UNIVERSITÉ DE LIMOGES
ÉCOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé
FACULTÉ des sciences et techniques

Laboratoire d'**A**rithmétique, de **C**alcul formel et d'**O**ptimisation

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue

par

Mériem HERAOUA

le 15 juillet 2004

Cogèbre binomiale et calcul ombral des opérateurs différentiels

Thèse dirigée par Alain SALINIER

Jury

Rapporteurs :

Daniel BARSKY	Directeur de Recherche CNRS Paris 13
Bertin DIARRA	Chargé de Recherche CNRS Clermont-Ferrand

Examinateurs :

Moulay BARKATOU	Professeur à l'université de Limoges
Gilles CHRISTOL	Professeur à l'université Paris 6
François LAUBIE	Professeur à l'université de Limoges
Abbas MOVAHHEDI	Professeur à l'université de Limoges
Alain SALINIER	Maître de conférences HDR à l'université de Limoges

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon directeur de thèse Alain Salinier pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidée à progresser.

Je tiens également à remercier Bertin Diarra pour tous ses conseils, ses nombreuses suggestions et d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Je suis honorée que Daniel Barsky ait bien voulu être rapporteur de cette thèse.

Je voudrais également remercier Gilles Christol qui me fait l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie aussi Moulay Barkatou, François Laubie, et Abbas Movahhedi d'avoir accepté de prendre part à ce jury.

Je voudrais associer à ces remerciements Benali Benzaghou, Professeur à l'Université d'Alger qui m'a initiée au calcul ombral en 1998.

Je remercie les membres du LACO et plus particulièrement Sylvie Laval, Patricia Vareille et Yolande Vieceli pour leur disponibilité et leur gentillesse. Je remercie également Martine Guerletin et Nadine Tchéfranoff que j'ai pu côtoyer au cours de ces années.

Je remercie également les doctorants, Laurent Dubreuil, Nicolas Le Roux, Ayoub Otmani et Philippe Segalat pour leurs commentaires, leurs critiques, leur disponibilité et pour la bonne ambiance qui a régné dans notre bureau durant ces années. Je remercie Thomas Cluzeau et Rachid Bouchenna pour leurs remarques constructives. Je remercie Anne Bellido et Abdelkader Necer avec qui j'ai enseigné pendant plusieurs années et dont je garde un très bon souvenir. Je remercie Matthieu Le Floc'h et Mikaël Lescop pour leur gentillesse et leurs encouragements.

Je remercie tous mes amis et plus particulièrement Hayet et Nada qui m'ont toujours encouragée.

Je remercie enfin mes parents que j'aime tant et toute ma famille.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans citer mon époux Karim qui partage ma vie depuis très longtemps. Je voudrais le remercier pour son amour et sa patience.

Table des matières

Avant-propos

Cette thèse se compose de deux parties qui portent sur deux sujets étroitement liés, mais qui peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre. La deuxième partie reprend d'ailleurs notre article [23].

Première partie

Calcul ombral des opérateurs différentiels

Introduction

La carrière de John Blissard (1803-1875), prêtre de l'Église d'Angleterre, s'est déroulée essentiellement dans le village de Hampstead Norreys [4]. Elle lui a laissé le temps de mettre au point une méthode symbolique d'investigation (ces mots paraphrasent une expression de [20]) qu'il appelait « Representative Notation ». Le but de cette méthode était de déterminer des identités satisfaites par certaines suites de nombres, notamment les nombres de Bernoulli, d'Euler, de Genocchi, de Lucas, ... Blissard a publié sur ce sujet au moins douze articles illustrant sa méthode, cités par Roman et Rota dans [44].

Une trentaine d'années plus tard, sans faire référence au travail de Blissard, Édouard Lucas a publié dans son ouvrage « Théorie des Nombres » ([32]), paru en 1891, une méthode identique qu'il a nommée « la méthode symbolique ». Encore une quarantaine d'années plus tard, Eric Temple Bell a repris le calcul symbolique de Lucas qu'il a appelé aussi « calcul ombral » [1, 2, 3]. Ce nom de calcul ombral est tiré de la notion d'ombre attribuée à Sylvester par Roman et Rota [44, page 96]. Dans la conception des premiers auteurs, l'ombre d'une suite $(\alpha_n)_n$ était un symbole α que l'on manipulait suivant des règles formelles qui n'étaient pas logiquement consistantes.

Le premier travail pour fonder rigoureusement le calcul de Blissard n'a été publié qu'en 1940 par E. T. Bell [5]. Cette première tentative ne l'a pas conduit à reconnaître que le calcul ombral se ramène en fait à un calcul dans le dual d'une algèbre de polynômes. Ce fait, en revanche, se trouve à la base des travaux de Gian-Carlo Rota et de son école [41, 42, 43], qui ont fondé le calcul ombral « moderne ». L'article fondateur de cette théorie a été publié en 1973 [45]. Gian-Carlo Rota semble avoir été influencé par l'interprétation semblable du calcul de Heaviside qui a été introduite vers 1950 par la théorie des distributions de Laurent Schwartz. Signalons que dans les années 1990, Rota avec d'autres coauteurs [46, 47] ont proposé un autre fondement rigoureux du calcul ombral, plus proche du calcul ombral de Blissard, Lucas et Bell.

