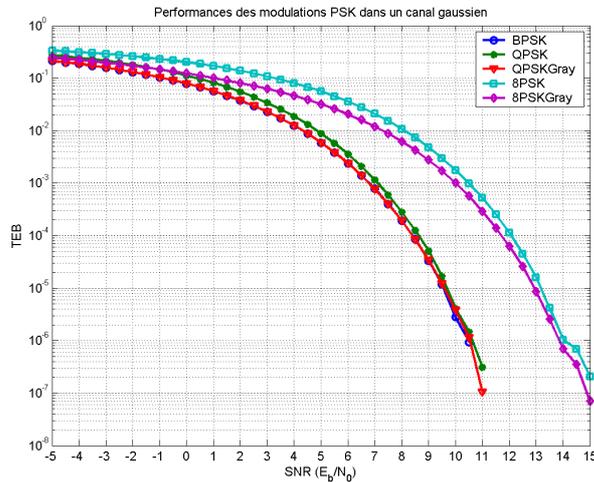


FIGURE 4 : LA COMPARAISON EMPIRIQUE DE LA PERFORMANCE DES DIFFERENTS CODES A RENDEMENT 1/4 SUR UN CANAL GAUSSIEN [11]

Dans cette thèse on utilise un code LDPC irrégulier binaire de poids moyen des colonnes égale à 3 et le décodage se fait avec au plus 30 itérations par blocs. On utilise le plus souvent les codes  $(200,400,3)$  et  $(2000,4000,3)^2$ .

La Figure 5 montre tout d'abord les performances des différentes modulations MPSK sur un canal gaussien.



**FIGURE 5 : LES PERFORMANCES DES DIFFERENTES MODULATIONS MPSK SUR UN CANAL GAUSSIEN**

La Figure 6 montre les performances du code LDPC irrégulier  $(200,400,3)$  utilisé dans cette thèse dans un canal gaussien pour les différentes modulations MPSK. On note que le code LDPC permet de corriger d'avantage les modulations PSK codées en Gray.

La Figure 7 nous montre les performances des différentes modulations sur un canal gaussien quand un code LDPC irrégulier  $(2000,4000,3)$  plus performant est utilisé. On observe un gain d'environ de 2 dB pour un TEB égal à  $10^{-3}$  comparé au code  $(200,400,3)$ . Même avec une longueur de code moyenne, on arrive à obtenir des performances vertigineuses. Ce code sera retenu dans cette thèse sauf contre indication spécifique.

<sup>2</sup> La notation  $(x,y,z)$  décrit la matrice de parité  $\mathbf{H}$  ayant  $x$  lignes (le nombre d'équations de parité) et  $y$  colonnes (la longueur du bloc d'information codé).  $z$  est le poids de colonnes de la matrice de parité du LDPC régulier ou le poids moyen des colonnes pour le code LDPC irrégulier.

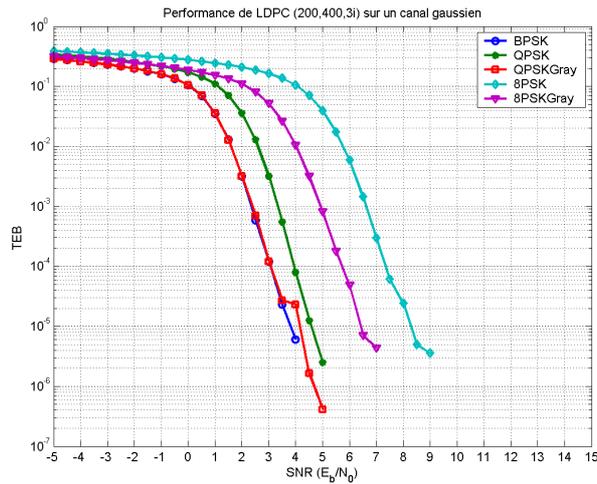


FIGURE 6 : LES PERFORMANCES DES DIFFERENTES MODULATIONS PSK CODEES PAR LE CODE LDPC IRREGULIER (200,400,3) SUR UN CANAL GAUSSIEN

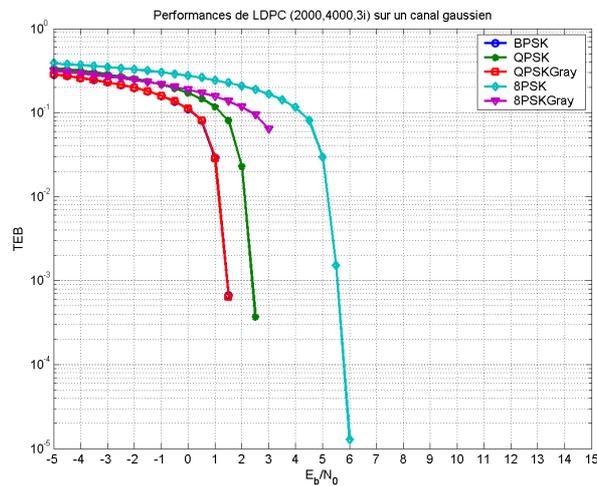


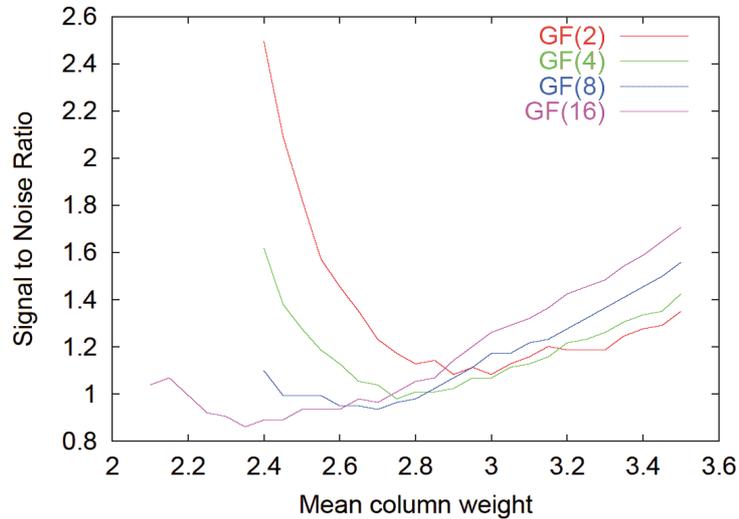
FIGURE 7 : LES PERFORMANCES DES DIFFERENTES MODULATIONS PSK CODEES PAR LE CODE LDPC IRREGULIER (2000,4000,3) SUR UN CANAL GAUSSIEN

### 1.8 Paramètres choisis pour le code LDPC

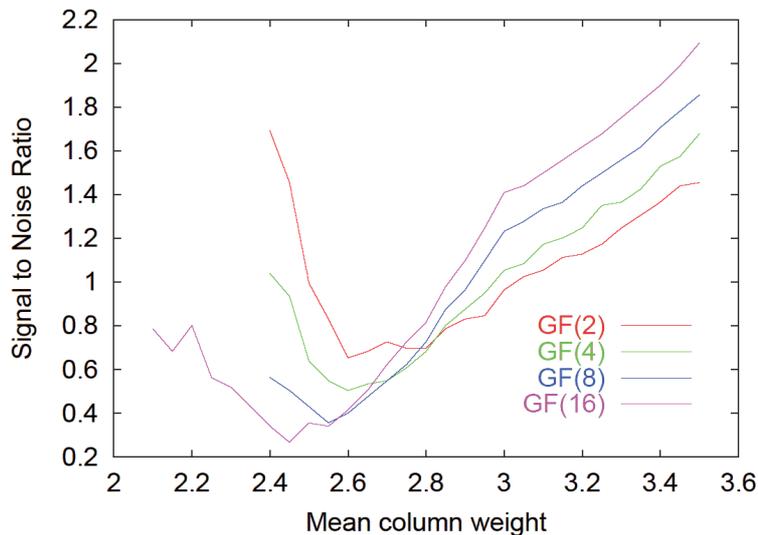
Il a été mentionné qu'on utilise, pour cette thèse, un code LDPC irrégulier binaire avec un poids moyen de chaque colonne de la matrice de parité égale à trois. Ceci se justifie d'après l'observation de la Figure 8 qui nous montre les résultats de simulations Monte Carlo exposés dans [11]. Davey a tracé le SNR pour lequel l'entropie moyenne des bits atteint  $10^{-5}$  avant 80 itérations au décodage en fonction du poids moyen des colonnes des matrices de parité LDPC générées (rendement 1/2). On en déduit qu'on peut obtenir une meilleure performance avec le

poids moyen égal a environ 3 pour un code LDPC irrégulier binaire. Ceci m'a aidé à fixer le poids moyen de la matrice de parité LDPC générée.

La Figure 9 montre les mêmes simulations mais pour un code LDPC de rendement 1/4. Cependant, je n'ai pas eu l'opportunité d'utiliser les codes LDPC de rendement 1/4 de façon conséquente pendant les trois années de thèse.



**FIGURE 8 : LE PROFIL DU SNR POUR UNE ENTROPIE MOYENNE EGALE A  $10^{-5}$  AVEC UN NOMBRE MAXIMAL DI'ITERATIONS EGAL A 80 EN FONCTION DU POIDS MOYEN DE LA MATRICE DE PARITE LDPC IRREGULIER DE RENDEMENT 1/2**



**FIGURE 9 : LE PROFIL DU SNR POUR UNE ENTROPIE MOYENNE EGALE A  $10^{-5}$  AVEC UN NOMBRE MAXIMAL DI'ITERATIONS EGAL A 80 EN FONCTION DU POIDS MOYEN DE LA MATRICE DE PARITE LDPC IRREGULIER DE RENDEMENT 1/4**

Le deuxième paramètre fixé pour le LDPC est le nombre d'itérations maximum pour décoder un bloc. Suivant les courbes de la fréquence du succès des décodages en fonction de nombre d'itérations pour un code LDPC irrégulier GF(8) de rendement 1/4 avec la taille d'un bloc égale à 4800, pour le SNR égale à 0.5dB [11], on peut voir dans la Figure 10, qu'après 30 itérations, on a correctement décodé plus que la moitié des blocs. Après 40 itérations, une grande partie des blocs ont été correctement décodés. La figure de droite nous montre que ce comportement suit une loi de probabilité de la forme  $P(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$ .

A partir de ces figures, j'ai décidé de faire seulement 30 itérations pour décoder un bloc même si les codes LDPC utilisés seront de rendement 1/2 et en GF(2) pour la raison suivante : le code LDPC est prévu pour faire partie d'un système turbo récepteur. J'ai pensé qu'il n'est pas nécessaire de faire beaucoup trop d'itérations LDPC pendant chaque turbo itération.

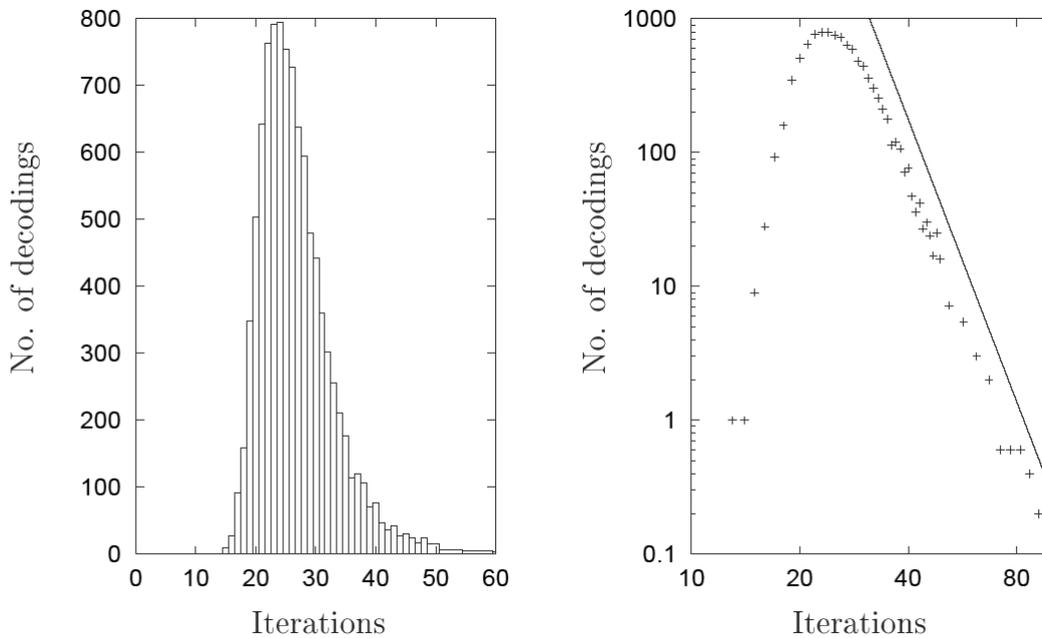


FIGURE 10: LA DISTRIBUTION DU NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRE AVANT LE SUCCES DE DECODAGE

### 1.9 Le comportement du décodeur LDPC

La thèse de M.C Davey [11] est une mine de renseignements à propos des codes LDPC irréguliers. Il a étudié le comportement du décodeur et a remarqué par exemple l'aspect chaotique de l'algorithme de décodage. Cependant, ceci dépasse le cadre de cette thèse sachant que notre but était d'abord d'utiliser les codes LDPC dans des chaînes de turbo-égalisation. Les personnes désirant plus de détails sur les codes LDPC peuvent se procurer le manuscrit de sa thèse sur son site web [18].

## **1.10 Conclusion**

Nous avons étudié dans ce chapitre le codage LDPC binaire. Nous avons vu que les codes LDPC irréguliers sont meilleurs que les codes réguliers. Ces codes montrent des performances prometteuses similaires à celles des turbo codes.



---

## Chapitre 2 L'algorithme EM

---

### 2.1 Introduction

L'utilisation de l'algorithme du maximum de vraisemblance (ML) pour estimer la séquence la plus probable est une solution optimale mais sa complexité s'accroît exponentiellement en fonction de la longueur du message à estimer. On a souvent recours aux solutions sous optimales comme les méthodes d'égalisation des moindres carrés (MMSE) ou de zéro forcing (ZF) qui sont beaucoup moins complexes.

Ces méthodes sous optimales ont des performances parfois très mauvaises par rapport aux solutions optimales. L'idéal est de concevoir une méthode d'estimation sous optimale se rapprochant le plus possible de l'algorithme ML avec le minimum de complexité.

L'algorithme Expectation – Maximization (EM) est une méthode générale itérative bien connue dans le domaine statistique. L'algorithme se résume à trouver les vraies données inaccessibles directement à partir des informations qu'on possède. Il se trouve que cette configuration correspond bien au problème des transmissions numériques sachant que le récepteur reçoit des informations perturbées, modifiées et même effacées.

L'algorithme EM a été utilisé depuis longtemps sans forcément employer le terme **EM**. En 1976, Dempster, Laird et Rubin (DLR en abrégé) ont synthétisé toutes les idées publiées avant cette date. Ils ont élaboré une formulation générale et ont développé parallèlement toute la théorie qui concerne cet algorithme [20]. Le terme EM voit le jour à partir de ce moment là.

Les travaux de DLR ont suscité beaucoup d'intérêt dans tous les milieux où les méthodes statistiques d'estimation des données sont couramment utilisées. La première utilisation de l'algorithme EM dans le domaine des télécommunications numériques remonterait à 1985 avec l'article publié par Feder [21]. Cet algorithme est d'abord très peu utilisé à cause de son aspect itératif. Sachant que la plupart des systèmes de communications étaient des systèmes temps réels, il était alors inconcevable, d'implanter un algorithme itératif sur de tels systèmes. La puissance de calcul disponible jadis ne permettait pas d'obtenir un système temps réel avec des modules itératifs. L'arrivée des Turbo-Codes et la disponibilité des calculateurs et des simulateurs rapides et puissants ont permis d'inclure l'algorithme EM dans le domaine du traitement du

signal pour les radiocommunications. L'utilisation de l'algorithm EM comme traitement itératif approximant le maximum de vraisemblance trouve aussi sa justification dans le fait que les turbo codes se sont imposés dans de nombreuses normes internationales (UMTS, DVB, WIFI, ...).

## 2.2 Généralités

Comme son nom le suggère, l'algorithm EM se divise essentiellement en deux étapes. La première étape estime les paramètres essentiels qui déterminent la fonction de vraisemblance à partir de l'ensemble des informations disponibles ou déduites de l'itération précédente. La deuxième étape trouve la solution de cette fonction, ou dans le cas échéant, détermine les valeurs des paramètres caractéristiques maximisant la fonction de vraisemblance.

Le principe de cet algorithm est basé sur l'existence des données dites "complètes" directement inaccessibles et la disponibilité des données dites "incomplètes" qui sont les images de ces valeurs complètes après avoir subi des transformations linéaires. L'algorithm détermine ces données complètes à partir des fonctions de la densité de probabilité, connues ou supposées, de ces valeurs complètes et les perturbations qui affectent ces dernières.

Le terme incomplet laisse entendre l'existence de deux ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  et une projection  $N \mapsto 1$  de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$ . Les données incomplètes, ou, les données observées sont des valeurs de l'ensemble  $\mathcal{Y}$  et les données complètes font partie des sous-ensembles de  $X_i$  possibles. Ces données  $\mathcal{X}$  ne sont pas directement observables. Elles se manifestent sous la forme des valeurs de  $\mathcal{Y}$  après avoir été perturbées par des causes extérieures. La relation entre  $X_i(y)$  et  $y$  est déterminée par une fonction de transfert  $Y(x_i)$ .

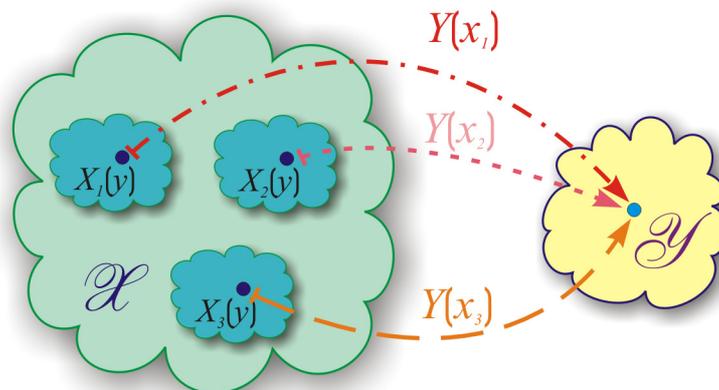


FIGURE 11 : LES RELATIONS ENTRE L'ENSEMBLE DES DONNEES COMPLETES  $\mathcal{X}$  ET L'ENSEMBLE DES DONNEES INCOMPLETES  $\mathcal{Y}$

On suppose qu'il existe une famille des densités de probabilités  $f(x|\phi)$  dépendant d'un vecteur des paramètres  $\phi$  quelconque permettant d'expliquer les valeurs de  $x$ .

On déduit l'existence d'une famille de densité de probabilité correspondant

$$g(y|\phi) = \int_{X(y)} f(x|\phi) dx \quad (1)$$

L'algorithme EM consiste à trouver de façon itérative, un ensemble de valeurs pour le vecteur  $\phi$  dont la fonction  $g(y|\phi)$  est maximisée pour une observation  $y$  donnée. A chaque itération, l'algorithme crée une estimation de  $x$  basée sur l'estimation précédente de  $\phi$  afin d'évaluer  $\phi$  à nouveau. L'algorithme itère jusqu'à la convergence de  $\phi$ .

Il faut remarquer qu'il existe plusieurs  $f(x|\phi)$  engendrant  $g(y|\phi)$ . Il faut donc faire un bon choix d'un  $f(x|\phi)$  pour maximiser  $g(y|\phi)$ . On se limite volontairement aux distributions de la famille exponentielle comme c'est le cas le plus souvent dans les systèmes étudiés pendant cette thèse.

## 2.3 Le cas simple

Soit  $f(x|\phi)$  une fonction de densité de probabilité de la famille exponentielle régulière qui s'écrit sous la forme

$$f(x|\phi) = \frac{b(x)}{a(\phi)} \cdot e^{\phi^T(x)} \quad (2)$$

$\phi$  est un vecteur de paramètres de taille  $1 \times r$  et  $t(x)$  est le vecteur des données complètes qui constituent des statistiques suffisantes de taille  $1 \times r$ . Le terme régulier employé ici signifie que les valeurs de  $\phi$  sont limitées à un ensemble convexe<sup>3</sup>  $\Omega$  de dimension  $r$ .

On verra, dans un premier temps, le fonctionnement de l'algorithme EM quand la probabilité (2) est utilisée. On note  $\phi^{(p)}$  la valeur actuelle de  $\phi$  après  $p$  itérations. L'algorithme EM se déroule ainsi

<sup>3</sup> Si deux vecteurs de dimension  $r$  quelconques  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Omega$ , alors  $(1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v} \in \Omega$  pour  $t \in [0;1]$  ou

encore,  $\left( \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \right) \in \Omega$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$

**Etape E** : Estimation de la statistique suffisante  $\mathbf{t}(x)$  des données complètes par

$$\mathbf{t}^{(p)} = E\left(\mathbf{t}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{y}, \phi^{(p)}\right) \quad (3)$$

**Etape M** : Determination de  $\phi^{(p+1)}$  comme solution de

$$E(\mathbf{t}(\mathbf{x}) \mid \phi) = \mathbf{t}^{(p)} \quad (4)$$

En utilisant la formule (2) on obtient pour cette famille et pour  $\mathbf{x}$  donnée

$$\begin{aligned} \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} \left[ \log(f(\mathbf{x} \mid \phi)) \right] &= \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} \left[ -\log(a(\phi)) + \log(b(\mathbf{x})) + \phi \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \right] \\ &= \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} \left[ -\log(a(\phi)) + \phi \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Le problème avec (4)-(5) est qu'ils ne sont pas toujours solvables avec  $\phi \in \Omega$ . Il faut alors, dans ce cas, utiliser une définition plus générale.

## 2.4 La définition générale

On définit la fonction

$$Q(\phi \mid \phi') = E\left(\log(f(\mathbf{x} \mid \phi)) \mid \mathbf{y}, \phi'\right) \quad (6)$$

On suppose que la fonction  $Q(\phi \mid \phi')$  existe  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, f(\mathbf{x} \mid \phi) > 0$  pour tout  $\phi \in \Omega$ .

L'algorithmme EM est décrit ainsi :

**Etape E** : On calcule  $Q(\phi \mid \phi^{(p)})$  pour trouver une valeur statistique suffisante de  $\mathbf{x}$  avec l'estimation  $\phi$  de l'itération  $p$ .

**Etape M** : On cherche à trouver une valeur de  $\phi^{(p+1)} \in \Omega$  qui maximise la fonction  $Q(\phi \mid \phi^{(p)})$ .

L'algorithmme EM peut fournir des valeurs *a posteriori* de  $\phi$  au lieu de son estimation à maximum de vraisemblance. On note  $G(\phi)$  le logarithme de la densité de probabilité *a priori* de  $\phi$ . Le terme à maximiser est alors  $Q(\phi \mid \phi^{(p)}) + G(\phi)$

## 2.5 Les propriétés de l'algorithme

On note

$$L(\phi) = \log(g(\mathbf{y}|\phi)) \quad (7)$$

On introduit la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{x}$  sachant  $\mathbf{y}$

$$k(\mathbf{x}|\mathbf{y},\phi) = \frac{f(\mathbf{x}|\phi)}{g(\mathbf{y}|\phi)} \quad (8)$$

et on obtient

$$L(\phi) = \log(f(\mathbf{x}|\phi)) - \log(k(\mathbf{x}|\mathbf{y},\phi)) \quad (9)$$

Si on pose

$$H(\phi|\phi') = E(\log(k(\mathbf{x}|\mathbf{y},\phi))|\mathbf{y},\phi') \quad (10)$$

on peut alors réécrire  $Q(\phi|\phi')$  sous la forme

$$Q(\phi|\phi') = L(\phi) + H(\phi|\phi') \quad (11)$$

### 2.5.1 La monotonie de l'algorithme

DLR ont montré que

$$L(\phi^{(p+1)}) \geq L(\phi^{(p)}) \quad (12)$$

En effet, à partir de (11), on a

$$\begin{aligned} DL &= \log(L(\phi^{(p+1)})) - \log(L(\phi^{(p)})) \\ &= \underbrace{\left( Q(\phi^{(p+1)}|\phi^{(p)}) - Q(\phi^{(p)}|\phi^{(p)}) \right)}_q - \underbrace{\left( H(\phi^{(p+1)}|\phi^{(p)}) - H(\phi^{(p)}|\phi^{(p)}) \right)}_h \end{aligned} \quad (13)$$

L'étape **M** recherche les valeurs de  $\phi$  qui maximisent  $Q(\phi|\phi')$ . On sait alors que pour tout  $\phi \in \Omega$ ,

$$Q(\phi^{(p+1)}|\phi^{(p)}) \geq Q(\phi|\phi^{(p)}) \quad (14)$$

$q$  est donc non-négative. L'inégalité (12) est alors valable si  $h$  est non positive,  $h \leq 0$ .

Pour tout  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} DH &= H\left(\phi \middle| \phi^{(p)}\right) - H\left(\phi^{(p)} \middle| \phi^{(p)}\right) \\ &= E \left[ \log \left( k(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \phi) / k(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \phi^{(p)}) \right) \middle| \mathbf{y}, \phi^{(p)} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

La concavité de la fonction logarithmique et la formule de Jensen nous permettent de développer (15) sous forme [22]

$$\begin{aligned} DH &\leq \log \left( E \left\{ \left[ k(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \phi) / k(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \phi^{(p)}) \right] \middle| \mathbf{y}, \phi^{(p)} \right\} \right) \\ &\leq \log \int_{\mathcal{X}(\mathbf{y})} k(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \phi) d\mathbf{x} \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

L'inégalité (16) nous confirme que  $h$  est non-positive. Ceci complète la condition nécessaire pour que l'algorithmes EM soit monotone.

### 2.5.2 La convergence de l'algorithmes

La monotonie de l'algorithmes ne nous garantit pas que l'algorithmes converge. Si l'inégalité (14) est stricte, la fonction  $L(\phi)$  est alors croissante. Si on pose  $\hat{\phi}$  l'estimation maximum de vraisemblance qui maximise globalement  $L(\phi)$ , alors pour satisfaire (12), on a obligatoirement,

$$\forall \phi \in \Omega : Q(\hat{\phi} | \hat{\phi}) \geq Q(\phi | \hat{\phi}) \quad (17)$$

Dans le cas où  $L(\phi)$  est bornée, alors,  $L(\phi^{(p)})$  converge vers un état stationnaire local  $L^* = L(\hat{\phi})$ . Le terme local employé ici signifie qu'il peut exister plusieurs maxima, et la convergence vers cette valeur dépendra de la valeur initiale donnée à l'algorithmes.

En dérivant (17), on déduit que  $\hat{\phi}$  est la solution de l'équation différentielle

$$\left[ \frac{\partial Q(\phi, \hat{\phi})}{\partial \phi} \right]_{\phi=\hat{\phi}} = 0 \quad (18)$$

Si  $L^*$  est un maximum global, alors

$$\left[ \frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} \right]_{\phi=\hat{\phi}} = 0 \quad (19)$$

A partir de (11),

$$\frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial Q(\phi|\phi^{(p)})}{\partial \phi} - \frac{\partial H(\phi|\phi^{(p)})}{\partial \phi} \quad (20)$$

L'équation (16) nous dit que

$$\forall \phi \in \Omega : H(\phi|\phi^{(p)}) \leq H(\phi^{(p)}|\phi^{(p)}) \quad (21)$$

Alors,

$$\left[ \frac{\partial H(\phi|\phi^{(p)})}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi^{(p)}} = 0 \quad (22)$$

L'équation (22) nous montre que à chaque itération, l'estimation de  $\phi$  est maximale pour le terme  $H(\phi|\phi^{(p)})$ . La convergence de l'algorithme dépend entièrement de  $Q(\phi|\phi^{(p)})$ .

Avec cette considération, pour une valeur quelconque de  $\phi_0 \in \Omega$ , on obtient

$$\left[ \frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_0} = \left[ \frac{\partial Q(\phi|\phi^{(p)})}{\partial \phi} \right]_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \phi^{(p)}=\phi_0}} \quad (23)$$

Si  $\phi = \phi^*$  un point stationnaire de  $L(\phi)$ , on a alors

$$\frac{\partial L(\phi^*)}{\partial \phi} = \left[ \frac{\partial Q(\phi|\phi^*)}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi^*} = 0 \quad (24)$$

L'équation (24) nous montre que l'algorithme EM converge vers une valeur stationnaire  $\phi^*$  si  $Q(\phi|\phi^*)$  est maximum globalement sur  $\phi \in \Omega$  quand  $\phi = \phi^*$ .

L'article de [23] donne plus d'information et la démonstration complète sur la convergence de l'algorithme EM. Il complète les démonstrations faites par DLR.

## 2.6 L'application de l'algorithme EM en communication numérique

On a vu jusqu'à présent, la présentation de l'algorithme EM de façon générale. Cette partie illustre son application au cadre des communications numériques

### 2.6.1 L'estimation des paramètres des signaux superposés

Feder et Weinstein ont proposé dans [24] l'utilisation de l'algorithme EM pour estimer les paramètres des signaux superposés.

Le modèle du système est décrit par

$$y(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k) + n(t) \quad (25)$$

$y(t)$  est le signal reçu,  $\{\phi_k\} \in \Omega$  est le vecteur des paramètres inconnus associés au  $k^{\text{ième}}$  signal et  $n(t)$  est le bruit blanc additif. On cherche donc à trouver les estimations de maximum de vraisemblance de  $\{\phi_k\}$ .

On suppose que

- les signaux  $\{s_k(t, \phi)\}$  sont connus en fonction de  $\phi_k$
- $n(t)$  est un bruit blanc gaussien à moyenne nulle ayant la matrice de covariance  $E[n(t) \cdot n^*(\sigma)] = R \cdot \delta(t - \sigma)$

On a alors le logarithme de la fonction de maximum de vraisemblance [25] qui s'écrit

$$L(\phi) = c - \frac{\lambda}{2} \int_T \left( y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k) \right)^* \cdot R^{-1} \cdot \left( y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k) \right) dt \quad (26)$$

avec  $c$  une constante qui normalise cette fonction et  $\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } n(t) \in \mathbb{R} \\ 2 & \text{si } n(t) \in \mathbb{C} \end{cases}$ .

L'intégrale dans (26) peut être remplacée par une somme dans le cas des signaux discrets.

Pour trouver les estimations de maximum de vraisemblance des  $\phi_k$ , Il faut résoudre

$$\hat{\phi} = \underset{\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_K\}}{\operatorname{argmin}} \{L(\phi)\}, k = \{1, \dots, K\} \quad (27)$$

La complexité de l'équation (27) croît exponentiellement avec  $K$ . Il est alors inconcevable d'utiliser les estimations ML.

L'algorithme EM permet de simplifier ce problème. Le problème principal est d'estimer les paramètres des signaux superposés. On définit  $x(t)$  les données complètes et  $y(t)$  les données incomplètes. Naturellement  $x(t)$  est défini tel que

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_K(t)]^T \quad (28)$$

avec

$$x_k(t) = s_k(t, \phi_k) + n_k(t) \quad (29)$$

de telle sorte que

$$\sum_{k=1}^K n_k(t) = n(t) \quad (30)$$

A partir de (25), (28)-(30), on écrit

$$y(t) = \sum_{k=1}^K x_k(t) = H \cdot x(t) \quad (31)$$

avec  $H = [1 \dots 1]_{1 \times K}$  naturellement.

Si l'on suppose que  $n_k(t)$  est un processus gaussien de moyenne zéro statistiquement indépendant, alors sa matrice de covariance est

$$\begin{aligned} \text{cov}(n_k(t)) &= E(n_k(t) \cdot n_k^*(\sigma)) \\ &= R_k \cdot \delta(t - \sigma) \end{aligned} \quad (32)$$

avec  $R_k = \beta_k \cdot R$ ,  $\beta_k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$ ,

De même que dans (26), on a le logarithme de la fonction de maximum de vraisemblance pour les données complètes  $x(t)$  qui se met sous la forme

$$\begin{aligned} \log(f_x(x, \phi)) &= c - \frac{\lambda}{2} \int_T (x(t) - s(t, \phi))^H \cdot \Lambda^{-1} \cdot (x(t) - s(t, \phi)) dt \\ &= d + \frac{\lambda}{2} \int_T s^H(t, \phi) \cdot \Lambda^{-1} \cdot x(t) dt + \frac{\lambda}{2} \int_T x^H(t) \cdot \Lambda^{-1} \cdot s(t, \phi) dt \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_T s^H(t, \phi) \cdot \Lambda^{-1} \cdot s(t, \phi) dt \end{aligned} \quad (33)$$

avec  $d$  une constante non dépendante de  $\phi$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_K \end{bmatrix}$  une matrice diagonale par bloc, et

$$s(t, \phi) = \begin{bmatrix} s_1(t, \phi) \\ \vdots \\ s_K(t, \phi) \end{bmatrix}.$$

Pour appliquer l'algorithme EM, on calcule l'espérance de (33) conditionnellement à  $y(t)$  et  $\phi'$ .

On obtient

$$\begin{aligned} Q(\phi|\phi') &= E(\log(f_x(x,\phi))|y(t),\phi') \\ &= d + \frac{\lambda}{2} \int_T s^H(t,\phi) \cdot \Lambda^{-1} \cdot \hat{x}(t) dt + \frac{\lambda}{2} \int_T \hat{x}^H(t) \cdot \Lambda^{-1} \cdot s(t,\phi) dt \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_T s^H(t,\phi) \cdot \Lambda^{-1} \cdot s(t,\phi) dt \end{aligned} \quad (34)$$

avec

$$\hat{x}(t) = E(x(t)|y(t),\phi') \quad (35)$$

L'équation (34) se factorise en

$$Q(\phi|\phi') = e^{-\frac{\lambda}{2} \int_T [\hat{x}(t) - s(t,\phi)]^H \cdot \Lambda^{-1} \cdot [\hat{x}(t) - s(t,\phi)] dt} \quad (36)$$

avec  $e$  une constante indépendante de  $\phi$ .

Le fait que  $y(t)$  est le résultat de la transformation linéaire du processus aléatoire gaussien  $x(t)$ , permet de développer (35) sous la forme [24]

$$\hat{x}(t) = s(t,\phi') + \Lambda \cdot H^H [H \cdot \Lambda \cdot H^H]^{-1} \cdot [y(t) - H \cdot s(t,\phi')] \quad (37)$$

Grâce à la forme diagonale en bloc de la matrice  $\Lambda$ , en transformant les multiplications des matrices de (36) en sommes, on obtient,

$$Q(\phi|\phi') = e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^K \int_T [\hat{x}_k(t) - s_k(t,\phi_k)]^H \cdot R_k^{-1} \cdot [\hat{x}_k(t) - s_k(t,\phi_k)] dt} \quad (38)$$

$x_k(t)$  est simplement le  $k^{ième}$  élément de  $x(t)$  décrit par

$$\hat{x}_k(t) = s_k(t,\phi'_k) + \beta_k \cdot \left[ y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t,\phi'_k) \right] \quad (39)$$

Il faut trouver la valeur de  $\hat{\phi}$  qui maximise (38).

L'algorithmme EM est donc décrit par

**Etape E :**

Calculer

$$Q(\phi, \phi^{(p)}) = e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^K \int_T q_k^{(p)}(t) dt} \quad (40)$$

avec

$$q_k^{(p)}(t) = \left[ s_k(t, \phi_k^{(p)}) + \beta_k \cdot \left( y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k^{(p)}) \right) - s_k(t, \phi_k) \right]^H \cdot R_k^{-1} \cdot \left[ s_k(t, \phi_k^{(p)}) + \beta_k \cdot \left( y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k^{(p)}) \right) - s_k(t, \phi_k) \right] \quad (41)$$

**Etape M :**

Determiner

$$\phi^{(p+1)} = \underset{\phi}{\operatorname{arg\,max}} Q(\phi | \phi^{(p)}) \quad (42)$$

On itère (41) et (42) jusqu'à convergence ou quand le nombre maximum d'itérations est atteint.

On a vu dans (17) que  $Q(\phi | \phi')$  est une fonction monotone croissante jusqu'à un point stationnaire. Etant donné que  $e$  est une constante quelconque, maximiser (38) est équivalent à minimiser  $q_k(t)$  individuellement. L'algorithme EM présenté précédemment est alors simplifié.

**Etape E :**

Pour  $k=1, 2, \dots, K$ , calculer

$$x_k^{(p)}(t) = s_k(t, \phi_k^{(p)}) + \beta_k \cdot \left[ y(t) - \sum_{k=1}^K s_k(t, \phi_k^{(p)}) \right] \quad (43)$$

**Etape M :**

Pour  $k=1, 2, \dots, K$ , calculer

$$\phi_k^{(p+1)} = \underset{\phi_k}{\operatorname{arg\,min}} \left( \int_T q_k^{(p)}(t) dt \right) \quad (44)$$

On voit, à partir de (43) et (44), que  $\phi_k$  n'est fonction que de  $x_k(t)$ . Ceci signifie qu'on a découpé l'algorithme en  $K$  sous problèmes. Par rapport à la solution ML optimale (27), on a réduit la complexité de l'estimation de façon conséquente. Cette propriété rend l'algorithme EM très attrayant malgré sa latence due aux itérations nécessaires. Evidemment, dans le cas des systèmes discrets, on remplace l'intégrale par une somme adéquate dans l'équation (44).

### 2.6.1.1 Application directe: Estimation des paramètres multi trajets d'un canal sélectif en fréquence

On considère un signal transmis dans un canal multi - trajets. Chaque symbole transmis aura en quelque sorte multiples images affectées par un gain dans le temps et ces images se superposent avec les images des autres symboles. Le signal reçu est modélisé par

$$y(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \cdot s(t - \tau_k) + n(t) \quad (45)$$

avec  $\alpha_k$  et  $\tau_k$  le gain et le retard respectivement du trajet  $k$ .  $n(t)$  est un bruit spectralement uniforme sur la bande de fréquence du récepteur. On cherche alors à déterminer, à partir des symboles reçus, le gain et le retard de chaque image.

Avec l'approche ML, on a

$$\{\alpha, \tau\} = \underset{\substack{\tau_1, \dots, \tau_K \\ \alpha_1, \dots, \alpha_K}}{\text{arg min}} \left( \int_T \left| y(t) - \sum_{k=1}^K \alpha_k \cdot s_k(t - \tau_k) \right|^2 dt \right) \quad (46)$$

La résolution de ce type de problème peut être optimisée en exprimant  $\alpha_k = f(\tau_k)$  [26], mais elle est prohibitive pour des valeurs de  $K$  très grandes. L'algorithme EM est un candidat potentiel pour réduire la complexité car le modèle (45) est sous la même forme que (25). Les équations (43) et (44) servant de base, on applique l'algorithme EM au modèle (45) en considérant que le temps d'observation est suffisamment long par rapport au temps symbole et est supérieur au délai maximum du retard. L'algorithme EM se déroule ainsi

#### Etape E:

Pour  $k=1, 2, \dots, K$ , on calcule

$$\hat{x}_k^{(p)}(t) = \alpha_n^{(p)} \cdot s(t - \tau_k^{(p)}) + \beta_k \cdot \left[ y(t) - \sum_{l=1}^K \alpha_l^{(p)} \cdot s(t - \tau_l^{(p)}) \right] \quad (47)$$

#### Etape M :

Pour  $k=1, 2, \dots, K$ , on calcule

$$\tau_k^{(p+1)} = \underset{\tau}{\text{argmax}} \left| g_k^{(p)}(\tau) \right| \quad (48)$$

$$\alpha_k^{(p+1)} = \frac{g_k^{(p)}(\tau_k^{(p+1)})}{E_s} \quad (49)$$

avec

$$E_s = \int_T |s(t)|^2 dt \quad (50)$$

l'énergie du signal et

$$g_k^{(p)}(\tau) = \int_T x_k^{(p)}(t) \cdot s^H(t-\tau) dt \quad (51)$$

Il faut noter que les paramètres peuvent se déterminer indépendamment en  $K$  processus parallèles. La complexité est considérablement réduite.

## 2.6.2 Estimation de canal OFDM avec les diversités en espace

Xie *et al.* ont proposé un algorithme destiné au système OFDM avec la diversité en espace [28]. La diversité espace signifie que les symboles transmis ont parcouru des chemins différents en même temps avant d'arriver au récepteur. La différence avec les phénomènes multi trajets est que les symboles sont peut-être codés et ils arrivent sans retard par rapport aux autres symboles. On peut avoir un phénomène multi trajets pour chaque chemin en espace. Cet aspect de diversité est traité dans le Chapitre 3. Pour l'instant, il suffit de savoir que chaque symbole est virtuellement transmis par deux ou plus antennes d'émission avant d'arriver à une ou plusieurs antennes de réception. Chaque paire d'antenne d'émission-réception constitue un chemin différent décorrélés par rapport aux autres paires.

Soit  $N$  le nombre d'antennes d'émission. Chaque antenne transmet des mots OFDM qui peuvent être différents entre les antennes à un instant précis.

On considère seulement une antenne de réception. Pour faire simple, un vecteur de taille  $K$  est précodé par un codeur spatial pour fournir  $N$  vecteurs de taille  $K$ . La modulation OFDM est appliquée à chaque vecteur pour former un mot OFDM sur une antenne distincte. Ces mots OFDM parcourent des chemins différents avant d'arriver à l'antenne de réception.

Le signal reçu sur l'antenne de réception après la démodulation OFDM est écrit sous la forme

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^N \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{H}_j + \mathbf{W} \quad (52)$$

$\mathbf{X}_j$  est une matrice diagonale de taille  $K \times K$  contenant les symboles émis par l'antenne  $j$  et  $\mathbf{W}$  est un vecteur  $K \times 1$  représentant le bruit blanc gaussien indépendant à moyenne zéro sur chaque sous porteuse OFDM.

$$E[\mathbf{W}^H \cdot \mathbf{W}] = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_K \quad (53)$$

$\sigma^2$  est la variance du bruit.

Le vecteur  $K \times 1$ ,  $\mathbf{H}_j$ , modélise la réponse fréquentielle du canal entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception.

La réponse temporelle ce canal est décrite par

$$h_j(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_j(l) \cdot \delta(t - \tau_l) \quad (54)$$

$\alpha_j(l)$  est le gain du canal entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception pour le trajet  $l$  avec le retard  $\tau_l$ . Avec une bonne synchronisation temporelle et fréquentielle, et avec un préfixe cyclique adéquat, la relation entre  $\mathbf{H}_j$  et  $h_j(t)$  est

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}_j \quad (55)$$

avec  $\mathbf{h}_j = [\alpha_j(0) \dots \alpha_j(L-1)]^T$  et  $\mathbf{Q}$  la matrice DFT décrite par  $Q(m,n) = \frac{1}{\sqrt{K}} e^{-i \frac{2\pi mn}{K}}$ ,  $0 \leq m \leq K-1, 0 \leq n \leq L$ .

### 2.6.2.1 La méthode des moindres carrées

Les signaux reçus au récepteur sur chaque sous porteuse OFDM ont subi plusieurs distorsions dans le canal. L'estimation de canal est très difficile à réaliser.

On considère que la réponse impulsionnelle du canal à un instant précis est inconnue mais peut être modélisée, dans le temps, de façon déterministe en minimisant la fonction du coût [29]

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\mathbf{h}} \{C(\mathbf{h})\} = \|\mathbf{r} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}\|^2 \quad (56)$$

avec

$$\mathbf{G} \triangleq [\mathbf{X}_1 \mathbf{Q} \quad \mathbf{X}_2 \mathbf{Q} \quad \dots \quad \mathbf{X}_N \mathbf{Q}]_{K \times NL_h} \quad (57)$$

$$\mathbf{h} \triangleq [\mathbf{h}_1^H \quad \mathbf{h}_2^H \quad \dots \quad \mathbf{h}_N^H] \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{\mathbf{h}}_1^H \quad \hat{\mathbf{h}}_2^H \quad \dots \quad \hat{\mathbf{h}}_N^H] \quad (59)$$

La solution des moindres carrés de (56) pour le modèle de canal de (55) est aussi l'estimation de maximum de vraisemblance (ML) du canal si les symboles sont connus. Si  $\mathbf{G}_n$  est de rang complet selon les colonnes alors la solution ML,  $\hat{\mathbf{h}}^{(ML)}$ , est unique et est déterminée par

$$\hat{\mathbf{h}}^{(ML)} = (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{r} = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{P} \quad (60)$$

avec

$$\Theta \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L_h} & \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_1^H \mathbf{X}_2 \mathbf{Q} \cdots \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_1^H \mathbf{X}_N \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_2^H \mathbf{X}_1 \mathbf{Q} & \mathbf{I}_{L_h} & \cdots & \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_2^H \mathbf{X}_N \mathbf{Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_N^H \mathbf{X}_1 \mathbf{Q} & \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_N^H \mathbf{X}_2 \mathbf{Q} \cdots & & \mathbf{I}_{L_h} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{P} \triangleq \left[ \mathbf{r}^H \mathbf{X}_1 \mathbf{Q} \ \mathbf{r}^H \mathbf{X}_2 \mathbf{Q} \cdots \mathbf{r}^H \mathbf{X}_N \mathbf{Q} \right]^H \quad (62)$$

La condition nécessaire pour que les canaux soient identifiables est

$$NL_h \leq K \quad (63)$$

Ceci signifie que le nombre d'antennes d'émission multiplié par le nombre de trajets dans le canal doit être inférieur au nombre de sous porteuses.

Le problème avec la résolution de (60) est l'inversion de la matrice  $\Theta$  de taille  $NL_h \times NL_h$  qui demande beaucoup de calculs pour les grandes valeurs de  $L_h$  et  $N$ . L'algorithme EM peut simplifier cette estimation.

### 2.6.2.2 La méthode EM

Le problème actuel peut être considéré comme un problème de superposition des signaux présenté dans [24]. On procède de la même façon que 2.6.1.

On classe  $\mathbf{r}$  comme les données incomplètes et on définit pour chaque  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathbf{Y}_j$  les données complètes provenant d'une antenne d'émission par

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{W}_j \quad (64)$$

tels que  $\sum_{j=1}^N \mathbf{Y}_j = \mathbf{r}$  et  $\sum_{j=1}^N \mathbf{W}_j = \mathbf{W}$

L'algorithme EM s'applique en deux étapes

**Etape E** : Pour  $j=1, 2, \dots, N$ , on calcule

$$\hat{\mathbf{Z}}_j^{(p)} = \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{h}}_j^{(p)} \quad (65)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_j^{(p)} = \hat{\mathbf{Z}}_j^{(p)} + \beta_j \cdot \left( \mathbf{r} - \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{Z}}_n^{(p)} \right) \quad (66)$$

Les valeurs de  $\beta_j$  sont choisies telles que  $\sum_{j=1}^N \beta_j = 1$ .

**Etape M** : Pour  $i=1,2,\dots,N$ , on calcule

$$\hat{\mathbf{h}}_j^{(p+1)} = \underset{\mathbf{h}_j}{\operatorname{argmin}} \left( \left\| \hat{\mathbf{Y}}_j^{(p)} - \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}_j \right\|^2 \right) \quad (67)$$

La solution de (67) nous donne l'estimation de la réponse fréquentielle du canal pour l'itération  $p$  exprimé par

$$\hat{\mathbf{h}}_j^{(p+1)} = \mathbf{Q}^H \cdot (\mathbf{X}_j)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_j^{(p)} \quad (68)$$

Il est clair que, afin de pouvoir appliquer cet algorithme,  $\mathbf{X}_j$  doit être connu. Ceci est possible via les symboles pilotes ou via les décisions des symboles par un module extérieur.

En résumé, **l'étape E de cet algorithme estime les composants du signal reçu pour chaque liaison et l'étape M divise, dans le domaine fréquentiel, ces composants par les symboles de références, qu'ils soient des symboles pilotes ou des symboles décodés précédemment.** Il applique ensuite la transformée de Fourier inverse pour obtenir une mise à jour des estimations de la réponse impulsionnelle de canal.

On peut simplifier d'avantage l'estimation de canal et améliorer la vitesse de convergence de l'estimation itérative en utilisant l'algorithme EM modifié présenté ci-après

## 2.7 L'algorithme SAGE

Il est indéniable que l'algorithme EM facilite la maximisation des fonctions de vraisemblance dans les problèmes d'estimations statistiques. Chaque itération de l'algorithme maximise le logarithme de vraisemblance conditionnelle d'un seul espace de données complètes et ne cherche pas à maximiser les fonctions de vraisemblance des données mesurées ou incomplètes difficiles à manipuler. L'algorithme EM maximise tous les paramètres simultanément. Ceci rend l'algorithme moins efficace dû à sa lente convergence. L'algorithme EM a aussi des difficultés pendant l'étape de maximisation quand les fonctions de pénalité sont utilisées.

L'algorithme SAGE (Space Alternating Generalized Expectation-Maximization) est un algorithme dérivé de l'algorithme EM proposé par Fessler et Hero dans [27]. Le but de cet algorithme est de réduire le temps de convergence en minimisant l'information de Fisher des paramètres à estimer. La réduction de l'information de Fisher est obtenue en divisant l'espace des données complètes en plusieurs sous espaces *cachés* moins informatifs et de les estimer de façon séquentielle. Chacun de ces sous espaces est en réalité un espace de données complètes dans le sens de l'algorithme EM lorsque les paramètres des autres sous espaces sont connus. On simplifie aussi l'étape de maximisation de chaque espace.

Il existe bien sur beaucoup de méthodes qui sont proposées pour accélérer l'algorithme EM [22], la plupart sont basées sur des méthodes numériques qui ne garantissent pas la monotonie. En revanche, l'algorithme SAGE est un algorithme statistique et il conserve la monotonie.

### 2.7.1 Le problème

On note  $Y$  l'observation avec sa fonction de densité de probabilité  $f(y, \theta_{true})$  et  $\theta_{true}$  est un vecteur de paramètres dans le sous-ensemble  $\Theta$  de l'ensemble  $p$ -dimensions  $\mathbb{R}^p$ . Pour une réalisation  $Y = y$ , on veut calculer le maximum de l'estimation de vraisemblance pénalisée  $\hat{\theta}$  de  $\theta_{true}$  définie par

$$\hat{\theta} \triangleq \arg \max_{\theta \in \Theta} \Phi(\theta) \quad (69)$$

avec

$$\Phi(\theta) \triangleq \log(f(y; \Theta)) - P(\theta) \quad (70)$$

La maximisation directe de (69) est très difficile à faire due à la complexité de  $f$ , au couplage de  $P$  ou ces deux facteurs en même temps. La méthode itérative doit être utilisée, et on est souvent amené à considérer les sous ensembles des éléments des paramètres du vecteur  $\theta$ .

### 2.7.1.1 Définition 1

On définit l'ensemble  $S$  comme un ensemble des indexes si

- il n'est pas un ensemble vide
- il est un sous ensemble de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$
- ses membres sont uniques

L'ensemble  $\tilde{S}$  est le complément de l'intersection entre  $S$  et  $\{1, \dots, p\}$ .

On note  $m$  la cardinalité de l'ensemble  $S$ . On note aussi  $\theta_S$  un vecteur  $m$ -dimension qui contient les  $m$  éléments de  $\theta$  indexés par  $S$ .  $\theta_{\tilde{S}}$  est un vecteur  $(p-m)$ -dimension défini de façon similaire.

Pour nous rappeler qu'une fonction ou une matrice dépend du choix de  $S$ , on la notera avec un exposant  $S$  comme par exemple  $\Phi^S$ . On notera aussi  $\Phi(\theta_S; \theta_{\tilde{S}}) = \Theta(\theta)$  pour simplifier l'écriture.

On introduit la notion d'espace des données *cachées* pour  $\theta_S$  selon la structure statistique de la vraisemblance. On remplace la maximisation de  $\Phi(\theta_S; \theta_{\tilde{S}}^i)$  sur  $\theta_S$  par une autre fonction  $\phi^S(\theta_S; \theta^i)$ . Avec un choix astucieux des espaces *cachés*, on peut maximiser la fonction  $\phi^S(\cdot; \theta^i)$  de façon analytique. Au cas où la maximisation analytique est difficile ou impossible, il est souvent plus facile d'évaluer  $\phi^S(\cdot; \theta^i) - \phi^S(\theta_S^i; \theta^i)$  que  $\Phi(\cdot; \theta_{\tilde{S}}^i) - \Phi(\theta_S^i; \theta_{\tilde{S}}^i)$  quand les espaces *cachés* sont correctement choisis. Les fonctions  $\phi^S$  sont construites de telle façon que l'augmentation de  $\phi^S$  crée une augmentation de  $\Phi$ , comme c'est le cas avec l'algorithme EM.

## 2.7.2 L'espace des données cachées

Pour générer la fonction  $\phi^S$  pour chaque indice  $S$ , les espaces de données cachées admissibles doivent être identifiés dans le sens suivant

### 2.7.2.1 Définition 2

Un vecteur aléatoire  $X^S$  avec la fonction de la densité de probabilité  $f(x; \theta)$  est un espace des données cachées admissible par rapport à  $\theta_S$  pour  $f(y; \theta)$  si la densité conjointe de  $X^S$  et  $Y$  satisfait

$$f(y, x; \theta) = f(y|x, \theta_S) f(x; \theta) \quad (71)$$

C'est-à-dire, la distribution conditionnelle  $f(y|x;\theta_{\tilde{S}})$  doit être indépendante de  $\theta_S$ . En d'autres termes,  $X^S$  doit être un ensemble de données complètes dans le sens de l'algorithme EM pour  $\theta_S$  si  $\theta_{\tilde{S}}$  est connu.

### 2.7.3 L'algorithme

Le cœur de l'algorithme SAGE est constitué par l'expression de l'espérance conditionnelle du logarithme de vraisemblance de  $X^S$

$$\begin{aligned} Q^S(\theta_S; \bar{\theta}) &= Q^S(\theta_S; \bar{\theta}_S, \bar{\theta}_{\tilde{S}}) \\ &\triangleq E\left\{\log\left(f\left(X^S; \theta_S, \bar{\theta}_{\tilde{S}}\right)\right) \middle| Y=y; \bar{\theta}\right\} \\ &= \int f(x|Y=y; \bar{\theta}) \log\left(f\left(x; \theta_S, \bar{\theta}_{\tilde{S}}\right)\right) dx \end{aligned} \quad (72)$$

On combine cette espérance avec une fonction de pénalité

$$\phi^S(\theta_S; \bar{\theta}) \triangleq Q^S(\theta_S; \bar{\theta}) - P(\theta_S, \bar{\theta}_{\tilde{S}}) \quad (73)$$

On note  $\theta^S \in \Theta$  l'estimation initiale du paramètre. L'algorithme générique de SAGE produit une séquence d'estimation  $\{\theta^i\}_{i=0}^{\infty}$  de façon récursive par

Pour  $i=0,1,\dots$  {

1) choisir un index  $S=S^i$

2) choisir un espace des données cachées admissible  $X^{S^i}$  pour  $\theta_{S^i}$

3) Etape E : Calculer  $\phi^{S^i}(\theta_{S^i}; \theta^i)$  via (73)

4) Etape M :

$$\theta_{S^i}^{i+1} = \arg \max_{\theta_{S^i}} \left\{ \phi^{S^i}(\theta_{S^i}; \theta^i) \right\} \quad (74)$$

$$\theta_{\tilde{S}^i}^{i+1} = \theta_{\tilde{S}^i}^i \quad (75)$$

5) Optionnelle : répéter 3 et 4

}

La maximisation de (74) est faite dans l'ensemble

$$\Theta^S(\theta^i) = \left\{ \theta_{S^i} : (\theta_{S^i}, \theta_{\tilde{S}^i}^i) \in \Theta \right\} \quad (76)$$

## 2.8 Exemples de l'algorithmme SAGE

### 2.8.1 Mesure gaussienne linéaire

On revoit le problème de l'estimation des signaux superposés dans un bruit gaussien [24]

Le signal reçu s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} Y &= a_1\theta_1 + \dots + a_p\theta_p + \varepsilon \\ &= \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \end{aligned} \quad (77)$$

avec  $\mathbf{A} = [a_1 \dots a_p]$  et  $\varepsilon$  le bruit gaussien à moyenne nulle avec la matrice de covariance  $\Pi$  ;

$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Pi)$ . On considère une pénalité quadratique  $P(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\theta}$  et sa fonction objective de vraisemblance pénalisée est

$$-\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} (y - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta})^T \Pi^{-1} (y - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\theta} \quad (78)$$

On assume que  $\mathbf{A}$  est de rang de colonne complet,  $\mathbf{P}$  est une matrice symétrique non négative définie, et l'intersection entre les espaces nuls de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$  est vide. Dans ce cas, la fonction de vraisemblance pénalisée unique est [27]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}^T \Pi^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{A}^T \Pi^{-1} y \quad (79)$$

Si  $\mathbf{A}$  est large, ou si les contraintes sur la positivité de  $\boldsymbol{\theta}$  sont appropriées, il est difficile de résoudre (79) directement, et une méthode itérative peut s'avérer utile.

Comme la moyenne de  $Y$  est linéaire en fonction de  $\boldsymbol{\theta}$ , les espaces des données complètes, en terme de l'algorithmme EM sont aussi linéaires en fonction de  $\boldsymbol{\theta}$ . On se restreint aux espaces des données cachées  $X^S$  dont la moyenne est linéairement fonction de  $\boldsymbol{\theta}$ . La moyenne conditionnelle de  $Y$  conditionnelle sur  $X^S$  est donc linéaire en fonction de  $X^S$  et  $\boldsymbol{\theta}_{\tilde{S}}$ . Si on considère l'index  $S$  en générale, l'espace des données *cachées* naturel pour  $\boldsymbol{\theta}_S$  est

$$X^S \sim \mathcal{N}(\mathbf{B}\boldsymbol{\theta}_S + \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\theta}_{\tilde{S}}, \mathbf{C}) \quad (80)$$

$$Y | X^S = x \sim \mathcal{N}(\mathbf{G}x + \tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{\theta}_{\tilde{S}}, \mathbf{W}) \quad (81)$$

à condition que les deux distributions normales sont indépendantes et en accord avec (77), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S &= \mathbf{G}\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{\tilde{S}} &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{G}} \\ \Pi &= \mathbf{W} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (82)$$

La fonction de vraisemblance logarithmique pour  $X^S$  s'écrit

$$\begin{aligned} \log\left(f\left(X^S, \theta_S, \theta_{\tilde{S}}^i\right)\right) &= c_1 - \frac{1}{2}\left(X^S - \mathbf{B}\theta_S - \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right)^T \mathbf{C}^{-1}\left(X^S - \mathbf{B}\theta_S - \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right) \\ &= c_2 + \left(\mathbf{B}\theta_S + \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right)^T \mathbf{C}^{-1}\left(X^S - \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}\theta_S + \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right)\right) \end{aligned} \quad (83)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  indépendantes de  $\theta_S$ . Par les propriétés connues de la distribution conjointe normale,

$$\begin{aligned} \bar{X}^S &= E\left\{X^S \mid Y=y; \theta^i\right\} \\ &= \mathbf{B}\theta_S^i + \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i + \mathbf{C}\mathbf{G}^T \Pi^{-1}\left(y - \mathbf{A}\theta^i\right) \end{aligned} \quad (84)$$

La fonction  $\phi^S$  (73) est

$$\phi^S\left(\theta_S; \theta^i\right) = \left(\mathbf{B}\theta_S + \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right)^T \mathbf{C}^{-1}\left(\bar{X}^S + \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}\theta_S + \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right)\right) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \theta_S \\ \theta_{\tilde{S}}^i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2^T & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_S \\ \theta_{\tilde{S}}^i \end{bmatrix} + c_2 \quad (85)$$

Quand l'équation (85) est maximisée sur  $\theta_S$ , on obtient l'expression générique de l'étape **E** et l'étape **M** combinées

$$\begin{aligned} \theta_S^{i+1} &= \left(\mathbf{F}_{X^S} + \mathbf{P}_1\right)^{-1}\left[\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}\left(\bar{X}^S - \tilde{\mathbf{B}}\theta_{\tilde{S}}^i\right) - \mathbf{P}_2 \theta_{\tilde{S}}^i\right] \\ &= \theta_S^i + \left(\mathbf{F}_{X^S} + \mathbf{P}_1\right)^{-1} \mathbf{A}_S^T \Pi^{-1}\left[y - \mathbf{A}\theta^i\right] - \left(\mathbf{F}_{X^S} + \mathbf{P}_1\right)^{-1} \left[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2\right] \theta^i \end{aligned} \quad (86)$$

avec  $\mathbf{F}_{X^S} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}$  l'information de Fisher de  $X^S$  pour  $\theta_S$ .

La forme additive de (77) nous incite à utiliser l'algorithme SAGE pour estimer les paramètres  $\theta_k$  individuellement, c'est-à-dire  $S^i = \{k\}$  avec  $k = 1 + (i \text{ modulo } p)$ . On veut que l'information de Fisher des données cachées pour  $q_k$  soit petite pour améliorer la vitesse de convergence. On associe donc la covariance de tous les bruits avec le vecteur de signal  $a_k$ .

$$\begin{aligned} X^{S^k} &\sim \mathcal{N}\left(a_k \theta_k, \Pi\right) \\ Y &= X^{S^k} + \sum_{j \neq k} a_j \theta_j \end{aligned} \quad (87)$$

Dans ce cas, l'information de Fisher,  $\mathbf{F}_{X^{S^k}} = a_k^T \Pi^{-1} a_k$ , est  $p$  fois moins informative que dans le cas de l'algorithme EM classique qui associe seulement  $1/p$  de la covariance du bruit pour chaque signal.

Avec les choix précédents des espaces des données cachées, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= a_k \\
 \mathbf{C} &= \Pi \\
 \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{W} = 0 \\
 \mathbf{G} &= \mathbf{I} \\
 \tilde{\mathbf{G}} &= [a_1 \dots a_{k-1} \ a_{k+1} \dots a_p]
 \end{aligned} \tag{88}$$

D'où l'algorithme suivant

Etape d'initialisation

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^0 \tag{89}$$

pour  $i=0,1,\dots$  {

$$k = 1 + (i \text{ modulo } p), \ S = \{k\}$$

$$\boldsymbol{\theta}_k^{i+1} = \boldsymbol{\theta}_k^i - \left( a_k^T \Pi^{-1} a_k + P_{kk} \right)^{-1} \mathbf{P}_k \boldsymbol{\theta}^i + \left( a_k^T \Pi^{-1} a_k \right)^{-1} a_k^T \Pi \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{90}$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left( \boldsymbol{\theta}_k^{i+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \right) a_k$$

$$\boldsymbol{\theta}_k^{i+1} = \boldsymbol{\theta}_j^i, \ j=1,\dots,k-1,k+1,\dots,p$$

}

$P_{kk}$  et  $\mathbf{P}_k$  sont le  $k^{\text{ième}}$  élément diagonal et la  $k^{\text{ième}}$  ligne respectivement de la matrice  $\mathbf{P}$ . On observe en effet une mise à jour séquentielle des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_k$ . Il a été montré dans [27] que la vitesse de convergence de cet algorithme est plus rapide que l'algorithme EM d'origine. Les lecteurs intéressés par plus de détails sur cet algorithme sont invités à lire l'article de Fessler et Hero [27].

## 2.8.2 L'estimation d'un canal OFDM avec les diversités en espace

On reprend le problème exposé précédemment dans 2.6.2. Dans le même article [28], Xie *et al.* ont aussi proposé l'application de l'algorithme SAGE pour estimer un canal OFDM avec diversité d'espace.

Pour réduire l'information de Fisher de  $\mathbf{Y}_j$  pour  $\mathbf{h}_j$ , on choisit l'espace des données cachées comme  $\mathbf{Y}_j$  parmi  $j=1,2,\dots,N$  sélectionné alternativement à chaque itération.

L'algorithme SAGE se déroule ainsi

### L'initialisation

Pour  $1 \leq j \leq N$

$$\hat{\mathbf{Z}}_j^{(0)} = \mathbf{X}_j \mathbf{Q} \hat{\mathbf{h}}_j^{(0)} \tag{91}$$

A la  $k^{\text{ième}}$  itération ( $k=0,1,2\dots$ )

Pour  $j=1+[k \text{ modulo } N]$ , on calcule

$$\hat{\mathbf{Y}}_j^{(k)} = \hat{\mathbf{Z}}_j^{(k)} + \left[ \mathbf{r} - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{Z}}_i^{(k)} \right] \quad (92)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_j^{(k+1)} = \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_j^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_j^{(k)} \quad (93)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_j^{(k+1)} = \mathbf{X}_j \mathbf{Q} \hat{\mathbf{h}}_j^{(k+1)} \quad (94)$$

Pour  $1 \leq n \leq N, n \neq i$

$$\hat{\mathbf{Z}}_n^{(k+1)} = \hat{\mathbf{Z}}_n^{(k)} \quad (95)$$

Le problème ici est l'initialisation de l'algorithme. La vitesse de convergence de l'algorithme dépend de la qualité de ces initialisations. On peut supposer que les signaux transmis par les antennes d'émission, autres que la  $j^{\text{ième}}$  antenne, sont égaux à zéro même si ce n'est pas le cas dans la réalité.

L'estimation initiale du canal pour l'algorithme de type EM est

$$\hat{\mathbf{h}}_j^{(0)} = \mathbf{Q}^H \mathbf{X}_j^{-1} \mathbf{r} \quad (96)$$

pour  $j=1,2,\dots,N$ .

Il faut se rappeler que ces estimations dans le domaine temporel se font à un instant précis. Il faut développer une architecture complète de l'estimation de canal suivant la sélectivité temporelle du canal.

On peut souvent utiliser, à l'exception de la première estimation, l'état du canal précédent comme la valeur initiale d'une nouvelle estimation. Ceci réduit considérablement le temps nécessaire pour converger. Dans cette configuration, on peut considérer qu'avec ce mode *decision directed*, l'algorithme est un algorithme de suivi de canal adaptatif.

### 2.8.2.1 Performances

Les résultats de simulations ici sont extraits de [28] pour comparer la vitesse de convergence. La bande passante du canal considéré est de 800kHz divisée en 128 sous porteuses. La durée du symbole est de 160µs. 40µs supplémentaire est allouée comme intervalle de garde pour limiter les interférences entre symboles. La fréquence Doppler est fixée à 40Hz. Deux antennes d'émission et une antenne de réception sont déployées. On utilise un code Space Time Code (STC) à 16 états ([30], Fig. 5) une modulation QPSK avec une efficacité spectrale de 2bits/sec/Hz. Les simulations ont été effectuées pour deux profils de canaux différents,

présentés dans les Figure 12 et Figure 13. On suppose que le récepteur connaît le délai maximum de 20µs de ces canaux.

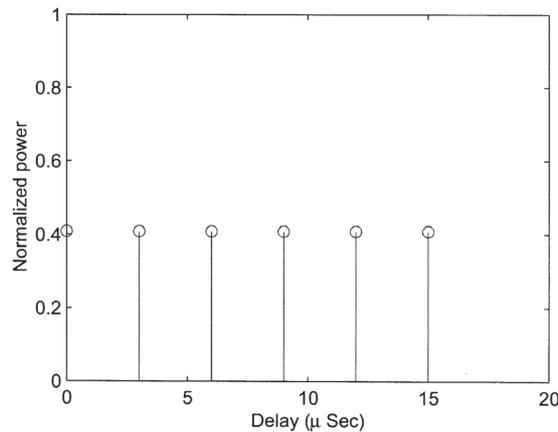


FIGURE 12 : LE PROFIL DE CANAL A PUISSANCE ET DELAI UNIFORME

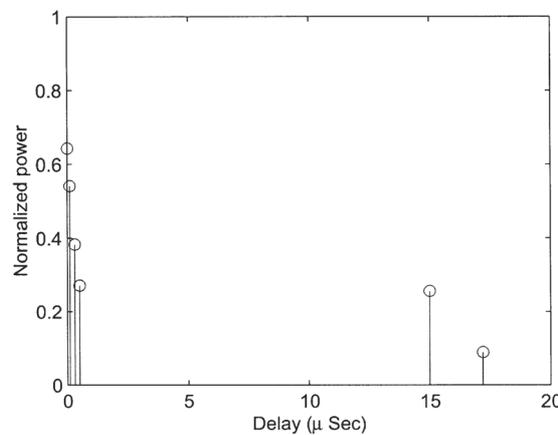


FIGURE 13: LE PROFIL DE CANAL TYPIQUE POUR UN ENVIRONNEMENT MONTAGNEUX

La Figure 14 montre la performance en terme d'erreur quadratique moyenne des algorithmes de type EM en fonction du nombre d'itérations. Elle compare aussi leurs performances avec l'estimateur ML proposé par Li[29], dénommé également estimateur ML STC, et comportant 9 coefficients. Les résultats sont évalués à partir de 5000 mots OFDM simulés transmis sur chaque antenne d'émission dans les canaux présentés Figure 13. L'estimation initiale du canal  $\hat{\mathbf{h}}_j^{(0)}$  est faite suivant (96). Les valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans (66) sont fixées à 0.5. Le SNR est défini par  $E_b/N_0$  avec  $E_b$  l'énergie par bit d'information. On peut voir que l'algorithmes EM converge vers l'estimation ML au bout de environ 10 à 20 itérations quand le SNR moyen est inférieur ou égal à 25dB alors que 4 à 6 itérations ont suffi pour l'algorithmes SAGE.

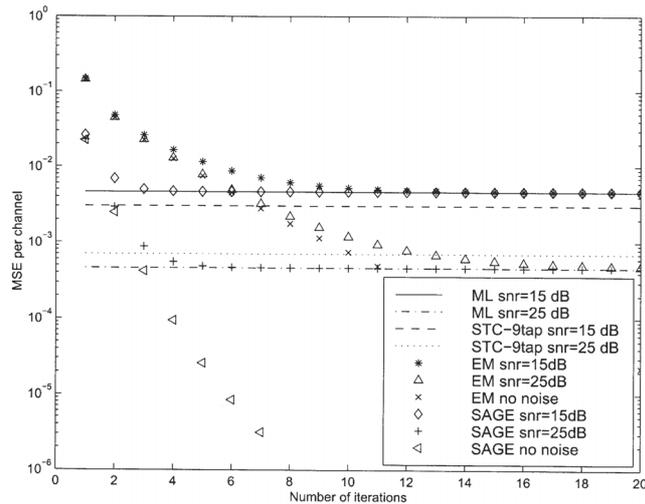


FIGURE 14 : LA VITESSE DE CONVERGENCE DES DIFFERENTS ESTIMATEURS QUAND L'ESTIMATION INITIALE DE CANAL EST SELON (96) SUR UN CANAL MONTAGNEUX

Il est intéressant de noter qu'à 25dB, l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur ML de Li à 9 coefficients est plus grande que celle de l'estimateur ML alors qu'à 15dB, c'est l'inverse. Dans un modèle discret de canal montagneux et avec l'estimateur STC, on ne prend en compte que les trajets ayant une puissance moyenne significative et on ignore les autres "trajets" de faible puissance. Pour les faibles valeurs de SNR, les algorithmes ML et EM semblent induire plus d'erreurs en essayant d'estimer quand même ces trajets de faible puissance alors qu'avec l'estimateur ML de Li, ces trajets sont considérés comme ayant une puissance nulle.

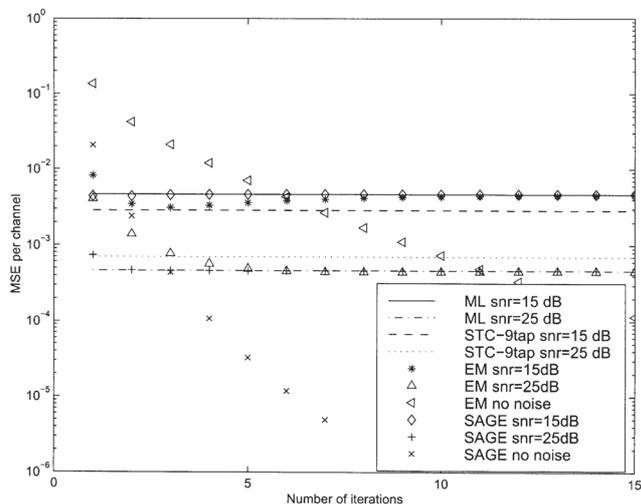
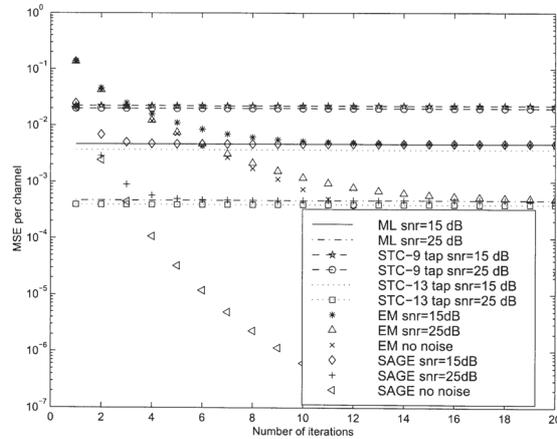


FIGURE 15 : LA VITESSE DE CONVERGENCE DES DIFFERENTS ESTIMATEURS QUAND L'ESTIMATION INITIALE DE CANAL EST *DECISION DIRECTED* SUR UN CANAL MONTAGNEUX

La Figure 15 montre les mêmes performances que précédemment mais avec cette fois-ci, la valeur initiale de  $\hat{\mathbf{h}}_j^{(0)}$  est choisie à partir de l'estimation du bloc OFDM précédente. Avec une meilleure estimation, on voit que l'algorithme EM converge en 2 à 10 itérations et que

l'algorithme SAGE converge après 1 à 3 itérations. Il faut noter que l'estimation EM atteint un niveau d'erreur moyenne quadratique plus bas que celui de l'algorithme ML avant de remonter et de converger au même niveau que l'estimation ML. Il faut se rappeler que les estimations ML basées sur un mot OFDM ne minimisent pas nécessairement l'erreur quadratique moyenne.



**FIGURE 16 : LA VITESSE DE CONVERGENCE DES DIFFERENTS ESTIMATEURS QUAND L'ESTIMATION INITIALE DE CANAL EST SELON (96) SUR UN CANAL UNIFORME**

La Figure 16 montre les performances lorsqu'on considère le canal uniforme présenté dans la Figure 12. L'estimation initiale de  $\hat{\mathbf{h}}_j^{(0)}$  est faite suivant (96). On remarque que la vitesse de convergence des algorithmes de type EM est identique à celle du canal montagneux. Cette fois ci, l'estimateur ML STC de Li est moins bon que l'estimateur ML dans les deux cas de profil de puissance. L'augmentation du délai de décision du décodeur ML de Li à 13 induit une complexité triple comparée à l'estimateur à 9 coefficients. On voit dans ces conditions que les performances s'améliorent et l'estimateur de Li devient meilleur même à 25 dB. Ceci suggère que toutes les puissances des trajets du canal sont incluses dans l'estimateur proposé par Li.

Les performances, en terme de taux d'erreur binaire (BER) et taux d'erreur des mots (WER), de l'estimateur SAGE et l'estimateur ML STC sont présentées dans les Figure 17 à Figure 20. On considère une trame de 25 mots OFDM dont le premier contient les symboles pilotes pour obtenir une estimation initiale du canal. Les valeurs initiales des canaux pour les mots successifs sont fixées lors de l'estimation précédente. Pour la première estimation, l'algorithme SAGE utilise la relation (96) et estime le canal en 10 itérations. Ensuite l'algorithme SAGE n'effectue que 3 itérations par estimation de canal.

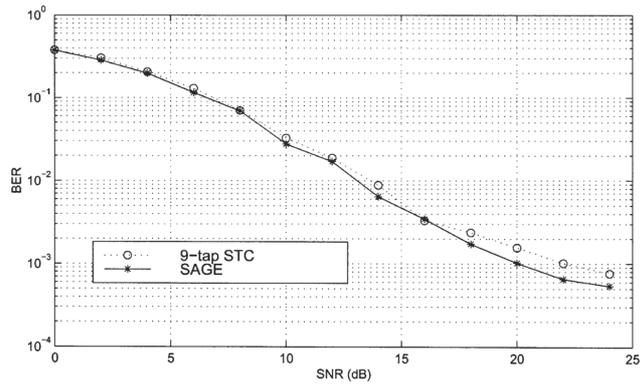


FIGURE 17 : LE BER DES DIFFERENTS ESTIMATEURS EN FONCTION DE SNR SUR UN CANAL MONTAGNEUX

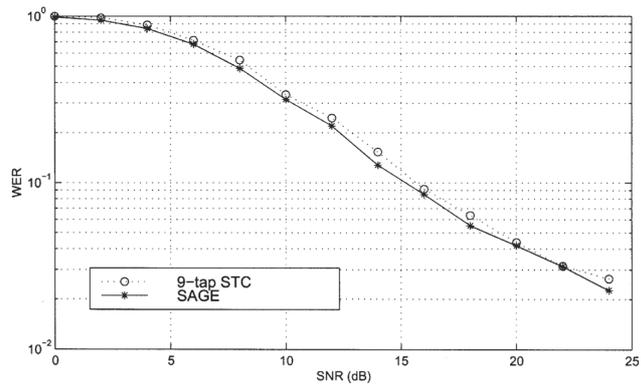


FIGURE 18 : LE WER DES DIFFERENTS ESTIMATEURS EN FONCTION DE SNR SUR UN CANAL MONTAGNEUX

Le canal montagneux est utilisé pour effectuer la simulation présentée dans les figures 17 et 18. On peut voir que les performances de l'algorithme SAGE sont aussi bonnes que celles de l'algorithme ML STC. Les performances de l'algorithme SAGE dépassent celles de l'estimation STC pour des grandes valeurs de SNR pour les raisons exposées précédemment.

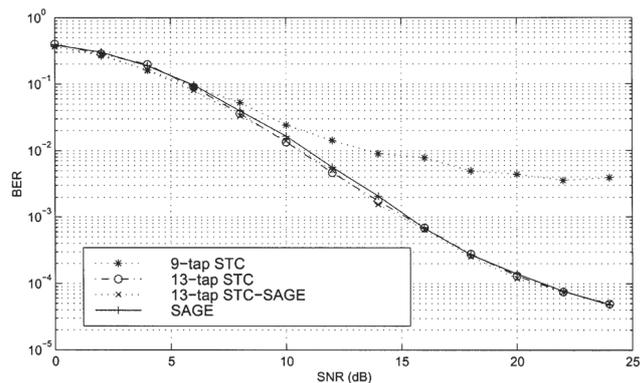


FIGURE 19 : LE BER DES DIFFERENTS ESTIMATEURS EN FONCTION DE SNR SUR UN CANAL MONTAGNEUX

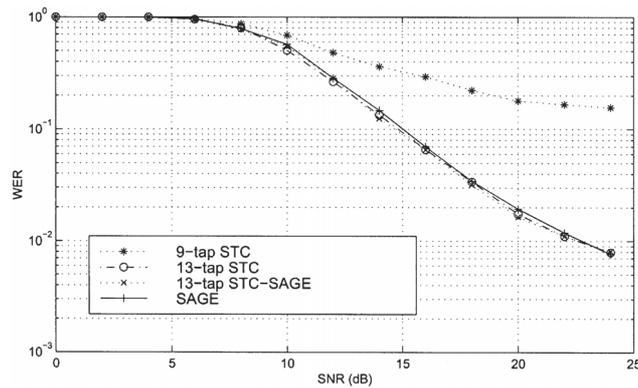


FIGURE 20 : LE WER DES DIFFERENTS ESTIMATEURS EN FONCTION DE SNR SUR UN CANAL UNIFORME

Les performances du même système avec un canal uniforme sont présentées dans les figures 19 et 20. On observe, comme attendu, que l'estimateur STC à 9 coefficients est très mauvais due à une estimation de canal imprécise. L'estimateur STC à 13 coefficients obtient les mêmes performances que l'estimateur SAGE.

On déduit alors que l'algorithme SAGE est indépendant du profil de canal car il utilise le profil de puissance complet du canal à estimer.

## 2.9 Conclusion

On a vu, dans ce chapitre, un algorithme d'estimation itératif permettant de réduire la complexité de l'estimation à maximum de vraisemblance de façon considérable. Les exemples présentés ici montrent que cet algorithme est très bien adapté au contexte des systèmes de communications numériques. Les performances sont proches des autres algorithmes connus avec une complexité moindre. On a aussi étudié une variante de cet algorithme appelé l'algorithme SAGE qui permet d'obtenir une convergence plus rapide et qui est plus simple à élaborer comparé à l'algorithme d'origine. Il est clair que ces algorithmes sont en train de devenir indispensables pour les systèmes de communications numériques de plus en plus sophistiqués.

## Chapitre 3 Codage temps espace et fréquence espace en bloc

..... / ..... / ..... /  
 . - / ..... / ..... / ..... /  
 ..... / ..... / .....

### 3.1 Introduction

Le développement des applications multimédia sans fil impose la recherche de systèmes toujours plus performants en termes de capacité et d'efficacité spectrale. Cependant, la nécessité de maintenir des coûts de développement raisonnables est une autre contrainte fondamentale qui limite la complexité des systèmes développés. En effet, le meilleur système ne sera pas forcément le plus performant mais celui qui présente le meilleur compromis coût - efficacité.

Un facteur très important dans les systèmes de communications temps réels comme la conversation téléphonique ou la vidéoconférence est le temps de traitement maximum permis pour ne pas gêner le flux de conversation normal des utilisateurs. Un système extrêmement performant nécessitant un temps de traitement très long avec les composants électroniques disponibles aujourd'hui ou dans le future proche n'est pas une solution idéale.

Les facteurs d'encombrement, d'autonomie et de style sont aussi des facteurs limitants. Les utilisateurs veulent de plus en plus des dispositifs mobiles avec le moins d'encombrement possible (dimension ou poids). Ils exigent un dispositif à grande autonomie. Ils veulent aussi des dispositifs ayant un certain aspect esthétique *de mode*. Ces exigences ne sont pas toujours compatibles avec la performance qu'ils souhaitent obtenir. En effet, multiplier les antennes visibles sur un portable n'est pas nécessairement très esthétique.

Les solutions peu chères sont souvent des systèmes à complexité réduite. Il faut donc trouver un système qui est à la fois performant, simple, rapide en traitement, avec un coût d'implantation peu cher, le moins encombrant possible et avec une autonomie importante.

Les recherches sur les diversités espace temps et espace fréquence ont montré qu'on peut obtenir des meilleures performances tout en gardant un système très simple. L'intérêt de ces systèmes est qu'on peut relativement déplacer la complexité nécessaire à l'une ou l'autre extrémité de la chaîne de communication pour obtenir une performance souhaitée. Dans le contexte de

communication radio mobile, on fixe la complexité des dispositifs mobiles et on augmente quasiment à l'infini la complexité des stations de base peu nombreuses. Ces techniques de diversité permettent aussi d'apporter des modifications sur ces stations de base pour améliorer la performance nécessaire sans avoir besoin de changer les terminaux mobiles. L'évolutivité est devenue plus facile.

Dans ce chapitre, on aborde en première partie, la diversité en espace temps et puis en deuxième partie la diversité en espace fréquence. La dernière partie sera consacrée à la diversité espace temps fréquence.

Les relations mathématiques pour ces trois types de diversité sont écrites sous la forme matricielle afin d'ouvrir une voie d'approfondissement pour mon équipe de recherches afin de déterminer, si possible, les bornes analytiques du TEB des ces différents méthodes de diversité comme cela a été fait dans [31] pour le STBC sur canal à fading de Rayleigh.

### 3.2 La diversité espace – temps

Il existe depuis longtemps des techniques pour obtenir de la diversité pour les signaux en réception. La diversité en espace était obtenue en multipliant le nombre d'antennes de réception sans utiliser un codage temps-espace. Le récepteur aura recours ensuite aux techniques de recombinaison (*Maximum Receiver Ratio Combining*, MRRC).

Il existe deux types de diversités espace – temps créés à l'émetteur : Le Space Time Trellis Codes (STTC) proposé par Tarokh *et al.* [30][32] et le Space Time Block Codes (STBC) proposé par Alamouti [33] généralisé ensuite par Tarokh *et al.* dans [34]. Les deux techniques de diversités espace – temps utilisent plusieurs antennes d'émission et plusieurs antennes de réception pour envoyer et recevoir les informations en même temps. La transmission est faite suivant une règle bien précise et l'algorithme de décodage est développé en conséquence. Les différences entre ces deux méthodes résident dans la façon dont les informations sont conditionnées avant la transmission et l'algorithme utilisé pour décoder ces informations.

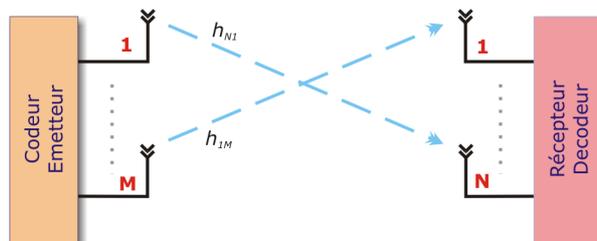


FIGURE 21 : LA DIVERSITE ESPACE

Ce type de diversité est efficace contre l'effet *deep fading*, où les signaux sont temporairement fortement atténués. En effet, si les précautions nécessaires sont prises pour espacer les antennes d'émission et de réception de façon à ce que les canaux deviennent non corrélés entre eux, il existe alors un canal indépendant entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception. Il y a alors plus de chances qu'au moins un chemin ne se retrouve pas dans le cas d'un *deep fading* en même temps que les autres. Ces trajets supplémentaires éviteront alors la perte d'information et donc amélioreront la performance générale du système.

### 3.2.1 Space time trellis code

Comme son nom le suggère, l'encodage des informations se fait via un diagramme d'état et le meilleur moyen de représenter cette technique est le diagramme en treillis. Le principe d'encodage est le suivant.

Supposons qu'on utilise  $M$  antennes d'émission pour envoyer une série de symboles dans une constellation  $\Omega$  quelconque. Chaque symbole sera codé par une règle précise en fonction du symbole en entrée et de l'état de l'encodeur à cet instant. Les symboles codés seront envoyés sur toutes les  $M$  antennes d'émission. On peut imaginer que chaque symbole engendre  $M$  symboles et on a un débit de transmission de  $1/M$  bauds. Après chaque encodage, l'encodeur change d'état. Donc si on a une série de symboles d'informations identiques à coder, on n'aura pas les mêmes symboles transmis.

La Figure 22 montre un diagramme d'état d'un code STTC à 2 antennes et à 4 états avec la constellation à quatre symboles QPSK.

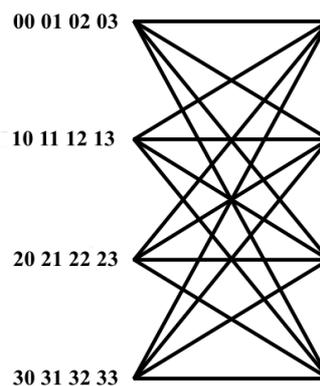


FIGURE 22 : LE DIAGRAMME D'ETAT DU STTC A 2 ANTENNES ET A 4 ETATS POUR LA MODULATION QPSK

Chaque ligne du diagramme correspond à un état du codeur. Une série de nombres regroupés qui se trouvent à gauche du diagramme correspondent aux symboles qui seront envoyés à toutes les antennes si le codeur est dans cet état. On doit avoir le même nombre de groupes de chiffres par état que le nombre de symboles dans la constellation,  $|\Omega|$ . Chaque groupe est associé à un symbole non codé. Chaque chiffre de ce groupe correspond au symbole qui sera envoyé sur une

antenne de transmission précise. Le nombre de chiffres dans ces groupes correspond donc aux nombres d'antennes d'émission utilisées. Chaque ligne qui relie la partie gauche et la partie droite du diagramme correspond au symbole d'information non codé et la destination de cette ligne (si on part de la gauche) correspond à l'état du codeur après l'envoi des symboles codés. On doit trouver autant de lignes partant d'un état que  $|\Omega|$ . Il n'est pas nécessaire d'avoir le même nombre d'états que  $|\Omega|$ .

Prenons un exemple basé sur la Figure 22 pour éclaircir ceci. On considère que le premier chiffre de chaque groupement correspond au symbole à envoyer sur l'antenne 1 et le deuxième correspond au symbole à envoyer sur la deuxième antenne. On pose aussi que les lignes qui relient les états sont rangées dans l'ordre, c'est-à-dire, le premier symbole de la constellation correspond à la première ligne, le deuxième symbole correspond à la deuxième ligne, et ainsi de suite. Le premier symbole de la constellation correspond à l'indice 0.

On suppose que le décodeur se trouve dans le troisième état en partant du haut (sur un total de quatre états). Nous avons les symboles QPSK indexés 3 3 1 2 à transmettre. Le Tableau 4 résume les symboles envoyés sur les deux antennes pour chaque symbole en entrée du codeur.

TABLEAU 4 : EXEMPLE DE TRANSMISSION STTC

$t$	SYMBOLE A TRANSMETTRE	ETAT ACTUEL DU CODEUR	SYMBOLE TRANSMIS SUR ANTENNE 1	SYMBOLE TRANSMIS SUR L'ANTENNE 2	ETAT SUIVANT DU CODEUR
↓					3
	3	3	2	3	4
	3	4	3	3	4
	1	4	3	1	2
	2	2	1	2	3

Chaque symbole transmis par chaque antenne se propage à travers un canal différent et arrive au récepteur. Le récepteur à  $N$  antennes de réception et chaque antenne reçoit donc  $M$  signaux différents. Un décodeur de Viterbi est utilisé pour trouver la séquence la plus probable en fonction des métriques que l'on calculera à chaque transition.

Ce type de diversité espace – temps n'est pas à l'étude pendant cette thèse. Le lecteur peut se référer aux références [30][32] pour plus d'informations.

### 3.2.2 Space Time Block Code

Contrairement au codage STTC, le Space Time Block Code (STBC) fonctionne en bloc. Chaque bloc est codé suivant des règles précises et de façon indépendante des autres blocs. Une erreur de décodage survenue dans un bloc ne met pas en péril d'autres blocs, ce qui n'est pas toujours le cas avec un décodeur Viterbi.

Cette méthode de diversité espace – temps a été proposée par Alamouti [33] en utilisant deux antennes d'émission et  $M$  antennes de réception. Ce principe a été ensuite généralisé par Tarokh *et al* pour  $N$  antennes d'émission et  $M$  antennes de réception dans [35].

L'idée est d'envoyer un bloc de symboles sur plusieurs antennes d'émission. Les symboles envoyés pendant la durée d'un bloc sur toutes les antennes sont orthogonaux entre eux. On peut utiliser les symboles réels ou complexes pour la transmission. De la même façon que pour les STTC, les antennes d'émission et de réception sont positionnées de telle sorte qu'il n'y ait pas de corrélation entre ces antennes. Les canaux entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception sont indépendants et non corrélés dans ces conditions.

Due à l'orthogonalité des symboles, on peut utiliser un simple algorithme de recombinaison linéaire en réception pour récupérer les symboles transmis par toutes les antennes.

### 3.3 La construction de STBC

#### 3.3.1 La construction d'Alamouti

Alamouti a proposé dans [33] une méthode simple pour exploiter la diversité espace – temps en utilisant une construction très simple à deux antennes d'émission et  $M$  antennes de réception. Les symboles d'information seront traités par paire et ces deux symboles vont engendrer quatre symboles avec deux symboles sur chaque antenne. Chaque antenne enverra les deux symboles codés qui lui sont fournis l'un après l'autre. Afin d'obtenir les symboles orthogonaux entre les antennes, la première antenne enverra les symboles d'informations de façon systématique et la deuxième antenne enverra ces symboles conjugués, dans l'ordre inverse, et avec l'un des deux inversés. Cette opération de codage des symboles d'informations est résumée dans le Tableau 5.

TABLEAU 5 : SCHEMA D'ALAMOUTI

TEMPS	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$2p$	$x_{2p}$	$-x_{2p+1}^*$
$2p+1$	$x_{2p+1}$	$x_{2p}^*$

L'indice  $p$  indique le numéro de bloc STBC d'Alamouti (ASTBC).  $x_{2p}$  et  $x_{2p+1}$  sont les symboles d'information à transmettre.

Le symbole transmis par chaque antenne se propage suivant un chemin différent avant d'arriver à l'une des antennes de réception. Afin de faciliter la démonstration, on considère que le chemin ne change pas pendant la transmission des deux symboles par antenne et ce chemin peut être modélisé par un canal à fading. On a alors  $2 \times N$  canaux de propagation pour un récepteur à  $N$

antennes. Les symboles envoyés subissent l'influence d'un bruit additif blanc gaussien (AWGN) de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ .

Le signal reçu sur l'antenne de réception  $i$  s'écrit sous la forme

$$r_{i,2p} = x_{2p} \cdot h_{i,1} - x_{2p+1}^* \cdot h_{i,2} + n_{2p} \quad (1)$$

$$r_{i,2p+1} = x_{2p+1} \cdot h_{i,1} + x_{2p}^* \cdot h_{i,2} + n_{2p+1} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) peuvent être écrites sous la forme matricielle

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} r_{i,2p} \\ r_{i,2p+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & -h_2 \\ h_2^* & h_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{2p} \\ x_{2p+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{2p} \\ n_{2p+1}^* \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (4)$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{r}_i &= \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \\ &= \rho \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5)$$

avec  $(\cdot)^H$  signifie la transposée conjuguée de la matrice et

$$\rho = |h_1|^2 + |h_2|^2 \quad (6)$$

Si on considère que le récepteur a parfaitement estimé le canal,  $\mathbf{H}$  est alors connu. On peut alors procéder à la détection de maximum de vraisemblance (ML).

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \Omega^2}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M \|\hat{\mathbf{r}}_i - \rho \cdot \mathbf{X}\|^2 \right) \quad (7)$$

avec  $\hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{r}_i$

Le fait que  $x_{2p}$  et  $x_{2p+1}^*$  soient indépendant entre eux fait qu'on peut rechercher le minimum des quantités suivantes pour chacun des symboles par

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{2p} \\ x_{2p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{r}_{i,2p} - \rho \cdot x|^2 \right) \\ \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{r}_{i,2p+1} - \rho \cdot x^*|^2 \right) \end{bmatrix} \quad (8)$$

On réduit ainsi la complexité de  $|\Omega|^2$  à  $2 \times |\Omega|$ .

### 3.3.2 La construction généralisée.

Tarokh a démontré dans [34] qu'il existe d'autres codes STBC orthogonaux, qu'ils soient réels ou complexes comme le schéma d'Alamouti. Soit  $\mathbf{C}$  la matrice du code STBC de taille  $P \times N$  et soit  $x_k \in \Omega, k \in \{1, \dots, K\}$  les  $K$  symboles de la constellation  $\Omega$  à transmettre dans un mot STBC.  $P$  est le temps en symboles nécessaire pour transmettre  $K$  symboles constituant le code STBC en question, et  $N$  est le nombre d'antennes d'émission. Un mot STBC correspond à l'ensemble des symboles envoyés pendant  $P$  intervalles de temps symbole. Le code orthogonal  $\mathbf{C}$  aura un rendement de  $K/P$ . Pour obtenir des codes orthogonaux, il y a trois contraintes à respecter :

- i. la matrice  $\mathbf{C}$  doit être construite à partir des symboles  $x_k$  ou des combinaisons linéaires de ceux-ci
- ii.  $P \geq N$  pour que le système puisse être résolu au récepteur, la relation

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^H &= \text{trace}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^H) \cdot \mathbf{I}_P \\ &= \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \cdot \mathbf{I}_P \end{aligned} \quad (9)$$

est respectée.

Chaque ligne de la matrice  $\mathbf{C}$  représente le temps et chaque colonne représente une antenne d'émission. Ainsi un élément de la ligne  $p$  et la colonne  $n$ ,  $x_{p,n}$ , de la matrice  $\mathbf{C}$  représente le symbole envoyé sur l'antenne  $n$  pendant le  $p^{\text{ième}}$  symbole d'un mot STBC.

#### 3.3.2.1 Codes réels

Un code STBC est dit réel si tous les éléments de la matrice  $\mathbf{C}$  sont réels, c'est-à-dire

$$\forall k, x_k \in \mathbb{R} \quad (10)$$

Les symboles envoyés sur toutes les antennes sont des symboles réels issus d'une constellation entièrement réelle comme dans le cas de la modulation d'impulsion en amplitude (PAM).

Des exemples de codes STBC réels sont présentés ci-dessous.

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3.3.2.2 Codes complexes

Un code STBC est dit complexe si les éléments de la matrice  $\mathbf{C}$  sont complexes, c'est-à-dire

$$\forall k, x_k \in \mathbb{C} \quad (14)$$

Les symboles envoyés sur toutes les antennes sont issus d'une constellation entièrement complexe comme dans le cas des modulations de phase (MPSK), de fréquence (MFSK) ou de la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ).

Des exemples des codes complexes sont présentés ci-dessous.

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_{3a} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ x_2 & x_1^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*}{2} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 + x_2^*}{2} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_{3b} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & x_1^* & -x_2^* & -x_3^* & -x_4^* \\ x_2 & x_1^* & x_4 & -x_3 & x_2^* & x_1^* & x_4^* & -x_3^* \\ x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 & x_3^* & -x_4^* & x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ x_2 & x_1^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*}{2} & \frac{x_1 - x_1^* + x_2 + x_2^*}{2} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_1 - x_1^* - x_2 - x_2^*}{2} & \frac{-x_1 - x_1^* - x_2 + x_2^*}{2} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

### 3.3.2.3 Ecriture généralisée de la matrice de code complexe

Une matrice de code  $\mathbf{C}$  complexe peut être décomposée en somme des matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$ . On peut écrire la matrice  $\mathbf{C}$  sous la forme

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k + x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \quad (19)$$

avec

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{1,1}^k & \cdots & a_{1,N}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1}^k & \cdots & a_{p,n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{P,1}^k & \cdots & a_{P,N}^k \end{bmatrix}_{P \times N}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} b_{1,1}^k & \cdots & b_{1,N}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1}^k & \cdots & b_{p,n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{P,1}^k & \cdots & b_{P,N}^k \end{bmatrix}_{P \times N} \quad \text{et } a_{p,n}^k, b_{p,n}^k \in \{-1, 0, 1\}$$

Les matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$  sont de la même taille que la matrice code  $\mathbf{C}$ . Pour obtenir l'orthogonalité de  $\mathbf{C}$ , les matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$  doivent respecter les conditions suivantes [30]

$$\forall k, \forall l \in \{1, \dots, K\}, l \neq k$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T = \mathbf{I} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{A}_l^T + \mathbf{B}_l \mathbf{B}_k^T = \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{B}_k^T = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{B}_k^T + \mathbf{B}_l \mathbf{A}_l^T = \mathbf{0} \quad (23)$$

Cette écriture nous permet de définir une méthode de décodage généralisée.

### 3.4 Le décodage de STBC généralisé

La matrice de code  $\mathbf{C}$  résume la manière et l'ordre de la transmission des symboles. La Figure 21 illustre l'existence d'un canal entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception. On considère que les canaux sont des canaux à fading non sélectifs en fréquence. On note

$$\mathbf{h}_m = [h_{m,1} \quad \cdots \quad h_{m,n} \quad \cdots \quad h_{m,N}]_{N \times 1}^T \quad (24)$$

les gains des canaux à fading entre les antennes d'émission  $n \in \{1, \dots, N\}$  et l'antenne de réception  $m$ . Le signal reçu sur l'antenne de réception  $m$  peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{C} \cdot \mathbf{h}_m + \mathbf{n}_m \quad (25)$$

$\mathbf{n}_m$  est un vecteur de bruit blanc gaussien avec

$$E[\mathbf{n}_m^H \cdot \mathbf{n}_m] = \sigma^2 \mathbf{I}_p \quad (26)$$

Les signaux reçus sur toutes les antennes de réception s'écrivent donc sous la forme

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{n} \quad (27)$$

avec

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_m \dots \mathbf{r}_M]_{P \times M},$$

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m \dots \mathbf{h}_M]_{N \times M}$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1 \dots \mathbf{n}_m \dots \mathbf{n}_M]_{P \times M}$$

Si une estimation parfaite des canaux est disponible, l'algorithme de maximum de vraisemblance qui minimise la métrique de décision en fonction des symboles reçus sur toutes les antennes de réception s'écrit

$$\hat{\mathbf{C}} = \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left| r_{p,m} - \sum_{n=1}^N \tilde{c}_{p,n} \cdot h_{n,m} \right|^2 \right) \quad (28)$$

$\mathcal{C}$  est l'ensemble de tous les mots de codes STBC possibles avec  $|\Omega|^K$  éléments.  $v_{k,l}$  représente l'élément de la ligne  $k$  et de la colonne  $l$  de la matrice  $\mathbf{V}$ . On a donc  $|\Omega|^K$  combinaisons à tester et cela devient vite prohibitif.

L'équation (28) s'écrit sous la forme matricielle

$$\hat{\mathbf{C}} = \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{m=1}^M \left| \mathbf{r}_m - \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m \right|^2 \right) \quad (29)$$

et se développe ensuite

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^M \left( (\mathbf{r}_m - \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m)^H \cdot (\mathbf{r}_m - \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m) \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^M \left( \mathbf{r}_m^H \cdot \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m - \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^M \left( -\mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m - \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m \right) \end{aligned} \quad (30)$$

A partir de (9) et (30), on a alors

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^M \left( -(\mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \mathbf{r}_m) + \rho \cdot \mathbf{h}_m^H \cdot \mathbf{h}_m \right) \\ &= \underset{\tilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \left[ \underbrace{-\sum_{m=1}^M (\mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \mathbf{r}_m)}_{\Phi_1} + \underbrace{\sum_{m=1}^M (\rho \cdot \mathbf{h}_m^H \cdot \mathbf{h}_m)}_{\Phi_2} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

avec

$$\rho = \sum_{k=1}^K (|x_k|^2) \quad (32)$$

$\Phi_1$  est un scalaire réel qui dépend linéairement de  $\tilde{\mathbf{C}}$ . On peut écrire  $\Phi_1$  sous la forme

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^K (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \quad (33)$$

avec  $q_k$  un scalaire complexe défini ultérieurement.

On a

$$\mathbf{h}_m^H \mathbf{h}_m = \sum_{n=1}^N |h_{m,n}|^2 \quad (34)$$

$\Phi_2$  s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |h_{m,n}|^2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right) \cdot H \end{aligned} \quad (35)$$

$H$  est un scalaire supérieur ou égal à 0 en théorie mais strictement supérieur à 0 en pratique.

On obtient

$$\begin{aligned} \Phi &= -\Phi_1 + \Phi_2 \\ &= \sum_{k=1}^K \underbrace{\left( |x_k|^2 \cdot H - (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \right)}_{\Phi_k} \end{aligned} \quad (36)$$

Le fait que  $\Phi_k$  ne dépende que de  $x_k$  rend les métriques indépendantes. On peut alors calculer les métriques individuellement. La complexité initiale de  $|\Omega|^K$  devient  $K \times |\Omega|$ . Avec cette constatation, en développant (36), on a

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} (\Phi_k) \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( H \left( |\tilde{x}_k|^2 - \frac{q_k}{H} \tilde{x}_k^* - \frac{q_k^*}{H} \tilde{x}_k + \frac{|q_k|^2}{H^2} \right) - \frac{|q_k|^2}{H} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

Etant donné que  $q_k$  et  $H$  sont des scalaires, on réduit l'équation (37) à

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( |\tilde{x}_k|^2 - \frac{q_k}{H} \tilde{x}_k^* - \frac{q_k^*}{H} \tilde{x}_k + \frac{|q_k|^2}{H^2} \right) \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left| \tilde{x}_k - \frac{q_k}{H} \right|^2 \\ &= \underset{\tilde{x}_k \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left| \tilde{x}_k - q'_k \right|^2 \end{aligned} \quad (38)$$

On arrive à un calcul de métrique très simple. Il reste à définir la constante  $q'_k$ . A partir de (31) et (33),

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^M (\mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \mathbf{r}_m) = \sum_{k=1}^K (q_k^* \cdot x_k + q_k \cdot x_k^*) \quad (39)$$

Etant donné que le code STBC peut être écrit comme la somme des matrices présentées dans (19), on peut faire le développement suivant.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m \Big|_{P \times 1} &= \left( \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k + x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \right) \cdot \mathbf{h}_m \\ &= \sum_{k=1}^K x_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{h}_m + \sum_{k=1}^K x_k^* \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{h}_m \end{aligned} \quad (40)$$

$\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$  et  $\mathbf{h}_m$  sont des constantes. La somme sur  $k$  dans (40) s'écrit sous la forme matricielle par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m \Big|_{P \times 1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{h}_m & \dots & \mathbf{A}_K \cdot \mathbf{h}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_h^m} \Big|_{P \times K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \Big|_{K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{h}_m & \dots & \mathbf{B}_K \cdot \mathbf{h}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_h^m} \Big|_{P \times K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_K^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^*} \Big|_{K \times 1} \\ &= \mathbf{A}_h^m \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_h^m \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned} \quad (41)$$

L'équation (41) s'insère dans la partie gauche (39) pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m &= \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m^H \cdot (\mathbf{A}_h^m \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_h^m \cdot \mathbf{x}^*) \\ &= \left( \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m^H \cdot \mathbf{A}_h^m \right) \cdot \mathbf{x} + \left( \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m^H \cdot \mathbf{B}_h^m \right) \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned} \quad (42)$$

ou sous sa forme matricielle

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m^H \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{h}_m &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^H \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \Big|_{1 \times PM} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_h^M \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_h} \Big|_{PM \times K} \cdot \mathbf{x}_{K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M^H \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \Big|_{1 \times PM} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_h^1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_h^M \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_h} \Big|_{PM \times K} \cdot \mathbf{x}_{K \times 1}^* \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned} \quad (43)$$

Le résultat de (43) est un scalaire avec  $(\cdot)^H = (\cdot)^*$ , l'équation (39) devient alors

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^* + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^*)^H \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}_h^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{B}_h^* \cdot \mathbf{x} \\ &= \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_h + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{B}_h^*)}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}_h^* + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_h)}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}^* \\ &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned} \quad (44)$$

et

$$\mathbf{q} = (\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) = [q_1 \quad \dots \quad q_K]_{K \times 1} \quad (45)$$

L'équation (44) a alors la forme matricielle de (33). On peut désormais calculer la métrique (38) et donc procéder au décodage. L'algorithme de décodage est résumé ci après.

### 3.4.1 Algorithme de décodage

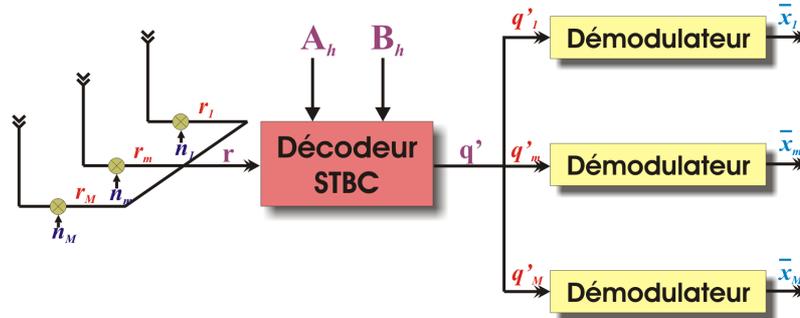


FIGURE 23 : LE RECEPTEUR STBC

La Figure 23 résume le décodeur STBC implanté au récepteur.

- Les symboles transmis par toutes les antennes d'émission arrivent à toutes les antennes de réception après avoir subi un certain gain de canal pendant  $K$  temps symboles. Le canal est considéré invariant pendant ce temps. Un bruit blanc s'ajoute à ces symboles.
- Le décodeur obtient les estimations des canaux par des méthodes qui importent peu ici. Les canaux estimés sont représentés par  $\mathbf{A}_h$  et  $\mathbf{B}_h$ , comme présentés dans (41)-(43).
- Le décodeur STBC calcule les valeurs  $q'_k$  par les formules (44)-(45)
- Ces valeurs  $q'_k$  sont fournies aux démodulateurs  $\Omega$  pour obtenir le symbole estimé via les métriques (38)

## 3.5 Performances de STBC sur un canal fading

Dans cette thèse, seul le code complexe  $C_2$  est utilisé à cause, d'une part de sa simplicité, et d'autre part, il constitue le code de référence pour la suite des simulations présentées dans les chapitres ultérieurs.

Quelques courbes de références sont présentées. On constate que la performance s'améliore avec l'augmentation du nombre d'antennes de réception.

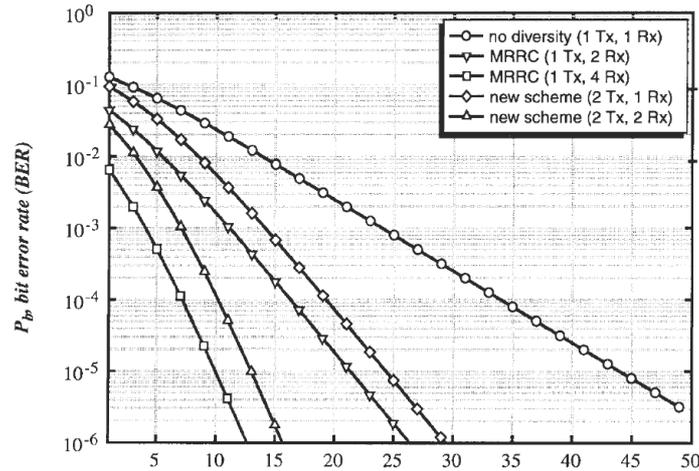


FIGURE 24 : LES PERFORMANCES DU STBC COMPAREES AVEC LA METHODE MRRC EN BPSK COHERENT EN FONCTION DE  $E_b/N_0$  [33]

La Figure 24 nous montre les résultats de simulation du STBC comparés à la méthode MRRC. Les simulations ont été faites en utilisant la modulation BPSK cohérente. On remarque que pour un TEB égal à  $10^{-4}$ , la diversité espace temps à une antenne de réception et deux antennes d'émission améliore les performances de 14 dB par rapport aux systèmes sans diversité espace temps. On observe aussi que les performances de STBC sont 3 dB moins bonnes que celui de MRRC. Ceci est dû à la supposition faite dans les simulations que les antennes d'émission n'émettent qu'à moitié puissance pour que la puissance reçue à l'antenne de réception soit égale au cas où il n'y a qu'une seule antenne d'émission. Si chaque antenne d'émission émet la même puissance que dans le cas du système sans diversité, les résultats de STBC seront similaires à ceux de MRRC.

Les Figure 25-Figure 32 présentent les performances du STBC sur un canal à fading en fonction des différents types de modulation PSK et du nombre d'antennes de réception. On montre pour chaque type de modulation deux courbes : l'une est le TEB en fonction de  $E_b/N_0$ , et l'autre est le TEB en fonction de  $E_s/N_0$ . Ces deux courbes sont identiques. Les simulations ont été faites en fixant la puissance moyenne des symboles transmis égale à 1 (0.5 par antenne d'émission). Les courbes de  $E_b/N_0$  sont en fait décalées de  $10 * \log_{10}(\log_2 |\Omega|)$  dB par rapport aux courbes  $E_s/N_0$ . Comme dans cette thèse les résultats présentés sont souvent en fonction de  $E_s/N_0$ , ces deux courbes permettent de plus facilement comparer les résultats de cette thèse et aussi les résultats disponibles dans la littérature sans avoir besoin de faire les adaptations nécessaires.

Il est cependant nécessaire de noter que les résultats présentés ici sont souvent décalés de 3dB en mieux par rapport aux résultats principaux de la littérature car la variance de bruit considérée dans les simulations n'est pas  $\sigma^2$  par dimension mais  $\sigma^2/2$  par dimension<sup>4</sup>.

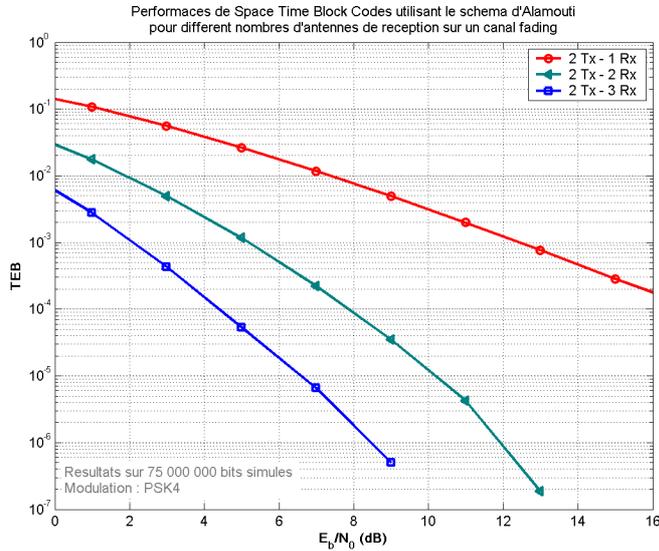


FIGURE 25 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_b/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN QPSK

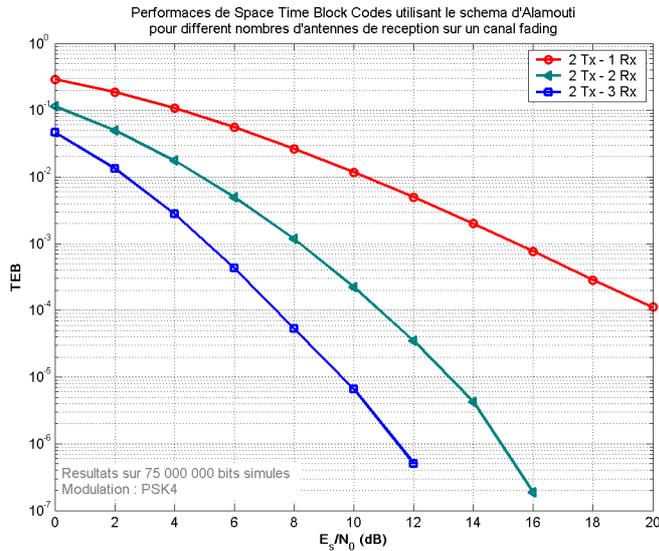


FIGURE 26 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_s/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN QPSK

Les Figure 25 et Figure 26 montrent les performances du STBC quand la modulation QPSK est utilisée. On peut voir de façon générale que les performances s'améliorent en fonction du nombre d'antennes de réception. On remarque aussi que la différence de performances entre

<sup>4</sup>  $E(n \cdot n^*) = \sigma^2, n \in \mathbb{C}$

deux antennes de réception et trois antennes de réception est plus petite que celle entre une antenne de réception et deux antennes de réception [30][34][35][36]. Comme attendu, les performances en modulation QPSK sont moins bonnes que celles en BPSK présentées dans la Figure 24. A TEB égal à  $10^{-3}$ , la modulation QPSK est environ 2 dB moins bonne que la modulation BPSK pour une et deux antennes de réception.

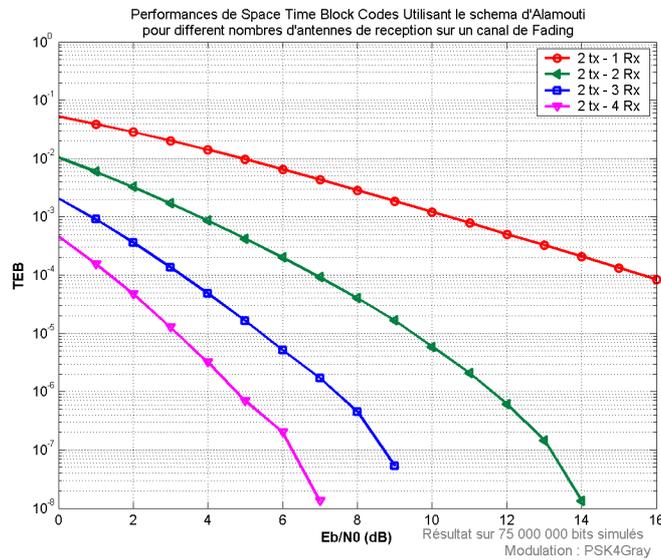


FIGURE 27 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_b/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN QPSK  
CODE GRAY

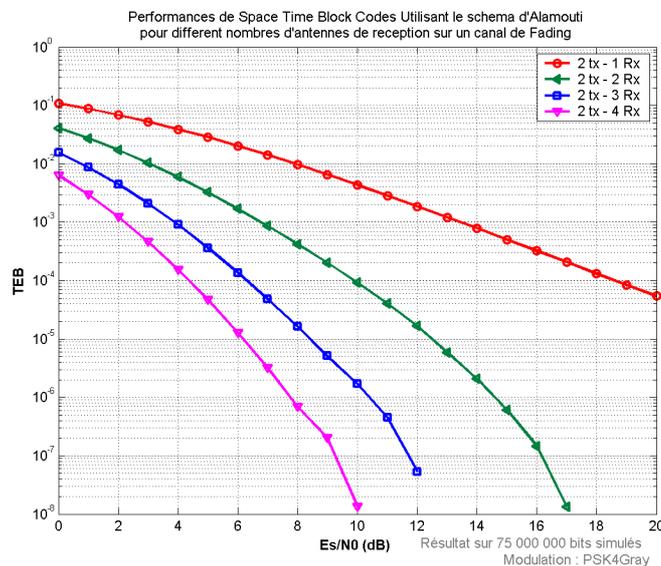


FIGURE 28 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_s/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN QPSK  
CODE GRAY

Une légère amélioration est obtenue lorsque la modulation QPSK codée Gray est utilisée. Les Figure 27 et Figure 28 illustrent les performances de cette modulation. On observe une amélioration de 2 dB (TEB  $10^{-3}$ ) par rapport à la modulation QPSK non codée. Ces

performances sont comparables avec les performances présentées dans la Figure 24. On observe encore une fois que l'amélioration des performances n'est pas linéairement dépendante du nombre d'antennes de réception.

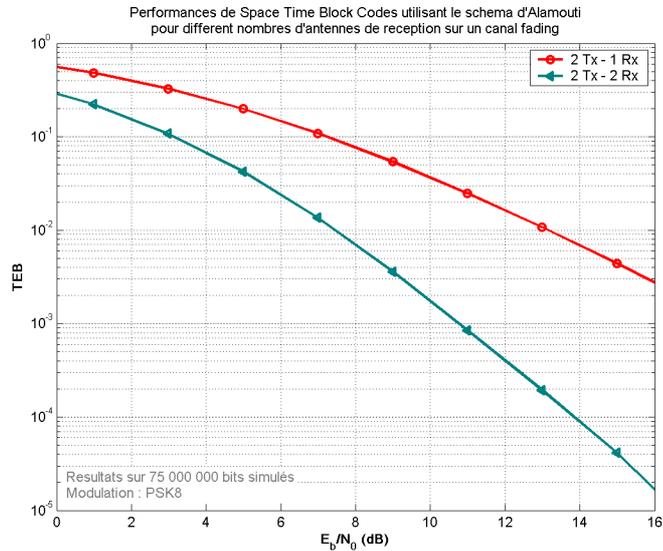


FIGURE 29 :LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_b/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN 8PSK

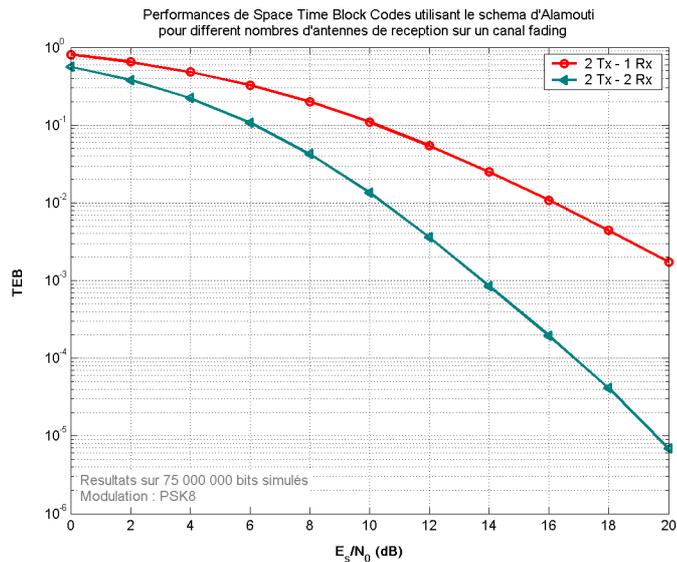


FIGURE 30 :LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_s/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN 8PSK

Les Figure 29 et Figure 30 montrent les performances du codage STBC sur un canal fading avec l'utilisation de la modulation 8PSK. On observe une nette détérioration des performances d'environ 6 dB par rapport à la modulation QPSK. L'augmentation de l'ordre de la modulation nuit forcément aux performances du système.

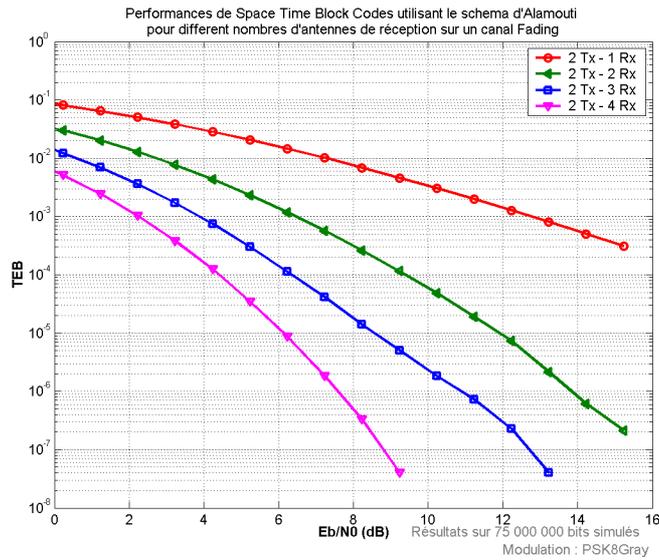


FIGURE 31 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_b/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN 8PSK CODE GRAY

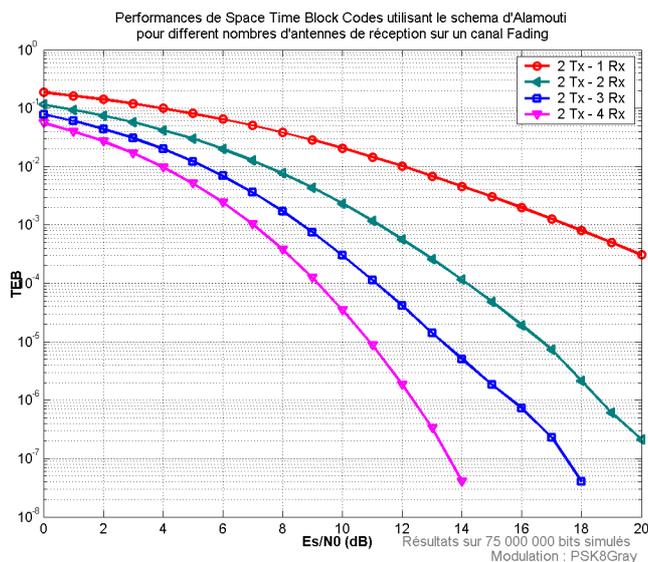


FIGURE 32 : LES PERFORMANCES DU STBC EN TERME DE TEB ET  $E_s/N_0$  DANS UN CANAL FADING EN 8PSK CODE GRAY

Les Figure 31 et Figure 32 présentent les performances du STBC dans un canal à fading quand la modulation 8PSK codée en Gray est utilisée. Une amélioration de 5 dB est observée par rapport à la modulation 8PSK. Ces performances sont à 1 dB et 2 dB de ceux de la modulation QPSK et QPSK codé Gray respectivement

### 3.6 La diversité espace – fréquence

On a vu, jusqu'à présent, la possibilité d'exploiter la diversité en espace – temps. Bölcskei et Paulraj ont présenté un système à diversité espace-fréquence dans un canal large bande OFDM [37]. Beaucoup de propositions et de variantes exploitant la diversité espace - fréquence ont été faites par d'autres notamment par Bauch [38] et Kaiser [39]. Dans cette partie, on va considérer la diversité espace – fréquence en block (*Space Frequency Block Code*, SFBC) en commençant par reprendre le schéma d'Alamouti en espace – temps en vue de l'adapter en espace – fréquence. On a toujours un système orthogonal mais en fréquence et non pas en temps. On pourrait bien sûr imaginer un système *Space Frequency Trellis Code* (SFTC) en analogie avec le système STTC, mais il n'est pas à l'étude dans cette thèse.

L'inconvénient de STBC était que l'on doit supposer que le canal reste invariant pendant un mot STBC, ou pendant plusieurs symboles successifs. Ceci impose une limite au débit pour que le canal soit invariant pendant le mot STBC.

Le SFBC peut résoudre ce problème et permettre d'obtenir la diversité d'espace avec une contrainte plus souple sur le canal.

### 3.7 La construction du code SFBC

#### 3.7.1 Le cas d'Alamouti

Pour commencer, on considère un système à deux antennes d'émission et  $M$  antennes de réceptions sur un canal à fading. On utilise, pour l'instant, deux fréquences pour transmettre les informations sur le canal.

Soit  $x_1, x_2 \in \Omega$  les deux symboles à transmettre appartenant à la constellation  $\Omega$ . On distribue les deux symboles  $x_1$  et  $x_2$  sur deux modulateurs espace – fréquence séparés. Chaque modulateur est connecté à une antenne et dispose de deux fréquences ou deux sous porteuses. Pour obtenir un système orthogonal, l'un des modulateurs doit transmettre  $x_1^*$  et  $-x_2^*$  et les deux modulateurs doivent ranger ces quatre symboles sur les deux sous porteuses disponibles. Le Tableau 6 résume l'émission de ces symboles.

On note

$$s_1 = x_1 \cdot e^{-j2\pi f_1 t} + x_2 \cdot e^{-j2\pi f_2 t} \quad (46)$$

$$s_2 = -x_2^* \cdot e^{-j2\pi f_1 t} + x_1^* \cdot e^{-j2\pi f_2 t} \quad (47)$$

les symboles émis par l'antenne 1 et l'antenne 2 respectivement.  $s_1$  et  $s_2$  constituent un mot SFBC.

TABLEAU 6 : LE SCHEMA D'ALAMOUTI ADAPTE POUR SFBC

FREQUENCE	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$f_1$	$x_1$	$-x_2^*$
$f_2$	$x_2$	$x_1^*$

On suppose que le canal est un canal non sélectif en fréquence et que les deux antennes sont suffisamment espacées pour obtenir une configuration des canaux décorrelés. On suppose aussi que les sous porteuses sont suffisamment séparées pour négliger les interférences entre porteuse (*Inter Carrier Interference*, ICI).

Le canal entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception est modélisé par un gain constant complexe,  $\alpha_{i,j}$ , pendant un mot SFBC.  $i$  et  $j$  représentent l'antenne de réception et l'antenne d'émission respectivement.

Le signal reçu sur l'antenne de réception  $i$  est la superposition des signaux transmis par toutes les antennes d'émission affecté par un gain constant complexe auquel s'ajoute un bruit blanc. Il s'écrit sous la forme

$$y_i = \sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j} s_j + n_i \quad (48)$$

ou encore

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_{i,1} x_1 e^{-j2\pi f_1 t} + \alpha_{i,1} x_2 e^{-j2\pi f_2 t} - \alpha_{i,2} x_2^* e^{-j2\pi f_1 t} + \alpha_{i,2} x_1^* e^{-j2\pi f_2 t} + n_i \\ &= (\alpha_{i,1} x_1 - \alpha_{i,2} x_2^*) \cdot e^{-j2\pi f_1 t} + (\alpha_{i,1} x_2 + \alpha_{i,2} x_1^*) \cdot e^{-j2\pi f_2 t} + n_i \end{aligned} \quad (49)$$

Après la démodulation fréquentielle, on obtient deux équations qui correspondent chacune aux symboles reçus sur chaque porteuse.

$$r_{i,f_1} = \text{passband}(y_i, f_1) = \alpha_{i,1} x_1 - \alpha_{i,2} x_2^* + n_{i,f_1} \quad (50)$$

$$r_{i,f_2} = \text{passband}(y_i, f_2) = \alpha_{i,1} x_2 + \alpha_{i,2} x_1^* + n_{i,f_2} \quad (51)$$

Il reste à trouver les symboles  $x_1$  et  $x_2$  transmis. On peut écrire (51) sous la forme

$$r_{i,f_2}^* = \alpha_{i,2}^* x_1 + \alpha_{i,1}^* x_2^* + n_{i,f_2}^* \quad (52)$$

On développe à partir de (50) et (52),

$$\alpha_{i,1}^* r_{i,f_1} = \alpha_{i,1}^* \alpha_{i,1} x_1 - \alpha_{i,1}^* \alpha_{i,2} x_2^* + \alpha_{i,1}^* n_{i,f_1} \quad (53)$$

$$\alpha_{i,2}^* r_{i,f_1}^* = \alpha_{i,2}^* \alpha_{i,1}^* x_1^* - \alpha_{i,2}^* \alpha_{i,2}^* x_2^* + \alpha_{i,2}^* n_{i,f_1}^* \quad (54)$$

$$\alpha_{i,1}^* r_{i,f_2}^* = \alpha_{i,1}^* \alpha_{i,2}^* x_1^* + \alpha_{i,1}^* \alpha_{i,1}^* x_2^* + \alpha_{i,1}^* n_{i,f_2}^* \quad (55)$$

$$\alpha_{i,2}^* r_{i,f_2}^* = \alpha_{i,2}^* \alpha_{i,2}^* x_1^* + \alpha_{i,2}^* \alpha_{i,1}^* x_2^* + \alpha_{i,2}^* n_{i,f_2}^* \quad (56)$$

On obtient à partir de la somme entre (53) et (56)

$$\begin{aligned} r_{i,x_1} &= \alpha_{i,1}^* r_{i,f_1}^* + \alpha_{i,1}^* r_{i,f_2}^* \\ &= \left( |\alpha_{i,1}|^2 + |\alpha_{i,2}|^2 \right) \cdot x_1 + n_{i,x_1} \end{aligned} \quad (57)$$

et à partir de la différence entre (55) et (54)

$$\begin{aligned} r_{i,x_2} &= \alpha_{i,1}^* r_{i,f_2}^* - \alpha_{i,2}^* r_{i,f_2}^* \\ &= \left( |\alpha_{i,1}|^2 - |\alpha_{i,2}|^2 \right) \cdot x_2 + n_{i,x_2} \end{aligned} \quad (58)$$

Les équations (57) et (58) nous montrent que  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendants. On applique l'algorithme de maximum de vraisemblance pour trouver  $x_1$  et  $x_2$ , d'où

$$\hat{x}_1 = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |r_{i,x_1} - \alpha_i \cdot x|^2 \right) \quad (59)$$

$$\hat{x}_2 = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |r_{i,x_2} - \alpha_i \cdot x|^2 \right) \quad (60)$$

avec

$$\alpha_i = |\alpha_{i,1}|^2 + |\alpha_{i,2}|^2 \quad (61)$$

### 3.7.1.1 Ecriture matricielle

Il est intéressant d'écrire le décodeur précédent sous la forme matricielle. Reprenons à partir des équations (50) et (52). On peut écrire

$$\mathbf{r}_i = \alpha_{i,1} \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (62)$$

avec  $\mathbf{r} = [r_{i,f_1} \quad r_{i,f_2}]^T$ ,  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ ,  $\mathbf{n} = [n_{i,1} \quad n_{i,2}]^T$  et  $\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  une matrice de

permutation entière. L'équation (62) se développe en

$$\alpha_{i,1} \cdot \mathbf{r}_i = |\alpha_{i,1}|^2 \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,1}^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{n} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}_2^T \cdot \mathbf{r}_i &= \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{J}_2^T \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,2}^* \cdot \mathbf{J}_2^T \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{n}^* \\ &= |\alpha_{i,2}|^2 \cdot \mathbf{x} - \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{n}^* \end{aligned} \quad (64)$$

La somme de (63) et (64) donne

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{r}_i + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}_2^T \cdot \mathbf{r}_i^* = \alpha_i \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}}_i \quad (65)$$

L'algorithme de maximum de vraisemblance peut être utilisé pour trouver  $\mathbf{x}$ . D'où

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \underset{\mathbf{x} \in \Omega^2}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{\mathbf{r}}_i - \alpha_i \cdot \mathbf{x}|^2 \right) \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \underset{x_1, x_2 \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M \left| \begin{bmatrix} \hat{r}_{i,x_1} \\ \hat{r}_{i,x_2} \end{bmatrix} - \alpha_i \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (66)$$

Comme les symboles sont indépendants, la minimisation peut être faite individuellement sur chaque symbole.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{r}_{i,x_1} - \alpha_i \cdot x|^2 \right) \\ \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{r}_{i,x_2} - \alpha_i \cdot x|^2 \right) \end{bmatrix} \quad (67)$$

### 3.7.2 Le cas sur plusieurs fréquences simultanées

Pour augmenter le débit, on serait tenter d'envoyer le maximum de symboles en même temps. La façon la plus simple de le faire est de concaténer en fréquence le cas simple précédent. Le Tableau 7 résume la transmission. Soit  $K$  le nombre de sous porteuses individuelles disponibles pour le système. On considère que les sous porteuses sont suffisamment espacées pour éviter les ICI. Afin de pouvoir créer un système orthogonal,  $K$  doit être multiple de 2. On considère aussi que la bande passante disponible est plus grande que la bande de cohérence.

TABLEAU 7 : LA REPARTITION DES SYMBOLES DANS UN MOT SFBC

FREQUENCE <sup>5</sup>	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$f_{2k}$	$x_1$	$-x_2^*$
$f_{2k+1}$	$x_2$	$x_1^*$

Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur de taille  $K \times 1$  contenant les symboles à transmettre sur les  $K$  sous porteuses. Les symboles transmis,  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$ , sur les antennes 1 et 2 respectivement s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{x} \quad (68)$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* \quad (69)$$

avec

<sup>5</sup> L'indice des sous porteuses commence par 0 et se termine par  $K-1$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (70)$$

Les symboles  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  se propagent dans des canaux à fading non sélectifs en fréquence. Les signaux reçus sur l'antenne de réception  $i$  s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \alpha_{i,1} \cdot \mathbf{s}_1 + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{n}_i \\ &= \alpha_{i,1} \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (71)$$

De la même façon que précédemment, l'équation (71) se développe en

$$\begin{aligned} \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{r}_i &= \alpha_{i,1}^* \cdot \alpha_{i,1} \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,1}^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* + \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{n}_i \\ &= |\alpha_{i,1}|^2 \cdot \mathbf{x} + \alpha_{i,1}^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* + \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}_i^* &= \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{x}^* + \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,2}^* \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{n}_i^* \\ &= |\alpha_{i,2}|^2 \cdot \mathbf{x} - \alpha_{i,2} \cdot \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* - \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_i^* \end{aligned} \quad (73)$$

La somme de (72) et (73) amène à

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_i &= \alpha_{i,1}^* \cdot \mathbf{r}_i + \alpha_{i,2} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}_i^* \\ &= \left( |\alpha_{i,1}|^2 + |\alpha_{i,2}|^2 \right) \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}}_i \\ &= \alpha_i \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}}_i \end{aligned} \quad (74)$$

On retrouve l'équation (65) mais cette fois ci avec un vecteur plus long. On peut retrouver  $\mathbf{x}$  par l'algorithme de maximum de vraisemblance minimisant le métrique

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega^K}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{\mathbf{r}}_i - \alpha_i \cdot \mathbf{x}|^2 \right) \quad (75)$$

Le fait que  $\mathbf{J}$  est une matrice diagonale en bloc de  $\mathbf{J}_2$  rend les blocs des symboles indépendants par paires de 2 et on retrouve  $K/2$  blocs simples décorrélés. Les symboles dans le bloc simple ne sont pas non plus interdépendants. On peut donc minimiser les symboles indépendamment et réduire la complexité de  $|\Omega|^K$  à  $K \times |\Omega|$ .

$$\forall k \in \{0, \dots, K-1\}, \quad \hat{x}_k = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |r_{i,k} - \alpha_i \cdot x|^2 \right) \quad (76)$$

Il est peut être intéressant de transmettre les symboles, en les permutant deux par deux, sur deux fréquences distinctes et éloignées de façon non systématique comme précédemment. Pour cela, étudions et redéfinissons la matrice  $\mathbf{J}$ .

La matrice  $\mathbf{J}$  sert à permuter les symboles par paire, en changeant le signe de l'un des deux symboles. Pour obtenir une diversité espace – fréquence, on ne doit pas, sur une sous porteuse

quelconque, envoyer le même symbole (et son conjugué) sur la même sous porteuse sur les deux antennes. On pose  $\mathcal{J}$  la famille de ces matrices.

Les matrices  $\mathbf{J}$  ont les propriétés suivantes:

**La diagonale des matrices de la famille  $\mathcal{J}$  ne contient que des zéros**

La matrice  $\mathbf{J}$  ne fait que permuter les symboles.

**Les matrices de la famille  $\mathcal{J}$  sont des matrices de permutation entière<sup>6</sup>**

Pour pouvoir permuter les symboles par paire, et changer le signe de l'un des deux symboles.

**Les matrices de la famille  $\mathcal{J}$  sont des matrices anti-symétriques**

Et comme on veut un système orthogonal et sans modifier la valeur absolue des symboles, on peut dire que

**Les matrices de la famille  $\mathcal{J}$  sont des matrices unitaire, normales et orthogonales**

Les contraintes ci-dessus nous imposent

**Les matrices de la famille  $\mathcal{J}$  sont des matrices carrées avec le nombre de lignes pair.**

En construisant une matrice  $\mathbf{J}$  qui respecte les conditions ci-dessus, les équations (68) - (76) restent bien entendu valides.

### 3.7.2.1 Exemple de matrices de la famille $\mathcal{J}$ .

$$\mathbf{J}_2 \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (77)$$

$$\mathbf{J}_4 \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \right\} \quad (78)$$

---

<sup>6</sup> C'est une matrice carrée dont les éléments de la matrice  $a_{m,n} \in \{-1, 0, 1\}$ , et chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul élément non zéro. On peut obtenir cette matrice en multipliant une matrice de permutation élémentaire et une matrice diagonale dont les éléments diagonales de la matrice  $a_{m,m} \in \{-1, 1\}$ .

$$\mathbf{J}_6 \in \left\{ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \dots \right\} \quad (79)$$

$$\mathbf{J}_8 \in \left\{ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \dots \right\} \quad (80)$$

$$\mathbf{J}_{16} \in \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{J}_8 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_8 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{J}_8 \\ -\mathbf{J}_8 & \mathbf{0} \end{array} \right], \dots \right\} \quad (81)$$

### 3.7.2.2 Propriétés des matrices de la famille $\mathcal{J}$

Soit  $\mathbf{J}$  une matrice de la famille  $\mathcal{J}$ . Avec les propriétés énoncées précédemment

$$\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T \quad (82)$$

$$-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}^T = \mathbf{I} \quad (83)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T \quad (84)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} = \mathbf{I} \quad (85)$$

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T = \mathbf{0} \quad (86)$$

$$\text{trace}(\mathbf{J}) = 0 \quad (87)$$

La matrice  $\mathbf{J}$  permet aussi de modéliser l'entrelacement fréquentiel éventuel dans le système.

## 3.8 La diversité espace sur un canal sélectif en fréquence

On a étudié jusqu'à présent les systèmes STBC et SFBC sur des canaux non sélectifs en fréquence. Le canal sélectif en fréquence est modélisé par

$$h = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha(l) \delta\left(t - \frac{l}{\Delta f}\right) \quad (88)$$

avec  $\alpha(l)$  le gain complexe de trajet  $l$ ,  $L$  est le nombre maximum de trajet et  $\Delta f$  la largeur de bande disponible pour le système.

Chaque symbole envoyé parcourt  $L$  chemins différents entre une antenne d'émission et une antenne de réception. Le temps de parcours et le gain de chaque chemin sont différents. Le même symbole arrive  $L$  fois sur l'antenne de réception. Les signaux reçus sont alors le produit de convolution entre le canal et les symboles.

Le technique de modulation OFDM permet de transformer virtuellement le canal sélectif en fréquence en plusieurs sous canaux non sélectifs en fréquence. L'émetteur transmet un bloc de  $K$  symboles sur  $K$  fréquences orthogonales ou sous porteuses différentes. Chaque sous porteuse est affectée par un gain complexe.

Il existe, malgré tout, une interférence entre blocs (*Inter Blocks Interferences*, IBI). Pour contrer ce problème, il suffit de mettre un intervalle de garde ou un préfixe cyclique suffisant pour absorber le IBI comme il est prévu dans l'OFDM.

### 3.9 STBC – OFDM sur un canal sélectif en fréquence

On se limite à la démonstration pour un system à deux antennes d'émission. Le système sera basé sur le schéma d'Alamouti.

#### 3.9.1 Méthode d'émission 1

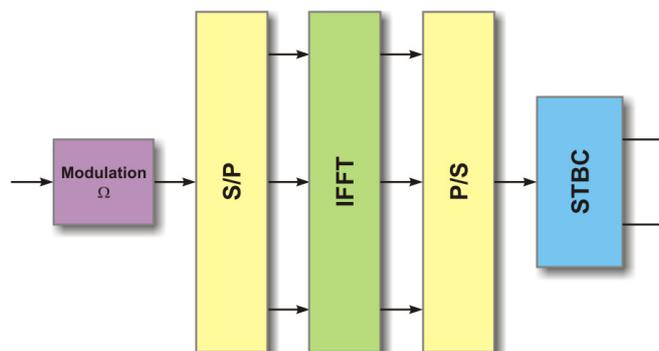


FIGURE 33 : LE SCHEMA D'EMETTEUR STBC OFDM

L'émetteur prend deux blocs de  $K$  symboles et crée deux mots OFDM de taille  $K$ . Ces deux mots sont donnés à l'encodeur STBC qui les transmettra sur 2 antennes d'émissions. Les symboles transmis sont résumés dans le Tableau 8.

Avec

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_p \quad (89)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_p &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{X}_p^* \\ &= \mathbf{J} \cdot (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_p)^*\end{aligned}\quad (90)$$

$$\mathbf{x}_p = \left[ x_{p,0}, \dots, x_{p,K-1} \right]_{K \times 1}^T \quad (91)$$

et  $\mathbf{Q}$  une matrice DFT normalisée.  $\tilde{\mathbf{X}}_p$  est simplement la séquence  $\mathbf{X}_p^*$  inversée dans le temps,  $\tilde{X}_p[n] = X_p^*[-n]$ . Noter qu'il y a un préfixe cyclique entre les blocs successifs transmis.

**TABEAU 8 : LES SIGNAUX ENVOYES A PARTIR DE CHAQUE ANTENNE (METHODE 1)**

TEMPS	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$2p$	$\mathbf{X}_{2p}$	$-\tilde{\mathbf{X}}_{2p+1}$
$2p+1$	$\mathbf{X}_{2p+1}$	$\tilde{\mathbf{X}}_{2p}$

Au récepteur, les signaux reçus pendant le temps  $2p$  et  $2p+1$  s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{y}_{i,2p}(t) = h_{i,1}(t) \otimes \mathbf{X}_{2p}(t) - h_{i,2}(t) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{2p+1}(t) + n_{i,2p}(t) \quad (92)$$

$$\mathbf{y}_{i,2p+1}(t) = h_{i,1}(t) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{2p+1}(t) + h_{i,2}(t) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{2p}(t) + n_{i,2p+1}(t) \quad (93)$$

Due au préfixe cyclique, les équations précédent peuvent être écrites sous la forme matricielle

$$y_{i,2p} = \mathbf{H}_{i,1} \cdot \mathbf{X}_{2p} - \mathbf{H}_{i,2} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{2p+1} + \mathbf{n}_{i,2p} \quad (94)$$

$$y_{i,2p+1} = \mathbf{H}_{i,1} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{2p+1} + \mathbf{H}_{i,2} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{2p} + \mathbf{n}_{i,2p+1} \quad (95)$$

Avec la diagonalisation de  $\mathbf{H}_{i,j}$  [Annexe I], et après la démodulation OFDM, on obtient

$$\mathbf{r}_{i,2p} = \Lambda_{i,1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_{i,2p} - \Lambda_{i,2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{i,2p+1} + \mathbf{N}_{i,2p} \quad (96)$$

$$\mathbf{r}_{i,2p+1} = \Lambda_{i,1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{i,2p+1} + \Lambda_{i,2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{i,2p} + \mathbf{N}_{i,2p+1} \quad (97)$$

avec  $\Lambda_{i,j}$  une matrice diagonale.

On sait que  $DFT(x(n)) = X(n)$ ,  $DFT(x^*(n)) = X^*(-n)$ . Par la dualité, on obtient

$$\mathbf{r}_{i,2p} = \Lambda_{i,1} \cdot \mathbf{x}_{i,2p} - \Lambda_{i,2} \cdot \mathbf{x}_{i,2p+1}^* + \mathbf{N}_{i,2p} \quad (98)$$

$$\mathbf{r}_{i,2p+1} = \Lambda_{i,1} \cdot \mathbf{x}_{i,2p+1} + \Lambda_{i,2} \cdot \mathbf{x}_{i,2p}^* + \mathbf{N}_{i,2p+1} \quad (99)$$

ou sous forme matricielle

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,2p} \\ \mathbf{r}_{i,2p+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i,1} & -\Lambda_{i,2} \\ \Lambda_{i,2}^* & \Lambda_{i,1}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2p} \\ \mathbf{x}_{2p+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,2p} \\ \mathbf{N}_{i,2p}^* \end{bmatrix} \quad (100)$$

### 3.9.2 Méthode d'émission 2

L'émetteur prend deux blocs de  $K$  symboles et crée un mot STBC composé de quatre blocs de taille  $K$ . Chaque bloc est modulé en OFDM avant l'émission par les antennes respectives. Le Tableau 9 résume l'émission.

TABLEAU 9 : LES SIGNAUX ENVOYES A PARTIR DE CHAQUE ANTENNE (METHODE 2)

TEMPS	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$2p$	$\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p}$	$-\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1}^*$
$2p+1$	$\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1}$	$\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p}^*$

Avec

$$\mathbf{x}_p = [x_{p,0}, \dots, x_{p,K-1}]_{K \times 1}^T$$

Il faut noter qu'il y a un préfixe cyclique entre les blocs successifs transmis.

Au récepteur, les signaux reçus pendant le temps  $2p$  et  $2p+1$  s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{y}_{i,2p}(t) = h_{i,1}(t) \otimes (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p})(t) - h_{i,2}(t) \otimes (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1}^*)(t) + n_{i,2p}(t) \quad (101)$$

$$\mathbf{y}_{i,2p+1}(t) = h_{i,1}(t) \otimes (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1})(t) + h_{i,2}(t) \otimes (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p}^*)(t) + n_{i,2p+1}(t) \quad (102)$$

A cause du préfixe cyclique, les équations précédentes peuvent être écrites sous la forme matricielle

$$\mathbf{y}_{i,2p} = \mathbf{H}_{i,1} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p} - \mathbf{H}_{i,2} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1}^* + \mathbf{n}_{i,2p} \quad (103)$$

$$\mathbf{y}_{i,2p+1} = \mathbf{H}_{i,1} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p+1} + \mathbf{H}_{i,2} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x}_{2p}^* + \mathbf{n}_{i,2p+1} \quad (104)$$

Avec la diagonalisation de  $\mathbf{H}_{i,j}$  [Annexe I] et après la démodulation OFDM, on obtient

$$\mathbf{r}_{i,2p} = \mathbf{\Lambda}_{i,1} \cdot \mathbf{x}_{i,2p} - \mathbf{\Lambda}_{i,2} \cdot \mathbf{x}_{i,2p+1}^* + \mathbf{N}_{i,2p} \quad (105)$$

$$\mathbf{r}_{i,2p+1} = \mathbf{\Lambda}_{i,1} \cdot \mathbf{x}_{i,2p+1} + \mathbf{\Lambda}_{i,2} \cdot \mathbf{x}_{i,2p}^* + \mathbf{N}_{i,2p} \quad (106)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}_{i,j}$  une matrice diagonale

Sous la forme matricielle, (105) - (106) s'écrivent

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,2p} \\ \mathbf{r}_{i,2p+1}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_i}_{2K \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{i,1} & -\mathbf{\Lambda}_{i,2} \\ \mathbf{\Lambda}_{i,2}^* & \mathbf{\Lambda}_{i,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}_i}_{2K \times 2K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2p} \\ \mathbf{x}_{2p+1}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}_{2K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,2p} \\ \mathbf{N}_{i,2p}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_i}_{2K \times 1} \quad (107)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{x} + \mathbf{N}_i$$

### 3.9.3 Le décodage

Avec les deux méthodes d'émission, on arrive à la même équation comme l'ont montré les équations (100) et (107). Il faut maintenant déterminer les symboles  $\mathbf{x}_{2p}$  et  $\mathbf{x}_{2p+1}$ . Le fait que  $\Lambda_{i,j}$  est une matrice diagonale nous permet de développer (107) sous la forme

$$\begin{aligned}\Lambda_i^H \cdot \mathbf{r}_i &= \Lambda_i^H \cdot \Lambda_i^H \cdot \mathbf{x} + \Lambda_i^H \cdot \mathbf{N}_i \\ \hat{\mathbf{r}}_i &= \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2p} \\ \mathbf{x}_{2p+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_{i,2p} \\ \tilde{\mathbf{N}}_{i,2p}^* \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (108)$$

$$\text{avec } \lambda_i = \begin{bmatrix} |\Lambda_{i,1}|^2 + |\Lambda_{i,2}|^2 & 0 \\ 0 & |\Lambda_{i,1}|^2 + |\Lambda_{i,2}|^2 \end{bmatrix}_{2K \times 2K}$$

Le décodage ML se fait par

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega^{2K}}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\mathbf{r}_i - \lambda_i \cdot \mathbf{x}|^2 \right) \quad (109)$$

Grâce à la forme diagonale de  $\lambda_i$  dans (108), on sait que les symboles sont indépendants entre eux. La minimisation peut se faire, encore une fois, individuellement.

$$\begin{aligned}\forall k \in \{0, \dots, K-1\}, \quad \hat{x}(k) &= \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |r_i(k) - \lambda_i(k,k) \cdot x|^2 \right) \\ \forall k \in \{k, \dots, 2K-1\}, \quad \hat{x}(k) &= \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |r_i(k) - \lambda_i(k,k) \cdot x^*|^2 \right)\end{aligned}\quad (110)$$

### 3.10 SFBC sur un canal sélectif en fréquence

L'utilisation du SFBC sur un canal sélectif en fréquence rend le système non orthogonal. La détection des signaux n'est plus aussi simple que pour un système orthogonal.

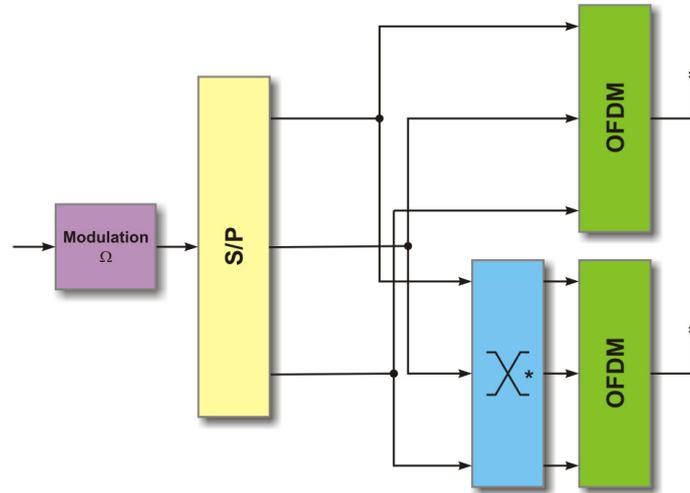


FIGURE 34 : LE SCHEMA D'EMETTEUR SFBC - OFDM

On reprend les équations (68) et (69) tout en sachant qu'il y a un intervalle de garde après l'émission de chaque bloc. Pour transmettre en multi porteuses, on utilise le système OFDM pour assurer l'orthogonalité entre sous porteuses et éliminer l'ICI. Il faut remarquer aussi que dans ces équations, on a omis les termes qui représentent les sous porteuses. Cela n'était pas nécessaire due au profil non sélectif du canal. Avec la sélectivité fréquentielle du canal, il est plus rigoureux d'en tenir compte même si, on verra par la suite, que cela revient à avoir un gain complexe sur chaque sous porteuse.

Les équations (68) et (69) s'écrivent alors

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{x} \tag{111}$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* \tag{112}$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice DFT normalisée.

Ces signaux se propagent dans des canaux sélectifs en fréquence. Les signaux reçus sont la superposition de tous les signaux transmis affectés par les canaux respectifs plus un bruit blanc.

On peut modéliser les signaux reçus sur l'antenne de réception  $i$  par

$$\mathbf{y}_i = h_{i,1} \otimes s_1 + h_{i,2} \otimes s_2 + n_i \tag{113}$$

$h_{i,j}$  est le canal sélectif en fréquence entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception  $i$ .  $\otimes$  correspond au produit de convolution.  $n_i$  est le bruit blanc additif.

L'équation (113) peut être réécrite sous la forme matricielle

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_{i,1} \cdot \mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_{i,2} \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{n}_i \quad (114)$$

avec  $\mathbf{H}_{i,j}$  est une matrice circulante dont les  $L$  premières lignes de la première colonne contient les coefficients des trajets du canal et des zéros sur les lignes restantes. En utilisant les théorèmes généraux d'algèbre matricielle Annexe I ], on peut décomposer  $\mathbf{H}_{i,j}$  sous la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q} \quad (115)$$

avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\widehat{\mathbf{Q}}\mathbf{h})$ ,  $\mathbf{h} = \text{zeropad}_{K-L}(\alpha^0 \dots \alpha^{L-1})_{K \times 1}^T$  et  $\widehat{\mathbf{Q}}$  la matrice DFT.

Ceci nous permet de réécrire (114) sous la forme

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{i,1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}_1 + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{i,2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{n}_i \quad (116)$$

Après la démodulation OFDM, on obtient

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}_i = \mathbf{\Lambda}_{i,1} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{\Lambda}_{i,2} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{n}_i \quad (117)$$

La différence entre (117) et (71) est qu'on a un gain complexe différent pour chaque sous porteuse. Il faut alors égaliser avant de combiner. L'équation (117) se développe sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,1} &= (\mathbf{\Lambda}_2 \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{r}_i \\ &= (\mathbf{\Lambda}_2 \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^* + \mathbf{n}_{i,1} \\ &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Lambda}_2^\dagger \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^* + \mathbf{n}_{i,1} \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,2} &= (\mathbf{\Lambda}_1^*)^\dagger \cdot \mathbf{r}_i^* \\ &= (\mathbf{\Lambda}_1^*)^\dagger \cdot \mathbf{\Lambda}_2^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^* + \mathbf{n}_{i,2} \end{aligned} \quad (119)$$

$(\cdot)^\dagger$  note est le pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice  $(\cdot)$ .

En combinant (118) et (119), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{r}_{i,2} - \mathbf{r}_{i,1} \\ &= (\mathbf{\Lambda}_1^*)^\dagger \cdot \mathbf{\Lambda}_2^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Lambda}_2^\dagger \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{x} + \hat{\mathbf{n}}_i \end{aligned} \quad (120)$$

Pour obtenir les symboles transmis  $\mathbf{x}$ , on doit alors minimiser la métrique<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Le problème étant de tester  $|\Omega|^K$  problèmes des moindres carrés, on peut alors utiliser le pseudo inverse [40]

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega^K}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M \left| \underbrace{\left( \left( \Lambda_1^* \right)^\dagger \cdot \Lambda_2^* \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \Lambda_2^\dagger \cdot \Lambda_1 \right)}_{\mathbf{R}_i} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i - \mathbf{x} \right|^2 \right) \quad (121)$$

On sait que la multiplication entre une matrice diagonale  $\mathbf{A}$  et une autre matrice quelconque  $\mathbf{B}$  donne une matrice  $\mathbf{C}$  ayant la même forme que  $\mathbf{B}$ . Dans (121),  $\boldsymbol{\lambda}$  a alors la même forme que  $\mathbf{J}$ . Comme  $\mathbf{J}$  est une matrice de permutation, on déduit alors que les symboles  $\mathbf{x}$  dans (121) sont indépendants et donc la minimisation peut se faire individuellement. La complexité est alors réduite de  $|\Omega|^K$  à  $K \times |\Omega|$ .

On a finalement

$$x_k = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |R_i[k] - x|^2 \right) \quad (122)$$

### 3.10.1 Les performances

On présente ici quelques résultats pour présenter les performances du SFBC en fonction du nombre de sous porteuses en fonction de la sélectivité du canal en fréquence. La modulation 8PSK est utilisée pour réaliser ces simulations. On considère un fonctionnement idéal à savoir que l'état des canaux est connu au récepteur. Une seule antenne de réception est utilisée.

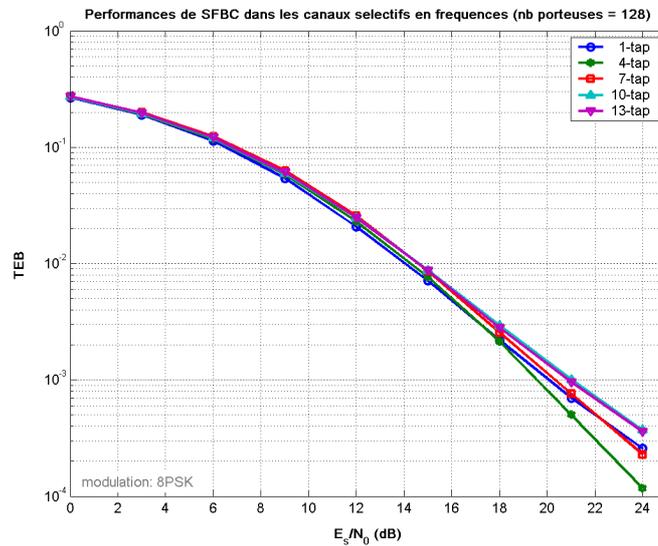
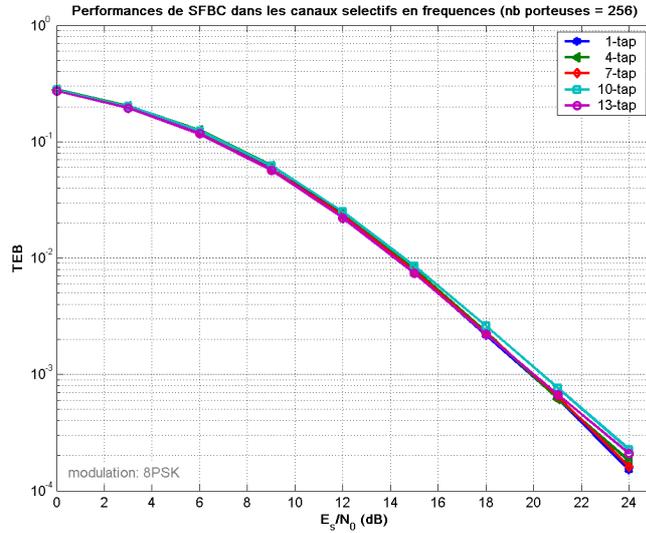


FIGURE 35 : LES PERFORMANCES DE SFBC EN FONCTION DU NOMBRE DE TRAJECTS DANS LES CANAUX (128 SOUS PORTEUSES)

La Figure 35 montre les performances du système quand 128 sous porteuses OFDM sont utilisées. Elle suggère que la sélectivité des canaux peut influencer les performances du SFBC

Son influence n'est pas flagrante à 128 sous porteuses. On remarquera bien sur qu'on a eu quand même un gain de diversité même si le système n'est pas tout à fait orthogonal.



**FIGURE 36 : LES PERFORMANCES DE SFBC EN FONCTION DU NOMBRE DE TRAJETS DANS LES CANAUX (256 SOUS PORTEUSES)**

La Figure 36 montre les performances du SFBC lorsque 256 sous porteuses OFDM sont utilisées. On observe, à première vue, que l'effet de la sélectivité des canaux ne joue pas un rôle essentiel. En réalité, pendant ces simulations, le nombre de réalisations des canaux a été fixé à 20000. On a donc 20000 mots OFDM par simulation. On a plus de bits quand le nombre de sous porteuses augmente et ceci rend les calculs de TEB en quelque sorte plus fiables (en terme de nombre de bits simulés). Ceci explique une courbe plus lisse dans la Figure 36. On peut voir quand même que les performances du SFBC sont légèrement meilleures quand la sélectivité du canal est plus petite.

La Figure 37 illustre les performances du système avec 512 sous porteuses OFDM. On commence à voir que les performances du SFBC dans un canal à fading non sélectif en fréquence sont meilleures que les autres pour les grandes valeurs de SNR.

Finalement, la Figure 38 commence à confirmer l'influence de la sélectivité des canaux en fréquence. On peut voir que l'écart des performances commence à se manifester de façon très nette.

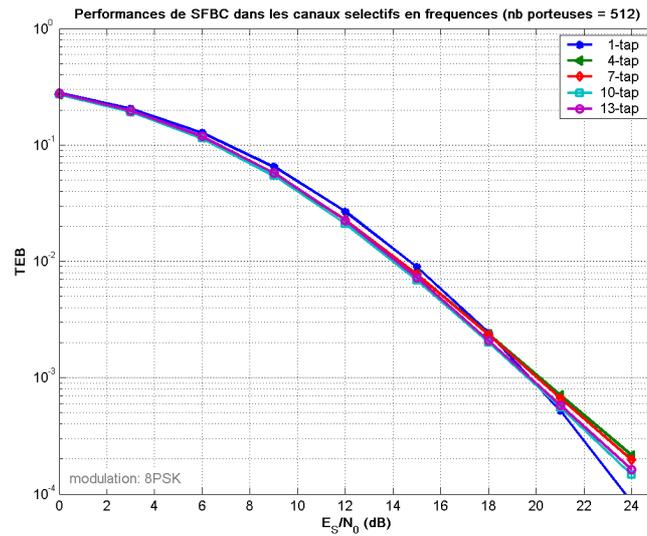


FIGURE 37 : LES PERFORMANCES DE SFBC EN FONCTION DU NOMBRE DE TRAJETS DANS LES CANAUX (512 SOUS PORTEUSES)

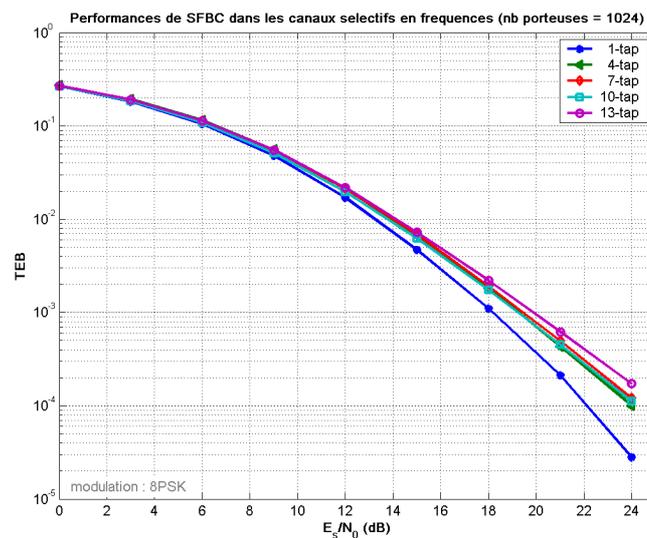


FIGURE 38 : LES PERFORMANCES DE SFBC EN FONCTION DU NOMBRE DE TRAJET DANS LES CANAUX (1024 SOUS PORTEUSES)

L'influence du nombre de sous porteuses devient plus significative lorsque celles-ci augmentent due à la bande de cohérence des canaux. En effet, il a été souligné dans [38] que les codes SFBC nécessitent une bande de cohérence

$$B_c > \frac{P}{T_{S(OFDM)}} \quad (123)$$

Dans cette formule,  $P$  est le nombre de sous porteuses et  $1/T_{S(OFDM)}$  est l'espacement entre sous porteuses.

### 3.11 La diversité espace – temps – fréquence

On peut imaginer de mélanger les deux types de diversité présentés précédemment. On aura cette fois ci les diversités en espace, en temps et en fréquence. Il reste à trouver comment construire des systèmes simples et si possible orthogonaux.

Cette partie présentera le système espace – temps – fréquence (*Space Time Frequency Block Codes*, STFBC). On se limite volontairement au cas de deux antennes d'émission.

Il existe très peu de documents qui traite de ce problème. En plus de cela, la plupart de ces documents me sont inaccessibles. Parmi ces documents existants on peut citer [38][43] et [44].<sup>8</sup>

#### 3.11.1 Problème à résoudre

Avec un système multi porteuses sur un canal sélectif en fréquence, il se peut que le gain d'un sous porteuse de canal soit en *deep fading*. Le symbole envoyé sur cette sous porteuse est perdu et on n'obtient plus la diversité maximale pour ce symbole entraînant la dégradation générale de la performance du système. Les diversité espace – temps ou espace – fréquence ne permettent pas de résoudre ce problème . Il est alors préférable d'augmenter la diversité dans le cas des canaux sélectifs en fréquence pour ne pas trop s'éloigner de la diversité maximum atteignable. On peut imaginer d'augmenter le nombre d'antennes d'émission ou de réception mais ceci a un coût économique. En plus, il n'est pas toujours possible d'augmenter le nombre d'antennes à cause des contraintes d'espacement physique à respecter. Il est alors intéressant de trouver une solution "logicielle". Le mélange entre la diversité espace – temps et espace – fréquence est envisageable. On verra par la suite qu'en gardant deux antennes d'émission et une antenne de réception, on a quatre images de chaque symbole sur quatre canaux différents pendant deux temps symboles tout en maintenant un rendement égal à 1.

### 3.12 La construction du code STFBC

Soit  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  deux blocs de symboles de taille  $K$  à envoyer sur un canal non sélectif en fréquence avec  $K$  multiple de 2.

Soit  $\theta$  l'opérateur qui encode deux vecteurs pour obtenir la diversité espace – temps et  $\phi^j$  l'opérateur qui encode deux vecteurs pour obtenir la diversité espace – fréquence en différentielle pour l'antenne d'émission  $j$ .

<sup>8</sup> A noter que l'architecture présentée ici est inspirée de [43]

L'opérateur  $\theta$  prend en entrée deux vecteurs successifs  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  de taille  $K$  pour générer quatre vecteurs de même taille groupés par groupe de deux vecteurs successifs.

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{matrix} \right\}_{\substack{t_1 \\ t_2}} \xrightarrow{\theta} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{s}_1^1, \mathbf{s}_2^1 \\ \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_2^2 \end{matrix} \right\}_{\substack{t_1 \\ t_2}} \quad (124)$$

Chaque groupe est destiné à une antenne d'émission et les deux vecteurs seront transmis successivement. La structure de l'émetteur est présentée dans la Figure 39.

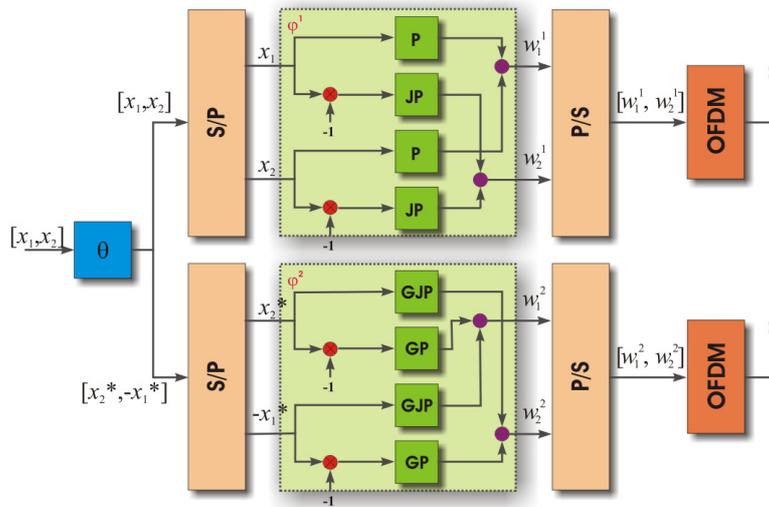


FIGURE 39 : LE SCHEMA DE L'EMETTEUR STFBC PROPOSE

Les  $\mathbf{s}_\tau^j$  prennent les valeurs présentées dans le Tableau 10.

TABLEAU 10 : LES VALEURS DE  $\mathbf{s}_\tau^j$

$\mathbf{s}_\tau^j$		ANTENNE	
		1	2
TEMPS	1	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2^*$
	2	$\mathbf{x}_2$	$-\mathbf{x}_1^*$

Sur chaque branche de sortie  $j$  de  $\theta$  se trouve un opérateur  $\phi^j$  pour créer la diversité fréquentielle. L'opérateur  $\phi^j$  prend deux vecteurs successifs  $\mathbf{s}_1^j, \mathbf{s}_2^j$  et fournit deux vecteurs successifs  $\mathbf{w}_1^j, \mathbf{w}_2^j$  à la sortie.

$$\{\mathbf{s}_1^j, \mathbf{s}_2^j\} \xrightarrow{\phi^j} \{\mathbf{w}_1^j, \mathbf{w}_2^j\} \quad (125)$$

Les valeurs de  $\mathbf{w}_1^j, \mathbf{w}_2^j$  sont les suivantes

TABLEAU 11 : LES VALEURS DE  $\mathbf{w}_\tau^j$

$j$	$\mathbf{w}_1^j$	$\mathbf{w}_2^j$
1	$\mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_1^1 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_2^1$	$-\mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_2^1 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_1^1$
2	$-\mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_2^2$	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_2^2 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_1^2$

$\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{J}$  sont définis ci-dessous avec  $\mathbf{P}$  qui est une matrice de permutation carrée de taille  $K \times K$ ,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad \text{avec } \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{et } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad \text{avec } \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

La matrice  $\mathbf{G}$  nous permet de changer le signe sur une moitié de vecteur. La matrice  $\mathbf{J}$  représente la permutation par paire des symboles adjacents et le changement de signe sur l'un des deux symboles afin de créer la diversité espace – fréquence. La matrice de permutation  $\mathbf{P}$  nous indique qu'on peut réarranger le vecteur des symboles pour permuer les symboles afin de construire une diversité espace fréquence avec des symboles pas forcément adjacents. On peut aussi voir  $\mathbf{P}$  comme un entrelaceur fréquentiel.

Les vecteurs  $\mathbf{w}_\tau^j$  seront modulés en OFDM et puis transmis sur le canal via l'antenne  $j$  successivement. C'est-à-dire à l'instant  $\tau$ ,  $\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^1$  et  $\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^2$  sont envoyés simultanément sur le canal.

### 3.12.1 Canal non sélectif en fréquence

Le canal est non sélectif en fréquence avec un gain complexe  $h_{i,j}$  constant pendant la transmission des quatre vecteurs. Le signal reçu à l'instant  $\tau$  s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{y}_\tau^i = h_{i,1} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^1 + h_{i,2} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^2 + \mathbf{N}_\tau^i \quad (126)$$

Après la démodulation OFDM, on a

$$\mathbf{r}_\tau^i = h_{i,1} \cdot \mathbf{w}_\tau^1 + h_{i,2} \cdot \mathbf{w}_\tau^2 + \mathbf{n}_\tau^i \quad (127)$$

Les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{J}$  sont diagonales en bloc. On peut donc travailler sur des symboles par bloc et donc par paire. Pour respecter la possibilité de permuer la position des symboles dans le vecteur, on notera respectivement  $\alpha_\tau^j(k_1)$ ,  $\alpha_\tau^j(k_2)$  le premier symbole et le deuxième de la paire quelconque issue du vecteur  $\alpha_\tau^j$ . Dans le cas où  $\mathbf{P}$  est une matrice identité,

$$\alpha_\tau^j(k_1) \rightarrow \alpha_\tau^j(2k), \quad \alpha_\tau^j(k_2) \rightarrow \alpha_\tau^j(2k+1) \quad \text{avec } k \in \left\{0, \dots, \frac{K}{2}\right\}.$$

Reprenons les calculs par paire. On a

$$w_{1,k}^1 = \begin{bmatrix} w_1^1(k_1) \\ w_1^1(k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^1(k_1) \\ s_1^1(k_2) \end{bmatrix} + \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_2^1(k_1) \\ s_2^1(k_2) \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$w_{2,k}^1 = \begin{bmatrix} w_2^1(k_1) \\ w_2^1(k_2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} s_2^1(k_1) \\ s_2^1(k_2) \end{bmatrix} - \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_1^1(k_1) \\ s_1^1(k_2) \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$w_{1,k}^2 = \begin{bmatrix} w_1^2(k_1) \\ w_1^2(k_2) \end{bmatrix} = -\mathbf{G}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_1^2(k_1) \\ s_1^2(k_2) \end{bmatrix} + \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_2^2(k_1) \\ s_2^2(k_2) \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$w_{2,k}^2 = \begin{bmatrix} w_2^2(k_1) \\ w_2^2(k_2) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_2^2(k_1) \\ s_2^2(k_2) \end{bmatrix} - \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} s_1^2(k_1) \\ s_1^2(k_2) \end{bmatrix} \quad (131)$$

Le développement de(128) - (131) nous donne

$$w_1^1(k_1) = s_1^1(k_1) + s_2^1(k_2) = x_1(k_1) + x_2(k_2) \quad (132)$$

$$w_1^1(k_2) = s_1^1(k_2) - s_2^1(k_1) = x_1(k_2) - x_2(k_1) \quad (133)$$

$$w_2^1(k_1) = -s_2^1(k_1) - s_1^1(k_2) = -x_2(k_1) - x_1(k_2) \quad (134)$$

$$w_2^1(k_2) = -s_2^1(k_2) + s_1^1(k_1) = -x_2(k_2) + x_1(k_1) \quad (135)$$

$$w_1^2(k_1) = s_1^2(k_1) - s_2^2(k_2) = x_2^*(k_1) + x_1^*(k_2) \quad (136)$$

$$w_1^2(k_2) = s_1^2(k_2) - s_2^2(k_1) = -x_2^*(k_2) + x_1^*(k_1) \quad (137)$$

$$w_2^2(k_1) = -s_2^2(k_1) + s_1^2(k_2) = x_1^*(k_1) + x_2^*(k_2) \quad (138)$$

$$w_2^2(k_2) = s_2^2(k_2) + s_1^2(k_1) = -x_1^*(k_2) + x_2^*(k_1) \quad (139)$$

L'écriture par paire de (127) nous donne

$$\mathbf{r}_{\tau,k}^i = \begin{bmatrix} r_{\tau}^i(k_1) \\ r_{\tau}^i(k_2) \end{bmatrix} = h_{i,1} \cdot \begin{bmatrix} w_{\tau}^1(k_1) \\ w_{\tau}^1(k_2) \end{bmatrix} + h_{i,2} \cdot \begin{bmatrix} w_{\tau}^2(k_1) \\ w_{\tau}^2(k_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{\tau}^i(k_1) \\ n_{\tau}^i(k_2) \end{bmatrix} \quad (140)$$

ou encore

$$\begin{aligned} r_1^i(k_1) &= h_{i,1} \cdot w_1^1(k_1) + h_{i,2} \cdot w_1^2(k_1) + n_1^i(k_1) \\ &= h_{i,1} \cdot (x_1(k_1) + x_2(k_2)) + h_{i,2} \cdot (+x_2^*(k_1) + x_1^*(k_2)) + n_1^i(k_1) \\ &= h_{i,1} \cdot x_1(k_1) + h_{i,2} \cdot x_1^*(k_2) + h_{i,2} \cdot x_2^*(k_1) + h_{i,1} \cdot x_2(k_2) + n_1^i(k_1) \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} r_2^i(k_1) &= h_{i,1} \cdot w_2^1(k_1) + h_{i,2} \cdot w_2^2(k_1) + n_2^i(k_1) \\ &= h_{i,1} \cdot (-x_2(k_1) - x_1(k_2)) + h_{i,2} \cdot (x_1^*(k_1) + x_2^*(k_2)) + n_2^i(k_1) \\ &= h_{i,2} \cdot x_1^*(k_1) - h_{i,1} \cdot x_1(k_2) - h_{i,1} \cdot x_2(k_1) + h_{i,2} \cdot x_2^*(k_2) + n_2^i(k_1) \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned}
 r_1^i(k_2) &= h_{i,1} \cdot w_1^1(k_2) + h_{i,2} \cdot w_1^2(k_2) + n_1^i(k_2) \\
 &= h_{i,1} \cdot (x_1(k_2) - x_2(k_1)) + h_{i,2} \cdot (-x_2^*(k_2) + x_1^*(k_1)) + n_1^i(k_2) \\
 &= h_{i,2} \cdot x_1^*(k_1) + h_{i,1} \cdot x_1(k_2) - h_{i,1} \cdot x_2(k_1) - h_{i,2} \cdot x_2^*(k_2) + n_1^i(k_2)
 \end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
 r_2^i(k_2) &= h_{i,1} \cdot w_2^1(k_2) + h_{i,2} \cdot w_2^2(k_2) + n_2^i(k_2) \\
 &= h_{i,1} \cdot (-x_2(k_2) + x_1(k_1)) + h_{i,2} \cdot (-x_1^*(k_2) + x_2^*(k_1)) + n_2^i(k_2) \\
 &= h_{i,1} \cdot x_1(k_1) - h_{i,2} \cdot x_1^*(k_2) + h_{i,2} \cdot x_2^*(k_1) - h_{i,1} \cdot x_2(k_2) + n_2^i(k_2)
 \end{aligned} \tag{144}$$

Sous la forme matricielle, (141) - (144) sont représentées par

$$\begin{bmatrix} r_1^i(k_1) \\ r_2^{i*}(k_1) \\ r_1^{i*}(k_2) \\ r_2^i(k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{i,1} & h_{i,2} & h_{i,2} & h_{i,1} \\ h_{i,2}^* & -h_{i,1}^* & -h_{i,1}^* & h_{i,2}^* \\ h_{i,2}^* & h_{i,1}^* & -h_{i,1}^* & -h_{i,2}^* \\ h_{i,1} & -h_{i,2} & h_{i,2} & -h_{i,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k_1) \\ x_1^*(k_2) \\ x_2^*(k_1) \\ x_2(k_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1^i(k_1) \\ n_2^i(k_1) \\ n_2^i(k_1) \\ n_2^i(k_2) \end{bmatrix} \tag{145}$$

ou simplement

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}_i \tag{146}$$

La complexité de calculs du décodeur optimal de maximum de vraisemblance est prohibitive pour être utilisée ici. Mais grâce à l'orthogonalité de la matrice  $\mathbf{h}_i$ , on peut minimiser individuellement chaque symbole.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega^K} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{\mathbf{R}}_i - \rho_h \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}|^2 \right) \tag{147}$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{h}_i^H \hat{\mathbf{r}}_i \tag{148}$$

et individuellement

$$x_\tau(k) = \arg \min_{x_\tau \in \Omega} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{R}_{i,\tau}(k) - \rho_h \tilde{x}_\tau(k)|^2 \right) \tag{149}$$

avec  $\tau$  pour nous rappeler de conjuguer le symbole  $x_\tau(k)$  lorsque nécessaire suivant (145).

On peut aussi avoir recours à une solution sous optimale du type MMSE ou zéro forcing. Les estimations softs des symboles envoyés sont obtenues par

### 3.12.1.1 MMSE

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{h}_i^H \cdot \mathbf{h}_i + \sigma_i^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{h}_i^H \cdot \hat{\mathbf{r}}_i \tag{150}$$

### 3.12.1.2 ZF

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{h}_i^T \cdot \hat{\mathbf{r}}_i \quad (151)$$

Les valeurs décidées seront alors déterminées en tenant compte de toutes les estimations soft venant de toutes les antennes de réception.

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega^K}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}|^2 \right) \quad (152)$$

ou individuellement

$$\hat{x}(\kappa) = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{x}_i(\kappa) - x|^2 \right) \quad (153)$$

Ces estimations soft peuvent être utilisées à l'entrée d'un décodeur de canal comme un LDPC ou un turbo code.

## 3.12.2 Canal sélectif en fréquence

Soit

$$h_{i,j}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{i,j}(l) \cdot \delta \left( t - \frac{l}{\Delta f} \right) \quad (154)$$

la réponse du canal sélectif en fréquence. Le signal envoyé sur le canal après la modulation OFDM s'écrit sous la forme

$$\mathbf{W}_\tau^j = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^j \quad (155)$$

Les mots OFDM envoyés sur le canal contiennent des préfixes cycliques. De la même façon que pour les systèmes STBC ou SFBC, le signal reçu sur l'antenne de réception peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}_\tau^i(t) = \sum_{j=1}^N h_{i,j}(t) \otimes \mathbf{W}_\tau^j(t) + \mathbf{n}_\tau^i(t) \quad (156)$$

ou encore

$$\mathbf{y}_\tau^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{i,j} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{w}_\tau^j + \mathbf{n}_\tau^i \quad (157)$$

Après la diagonalisation de  $\mathbf{H}$  et la démodulation OFDM, on a

$$\mathbf{r}_\tau^i = \sum_{j=1}^N \Lambda_{i,j} \cdot \mathbf{w}_\tau^j + \mathbf{n}_\tau^i \quad (158)$$

avec  $\Lambda_{i,j} = \operatorname{diag}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}_{i,j})$  et  $\mathbf{h}_{i,j} = [\alpha_{i,j}(0) \dots \alpha_{i,j}(L-1) \ 0 \dots 0]^T_{K \times L}$

Grâce à la forme diagonale en blocs des matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{J}$ , on peut travailler sur chaque paire des fréquences  $f_{k_1}$  et  $f_{k_2}$  comme dans le cas du canal non sélectif en fréquence. La différence est qu'on a un gain complexe probablement différent sur chaque sous porteuse. L'équation (140) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tau,k}^i &= \begin{bmatrix} r_{\tau}^i(k_1) \\ r_{\tau}^i(k_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda_{i,1}(k_1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{i,1}(k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{\tau}^1(k_1) \\ w_{\tau}^1(k_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_{i,2}(k_1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{i,2}(k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{\tau}^2(k_1) \\ w_{\tau}^2(k_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{\tau}^i(k_1) \\ n_{\tau}^i(k_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (159)$$

Ceci se développe en

$$\begin{aligned} r_1^i(k_1) &= \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot w_1^1(k_1) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot w_1^2(k_1) + n_1^i(k_1) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot (x_1(k_1) + x_2(k_2)) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot (x_2^*(k_1) + x_1^*(k_2)) + n_1^i(k_1) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot x_1(k_1) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot x_1^*(k_2) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot x_2^*(k_1) + \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot x_2(k_2) + n_1^i(k_1) \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} r_2^i(k_1) &= \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot w_2^1(k_1) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot w_2^2(k_1) + n_2^i(k_1) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot (-x_2(k_1) - x_1(k_2)) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot (x_1^*(k_1) + x_2^*(k_2)) + n_2^i(k_1) \\ &= \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot x_1^*(k_1) - \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot x_1(k_2) - \Lambda_{i,1}(k_1) \cdot x_2(k_1) + \Lambda_{i,2}(k_1) \cdot x_2^*(k_2) + n_2^i(k_1) \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} r_1^i(k_2) &= \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot w_1^1(k_2) + \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot w_1^2(k_2) + n_1^i(k_2) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot (x_1(k_2) - x_2(k_1)) + \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot (-x_2^*(k_2) + x_1^*(k_1)) + n_1^i(k_2) \\ &= \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot x_1^*(k_1) + \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot x_1(k_2) - \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot x_2(k_1) - \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot x_2^*(k_2) + n_1^i(k_2) \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} r_2^i(k_2) &= \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot w_2^1(k_2) + \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot w_2^2(k_2) + n_2^i(k_2) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot (-x_2(k_2) + x_1(k_1)) + \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot (-x_1^*(k_2) + x_2^*(k_1)) + n_2^i(k_2) \\ &= \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot x_1(k_1) - \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot x_1^*(k_2) + \Lambda_{i,2}(k_2) \cdot x_2^*(k_1) - \Lambda_{i,1}(k_2) \cdot x_2(k_2) + n_2^i(k_2) \end{aligned} \quad (163)$$

Sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} r_1^i(k_1) \\ r_2^i(k_1) \\ r_1^i(k_2) \\ r_2^i(k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i,1}(k_1) & \Lambda_{i,2}(k_1) & \Lambda_{i,2}(k_1) & \Lambda_{i,1}(k_1) \\ \Lambda_{i,2}^*(k_1) & -\Lambda_{i,1}^*(k_1) & -\Lambda_{i,1}^*(k_1) & \Lambda_{i,2}^*(k_1) \\ \Lambda_{i,2}^*(k_2) & \Lambda_{i,1}^*(k_2) & -\Lambda_{i,1}^*(k_2) & -\Lambda_{i,2}^*(k_2) \\ \Lambda_{i,1}(k_2) & -\Lambda_{i,2}(k_2) & \Lambda_{i,2}(k_2) & -\Lambda_{i,1}(k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k_1) \\ x_1^*(k_2) \\ x_2^*(k_1) \\ x_2(k_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1^i(k_1) \\ n_2^i(k_1) \\ n_1^i(k_2) \\ n_2^i(k_2) \end{bmatrix} \quad (164)$$

ou simplement

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}_i \quad (165)$$

On n'a plus un système orthogonal. On procède alors à une estimation soft sous optimale

### 3.12.2.1 MMSE

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{\Lambda}^H \cdot \mathbf{\Lambda} + \sigma^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda}^H \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (166)$$

### 3.12.2.2 ZF

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}^{\dagger} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (167)$$

On décide alors sur les symboles en tenant compte des estimations softs venant de toutes les antennes de réception par

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega^K}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}|^2 \right) \quad (168)$$

ou individuellement

$$\hat{x}(\kappa) = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{i=1}^M |\hat{x}_i(\kappa) - x|^2 \right) \quad (169)$$

### 3.12.3 Le décodage

Les équations (152),(153),(168) et (169) nous permettent de calculer les métriques de quatre symboles différents sur deux sous porteuses grâce à la forme diagonale en blocs de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{J}$ . Pour décoder complètement le système, il faut le faire pour toutes les paires de fréquences, soit  $K/2$  sous blocs. Ceci peut paraître prohibitif en temps de calculs, mais on peut implémenter le décodeur en plusieurs sous décodeurs parallèles et indépendants pour gagner du temps.

## 3.13 Performance du codage STFBC proposé

Etant donné que le codage STFBC est en cours de développement au sein de notre groupe de recherche nous ne pouvons présenter pour l'instant que des exemples simples. Les résultats présentés ci-dessous ne sont pas à prendre comme références mais plutôt pour donner une idée générale du comportement de ce système. A noter que la variance du bruit a été fixé à  $\sigma^2/2$  par dimension.

On présente ici les performances du système STFBC élaboré précédemment. Les Figure 40 et Figure 41 montrent les profils des canaux utilisés pour la simulation. On considère trois types de canaux : un canal à fading non sélectif en fréquence, un canal sélectif en fréquence à 5 trajets, et un canal sélectif en fréquence à 10 trajets. On regardera d'abord les effets de ces canaux sur la performance du STFBC proposé ici et puis on étudiera un éventuel effet de la variation du nombre de sous porteuses sur ces performances quand le canal présenté Figure 40 est utilisé.

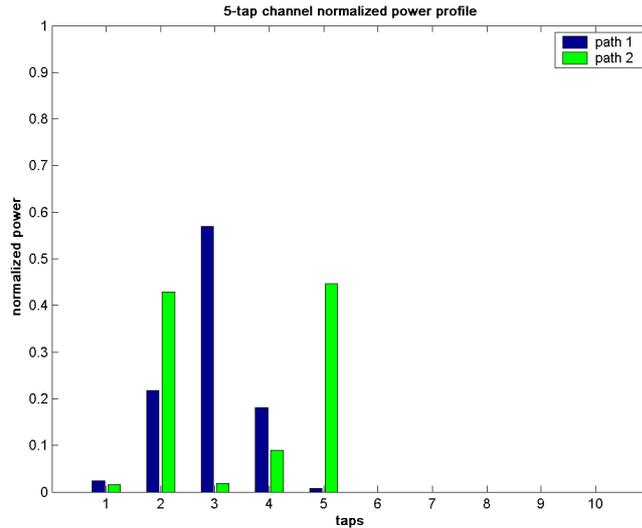


FIGURE 40 : LE PROFIL DE LA PUISSANCE MOYENNE NORMALISEE DES CANAUX A 5 TRAJETS

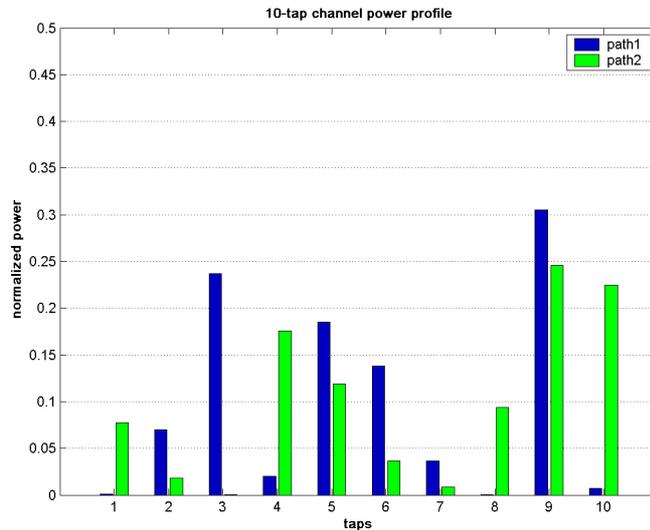
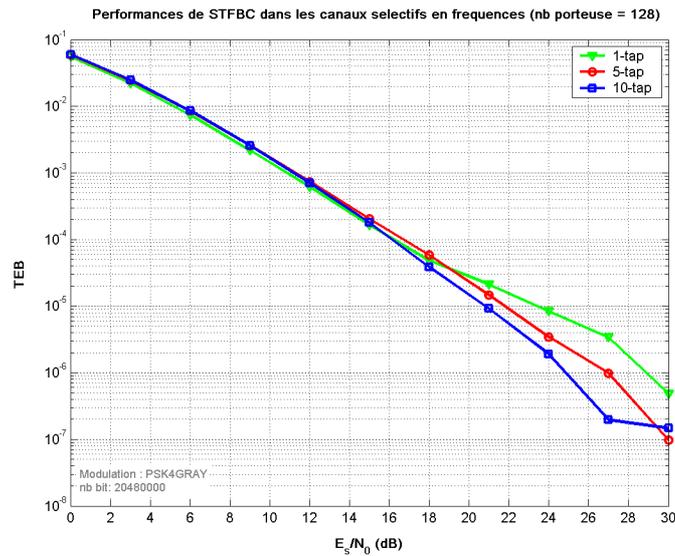


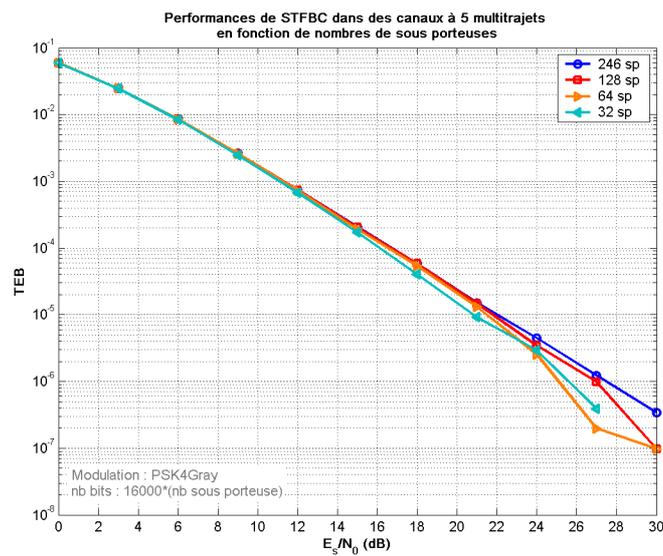
FIGURE 41 : LE PROFIL DE LA PUISSANCE MOYENNE NORMALISEE DES CANAUX A 10 TRAJETS

La Figure 42 montre les performances du STFBC dans les canaux sélectifs en fréquences lorsque le nombre de sous porteuses est fixé à 128. On peut estimer que les performances s'améliorent avec la sélectivité fréquentielle des canaux.

Dans un canal à fading variant dans le temps, tout le mot OFDM est perdu s'il a été transmis pendant un *deep fading*, alors qu'avec un canal sélectif en fréquence variant dans le temps, il n'y a seulement qu'une partie des sous porteuses qui subissent en même temps le phénomène de *deep fading*. La diversité fréquentielle permet de maintenir un peu de gain en diversité dans ces conditions ce qui explique l'amélioration des performances.



**FIGURE 42 : LES PERFORMANCES DE STFBC DANS DES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCE AVEC LE NOMBRE DE SOUS PORTEUSES FIXE A 128**



**FIGURE 43 : PERFORMANCES DE STFBC DANS DES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCE A 5 TRAJETS EN FONCTION DE NOMBRE DE SOUS PORTEUSES**

La Figure 43 illustre les performances du STFBC en fonction de nombre de sous porteuses pour un canal présenté en Figure 40. Comparé avec les performances du codage STBC, on peut voir une amélioration de 1 à 2 dB pour un TEB égal à  $10^{-3}$ . Il m'est impossible de comparer ces résultats avec le système SFBC car toutes les simulations faites en SFBC sont en modulation 8PSK alors qu'ici, on utilise la modulation QPSK codé Gray. L'importance ici est de constater une amélioration des performances possibles par rapport au système STBC et SFBC. Il faut noter que ces simulations sont en cours de réalisation au sein de notre laboratoire.

Il reste donc encore beaucoup d'études et des vérifications à faire avant de pouvoir conclure sur les performances du système proposé. On peut aussi, par exemple, étudier les effets de la matrice de permutation  $\mathbf{P}$  sur un profil de canal donné ce qui permettra une éventuelle optimisation de la transmission lorsque l'émetteur connaît l'état général des canaux.

### **3.14 Conclusion**

On a vu dans ce chapitre les méthodes pour obtenir des diversités de transmission sur les symboles en espace temps, espace fréquence ou la combinaison de ces deux dernières. Les résultats des simulations présentés ici montrent que ces méthodes nous permettent d'obtenir des gains considérables avec peu de complexité de décodage grâce à l'orthogonalité des symboles en émission. Malheureusement, pour obtenir le maximum de gain de diversité, il faut garder l'orthogonalité des symboles transmis et ceci a pour conséquence entre autres de contraindre les canaux à rester invariants pendant un mot STBC, SFBC ou STFBC, ce qui n'est pas toujours évident.



## Chapitre 4 Système turbo basé sur l'algorithme EM

..... / ..... / ..... / ..... /  
 ..... / ..... / ..... / .....

### 4.1 Introduction

De par l'amélioration constante des capacités des circuits numériques, l'approche turbo devient de plus en plus répandue dans les systèmes de transmission actuels. Depuis leur invention au début des années 90, les turbo codes ont inspiré beaucoup d'architectures de récepteurs : on peut citer par exemple l'annulation d'IES (Interférence Entre Symboles) avec les turbo égaliseurs ou la suppression de l'IAM (Interférence d'Accès Multiple en CDMA par exemple) avec les turbo annuleurs d'interférences.

Dans un système standard de communication numérique radio mobile, l'utilisation d'un codeur de canal correcteur d'erreur puissant comme les turbos codes ou les LDPC semble nécessaire afin d'obtenir une très bonne performance en terme de taux d'erreur binaire (TEB). Ces codes correcteurs d'erreurs sont plus performants lorsque les erreurs de transmission se situent aléatoirement dans un bloc ou dans une séquence protégée. Or, ces erreurs se produisent souvent par paquets à cause des caractéristiques des canaux de communication radio mobiles. Pour convertir ces erreurs successives en erreurs aléatoires, on introduit un simple entrelaceur réversible qui permet de mélanger une série d'informations. Une série d'erreurs successives dans une partie du bloc entrelacé deviendra des erreurs éparpillées aléatoirement sur tout le bloc et rendra le code correcteur d'erreur plus performant. Les informations binaires en sortie de ces entrelaceurs sont ensuite modulées et filtrées pour produire des signaux électriques adaptés avant de les transmettre dans le canal. La Figure 44(a) montre la structure d'un émetteur typique. Malheureusement les perturbations et les détériorations dues aux canaux de communication limitent encore les performances de ces codeurs de canal. Il y a donc plusieurs méthodes pour remédier à ce problème. La Figure 44 nous donne une vue globale des solutions courantes envisageables aux récepteurs pour obtenir les meilleures performances possibles.

Il ne faut pas oublier que le rôle essentiel d'un récepteur est d'estimer et de reproduire correctement les informations envoyées par un ou plusieurs émetteurs. Il doit trouver la séquence la plus probable qui a été transmise en tenant compte des informations et des relations

statistiques parfois complexes entre l'observation et l'information effectivement transmise. Ceci est le principe de base du détecteur optimal en terme de TEB présenté Figure 44(b). Il teste simplement toutes les combinaisons possibles de la séquence.

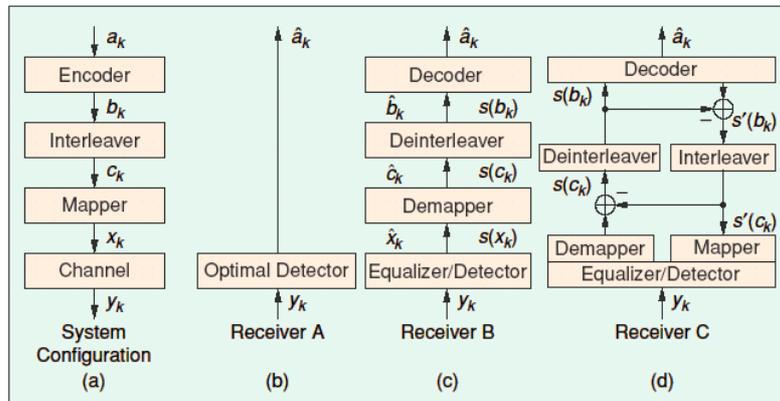


FIGURE 44 : LA VUE GLOBALE DES ARCHITECTURES COURANTES IMPLANTEES AUX RECEPTEURS [44]

Malheureusement, il existe beaucoup plus de facteurs à considérer pour expliquer les différences entre les signaux émis et observés, en plus des relations statistiques pas forcément évidentes à manipuler. De plus, la complexité des opérations à faire pour déterminer la séquence la plus probable est souvent exponentiellement fonction de la longueur de cette séquence elle même. Ceci rend rapidement ce type de récepteur indésirable.

Une autre méthode sous optimale consiste à éliminer tout d'abord l'effet du canal, soit en multipliant le signal reçu par l'inverse du canal (*zero forcing*), soit par des algorithmes de filtrage plus ou moins compliqués comme ceux qui visent à minimiser l'erreur quadratique moyenne (MSE) par exemple. Ces opérations dites d'égalisation du canal produiront une estimation de la séquence transmise en fonction du signal reçu. Ces estimations seront ensuite démodulées et désentrelacées avant de passer dans le décodeur de canal comme illustré par la Figure 44(c). Mais, ces opérations éliminent une partie des informations utiles pour le décodeur. Le décodeur fonctionnera probablement mieux s'il connaît aussi les fiabilités associées à ces informations binaires. Une petite modification dans l'égaliseur permet de fournir cette information supplémentaire non déterministe appelée aussi l'information soft.

L'apparition des turbo codes nous a fait réaliser que les informations softs ne sont pas nécessairement unidirectionnelles. L'égaliseur peut aussi utiliser les valeurs soft fournies éventuellement par le décodeur de canal pour améliorer son estimation de canal et la fiabilité des symboles codés. On arrive ainsi à la construction d'une structure dite *turbo égaliseur* représentée schématiquement en Figure 44(d). Une telle structure permet un bouclage complet entre le décodeur et l'égaliseur. Il y a cependant un petit détail à considérer. Quand l'égaliseur ou le décodeur prend en compte une information à son entrée, il considère que celle-ci est indépendante des autres informations qu'il possède. Or, la probabilité qu'un bit précis prenne

une valeur supposée fournie par le décodeur de canal est forcément dépendante de l'information que possède l'égaliseur sur le même bit ou la même information. Du point de vue de la théorie de l'information, il n'y a pas d'intérêt à ce que l'égaliseur fournisse une information sur un bit au décodeur et que le décodeur lui fournisse une information redondante sur ce même bit. Il faut alors construire les informations softs de façon indirecte c'est-à-dire trouver l'information de fiabilité d'un bit en fonction de tous ou une partie des autres bits. On arrive ainsi à la notion d'information extrinsèque.

Dans ce chapitre, on considère la construction d'un système turbo permettant de décoder un système à diversité temps espace de façon itérative. L'algorithme EM sera interfacé avec le code LDPC et les deux modules constitueront un système turbo itératif nommé turbo récepteur. Le système de base a été proposé par [46] et présenté ci-dessous. Une modification a été apportée à ce système et a fait l'objet d'une communication dans une conférence internationale [47] qui est présentée à la fin de ce chapitre.

## 4.2 Turbo égaliseur MAP-EM

### 4.2.1 Description

On considère un système OFDM à  $K$  sous porteuses avec la diversité temps espace (STC). L'émetteur utilise  $N$  antennes d'émission et le récepteur a  $M$  antennes de réception. Les signaux transmis se propagent dans des canaux sélectifs en temps et en fréquence.

Chaque mot STC contient  $P$  mots OFDM successifs et chaque mot OFDM contient  $NK$  symboles STC transmis simultanément pendant un timeslot ou créneau temporel. Chaque symbole STC est transmis sur une sous porteuse précise du multiplexe OFDM et sur une antenne d'émission particulière.

On suppose que les canaux restent invariants pendant un mot OFDM (pendant un timeslot). Ces canaux ne sont pas corrélés entre eux mais ils sont éventuellement corrélés en temps et en fréquence.

Le signal arrivant sur une antenne de réception  $i$  est la superposition de tous les signaux transmis par les  $N$  antennes d'émission. Le fait que le canal soit différent entre chaque paire d'antenne d'émission et de réception nous donne des signaux reçus différents sur chacune des  $M$  antennes de réception. Après les filtres adaptés et la discrétisation du signal, la transformée de Fourier discret (DFT) est appliquée aux signaux temporels discrétisés pour obtenir

$$\mathbf{y}[p,k] = \mathbf{H}[p,k] \cdot \mathbf{x}[p,k] + \mathbf{z}[p,k] \quad (1)$$

avec  $k=0,\dots,K-1$ ,  $p=1,\dots,P$  et  $\mathbf{H}[p,k] \in \mathbb{C}^{M \times N}$  la matrice complexe représentant la réponse fréquentielle complexe des canaux sur la  $k^{\text{ième}}$  sous porteuse et sur le  $p^{\text{ième}}$  time-slot.  $\mathbf{x}[p,k] \in \mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{y}[p,k] \in \mathbb{C}^M$  et  $\mathbf{z}[k,p] \in \mathbb{C}^M$  sont respectivement les signaux transmis, les signaux reçus et le bruit gaussien complexe à variance unité sur la  $k^{\text{ième}}$  sous porteuse et sur le  $p^{\text{ième}}$  timeslot ou créneau temporel.

La réponse impulsionnelle du canal entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception  $i$  s'écrit sous la forme

$$h_{i,j}(\tau;t) = \sum_{l=1}^{L_f} \alpha_{i,j}(l;t) \cdot \delta\left(\tau - \frac{n_l}{K\Delta_f}\right) \quad (2)$$

avec  $\delta(\cdot)$  qui désigne le Dirac,  $L_f$  est le nombre de trajets et  $\alpha_{i,j}(l;t)$  est le gain complexe non nul du  $l^{\text{ième}}$  trajet dont le retard est  $\frac{n_l}{K\Delta_f}$ .  $\Delta_f$  est la largeur de bande d'une sous porteuse OFDM et  $K\Delta_f$  est la largeur de bande du système OFDM.

On peut modéliser  $\alpha_{i,j}(l;t)$  comme étant un processus aléatoire stationnaire au sens large à dispersion non corrélée<sup>9</sup> et avec un spectre Doppler à bande et puissance limitées [48]. Il en découle qu'on a seulement besoin de considérer les réponses temporelles de  $\alpha_{i,j}(l;t)$  dans l'intervalle  $t \in [0, PT]$ , avec  $T$  la durée totale d'un mot OFDM et de son préfixe cyclique et  $PT$  désigne la durée d'émission de  $P$  mots OFDM adjacents. Suivant [49], la réponse fréquentielle du  $l^{\text{ième}}$  trajet de la réponse impulsionnelle du canal entre l'antenne d'émission  $j$  et de réception  $i$  peut être exprimée sous la forme :

$$\alpha_{i,j}(l;t) \approx \sum_{n=-f_d PT}^{f_d PT} \beta_{i,j}(l,n) \cdot e^{j \frac{2\pi n t}{PT}} \quad (3)$$

puisque  $L_t \triangleq 2f_d PT + 1$  est le nombre des valeurs propres significatives dans le développement en série de Karhunen-Loeve de cette variable aléatoire limitée dans le temps et en fréquence.  $\{\beta_{i,j}(l,n)\}_n$  est un ensemble de variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes et circulairement symétriques, indexées par  $n$ .

Pour un système OFDM utilisant des préfixes cycliques et disposant d'une synchronisation parfaite avec des interférences fréquentielles tolérables, la réponse fréquentielle entre l'antenne

<sup>9</sup> Wide sense stationary random process with uncorrelated scattering (WSSUS)

d'émission  $j$  et l'antenne de réception  $i$  sur la sous porteuse  $k$  et le timeslot  $p$  représentée par l'élément  $(i,j)$  de la matrice  $\mathbf{H}[p,k]$  peut alors être exprimée par :

$$\begin{aligned} H_{i,i}[p,k] &\triangleq H_{i,i}(pT, k\Delta_f) \\ &= \sum_{l=1}^{L_f} \alpha_{i,j}(l, pT) \cdot e^{-j\frac{2\pi k n_l}{K}} \\ &= \mathbf{h}_{i,j}^H(p) \cdot \mathbf{w}_f(k) \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $\mathbf{h}_{i,j}(p) \triangleq [\alpha_{i,j}(1, pT), \dots, \alpha_{i,j}(L_f, pT)]^H$  le vecteur de taille  $L_f$  regroupant les coefficients de la réponse impulsionnelle du canal.  $\mathbf{w}_f(k) = \left[ e^{-j\frac{2\pi n_1 k}{K}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi n_{L_f} k}{K}} \right]^T$  contient

les coefficients correspondants de la DFT.

L'équation (3) nous permet de simplifier  $\alpha_{i,j}(l, pT)$  en

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(l, pT) &= \sum_{n=-f_d PT}^{f_d PT} \beta_{i,j}(l, n) \cdot e^{j\frac{2\pi n p}{P}} \\ &= \mathbf{\beta}_{i,j}^H(l) \cdot \mathbf{w}_t(p) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\mathbf{\beta}_{i,j}(l) \triangleq [\beta_{i,j}(l, -f_d PT) \dots \beta_{i,j}(l, 0) \dots \beta_{i,j}(l, f_d PT)]^H$

et  $\mathbf{w}_t(p) \triangleq [e^{-j2\pi p f_d T} \dots e^{j0} \dots e^{j2\pi p f_d T}]^T$  représente le vecteur des coefficients de l'IDFT.

En substituant (5) dans (4), on obtient

$$H_{i,j}[p,k] = \mathbf{g}_{i,j}^H \cdot \mathbf{W}'_t(p) \cdot \mathbf{w}_f(k) \quad (6)$$

avec  $\mathbf{g}_{i,j} \triangleq [\beta_{i,j}^H(1), \dots, \beta_{i,j}^H(L_f)]_{L \times 1}^H$  et  $\mathbf{W}'_t(p) \triangleq \text{diag}\{\mathbf{w}_t(p), \dots, \mathbf{w}_t(p)\}_{L \times L_f}$ .

On peut voir dans (6) que, à cause des espacements relativement étroits entre les sous porteuses OFDM et de la fréquence Doppler limitée pour une paire d'antenne d'émission et de réception  $(i,j)$  quelconque, les réponses des canaux  $\{H_{i,j}[p,k]\}_{p,k}$  sont en fait le résultat de plusieurs transformations représentées par  $\mathbf{w}_t(p)$  et  $\mathbf{w}_f(k)$  d'un même vecteur aléatoire  $\mathbf{g}_{i,j}$ . **Ceci démontre simplement que les canaux sont finalement toujours corrélés en temps et en fréquence.**

### 4.2.2 Le modèle du système

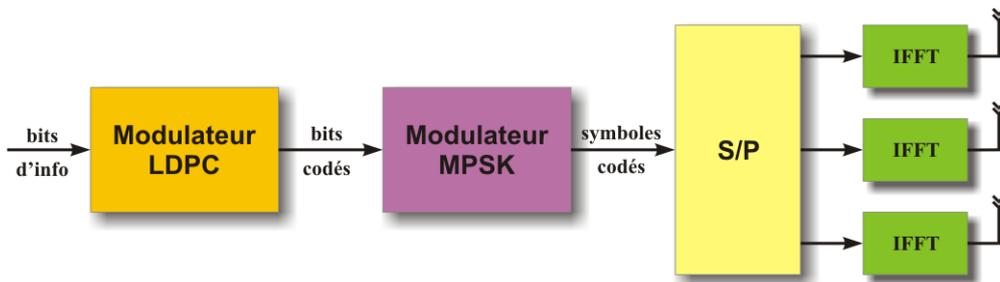


FIGURE 45: L'EMETTEUR STC-OFDM MULTIPLE ANTENNES

Le modèle de l'émetteur est représenté sur la Figure 45. Le code LDPC utilisé est décrit par quatre paramètres  $(n, k, t, j)$ ; la taille de sa matrice de parité est  $(n-k) \times n$  et son rendement est égal à  $R = k/n$ . La matrice de parité est une matrice irrégulière avec  $t$  1 par colonne et  $j > t$  1 par ligne.

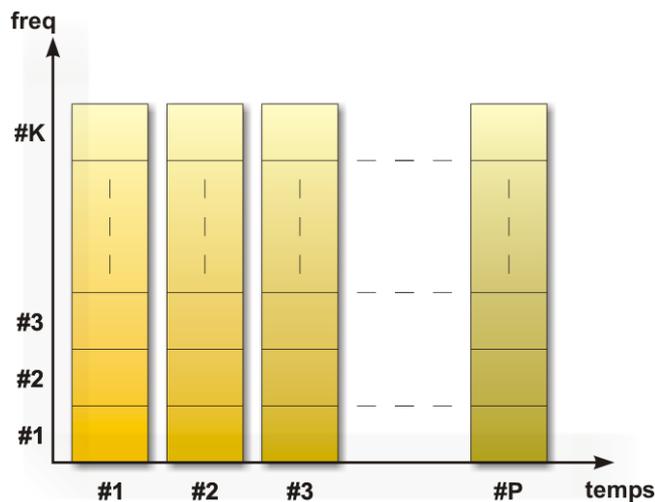


FIGURE 46 : CHAQUE MOT STC EST SUR  $K$  SOUS PORTEUSES ET  $P$  TIMESLOT. LES SYMBOLES STC SONT TRANSMIS A PARTIR DE  $N$  ANTENNES D'EMISSION ET REÇUS PAR  $M$  ANTENNES DE RECEPTION

Soit  $\Omega$  l'ensemble des symboles possibles pour le codage STC, les symboles qui font partie d'une modulation MPSK, les  $PK \log_2 |\Omega|$  bits d'informations sont codés par le LDPC à rendement  $R = 1/N$  pour obtenir  $NPK \log_2 |\Omega|$  bits codés. Ces bits codés sont ensuite modulés par un modulateur MPSK pour obtenir  $NPK$  symboles STC. Ces  $NPK$  symboles STC forment un mot STC et sont parallélisés en  $N$  branches. Les  $PK$  symboles sur chaque branche seront transmis sur une antenne d'émission, répartis dans les  $K$  sous porteuses OFDM et pendant les  $P$  timeslots OFDM adjacents comme l'illustre la Figure 46.

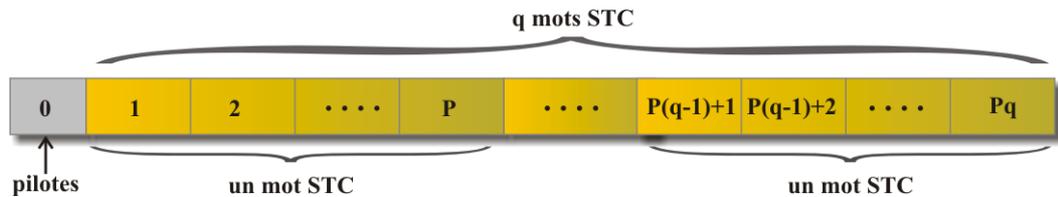


FIGURE 47: L'ALLOCATION DE TIMESLOT OFDM DANS UNE TRANSMISSION TYPE *BURST*. UN BURST CONSISTE EN  $(Pq+1)$  MOTS OFDM AVEC LE PREMIER MOT QUI CONTIENT LES SYMBOLES PILOTES

On considère une trame de  $(Pq+1)$  symboles OFDM envoyés par paquets (*burst* en anglais). Le premier mot OFDM contient les symboles pilotes. Les mots restants contiennent  $q$  mots STC. La Figure 47 résume la construction des mots OFDM et STC à partir de ces symboles.

On considère que le canal est inconnu et doit être estimé par le récepteur. Vu la complexité du problème, on utilise un *turbo* récepteur à deux étages. Le premier étage consiste en une démodulation soft des symboles codés, c'est-à-dire qu'il doit fournir en sortie des informations extrinsèques qui seront utilisées par le deuxième étage composé d'un décodeur de canal. Ces informations extrinsèques en sortie seront d'une part utilisées pour créer les décisions hard et d'autre part, injectées à l'entrée du premier étage pour une nouvelle turbo itération. Les informations extrinsèques fournies par le démodulateur soft sont les rapports de vraisemblances *a posteriori* logarithmiques des bits codés,  $\{\lambda_1^e\}$ , et les informations extrinsèques fournies par le décodeur LDPC sont les rapports de vraisemblances logarithmiques des bits codés,  $\{\lambda_2^e\}$ .

Le décodeur maximum *a posteriori* expectation - maximization (MAP-EM) est le cœur du premier étage et le décodeur LDPC est utilisé dans le deuxième étage. Il faut remarquer que les deux étages sont eux mêmes itératifs. Le décodeur MAP-EM prend aussi en entrée les signaux reçus après l'opération de FFT lié à la modulation OFDM et à l'estimation du canal. Les symboles pilotes serviront pour obtenir des premières estimations de canal suffisamment fiables afin de pouvoir initialiser le démodulateur. On considère que les  $q$  mots STC sont codés indépendamment et on peut alors décoder chaque mot STC de façon indépendante dans le récepteur turbo.

### 4.2.3 Démodulateur MAP-EM

Afin de simplifier les démonstrations, on se limite à deux antennes d'émission et une antenne de réception. Il faut aussi modifier (4) pour qu'on tienne compte de tous les gains éventuellement nuls des trajets d'un canal pendant la durée de dispersion maximale, c'est-à-dire

$\mathbf{h}_{i,j}(p) \triangleq [h_{i,j}[1;p], \dots, h_{i,j}[L'_f;p]]^T$  avec  $L'_f \triangleq [\tau_m K \Delta_f + 1] \geq L_f$ .  $\tau_m$  est l'étalement temporel

maximum du canal et  $\mathbf{w}_f(k)$  est redéfini comme étant égal à :  $\mathbf{w}_f(k) \triangleq \left[ e^{j0}, \dots, e^{-j \frac{2\pi k(L'_f-1)}{K}} \right]^H$ .

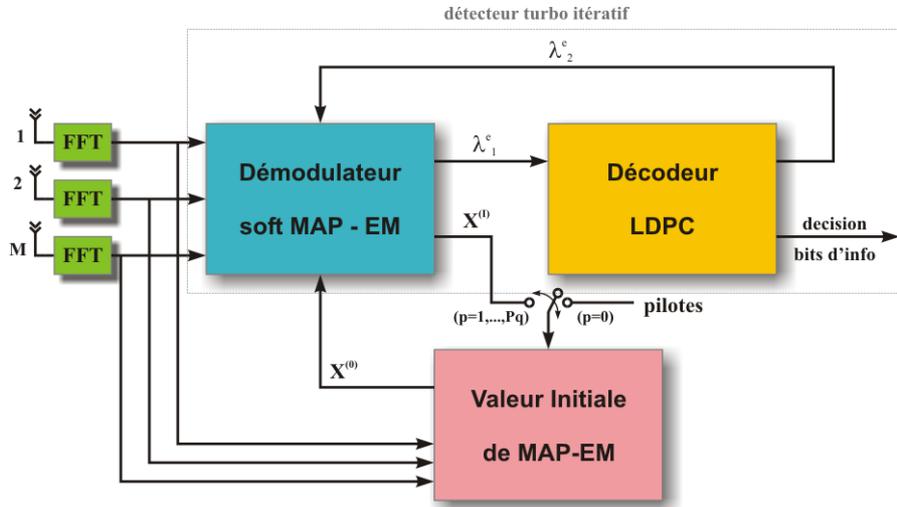


FIGURE 48 : LA STRUCTURE DU TURBO RECEPTEUR UTILISANT UN DEMODULATEUR MAP-EM ET UN DECODEUR LDPC

Le signal reçu pendant une trame s'écrit sous la forme

$$\mathbf{y}[p] = \mathbf{X}[p] \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}[p] + \mathbf{z}[p], \quad p=0,1,\dots,Pq \quad (7)$$

avec  $\mathbf{y}[p]$  et  $\mathbf{z}[p]$  deux vecteurs de taille  $K$  représentant les signaux reçus et les bruits gaussiens respectivement sur toutes les  $K$  sous porteuses et

$$\begin{aligned} \mathbf{X}[p] &\triangleq [\mathbf{X}_1[p], \mathbf{X}_2[p]]_{K \times 2K} \\ \mathbf{X}_j[p] &\triangleq \text{diag}(x_j[p,0], x_j[p,1], \dots, x_j[p, K-1])_{K \times K}, \quad j=1,2 \\ \mathbf{W} &\triangleq \text{diag}(\mathbf{W}_f, \mathbf{W}_f)_{2K \times 2L'_f} \\ \mathbf{W}_f &\triangleq [\mathbf{w}_f(0), \mathbf{w}_f(1), \dots, \mathbf{w}_f(K-1)]_{K \times L'_f}^H \\ \mathbf{h}[p] &\triangleq [\mathbf{h}_{1,1}^H(p), \mathbf{h}_{1,2}^H(p)]_{2L'_f \times 1}^H \end{aligned} \quad (8)$$

Les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{X}_j[p]$  contiennent les  $K$  symboles STC transmis pendant le timeslot  $p$  à partir de l'antenne d'émission  $j$ .

Sans l'information de canal, l'estimation des symboles transmis selon l'algorithme MAP est donnée par

$$\hat{\mathbf{X}}[p] = \arg \max_{\mathbf{X}[p]} \left\{ \log \left( p(\mathbf{X}[p] | \mathbf{y}[p]) \right) \right\}, \quad p=1,2,\dots,Pq \quad (9)$$

Il est clair que la complexité de cet algorithme est très élevée surtout quand  $K$  devient grand. C'est pour cela, qu'on applique l'algorithme EM en espérant diminuer la complexité de façon conséquente.

L'idée de base est de résoudre (9) de façon itérative suivant les deux étapes de l'algorithme EM. Pour ne pas surcharger le développement, on laisse tomber l'indice  $p$  sachant que l'algorithme EM doit être appliqué à tous les mots OFDM.

L'algorithme EM se déroule de la façon suivante :

### Etape Expectation

On calcule

$$Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)}) = E \left\{ \left[ \log \left( p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}) \right) \right] \middle| \mathbf{y}, \mathbf{X}^{(i)} \right\} \quad (10)$$

### Etape Maximisation

On résout

$$\mathbf{X}^{(i+1)} = \arg \max_{\mathbf{X}} \left( Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)}) + \log(P(\mathbf{X})) \right) \quad (11)$$

$\mathbf{X}^{(i)}$  désigne les décisions hard des symboles pendant la  $i^{\text{ième}}$  itération de l'algorithme EM.  $P(\mathbf{X})$  est la probabilité *a priori* de  $\mathbf{X}$  fournie par le décodeur LDPC pendant l'itération turbo précédente. On rappelle que la fonction  $Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)})$  est décroissante et converge vers un point stationnaire local [22].

Le calcul de l'espérance à l'étape  $E$  est déterminée en fonction de la réponse effective du canal  $\mathbf{h}$  conditionnée par  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{X}^{(i)}$ . On montre que  $\mathbf{h}$ , conditionnellement à  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{X}^{(i)}$ , suit une distribution gaussienne complexe dont les paramètres se calculent par

$$\mathbf{h} \middle| \left( \mathbf{y}, \mathbf{X}^{(i)} \right) \sim \mathcal{N}_c \left( \hat{\mathbf{h}}, \hat{\Sigma}_h \right) \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}} &\triangleq \left( \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \Sigma_z^{-1} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} + \Sigma_h^{\dagger} \right)^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \Sigma_z^{-1} \mathbf{y} \\ &= \left( \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} + \Sigma_h^{\dagger} \right)^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_h &\triangleq \Sigma_h - \left( \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \Sigma_z^{-1} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} + \Sigma_h^\dagger \right)^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \Sigma_z^{-1} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} \Sigma_h \\ &= \Sigma_h - \left( \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} + \Sigma_h^\dagger \right)^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^{(i)H} \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{W} \Sigma_h\end{aligned}\quad (14)$$

$\Sigma_z$  et  $\Sigma_h$  sont respectivement la matrice de covariance du bruit gaussien  $\mathbf{z}$  et de la réponse impulsionnelle du canal  $\mathbf{h}$ . Suivant les hypothèses posées précédemment sur le bruit et le canal,  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_h$  sont des matrices diagonales

$$\Sigma_z \triangleq E(\mathbf{z}\mathbf{z}^H) = \mathbf{I} \quad (15)$$

$$\Sigma_h \triangleq E(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) = \text{diag}(\sigma_{1,1}^2, \dots, \sigma_{1,L'_f}^2, \sigma_{2,1}^2, \dots, \sigma_{2,L'_f}^2) \quad (16)$$

avec  $\sigma_{j,l}^2$  la puissance moyenne du  $l^{\text{ème}}$  trajet issue de l'antenne  $j$ ,  $\sigma_{j,l}^2$  est égal à 0 si le gain de ce trajet est nul. En considérant  $\Sigma_h$  connu,  $\Sigma_h^\dagger$  est calculé par

$$\Sigma_h^\dagger \triangleq \text{diag}(\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,L'_f}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{1,L'_f}) \quad (17)$$

avec

$$\gamma_{j,l} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{j,l}^2} & \text{si } \sigma_{j,l}^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, l=1, \dots, L'_f, j=1, 2 \quad (18)$$

A partir de (7) et (12)-(14), on peut développer  $Q(\mathbf{X}|\mathbf{X}^{(i)})$  sous la forme

$$\begin{aligned}Q(\mathbf{X}|\mathbf{X}^{(i)}) &= -E_{\mathbf{h}} \left\{ \left\| \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{h} \right\|^2 \right\} + \text{const} \\ &= -E_{\mathbf{h}} \left\{ \left\| (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{W}\hat{\mathbf{h}}) + (\mathbf{X}\mathbf{W}\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{h}) \right\|^2 \right\} + \text{const} \\ &= -\left\| \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{W}\hat{\mathbf{h}} \right\|^2 - E_{\mathbf{h}} \left\{ (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^H \mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X}\mathbf{W} (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}) \right\} + \text{const} \\ &= -\left\| \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{W}\hat{\mathbf{h}} \right\|^2 - \text{trace} \left\{ \mathbf{X}\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h \mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \right\} + \text{const} \\ &= - \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \left[ y[k] - \mathbf{x}^H[k] \mathbf{W}'_f(k) \hat{\mathbf{h}} \right]^2 + \left[ \mathbf{x}^2[k] \hat{\Sigma}_h(k) \mathbf{x}[k] \right] \right\}}_{q(\mathbf{x}[k])} + \text{const}\end{aligned}\quad (19)$$

avec

$$\mathbf{x}[k] \triangleq [x_1[k], x_2[k]]_{2 \times 1}^H$$

$$\mathbf{W}'_f(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{w}_f^H(k) & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_f^H(k) \end{bmatrix}_{2 \times 2L'_f}$$

$$\hat{\Sigma}_h(k) \triangleq \begin{bmatrix} [\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H]_{(k+1,k+1)} & [\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H]_{(K+k+1,k+1)} \\ [\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H]_{(k+1,K+k+1)} & [\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H]_{(K+k+1,K+k+1)} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$[\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H]_{(i,j)}$  représente l'élément  $(i,j)$  de la matrice  $\mathbf{W}\hat{\Sigma}_h\mathbf{W}^H$ .

Suivant (19), l'étape  $M$  se développe sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(i+1)} &= \arg \max_{\mathbf{X}} \left[ Q(\mathbf{X} | \mathbf{X}^{(i)}) + \log P(\mathbf{X}) \right] \\ &= \arg \max_{\mathbf{X}} \left[ -\sum_{k=0}^{K-1} q(\mathbf{x}[k]) + \sum_{k=0}^{K-1} \log P(\mathbf{x}[k]) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \arg \min_{\mathbf{x}[k]} \left[ q(\mathbf{x}[k]) - \log P(\mathbf{x}[k]) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Si on considère que les symboles dans  $\mathbf{X}$  sont indépendants entre eux, alors on peut minimiser les quantités ci-dessus individuellement par :

$$\mathbf{x}^{(i+1)}[k] = \arg \min_{\mathbf{x}[k]} \left[ q(\mathbf{x}[k]) - \log P(\mathbf{x}[k]) \right], \quad k=0,1,\dots,K-1 \quad (21)$$

Le passage de (20) à (21) a réduit considérablement la complexité de  $\mathcal{O}(|\Omega|^{2K})$  à  $\mathcal{O}(K|\Omega|^2)$  où  $\Omega$  désigne l'ensemble de tous les symboles STC. Il faut remarquer que l'on ne considère pas les contraintes de codage LDPC dans la minimisation de (21).

Les étapes précédentes sont itérées  $I$  fois. A la fin de la  $I^{\text{ième}}$  itération, les LLR *a posteriori* extrinsèques des bits LDPC,  $\lambda_1^e[d^j(k)]$ , sont calculés et passés au décodeur LDPC pour décodage. Sur chaque sous porteuse OFDM, il y a deux symboles STC correspondant aux  $2 \log_2(|\Omega|)$  bits codés. Les LLR extrinsèques *a posteriori* du  $j^{\text{ième}}$  bit ( $j=1,\dots,2 \log_2(|\Omega|)$ ) sur la sous porteuse  $k$ ,  $d^j(k)$  sont calculés par

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^e[d^j(k)] &= \log \frac{P[d^j(k)=+1|y]}{P[d^j(k)=-1|y]} - \log \frac{P[d^j(k)=+1]}{P[d^j(k)=-1]} \\
 &= \log \frac{\sum_{\mathbf{x} \in C_j^+} P[\mathbf{x}[k]=\mathbf{x}|y]}{\sum_{\mathbf{x} \in C_j^-} P[\mathbf{x}[k]=\mathbf{x}|y]} - \lambda_2^{e\rho}[d^j(k)] \\
 &= \log \frac{\sum_{\mathbf{x} \in C_j^+} \exp(-q(\mathbf{x}) + \log P(\mathbf{x}))}{\sum_{\mathbf{x} \in C_j^-} \exp(-q(\mathbf{x}) + \log P(\mathbf{x}))} - \lambda_2^{e\rho}[d^j(k)] \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\lambda_1[d^j(k)]}
 \end{aligned} \tag{22}$$

où  $C_j^+$  représente l'ensemble des symboles  $\mathbf{x}$  dont le  $j^{i\text{ème}}$  bit LDPC est égal à +1 et  $C_j^-$  représente l'ensemble des symboles  $\mathbf{x}$  dont le  $j^{i\text{ème}}$  bit LDPC est égal à -1.  $\lambda_2^{e\rho}[d^j(k)]$  est la valeur LLR *a priori* issue du décodeur LDPC durant la turbo itération  $\rho$  précédente pour le bit  $j$  de la  $k^{i\text{ème}}$  sous porteuse. Cette valeur est égale à 0 pendant la première itération turbo.

Au vu des développements précédents, on peut se demander comment initialiser le système de façon générale lorsque les informations des canaux ne sont pas encore disponibles. C'est ici que les symboles pilotes entrent en jeu. Une fois que les estimations initiales des canaux ont été effectuées, l'algorithme EM utilisera les symboles  $\mathbf{X}^{(l)}[p]$  issus de l'itération turbo précédente pour initialiser l'algorithme EM pour une nouvelle turbo itération.

#### 4.2.3.1 Initialisation du décodeur MAP-EM

La performance du décodeur MAP-EM est liée à la qualité de la valeur initiale de  $\mathbf{X}^{(0)}[p]$  qu'on doit spécifier lors de l'initialisation de l'algorithme. Comme  $\mathbf{X}^{(0)(\rho+1)}[p] = \mathbf{X}^{(l)(\rho)}[p]$ <sup>10</sup>, on doit particulièrement s'occuper des initialisations pendant la première turbo itération. Cette initialisation est basée sur les méthodes proposées dans [50]-[51] qui utilisent les symboles pilotes et le retour des décisions ainsi que les filtrages temporels et spatiaux pour les estimations des canaux. La procédure d'initialisation est présentée ci-dessous

<sup>10</sup>  $\mathbf{X}^{(i)(\rho)}$  sont des valeurs de  $\mathbf{X}$  estimées pendant la turbo itération  $\rho$  et pendant l'itération  $i$  de l'algorithme EM. Le numéro de turbo itération n'est utilisé que seulement s'il y a ambiguïté.

$$\begin{aligned}
 \text{pilotes} \quad & \mathbf{h} = \text{freq-filter}\{\mathbf{y}[0], \mathbf{X}[0]\} \\
 \text{données} \quad & \text{Pour } p=1, 2, \dots, Pq \\
 & \hat{\mathbf{h}}[p] = \text{temp-filter}\{\hat{\mathbf{h}}[p-1], \hat{\mathbf{h}}[p-2], \dots, \hat{\mathbf{h}}[p-\iota]\} \\
 & \mathbf{X}^{(0)}[p] = \arg \max_{\mathbf{X}} \left\{ \log p[\mathbf{y}[p] | \mathbf{X}, \hat{\mathbf{h}}[p]] \right\} \quad (*) \\
 & \mathbf{X}^{(l)}[p] = \text{MAP-EM}\{\mathbf{y}[p], \mathbf{X}^{(0)}[p]\} \quad (**) \\
 & \hat{\mathbf{h}}[p] = \text{freq-filter}\{\mathbf{y}[p], \mathbf{X}^{(l)}[p]\} \quad (***)
 \end{aligned}$$

fin

*freq-filter* représente soit l'estimateur des moindres carrés (LSE), soit l'estimateur à minimum d'erreur quadratique moyenne (MMSE) comme

$$\begin{aligned}
 \text{LSE: } \text{freq-filter}\{\mathbf{y}, \mathbf{X}\} & \triangleq (\mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} \\
 \text{MMSE: } \text{freq-filter}\{\mathbf{y}, \mathbf{X}\} & \triangleq (\mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{W} + \Sigma_h^*)^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y}
 \end{aligned} \quad (23)$$

avec  $\mathbf{X}$  qui représente soit les symboles pilotes, soit les décisions  $\mathbf{X}^{(l)}$  issues du démodulateur MAP-EM. L'estimateur LSE n'a pas besoin d'informations statistiques des canaux mais sa performance est moins bonne que celle du MMSE en terme d'erreur quadratique moyenne. On utilise alors l'algorithme LSE pendant la phase d'apprentissage à l'aide des symboles pilotes pour estimer les canaux et déterminer la valeur de  $\Sigma_h$  et puis le filtre MMSE pour les estimations à l'aide des données décidées.

*temp-filter* représente le filtre temporel pour exploiter la corrélation temporelle du canal.

$$\text{temp-filter}\{\hat{\mathbf{h}}[p-1], \hat{\mathbf{h}}[p-2], \dots, \hat{\mathbf{h}}[p-\iota]\} \triangleq \sum_{j=1}^{\iota} a_j \hat{\mathbf{h}}[p-j] \quad (24)$$

avec  $\hat{\mathbf{h}}[p-j], j=1, \dots, \iota$  calculé par (\*\*\*) .  $\{a_j\}_{j=1}^{\iota}$  sont les coefficients du filtre temporel de taille  $\iota$  ( $\iota \leq Pq$ ) qu'on peut obtenir par la résolution de l'équation de Wiener ou par les méthodes présentées par [50]-[51]. On peut voir que l'initialisation de  $\mathbf{X}^{(0)}[p]$  est faite par la détection ML de  $\mathbf{X}^{(0)}[p]$  dans (\*) et l'estimation de  $\hat{\mathbf{h}}[p]$  dans (\*\*\*) . L'étape (\*\*) est calculée suivant (10) et (11).

#### 4.2.4 Les performances

On présente ici quelques résultats de simulations extraits de [46]. Les canaux considérés sont sélectifs en temps et en fréquence comme cela a été décrit précédemment. La bande passante

disponible est de 1Mhz divisée en 6 sous bandes. Le débit du symbole sur chaque sous bande est de 3.9KHz avec la durée des mots OFDM égale à 256µs. Un intervalle de garde de 40µs est ajouté entre chaque mot OFDM. Le code LDPC régulier de taille 512 × 1024 et de rendement 1/2 est utilisé pour la simulation. La modulation QPSK a été choisie. Les résultats tracés sont en *Word Error Rate* (WER).

4.2.4.1 Les performances avec l'information de canal idéale

Les Figure 49 et Figure 50 montrent les performances du système STC-OFDM à N antennes d'émission et une antenne de réception basé sur un codage LDPC avec la détection turbo et en supposant qu'on connaît parfaitement l'état des canaux. On compare les performances du système pour différents profils de canal et différents nombres d'antennes d'émission.

La configuration des canaux est présentée dans le Tableau 12.

TABLEAU 12 : LES DIFFERENTS PROFILS DE CANAL UTILISES DANS LES SIMULATIONS

Code du canal	nombre de trajets	Puissance des trajets	délat des trajets
Ch1	1	equi-puissance	{ 0µs }
Ch2a	2	equi-puissance	{ 0µs, 5µs }
Ch2b	2	equi-puissance	{ 0µs, 40µs }
Ch2c	2	equi-puissance	{ 0µs, 1µs }
Ch6a	6	equi-puissance	uniformément reparti entre 0µs et 40µs

Le suffixe Nx dans les courbes indique que le système utilise x antennes d'émission. Le suffixe Px indique qu'un mot STC s'étend sur x mots OFDM. On assume par défaut que l'émetteur a deux antennes d'émission et qu'un mot STC correspond à un mot OFDM. Le nombre d'itérations du décodeur LDPC est fixé à 30.

La Figure 49 montre les performances du système lorsque les canaux sont seulement sélectifs en fréquence mais non sélectifs en temps. Les courbes en pointillés sont les WER en première turbo itération et les courbes en lignes solides sont les WER en cinquième turbo itération. On constate une nette amélioration entre la première turbo itération et la cinquième itération. On peut voir aussi que le turbo récepteur a une meilleure performance lorsque l'ordre de diversité multi trajets augmente. Ceci peut être mis en évidence en comparant les performances du profile Ch1N2 et Ch6aN2. La performance avec un canal très sélectif en fréquence est à 3.0dB de la capacité de rupture (*channel outage*) pour un WER égal à 2×10<sup>-4</sup>. On peut voir dans la même figure la comparaison des performances entre le système à deux antennes d'émission, Ch2bN2, et le système à trois antennes d'émission, Ch2bN3. Comme la capacité de rupture du canal

Ch2bN3 est plus grande que celle du Ch2bN2, on observe que le canal Ch2bN3 a une meilleure performance que Ch2bN2 pour les grandes valeurs de SNR.

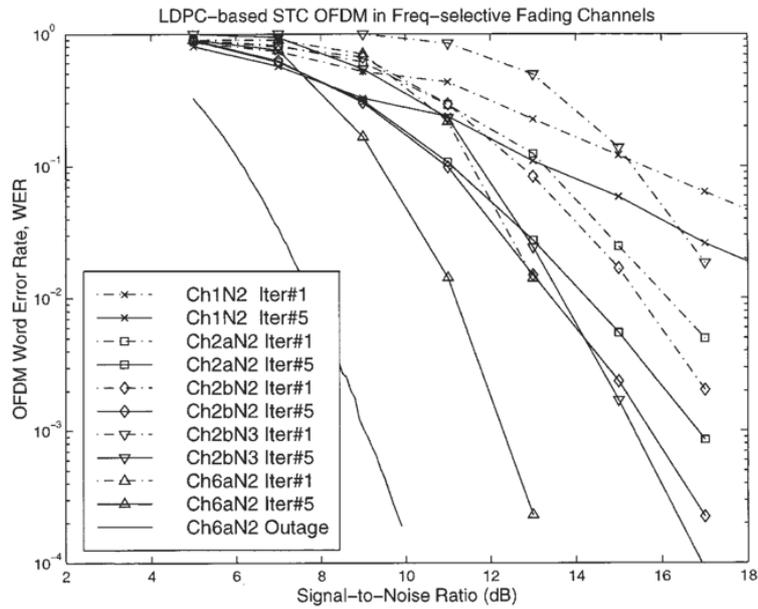


FIGURE 49 : LE WER DU SYSTEME AVEC  $N=\{2, 3\}$  ET  $M=1$  DANS LES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCES ET NON SELECTIFS EN TEMPS AVEC LA CONNAISSANCE PARFAITE DU CANAL

La Figure 50 montre les performances avec les canaux sélectifs en temps et en fréquence et avec  $P \geq 1$ . La fréquence Doppler est de 200Hz ce qui correspond à une fréquence normalisée de  $f_d T = 0.059$ . On constate encore une fois que la performance s'améliore quand on a plus de diversité multi trajets.

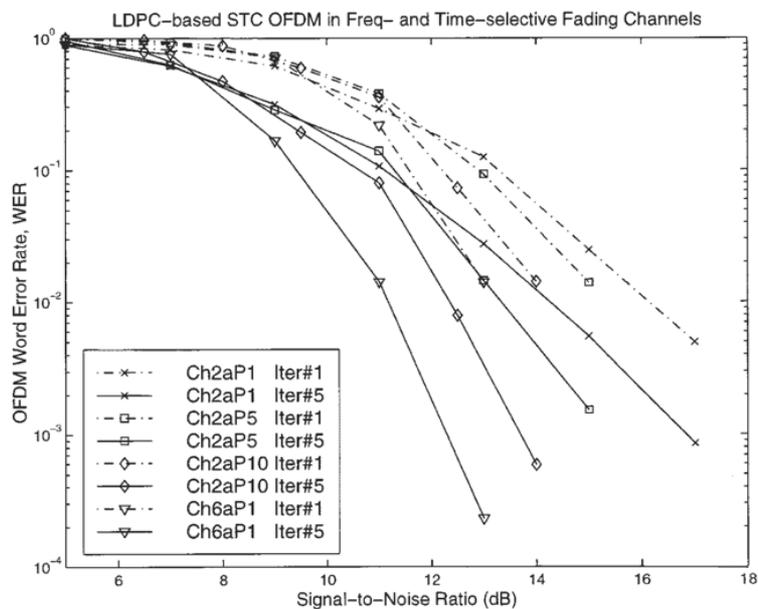


FIGURE 50: WER DU SYSTEME AVEC  $N=\{2, 3\}$  ET  $M=1$  DANS LES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCES ET EN TEMPS AVEC LA CONNAISSANCE PARFAITE DU CANAL

#### 4.2.4.2 *Les performances avec l'estimation de canal*

On considère maintenant les performances du système quand le récepteur ne dispose pas de l'état exact du canal. Le système émet des paquets comme cela a été illustré dans la Figure 47. Chaque paquet ou *burst* contient 10 mots OFDM ( $q=9, P=1$ ) dont le premier mot contient les symboles pilotes. La simulation est faite en utilisant le canal **Ch2c** sélectif en temps et en fréquence. La fréquence Doppler maximum considérée est de 50Hz et 150Hz avec les fréquences Doppler normalisées égales à 0.015 et 0.044 respectivement. On ne considère pas l'énergie perdue due aux pilotes dans les calculs de SNR. On fait trois turbo itérations avec trois itérations de l'algorithme MAP EM.

La Figure 51 montre les performances du turbo récepteur quand un code LDPC régulier est utilisé. *TurboDD* signifie que les simulations ont été faites en mode *Decision Directed*. La seule différence avec le contexte de simulation précédent est que la connaissance parfaite de l'état du canal est remplacée par les estimations à l'aide des pilotes et des symboles décidés [29]. *TurboEM* représente les courbes obtenues via les algorithmes MAP-EM élaboré précédemment. Les paramètres du filtre temporel sont issus de [50]. La Figure 52 montre les performances du système quand un code LDPC irrégulier est utilisé dans les mêmes conditions que précédemment.

A partir des résultats obtenus présentés sur les Figure 51 et Figure 52, on observe que ces performances sont comparables avec les performances obtenues dans le cas d'une information de canal parfaite. On voit aussi que l'algorithme proposé (MAP-EM) présente un accroissement des performances, comparé au mode *TurboDD*, encore plus net dans ce contexte. Le deuxième constat est que les performances des deux architectures (*TurboDD* et *TurboEM*) sont meilleures avec les codes LDPC irréguliers. Avec les codes LDPC irréguliers, l'algorithme *TurboEM* peut même approcher les performances du cas idéal correspondant à la connaissance parfaite du canal (écart d'environ 1 dB).

Ces résultats nous montrent qu'avec une complexité acceptable et avec 10% de symboles pilotes, le turbo récepteur proposé constitue une technique performante très prometteuse surtout dans les applications à *fast fading*.

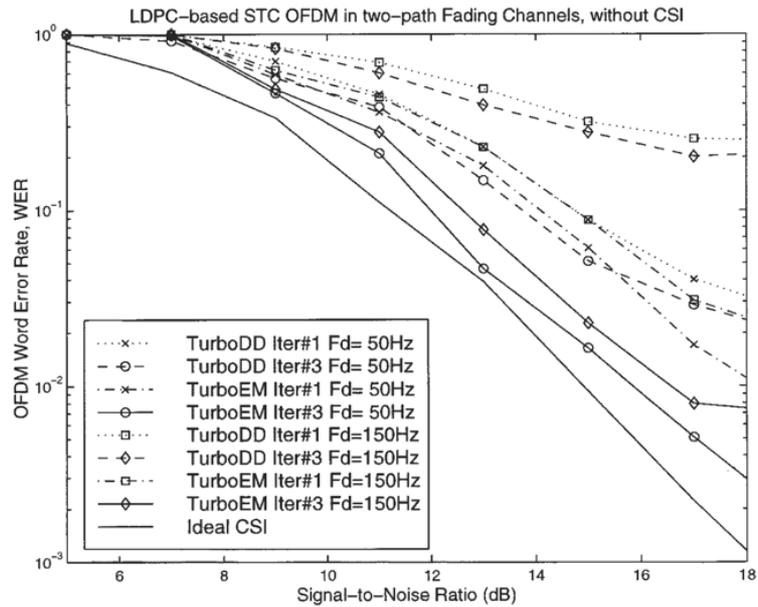


FIGURE 51: LE WER DU SYSTEME AVEC  $N=2$  ET  $M=1$  ET AVEC LE CODE LDPC REGULIER DANS LES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCE ET EN TEMPS A DEUX TRAJETS SANS LA CONNAISSANCE DU CANAL

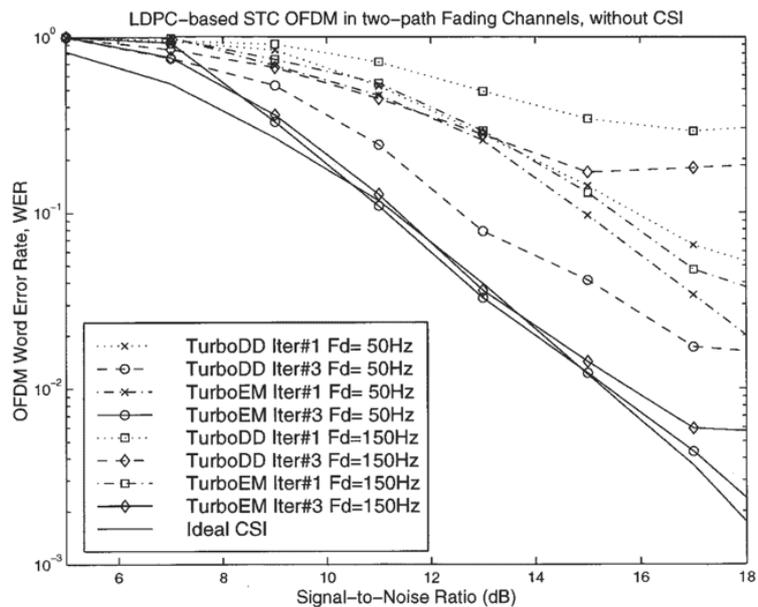


FIGURE 52: LE WER DU SYSTEME AVEC  $N=2$  ET  $M=1$  ET AVEC LE CODE LDPC IRREGULIER DANS LES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCE ET EN TEMPS A DEUX TRAJETS SANS LA CONNAISSANCE DU CANAL

### 4.3 La structure modifiée

On propose ici quelques modifications sur la structure du récepteur du modèle présenté précédemment. Ces modifications ont fait l'objet d'une communication internationale en Septembre 2003 [47].

Les deux modifications majeures sont les suivantes

- i) utilisation de l'algorithme SAGE pour initialiser le système et pour estimer les coefficients du canal [28].
- ii) la valeur initiale  $\mathbf{X}^{(0)}[p]$  n'est plus initialisée par  $\mathbf{X}^{(l)}[p]$  issue du démodulateur MAP-EM pendant la turbo itération précédente, mais par  $\mathbf{X}_{LDPC}[p]$ , les symboles hard reconstruits à partir des LLR des bits calculés par le décodeur LDPC.

La motivation de la première modification est la simplicité de l'algorithme SAGE par rapport au détecteur MMSE conventionnel alors qu'ils ont sensiblement les mêmes performances.

La deuxième modification est survenue d'après l'observation du comportement du système précédent: les informations issues de LDPC sont plus fiables et les symboles reconstruits par ces informations sont moins erronés que les symboles estimés par l'algorithme EM. On suppose que le code LDPC est utilisé dans son fonctionnement normal, c'est-à-dire la matrice de parité utilisé ne présente pas de petits cycles fermés [6][11].

La structure du turbo récepteur modifié est présentée sur la Figure 53.

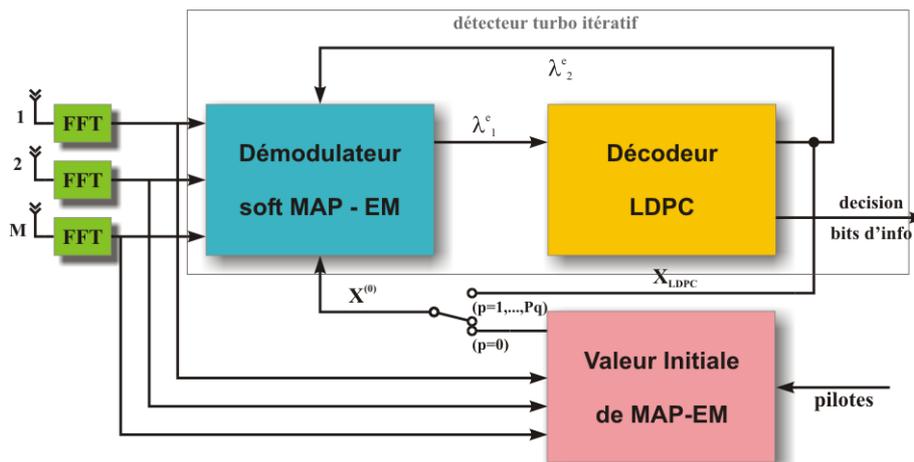


FIGURE 53: LA STRUCTURE DU TURBO RECEPTEUR MODIFIE. LES DECISIONS DU LDPC SONT UTILISEES COMME VALEUR INITIALE  $\mathbf{X}^{(0)(p)}$

On conserve les mêmes notations utilisées dans [46]. Rien ne change au niveau de l'émetteur et du canal, seul l'algorithme de détection change. On considère ici une seule antenne de réception. Le Tableau 13 montre l'algorithme de détection modifié.

TABLEAU 13: L'ALGORITHME DE DETECTION MODIFIEE

**pilotes**  $\hat{\mathbf{h}}[0] = SAGE\{\mathbf{y}[0], \mathbf{X}[0]\}$

**données** Pour  $p=1, 2, \dots, Pq$

$$\tilde{\mathbf{h}}[p] = temp-filter\{\hat{\mathbf{h}}[p-1], \hat{\mathbf{h}}[p-2], \dots, \hat{\mathbf{h}}[p-l]\}$$

$$\mathbf{X}^{(0,0)}[p] = arg\ max_{\mathbf{X}}\{\log p[\mathbf{y}[p]|\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{h}}[p]]\}$$

pour  $\rho=1, \dots, \Upsilon$

$$\mathbf{X}^{(I,\rho)}[p] = MAP-EM\{\mathbf{y}[p], \mathbf{X}^{(0,\rho)}[p]\}$$

$$\mathbf{X}^{(0,\rho+1)}[p] = \mathbf{X}_{LDPC}^{(\rho+1)}[p] = LDPC-decision\{\mathbf{X}^{(I,\rho)}[p]\}$$

fin  $\rho$

$$\hat{\mathbf{h}}[p] = SAGE\{\mathbf{y}[p], \mathbf{X}_{LDPC}^{(\Upsilon+1)}[p]\}$$

fin

### 4.3.1 L'initialisation et l'estimation de canal par l'algorithme SAGE

On a vu dans le Chapitre 2 la présentation de l'algorithme SAGE. On propose ici de l'utiliser pour initialiser et estimer le canal de propagation. On sait que la performance du récepteur dépend étroitement de la qualité de la valeur initiale de  $\mathbf{X}^{(0)}[p]$ . Pour distinguer l'itération de l'algorithme EM et la turbo itération, on note  $\mathbf{X}^{(I,\rho)}[p]$  la valeur estimée de  $\mathbf{X}[p]$  après  $I$  itération EM et  $\rho$  turbo itération. Au démarrage du système, les symboles pilotes nous aident à obtenir les premières estimations de canal fiables via l'algorithme SAGE. Ensuite, on fait un suivi de canal sur chaque créneau temporel ou timeslot  $p$ . Le suivi de statistique du canal est mis à jour à chaque itération turbo et aussi après le décodage LDPC via les symboles reconstruits. Les valeurs initiales des symboles  $\mathbf{X}^{(0,\rho)}$  pendant la turbo itération  $\rho$  sont obtenues par  $\mathbf{X}_{LDPC}$ . Les valeurs initiales des symboles  $\mathbf{X}^{(0,0)}$  à la première turbo itération sont estimées suivant la méthode proposée par Lu *et al.* [46]. L'estimation des coefficients du canal complet se fera à la fin de la turbo itération via l'algorithme SAGE.

#### 4.3.1.1 L'algorithme SAGE

On considère les symboles reçus comme des informations incomplètes et  $\mathbf{X}_j[p] \mathbf{W} \mathbf{h}_j[p] + \mathbf{z}_j[p]$  comme l'information complètes avec  $j=1, \dots, N$ .

On initialise l'algorithme par

$$\text{pour } 1 \leq j \leq N, \hat{\mathbf{Z}}_j^{(0)}[p] = \mathbf{X}_j^{(I,p)}[p] \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}}_j^{(0)}[p] \quad (25)$$

$\mathbf{h}_j^{(0)}[p]$  peut être calculé par

$$\mathbf{h}_j^{(0)}[p] = \mathbf{W}^H \left( \mathbf{X}_j^{(I,p)}[p] \right)^{-1} \mathbf{y}[p] \quad (26)$$

L'indice  $j$  représente les informations relatives à l'antenne d'émission  $j$ . De ce fait,  $\mathbf{X}_j^{(I,p)}$  représente les symboles estimés en provenance de l'antenne  $j$ . Il est donc trivial que les estimations initiales sont faites comme si seulement une antenne d'émission était utilisée à la fois. Ceci ne pose pas de problème pour les pilotes car ces symboles pilotes peuvent être transmis sur les antennes l'une après l'autre. On perd, en effet, du temps et un peu de ressources disponibles mais on réduit la complexité du récepteur.

$\mathbf{X}_j^{(I,p)}$  sont alors les symboles pilotes mais aussi les symboles décidés précédemment par le décodeur LDPC.

Après l'initialisation de l'algorithme

A la  $k^{\text{ième}}$  itération ( $k=0,1,2,\dots$ )

Pour  $j=1+[k \bmod M]$

$$\hat{\mathbf{Y}}^{(k)} = \hat{\mathbf{Z}}_j^{(k)}[p] + \left( \mathbf{y}[p] - \sum_{m=1}^N \hat{\mathbf{Z}}_m^{(k)}[p] \right)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_j^{(k+1)}[p] = \mathbf{W}^H \left( \mathbf{X}_j^{(I,p)}[p] \right)^{-1} \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_j^{(k+1)}[p] = \hat{\mathbf{X}}_j^{(I,p)}[p] \mathbf{W} \hat{\mathbf{h}}_j^{(k+1)}[p]$$

Pour  $1 \leq i \leq N$  et  $j \neq n$

$$\hat{\mathbf{Z}}_i^{(k+1)}[p] = \hat{\mathbf{Z}}_i^{(k)}[p]$$

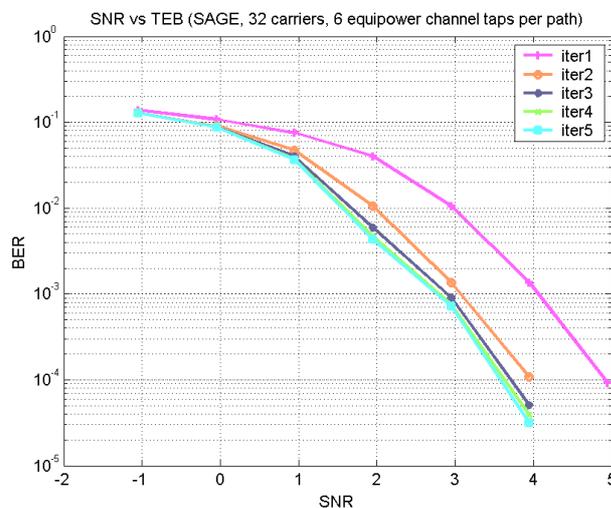
Les valeurs softs des symboles issues du décodeur LDPC peuvent être calculées par

$$\lambda_2^e[k] = \ln \left( \frac{\prod_{j=1}^{N \log_2 |\Omega|} \frac{e^{\lambda_2^{ep}[d^j[k]]}}{1 + e^{\lambda_2^{ep}[d^j[k]]}}}{1 - \prod_{j=1}^{N \log_2 |\Omega|} \frac{e^{\lambda_2^{ep}[d^j[k]]}}{1 + e^{\lambda_2^{ep}[d^j[k]]}}} \right) \quad (27)$$

### 4.3.2 Les performances

On présente ici les résultats de simulation dans le cas où l'information sur l'état des canaux n'est pas disponible au récepteur. Les canaux sont sélectifs en temps et en fréquence. Sauf indication contraire, la configuration de simulation est identique à celle décrite précédemment. On fait cinq turbo itérations et quatre itérations pendant la démodulation via l'algorithme EM et 10 itérations pour l'estimation de canal avec l'algorithme SAGE. Le code LDPC irrégulier est utilisé avec la taille de matrice de parité fixée à  $512 \times 1024$  et le poids moyen par colonne égal à 3. La taille de la séquence d'apprentissage (pilotes) est choisie en fonction de la sélectivité des canaux et la fréquence Doppler à 100Hz maximum. Les résultats présentés sont en fonction de BER et SNR. On considère d'abord un canal avec six trajets et le retard entre chaque trajet adjacent est égal à  $40\mu\text{s}$  (l'étalement temporel du canal est donc de l'ordre de  $6 \times 40\mu\text{s} = 240\mu\text{s}$  ce qui est bien inférieur à la durée d'un mot OFDM).

On commence par étudier la performance de l'algorithme SAGE proposé et son aptitude à converger. La Figure 54 montre la performance de l'algorithme quand on a 32 sous porteuses OFDM. Les canaux choisis, nommés **profilA** sont equi-puissance et leur profils sont présentés Figure 55. On peut voir que le turbo récepteur modifié converge assez rapidement vers un point stationnaire local.



**FIGURE 54 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILA) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$ .**

En divisant par deux le nombre de sous porteuses OFDM (Figure 56), on voit que la performance s'est un peu détériorée. L'algorithme SAGE converge aussi rapidement que précédemment. Par contre il existe une petite remontée de BER en fonction du SNR. Ceci est dû au nombre de symboles simulés insuffisants. Comme cela sera mentionné ultérieurement, on a eu des problèmes pour simuler ce système .

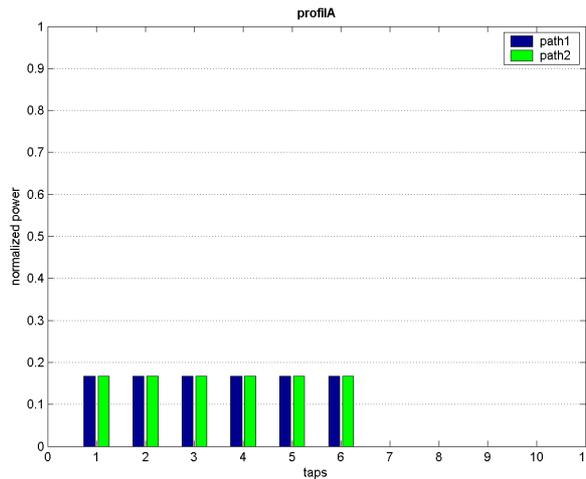


FIGURE 55 : LE PROFIL DES CANAUX "PROFILA" EN PUISSANCES NORMALISEES

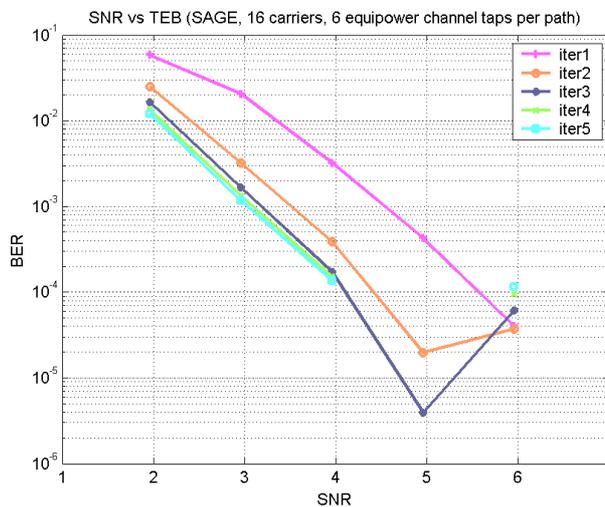
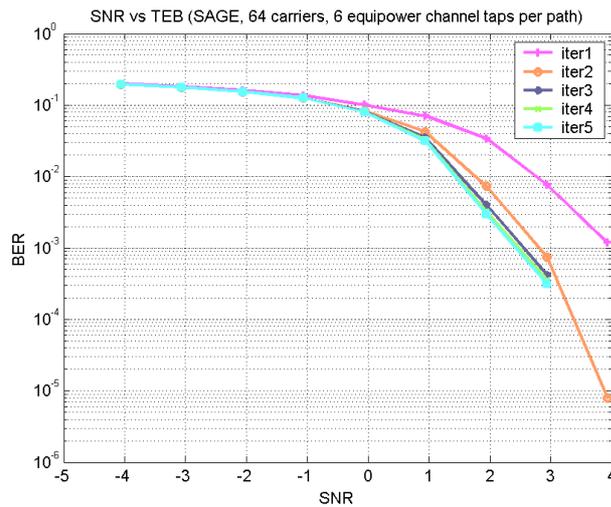


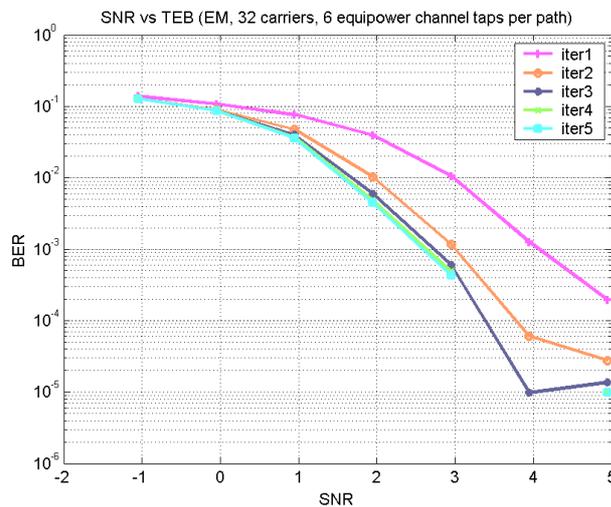
FIGURE 56 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 16 SOUS PORTEUSES (PROFILA) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$

On augmente le nombre de sous porteuses OFDM à 64 sans changer le canal. La Figure 57 nous indique qu'on obtient une meilleure performance que précédemment. L'algorithme converge de la même façon que précédemment.

Il est peut être intéressant de comparer les performances du système basé sur SAGE et les systèmes basés sur EM et MMSE. Les Figure 58 et Figure 59 montrent les performances du turbo récepteur lorsque ces algorithmes sont utilisés au lieu de l'algorithme SAGE. Le nombre de sous porteuses OFDM est fixé à 32. On peut voir que leurs performances sont comparables à celles de l'algorithme SAGE présentées sur la Figure 54 avec un léger avantage pour EM et MMSE. On observe aussi que l'algorithme EM a presque les mêmes performances que l'algorithme MMSE.



**FIGURE 57 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 64 SOUS PORTEUSES (PROFILA) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$**



**FIGURE 58 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILA) QUAND L'ALGORITHME EM EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$**

On change de profil de canal et on utilise maintenant le **profilC** moins sélectif en fréquence que le **profilA** (Figure 60). Les Figure 61 et Figure 62 montrent les performances de l'algorithme SAGE et MMSE respectivement.

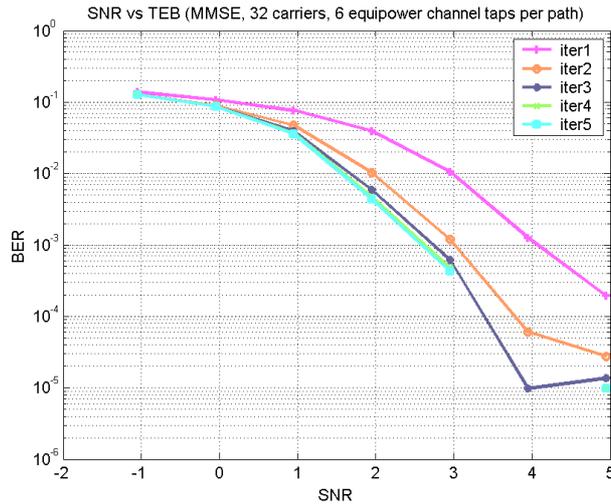


FIGURE 59 : PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILA) QUAND L'ALGORITHME MMSE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$

On voit encore une fois que l'algorithme SAGE converge rapidement mais avec un très léger avantage à l'algorithme MMSE en terme de BER pour un SNR égal à 3dB. On constate aussi que le récepteur arrive à tirer parti de l'avantage de la diversité multi trajets. Les performances illustrées sur les Figure 61 et Figure 62 sont moins bonnes que celles des Figure 54, Figure 58 et Figure 59. Pour un SNR égal à 3dB, la performance du turbo récepteur du canal **profilA** est à environ  $5 \cdot 10^{-4}$  alors que celles du canal **profilC** est au mieux égale à  $10^{-3}$ .

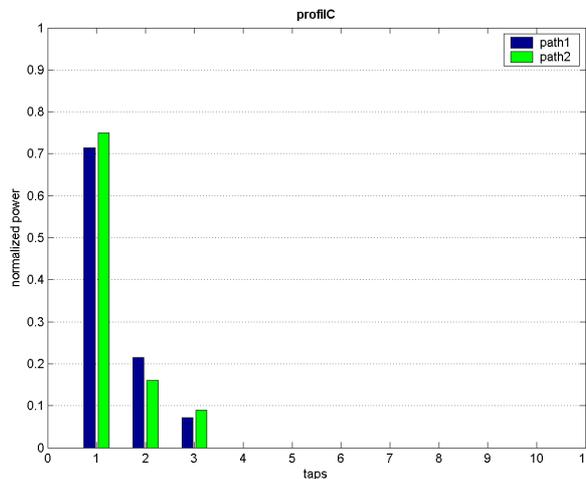
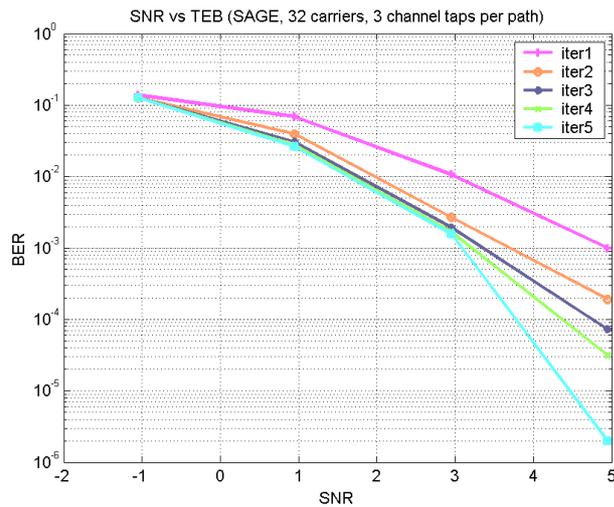
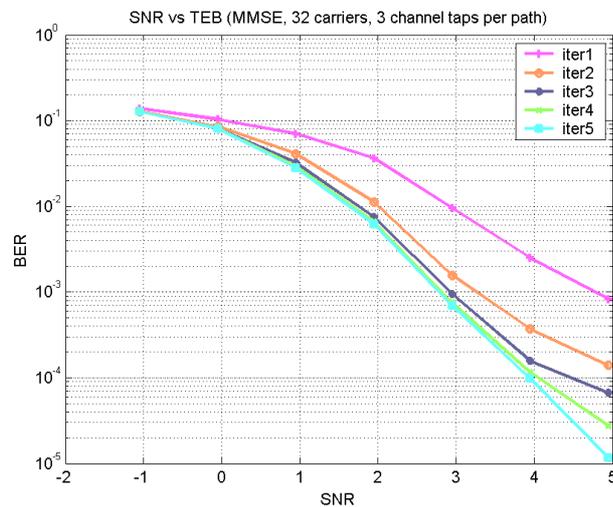


FIGURE 60 : LE PROFIL DES CANAUX "PROFILC" EN PUISSANCES NORMALISEES



**FIGURE 61 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILC) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2, M=1$**



**FIGURE 62 : PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILC) QUAND L'ALGORITHME MMSE EST UTILISE ,  $N=2, M=1$**

En changeant la répartition des puissances de chaque trajet du canal illustré par le **profilD** (Figure 63), la Figure 64 nous suggère que les performances varient très peu en fonction de la puissance des trajets.

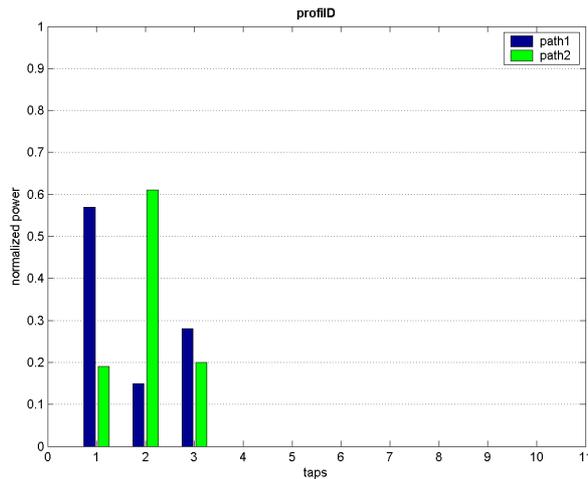


FIGURE 63 : LE PROFIL DES CANAUX "PROFILD" EN PUISSANCES NORMALISEES

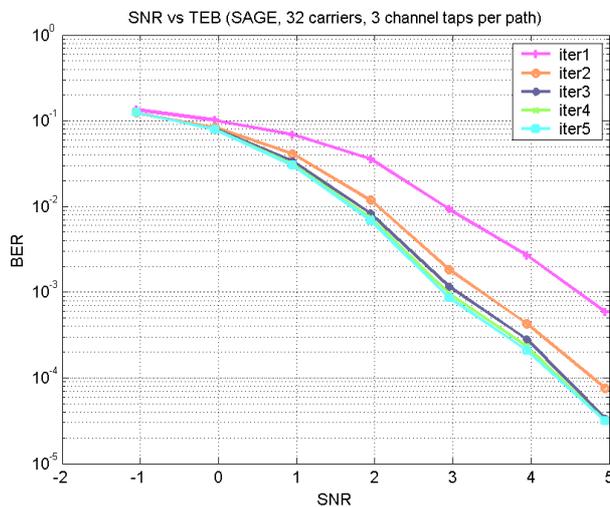


FIGURE 64 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILD) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$

On peut aussi observer un petit gain de performances avec le **profilD** comparé au **profilC** à SNR égale à 3dB. La marge d'erreur des calculs BER trop grande (surtout pour les grandes valeurs de SNR), pour des raisons expliquées ultérieurement, ne nous permet pas de comparer ces petites variations de performances. On peut seulement dire que l'algorithme SAGE converge comme prévu et la sélectivité du canal influence les performances du turbo récepteur.

On étudie ensuite le comportement du système avec un canal très peu sélectif en fréquence nommé **profilH** (Figure 65). Encore une fois, on voit à partir des Figure 66 et Figure 67, que l'algorithme SAGE converge rapidement montrant des performances semblables à l'algorithme MMSE. Les performances, en terme de BER, sont encore moins bonnes que les profils des canaux précédents. A SNR égale à 3dB, on a un taux d'erreur binaire égal à environ  $4 \cdot 10^{-3}$ .

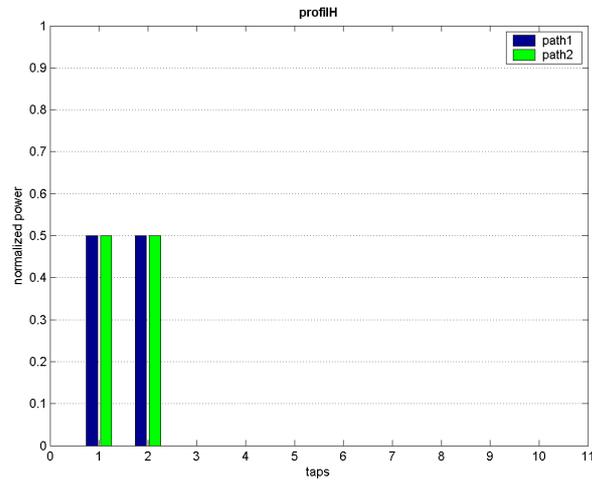


FIGURE 65 : LE PROFIL DES CANAUX "PROFILH" EN PUISSANCES NORMALISEES

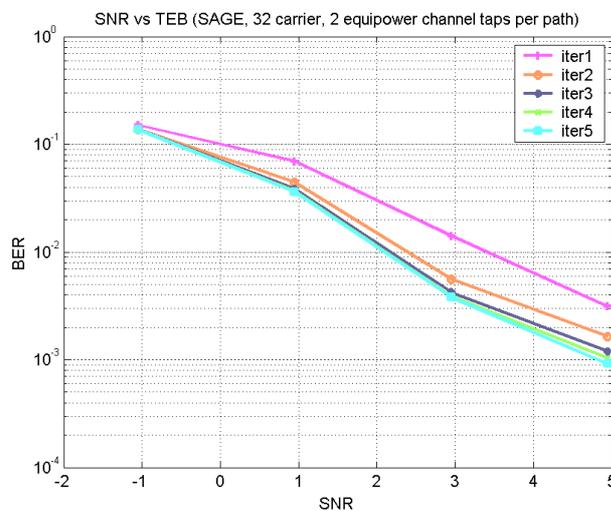


FIGURE 66 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILH) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$

On passe à un canal **profilJ** très sélectif en fréquence (Figure 68). Il est clair, à partir de la Figure 69, que le turbo récepteur peut efficacement exploiter la diversité multi trajets. On voit qu'à SNR égal à 3dB, on a un taux d'erreur binaire égal à  $7 \cdot 10^{-5}$  après seulement 5 turbo itérations.

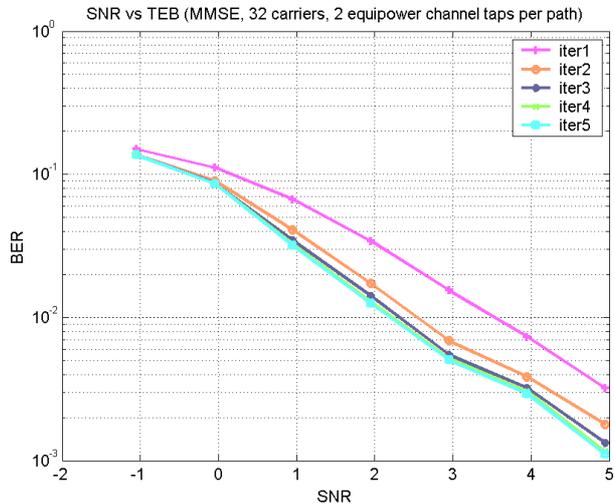


FIGURE 67 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILH) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2, M=1$

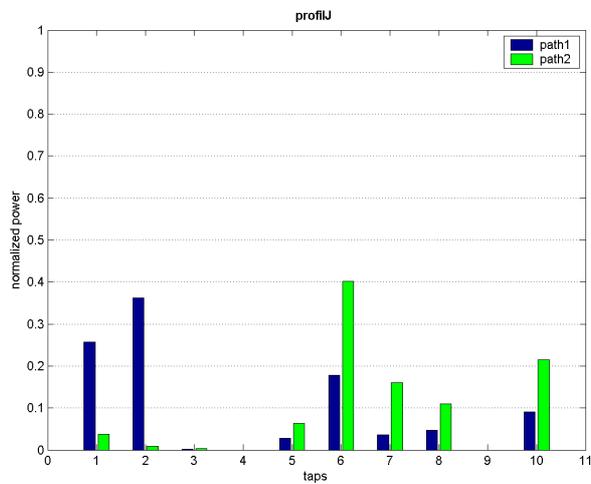
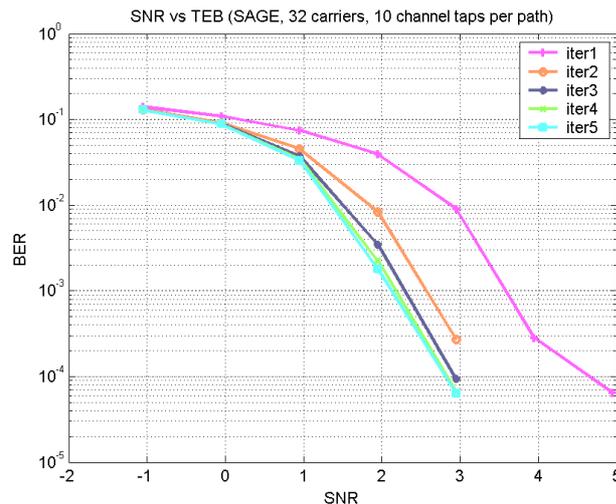


FIGURE 68 : LE PROFIL DES CANAUX "PROFILJ" EN PUISSANCES NORMALISEES



**FIGURE 69 : LES PERFORMANCES DU TURBO RECEPTEUR STC-OFDM A 32 SOUS PORTEUSES (PROFILJ) QUAND L'ALGORITHME SAGE EST UTILISE ,  $N=2$ ,  $M=1$**

#### 4.3.2.1 Remarques sur les résultats

Nous avons rencontré des problèmes pour faire les simulations de ce système. Le premier problème contraignant est l'insuffisance des ressources informatiques disponibles pour faire les simulations. Les temps de calculs sont extrêmement longs sur les machines dont on disposait à l'époque. Ceci nous a contraint à réduire considérablement le nombre de symboles simulés tout simplement. Même après avoir réduit le nombre de symboles simulés, il nous fallait au moins dix jours pour réaliser une seule figure présentée dans ce chapitre. Due aux nombres réduits de symboles générés, on ne peut qu'observer le comportement convergent de l'algorithme SAGE et une évaluation grossière de sa performance comparée aux autres algorithmes (qui sont simulés avec les mêmes ressources informatiques et avec les mêmes contraintes). Les résultats présentés ici sont là pour illustrer le potentiel de la structure turbo récepteur modifiée et non pas comme une référence malheureusement.

Le deuxième problème est la sensibilité du turbo récepteur en fonction de la valeur initiale fournie. Ceci est vrai pour les trois algorithmes. On a eu parfois du mal à obtenir un fonctionnement correct du récepteur dans certains cas. Ceci nous a fait perdre beaucoup de temps avant de comprendre la cause des résultats de simulation chaotiques. Dans la plupart des cas, l'estimation initiale du canal un peu éloigné de la réalité en est très souvent la cause.

Les autres problèmes sont très variables et dus à la complexité de la mise en place de la simulation. Il faut remarquer qu'il est très facile de se perdre dans les équations présentées dans ce chapitre. Beaucoup de temps a été consacré à la mise en place cette simulation.

#### **4.4 Conclusion**

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir des performances similaires aux calculs présentés dans [46] avec des algorithmes d'estimation de canal simplifiés basés sur l'algorithme EM. Une réduction de la complexité des calculs n'est pas négligeable et est toujours la bienvenue quand la complexité du système est déjà très élevée.

Le turbo récepteur proposé dans [46] possède un grand potentiel en terme de performances mais beaucoup de recherches doivent être faites afin de réduire d'avantage sa complexité pour plus se rapprocher d'une implantation sur des circuits réels. La structure modifiée proposée ici [47] est une première approche possible.



les dispositifs de suivi pour que le système mette à jour la position de ces espèces surveillées. Les balises sont les consommateurs de ressources et les dispositifs de suivi sont les fournisseurs de ressources.

Les communications évoquées dans les deux exemples précédents nécessitent seulement un flux d'information uni directionnelle. Pour permettre la communication entre deux entités de consommateur de ressources, il faut envisager un système bi directionnel. Dans la communication radio mobile, on est souvent dans le cas où les deux types sont présents. Il faut distinguer deux types de transmissions bidirectionnelles : *half duplex* ou *full duplex*. En *half duplex*, la communication en voie montante alterne avec la communication en voie descendante. Les deux entités communicantes ne peuvent pas communiquer en même temps. C'est le cas avec les talkies-walkies. Le *full duplex* permet de communiquer simultanément dans les deux sens comme le téléphone.

Les éléments les plus importants dans des systèmes multi utilisateurs sont l'identification des messages qui leur sont destinés dans le cas de communication en voie descendante et la séparation des messages de tous les utilisateurs dans le cas de communication en voie montante.

Les deux types de communications multi utilisateurs sont présents habituellement dans les applications de communications radio mobiles. Ce sont les appels téléphoniques quasi simultanés de plusieurs utilisateurs habitant dans la même zone, connecté au même centre d'appel

Dans l'application en voie descendante, chaque client ne s'intéresse qu'aux informations qui lui sont destinées. Une vue globale de système ne lui est pas nécessaire.

- La synchronisation est plus simple car les informations destinées à tous les utilisateurs sont synchrones. L'orthogonalité des codes d'étalements n'est pas cassée.
- Chaque client a besoin d'estimer son propre canal. L'état des canaux des autres utilisateurs ne le concerne pas.

Dans la configuration en voie montante, le problème est beaucoup plus complexe et on doit considérer entre autres :

- La synchronisation des utilisateurs
- La séparation des utilisateurs
- L'égalisation mutuelle de tous les utilisateurs

## 5.2 La technique du Cyclic Prefix CDMA

La méthode du *cyclic prefix* CDMA (CP-CDMA) a été proposée par Baum *et al.* dans [52]. C'est une variante du DS-CDMA mono porteuse qui mélange le principe du préfixe cyclique de l'OFDM et la méthode d'égalisation dans le domaine fréquentiel. Cette méthode simplifie beaucoup de problèmes liés aux récepteurs CDMA de base. L'extension de ce système avec la diversité spatial a été proposée par Vook *et al.* [53].

### 5.2.1 L'émetteur

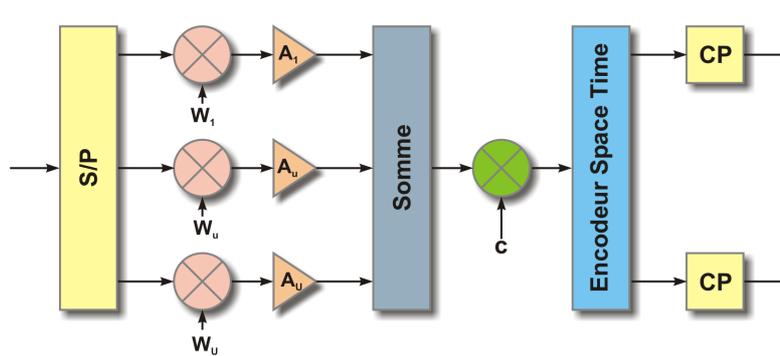


FIGURE 70 : LE MODELE DE L'EMETTEUR CP-CDMA

La structure de l'émetteur CP-CDMA est présentée sur la Figure 70. On utilise un code d'étalement Walsh de longueur  $N$  pour former  $N$  codes de canalisation Walsh entre une station de base et ses abonnés. C'est une communication en voie descendante. Le code de canalisation Walsh a une fonction différente d'un codeur de canal comme les codes convolutifs, les turbo codes et les codes LDPC. Sur chaque canal Walsh, un symbole de constellation quelconque est modulé par le code Walsh correspondant avec un contrôle d'amplitude pour former un mot Walsh. Les symboles étalés sont sommés et un code de *scrambling* ou code de séparation des secteurs servis par une station de base est appliqué sur un très long bloc de chips. Le code *scrambling* nous permet d'obtenir plusieurs micros cellules dans une cellule contrôlée par une station de base. L'opération de *scrambling* ne modifie pas la bande passante. Le message après l'application du code *scrambling* (ou le message brouillé) subit l'ajout du préfixe cyclique, puis est filtré par un filtre adapté et finalement transmis sur le canal radio. Un bloc de données de l'intervalle de  $K$  mots Walsh successifs est transmis pendant un timeslot sur tous les  $U$  canaux Walsh actifs avec  $0 \leq U \leq N$ . La séquence, au niveau chips en bande de base, transmis pendant le  $b^{\text{ième}}$  bloc de données s'écrit sous la forme

$$s[n, b] = \sum_{u=1}^U A_u \sum_{k=0}^{K-1} d_u[k, b] c[n, b] W_u[n - NK] \quad (1)$$

$s[n,b]$  est défini pour  $0 \leq n \leq NK-1$ .  $d_u[k,b]$  est le  $k^{\text{ème}}$  symbole sur le canal Walsh  $u$  pour le  $b^{\text{ème}}$  bloc de données.  $c[n,b]$  est le code *scrambling* sur le chip  $n$  du bloc de données  $b$ .  $W_u[n]$  est non nul pour  $0 \leq n \leq N-1$ .  $A_u$  est le gain pour le contrôle de puissance de l'utilisateur  $u$  sur le canal Walsh. Il y a  $NK$  chips issus du code Walsh dans le  $b^{\text{ème}}$  bloc transmis identifié par  $s[n,b]$ .

Dans un système à  $N_t$  antennes d'émission,  $B$  blocs de données de  $NK$  chips sont transformés pour former un ensemble de  $BN_t$  séquences de taille  $NK$ ,  $x_j[n,b]$   $j \in \{1, \dots, N_t\}, n \in \{0, \dots, NK-1\}, b \in \{1, \dots, B\}$ .  $B$  dépend du code STBC utilisé. On se limite au cas de deux antennes d'émission.  $B$  est alors égale à deux. Contrairement au schéma d'Alamouti on envoie, dans le cas présent, deux séquences de données pendant le temps de deux blocs sur deux antennes simultanément. Durant le premier temps bloc, on envoie la séquence **1** et la séquence **2** sur l'antenne **1** et l'antenne **2** respectivement. Dans le deuxième temps bloc, l'antenne **1** envoie la séquence **2** conjugué et inversée dans le temps avec un changement de signe sur toutes les chips, et l'antenne **2** envoie la séquence **1** conjuguée et inversée dans le temps. Le Tableau 14 résume la transmission.

TABLEAU 14 : LA RECAPITULATIF DES SEQUENCES TRANSMIS AVEC DEUX ANTENNES D'EMISSIONS

TEMPS BLOC	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$b_1 = 2b$	$x_1[m, b_1] = \frac{s[m, b_1]}{\sqrt{2}}$	$x_2[m, b_1] = \frac{s[m, b_2]}{\sqrt{2}}$
$b_2 = 2b+1$	$x_1[m, b_2] = -\frac{s^*[-m, b_2]}{\sqrt{2}}$	$x_2[m, b_2] = \frac{s^*[-m, b_2]}{\sqrt{2}}$

$-m$  signifie le retournement dans le temps. Le facteur  $\sqrt{2}$  est là pour normaliser la puissance d'émission à un.

Le signal analogique envoyé sur le canal avec le préfixe cyclique s'écrit sous la forme

$$x_j(t) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{NK+L_p-1} \hat{x}_j[n,b] \cdot p_t \left( t - (b(NK+L_p) + n) \cdot T_c \right) \quad (2)$$

$L_p$  est la longueur de préfixe cyclique et  $\hat{x}_j[n,b]$  est défini par

$$\hat{x}_j[n,b] = \begin{cases} x_j[n+NK-L_p, b], & 0 \leq n \leq L_p-1 \\ x_j[n-L_p, b], & L_p \leq n \leq NK+L_p-1 \end{cases}$$

Ces séquences se propagent dans des canaux indépendants multi trajets qui existent entre chaque paire d'antennes d'émission et de réception. Le canal entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception  $i$  est décrit par

$$h_{RFij}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{ij}(l) \delta(t - \tau_l) \quad (3)$$

avec  $L$  le nombre de trajets dans le canal,  $\alpha_{ij}(l)$  et  $\tau_l$  sont le gain complexe et le retard du trajet  $l$  respectivement.

### 5.2.2 Le récepteur

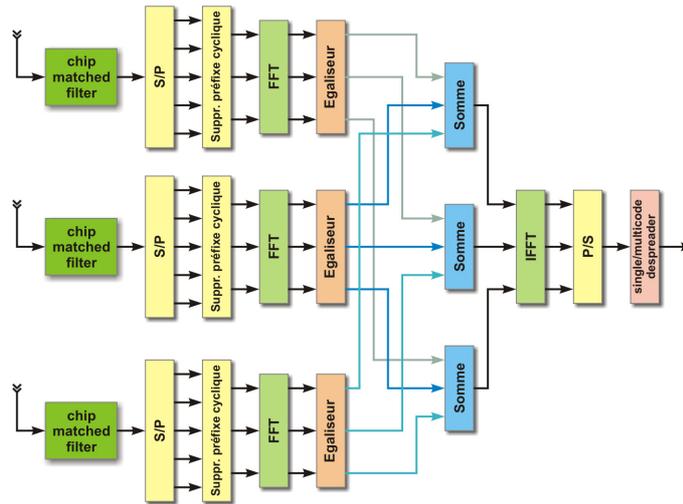


FIGURE 71 : LE MODELE DU RECEPTEUR CP-CDMA

La structure du récepteur CP-CDMA est présentée dans la Figure 71. Le signal reçu sur l'antenne de réception  $i$  s'écrit sous la forme

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N_t} x_j(t) \otimes h_{ij}(t) + n(t) \quad (4)$$

$h_{ij}(t)$  est le canal équivalent en fonction des filtres adaptés à l'émetteur et au récepteur défini par

$$h_{ij}(t) = p_t(t) \otimes h_{RFij}(t) \otimes p_r(t) \quad (5)$$

Après l'échantillonnage et la synchronisation au niveau chip, les préfixes cycliques sont éliminés et la transformée de Fourier discrète est appliquée à chaque bloc de  $NK$  chips pour obtenir les symboles dans le domaine fréquentiel. Les séquences en chip reçu à l'antenne  $i$  après l'élimination des préfixes cycliques et avant la transformée de Fourier sont représentées par

$$y_i[m, b] = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{l=0}^{L_p} h_{ij}[l] \cdot x_j[m-l, b] + n_i[m, b] \quad (6)$$

avec  $h_{ji}[l]=h_{ij}(lT_c)$  et  $h_{ij}[l]=0$  si  $l<0$  et  $l>L_p$ .  $n_i[m,b]$  modélise le bruit et les interférences pour le chip  $m$  du bloc  $b$  pour l'antenne  $i$ . Le signal reçu dans le domaine fréquentiel s'écrit

$$Y_i[k,b]=\sum_{m=0}^{NK-1} y_i[m,b] \cdot e^{-j\frac{2\pi mk}{NK}} \quad (7)$$

ou encore

$$Y_i[k,b]=\sum_{j=1}^{N_t} H_{ij}[k] \cdot X_j[k,b]+N[k,b] \quad (8)$$

avec  $H_{ij}[k]$ ,  $X_j[k,b]$  et  $N_i[k,b]$  la réponse fréquentielle discrète de taille  $NK$  de  $h_{ij}[m]$ ,  $x_j[m,b]$  et  $n_i[m,b]$  respectivement.

Avec  $N_r$  antennes de réception, on peut arranger les signaux dans le domaine fréquentiel par

$$\hat{\mathbf{Y}}(k)=\hat{\mathbf{H}}(k) \cdot \mathbf{S}(k)+\mathbf{N}(k) \quad (9)$$

avec

$$\hat{\mathbf{Y}}(k)=\begin{bmatrix} \mathbf{Y}[k,b_1] \\ \mathbf{Y}^*[k,b_2] \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}[k,b]=\begin{bmatrix} Y_1[k,b] \dots Y_{N_r}[k,b] \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(k)=\begin{bmatrix} S[k,b_1] \\ S[k,b_2] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1[k,b_1] & \mathbf{H}_2[k,b_1] \\ \mathbf{H}_2^*[k,b_2] & -\mathbf{H}_1^*[k,b_2] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_i[k,b]=\begin{bmatrix} H_{1j}[k,b] \dots H_{N_r,j}[k,b] \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{N}}(k)=\begin{bmatrix} \mathbf{N}[k,b_1] \\ \mathbf{N}^*[k,b_2] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{N}[k,b]=\begin{bmatrix} N_1[k,b] \dots N_{N_r}[k,b] \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

L'estimation des symboles dans le domaine fréquentiel par un filtre linéaire s'écrit sous la forme

$$\mathbf{Z}(k)=\mathbf{W}^H(k) \cdot \hat{\mathbf{Y}}(k) \quad (17)$$

avec

$$\mathbf{W}(k)=\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(k) & \mathbf{w}_2(k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{Z}(k) = [Z[k, b_1] \ Z[k, b_2]]^T \quad (19)$$

$Z[k, b_1]$  et  $Z[k, b_2]$  sont les estimations de  $S[k, b_1]$  et  $S[k, b_2]$  respectivement.

$\mathbf{W}(k)$  est une matrice de taille  $2N_r \times 2$  minimisant l'écart quadratique moyen entre  $Z[k, b_i]$  et  $S[k, b_i]$  déterminée par

$$\mathbf{W}(k) = \left[ \hat{\mathbf{H}}(k) \cdot \hat{\mathbf{H}}^H(k) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \cdot \mathbf{I} \right]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{H}}(k) \quad (20)$$

$\sigma_n^2$  est la variance du bruit et  $\sigma_s^2$  est la puissance moyenne des chips transmis en bande de base.

Le problème avec le filtre précédent est qu'il dépend de  $\sigma_s^2$ . Ceci ne pose problème que quand on utilise un signal à enveloppe non constante. Pour palier ce problème, on applique un coefficient correctif  $\beta_i$  à chaque colonne de  $\mathbf{W}(k)$  défini par

$$\beta_i = \left( \frac{1}{NK} \sum_{k=0}^{NK-1} \mathbf{w}_i^H(k) \cdot \hat{\mathbf{H}}_i(k) \right)^{-1} \quad (21)$$

Un filtre zéro forcing avec une performance moins bonne que le filtre défini en (20), est simplement donné par

$$\mathbf{w}_i(k) = \frac{\hat{\mathbf{H}}_i(k)}{\left( \hat{\mathbf{H}}_i^H(k) \cdot \hat{\mathbf{H}}_i(k) \right)}, i \in \{1, 2\} \quad (22)$$

Les signaux dans le domaine fréquentiel  $\mathbf{Z}(k)$  sont ensuite transformés en signaux temporels par la transformée de Fourier discrète inverse de  $NK$  points. Le code *scrambling* est enlevé et une correction de gain est effectuée avant le désétalement pour récupérer les symboles de données effectivement transmis sur le  $U^{\text{ième}}$  canal Walsh.

### 5.2.3 Les performances

Les performances présentées ici sont extraites de [53]. Les résultats sont pour un système CP-CDMA à 6Mhz pour  $N=256$  code Walsh et  $K=2$  intervalles de code Walsh par bloc. La taille de FFT est de  $NK=512$  avec le débit chips égale à 4.44MHz et un débit de bloc égale à 7.7kHz. La taille du préfixe cyclique est de 64 chips et le facteur *roll-off* du filtre de racine de cosinus surélevé est de 0.35. La modulation MAQ-16 à puissance moyenne unitaire unité avec un contrôle de gain  $A_u = 1/\sqrt{N}$  est utilisé avec la variance  $\sigma_s^2 = U/N$ . Le rapport signal à bruit après le désétalement et la correction du gain est  $E\left(|H_j[k]|^2\right) / \sigma_s^2$ .

Le canal utilisé est un canal à 10 trajets à profil uniforme avec les angles de transmission et d'arrivée distribués de façon uniforme autour des émetteurs et des récepteurs. Les signaux parcourant le premier trajet servent de référence avec un retard nul et ceux du dernier trajet arrivent toujours 8µsec après le premier. Les autres trajets ont un retard aléatoirement reparti entre 0 et 8µsec. Le temps d'arrivée n'est pas nécessairement un multiple du temps chips mais la durée de la réponse impulsionnelle doit être inférieure à la durée du préfixe cyclique. Les antennes sont espacées uniformément de trois longueurs d'ondes.

La Figure 72 représente la performance du système non codé avec la diversité spatiale au récepteur en fonction du nombre d'utilisateurs à SNR=15dB pour plusieurs méthodes de décodages : l'algorithme MMSE dans le domaine fréquentiel (20) sans le coefficient de correction (21), le même algorithme mais avec le coefficient de correction illustrant la nécessité de corriger les gains dans la modulation MAQ, *zero forcing* (ZF) fréquentiel avec  $\sigma_n^2=0$  et un récepteur RAKE à 15 doigts utilisant l'algorithme MRC entre les antennes de réception. Ces algorithmes sont comparés avec la borne du filtre adapté. Il y a une antenne d'émission et deux antennes de réception. La performance de la méthode ZF ne dépend pas de nombre d'utilisateurs mais elle est moins bonne que l'algorithme MMSE corrigé. L'algorithme MMSE sans le coefficient de correction est très mauvais quand il y a peu d'utilisateurs. Par contre, les performances du MMSE sans correction rejoignent les performances de MMSE corrigé lorsque tous les codes Walsh sont utilisés. Ceci met en évidence l'importance du coefficient de correction pour obtenir une meilleure performance.

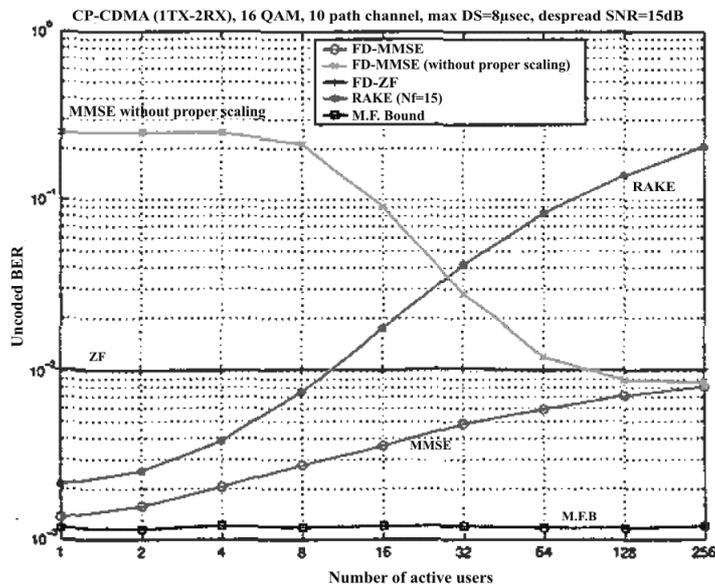


FIGURE 72 : LE BER VS. LE NOMBRE UTILISATEURS ACTIFS (1 TX, 2 RX)

Alors que la configuration précédente crée la diversité spatiale au niveau du récepteur, la Figure 73 nous montre la performance quand la diversité spatiale est créée aux émetteurs en utilisant le

schéma d'Alamouti. On observe les mêmes conclusions concernant les performances des algorithmes.

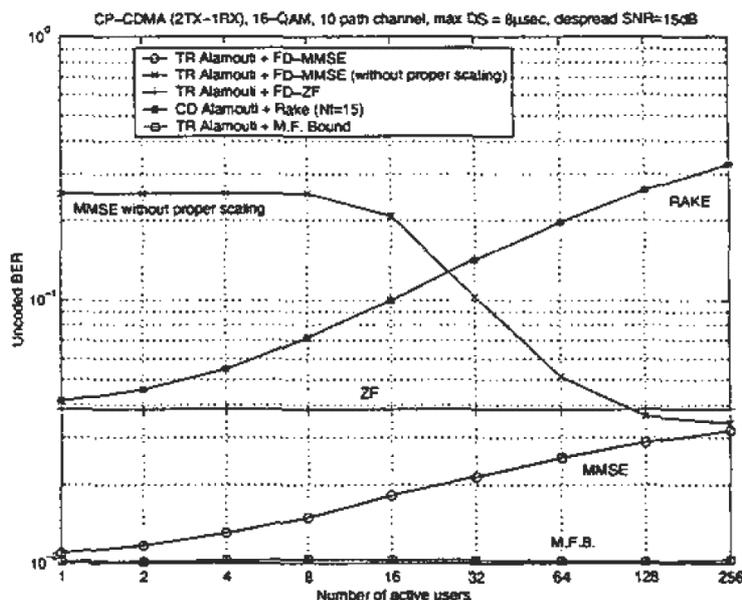


FIGURE 73 : LE BER VS. LE NOMBRE UTILISATEURS ACTIFS AVEC LE SCHEMA D'ALAMOUTI (2 TX, 1 RX)

La Figure 74 montre les performances en fonction du SNR quand le nombre d'utilisateurs dans le système est maximal et dans le cas où seulement une antenne d'émission est utilisé. On peut voir que l'algorithme RAKE est quasiment inutilisable dans la configuration de simulation imposée.

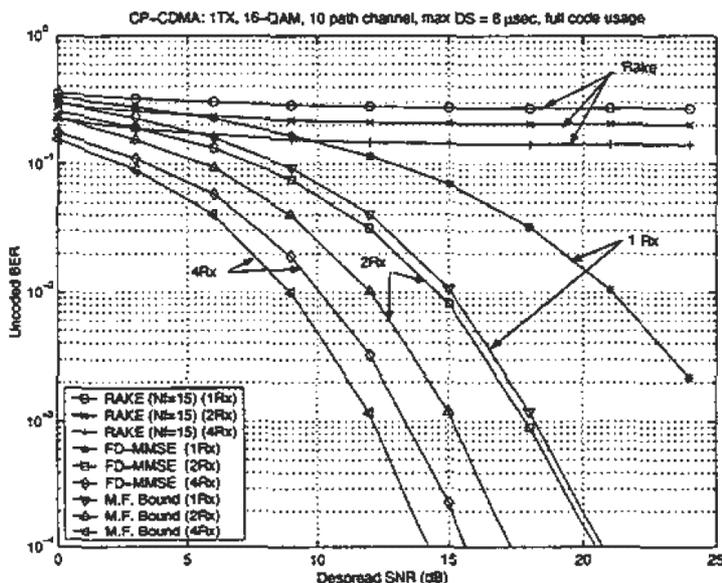


FIGURE 74 : LE BER VS. SNR, SYSTEME FULL LOAD, 1TX, NRX

La Figure 75 montre les résultats similaires dans le cas où le schéma d'Alamouti est utilisé.

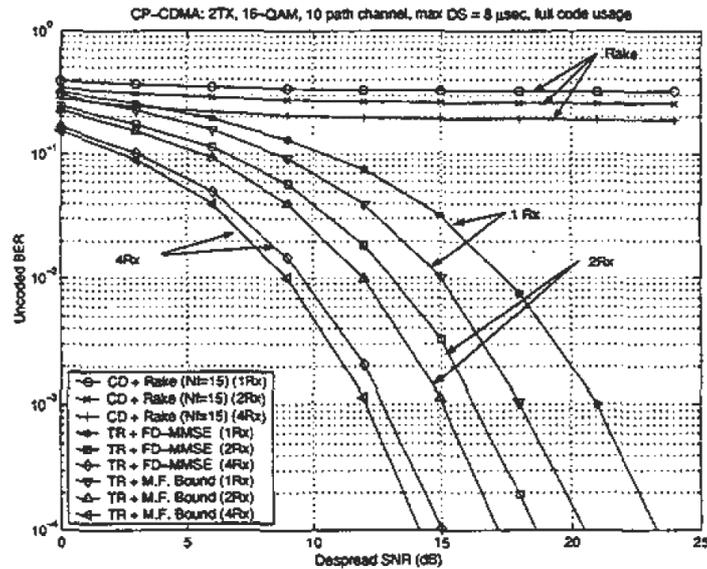


FIGURE 75 : LE BER vs. SNR, SYSTEME FULL LOAD, SCHEMA D'ALAMOUTI

Ces résultats nous amènent à la conclusion que le système proposé ici a une meilleure performance que le système basé sur le récepteur RAKE. La performance du système n'est pas très loin de la borne du filtre adapté. L'importance du coefficient de correction ne doit pas être sous-estimée. Ce système permet une augmentation de la capacité avec l'ordre de modulation plus élevé dans un canal large bande très dispersé.

### 5.3 Combined Array Processing

#### 5.3.1 Système mono porteuse sur le canal fading

Naguib *et al.* [54] et Stamoulis *et al.* [55] ont présenté une méthode linéaire permettant de détecter simultanément plusieurs utilisateurs utilisant le même code STBC s'ils sont quasiment synchrones (cas d'un système microcellulaire). Tout le principe repose sur la diversité spatiale en réception pour obtenir un système solvable. Afin de pouvoir discriminer les utilisateurs, le nombre d'antennes de réception doit être au moins égal aux nombres d'utilisateurs actifs dans le système. Aucun changement n'est requis à l'émetteur. Dans le cadre de cette mémoire, chaque émetteur utilise le schéma STBC d'Alamouti. La généralisation aux autres schémas STBC peut être trouvée en partie dans [55].

## 5.3.1.1 Le modèle du système

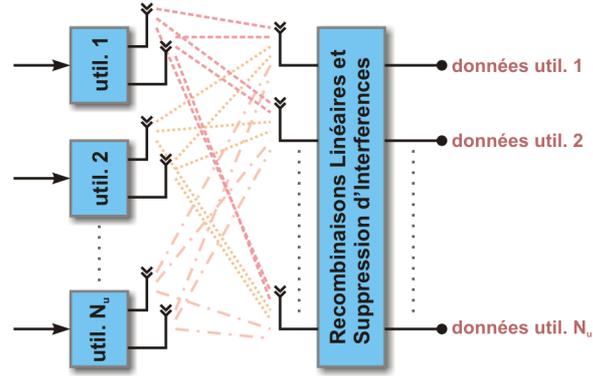


FIGURE 76 : LE MODELE DU SYSTEME CAP

La Figure 76 présente le modèle du système *Combined Array Processing* (CAP). Chaque utilisateur utilise deux antennes d'émission pour transmettre un mot STBC selon le schéma d'Alamouti. Le mot STBC de l'utilisateur  $u$  est décrit par

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} x_1^{(u)} & x_2^{(u)} \\ x_1^{(u)*} & -x_2^{(u)*} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,q_1}^{(u)} & \tilde{x}_{2,q_1}^{(u)} \\ \tilde{x}_{1,q_2}^{(u)} & \tilde{x}_{2,q_2}^{(u)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Chaque colonne de la matrice  $\mathbf{C}_u$  représente les symboles transmis sur l'antenne 1 et l'antenne 2 respectivement et chaque ligne représente le *timeslot* ou créneau temporel dans un mot STBC.  $\{x_{u,j}\}_{j=1,2}$  sont des symboles issus d'une constellation  $\Omega$  quelconque.

Il existe un canal à fading non corrélé entre chaque paire d'antennes d'émission et de réception décrit par un gain complexe constant pendant un mot STBC.

Les signaux en provenance des antennes de l'utilisateur  $u$  reçu sur l'antenne de réception  $i$  pendant le *timeslot*  $q_p$  sont modélisés par

$$r_{i,q_p} = \sum_{j=1}^{N_i} h_{ji}^{(u)} \cdot \tilde{x}_{j,q_p}^{(u)} + n_{i,q_p}^{(u)} \quad (24)$$

Si le système comporte  $N_u$  utilisateurs quasi synchrones, on a alors à chaque antenne de réception, la superposition de tous les signaux de tous les utilisateurs représentée par

$$r_{i,q_p} = \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_i} h_{ji}^{(u)} \cdot \tilde{x}_{j,q_p}^{(u)} + n_{i,q_p} \quad (25)$$

L'équation (25) peut être réécrite sous la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{i,q_1} \\ r_{i,q_2}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_i} = \sum_{u=1}^{N_u} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{1i}^{(u)} & h_{2i}^{(u)} \\ -h_{2i}^{(u)*} & h_{1i}^{(u)*} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_i^{(u)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(u)} \\ x_2^{(u)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(u)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_{i,q_1} \\ n_{i,q_2}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_i} \quad (26)$$

ou encore

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}_i \quad (27)$$

avec  $\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^{(1)} & \dots & \mathbf{H}_i^{(N_u)} \end{bmatrix}_{2 \times 2N_u}$  et  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)T} & \dots & \mathbf{x}^{(N_u)T} \end{bmatrix}_{2N_u \times 1}$ .

Avec  $N_r$  antennes de réception, on peut regrouper tous les signaux reçus sur toutes les antennes de réception par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{N_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{N_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \quad (28)$$

Pour que le système soit solvable, il faut que

$$\text{rang}(\mathbf{H}) \geq 2N_u \quad (29)$$

Dans le cas où toutes les antennes d'émission et de réception sont adéquatement espacées pour que les canaux soient parfaitement décorrélés entre eux, il est évident que  $N_r \geq N_u$  car la taille de  $\mathbf{r}_i$  est de  $2 \times 1$ .

Le problème ici est de garder le gain de la diversité spatiale. Un filtre linéaire a été présenté dans [54] pour deux utilisateurs et puis généralisé au cas de  $N_u$  utilisateurs dans [55].

### 5.3.1.2 La construction du filtre et l'algorithme de décodage

Pour simplifier les notations, on suppose que  $N_r = N_u$ .

Le système à résoudre s'écrit sous la forme

$$\mathbf{r} \Big|_{2N_u \times 1} = \mathbf{H} \Big|_{2N_u \times 2N_u} \cdot \mathbf{x} \Big|_{2N_u \times 1} + \mathbf{n} \Big|_{2N_u \times 1} \quad (30)$$

On partitionne la matrice  $\mathbf{H}$  en quatre sous matrices

$$\mathbf{H} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{2(N_u-1) \times 2(N_u-1)} & \mathbf{B}_{2(N_u-1) \times 2} \\ \hline \mathbf{I}_{2 \times 2(N_u-1)} & \mathbf{\Delta}_{2 \times 2} \end{array} \right]_{2(N_u-1) \times 2(N_u-1)} \quad (31)$$

Arbitrairement, on cherche à découpler l'utilisateur  $N_u$  parmi les autres<sup>11</sup> pour décoder ses informations avant de passer aux autres utilisateurs. L'utilisateur  $N_u$  est découplé si les parties  $\mathbf{B}$

<sup>11</sup> On peut aussi imaginer de découpler deux utilisateurs parmi les autres comme cela été proposé dans [56]

et  $\Gamma$  dans la matrice  $\mathbf{H}$  sont nulles. On peut appliquer un filtre  $\mathbf{W}$  qui permet d'obtenir la configuration suivante :

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Si l'on impose

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2(N_u-1) \times 2(N_u-1)} & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

On a alors les identités suivantes

$$\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{W}_2 \cdot \Gamma = \mathbf{P} \quad (34)$$

$$\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{W}_2 \cdot \Delta = \mathbf{0} \quad (35)$$

$$\mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{W}_4 \cdot \Gamma = \mathbf{0} \quad (36)$$

$$\mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{W}_4 \cdot \Delta = \mathbf{Q} \quad (37)$$

Après développement, on a

$$\mathbf{W}_2 = -\mathbf{B} \cdot \Delta^{-1} \quad (38)$$

$$\mathbf{W}_3 = -\Gamma \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (39)$$

et

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Gamma \quad (40)$$

$$\mathbf{Q} = -\Gamma \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \Delta \quad (41)$$

L'application du filtre  $\mathbf{W}$  nous donne

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{2(N_u-1) \times 1} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2(N_u-1) \times 2(N_u-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{2N_u \times 2N_u} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2(N_u-1) \times 1} \\ \mathbf{x}_{2 \times 2}^{(N_u)} \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \quad (43)$$

On peut alors décoder les symboles de l'utilisateur  $N_u$  par

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(N_u)} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (44)$$

A partir de la relation (44), on peut décoder les symboles de l'utilisateur  $N_u$ . Itérativement on décode les autres utilisateurs en substituant  $\mathbf{H}$  par  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{r}$  par  $\hat{\mathbf{r}}$  et on construit un nouveau filtre à chaque fois.

Il reste à savoir si ce filtre conserve le gain de diversité, c'est-à-dire  $\mathbf{Q}$  reste sous la même forme que  $\mathbf{H}_i^{(u)}$ .

### 5.3.1.3 La vérification de la conservation du gain de diversité

Soit  $\mathcal{H}_{(1,1)}$  un groupe d'ensemble des codes orthogonaux complexes défini par

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ -h_2^* & h_1^* \end{bmatrix}; h_1, h_2 \in \mathbb{C} \quad (45)$$

Il est facilement vérifiable que le groupe  $\mathcal{H}_{(1,1)}$  est fermé en addition, en multiplication soit par un membre du même groupe, soit par un scalaire, et en inversion lorsque l'inverse existe.

Si  $\mathbf{H}_\alpha \in \mathcal{H}_{(1,1)}$  et  $\mathbf{H}_\beta \in \mathcal{H}_{(1,1)}$  alors,

$$\mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{H}_\beta \in \mathcal{H}_{(1,1)} \quad (46)$$

$$\mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta \in \mathcal{H}_{(1,1)} \quad (47)$$

Définissons un autre groupe  $\mathcal{H}_{(m,n)}$  des matrices  $2m \times 2n$  construit à partir des  $n$  matrices du groupe  $\mathcal{H}_{(1,1)}$  concaténées en horizontal et  $m$  matrices concaténées en vertical.

A partir des propriétés fermées des blocs élémentaires, on sait que le groupe  $\mathcal{H}_{(m,m)}$  est aussi fermé en addition, en multiplication avec une autre matrice du même groupe ou par un scalaire et l'inversion lorsque ceci existe.

On vérifie aussi que le groupe  $\mathcal{H}_{(m,n)}$  est fermé en addition et que la multiplication entre deux matrices  $\mathbf{H}_\gamma \in \mathcal{H}_{(m,n)}$  et  $\mathbf{H}_\delta \in \mathcal{H}_{(n,k)}$  nous donne

$$\mathbf{H}_\gamma \cdot \mathbf{H}_\delta \in \mathcal{H}_{(m,k)} \quad (48)$$

Avec ces propriétés, et sachant que  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{\Delta}$  sont membres du groupe  $\mathcal{H}_{(m,m)}$ , et  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{\Gamma}$  sont membres du groupe  $\mathcal{H}_{(m,n)}$ , on peut facilement vérifier que

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{(1,1)} \quad (49)$$

et

$$\mathbf{P} \in \mathcal{H}_{(m-1,m-1)} \quad (50)$$

Comme  $\mathbf{H}_i^{(u)} \in \mathcal{H}_{(1,1)}$ , les équations (49)-(50) impliquent que l'orthogonalité inhérente au STBC est conservée et que le gain de diversité est préservé sans aucune détérioration des performances.

## 5.3.1.4 Les performances

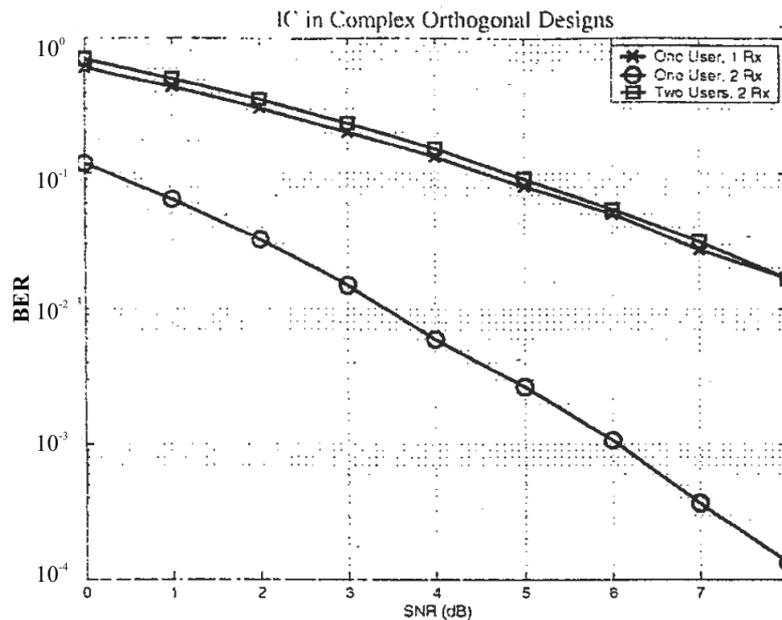


FIGURE 77 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME AVEC DEUX UTILISATEURS A TROIS ANTENNES D'EMISSIONS

La Figure 77 illustre les performances du système d'annulation d'interférences de deux utilisateurs utilisant le code STBC (l'équation 10 du [34]) et trois antennes d'émission chacun. La modulation QPSK est utilisée pour l'émission. Les canaux à fading de Rayleigh complexes gaussiens et indépendants à variance 0.5 par dimension, supposés statiques pendant un mot STBC, servent de modèles. On voit dans la Figure 77 que le système d'annulation d'interférences est capable de découpler parfaitement deux utilisateurs sans perte de performances. On peut voir aussi que l'augmentation du nombre d'antennes de réception pour "accepter" un utilisateur de plus est sans gain de diversité.

La Figure 78 montre les performances du système quand trois utilisateurs partagent les mêmes ressources et transmettent leurs signaux selon le schéma d'Alamouti. La modulation QPSK est utilisée. Les mêmes canaux sont utilisés avec les mêmes hypothèses sur leurs invariabilités et leurs indépendances. Encore une fois, on peut voir que les performances du système ne se dégradent pas quand le nombre d'utilisateurs augmente. La conservation de l'orthogonalité espace temps permet d'obtenir des performances avec des gains de diversité maximaux.

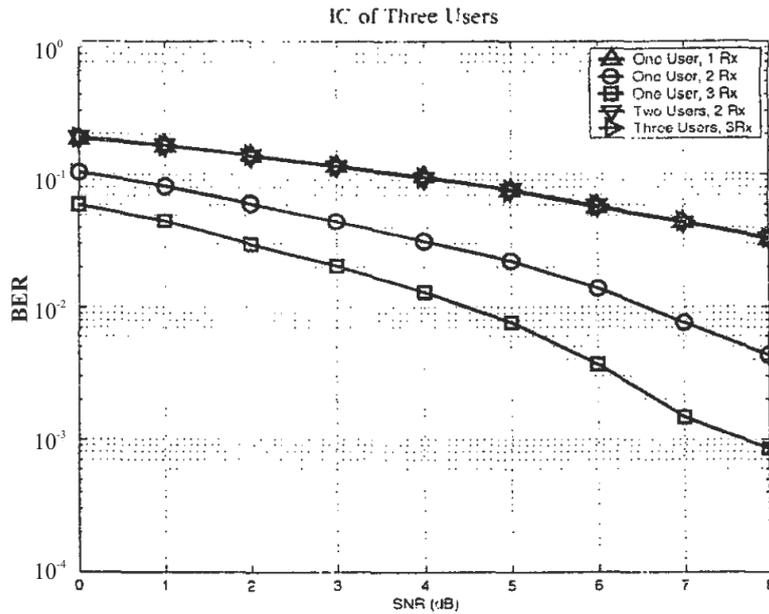


FIGURE 78 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME AVEC TROIS UTILISATEURS A DEUX ANTENNES D'EMISSIONS

### 5.3.2 Système mono porteuse sur le canal sélectif en fréquence

L'extension de la méthode présentée précédemment pour un canal sélectif en fréquence a été proposée par Naguib dans [41]. Il utilise une seule porteuse et plusieurs blocs de symboles avec préfixes cycliques pour construire un mot STBC. Pendant chaque *timeslot*, une série de données est transmise sur un canal sélectif en fréquence à  $L$  trajets. L'égalisation du canal se fait dans le domaine fréquentiel (FDE).

Le canal est décrit par

$$h_{ji}^{(u)}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{ji}^{(u)}(l) \delta(t-l) \quad (51)$$

Le signal reçu à chaque antenne de réception pendant le timeslot  $q_p$  de la matrice STBC s'écrit sous la forme

$$y_{i,q_p}(t) = \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_t} h_{ji}^{(u)}(t) \otimes x_{j,q_p}^{(u)}(t) + n_{i,q_p}(t) \quad (52)$$

Le produit de convolution peut être représenté par la multiplication de deux matrices pour obtenir

$$\mathbf{y}_{i,q_p} = \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{H}_{ji}^{(u)} \cdot \mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_p} \quad (53)$$

La matrice  $\mathbf{H}_{ji}^{(u)}$  est une matrice circulante décomposable en

$$\mathbf{H}_{ji}^{(u)} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{ji}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \quad (54)$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice DFT normalisée [Annexe I].

Chaque vecteur  $\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}$  contient une séquence de  $K$  symboles envoyés séquentiellement sur l'antenne d'émission  $j$  pendant le timeslot  $q_p$  par l'utilisateur  $u$ . Un préfixe cyclique est inséré entre chaque bloc transmis. La séquence transmise dépendra du schéma de STBC préalablement choisi. On se limite au cas de deux antennes d'émission. Les séquences  $\{\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}\}$  sont construites à partir de deux séquences  $\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}$  de taille  $K$  chacune. Les valeurs de  $\{\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}\}$  sont présentées dans le Tableau 15.

TABLEAU 15 : LES VALEURS DE  $\{\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}\}$  DANS LE TEMPS ET DANS L'ESPACE

$\mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)}$		$j$	
		1	2
temps	$q_1$	$\mathbf{x}_{q_1}^{(u)}$	$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)*}$
	$q_2$	$\mathbf{x}_{q_2}^{(u)}$	$\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)*}$

$\mathbf{J}$  est une matrice unitaire oblique (*skew eye matrix*) représentant le retournement d'une séquence définie par

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

### 5.3.2.1 L'égalisation dans le domaine fréquentiel

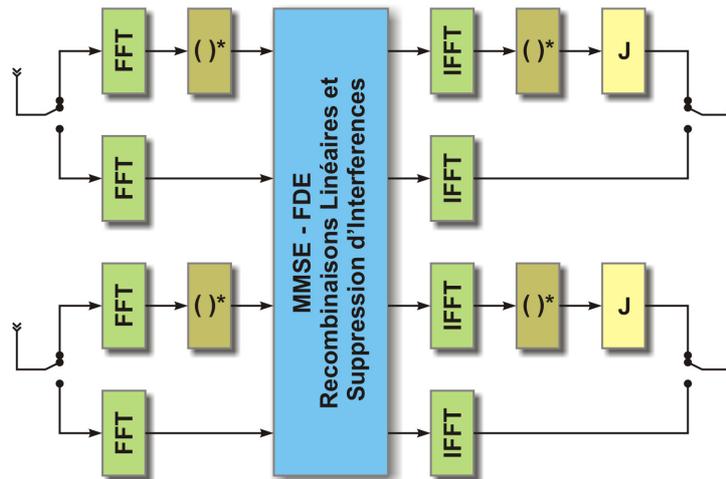


FIGURE 79 : LE RECEPTEUR CAP - FDE

Le modèle du récepteur est présenté sur la Figure 79. La DFT est appliquée aux signaux reçus et on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{i,q_p} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}_{i,q_p} \\
 &= \mathbf{Q} \cdot \left( \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{H}_{ji}^{(u)} \cdot \mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_p} \right) \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_t} \Lambda_{ji}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{j,q_p}^{(u)} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{i,q_p}
 \end{aligned} \tag{56}$$

A remarquer que si  $DFT(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^*$ , alors, par les propriétés de la transformée de Fourier,  $DFT(\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}^*) = \mathbf{X}^*$ . Le retournement de la séquence conjuguée dans le temps sert à obtenir une séquence directe après la transformée de Fourier.

Sous la forme matricielle, le signal reçu sur l'antenne  $i$  s'écrit

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_i^{(u)} \cdot \mathbf{X}_u + \mathbf{N}_i \tag{57}$$

$$\text{avec } \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i,q_1} \\ \mathbf{Y}_{i,q_2}^* \end{bmatrix}, \Lambda_i^{(u)} = \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)} & -\Lambda_{2i}^{(u)} \\ \Lambda_{2i}^{(u)*} & \Lambda_{1i}^{(u)*} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{X}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,q_1}^{(u)} \\ \mathbf{X}_{1,q_2}^{(u)*} \end{bmatrix}$$

Si  $N_r = N_u = 1$ , il est évident que le filtre MMSE s'écrit sous la forme

$$\mathbf{W} = \left( \Lambda \cdot \Lambda^H + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \Lambda \tag{58}$$

Dans ce cas, si l'on définit  $\mathbf{D} = |\Lambda_1|^2 + |\Lambda_2|^2$  une matrice diagonale, et que  $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \frac{1}{\rho} \mathbf{I}$ , on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \Lambda_j &= \Lambda_j \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \\
 \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \Lambda_j^* &= \Lambda_j^* \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1}
 \end{aligned} \tag{59}$$

De ce fait, le filtre MMSE dans le même cas s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_2^* & \Lambda_1^* \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_2^* & \Lambda_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{60}$$

L'application du filtre sur le signal reçu nous donne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z} &= \mathbf{W}^H \cdot \mathbf{Y} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_2^* & \Lambda_1^* \end{bmatrix}^H \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_2^* & \Lambda_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_1} \\ \mathbf{X}_{q_2}^* \end{bmatrix} + \mathbf{W}^H \cdot \mathbf{N} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_1} \\ \mathbf{X}_{q_2}^* \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{N}}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Dans le domaine temporel, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{q_1} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Z}_{q_1} \\ \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Z}_{q_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^* \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{q_1} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_{q_1} \\ \tilde{\mathbf{n}}_{q_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

Cette équation constitue l'estimation des séquences envoyées avec l'une des deux retournées en temps quand le système comporte un seul utilisateur et une seule antenne de réception.

On considère maintenant deux utilisateurs dans le système avec deux antennes de réception. On écrit, de la même manière que précédemment, le signal reçu après transformation dans le domaine fréquentiel,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i,q_1} \\ \mathbf{Y}_{i,q_2}^* \end{bmatrix} = \sum_{u=1}^2 \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)} & -\Lambda_{2i}^{(u)} \\ \Lambda_{2i}^{(u)*} & \Lambda_{1i}^{(u)*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_1}^{(u)} \\ \mathbf{X}_{q_2}^{(u)*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,q_1} \\ \mathbf{N}_{i,q_2}^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_{u=1}^2 \Lambda_i^{(u)} \cdot \mathbf{X}_u + \mathbf{N}_i \end{aligned} \quad (63)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(1)} & \Lambda_1^{(2)} \\ \Lambda_2^{(1)} & \Lambda_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \end{aligned} \quad (64)$$

On observe que les matrices  $\Lambda_i^{(u)}$  sont orthogonales, c'est-à-dire

$$\Gamma_i^{(u)} = \Lambda_i^{(u)H} \cdot \Lambda_i^{(u)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^{(u)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_i^{(u)} \end{bmatrix} \quad (65)$$

avec  $\mathbf{D}_i^{(u)}$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux prennent les valeurs

$$D_i^{(u)}(k,k) = \sum_{j=1}^N \left| \Lambda_{ji}^{(u)}(k,k) \right|^2, k \in \{1, \dots, K\}. \quad (66)$$

Si l'on définit

$$\mathbf{A}^{(u)} = \Lambda_1^{(u)} \cdot \Lambda_2^{(u)H} \quad (67)$$

alors la matrice  $\mathbf{A}^{(u)}$  est aussi orthogonale vu que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(u)} \cdot \mathbf{A}^{(u)H} &= \Lambda_1^{(u)} \cdot \Lambda_2^{(u)H} \cdot \Lambda_2^{(u)} \cdot \Lambda_1^{(u)H} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(u)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(u)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

$\mathbf{D}^{(u)}$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux ont des valeurs

$$D^{(u)}(k,k) = \left( \left| \Lambda_{12}^{(u)}(k,k) \right|^2 + \left| \Lambda_{22}^{(u)}(k,k) \right|^2 \right) \cdot \left( \left| \Lambda_{11}^{(u)}(k,k) \right|^2 + \left| \Lambda_{21}^{(u)}(k,k) \right|^2 \right), k \in \{1, \dots, K\} \quad (69)$$

Si l'on note

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{\Gamma}_i^{(1)} + \mathbf{\Gamma}_i^{(2)} \quad (70)$$

et

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \quad (71)$$

et qu'on cherche deux filtres MMSE  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{W}_2$  qui minimisent

$$e_1^2 = E \left\{ \left| \mathbf{W}_1^H \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{X}_1 \right|^2 \right\} \quad (72)$$

$$e_2^2 = E \left\{ \left| \mathbf{W}_2^H \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{X}_2 \right|^2 \right\} \quad (73)$$

alors, les filtres MMSE sont définis par

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} & \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}^* & \mathbf{R}_2 + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(1)} \\ \Lambda_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} & \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}^* & \mathbf{R}_2 + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(2)} \\ \Lambda_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (75)$$

Après l'application de ces filtres, on peut extraire les symboles de chacun des deux utilisateurs comme précédemment. L'inversion de la matrice peut être calculée de façon efficace en utilisant les propriétés de  $\mathbf{\Gamma}_i^{(u)}$  et  $\mathbf{A}^{(u)}$ . Néanmoins la complexité de cet algorithme est toujours prohibitive même pour des valeurs de  $K$  modérées.

En regardant de plus près l'équation (63), on voit que le  $k^{ième}$  élément du  $\mathbf{Y}_{i,q_p}$  peut être écrit sous la forme <sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i(k) &= \begin{bmatrix} Y_{i,q_1}(k) \\ Y_{i,q_2}^*(k) \end{bmatrix} = \sum_{u=1}^2 \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)}(k) & -\Lambda_{2i}^{(u)}(k) \\ \Lambda_{2i}^{(u)*}(k) & \Lambda_{1i}^{(u)*}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{i,q_1}^{(u)}(k) \\ X_{i,q_2}^{(u)*}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{i,q_1}(k) \\ N_{i,q_2}^*(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{u=1}^2 \Lambda_i^{(u)}(k) \cdot \mathbf{X}_u(k) + \mathbf{N}_i(k) \end{aligned} \quad (76)$$

<sup>12</sup> Afin de simplifier l'écriture, pour une matrice  $\zeta$  quelconque construite à partir des blocs de matrices diagonales,  $\zeta(k)$  signifie que les éléments de la nouvelle matrice sont constitués du  $k^{ième}$  élément de chaque bloc de sous matrices diagonales contenues dans  $\zeta$ .

ou plus généralement

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(k) \\ \mathbf{Y}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(1)}(k) & \Lambda_1^{(2)}(k) \\ \Lambda_2^{(1)}(k) & \Lambda_2^{(2)}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(k) \\ \mathbf{X}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(k) \\ \mathbf{N}_2(k) \end{bmatrix} \\ &= \Lambda(k) \cdot \mathbf{X}(k) + \mathbf{N}(k) \end{aligned} \quad (77)$$

On peut alors calculer les deux filtres MMSE individuellement pour chaque "sous porteuse" par

$$\mathbf{W}_1^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{(k)} + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} & \Psi^{(k)} \\ \Psi^{*(k)} & \mathbf{R}_2^{(k)} + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(1)}(k) \\ \Lambda_2^{(1)}(k) \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{W}_2^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{(k)} + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} & \Psi^{(k)} \\ \Psi^{*(k)} & \mathbf{R}_2^{(k)} + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(2)}(k) \\ \Lambda_2^{(2)}(k) \end{bmatrix} \quad (79)$$

Les symboles *fréquentiels* sont transformés dans le domaine temporel par la DFT avant de faire la décision hard ou de les passer dans un décodeur de canal.

Naguib s'est arrêté au cas de deux utilisateurs dans sa démonstration dans [41]. Avec  $N_u$  utilisateurs, les calculs de filtre MMSE deviennent prohibitifs, mais en traitant le problème encore une fois individuellement sur chaque *sous porteuse*, on obtient  $K$  systèmes décrits par

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{(1)}(k) & \cdots & \Lambda_1^{(N_u)}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N_u}^{(1)}(k) & \cdots & \Lambda_{N_u}^{(N_u)}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 2N_u} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} \quad (80)$$

$\Lambda_i^{(u)}(k)$  est membre du group  $\mathcal{H}_{(1,1)}$  défini précédemment. L'équation (80) est sous la même forme que (28) et il est peut-être possible de décoder les informations de la même manière que (28) sur chaque sous porteuse  $k$ . Le problème est que, après les itérations et les combinaisons linéaires, on obtient les relations STBC d'Alamouti mais en fréquence alors qu'il faut trouver les séquences dans le domaine temporel. Après avoir appliqué l'algorithme présenté dans 5.3.1.2, on note

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(u)}(k) = \lambda^{(u)}(k) \cdot \mathbf{X}^{(u)}(k) + \tilde{\mathbf{n}} \quad (81)$$

le signal équivalent pour l'utilisateur  $u$ . Les valeurs softs en fréquence sont obtenues après l'application du filtre MMSE

$$\hat{\mathbf{X}}^{(u)}(k) = \mathbf{W}^{(u)H}(k) \cdot \tilde{\mathbf{r}}^{(u)}(k) \quad (82)$$

avec

$$\mathbf{W}^{(u)}(k) = \left( \lambda^{(u)}(k) \cdot \lambda^{(u)H}(k) + \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \lambda^{(u)}(k) \quad (83)$$

L'estimation soft des séquences envoyées par l'utilisateur  $u$  dans le domaine temporel est alors

$$\hat{\mathbf{x}}^{(u)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} \\ \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(u)} \quad (84)$$

Malheureusement, faute de temps, la validité de cette approche n'a pas pu être vérifiée dans les temps. J'ai cependant trouvé intéressant de présenter cette idée ici en supposant que la méthode marchera. J'ai préféré privilégier l'approche multi porteuse présentée ci après.

### 5.3.2.2 Les performances

Les résultats présentés ici sont extraits de [41]. Un exemple du résultat de la simulation pour l'algorithme FDE et l'annulation d'interférences appliquée au STBC est montré à la Figure 80. On utilise le format de transmission basé sur la norme GSM-EDGE avec le débit symboles égal à 271 KSymboles/s (correspondant au temps symbole de  $3.69\mu\text{sec}$ ). Les symboles sont modulés en GMSK avec deux échantillons par baud. Les filtres passe bas idéaux sont utilisés aux récepteurs. Le canal est un canal FIR normalisé TU3 et due à la forme gaussien du signal, on le modélise par 5 délais. Comme l'énergie moyenne du cinquième délai est 50 dB moins forte que celui du premier, on assume que ceci est largement négligeable et on considère seulement quatre retards dans le modèle du canal. Une trame contient 12 symboles pilotes suivis par 2 blocs de données de 64 symboles chacun et 4 symboles avec préfixes cycliques.

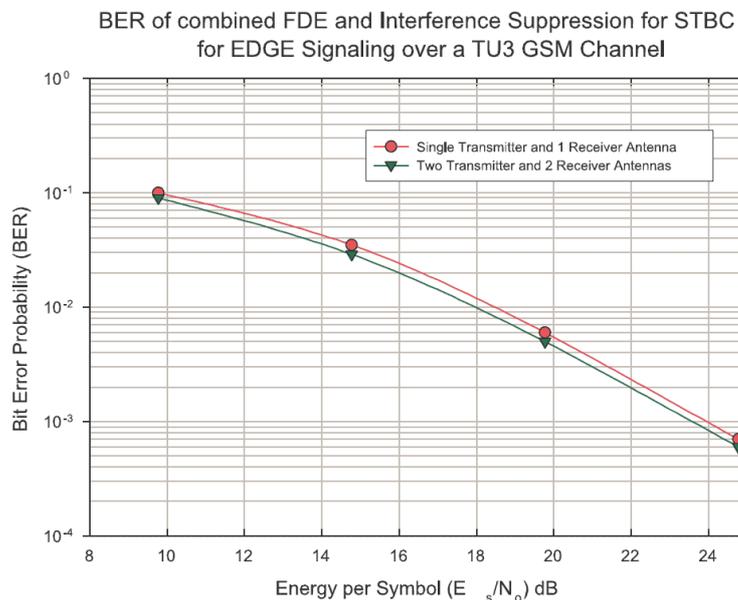


FIGURE 80 : LE TEB DU SYSTEME PROPOSE SUR UN CANAL GSM-EDGE TU3

La Figure 80 montre les performances du système en termes de TEB fonction du SNR dans deux configurations différentes. La première correspond au cas où il n'y a qu'un seul utilisateur dans le système et une antenne de réception. La deuxième correspond au cas où on a deux

utilisateurs et deux antennes de réception utilisant les techniques d'annulation d'interférences précédemment détaillées. On peut voir en effet que le système proposé permet d'éliminer les interférences effectivement. L'approche MMSE nous permet même d'obtenir une petite amélioration de performances.

### 5.3.3 Système multi porteuses sur le canal sélectif en fréquence

On a vu dans le paragraphe précédent qu'il existe des possibilités de traiter les informations dans le domaine fréquentiel. Dans ce paragraphe, on applique la méthode linéaire présentée dans les deux parties précédentes sur un système multi porteuses comme l'OFDM. La différence avec la méthode FDE est que l'on traite les symboles dans le domaine temporel. Virtuellement, on déplace le bloc IDFT se trouvant au récepteur du système précédent à chaque émetteur. On suppose toujours qu'il y a  $N_u$  utilisateurs synchrones dans le système et  $N_u$  antennes de réception au récepteur. Le modèle de canal reste identique à ceux présentés précédemment.

Chaque utilisateur envoie deux séquences de taille  $K$  pendant un mot STBC. Ces deux séquences sont transformées en mots OFDM puis envoyées sur le canal via les deux antennes d'émission disponibles.

On note

$$\mathbf{x}_{q_p}^{(u)} = \begin{bmatrix} x_{q_p}^{(u)}(0) \\ \vdots \\ x_{q_p}^{(u)}(K-1) \end{bmatrix}_{K \times 1}, p \in \{1, 2\} \quad (85)$$

la  $p^{\text{ième}}$  séquence à envoyer dans un mot STBC par l'utilisateur  $u$ .

On construit un mot OFDM

$$\mathbf{x}_{q_p}^{(u)} = \begin{bmatrix} x_{q_p}^{(u)}(0) \\ \vdots \\ x_{q_p}^{(u)}(K-1) \end{bmatrix}_{K \times 1} \quad (86)$$

avec

$$x_{q_p}^{(u)}(k) = \sum_{l=0}^{K-1} X_{q_p}^{(u)}(l) \cdot e^{j \frac{2\pi l k}{K}} \quad (87)$$

Sous la forme matricielle, on a

$$\mathbf{x}_{q_p}^{(u)} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_p}^{(u)} \quad (88)$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice DFT normalisée dont  $Q(m, n) = \frac{1}{\sqrt{K}} e^{-j 2\pi m n / K}$ ,  $0 \leq m, n \leq K-1$ .

On définit

$$\tilde{\mathbf{x}}_{q_p}^{(u)} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_p}^{(u)*} \quad (89)$$

Le mot OFDM conjugué et retourné dans le temps.  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  est la matrice oblique

représentant le retournement dans le temps. En effet,

$$\tilde{\mathbf{x}}_{q_p}^{(u)}[K] = \mathbf{x}_{q_p}^{(u)*}[-K]_{\text{mod } K} \quad (90)$$

L'utilisateur  $u$  envoie  $\mathbf{x}_{q_1}^{(u)}$  et  $-\tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)}$  sur l'antenne 1 et 2 respectivement pendant le premier timeslot du mot STBC et envoie  $\mathbf{x}_{q_2}^{(u)}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)}$  pendant le timeslot suivant. L'émission est résumée dans le Tableau 16

TABLEAU 16 : L'EMISSION DE STBC OFDM

		ANTENNE 1	ANTENNE 2
TEMPS	$q_1$	$\mathbf{x}_{q_1}^{(u)}$	$-\tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)}$
	$q_2$	$\mathbf{x}_{q_2}^{(u)}$	$\tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)}$

Un préfixe cyclique est ajouté après l'émission de chaque bloc. On a alors le signal reçu à partir de toutes les antennes d'émission de tous les utilisateurs

$$\mathbf{y}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \mathbf{H}_{2i}^{(u)} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_1} \quad (91)$$

$$\mathbf{y}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{H}_{2i}^{(u)} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_2} \quad (92)$$

ou encore

$$\mathbf{y}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_1} \quad (93)$$

$$\mathbf{y}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} + \mathbf{n}_{i,q_2} \quad (94)$$

Après l'opération de démodulation OFDM, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,q_1} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}_{i,q_1} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{i,q_1} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{i,q_1}
 \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,q_2} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}_{i,q_2} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{i,q_2} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} + \mathbf{N}_{i,q_2}
 \end{aligned} \tag{96}$$

Sachant que  $DFT(\mathbf{x}^*(k)) = \mathbf{X}^*(-k)_K$ , par la propriété de la dualité de la transformée de Fourier,

on a

$$\mathbf{x}_{q_p}^*[k] = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_p}^*[-k]_{\text{mod } K} \tag{97}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{q_p} = \mathbf{x}_{q_p}^*[-k] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_p}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_p}^*[k] \tag{98}$$

En substituant (97)-(98) dans (95)-(96), on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,q_1} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_2}^{(u)} + \mathbf{N}_{i,q_1} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)} - \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)*} + \mathbf{N}_{i,q_1} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_1}^{(u)} - \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_2}^* + \mathbf{N}_{i,q_1} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{X}_{q_1}^{(u)} - \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{X}_{q_2}^* + \mathbf{N}_{i,q_1}
 \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,q_2} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{q_1}^{(u)} + \mathbf{N}_{i,q_2} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{q_2}^{(u)} + \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}_{q_1}^{(u)*} + \mathbf{N}_{i,q_2} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_2}^{(u)} + \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{X}_{q_1}^{(u)*} + \mathbf{N}_{i,q_2} \\
 &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1i}^{(u)} \cdot \mathbf{X}_{q_2}^{(u)} + \Lambda_{2i}^{(u)} \cdot \mathbf{X}_{q_1}^{(u)*} + \mathbf{N}_{i,q_2}
 \end{aligned} \tag{100}$$

On peut réécrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{r}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)} & -\Lambda_{2i}^{(u)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_1}^{(u)} \\ \mathbf{X}_{q_2}^{(u)*} \end{bmatrix} + \mathbf{N}_{i,q_1} \quad (101)$$

$$\mathbf{r}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)} & \Lambda_{2i}^{(u)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_2}^{(u)} \\ \mathbf{X}_{q_1}^{(u)*} \end{bmatrix} + \mathbf{N}_{i,q_2} \quad (102)$$

ou encore, après avoir conjugué  $\mathbf{r}_{i,q_2}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i,q_1} \\ \mathbf{r}_{i,q_2}^* \end{bmatrix}_{2K \times 1} &= \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)} & -\Lambda_{2i}^{(u)} \\ \Lambda_{2i}^{(u)*} & \Lambda_{1i}^{(u)*} \end{bmatrix}_{2K \times 2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{q_1}^{(u)} \\ \mathbf{X}_{q_2}^{(u)*} \end{bmatrix}_{2K \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,q_1} \\ \mathbf{N}_{i,q_2}^* \end{bmatrix}_{2K \times 1} \\ \mathbf{r}_i &= \begin{bmatrix} \Lambda_i \\ \Lambda_i^{(1)} & \dots & \Lambda_i^{(N_u)} \end{bmatrix}_{2K \times 2N_u K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(N_u)} \end{bmatrix}_{2N_u K \times 1} + \mathbf{N}_i \\ &= \Lambda_i \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}_i \end{aligned} \quad (103)$$

En considérant tous les signaux reçus sur toutes les antennes de réception, on a la relation complète

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_u} \end{bmatrix}_{2N_u K \times 1} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_{N_u} \end{bmatrix}_{2N_u K \times 2N_u K} \cdot \mathbf{X}_{2N_u K \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{N_u} \end{bmatrix}_{2N_u K \times 1} \quad (104)$$

On rappelle que  $\Lambda_{ji}^{(u)} = \begin{bmatrix} \Lambda_{ji}^{(u)}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_{ji}^{(u)}(K-1) \end{bmatrix}_{K \times K}$  est une matrice diagonale quand on a la

parfaite synchronisation temporelle et fréquentielle des mots OFDM et entre utilisateurs. Ceci veut dire que le  $k^{ième}$  élément du vecteur  $\mathbf{r}_{i,q_p}$  ne dépend que des  $k^{ième}$  éléments de  $\mathbf{X}_{q_p}^{(u)}$  et  $\Lambda_{ji}^{(u)}$ .

On a alors

$$r_{i,q_1}(k) = \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)}(k) & -\Lambda_{2i}^{(u)}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{q_1}^{(u)}(k) \\ X_{q_2}^{(u)*}(k) \end{bmatrix} + N_{i,q_1}(k) \quad (105)$$

$$r_{i,q_2}(k) = \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)}(k) & \Lambda_{2i}^{(u)}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{q_2}^{(u)}(k) \\ X_{q_1}^{(u)*}(k) \end{bmatrix} + N_{i,q_2}(k) \quad (106)$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(k) \\ r_{i,q_1}(k) \\ r_{i,q_2}^*(k) \end{bmatrix}_{2 \times 1} &= \sum_{u=1}^{N_u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^{(u)}(k) & -\Lambda_{2i}^{(u)}(k) \\ \Lambda_{2i}^{(u)*}(k) & \Lambda_{1i}^{(u)*}(k) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} X_{q_1}^{(u)}(k) \\ X_{q_2}^{(u)*}(k) \end{bmatrix}_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} N_{i,q_1}(k) \\ N_{i,q_2}^*(k) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\
 \mathbf{r}_i(k) &= \begin{bmatrix} \Lambda_i(k) \\ \Lambda_i^{(1)}(k) & \dots & \Lambda_i^{(N_u)}(k) \end{bmatrix}_{2 \times 2N_u} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{X}^{(1)}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(N_u)}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} + \mathbf{N}_i(k) \\
 &= \Lambda_i(k) \cdot \mathbf{X}(k) + \mathbf{N}(k)_i
 \end{aligned} \tag{107}$$

et en regroupant tout, on arrive a

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} &= \begin{bmatrix} \Lambda_1(k) \\ \vdots \\ \Lambda_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 2N_u} \cdot \mathbf{X}(k)_{2N_u \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{N_u}(k) \end{bmatrix}_{2N_u \times 1} \\
 \mathbf{r}(k) &= \Lambda(k) \cdot \mathbf{X}(k) + \mathbf{N}(k)
 \end{aligned} \tag{108}$$

Si l'on observe l'équation (108), on note qu'elle est sous la même forme que (28).  $\Lambda_i^{(u)}(k)$  est du groupe  $\mathcal{H}_{(1,1)}$  et  $\Lambda(k)$  est du groupe  $\mathcal{H}_{(N_u, N_u)}$ . On peut, dans ce cas, appliquer l'algorithme présenté dans 5.3.1 sur chaque sous porteuse  $k$ .

L'orthogonalité des symboles et le gain de diversité STBC sont conservés dans ce processus. Comparé à la méthode présentée précédemment dans 5.3.2, les symboles de l'utilisateur  $u$  décodés à chaque itération peuvent être utilisés immédiatement sans avoir besoin d'être transformés dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Etant donné que le système peut être décomposé en  $K$  sous problèmes, on peut facilement envisager une implantation parallèle sans perte de performances. L'inconvénient de ce procédé est la nécessité du synchronisme à la fois temporel et fréquentiel qui n'est pas toujours évidente à réaliser.

### 5.3.4 Remarques et considérations d'implémentations

Le schéma d'accès multiple présenté ici est très simple à réaliser. Néanmoins, du point de vue calculs, la méthode présentée dans cette partie nécessite **une quantité de mémoire non négligeable** exponentiellement fonction de  $N_u$ . Le nombre d'opérations d'inversions de matrices à effectuer doit être aussi considéré.

Du point de vu pratique, afin de garantir la stabilité numérique de l'algorithme, il faut que les canaux soient décorrélés entre eux. Ceci implique la séparation physique minimale entre deux antennes quelconques. Cette séparation est sans problème quand le nombre d'antennes sur un site ou un terminal reste petit mais sachant que **le nombre d'antennes de réception nécessaire**

pour permette ce type de décodage est linéaire en fonction du nombre d'utilisateurs, la surface de déploiement nécessaire augmente de la même manière. Dans un environnement urbain dense, on ne dispose pas de ces surfaces souvent très chères. Avec les réglementations en vigueur, il y a donc une limite sur le nombre d'antennes déployables et en conséquence sur le nombre d'utilisateurs. Il est peut être nécessaire d'envisager d'autres méthodes d'accès multiples qui soient adaptées à l'espace disponible. Il ne faut pas non plus oublier que l'augmentation de ces antennes de réception pour accommoder plus d'utilisateurs se fait **sans gain de diversité**.

Du point de vue rendement et performances, on a les **mêmes performances qu'un système point à point** selon le schéma STBC utilisé. Le gain de diversité complet sera

$$G_{diversité} = \frac{N_t \cdot N_r}{N_u} \tag{109}$$

avec  $N_r$  multiples de  $N_u$ .

Le rendement du système est identique au rendement du schéma STBC utilisé dans le cas point à point. Ceci est alors très intéressant pour les applications très haut débits.

## 5.4 Le système multi utilisateurs à précodeur

Liu *et al.* proposent dans [57] un système à accès multiples avec la diversité spatiale en temps pour les applications quasi synchrones. La méthode d'accès multiple est basée sur la famille MC-CDMA généralisée (GMC-CDMA) [58][59]. Afin de garantir la récupération des symboles de façon déterministe, on utilise un précodeur pour créer la redondance des symboles. Le récepteur n'a besoin de connaître que l'état du canal d'un utilisateur en question pour décoder ses informations.

### 5.4.1 Le modèle du système

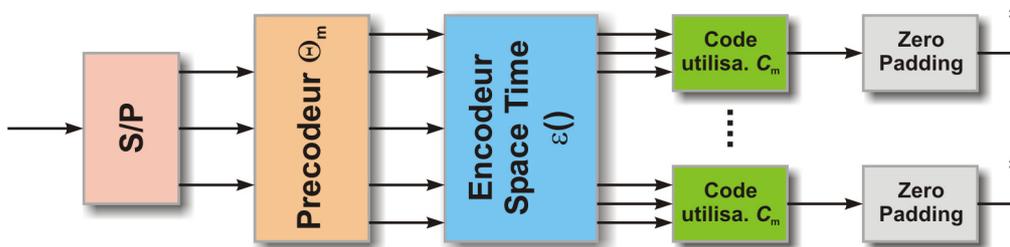


FIGURE 81 : LE MODELE DE L'EMETTEUR DU SYSTEME A PRECODEUR

Le modèle de l'émetteur équivalent en bande de base est présenté par la Figure 81. L'utilisateur  $u$  envoie une séquence de symboles  $s_u(n)$  définie par

$$s_u(n) = [s_u(nK) \dots s_u(nK+K-1)]_{K \times 1}^T \quad (110)$$

Cette séquence est parallélisée et puis appliquée à un précodeur redondant  $\Theta_u$  représenté par une matrice complexe de taille  $Q \times K$ . La séquence résultante est

$$\begin{aligned} \tilde{s}_u(n) &= \Theta_u \cdot s_u(n) \\ &= [\tilde{s}_u(nQ) \dots \tilde{s}_u(nQ+Q-1)]_{Q \times 1}^T \end{aligned} \quad (111)$$

La séquence précodée est ensuite traitée pour construire les symboles créant la diversité spatiale. L'encodeur spatial est représenté par un opérateur  $\varepsilon(\cdot)$  qui prend en entrée  $N_s$  blocs précodés consécutifs  $\tilde{s}_u(i) = [\tilde{s}_u^T(iN_s) \dots \tilde{s}_u^T(iN_s+N_s-1)]_{Q N_s \times 1}^T$  et fournit une matrice de taille  $N_d Q \times N_t$  constituant un mot STBC.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_u(i) &= \varepsilon(\tilde{s}_u(i)) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{s}_{u1}(iN_d) & \dots & \bar{s}_{uN_t}(iN_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{s}_{u1}(iN_d+N_d-1) & \dots & \bar{s}_{uN_t}(iN_d+N_d-1) \end{bmatrix}_{N_d Q \times N_t} \end{aligned} \quad (112)$$

Chaque colonne sera dispatchée sur chacune des  $N_t$  antennes d'émission. Chaque ligne de  $\bar{\mathbf{S}}_u(i)$  correspond à la séquence de  $Q$  symboles à transmettre pendant le temps  $n$  défini par

$$\bar{s}_{un_t}(n) = [\bar{s}_{un_t}(nQ) \dots \bar{s}_{un_t}(nQ+Q-1)]_{Q \times 1}^T \quad (113)$$

$N_d$  est le nombre de séquences dans un mot STBC avec le schéma d'Alamouti,  $N_d$  et  $N_t$  sont égales à deux. Les séquences  $\bar{s}_{un_t}(n)$  sont issues de  $\tilde{s}_u(n)$  dépendante du code STBC utilisé. Elle sont générées à partir des méthodes présentées dans le Chapitre 3. La seule différence est qu'au lieu d'avoir les multiplications entre des matrices et des symboles, on a la multiplication directe encore appelée *produit de Kronecker*<sup>13</sup> entre des matrices et des vecteurs représentées par

$$\bar{\mathbf{S}}_u(n) = \sum_{n_s=0}^{N_s-1} \mathbf{A}_{n_s} \odot \tilde{s}_u(nN_s+n_s) + \mathbf{B}_{n_s} \odot \tilde{s}_u^*(nN_s+n_s) \quad (114)$$

<sup>13</sup> Si  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  et  $\mathbf{B}_{3 \times 2}$  sont deux matrices quelconques, alors

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot \mathbf{B} & a_{12} \cdot \mathbf{B} \\ a_{21} \cdot \mathbf{B} & a_{22} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}_{6 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{21} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{21} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} \end{bmatrix}$$

⊙ représente le produit de Kronecker.

On attribue un code d'étalement  $\mathbf{C}_m$  de taille  $P \times Q$  à chaque utilisateur avec  $P > Q$ . Les symboles  $\bar{s}_{un_i}(n)$  sont étalés et on obtient

$$\mathbf{e}_{un_i}(n) = \mathbf{C}_u \cdot \bar{s}_{un_i}(n) \quad (115)$$

Il faut remarquer que dans un système multi utilisateurs avec diversité spatiale, on a  $(U-1) \cdot N_t$  signaux interférents au lieu de  $(U-1)$ . Ceci pose un problème supplémentaire pour séparer les utilisateurs efficacement. On peut penser à attribuer un code différent pour chaque antenne d'émission comme cela a été proposé dans [60]. Mais néanmoins, dans le système présenté ici, chaque utilisateur utilise le même code d'étalement pour toutes les antennes d'émission. La séparation des utilisateurs est effectuée par un filtre  $\{\mathbf{G}_u\}_{u=0}^{U-1}$  éliminant les MAI de façon déterministe. La construction de la matrice d'étalement et son filtre adapté seront élaborés dans le paragraphe 5.4.2.

La séquence codée  $\mathbf{e}_{un_i}(i)$  de taille  $P \times 1$  est parallélisée et se propage dans un canal sélectif en fréquence défini par

$$h_{un_i}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{un_i}(l) \cdot \delta(t - \tau_L) \quad (116)$$

Le système fonctionne en mode quasi synchrone. Pour éviter les interférences entre blocs, on insère  $L$  symboles nuls à la fin de la séquence  $\mathbf{e}_{un_i}(i)$ . L'effet convolutif du canal sur la séquence transmise est modélisé par la multiplication matricielle définie par

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{u=0}^{U-1} \sum_{n_i=1}^{N_t} \mathbf{H}_{un_i} \cdot \mathbf{e}_{un_i}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (117)$$

avec  $\mathbf{H}_{un_i}$  une matrice Toeplitz de taille  $J \times P$  issue de la multiplication entre la matrice  $\mathbf{T}_z = [\mathbf{I}_P \ \mathbf{0}_{P \times L}]^T$  et une matrice Toeplitz  $\bar{\mathbf{H}}_{un_i}$   $J \times J$  ayant la première ligne égale à  $[h_{un_i}(0) \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times J}$  et la première colonne égale  $[h_{un_i}(0) \ \dots \ h_{un_i}(L-1) \ 0 \ \dots \ 0]_{J \times 1}^T$ .  $J$  est défini par  $J = P + L$ .  $\mathbf{w}_i(n)$  est un vecteur de bruit blanc gaussien indépendant. Il faut noter que le canal est considéré invariant pendant  $N_d$  séquences consécutives, c'est-à-dire pendant un mot STBC.

Le signal reçu est la superposition de tous les signaux provenant de tous les utilisateurs et de toutes leurs antennes d'émission. Il reste à séparer les utilisateurs et à décoder les informations

qui ont été transmises. La séparation dépend du code  $\mathbf{C}_u$  utilisé et de son filtre de découplage respectif  $\mathbf{G}_u$  qu'on élabore ci après.

### 5.4.2 La construction du code

On note  $P=QU$  et on définit l'ensemble  $\mathcal{P} \in \{p_0 \dots p_{P-1}\}$  représentant  $P$  points distincts sur un plan complexe.  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des signatures disponibles et  $p_p$  désigne les points signatures. On alloue, à chaque utilisateur,  $Q$  points signatures distincts de telle sorte qu'il n'y ait pas deux utilisateurs qui partagent un même point. Si l'on définit l'ensemble  $\mathcal{S} \in \{1 \dots P-1\}$  les indices des points de signatures et  $\mathcal{S}_u$  un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  qui représente les indices des points signatures utilisés par l'utilisateur  $u$ , on a alors

$$\bigcup_{u=0}^{U-1} \mathcal{S}_u = \mathcal{S} \quad (118)$$

$$\forall \mu, \eta : \mathcal{S}_\mu \cap \mathcal{S}_\eta = \emptyset \quad (119)$$

Si l'on définit une matrice sélectrice  $\Phi_u = \mathbf{I}_P(:, \mathcal{S}_u)$  de taille  $P \times Q$  issue des colonnes indexées par  $\mathcal{S}_u$  de la matrice identité  $\mathbf{I}_P$   $P \times P$ , on a alors un ensemble de matrices orthogonales

$$\Phi_\mu^T \Phi_\eta = \delta(\mu - \eta) \cdot \mathbf{I}_Q \quad (120)$$

On définit deux matrices Vandermonde  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  construites à partir des points signatures de  $\mathcal{P}$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & p_0^{-1} & \dots & p_0^{-(P-1)} \\ 1 & p_1^{-1} & \dots & p_1^{-(P-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_{P-1}^{-1} & \dots & p_{P-1}^{-(P-1)} \end{bmatrix}_{P \times P} \quad (121)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & p_0^{-1} & \dots & p_0^{-(J-1)} \\ 1 & p_1^{-1} & \dots & p_1^{-(J-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_{P-1}^{-1} & \dots & p_{P-1}^{-(J-1)} \end{bmatrix}_{P \times J} \quad (122)$$

La matrice  $\mathbf{V}_1$  a été construite à partir des points distincts et est alors inversible due à son rang complet. Le code d'étalement de l'utilisateur  $u$  est défini par

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{V}_1^{-1} \cdot \Phi_u \quad (123)$$

et le filtre séparateur est défini par

$$\mathbf{G}_u = \Phi_u^T \cdot \mathbf{V}_2 \quad (124)$$

Si les points signatures se trouvent sur le cercle d'unité correspondant à la constellation de la transformée de Fourier, alors  $\mathbf{V}_1^{-1} \cdot \mathbf{V}_2$  correspond à la matrice IFFT. Ceci signifie que chaque utilisateur utilisera des sous porteuses différentes et distinctes.

### 5.4.3 Le décodage

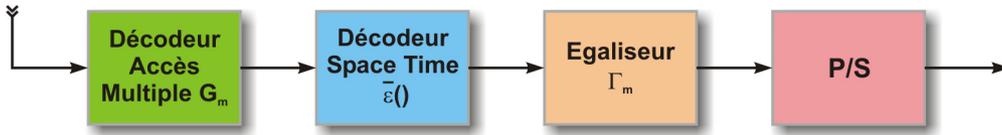


FIGURE 82: LE MODELE DU RECEPTEUR DU SYSTEME A PRECODEUR

La structure du récepteur est présentée dans Figure 82. Pour récupérer les symboles de l'utilisateur  $u$ , on applique le filtre  $\mathbf{G}_u$  au message reçu par

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_u(n) &= \mathbf{G}_u \cdot \mathbf{y}(n) \\ &= \sum_{u=0}^{U-1} \sum_{n_i=1}^{N_i} A_u \cdot \Phi_u^T \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{H}_{u n_i} \cdot \mathbf{V}_1^{-1} \cdot \Phi_u \cdot \bar{s}_{u n_i}(n) + \Phi_u^T \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{w}(n) \end{aligned} \quad (125)$$

On sait qu'une matrice Toeplitz peut être diagonalisée par

$$\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{H}_{u n_i} \cdot \mathbf{V}_1^{-1} = \mathbf{D}_{H_{u n_i}} = \text{diag}(H_{u n_i}(p_0), \dots, H_{u n_i}(p_{P-1})) \quad (126)$$

$H_{u n_i}(p_p)$  est la transformée en  $\mathbf{z}$  du canal, évaluée sur le point  $p_p$ , calculée par

$$H_{u n_i}(p_p) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{u n_i}(l) \cdot p_p^{-l} \quad (127)$$

Si l'on note

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{u n_i} &= \Phi_u^T \cdot \mathbf{D}_{H_{u n_i}} \cdot \Phi_u \\ &= \text{diag}(H_{u n_i}(p_{u,0}), \dots, H_{u n_i}(p_{u,Q-1})) \end{aligned} \quad (128)$$

alors

$$\mathbf{D}_{H_{u n_i}} \cdot \Phi_u = \Phi_u \cdot \mathbf{D}_{u n_i} \quad (129)$$

Ceci signifie que les matrices diagonales commutent avec les matrices de permutations.

Le signal filtré pour l'utilisateur  $u$  devient

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_u(n) &= \sum_{\mu=0}^{U-1} A_\mu \sum_{n_i=1}^{N_i} \Phi_\mu^T \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{H}_{\mu n_i} \cdot \mathbf{V}_1^{-1} \cdot \Phi_\mu \cdot \bar{s}_{\mu n_i}(n) + \Phi_\mu^T \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{w}(n) \\ &= \sum_{\mu=0}^{U-1} A_\mu \sum_{n_i=1}^{N_i} \Phi_\mu^T \cdot \mathbf{D}_{H_{\mu n_i}} \cdot \Phi_\mu \cdot \bar{s}_{\mu n_i}(n) + \Phi_\mu^T \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{w}(n) \end{aligned} \quad (130)$$

Grâce à l'équation (128), toutes les termes  $\mu \neq u$  s'annulent et on obtient des signaux sans interférences

$$\mathbf{y}_u(n) = A_u \sum_{n_t=1}^{N_t} \mathbf{D}_{un_t} \bar{\mathbf{s}}_{un_t}(n) + \boldsymbol{\omega}_u(n) \quad (131)$$

Due à la forme diagonale de  $\mathbf{D}_{un_t}$ , la relation (131) peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{y}_u(n) = A_u \sum \mathbf{D}_{\bar{s}_{un_t}}(n) \mathbf{h}_{un_t} + \boldsymbol{\eta}_u(n) \quad (132)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\bar{s}_{un_t}}(n) &= \text{diag}(\bar{\mathbf{s}}_{un_t}(n)) \\ &= \text{diag}([\bar{s}_{un_t}(nQ) \dots \bar{s}_{un_t}(nQ+Q-1)]) \end{aligned} \quad (133)$$

et

$$\mathbf{h}_{un_t} = [H_{un_t}(p_{u,0}) \dots H_{un_t}(p_{u,Q-1})]^T \quad (134)$$

On définit  $\tilde{\mathbf{y}}_u(i)$  la matrice contenant toutes les symboles reçus pendant un mot STBC constitué de  $N_d$  blocs par

$$\tilde{\mathbf{y}}_m(i) = [\mathbf{y}_m^T(iN_d) \dots \mathbf{y}_m^T(iN_d + N_d - 1)]^T \quad (135)$$

On a alors

$$\tilde{\mathbf{y}}_u(i) = A_u \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bar{s}_{u1}}(iN_d) & \dots & \mathbf{D}_{\bar{s}_{uN_t}}(iN_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{\bar{s}_{u1}}(iN_d + N_d - 1) & \dots & \mathbf{D}_{\bar{s}_{uN_t}}(iN_d + N_d - 1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{\bar{s}_u}(i)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{u1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{uN_t} \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_u(i) \quad (136)$$

On rappelle que  $\mathbf{D}_{\bar{s}_m}(n)$  constitue un mot STBC. On peut identifier  $\mathbf{D}_{\bar{s}_u}(n)$  avec  $\bar{\mathbf{S}}_u(n)$  et écrire  $\mathbf{D}_{\bar{s}_m}(n)$  sous la forme

$$\mathbf{D}_{\bar{s}_u}(i) = \sum_{n_s=0}^{N_s-1} \mathbf{A}_{n_s} \odot \mathbf{D}_{\bar{s}_u}(iN_s + n_s) + \mathbf{B}_{n_s} \odot \mathbf{D}_{\bar{s}_u}^*(iN_s + n_s) \quad (137)$$

avec

$$\mathbf{D}_{\bar{s}_u}(i) = \text{diag}([\tilde{s}_u(nQ) \dots \tilde{s}_u(nQ+Q-1)]) \quad (138)$$

Cette écriture nous permet encore une fois d'invertir la position des symboles et le canal et on obtient le formalisme suivant:

$$\tilde{\mathbf{y}}_u(i) = A_u \sum_{n_s=0}^{N_s-1} \sum_{n_t=1}^{N_t} \left[ \mathbf{A}_{n_s}(:, n_t) \odot \mathbf{D}_{un_t} \right] \cdot \tilde{\mathbf{s}}_u(iN_s + n_s) + \left[ \mathbf{B}_{n_s}(:, n_t) \odot \mathbf{D}_{un_t} \right] \cdot \tilde{\mathbf{s}}_u^*(iN_s + n_s) + \tilde{\mathbf{n}}_u(i) \quad (139)$$

On décode les symboles via les  $N_s$  branches de détecteurs avec sur chaque branche un filtre

$$\mathbf{L}_{un_s} = \left[ \sum_{n_t=1}^{N_t} \mathbf{A}_{n_s}^T(:, n_t) \odot \mathbf{D}_{un_t}^* \quad \sum_{n_t=1}^{N_t} \mathbf{B}_{n_s}(:, n_t) \odot \mathbf{D}_{un_t} \right]_{Q \times 2N_t Q} \quad (140)$$

Pour obtenir la  $n_s^{\text{ième}}$  séquence transmise  $\tilde{\mathbf{s}}(iN_s + n_s)$ , on multiplie le filtre  $\mathbf{L}_{un_s}$  par

$$\hat{\mathbf{y}}_u(i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_u(i) \\ \tilde{\mathbf{y}}_u^*(i) \end{bmatrix}_{2N_t Q \times 1} \quad \text{et on a l'estimation de la séquence}$$

$$\mathbf{z}_u(iN_s + n_s) = \mathbf{L}_{un_s} \cdot \hat{\mathbf{y}}_u(i) \quad (141)$$

Par les propriétés des matrices  $\mathbf{A}_{n_s}$  et  $\mathbf{B}_{n_s}$  et la propriété distributive du produit de Kronecker<sup>14</sup>, le développement de (141) nous donne

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_u(iN_s + n_s) &= \alpha A_u \left( \sum_{n_t=1}^{N_t} \mathbf{D}_{un_t}^* \mathbf{D}_{un_t} \right) \tilde{\mathbf{s}}_u(iN_s + n_s) + \tilde{\mathbf{n}}_u(iN_s + n_s) \\ &= \alpha A_u \mathbf{D}_u \mathbf{\Theta}_u \mathbf{s}_u(iN_s + n_s) + \tilde{\mathbf{n}}_u(iN_s + n_s) \end{aligned} \quad (142)$$

$$\text{avec } \mathbf{D}_u = \sum_{n_t=1}^{N_t} \mathbf{D}_{un_t}^* \mathbf{D}_{un_t} = \text{diag} \left( \left[ \sum_{n_t=1}^{N_t} |H_{un_t}(p_{u,0})|^2, \dots, \sum_{n_t=1}^{N_t} |H_{un_t}(p_{u,Q-1})|^2 \right] \right) \text{ et } \tilde{\mathbf{n}}_u = \mathbf{L}_{un_s} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_u(i) \\ \tilde{\mathbf{n}}_u^*(i) \end{bmatrix}.$$

A partir de (142), tout égaliseur linéaire simple utilisateur peut être utilisé pour extraire les symboles  $\mathbf{s}_u(n)$ . Une solution *zéro forcing* nous donne le filtre égaliseur

$$\Gamma_u = (\mathbf{D}_u \cdot \mathbf{\Theta}_u)^{-1} \quad (143)$$

Il faut juste s'assurer que l'inverse du produit  $\mathbf{D}_u \cdot \mathbf{\Theta}_u$  existe. Le précodeur  $\mathbf{\Theta}_u$  joue un rôle essentiel pour permettre le décodage déterministe des symboles.

#### 5.4.4 La construction du précodeur

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inverse du produit  $\mathbf{D}_u \cdot \mathbf{\Theta}_u$  existe est simplement

$$\text{rang}(\mathbf{D}_u \cdot \mathbf{\Theta}_u) \geq K \quad (144)$$

<sup>14</sup>  $(\mathbf{F}_1 \odot \mathbf{F}_2) \cdot (\mathbf{F}_3 \odot \mathbf{F}_4) = (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_3) \odot (\mathbf{F}_2 \mathbf{F}_4)$

Le fait que l'ordre de  $h_{u_i}(l)$  est inférieur à  $L$ , implique que l'on peut avoir au maximum  $L$  éléments de  $\{H_{u_i}(p_{u,q})\}_{q \in \{0, \dots, Q-1\}}$  égal à 0.

Sans le précodeur, le cas le plus défavorable est

$$\text{rang}(\mathbf{D}_u) = Q - L \quad (145)$$

On construit alors le précodeur pour créer la redondance afin de garantir le décodage tel que  $Q = K + L$  avec au moins  $K$  lignes linéairement indépendantes dans  $\Theta_u$ .

Un choix simple de  $\Theta_u$  est la matrice Vandermonde issue des points de signatures distincts de l'utilisateur  $u$

$$\Theta_u = \begin{bmatrix} 1 & p_{u,0}^{-1} & \cdots & p_{u,0}^{-(K-1)} \\ 1 & p_{u,1}^{-1} & \cdots & p_{u,1}^{-(K-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & p_{u,Q-1}^{-1} & \cdots & p_{u,Q-1}^{-(K-1)} \end{bmatrix}_{Q \times K} \quad (146)$$

Avec ce choix, la condition nécessaire de (144) est satisfaite quelque soit le canal ou la constellation utilisée.

Le précodeur permet aussi de préformer les symboles pour qu'ils soient adaptés aux canaux de propagations lorsqu'on a l'information de canal préalablement.

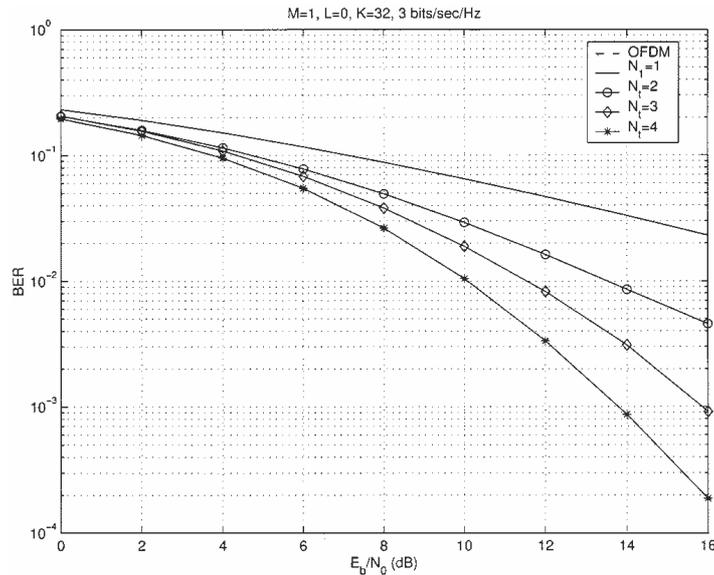
### 5.4.5 Les performances

Les résultats ici présents sont extraits de [57]. On considère l'utilisation de la modulation 8PSK. Les courbes présentées sont en terme de taux d'erreur binaire (BER). Les points de signature se trouvent sur le cercle FFT périodiquement espacés. Le canal considéré est un canal à fading de Rayleigh de moyenne nulle et à variance unité.

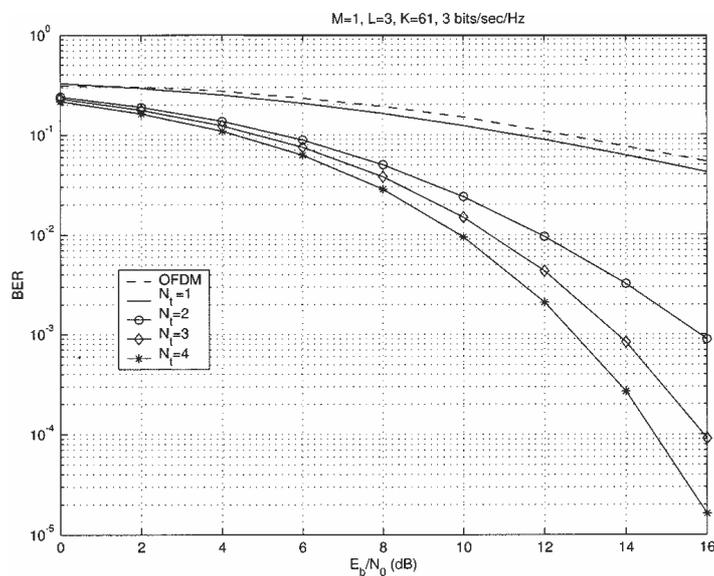
La Figure 83 et Figure 84 représentent les performances de l'architecture proposée en fonction du nombre d'antennes d'émission dans le cas où seulement un seul utilisateur est présent dans le système. Ces performances sont comparées avec l'OFDM.

Dans la Figure 83, le canal considéré est un canal flat fading non sélectif en fréquence. Le nombre d'antennes considérées,  $N_t$ , est de 1 à 4 et leurs performances respectives sont comparées avec celle de l'OFDM. Pour maintenir la même efficacité spectrale, la modulation MAQ16 est utilisée quand  $N_t$  est de 3 et 4. Trente deux sous porteuses sont utilisées. On choisit  $Q=K=32$ . On peut voir dans cette figure que la performance de ce système avec  $N_t=1$  coïncide avec la performance de l'OFDM. On observe l'amélioration de la performance quand  $N_t$  augmente.

Dans la Figure 84, on considère un canal sélectif en fréquence à trois trajets ( $L=3$ ).  $Q$  et  $K$  prennent les valeurs de 64 et 61 respectivement. On observe que la performance du système, même avec  $N_t=1$ , est meilleure que celle de l'OFDM. Pour expliquer ceci, on utilise  $K+L$  sous porteuses dans cette architecture alors que l'OFDM utilise  $K$  sous porteuses. Ce système est alors plus résistant aux zéros du canal. Il est évident que les performances augmentent avec le nombre d'antennes d'émission.



**FIGURE 83 : MONO UTILISATEUR SUR UN CANAL FADING**



**FIGURE 84 : MONO UTILISATEUR SUR UN CANAL SELECTIF EN FREQUENCE**

La Figure 85 nous résume les performances du système lorsqu'on prend en compte 16 utilisateurs dans le système.  $Q$ ,  $K$  et  $L$  prennent respectivement les valeurs de 64, 61 et 3. Cette figure nous valide la faisabilité de ce système multi utilisateurs. On peut voir, encore une fois, que les performances s'améliorent quand le nombre d'antennes d'émission augmente.

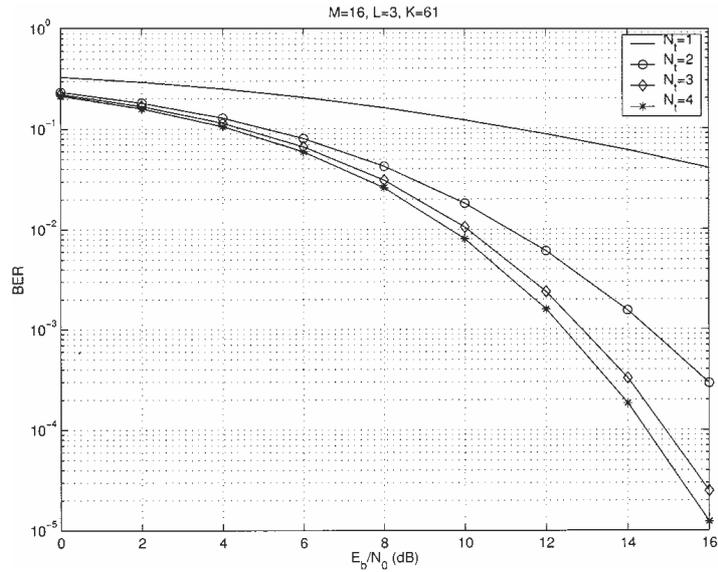


FIGURE 85 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME A PRECODEUR AVEC SEIZE UTILISATEURS AVEC LES CANAUX SELECTIFS EN FREQUENCE

Les effets bénéfiques du précodeur sont illustrés dans les Figure 86 et Figure 87. On suppose que  $L=2, Q=8, N_t=2$ , avec un utilisateur et que la modulation QPSK est utilisée. Les canaux sont choisis tels que  $H_{m1}(z)=(1+jz^{-1})\cdot(1+0.3z^{-1})$  et  $H_{m2}(z)=(1+jz^{-1})\cdot(1+0.8z^{-1})$ .

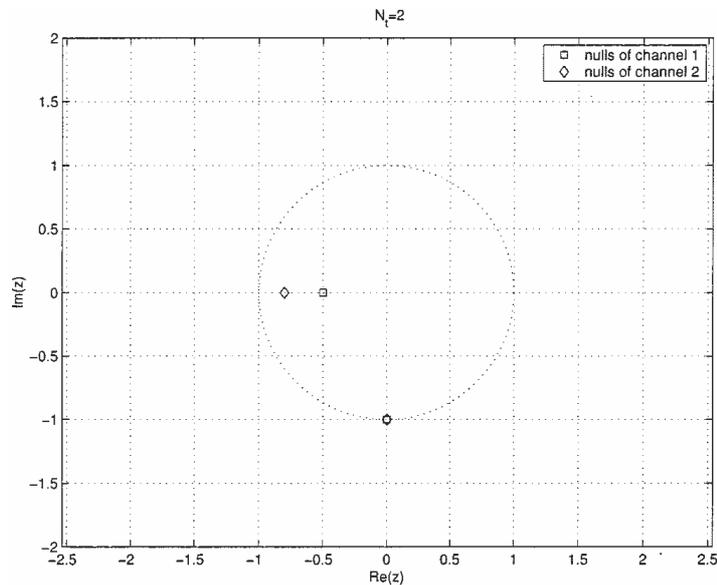


FIGURE 86 : LES ZEROS DU CANAL

La Figure 86 montre les zéros des canaux. On peut observer qu'ils partagent un point commun à  $\rho = -j$ . Ceci se traduit par la perte d'information totale malgré la diversité spatiale. La Figure 87 nous montre l'amélioration qu'apporte le précodeur pour ce cas spécifique. On peut voir que la performance du système est considérablement améliorée avec la présence du précodeur.

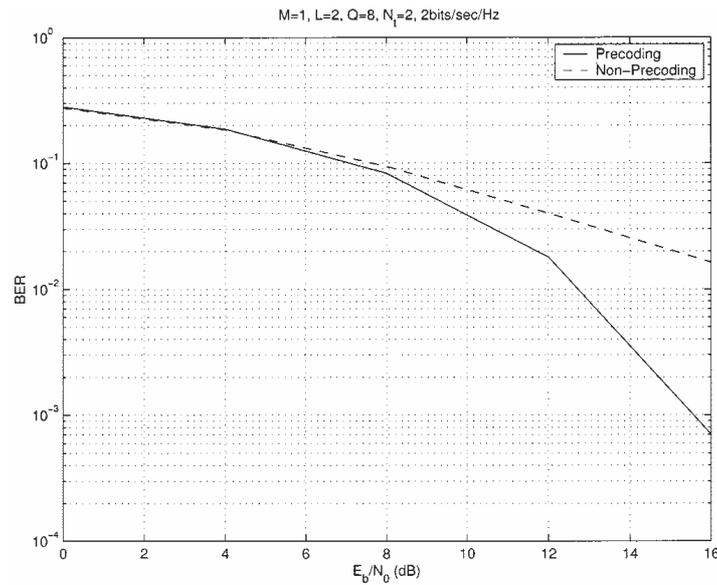


FIGURE 87 : L'EFFET DU PRECODEUR POUR LE CANAL SPECIFIQUE

## 5.5 STBC-M

Le système présenté précédemment est très complet. Il est quasiment impossible de faire mieux dans le cas où tous les utilisateurs sont quasi synchrones et que le canal reste invariant pendant un mot STBC. L'utilisation du précodeur permet d'améliorer la résistance des symboles transmis sur un canal multi trajet face aux *deep fading* fréquentiels. Néanmoins, l'utilisation du précodeur d'une part, nécessite la connaissance de l'état de canal par l'émetteur pour être efficace, et d'autre part, réduit le rendement du système. Il ne faut pas oublier la complexité du système proposé. Ceci amène à chercher, s'il existe, une autre méthode plus simple présentant les mêmes performances. Les fruits de ces recherches sont présentés ci après.

### 5.5.1 Généralités

La structure de l'émetteur est présentée Figure 88. Les informations binaires sont modulées par une modulation complexe  $\Omega$  quelconque. On dit que ces symboles sont dans le domaine fréquentiel. Ces symboles modulés sont parallélisés et chaque symbole est étalé par un code d'étalement spécifique. Plusieurs mots OFDM sont construits à partir des chips de chaque utilisateur pour créer des signaux dans le domaine temporel. Un symbole fréquentiel est alors reparti dans plusieurs mots OFDM dans le domaine temporel. Des mots STBC sont construits à partir de ces mots OFDM.

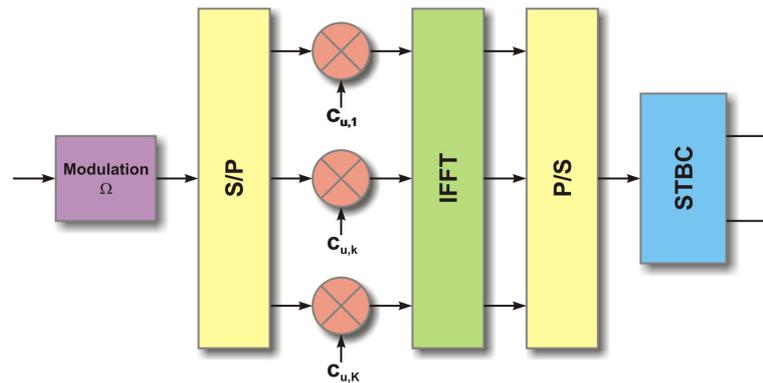


FIGURE 88: L'EMETTEUR STBC-M POUR UN UTILISATEUR

Les signaux STBC sont transmis sur des canaux sélectifs en fréquence invariant pendant un mot STBC. Le récepteur, dont la structure est présentée dans la Figure 89, applique la DFT pour transformer les signaux dans le domaine temporel en domaine fréquentiel. Les filtres de désétalement sont appliqués pour séparer les utilisateurs et finalement le décodage est effectué pour extraire les symboles transmis.

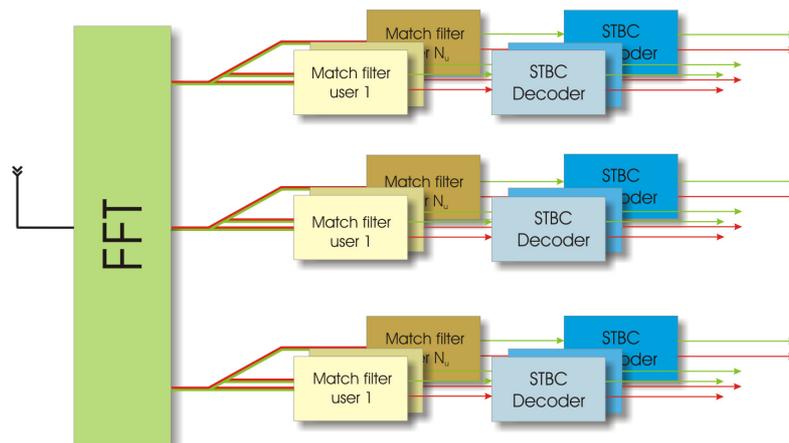


FIGURE 89 : LE RECEPTEUR STBC-M

## 5.5.2 Le modèle du système

Le système fonctionne en blocs de  $PK$  symboles issus de la modulation  $\Omega$  quelconque.  $K$  est le nombre de sous porteuses utilisées dans un système OFDM et  $P$  est le nombre de symboles nécessaires pour construire un mot STBC simple<sup>15</sup>. Ces  $PK$  symboles sont réarrangés pour former  $P$  vecteurs de taille  $K$  via le convertisseur série – parallèle. Les symboles se trouvant sur la branche  $k$  de ce convertisseur sont étalés par un code d'étalement réel  $c_{u,k}$  de taille  $\theta$ . On obtient  $P\theta$  chips sur chaque branche.  $P\theta$  mots OFDM sont construits à partir de ces chips et chaque mot OFDM est construit à partir de  $K$  chips issus de chaque branche. Ces  $P\theta$  mots

<sup>15</sup>  $P$  désigne ici la quantité dénommée précédemment  $N_s$ .

OFDM constitueront un mot STBCM avant d'être émis sur chaque antenne d'émission. Afin de ne pas trop compliquer la présentation, on se limite au cas de deux antennes d'émission et par conséquent  $P=2$ .

Soit  $\mathcal{C} \in \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\phi, \dots, \mathbf{c}_\Theta\}$  l'ensemble des  $\Theta$  codes d'étalement réels et orthogonaux disponibles dans le système avec  $\mathbf{c}_\phi = [c_\phi(0) \dots c_\phi(\theta-1)]_{\theta \times 1}^T$ . On peut avoir au maximum  $\Theta$  utilisateurs simultanément. On pose  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_\Theta]_{\theta \times \Theta}^T$  la matrice contenant tous les codes d'étalement rangés en ligne. Le fait que chaque symbole sur chaque branche du convertisseur série – parallèle est étalé par un code distinct nous donne au moins deux possibilités de distribution des codes.

On peut imaginer que chaque utilisateur utilise plusieurs codes répartis sur des branches différentes. Pour éviter l'interférence d'accès multiples, on impose qu'il n'y ait pas deux utilisateurs utilisant le même code sur la même branche. L'avantage de cette distribution, dans le cas où l'orthogonalité entre sous porteuses OFDM n'est pas complètement assuré, est qu'on minimise les interférences entre porteuses (*Inter Carrier Interference*, ICI) d'un utilisateur de ses propres symboles, ce que l'on appelle l'*Intra ICI*. Ceci n'élimine pas, par contre, les interférences issues des autres utilisateurs ou l'*Extra ICI*.

La deuxième méthode de distribution de code est plus simple. On alloue un code d'étalement distinct à chaque utilisateur à utiliser sur toutes les sous porteuses. Ceci protège complètement les symboles d'un utilisateur des *Extra ICI* mais l'*Intra ICI* devient un problème lorsque l'orthogonalité de l'OFDM n'est pas assurée. La différence des performances entre ces deux distributions reste à étudier surtout en présence d'un code correcteur d'erreur incorporant des entrelaceurs différents pour chaque utilisateur.

Le choix de la distribution des codes peut être représenté par une matrice de permutation  $\mathbf{P}_u$  de taille  $K \times \theta$ . La condition à respecter est

$$\forall \eta, \mu \in \{1, \dots, N_u\} : \mathbf{P}_\eta \cdot \mathbf{P}_\mu^T = \delta_{\eta\mu} \cdot \mathbf{I}_\theta \quad (147)$$

Pour la première méthode de distribution des codes, une autre condition à respecter est

$$\mathbf{P}_\eta \bigcap_{\mu \neq \eta} \mathbf{P}_\mu = \mathbf{0} \quad (148)$$

Pour la deuxième méthode de distribution, on définit une autre matrice  $\mathbf{P}'_u$  telle que

$$\mathbf{P}'_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{K \times K} \cdot \mathbf{P}_u \quad (149)$$

Il en découle

$$\forall \eta, \mu: \mathbf{P}'_{\eta} \cdot \mathbf{P}'_{\mu T} = \delta_{\eta}^{\mu} \cdot [1]_{K \times K} \quad (150)$$

On définit alors la matrice de code pour l'utilisateur  $u$  par

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{C} \quad (151)$$

pour la première distribution et

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{P}'_u \cdot \mathbf{C} \quad (152)$$

pour la deuxième.

Soit  $\mathbf{b}_u = \{\mathbf{b}_{u,q_1}, \mathbf{b}_{u,q_2}\}$  les  $2K$  symboles de modulation  $\Omega$  à transmettre par l'utilisateur  $u$  partitionnés en 2 blocs de taille  $K$  notés  $\mathbf{b}_{u,q_1}$  et  $\mathbf{b}_{u,q_2}$ . Afin de faciliter la démonstration ci après, la notation  $\mathbf{b}_{u,q_p}$  sera utilisée pour représenter de façon invariable et sans ambiguïté  $\mathbf{b}_{u,q_1}$  ou  $\mathbf{b}_{u,q_2}$ . De la même façon, l'indice  $q_p$  sera utilisé pour représenter les blocs dans le timeslot  $p$  d'un mot STBCM.

La parallélisation des symboles et l'étalement de ceux-ci peuvent être modélisés par

$$\mathbf{s}_{u,q_p} = \mathbf{B}_{u,q_p} \cdot \mathbf{C}_u \quad (153)$$

avec  $\mathbf{s}_{u,q_p}$  une matrice de taille  $K \times \theta$  de l'ensemble des chips sur toutes les branches du convertisseurs et  $\mathbf{B}_{u,q_p}$  est définie par

$$\mathbf{B}_{u,q_p} = \text{diag}(\mathbf{b}_{u,q_p}) = \begin{bmatrix} b_{u,q_p}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{u,q_p}(K-1) \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (154)$$

Chaque ligne de  $\mathbf{s}_{u,q_p}$  correspond aux chips issus d'un symbole distinct. Les colonnes de  $\mathbf{s}_{u,q_p}$  représentent les symboles à partir desquels les mots OFDM seront construits et transmis successivement dans le temps. La Figure 90 représente la matrice  $\mathbf{s}_{u,q_p}$ .

$\mathbf{s}_{u,q}(0,0)$	$\mathbf{s}_{u,q}(0,1)$	...	$\mathbf{s}_{u,q}(0,\theta-2)$	$\mathbf{s}_{u,q}(0,\theta-1)$
$\mathbf{s}_{u,q}(1,0)$	$\mathbf{s}_{u,q}(1,1)$	...	$\mathbf{s}_{u,q}(1,\theta-2)$	$\mathbf{s}_{u,q}(1,\theta-1)$
...	...	...	...	...
$\mathbf{s}_{u,q}(K-1,0)$	$\mathbf{s}_{u,q}(K-1,1)$	...	$\mathbf{s}_{u,q}(K-1,\theta-2)$	$\mathbf{s}_{u,q}(K-1,\theta-1)$
$\mathbf{s}_{u,q}(K,0)$	$\mathbf{s}_{u,q}(K,1)$	...	$\mathbf{s}_{u,q}(K,\theta-2)$	$\mathbf{s}_{u,q}(K,\theta-1)$

FIGURE 90 : LA MATRICE  $\mathbf{s}_{u,q_p}$

Les mots OFDM sont ensuite construits à partir de  $\mathbf{s}_{u,q_p}$  et on a

$$\mathbf{X}_{u,q_p} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{s}_{u,q_p} \tag{155}$$

$\mathbf{Q}$  est la matrice DFT  $K \times K$  normalisée avec  $Q(m,n) = \frac{1}{\sqrt{K}} e^{-j \frac{2\pi mn}{K}}$ . La Figure 91 représente les mots OFDM rangés dans le temps.

FIGURE 91 : LES MOTS OFDM  $\mathbf{X}_{u,q_p}$

Ces mots OFDM sont réarrangés pour construire un mot STBC spécial. Dans ce système, on envoie successivement  $\{\mathbf{X}_{u,q_1}, \mathbf{X}_{u,q_2}\}$  sur l'antenne 1 et  $\{-\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_2}, \tilde{\mathbf{X}}_{u,q_1}\}$  sur la deuxième antenne avec  $\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_p}$  défini par

$$\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_p} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{X}_{u,q_p}^* \tag{156}$$

$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  est une matrice qui représente le retournement dans le temps d'un mot OFDM

comme illustré dans la Figure 92. Pour assurer qu'il n'y a pas d'interférences entre blocs, un préfixe cyclique est ajouté à la fin de chaque mot OFDM. La Figure 93 et le Tableau 17 résument l'opération d'émission sur les émetteurs.

FIGURE 92 : LA MATRICE  $\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_p}$

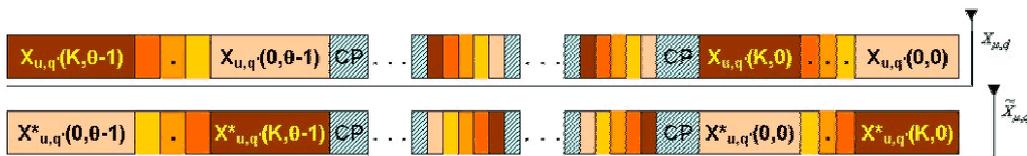


FIGURE 93 : LA TRANSMISSION DES SYMBOLES PENDANT UN TIMESLOT STBC

TABLEAU 17 : LA TRANSMISSION EN TEMPS ET ESPACE

TIMESLOT	ANTENNE 1	ANTENNE 2
$q_1$	$\mathbf{X}_{u,q_1}$	$-\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_2}$
$q_2$	$\mathbf{X}_{u,q_2}$	$\tilde{\mathbf{X}}_{u,q_1}$

### 5.5.3 Le récepteur

Les symboles transmis par chaque utilisateur parcourent des canaux sélectifs en fréquence distincts et non corrélés. Le canal entre chaque paire d'antenne d'émission  $j$  et de réception  $i$  est défini par

$$h_{ji}^{(u)}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{ji}^{(u)}(l) \delta\left(t - \frac{l}{\Delta f}\right) \quad (157)$$

$L$  est le nombre de trajets maximum dans le canal.  $\alpha_{ji}^{(u)}(l)$  est le gain complexe associé au  $l^{\text{ième}}$  trajet.  $\Delta f$  est la bande passante du système OFDM.

On suppose que les utilisateurs sont quasiment synchrones et qu'on fonctionne dans le cas idéal où le récepteur est parfaitement synchronisé en temps et fréquence. On considère aussi un bruit gaussien de variance  $\sigma^2$  qui s'ajoute au signal reçu.

Grâce au préfixe cyclique, les signaux reçus pendant les deux timeslots s'écrivent donc sous la forme

$$\mathbf{y}_{i,q_1}(\kappa) = \sum_{u=1}^{N_u} h_{1,i}^u \otimes \mathbf{X}_{u,q_1}(\kappa) - h_{2,i}^u \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{u,q_2}(\kappa) + \mathbf{N}_{q_1}(\kappa) \quad (158)$$

$$\mathbf{y}_{i,q_2}(\kappa) = \sum_{u=1}^{N_u} h_{1,i}^u \otimes \mathbf{X}_{u,q_2}(\kappa) + h_{2,i}^u \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{u,q_1}(\kappa) + \mathbf{N}_{q_2}(\kappa) \quad (159)$$

où  $\mathbf{X}_{u,q_p}(\kappa)$  représente le  $\kappa^{\text{ième}}$  mot OFDM issue de  $\mathbf{X}_{u,q_p}$ .  $\mathbf{y}_{i,q_p}(\kappa)$  est le mot OFDM reçu par l'antenne  $i$  pendant le timeslot  $p$  d'un mot STBC.  $\otimes$  représente la produit de convolution. Encore une fois, l'opération de convolution est représentée par la multiplication d'une matrice et d'un vecteur et on a

$$\mathbf{y}_{i,q_1}(\kappa) = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}_{1,i}^u \cdot \mathbf{X}_{u,q_1}(\kappa) - \mathbf{H}_{2,i}^u \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{u,q_2}(\kappa) + \mathbf{N}_{q_1}(\kappa) \quad (160)$$

$$\mathbf{y}_{i,q_2}(\kappa) = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}_{1,i}^u \cdot \mathbf{X}_{u,q_2}(\kappa) + \mathbf{H}_{2,i}^u \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{u,q_1}(\kappa) + \mathbf{N}_{q_2}(\kappa) \quad (161)$$

Avec un préfixe cyclique adéquat et une synchronisation quasi parfaite,  $\mathbf{H}_{j,i}^u$  est une matrice circulante de taille  $K \times K$  et est décomposable en

$$\mathbf{H}_{j,i}^u = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{j,i}^u \cdot \mathbf{Q} \quad (162)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}_{j,i}^u = \text{diag}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{j,i}^u)$  et  $\boldsymbol{\alpha}_{j,i}^u$  est défini à partir de (157) par

$$\boldsymbol{\alpha}_{j,i}^u = [\alpha_{j,i}^u(0) \dots \alpha_{j,i}^u(L-1)]^T \quad (163)$$

Si l'on considère que le canal reste invariant pendant un mot STBC, à partir des propriétés de dualité de la transformée de Fourier,  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^*(n) = \text{DFT}(\mathbf{x}^*(n)) = \text{DFT}(\mathbf{x}(-n))^* = \text{DFT}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(n))^*$ , les équations (160)-(161) se regroupent pour tous les mots OFDM transmis

$$\mathbf{y}_{i,q_p} = [\mathbf{y}_{i,q_p}(0) \dots \mathbf{y}_{i,q_p}(\kappa) \dots \mathbf{y}_{i,q_p}(\theta)]_{K \times \theta} \quad (164)$$

et puis se simplifient en

$$\mathbf{y}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1} - \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2}^* + \mathbf{N}_{q_1} \quad (165)$$

$$\mathbf{y}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2} + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1}^* + \mathbf{N}_{q_2} \quad (166)$$

Après les opérations de démodulation de l'OFDM, on a  $\mathbf{r}_{i,q_p} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}_{i,q_p}$ , et

$$\mathbf{r}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1} - \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2}^* + \mathbf{n}_{q_1} \quad (167)$$

$$\mathbf{r}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2} + \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1}^* + \mathbf{n}_{q_2} \quad (168)$$

A ce stage, chaque ligne dans la matrice  $\mathbf{r}_{i,q_p} \Big|_{K \times \theta}$  représente la superposition des symboles étalés de tous les utilisateurs envoyés sur une sous porteuse distincte pendant un mot STBC. Etant donné qu'on a distribué les codes d'étalements de telle sorte qu'il n'y ait pas deux utilisateurs avec le même code sur la même sous porteuse (ou à une branche de la sortie du convertisseur série parallèle), dans le cas quasi synchrone, on peut extraire les symboles d'un utilisateur en multipliant chaque ligne  $\mathbf{r}_{i,q_p}$  par le code d'un utilisateur appliqué à la sous porteuse correspondante. Pour effectuer une détection conjointe, il suffit de multiplier la matrice  $\mathbf{r}_{i,q_p}$  par l'ensemble de codes  $\mathbf{C}$  suivant

$$\mathbf{z}_{i,q_p} = \mathbf{r}_{i,q_p} \cdot \mathbf{C}^T \quad (169)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,q_1} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1} \cdot \mathbf{C}^T - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2}^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_1} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1} \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2}^* \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_1} \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,q_2} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2} \cdot \mathbf{C}^T + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1}^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_2} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2} \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1}^* \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_2} \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (171)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,q_1} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_u \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}_u \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_1} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_u - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}_u + \mathbf{n}_{q_1} \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,q_2} &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2} \cdot \bar{\mathbf{P}}_u \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}_u \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_2} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2} \cdot \bar{\mathbf{P}}_u + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}_u + \mathbf{n}_{q_2} \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (173)$$

avec  $\bar{\mathbf{P}}_u \in \{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}'_u\}$  qui est fonction de la distribution des codes choisie.

Grâce aux propriétés (147), (148) et (150), les symboles de tous les utilisateurs sont entièrement séparés suivant la forme de la matrice de permutation choisie. Chaque ligne de la matrice  $\mathbf{z}_{i,q_p}$  correspond aux symboles envoyés sur une sous porteuse. Ainsi, avec la deuxième méthode de distribution du code par exemple, chaque colonne ne contient que des symboles issus d'un seul utilisateur affectés par le bruit additif gaussien. A partir de ces considérations, on réécrit (172) - (173)

$$\mathbf{z}_{i,q_1}^u = \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1} - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2}^* + \mathbf{n}_{q_1}^u \quad (174)$$

$$\mathbf{z}_{i,q_2}^u = \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2} + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1}^* + \mathbf{n}_{q_2}^u \quad (175)$$

Comme  $\mathbf{z}_{i,q_p}^u$ ,  $\Lambda_{j,i}^u$  et  $\mathbf{B}_{u,q_p}$  sont des matrices diagonales, on a, pour chaque sous porteuse

$$z_{i,q_1}^u(k) = \Lambda_{1,i}^u(k) \cdot b_{u,q_1}(k) - \Lambda_{2,i}^u(k) \cdot b_{u,q_2}^*(k) + n_{q_1}^u(k) \quad (176)$$

$$z_{i,q_2}^u(k) = \Lambda_{1,i}^u(k) \cdot b_{u,q_2}(k) + \Lambda_{2,i}^u(k) \cdot b_{u,q_1}^*(k) + n_{q_2}^u(k) \quad (177)$$

On peut voir que les expressions (176)-(177) sont sous la même forme que dans le cas d'un seul utilisateur STBC utilisant le schéma d'Alamouti présenté dans le Chapitre 3. En plus

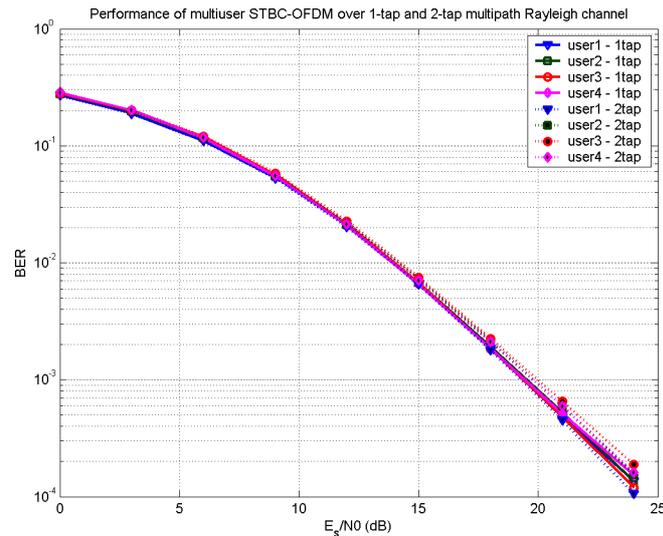
de cela, **chaque récepteur n'a besoin de connaître que l'état des canaux d'un seul utilisateur pour décoder les symboles qui lui appartiennent.** Avec cette observation, on en déduit que **toutes les méthodes connues pour décoder le STBC d'Alamouti ainsi que les estimateurs de canaux sont applicables ici pour chaque utilisateur individuel.** Dans le cas où l'invariabilité du canal pendant un mot STBC ne peut pas être assuré, le système fonctionnera encore sans modification majeure si le canal peut être considéré comme invariant pendant un timeslot STBC. Dans ce cas, l'orthogonalité de STBC n'est plus complètement assurée et ceci entraîne une perte de diversité. Une autre méthode de décodage par le zéro forcing ou par un filtre MMSE par exemple doit être considérée.

### **5.5.4 Les performances**

La première simulation faite pour valider les performances de ce système est de montrer par simulations que les relations (176)-(177) sont correctes. On doit donc trouver des performances similaires par rapport au système STBC d'Alamouti mono utilisateur.

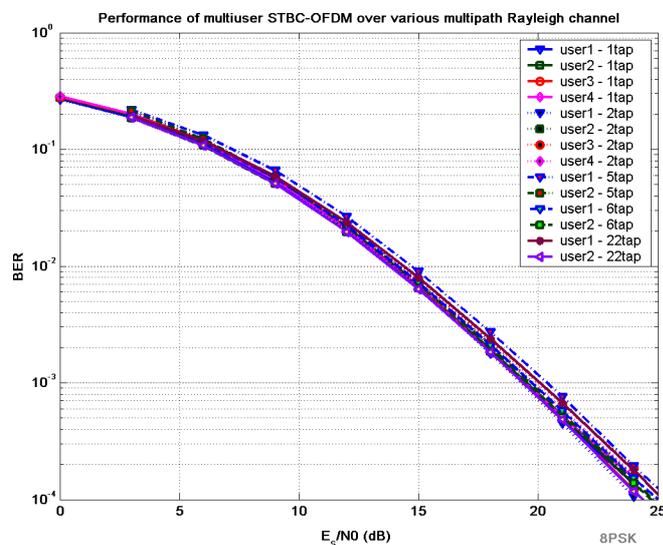
On construit alors quelques simulations pour valider le système. On utilise, sauf contre indication, la modulation 8PSK. A cause de la limitation des ressources informatiques disponibles, on utilise seulement une seule antenne de réception et deux antennes d'émission par utilisateur. Les utilisateurs fonctionnent en mode quasi synchrone, ce qui est souvent le cas dans une micro cellule. 128 sous porteuses sont utilisées. Au moins 30 millions de bits d'information ont été évalués pour chaque simulation. Le code Walsh a été utilisé comme code d'étalement. La variance du bruit complexe est égale à  $\sigma_s^2$ . Le canal est considéré invariant pendant un mot STBC. Afin de pouvoir comparer correctement, on suppose qu'on a des synchronisations temporelles et fréquentielles quasi parfaites ainsi que des estimations parfaites des canaux au récepteur. Les canaux sont normalisés.

La Figure 94 montre les résultats des simulations préliminaires pour valider ce système. On considère un système à quatre utilisateurs utilisant le code Walsh. On étudie les performances du système lorsque le canal n'est pas sélectif en fréquence et puis un canal à deux trajets multiples. On constate que, dans les conditions de simulation, les performances en terme de TEB de chaque utilisateur sont sensiblement identiques. En plus, ces performances sont comparables avec le cas d'un utilisateur dans un canal à fading, présenté à la Figure 30. Ceci montre que l'on peut découpler les utilisateurs sans perte de performances.



**FIGURE 94 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME A 4 UTILISATEURS STBC-OFDM 128 SOUS PORTEUSES SUR DES CANAUX A FADING A UN ET DEUX TRAJETS**

D'autres simulations ont été faites avec à chaque fois des configurations différentes des canaux. La Figure 95 montre les résultats de ces simulations et elle confirme la capacité du système à découpler les utilisateurs sans perte de performances, quel que soit l'état du canal.



**FIGURE 95 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC-OFDM 128 SOUS PORTEUSES SUR DES CANAUX FADING MULTI TRAJETS**

#### 5.5.4.1 Les performances du système concaténé avec un codage de canal LDPC

Les résultats de ce paragraphe ont été présentés dans [61]. On étudie le comportement du système lorsqu'un code LDPC binaire est utilisé dans le système. Le décodeur LDPC peut prendre en entrée soit des valeurs soft, soit des décisions hard de ces bits. Les valeurs soft des bits peuvent être calculées par

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^e \left[ d_{u,q_p}^j \right] &= \log \left( \frac{P(d_{u,q_p}^j = +1 | R_+^u, R_-^u)}{P(d_{u,q_p}^j = -1 | R_+^u, R_-^u)} \right) - \log \left( \frac{P(d_{u,q_p}^j = +1)}{P(d_{u,q_p}^j = -1)} \right) \\
 &= \log \left( \frac{\sum_{\beta \in \Omega_j^+} P(b_{u,q_p} = \beta | R_+^u, R_-^u)}{\sum_{\beta \in \Omega_j^-} P(b_{u,q_p} = \beta | R_+^u, R_-^u)} \right) - \Gamma_2^{e,p} \left[ d_{u,q_p}^j \right] \\
 &= \log \left( \frac{\sum_{\beta \in \Omega_j^+} \exp(-\gamma_{u,p} + \log(P(\beta)))}{\sum_{\beta \in \Omega_j^-} \exp(-\gamma_{u,p} + \log(P(\beta)))} \right) - \Gamma_2^{e,p} \left[ d_{u,q_p}^j \right]
 \end{aligned} \tag{178}$$

avec  $\Gamma_1^e \left[ d_{u,q_p}^j \right]$  le LLR *a posteriori* extrinsèque du bit  $j$  de  $b_{u,q_p} \cdot b_{u,q_p}$  se calcule par

$$\hat{b}_{u,q_1} = \arg \min_{b \in \Omega} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^N |R_{i,+}^u - \lambda_{i,u} \cdot b|^2}_{\gamma_{u,1}} \right) \tag{179}$$

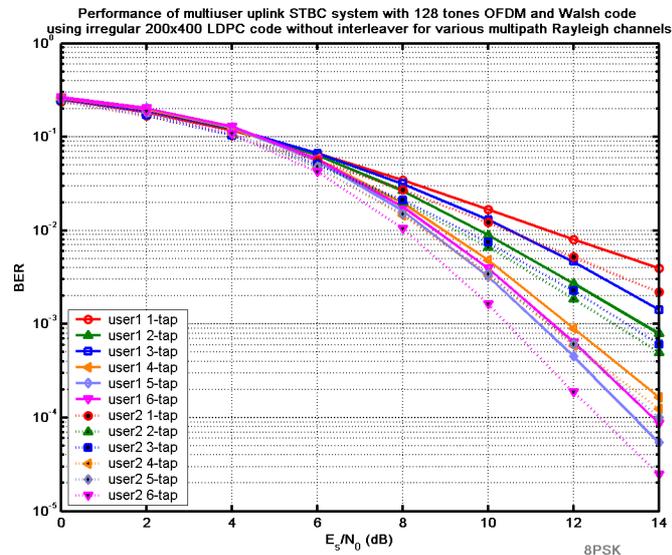
avec  $R_{i,+}^u = \Lambda_{1,i}^{u*} \cdot z_{i,q_1}^u + \Lambda_{2,i}^u \cdot z_{i,q_2}^{u*}$  et

$$\hat{b}_{u,q_2} = \arg \min_{b \in \Omega} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^N |R_{i,-}^u - \lambda_i \cdot b^*|^2}_{\gamma_{u,2}} \right) \tag{180}$$

avec  $R_{i,-}^u = \Lambda_{2,i}^{u*} \cdot z_{i,q_1}^u - \Lambda_{1,i}^u \cdot z_{i,q_2}^{u*}$ ,  $\lambda_{i,u} = |\Lambda_{1,i}^u|^2 + |\Lambda_{2,i}^u|^2$  et  $\Omega$  la constellation de modulation choisie.  $j = \{1, \dots, j_{max}\}$  est le nombre de bits nécessaires pour présenter un symbole dans la constellation  $\Omega$ .  $\Omega_j^+$  est l'ensemble des symboles dans la constellation dont le bit  $j$  est égal à "+1" et  $\Omega_j^-$  est défini de façon identique.  $P(\beta)$  est la probabilité *a priori* du symbole  $\beta$ . Le LLR *a priori* extrinsèque,  $\Gamma_2^{e,p} \left[ d_{u,q_p}^j \right]$  est obtenu par le décodeur LDPC dans la turbo itération précédente.  $\Gamma_2^{e,p} \left[ d_{u,q_p}^j \right]$  est égal à 0 pendant la première turbo itération ou si l'on n'utilise pas un turbo récepteur.

La Figure 96 illustre les performances du système lorsqu'un code LDPC irrégulier (200,400,3) est utilisé comme codeur de canal. Elle présente les performances de deux utilisateurs arbitraires quand 128 sous porteuses OFDM sont utilisées. On observe les performances du système avec différentes configurations de canaux. Il faut remarquer que les canaux considérés sont corrélés en temps et en fréquence. On considère 6 types de canaux multi trajets différents pour chaque utilisateur. La variance de bruit est de  $\sigma^2/2$  par dimension. On remarque d'une part, une amélioration attendue des performances du système, et d'autre part, le code de canal LDPC

permet d'exploiter la diversité multi trajets pour améliorer les performances. De façon générale, plus il y a de trajets, meilleures sont les performances. En effet, à TEB égal à  $10^{-3}$ , on observe un gain de 7 dB entre un canal à fading non sélectif en fréquence et un canal à fading à 6 trajets.



**FIGURE 96 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM CONCATENE AVEC UN CODES LDPC IRRÉGULIERES (200,400,3) SANS L'ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR DES CANAUX A FADING MULTI TRAJETS**

On étudie les performances avec un code LDPC irrégulier (2000, 4000, 3) plus performant. Les résultats des simulations sont présentés en Figure 97. On observe les mêmes tendances que les résultats précédents. Mais, en comparant de plus près ces deux résultats, on observe que les deux codes LDPC ont des performances similaires. Ceci est tout de même étrange car le code (2000,4000,3) est censé être plus performant que celui de (200,400,3). Après des investigations plus approfondies sur cette "anomalie", il s'est révélé que l'introduction d'un entrelaceur de symbole supplémentaire dans la chaîne de communication peut s'avérer bénéfique. Un entrelaceur de symboles est donc ajouté après le modulateur  $\Omega$ . Un désentrelaceur est placé avant le démodulateur  $\Omega$ .

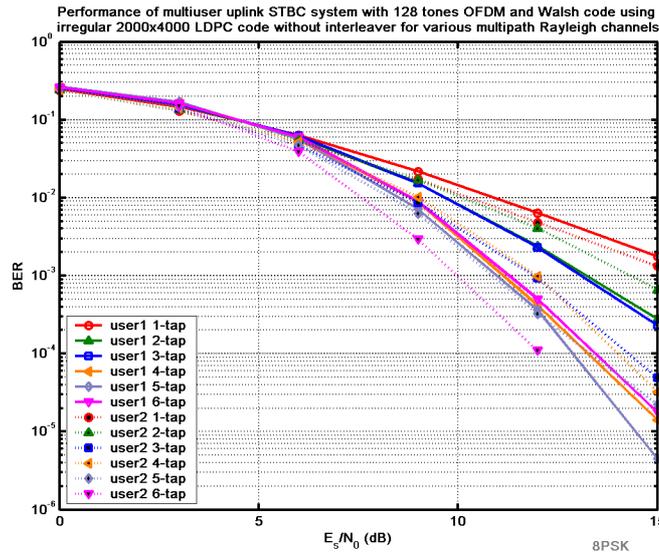


FIGURE 97 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM CONCATENE AVEC UN CODES LDPC IRREGULIERES (2000,4000,3) SANS L’ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR DES CANAUX FADING MULTI TRAJETS

La Figure 98 montre l'amélioration des performances lorsqu'un entrelaceur de symboles additionnel est introduit. On observe, à TEB égal à  $10^{-3}$ , un gain de performance égal à 3 dB et 7 dB par rapport au système sans entrelaceur présenté dans la Figure 97. On conserve toujours un gain de diversité multi trajets.

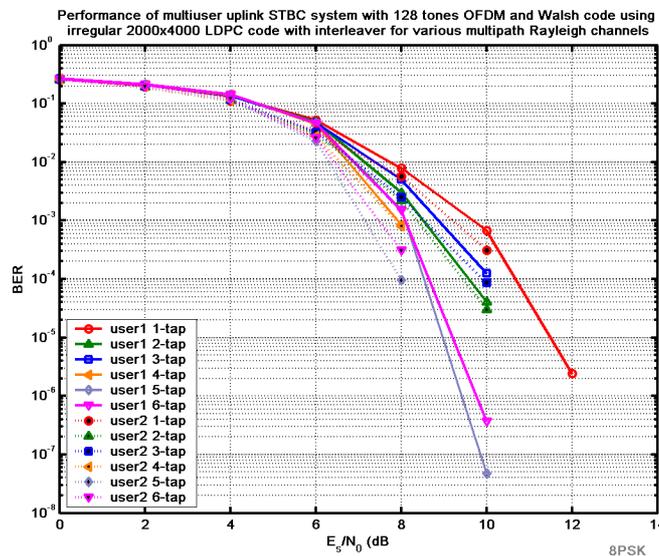
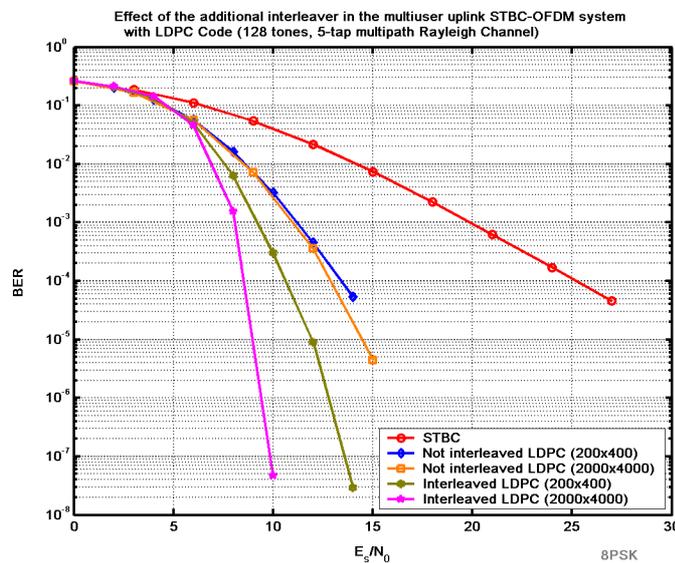


FIGURE 98 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM 128 SOUS PORTEUSES CONCATENE AVEC UN CODES LDPC IRREGULIER (2000,4000,3) AVEC UN ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR DES CANAUX A FADING MULTI TRAJETS

La Figure 99 résume l'effet de l'entrelaceur de symbole additionnel sur les performances du système dans des canaux à 5 trajets. On voit que, sans l'entrelaceur, les performances des deux codes LDPC sont sensiblement identiques. L'introduction de l'entrelaceur supplémentaire apporte un gain considérable pour ces deux codes. La différence de performances entre les deux codes LDPC est plus nette après l'introduction de l'entrelaceur.



**FIGURE 99 : L'EFFET DE L'ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM 128 SOUS PORTEUSES CONCATENE AVEC DES CODES LDPC IRREGULIERES (200,400, 3) ET (2000,4000,3) DANS UN CANAL FADING A 5 TRAJETS**

La Figure 100 montre l'effet des différentes tailles de l'entrelaceur au niveau des symboles (en nombres de symboles concernés par bloc) pour un code LDPC irrégulier (1000,2000,3) avec des canaux à 4 trajets et avec une fréquence de Doppler fixe. On peut facilement voir que les performances s'améliorent de façon conséquente en fonction de la taille de l'entrelaceur.

La Figure 101 présente aussi l'effet des différentes tailles de l'entrelaceur de symboles pour les mêmes configurations que précédemment. On trace cette fois ci, le TEB en fonction de la taille de l'entrelaceur pour les différentes valeurs de  $E_s/N_0$ . On observe une tendance asymptotique de la performance en fonction de la taille de l'entrelaceur. Il existerait une limite supérieure de la taille de l'entrelaceur au delà de laquelle aucun gain supplémentaire ne serait obtenu. Mais pour définir ces limites, plus d'études doivent être faites suivant plusieurs paramètres notamment en fonction du nombre de sous porteuses OFDM, du nombre de trajets, de la fréquence Doppler, de la durée des symboles et le code LDPC utilisé. Tous ceci est en dehors du cadre initialement prévu pour cette thèse.

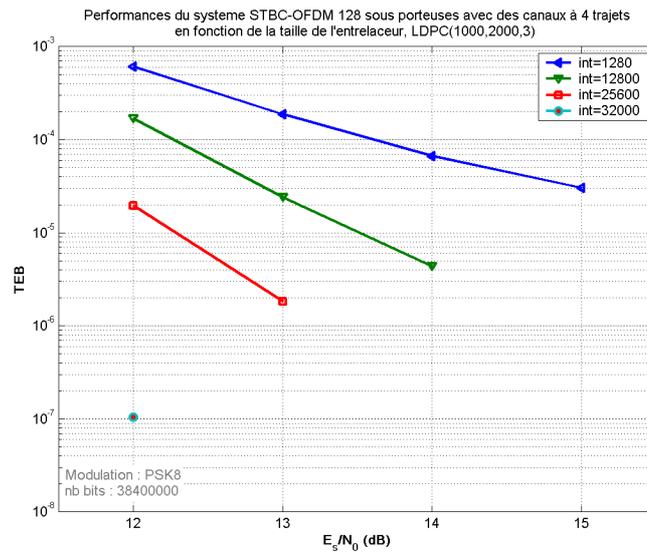


FIGURE 100 : L'EFFET DES DIFFERENTES TAILLES DE L'ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM 128 SOUS PORTEUSES CONCATENE AVEC UN CODE LDPC IRREGULIER (1000, 2000,3) DANS UN CANAL FADING A 4 TRAJETS. (ABSCISSE :  $E_s/N_0$  (DB))

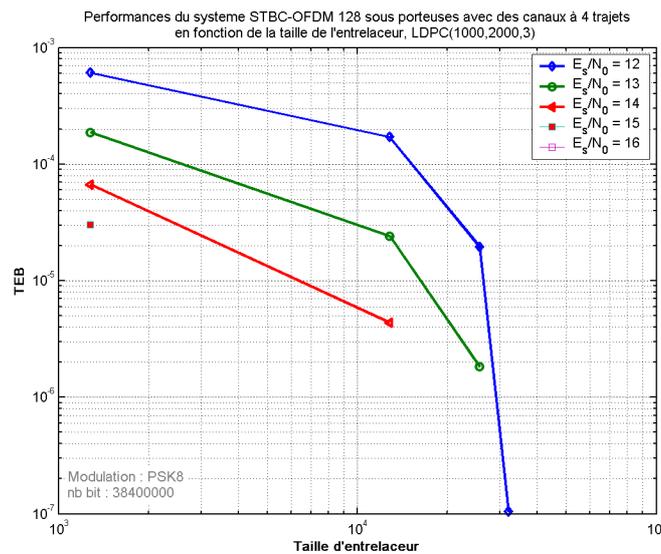


FIGURE 101 : L'EFFET DES DIFFERENTES TAILLES DE L'ENTRELACEUR DE SYMBOLES SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC – OFDM 128 SOUS PORTEUSES CONCATENE AVEC UN CODE LDPC IRREGULIER (1000, 2000,3) DANS UN CANAL FADING A 4 TRAJETS (ABSCISSE : TAILLE DE L'ENTRELACEUR)

Finalement, comme le système STBC-OFDM multi utilisateur utilisé ici nous permet de découpler les utilisateurs en plusieurs systèmes mono utilisateur STBC d'Alamouti, il est tout à fait possible que l'introduction de l'entrelaceur de symboles supplémentaires, dans un système mono utilisateur STBC-OFDM avec des canaux corrélés en temps et en fréquences utilisant le code LDPC, produira les mêmes effets bénéfiques. Il faut se rappeler qu'un code LDPC a un

---

entrelaceur binaire intrinsèque. Les résultats présentés ici montrent aussi que l'entrelaceur binaire intrinsèque du LDPC peut s'avérer insuffisant dans certaines conditions.

### 5.5.5 L'extension pour un système à très haut débit

Le besoin multimédia mobile d'aujourd'hui nous force à concevoir des systèmes à très hauts débits. L'augmentation du débit est synonyme d'augmentation de capacité de canal pour maintenir les mêmes performances en bas débit. Les méthodes *Combined Array Processing* présentées dans 5.3 peuvent nous aider à atteindre un débit plus haut mais il comporte un inconvénient ou une limitation physique : le nombre d'antennes de réception à déployer doit être au moins égal au nombre d'utilisateurs en respectant la distance minimum entre deux antennes quelconques afin d'obtenir un système décorréolé. Contrairement à un système STBC habituel, l'augmentation du nombre d'antennes de réception dans le but d'accepter plus d'utilisateurs simultanément n'améliore pas les performances du système.

Les systèmes CDMA traditionnels avec la diversité spatiale nous permettent d'obtenir un gain de diversité mais on perd en débit lorsqu'un code CDMA long est utilisé pour séparer les utilisateurs dans le même secteur. Ceci rend le CDMA moins attirant pour les applications à très hauts débits.

Le système présenté précédemment a une propriété intéressante: les utilisateurs sont complètement découplés sous la forme basique d'Alamouti sans perte de performances. On peut donc imaginer un système dont un groupe d'utilisateurs partage le même code d'étalement CDMA et utilise la technique du *Combined Array Processing* pour séparer les utilisateurs appartenant à un même groupe. La séparation des utilisateurs se fait alors en deux étapes. Ceci est un compromis entre la longueur du code et le nombre d'antennes nécessaires pour décoder les utilisateurs tout en obtenant un bon gain de diversité. On peut augmenter le gain de diversité en augmentant le nombre d'antennes de réception en fixant la taille du code et le nombre d'utilisateurs. Parallèlement, on peut augmenter le nombre d'utilisateurs dans le système, soit en ajoutant plus d'antennes de réception, soit en utilisant un code CDMA plus long. Quand la longueur du code de Walsh est divisée par deux (et une antenne de réception est ajoutée en conséquence), on double le débit avec une réduction du gain de diversité. On verra par la suite que le système proposé est très flexible et une reconfiguration à chaud peut être envisagée sans modification du matériel. La structure de l'émetteur reste inchangée. La nouvelle structure du récepteur est présentée en Figure 102.

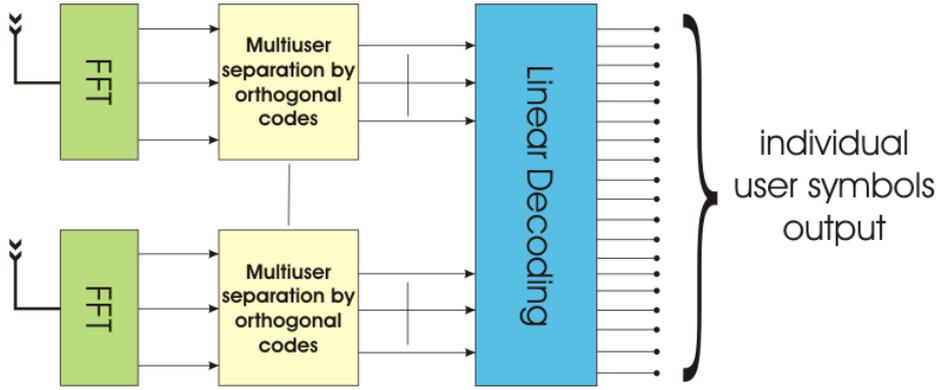


FIGURE 102 : LE MODELE DU RECEPTEUR SURCHARGE

On impose la contrainte suivante : Il n'y a pas plus de  $N_u^\Phi$  utilisateurs qui partagent le même code d'étalement CDMA. Les mêmes modèles d'émetteur et de canal sont utilisés pour chaque utilisateur. La notation reste identique. Les signaux reçus à chaque antenne sont identiques aux relations (158)-(159). Après la FFT et désétalement CDMA, on obtient

$$\mathbf{z}_{i,q_1} = \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1} \cdot \mathbf{C}^T - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2}^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_1} \cdot \mathbf{C}^T \quad (181)$$

$$\mathbf{z}_{i,q_2} = \sum_{u=1}^{N_u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_2} \cdot \mathbf{C}^T + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{s}_{u,q_1}^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{n}_{q_2} \cdot \mathbf{C}^T \quad (182)$$

La différence avec le système précédent est que, pour chaque branche de FFT (ou sur chaque sous-porteuse), il y a, au plus,  $N_u^\Phi$  utilisateurs superposés après le filtre adapté. Sachant que l'orthogonalité des symboles STBC est préservé pour chaque utilisateur après désétalement CDMA, on peut utiliser la méthode présentée dans 5.3 pour découpler ces utilisateurs qui partagent le même code CDMA à condition que le nombre d'antennes de réception,  $N_r$ , est au moins égal à  $N_u^\Phi$ , d'où la condition

$$N_r \geq N_u^\Phi \quad (183)$$

Soit  $\Phi_\phi^u$  l'ensemble des utilisateurs qui partagent le code d'étalement  $C_\phi$ .  $N_u^\Phi$  est défini par

$$N_u^\Phi = \max_{\phi \in \{1, \dots, \Theta\}} \left( \text{size}(\Phi_\phi^u) \right) \quad (184)$$

avec  $\Theta$  qui représente le nombre de codes d'étalement disponibles. Vu que le découplage par le code a été effectué dans  $\mathbf{z}_{i,q_p}$ , on se concentre ici sur le groupe d'utilisateurs utilisant le code  $C_\phi$  sachant que l'opération doit être effectuée pour tous les groupes utilisant d'autres codes

d'étalement. On note  $\mathbf{z}_{i,q_p}^\Phi$  les signaux issus du filtre adapté CDMA utilisant le code  $C_\Phi$ . Avec la condition  $N_r \geq N_u^\Phi$  respectée, on a

$$\mathbf{z}_{i,q_1}^{\Phi_\phi} = \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1} - \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2}^* + \mathbf{n}_{q_1}^u \quad (185)$$

$$\mathbf{z}_{i,q_2}^{\Phi_\phi} = \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \Lambda_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_2} + \Lambda_{2,i}^u \cdot \mathbf{B}_{u,q_1}^* + \mathbf{n}_{q_2}^u \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i^{\Phi_\phi} \Big|_{2K \times 1} &= \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1,i}^u & -\Lambda_{2,i}^u \\ \Lambda_{2,i}^{u*} & \Lambda_{1,i}^{u*} \end{bmatrix}_{2K \times 2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{u,2q}^T \\ \mathbf{b}_{u,2q+1}^{T*} \end{bmatrix}_{2K \times 1} + \mathbf{n}_i^{\Phi_\phi} \Big|_{2K \times 1} \\ &= \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \Lambda_i^u \cdot \mathbf{b}_u^T + \mathbf{n}_i^{\Phi_\phi} \end{aligned} \quad (187)$$

Comme  $\Lambda_{j,i}^u$  sont des matrices diagonales, on peut réduire (187) aux  $K$  problèmes individuels.

On écrit alors, pour le  $k^{\text{ième}}$  problème,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i^{\Phi_\phi}(k) &= \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \begin{bmatrix} \Lambda_{1,i}^u(k) & -\Lambda_{2,i}^u(k) \\ \Lambda_{2,i}^{u*}(k) & \Lambda_{1,i}^{u*}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{u,q_1}^T(k) \\ b_{u,q_2}^{T*}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{n}_i^{\Phi_\phi}(k) \\ &= \sum_{u \in \Phi_\phi^u} \Lambda_i^u(k) \cdot \mathbf{b}_u^T(k) + n_i^{\Phi_\phi}(k) \end{aligned} \quad (188)$$

avec  $\Lambda_{j,i}^u(k)$  le  $k^{\text{ième}}$  élément dans la diagonale de la matrice  $\Lambda_{j,i}^u$ . En considérant les signaux sur toutes les antennes de réception issus du  $k^{\text{ième}}$  élément du filtre adapté du code  $C_\Phi$  on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k^{\Phi_\phi} &= \left[ \left( \mathbf{z}_1^{\Phi_\phi}(k) \right)^T, \dots, \left( \mathbf{z}_{N_r}^{\Phi_\phi}(k) \right)^T \right]_{2N_r \times 1}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda_1^1(k) & \dots & \Lambda_1^{N_u^\Phi}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N_r}^1(k) & \dots & \Lambda_{N_r}^{N_u^\Phi}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T(k) \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N_u^\Phi}^T(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{N_r}(k) \end{bmatrix} \\ &= \Lambda(k)_{2N_r \times 2N_u^\Phi} \cdot \mathbf{b}(k)_{2N_u^\Phi \times 1} + \mathbf{n}(k)_{2N_r \times 1} \end{aligned} \quad (189)$$

En supposant que les informations des canaux sont parfaitement connues, les relations précédentes peuvent être résolues de façon itérative. Pour simplifier la démonstration, on considère que  $N_r = N_u^\Phi$ .

Soit  $Q$ , le nombre d'utilisateurs restant à détecter pendant l'itération actuelle. On initialise et on pose  $\mathbf{Y}^Q = \mathbf{Z}_k^{\Phi_\phi}$ ,  $\Lambda^Q = \Lambda(k)$  et  $\boldsymbol{\beta}^Q = \mathbf{b}(k)$ . La matrice  $\Lambda^Q$  est divisée en quatre sous matrices décrites par

$$\Lambda^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Delta} \end{bmatrix}_{2Q \times 2Q} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^1 & \dots & \Lambda_1^{Q-1} & | & \Lambda_1^Q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{Q-1}^1 & \dots & \Lambda_{Q-1}^{Q-1} & | & \Lambda_{Q-1}^Q \\ \hline \Lambda_Q^1 & \dots & \Lambda_Q^{Q-1} & | & \Lambda_Q^Q \end{bmatrix}_{2Q \times 2Q} \quad (190)$$

On cherche un filtre  $\mathbf{W}^Q$  tel que

$$\mathbf{W}^Q \cdot \Lambda^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^Q & \mathbf{W}_2^Q \\ \mathbf{W}_3^Q & \mathbf{W}_4^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^Q \end{bmatrix} \quad (191)$$

De façon arbitraire, on impose que les sous matrices  $\mathbf{W}_1^Q$  et  $\mathbf{W}_4^Q$  soient égales aux matrices identités  $\mathbf{I}_{2(Q-1)}$  et  $\mathbf{I}_2$  respectivement. On obtient après des calculs directs,

$$\mathbf{W}_2^Q = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Delta}^{-1} \quad (192)$$

$$\mathbf{W}_3^Q = -\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (193)$$

$$\mathbf{P}^Q = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Delta}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma} \quad (194)$$

$$\mathbf{V}^Q = \mathbf{\Delta} - \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (195)$$

L'application de ce filtre découple l'utilisateur  $Q$  des autres utilisateurs comme l'illustre la relation (196) ci dessous

$$\mathbf{W}^Q \cdot \mathbf{Y}^Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}^{Q-1} \\ \hat{\mathbf{Y}}^Q \end{bmatrix}_{2Q \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\beta}^{Q-1} \\ \mathbf{b}_Q \end{bmatrix} + \mathbf{N} \quad (196)$$

L'expression des signaux de l'utilisateur  $Q$  est définie par

$$\hat{\mathbf{Y}}^Q = \mathbf{V}^Q \mathbf{b}_Q + \mathbf{N}_Q = (\mathbf{\Delta} - \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{b}_Q + \mathbf{N}_Q \quad (197)$$

L'équation précédente peut être utilisée pour décoder un mot STBC basé sur le schéma d'Alamouti. Avant de passer à l'itération suivante, on pose  $\mathbf{Y}^Q = \hat{\mathbf{Y}}^{Q-1}$  et  $\Lambda^Q = \mathbf{P}^Q$ . On répète les itérations jusqu'à arriver à  $Q=1$ . **Ces opérations doivent être faites pour toutes les sous porteuses et pour tous les codes d'étalement utilisés.** La complexité a l'air prohibitive mais heureusement le décodage parallèle en  $K \times \Theta$  processus distincts est envisageable pour chaque sous porteuse et pour chaque code.

### 5.5.5.1 Performances

La Figure 103 présente les performances du système "hybride" quand deux utilisateurs utilisent le même code d'étalement. La modulation 8PSK est utilisée pour la simulation. Deux types de canaux sélectifs en fréquences de 5 et de 9 trajets sont utilisés. La Figure 103 montre que le système est capable de séparer sans perte de performances les deux utilisateurs partageant le

même code d'étalement au prix d'une antenne de réception supplémentaire. Avec deux utilisateurs par code, la taille du code Walsh nécessaire est divisée en deux et ceci nous permet de doubler le débit. Ceci ouvre la voie pour les applications haut débits avec la possibilité d'adapter le débit selon le besoin en temps réel.

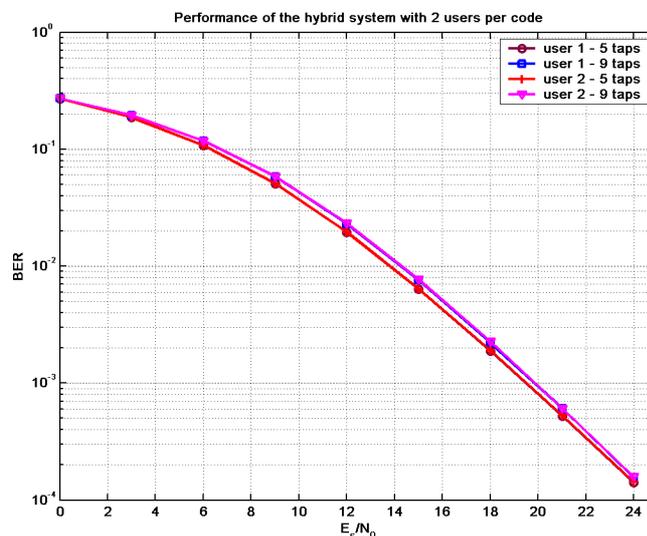


FIGURE 103 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME MULTI UTILISATEURS STBC-OFDM 128 SOUS PORTEUSES QUAND 2 UTILISATEURS PARTAGENT LE MEME CODE D'ETALEMENT

## 5.6 SFBC-M

### 5.6.1 Introduction

On peut imaginer une adaptation du système multi utilisateurs avec la diversité espace – temps au système avec la diversité espace – fréquence. Le principe de base reste identique que précédemment.

J'ai découvert pendant l'élaboration de ce système, les travaux de Stefan Kaiser proposant le système OFDM avec le multiplexage par le code (OFDM-CDM) [64]. L'extension de ce dernier au système à diversité espace fréquence a été développée par le même auteur dans [39]. Le système présenté ici traite l'environnement multi utilisateur en mode synchrone avec quelques petites différences et a été publié dans [66].

### 5.6.2 L'émetteur

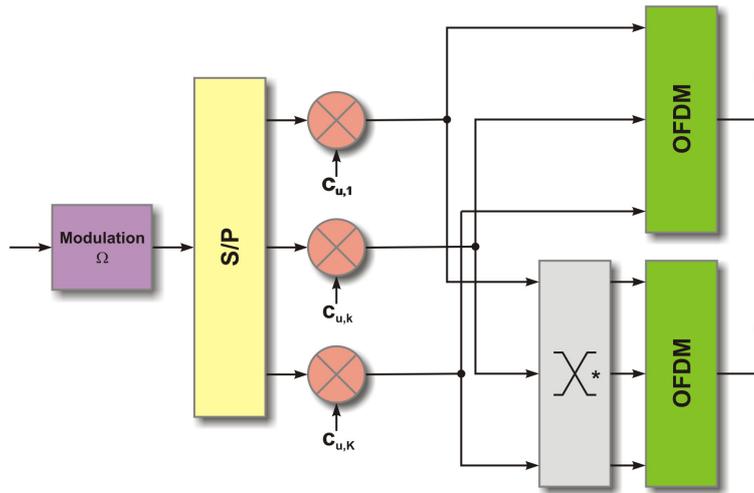


FIGURE 104 : LE MODELE DE L'EMETTEUR SFBC-M

Le modèle de l'émetteur est présenté dans la Figure 104. Un bloc de  $K$  symboles est mis en parallèle utilisant un convertisseur série - parallèle. Un code d'étalement CDMA de taille  $\theta$  réel et orthogonal comme le code Walsh est appliqué à chaque symbole qui se trouve sur chaque branche  $k$  de la sortie du convertisseur. Ceci peut être modélisé mathématiquement par une opération matricielle

$$\mathbf{s}_u = \mathbf{B}_u \cdot \mathbf{C}_u \quad (198)$$

avec

$$\mathbf{B}_u = \text{diag}\{b_u(1), \dots, b_u(K)\} = \begin{bmatrix} b_u(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_u(K) \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (199)$$

les  $K$  symboles constituant un bloc à paralléliser et

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{u,1}^T & \dots & \mathbf{c}_{u,K}^T \end{bmatrix}_{K \times \theta}^T \quad (200)$$

la matrice  $K \times \theta$  contenant les codes d'étalement pour chaque branche. Chaque branche correspond en réalité à une sous porteuse. Le code d'étalement peut être identique sur toutes les sous porteuses pour chaque utilisateur et chaque utilisateur emploie un code d'étalement distinct, i.e.  $\forall k, \mathbf{c}_{u,k} = \mathbf{c}_u$ , ou, le code d'étalement peut être distinct sur toutes les sous porteuses d'un utilisateur, et il n'y a pas deux utilisateurs qui partagent le même code sur la même sous porteuse. La deuxième méthode de distribution des codes peut être utilisée pour protéger un utilisateur des interférences entre porteuse (ICI) et séparer les symboles de tous les utilisateurs envoyé sur la même sous porteuse mais ceci ne protégera pas un symbole sur la sous porteuse  $k$

de l'utilisateur  $u$  des interférences dues aux symboles des autres utilisateurs sur les sous porteuses adjacentes. Le choix de la distribution des codes dépendra du besoin.

Les séquences étalées sur toutes les sous porteuses seront envoyées sur les deux antennes d'émission. Sur la première antenne, chaque chip de chaque sous porteuse est regroupé pour former  $\theta$  mots OFDM de taille  $K$ . Sur la deuxième antenne, les chips sont permutés par paire et l'inversion de signe est effectuée sur l'un des deux chips pour obtenir un système orthogonal entre les deux antennes d'émission avant de former  $\theta$  mots OFDM.

Les signaux envoyés sur les deux antennes d'émission s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{X}_{u,1} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{s}_u \quad (201)$$

$$\mathbf{X}_{u,2} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{J}_u \cdot \mathbf{s}_u^* \quad (202)$$

avec  $\mathbf{X}_{u,1}$  et  $\mathbf{X}_{u,2}$  les mots OFDM envoyés sur l'antenne 1 et l'antenne 2 respectivement.  $\mathbf{Q}^*$  est la matrice IDFT normalisée pour représenter la modulation OFDM et  $\mathbf{J}_u$  est une matrice de permutation anti symétrique de la famille  $\mathcal{J}$  défini dans le Chapitre 3 pour représenter la permutation par paire en fréquence. Un exemple de cette matrice est représenté ci-dessous.

$$\mathbf{J}_u = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (203)$$

Le schéma de la permutation fréquentielle présentée dans (203) sera utilisé pour simplifier la démonstration et tous les utilisateurs utiliseront le même schéma de permutation, ce qui n'est nécessairement pas le cas. La généralisation aux autres formes de matrices de permutation est triviale.

Le Tableau 18 nous montre la correspondance espace fréquence pour chaque mot OFDM si la matrice de permutation (203) est utilisée.

**TABLEAU 18 : REPARTITION DES SYMBOLES EN ESPACE ET EN FREQUENCE**

	Antenne 1	Antenne 2
sous porteuse $k$	$s_u(k, T)$	$-s_u^*(k+1, T)$
sous porteuse $k+1$	$s_u(k+1, T)$	$s_u^*(k, T)$

### 5.6.3 Le récepteur

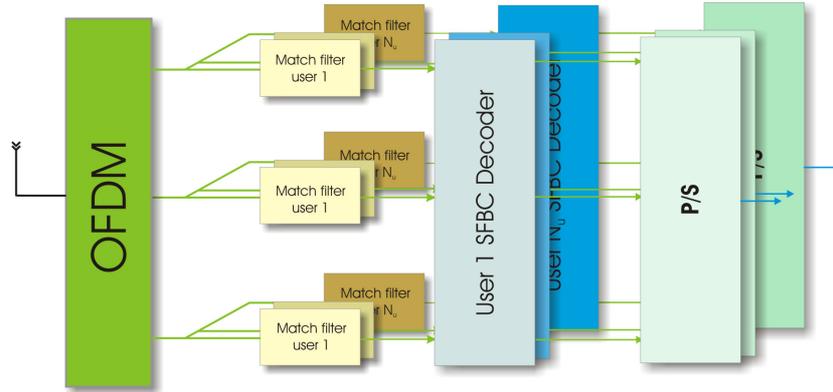


FIGURE 105 : LE MODELE DU RECEPTEUR SFBC-M

Le modèle du récepteur est présenté sur la Figure 105. Dans une configuration en voie montante, chaque utilisateur aura ses propres canaux sélectifs en fréquence entre chaque paire d'antennes d'émission et de réception. En considérant la réponse du canal entre l'antenne d'émission  $j$  de l'utilisateur  $u$  et l'antenne de réception  $i$ , le canal est modélisé par

$$h_{j,i}^u(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{j,i}^u(l) \cdot \delta\left(\tau - \frac{l}{\Delta f}\right) \quad (204)$$

avec  $L = \lceil \tau_m \Delta f + 1 \rceil$ ,  $\tau_m$  est le délai maximum d'un trajet du canal sélectif en fréquence de tous les utilisateurs.  $\alpha_{j,i}^u(l)$  est le gain complexe du  $l^{\text{ième}}$  trajet entre l'antenne d'émission de l'utilisateur  $u$  et l'antenne de réception  $i$ .  $\Delta f$  est la bande passante du système OFDM.

Tous les signaux de tous les utilisateurs transmis à partir de toutes les antennes d'émission se propagent dans leur canal sélectif en fréquence et atteignent la  $i^{\text{ième}}$  antenne de réception du récepteur. Un bruit additif complexe gaussien s'ajoute à ces signaux superposés. On assume que toutes les précautions nécessaires ont été prises afin d'obtenir des canaux non corrélés. On suppose aussi que le canal reste invariant pendant  $\theta$  mots OFDM.

On note  $N_u$  le nombre d'utilisateurs dans le système. En considérant le système quasi synchrone, le signal reçu sur l'antenne de réception  $i$  pendant un mot OFDM s'écrit sous la forme

$$y_i(T) = \sum_{u=1}^{N_u} h_{1,i}^u \otimes X_{u,1}(T) + h_{2,i}^u \otimes X_{u,2}(T) + N_i(T) \quad (205)$$

où  $X_{u,j}(T)$  représente le  $T^{ième}$  mot OFDM issue de la matrice  $\mathbf{X}_{u,j}$ <sup>16</sup>.  $\otimes$  représente l'opération de convolution.

Suivant [41], l'équation précédente peut être écrite sous la forme matricielle

$$\mathbf{y}_i(T) = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}_{1,i}^u \cdot \mathbf{X}_{u,1}(T) + \mathbf{H}_{2,i}^u \cdot \mathbf{X}_{u,2}(T) + \mathbf{N}_i(T) \quad (206)$$

Avec le préfixe cyclique de l'OFDM et la synchronisation parfaite en temps et en fréquence,  $\mathbf{H}_{j,i}^u$  est une matrice circulante de taille  $K \times K$ . Suivant le résultat des théorèmes de matrices connus [65], la matrice  $\mathbf{H}_{j,i}^u$  peut être décomposée en valeurs propres par

$$\mathbf{H}_{j,i}^u = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{\Lambda}_{j,i}^u \cdot \mathbf{Q} \quad (207)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}_{j,i}^u = \text{diag}(\mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{j,i}^u)$ ,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{j,i}^u = \text{zeropad}(\boldsymbol{\alpha}_{j,i}^u) = [\alpha_{j,i}^u(1) \dots \alpha_{j,i}^u(L) \ 0]_{K \times 1}^T \quad (208)$$

$\mathbf{Q}$  est la matrice DFT normalisée. On obtient, après la démodulation OFDM,

$$\mathbf{r}_i(T) = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{S}_{u,1}(T) + \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}_{u,2}^*(T) + \mathbf{N}_i(T) \quad (209)$$

Chaque mot OFDM correspond à la superposition d'un chip du signal étalé de tous les utilisateurs. Les mots OFDM dans (209) peuvent être rangés pour obtenir

$$\mathbf{r}_i = [r_i(1) \dots r_i(1)]_{K \times \theta} \quad (210)$$

Le signal désétalé est obtenu par

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{\Lambda}_{1,i}^u \cdot \mathbf{B}_u \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{\Lambda}_{2,i}^u \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_u^* \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (211)$$

avec  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1^T \dots \mathbf{c}_{N_u}^T]_{N_u \times K}^T$ .

Vu que les codes CDMA sont orthogonaux et que  $\forall \mu, \eta : \mathbf{c}_\mu \cdot \mathbf{c}_\eta^T = \delta_\mu^\eta \cdot \mathbf{I}$ , chaque élément de la matrice  $\mathbf{R}_i$  correspond à un symbole sur une fréquence différente pour un utilisateur unique. On a alors, dans le cas où le système est quasi synchrone, complètement découplé pour tous les

<sup>16</sup>  $X_{u,j}(T) = \text{serial}(\mathbf{X}_{u,j}[:, T])$

utilisateurs,  $N_u$  utilisateurs individuels SFBC présentés dans le Chapitre 3. Ceci rend le récepteur facilement parallélisable.

L'algorithme de décodage de ce système ne nécessite pas la connaissance des états des canaux des autres utilisateurs. Pour décoder un utilisateur, le récepteur a seulement besoin de connaître l'information des canaux de l'utilisateur concerné et aussi son mapping espace fréquence modélisé par la matrice  $\mathbf{J}$ .

L'algorithme de décodage SFBC est rappelé succinctement et est à appliquer pour tous les utilisateurs.

Soit  $\mathbf{R}_{i,u}$  les symboles reçus sur l'antenne de réception  $i$  pour utilisateur  $u$ . A cause de la forme de la matrice  $\mathbf{J}$ ; on a

$$R_{i,u}(k) = \lambda_{i,1}^u(k) \cdot b_u(k) - \lambda_{i,2}^u(k) \cdot b_u^*(k+1) + n_i(k) \quad (212)$$

$$R_{i,u}(k+1) = \lambda_{i,1}^u(k+1) \cdot b_u(k+1) + \lambda_{i,2}^u(k+1) \cdot b_u^*(k) + n_i(k+1) \quad (213)$$

avec  $\lambda_{i,j}^u(k) = \Lambda_{i,j}^u(k, k)$  le  $k^{\text{ième}}$  élément de la diagonale de la matrice  $\Lambda_{j,i}^u$ .

En combinant (212)-(213)

$$\begin{aligned} R_{i,u}(k) &= \lambda_{i,1}^{u*}(k+1) \cdot R_{i,u}(k) + \lambda_{i,2}^u(k) \cdot R_{i,u}^*(k+1) \\ &= \xi_{i,k} \cdot b_u(k) + \lambda_{i,1}^{u*}(k+1) \cdot n_i(k) + \lambda_{i,2}^u(k) \cdot n_i^*(k+1) \end{aligned} \quad (214)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{i,u}^*(k+1) &= \lambda_{i,1}^u(k) \cdot R_{i,u}^*(k+1) - \lambda_{i,2}^{u*}(k+1) \cdot R_{i,u}(k) \\ &= \xi_{i,k} \cdot b_u^*(k+1) + \lambda_{i,1}^u(k) \cdot n_i^*(k+1) - \lambda_{i,2}^{u*}(k) \cdot n_i(k) \end{aligned} \quad (215)$$

avec  $\xi_{i,k} = \lambda_{i,1}^{u*}(k+1) \cdot \lambda_{i,1}^u(k) + \lambda_{i,2}^{u*}(k+1) \cdot \lambda_{i,2}^u(k)$

Les décisions hard de  $\hat{b}_u(k)$  et  $\hat{b}_u(k+1)$  peuvent être calculées par

$$\hat{b}_u(k) = \arg \min_{b_u \in \Omega_{u,k}} \left( \underbrace{\left| \hat{R}_{i,u}(k) - \xi_{i,k} \cdot b_u(k) \right|^2}_{\varepsilon_k} \right) \quad (216)$$

$$\hat{b}_u(k+1) = \arg \min_{b_u \in \Omega_{u,k+1}} \left( \underbrace{\left| \hat{R}_{i,u}^*(k+1) - \xi_{i,k} \cdot b_u^*(k+1) \right|^2}_{\varepsilon_{u,k+1}} \right) \quad (217)$$

$\Omega_{u,\kappa}, \kappa \in \{k, k+1\}$  correspond à l'ensemble de tous les symboles possibles envoyés par l'utilisateur  $u$  sur la sous porteuse  $\kappa$ .

Les valeurs soft peuvent être calculées sans avoir besoin de tenir compte des influences des autres utilisateurs. On peut ensuite fournir ces valeurs softs aux décodeurs de canal comme le décodeur LDPC pour améliorer les performances du système.

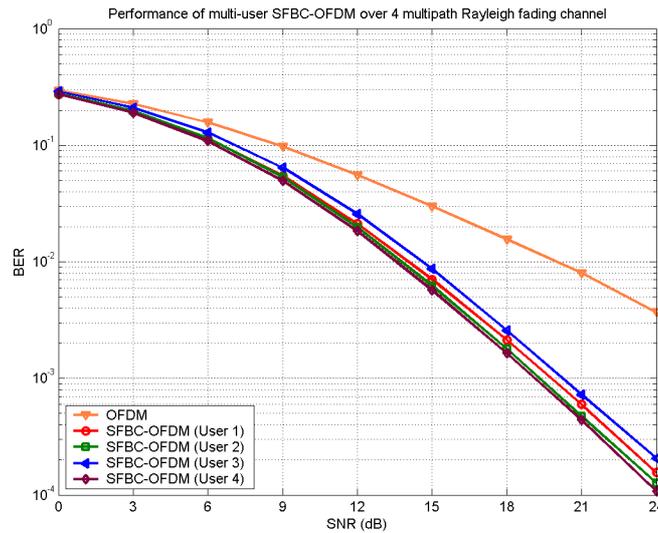
Les décisions softs pour chaque bit d'information sont obtenues par

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^e [d_u^j(\kappa)] &= \log \left( \frac{P(d_u^j(\kappa)=+1 | \hat{R}_{i,u}(\kappa))}{P(d_u^j(\kappa)=-1 | \hat{R}_{i,u}(\kappa))} \right) - \log \left( \frac{P(d_u^j(\kappa)=+1)}{P(d_u^j(\kappa)=-1)} \right) \\
&= \log \left( \frac{\sum_{b \in \Omega_j^+} P(\hat{b}_u(\kappa)=b | \hat{R}_{i,u}(\kappa))}{\sum_{b \in \Omega_j^-} P(\hat{b}_u(\kappa)=b | \hat{R}_{i,u}(\kappa))} \right) - \Gamma_2^{e,p} [d_u^j(\kappa)] \\
&= \log \left( \frac{\sum_{b \in \Omega_j^+} \exp[-\varepsilon_{u,\kappa} + \log P(b)]}{\sum_{b \in \Omega_j^-} \exp[-\varepsilon_{u,\kappa} + \log P(b)]} \right) - \Gamma_2^{e,p} [d_u^j(\kappa)]
\end{aligned} \tag{218}$$

avec  $\Gamma_1^e [d_u^j(\kappa)]$  la valeur *a posteriori* LLR extrinsèque du  $j^{\text{ième}}$  bit du  $b_u(\kappa)$  et  $j = \{1, \dots, j_{max}\}$ ,  $j_{max}$  est le nombre de bits nécessaire pour représenter un symbole dans l'ensemble  $\Omega$ .  $\Omega_j^+$  représente l'ensemble de  $b$  pour lequel le  $j^{\text{ième}}$  bit prend la valeur '+1' et  $\Omega_j^-$  est l'ensemble de  $b$  pour lequel le  $j^{\text{ième}}$  bit prend la valeur '-1'.  $P(b)$  et  $\Gamma_2^{e,p} [d_u^j(\kappa)]$  représentent respectivement la probabilité *a priori* de symbole  $b$  et le LLR extrinsèque *a priori* fourni par le décodeur LDPC pendant la turbo itération précédente. La valeur de  $\Gamma_2^{e,p} [d_u^j(k)]$  est initialisée à 0 pendant la première turbo itération et quand le retour de LDPC n'est pas utilisé.

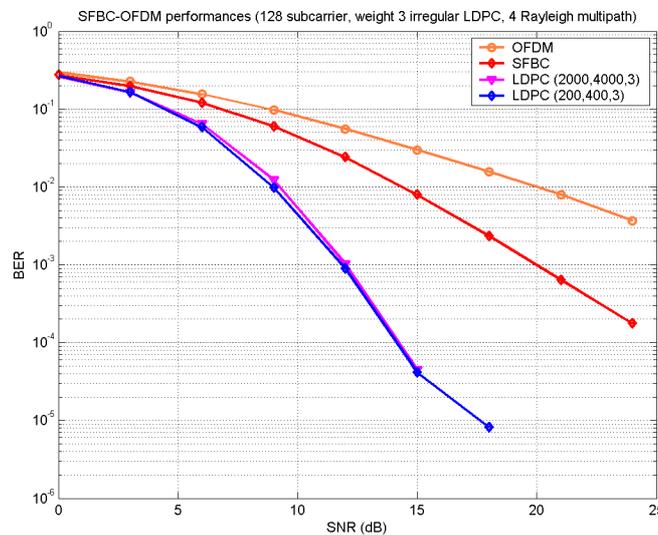
#### 5.6.4 Les performances

La Figure 106 montre les performances du système SFBC multi utilisateurs à 128 sous porteuses dans un canal à 4 trajets en fonction de  $E_s/N_0$ . La modulation 8PSK est utilisée pour les simulations. La variance de bruit est de  $\sigma^2/2$  par dimension. On voit que, identiquement au système présenté dans 5.5, ce système peut découpler tous les utilisateurs sans perte de performances. On observe aussi un gain de diversité par rapport au système OFDM conventionnel.



**FIGURE 106 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME SFBC-M A 128 SOUS PORTEUSES DANS DES CANAUX A 4 TRAJETS (4 UTILISATEURS, CODE WALSH)**

On évalue ensuite les performances illustrées pour un utilisateur dans la Figure 107 quand un codage LDPC est rajouté au système. On observe les mêmes comportements qu'avec le système STBC-M dans 5.5.4.1. En effet, il n'y a pas de gain de performances entre les codes LDPC irréguliers (200,400,3) et (2000,4000,3).



**FIGURE 107 : LES PERFORMANCES DU SYSTEME SFBC-M A 128 SOUS PORTEUSES POUR UN UTILISATEURS DANS DES CANAUX A 4 TRAJETS ET AVEC DES CODES LDPC IRREGULIER (200,400,3) ET (2000,4000,3)**

On ajoute alors un entrelaceur de symboles supplémentaire et le modèle de l'émetteur modifié est présenté dans la Figure 108.

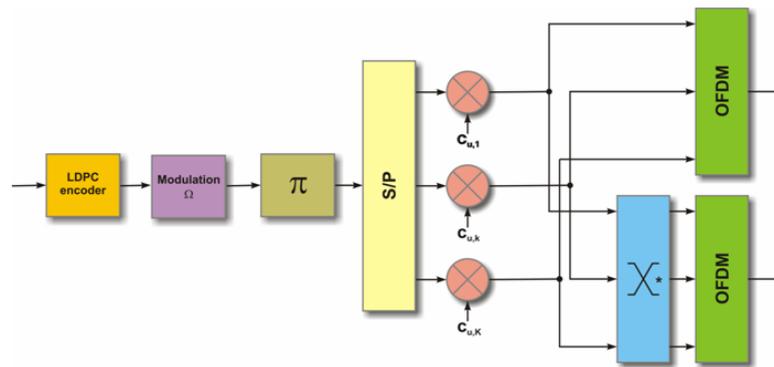


FIGURE 108 : LE MODELE DE L'EMETTEUR SFBC-M MODIFIE

Les Figure 109 et Figure 110 montrent les effets bénéfiques de l'entrelaceur de symboles supplémentaire. On observe un gain de 3 dB et 5 dB pour les codes LDPC (200,400,3) et (2000,4000,3) respectivement pour un TEB égal à  $10^{-3}$ .

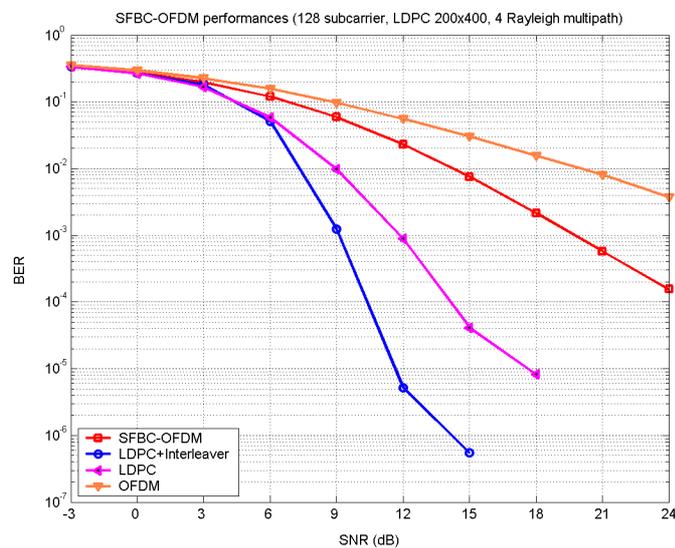


FIGURE 109 : L'EFFET DE L'ENTRELACEUR SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME SFBC-M A 128 SOUS PORTEUSES POUR UN UTILISATEUR DANS DES CANAUX A 4 TRAJETS ET AVEC LE CODE LDPC IRREGULIER (200,400,3)

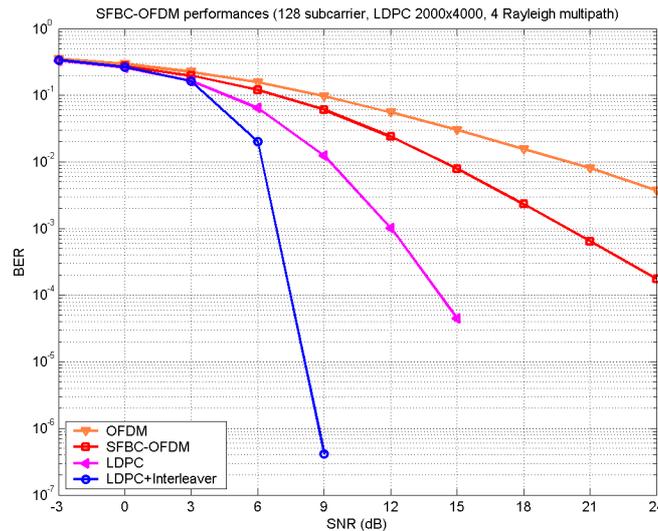


FIGURE 110 : L'EFFET DE L'ENTRELACEUR SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME SFBC-M A 128 SOUS PORTEUSES POUR UN UTILISATEUR DANS DES CANAUX A 4 TRAJETS ET AVEC LE CODE LDPC IRRÉGULIER (2000,4000,3)

La Figure 111 met en valeurs les différentes performances étudiées du système dans des canaux à 5 trajets. On voit encore une fois le gain considérable obtenu après l'introduction de l'entrelaceur.

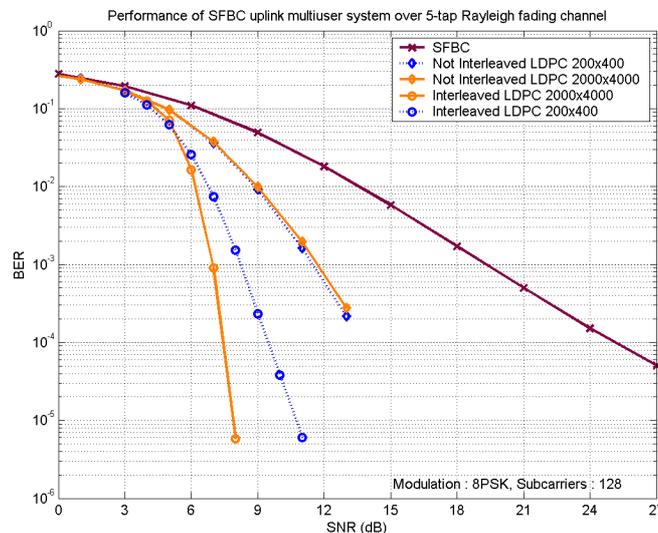


FIGURE 111 : L'EFFET DE L'ENTRELACEUR SUR LES PERFORMANCES DU SYSTEME SFBC-M A 128 SOUS PORTEUSES POUR UN UTILISATEUR DANS DES CANAUX A 4 TRAJETS ET AVEC LES CODES LDPC IRRÉGULIERS (200,400,3) ET (2000,4000,3)

La Figure 112 présente les performances du système pour deux utilisateurs dans des canaux différents. On peut voir que le code LDPC irrégulier (2000,4000,3) est capable d'exploiter la

diversité multi trajets présente dans le canal. On atteint jusqu'à 2 dB de gain entre un canal à fading et un canal à 5 trajets.

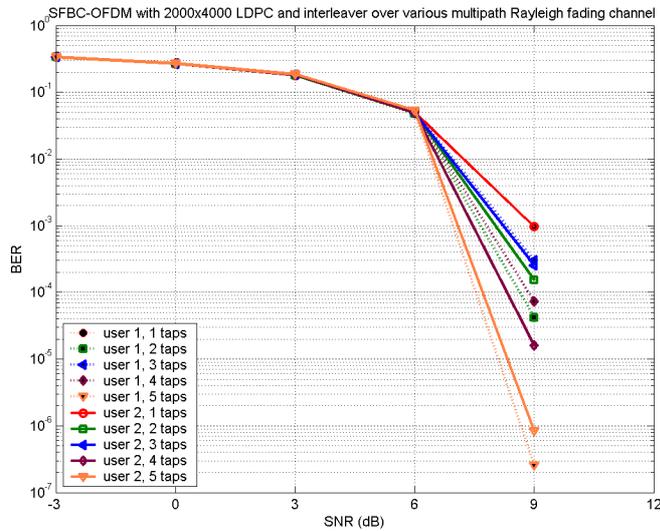


FIGURE 112 : LE GAIN DE DIVERSITE MULTI TRAJETS

## 5.7 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre quelques systèmes multi utilisateurs en voie montante exploitant la diversité spatiale. Nous avons proposé deux systèmes multi utilisateurs multi porteuses avec la diversité espace – temps et un système similaire avec la diversité espace – fréquence. Nous avons aussi montré l'effet bénéfique du rajout sur canal de Rayleigh multitrajets d'un entrelaceur symboles supplémentaire pour obtenir de meilleures performances pour les systèmes proposés.



---

## Conclusion et perspectives

---

Nous avons étudié dans cette thèse l'utilisation des codes LDPC dans le cadre des transmissions multiporteuses sur canaux MIMO. Après avoir examiné dans le chapitre 1 les principaux algorithmes de décodage nous avons proposé l'utilisation du codage LDPC dans le chapitre 4 pour la réalisation d'un turbo-égaliseur basé sur l'algorithme EM. Les principaux algorithmes de décodage ont été implantés et testés en simulation. Il reste maintenant à apprendre à optimiser le profil d'un code LDPC irrégulier en fonction des caractéristiques du canal de propagation. Des travaux récents, proposés entre autres par Wang & al, sont apparus récemment dans le domaine.

L'autre point clé de ce travail de recherche concerne la définition et l'étude des systèmes MIMO à diversité temps-espace ou espace-fréquence ou encore temps-espace-fréquence utilisant des codes en blocs.

Nous avons d'abord proposé un nouveau code pour le système STFBC (Space Time Frequency Block Code) en bloc pour deux antennes d'émission. Ce code permet de faire un compromis entre le système à base de codage STBC (Space Time Block Code) en bloc et le système SFBC (Space Frequency Block Code) dans des canaux sélectifs en fréquence. Le code peut être décrit parfaitement par des matrices. D'après les premières simulations, le code proposé présente de meilleures performances par rapport aux codes STBC et SFBC. Une perspective possible après ce travail de recherche est d'approfondir l'étude de ce code en examinant mieux les paramètres qui peuvent influencer sur les performances du système comme le nombre de sous porteuses, l'entrelacement fréquentiel, la sélectivité des canaux, la fréquence Doppler, l'effet d'asynchronisme temporel ou fréquentiel, etc.

Nous avons ensuite proposé des modifications sur le turbo récepteur à base de codage LDPC utilisant l'algorithme EM créé par Lu *et al* pour des systèmes à diversité espace – temps. L'algorithme SAGE a été introduit dans le système pour améliorer la vitesse de convergence du récepteur. Par rapport au système proposé par Lu *et al*, les valeurs initiales du décodeur MAP-EM sont calculées différemment à partir des symboles pilotes ou par les symboles reconstruits à partir des décisions softs du LDPC. Les futurs travaux peuvent être constitués par le développement d'un turbo récepteur pour des systèmes à diversité espace – fréquence et espace – temps – fréquence.

La dernière partie de cette thèse a été consacrée aux systèmes quasi synchrone multi utilisateurs en voie montante. Nous avons proposé plusieurs systèmes à diversité spatiale permettant d'obtenir les mêmes performances qu'un système mono utilisateur. Ces systèmes sont basés sur

les techniques MC-DS-CDMA. Afin de pouvoir comparer correctement les différentes propositions, nous nous sommes mis dans des contextes de situations idéales. Des études supplémentaires doivent être faites pour améliorer ce système de base afin de les adapter à des contextes de simulation plus réalistes.

Par exemple, les canaux de Rayleigh ont été considérés dans cette thèse. Il serait préférable d'utiliser des canaux plus réalistes comme ceux présents dans les normes IEEE 802.11-15 , UMTS etc...

J'ai laissé de côté quelques systèmes en phase de mise au point mais qui ne sont pas suffisamment matures pour être insérés dans cette thèse, il s'agit notamment de systèmes multi porteuses et multi utilisateurs asynchrones en voie montante avec la diversité spatiale. Il est clair que la réalisation d'un système multi porteuses multi utilisateurs asynchrone pour un système à diversité spatiale reste un problème ouvert.

---

## Annexe I Diagonalisation de la matrice circulante

---

<sup>17</sup>On dit que la matrice  $n \times n$   $\mathbf{C}$  est une matrice circulante si  $\mathbf{C}$  a la forme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\mathbf{C}$  est une matrice Toeplitz spéciale. Chaque colonne est obtenue en faisant un décalage circulaire vers le bas de la colonne précédente. La matrice  $\mathbf{C}$  est complètement définie par sa première colonne. On peut écrire  $\mathbf{C}$  comme étant

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{c} \quad \mathbf{R}^2 \cdot \mathbf{c} \quad \cdots \quad \mathbf{R}^{n-1} \cdot \mathbf{c}] \quad (2)$$

où

$$\mathbf{c} = [c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{n-1}]^T$$

$$\mathbf{R} = [e_2 \quad e_3 \quad \cdots \quad e_n \quad e_1]$$

et  $e_k$  la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice identité.

A partir de cette écriture, plusieurs propriétés peuvent être déduites [68][69]. L'une d'elles est très utile pour calculer le produit entre un vecteur et une matrice. La matrice circulante peut être diagonalisée par la matrice de Fourier unitaire,  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \cdots & w^{(n-1)} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(n-1)} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec  $w = e^{-j \frac{2\pi}{n}}$ .

---

<sup>17</sup> Cette annexe est extraite de [67]

## Théorème

Si  $C$  est une matrice circulante, alors elle peut être diagonalisée

$$C = Q^H \Lambda Q \quad (4)$$

avec  $\Lambda = \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{c})$  une matrice diagonale.

Le produit entre le vecteur  $\mathbf{x}$  et la matrice DFT  $Q$  donne la transformée de Fourier de  $\mathbf{x}$ . La multiplication par les matrices de FFT/IFFT permet de diagonaliser la matrice  $C$ .

Pour le prouver, on a besoin de deux lemmes.

### Lemme 1

Une matrice circulante est un polynôme en fonction de l'opérateur de décalage  $R$ .

$$C = c_0 \mathbf{I} + c_1 R + \dots + c_{n-1} R^{n-1} \quad (5)$$

*Preuve du lemme 1*

En comparant les colonnes  $j$  de (5) et sachant que  $R^k e_j = e_{(j+k) \bmod n}$ , on a

$$\begin{aligned} (c_0 \mathbf{I} + c_1 R + \dots + c_{n-1} R^{n-1}) \cdot e_j &= c_0 e_j + c_1 e_{j+1} + \dots + c_{n-j} e_n + c_{n-j+1} e_1 + \dots + c_{n-1} e_{j-1} \\ &= R^{j-1} \cdot \mathbf{c} \\ &= C \cdot e_j \end{aligned} \quad (6)$$

Ceci implique que la colonne  $j$  de la matrice polynomiale est égale à la colonne  $j$  de la matrice  $C$ . Comme ceci est vrai pour tout  $j$ , le lemme 1 est vérifié.

A noter que la matrice  $R$  est aussi circulante. Le théorème énoncé devrait être vrai pour cette matrice spéciale. On montre ci après que la matrice de Fourier diagonalise  $R$  et avec le lemme 1, on montre que  $Q$  diagonalise les matrices circulantes de façon plus générale

### Lemme 2

$$Q \cdot R = D \cdot Q \quad (7)$$

avec

$$D = \text{diag}(1, w, w^2, \dots, w^{n-1}) \quad (8)$$

### Preuve du lemme 2

On prouve le lemme précédent en comparant le  $kj^{\text{ième}}$  élément de  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$  avec le  $kj^{\text{ième}}$  élément de  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}$ .

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}]_{kj} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ 1 \ w^{(k-1)} \ w^{2(k-1)} \ \dots \ w^{(n-1)(k-1)} \right] \cdot e_{j+k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} w^{j(k-1)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}]_{kj} &= w^{(k-1)} e_k^T \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ 1 \ w^{(j-1)} \ w^{2(j-1)} \ \dots \ w^{(n-1)(j-1)} \right]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} w^{(k-1)} w^{(k-1)(j-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} w^{(k-1)j} \end{aligned} \quad (10)$$

Comme  $k$  et  $j$  sont arbitraires, La relation (7) est donc validée.

On a donc suffisamment de résultats pour prouver le théorème énoncé.

### Preuve du théorème

On commence par montrer que  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^H$  est diagonale. En remplaçant  $\mathbf{C}$  par la matrice polynomiale (5), et  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^H = \mathbf{D}$  obtenue à partir de la lemme 2, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^H &= \mathbf{Q} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{R}^k \right) \cdot \mathbf{Q}^H \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^k \cdot \mathbf{Q}^H \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left( \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^H \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \mathbf{D}^k \\ &\triangleq P(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (11)$$

avec  $P(\mathbf{z}) = c_0 + c_1 \mathbf{z} + \dots + c_n \mathbf{z}^{n-1}$ . Comme  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale,  $\mathbf{D}^k$  est aussi diagonale.

$$\mathbf{D}^k = \text{diag} \left( 1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k} \right) \quad (12)$$

$P(\mathbf{D})$  est donc une matrice diagonale.

Il reste à montrer que  $P(\mathbf{D}) = \text{diag}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c})$ . Utilisant (12), l'élément  $k$  dans  $P(\mathbf{D})$  peut être déterminé

$$\begin{aligned} [P(\mathbf{D})]_{kk} &= [c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{D} + \dots + c_{n-1}\mathbf{D}^{n-1}]_{kk} \\ &= c_0 + c_1w^{k-1} + \dots + c_{n-1}w^{(k-1)(n-1)} \\ &= [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}]_k \end{aligned} \tag{13}$$

La relation (13) prouve le théorème.

---

## Annexe II Exemples des canaux utilisés

---

On présente ici quelques exemples de canaux utilisés dans les simulations des systèmes à diversité spatiale. L'effet Doppler a été exagéré pour *compresser* l'échelle temporelle.

Trois graphiques sont présentées pour chaque canal : sa représentation temporelle, sa représentation en temps et en fréquence en deux dimension (2D) et sa représentation en temps et en fréquence en trois dimensions (3D). On utilise 16 sous porteuses pour représenter ces canaux.

On considère deux antennes d'émission et une antenne de réception. Les graphiques à gauche représentent le canal entre l'antenne d'émission 1 et l'antenne de réception et celle à droite représentent le canal entre l'antenne d'émission 2 et l'antenne de réception. On présente ici des canaux à fading, respectivement à trois trajets et à cinq trajets.

Les graphiques en deux et trois dimensions nous permettent de mieux apprécier le canal et de constater qu'un entrelaceur fréquentiel est peut être souhaitable pour un système à diversité espace – fréquence dans des canaux sélectifs en fréquence.

Les Figure 113 à Figure 118 montrent les réponses des canaux à fading.

Les Figure 119 à Figure 124 montrent les réponses des canaux à trois trajets.

Les Figure 125 à Figure 130 montrent les réponses des canaux à cinq trajets.



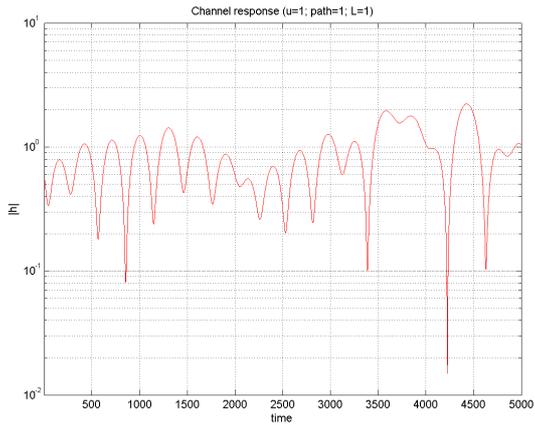


Figure 113 : Réponse temporelle du canal 1 à fading

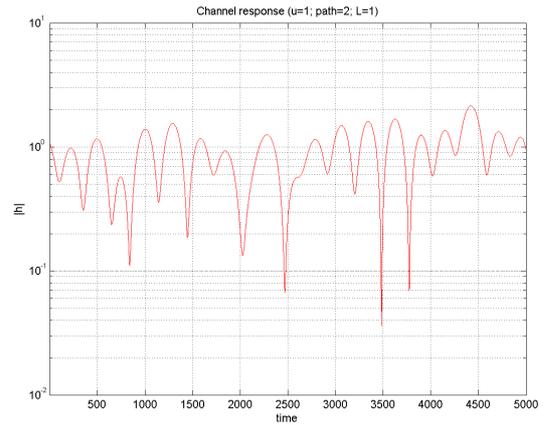


Figure 114 : Réponse temporelle du canal 2 à fading

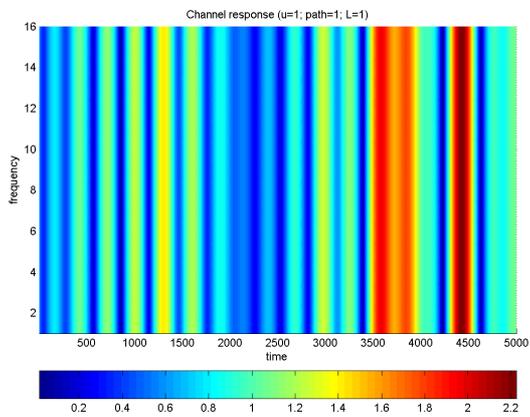


Figure 115 : Réponse fréquentielle du canal 1 à fading (2-D)

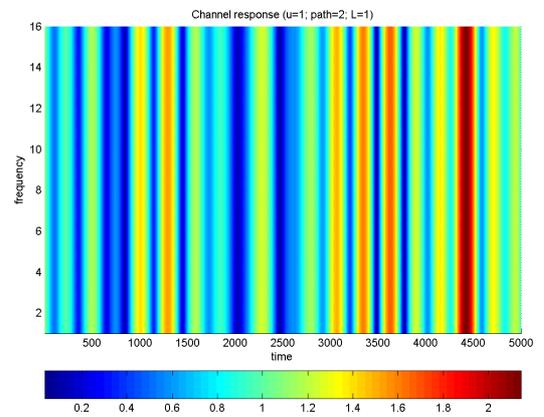


Figure 116 : Réponse fréquentielle du canal 2 à fading (2-D)

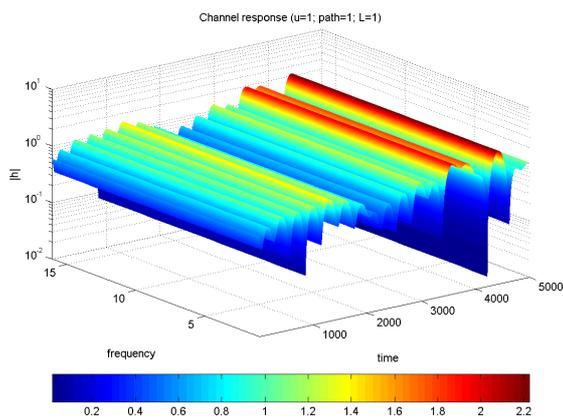


Figure 117 : Réponse fréquentielle du canal 1 à fading (3D)

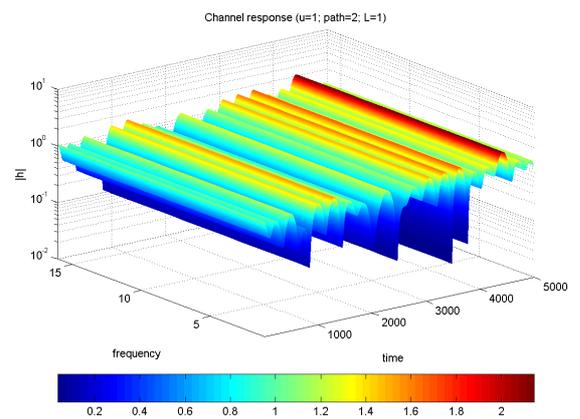


Figure 118 : Réponse fréquentielle du canal 1 à fading (3D)



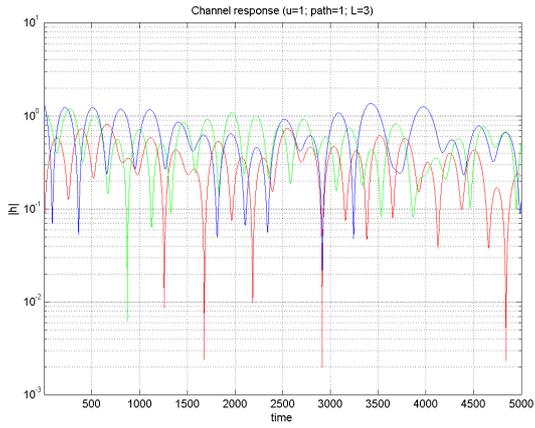


Figure 119 : Réponse temporelle du canal 1 à trois trajets

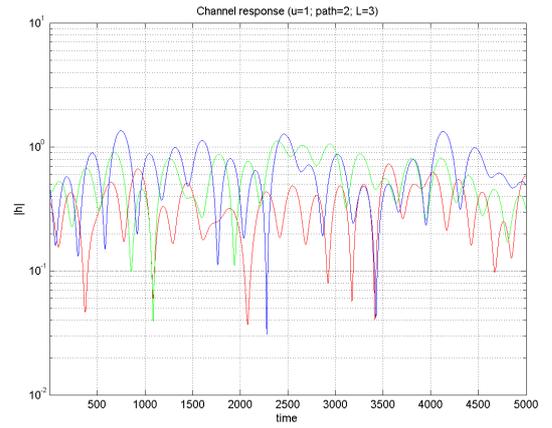


Figure 120 : Réponse temporelle du canal 2 à trois trajets

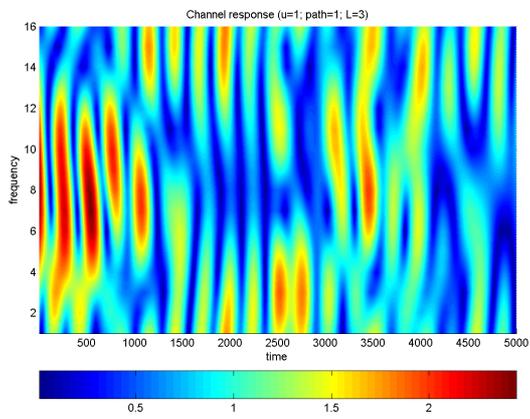


Figure 121 : Réponse fréquentielle du canal 1 à trois trajets (2D)

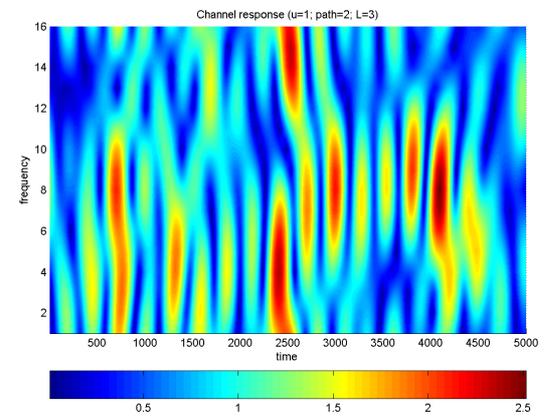


Figure 122 : Réponse fréquentielle du canal 2 à trois trajets (2D)

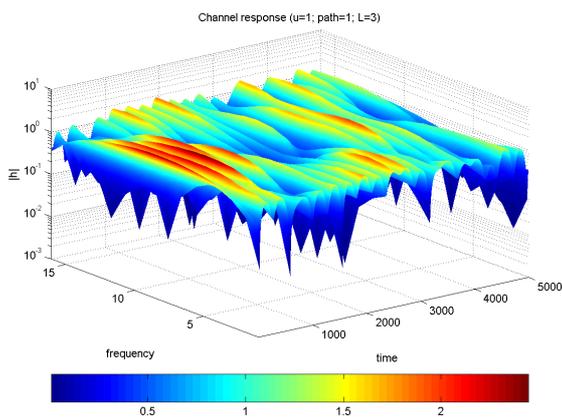


Figure 123 : Réponse fréquentielle du canal 1 à trois trajets (3D)

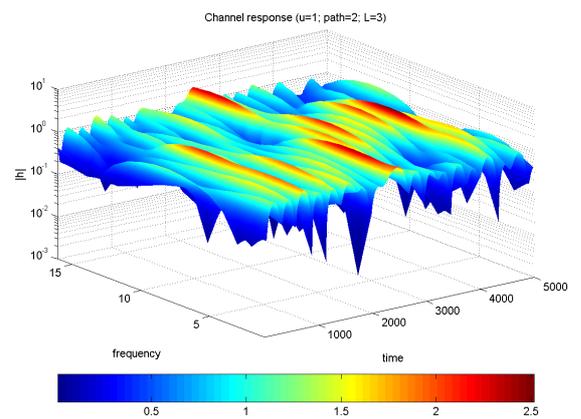


Figure 124 : Réponse fréquentielle du canal 2 à trois trajets (3D)



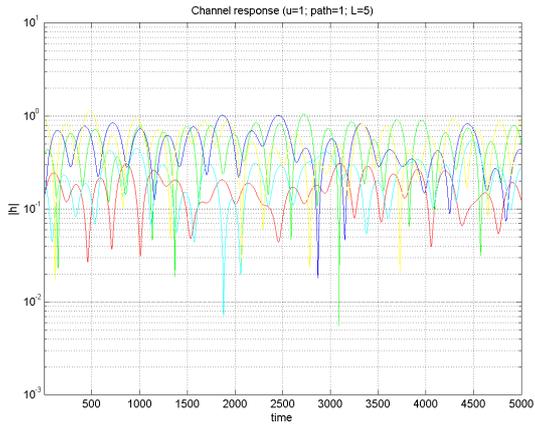


Figure 125 : Réponse temporelle du canal 1 à cinq trajets

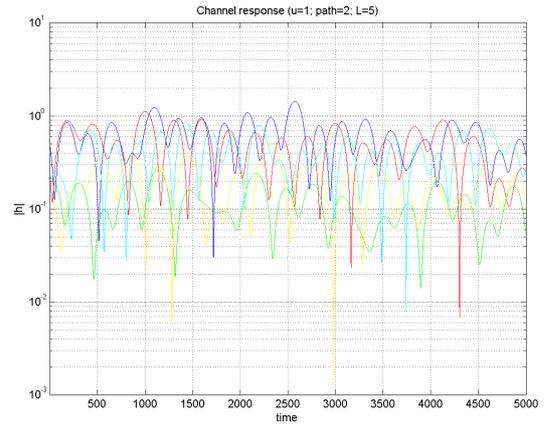


Figure 126 : Réponse temporelle du canal 2 à cinq trajets

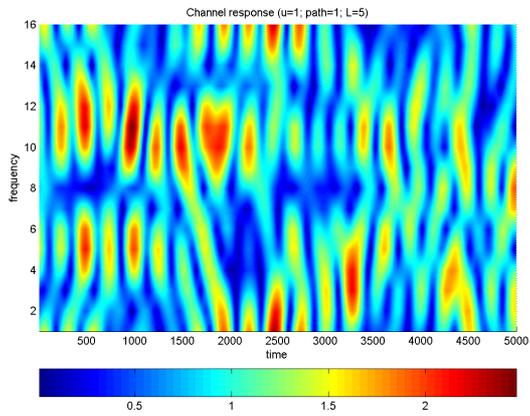


Figure 127 : Réponse fréquentielle du canal 1 à cinq trajets (2D)

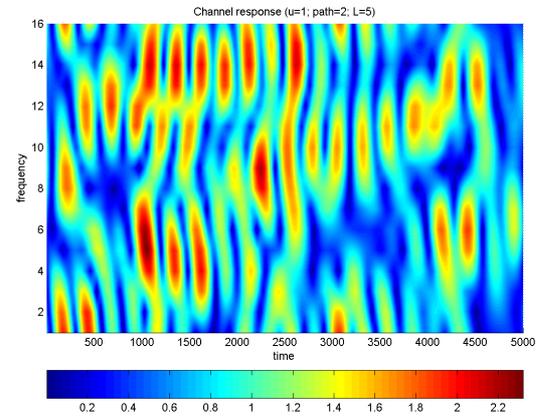


Figure 128 : Réponse fréquentielle du canal 2 à cinq trajets (2D)

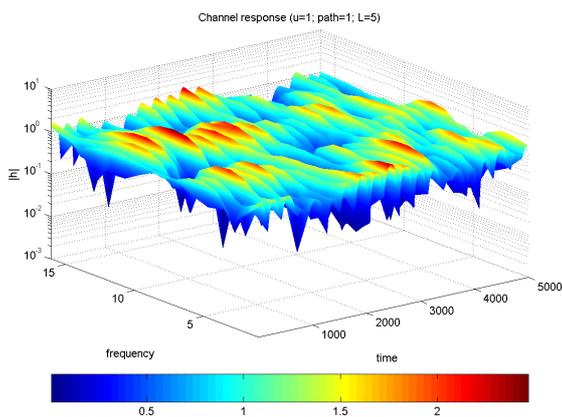


Figure 129 : Réponse fréquentielle du canal 1 à cinq trajets (3D)

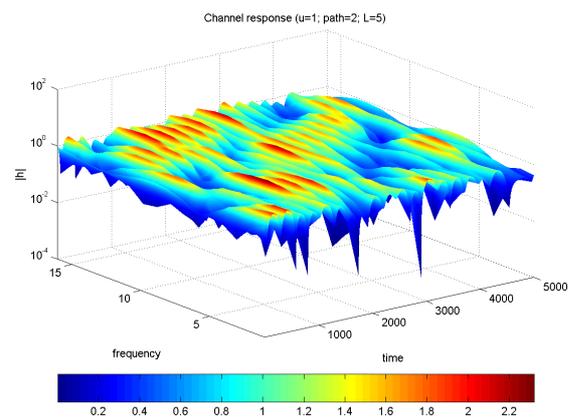


Figure 130 : Réponse fréquentielle du canal 2 à cinq trajets (3D)



---

## Bibliographies

---

- [1] Berrou, C., Glavieux, A., and Thitimajshima, P. "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes". In *Proc. 1993 IEEE International Conf. on Communications*, Geneva, Switzerland, 1993, pp. 1064–1070.
- [2] Berrou, C., and Glavieux, A. Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo-codes. *IEEE Trans. on Communications*, vol. 44, no 10, pp 1261–127, Oct. 1996
- [3] R. G. Gallager, "Low-Density Parity-Check Codes". *IRE Trans. On Information*, vol. 8, pp. 21-28, Jan. 1962.
- [4] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*. Cambridge, MA, M.I.T. Press, 1963.
- [5] D. J. C. MacKay and R. M. Neal, "Near Shannon limit performance of low density parity check codes," *Electron. Lett.*, vol. 32, no. 18, pp. 1645–1646, Aug. 1996.
- [6] D. J. C. MacKay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 399–431, Mar. 1999.
- [7] Eric W. Weisstein. "NP-Problem." From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/NP-Problem.html>
- [8] Eric W. Weisstein et al. "Polynomial Time." From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/PolynomialTime.html>
- [9] Eric W. Weisstein. "NP-Complete Problem." From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/NP-CompleteProblem.html>
- [10] Eric W. Weisstein. "NP-Hard Problem." From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/NP-HardProblem.html>
- [11] M. C. Davey, *Error Correction using Low Density Parity Check Codes*, Ph.D thesis, Inference Group, Cavendish Laboratory, University Of Cambridge, Dec 1999
- [12] R. M. Tanner, "A recursive approach to low complexity codes", *IEEE Trans. On Info. Theory*, vol 27, no 5, pp 533-547, Sept. 1981
- [13] N. Wiberg, *Codes and Decoding on General Graphs*, Ph.D thesis, Dept. of Electrical Engineering, Linköping, Sweden, 1996
- [14] J. Chen and M. P. C. Fossorier, "Near optimum universal belief propagation based decoding of low-density parity check codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 406-414, Mar. 2002.
- [15] M. G. Luby, M. Mitzenmacher, M. A. Shokrollahi and D.A. Spielman, "Improved low density parity check codes using irregular graphs and belief propagation", *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, page 117, 1998
- [16] M. G. Luby, M. Mitzenmacher, M. A. Shokrollahi, D.A. Spielman and V. Stemann, "Practical loss-resilient codes", *29<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 1997

- [17] B. Lu, Guosen Yue, Xiaodong Wang, "Performance analysis and design optimization of LDPC-coded MIMO OFDM systems", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol 52, no. 2, pp 348-361, Feb. 2004
- [18] JPL Turbo code performances, <http://www331.jpl.nasa.gov/public/TurboPerf.html>, Aug. 1996
- [19] Matthew C. Davey Website, <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mcdavey/>
- [20] P. Dempster, N. M.Laird, and D. B.Rubin, "Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *J. Roy. Statist. Soc.*, vol. 39, pp. 1-17, 1977.
- [21] M. Feder, E. Weinstein, "Optimal multiple source location estimation via the EM algorithm", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP85*, vol. 10, pp 1762-1765, Apr 1985
- [22] G. J. McLachlan and T.Krishnan, *The EM Algorithm and Extensions*: John Wiley & Sons Inc., 1997.
- [23] C. F. J. WU, "On the convergence properties of the EM algorithm", *Annals of Statistics*, vol 11, pp 95-103, 1983
- [24] M. Feder and E. Weinstein, "Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 36, pp. 477-489, Apr. 1988.
- [25] H. L. Van Trees, *Detection Estimation and Modulation Theory, Part I*, New York, Wiley, 1968
- [26] J. E. Ehrenberg, T. E. Ewart, and R. D. Morris, "Signal processing techniques for resolving individual pulses in multipath signal", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 63, no. 6, pp. 1861-1865, 1978
- [27] J. A. Fessler and A. O.Hero, "Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 2664-2677, Oct. 1994.
- [28] Y. Xie and C. Georghiadis, "Two EM-type channel estimation algorithms for OFDM with transmitter diversity," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, pp. 106-115, Jan. 2003.
- [29] Y. Li, N. Seshadri, and S. Ariyavisitakul, "Channel estimation for OFDM systems with transmitter diversity in mobile wireless channels", *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 17, pp. 461-471, Mar. 1999.
- [30] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space time codes for high rate data wireless communication : performance analysis and code construction", *IEEE Tans. Inform. Theory*, vol. 44, pp 744-765, Mar. 1998
- [31] Leila Azizi, "Contribution à l'étude des systèmes de transmission multi-antennes (codage spatio-temporel) et des turbo-codes associés à des modulations à haute efficacité spectrale", *Thèse de doctorat*, UMOP/GESTE, Université de Limoges, 2004
- [32] V. Tarokh, A. Naguib, N. Seshadri and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communications : Performance criteria in the presence of channel estimation errors,mobility and multipaths", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 199-207, Feb. 1999.
- [33] S. M. Alamouti, "A simple transmitter diversity scheme for wireless communications", *IEEE J. Select. Areas. Commun.*, vol. 16, pp. 1451-1458, Oct. 1998.

- 
- [34] V. Tarokh, H. Jafarkhani and A. R. Calderbank, "STBC from Orthogonal Designs", *IEEE Trans. Inform Theory*, vol. 45, pp. 1456-1467, July 1999.
- [35] V. Tarokh, H. Jafarkhani and A. R. Calderbank, "Space-Time Block Coding for wireless communications : Performance results", *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol.17, pp. 451-460, Mar. 1999.
- [36] E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels", *AT&T-Bell Laboratories Internal Tech. Memo.*, June 1995.
- [37] H. Bölcskei and A. J. Paulraj, "Space-frequency codes for broadband fading channels," in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory, Washington, DC*, June 2001.
- [38] G. Bauch, "Space-time Block Codes Versus Space-frequency Block Codes", *Proc. of IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, Jeju, Korea, April 22-25, 2003.
- [39] S. Kaiser, "Space frequency block codes and code division multiplexing in OFDM systems", *GLOBECOM 2003*, Dec. 2003.
- [40] Eric W. Weisstein. "Moore-Penrose Matrix Inverse." From [MathWorld--A Wolfram Web Resource](http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html). <http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html>
- [41] Ayman F. Naguib, "Combined Interference Suppression and Frequency Domain Equalization for Space-Time Block Coded Transmission", *ICC2003*, May 2003
- [42] S. Kaiser, "Multi-Carrier CDMA Mobile Radio Systems - Analysis and Optimization of Detection, Decoding, and Channel Estimation", *Ph.D Dissertation*, VDI-Verlag, Fortschritt-Berichte VDI, Düsseldorf, 1998
- [43] Z. Liu, Y. Xin, G.B. Giannakis, "Space Time Frequency Coded OFDM Over Frequency Selective Fading Channels", *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 50 pp 2465-2476, Oct. 2002
- [44] Suto, K. Ohtsuki, T. Performance evaluation of space-time-frequency block codes over frequency selective fading channels, *Proceedings of IEEE VTC 2002-Fall. 2002*, vol 3, pp 1466- 1470
- [45] Ralf Koetter, Andrew C. Singer and Michael Tüchler, "Turbo Equalization", *IEEE Signal Processing Magazine*, pp 67-80, Jan 2004
- [46] Ben Lu, Xiaodong Wang and Krishna R. Narayanan, "LDPC-Based Space-Time Coded OFDM Systems Over Correlated Fading Channels: Performance Analysis and Receiver Design", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 50, No. 1, pp 74-88, Jan 2002
- [47] M.J. Syed, G.R Mohammad-Khani, J.P. Cances And V. Meghdadi, "LDPC-Based Space-Time Coded OFDM Systems Performances Over Correlated Fading Channels", *9th IEEE Asia Pacific Conferences On Communications*, Sept 2003, Penang, Malaysia
- [48] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [49] S. G. Wilson, *Digital Modulation and Coding*. New York: Prentice - Hall, 1996
- [50] Y. Li, L. J. Cimini, and N. R. Sollenberger, "Robust channel estimation for OFDM systems with rapid dispersive fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, pp. 902-915, July 1998.

- [51] Y. Li and N. R. Sollenberger, "Adaptive antenna arrays for OFDM systems with cochannel interference", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 217–229, Feb. 1999.
- [52] Baum, K.L.; Thomas, T.A.; Vook, F.W.; Nangia, V, "Cyclic-prefix CDMA: an improved transmission method for broadband DS-CDMA cellular systems", *WCNC 2002*, March 2002
- [53] Vook, F.W.; Thomas, T.A.; Baum, K.L, " Cyclic-prefix CDMA with antenna diversity", *VTC Spring 2002*, May 2002
- [54] Ayman F. Naguib, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space time coding and signal processing for high data rate wireless communication: Increasing data rates on wireless channels", *IEEE Signal Processing Mag.*, May 2000, pp 79-92
- [55] A. Stamoulis, N. Al-Dhahir and A.R. Calderbank "Further results on interference Cancellation for Space-Time Block Coded Systems", *Proc. Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Nov. 2001
- [56] D. Varshney, D. Arumugam, V. Vijayaraghavan, S. Srikanth, "A new detection method for space-time block coded multi-user system", *The 9th Asia-Pacific Conference on Communications, APCC 2003*. vol. 1, pp 124 - 128, 21-24 Sept 2003, Penang, Malaysia
- [57] Zhiqiang Liu; Giannakis, G.B., "Space-time block-coded multiple access through frequency-selective fading channels" , *IEEE Trans. On Comm.* Vol 49-6, pp: 1033-1044, June 2001
- [58] G. B. Giannakis, Z. Wang, A. Scaglione, and S. Barbarossa, "AMOUR—Generalized multicarrier transceivers for blind CDMA regardless of multipath," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 2064-2076, Dec. 2000.
- [59] Z. Wang and G. B. Giannakis, "Wireless multicarrier communications: Where Fourier meets Shannon," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 17, pp. 29-48, May 2000.
- [60] Zigang Yang, Ben Lu, and Xiaodong Wang, "Bayesian Monte Carlo Multi-user Receiver for Space-Time Coded Multi-carrier CDMA Systems", *IEEE Journal On Selected Areas In Communications*, vol. 19-8, pp. 1625-1637, August 2001
- [61] M. J. Syed, G. Ferré, J. P. Cances, V. Meghdadi, G. R. M. Khani, Performances of LDPC based multi-user space time diversity system design for uplink multi-carrier CDMA, *IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communications Systems (ISPACS)* , 18-19 Nov 2004, Seoul, S. Korea
- [62] M. J. Syed, G. Ferré, J. P. Cances, V. Meghdadi, G. R. M. Khani, Multi-user space time diversity system design for uplink multi-carrier CDMA, *IEEE International Conference On Signal Processing And Communications (SPCOM)*, 11-14 December 2004, Bangalore, India
- [63] M. J. Syed, V. Meghdadi, G. Ferré, J. P. Cances, G. R. M. Khani, Multi-user detection in OFDM space time block code for high rate uplink application, *IEEE WCNC 2005*
- [64] S. Kaiser, "OFDM Code-Division Multiplexing in Fading Channels", *IEEE Tran. on Communications*, vol. 50, pp 1266-1273, August 2002.
- [65] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3<sup>rd</sup> edition, John Hopkins University Press, 1996

- 
- [66] M.J Syed, G. Ferré, V. Meghdadi, J.P. Cances, “ Performances of LDPC based multi-user space frequency diversity system design for uplink multi-carrier CDMA”, *9<sup>th</sup> International Conference On Communication Systems*, Sept. 2004, Singapore
- [67] Eva Sjöström, *Singular Value Computations for Toeplitz Matrices*, Licentiate Thesis no. 554, , Department of Mathematics, Linköping University, 1996
- [68] P. J. Davis. *Circulant Matrices*. John Wiley & Sons, 1979
- [69] C. F. Van Loan. *Computational Framework for the Fast Fourier Transform*. SIAM, Philadelphia, 1992.