Dans la première conception de Gian-Carlo Rota, l'ombre de la suite $(\alpha_n)_n$ devenait la forme linéaire sur l'algèbre des polynômes qui au monôme x^n associe α_n, c'est ainsi que plusieurs auteurs contemporains définissent l'ombre d'une telle suite [44, page 96][26]. Mais il est apparu de plus en plus clairement que le calcul ombral dépend d'une structure de cogèbre (et même d'algèbre de Hopf) de l'algèbre des polynômes ([25, 37, 11]). Dans ce contexte, il semble naturel de considérer la notion de forme linéaire comme la primitive à partir de laquelle les autres objets doivent être introduits et ceci nous amène dans le présent mémoire à renverser la perspective classique comme le faisait déjà Ray [37] et à considérer plutôt la suite $(\alpha_n)_n$ comme l'ombre de la forme linéaire associée.

Le calcul ombral classique « moderne » développé par l'école de Gian-Carlo Rota a fait l'objet d'une monographie de Steven Roman [39] qui peut servir de référence pour cette théorie. Nous allons maintenant en décrire les principales idées.

L'objet de base dans [39, 44] est un corps commutatif C dont la caractéristique est nulle. Le calcul ombral de Rota vit dans ce qu'ils appellent « l'algèbre ombrale ». En termes naïfs, cette algèbre n'est autre que l'algèbre $C[[t]]$ des séries entières formelles, mais tout repose sur l'observation que ses éléments peuvent s'interpréter de trois façons, à savoir bien sûr comme des séries formelles, mais aussi comme des formes linéaires sur le C-espace vectoriel $C[x]$ des polynômes univariés à coefficients dans le corps C, et enfin comme des endomorphismes du C-espace vectoriel $C[x]$. En effet Roman dans [39] montre que l'algèbre des séries formelles s'identifie à l'espace dual du C-espace vectoriel $C[x]$ lorsque l'on associe à une forme C-linéaire L sur $C[x]$ la série

$$\sum_{k\geq 0} L(x^k)\frac{t^k}{k!} \ ,$$

appelée *série indicatrice de L*. Par conséquent, l'espace dual se trouve muni d'une structure de C-algèbre par transfert de la structure de l'algèbre des séries formelles. La troisième interprétation de l'algèbre ombrale était déjà documentée dans [9, chapitre VI, page 130]. Elle s'obtient en faisant agir la série $t \in C[[t]]$ sur $C[x]$ par la dérivation usuelle, qui est évidemment un endomorphisme ponctuellement nilpotent du C-espace vectoriel $C[x]$.

Dans la terminologie du calcul ombral moderne de Rota et Roman, un endomorphisme C-linéaire de $C[x]$ est appelé un *opérateur*. Un problème naturel est alors de caractériser les opérateurs qui peuvent être obtenus de cette façon à l'aide des séries formelles. La réponse à cette question se trouvait dans Bourbaki [9] : ces opérateurs sont exactement ceux qui permutent à la dérivation, ou encore ceux qui permutent aux opérateurs de translation. Ils sont appelés *opérateurs de composition* par Bourbaki et *opérateurs shift-invariants* par Roman et Rota [44]. On retrouve ce terme d'opérateur shift-invariant dans plusieurs ouvrages, notamment dans un article de A. Di Bucchianico [16], où l'auteur introduit le calcul ombral dans le style de Rota et de son école [45].

Parmi les opérateurs de composition, ceux associant au monôme x un polynôme constant non nul portent le nom d'*opérateurs delta* ([16, page 4]). Dans l'identification des opérateurs de composition aux formes linéaires, une forme linéaire qui correspond à un opérateur delta est appelée *forme delta*. On montre que L est une forme delta si et seulement si la famille $(L^n)_{n\geq 0}$ est une base topologique de l'algèbre ombrale ([44, page 106]). Donc si L est une forme delta et M une forme linéaire inversible, la famille $(ML^n)_{n\geq 0}$ est aussi une base topologique de l'algèbre ombrale. Ceci conduit à la notion capitale de *suites de Sheffer* (ce nom rend hommage aux travaux de Sheffer [49], dans la classification des suites de polynômes ; voir aussi [36]) : une suite $(s_n)_{n\geq 0}$ de polynômes dans $C[x]$ est une suite de Sheffer s'il existe une forme linéaire inversible M et une forme delta L tel que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on ait

$$ML^k(s_n) = \begin{cases} n! & \text{si} \quad k = n\,; \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n\,. \end{cases} \tag{1}$$

L'intérêt principal du calcul ombral est qu'il fournit une méthode systématique d'étude des suites de Sheffer. C'est qu'écrit Roman [39, page 2] : le calcul ombral classique moderne peut être décrit comme une étude systématique de la classe des suites de Sheffer, au moyen des techniques les plus simples de l'algèbre moderne. C'est ainsi qu'ont été décrites les propriétés de nombreuses suites de polynômes à coefficients complexes, dont les plus classiques sont les polynômes de Bernoulli (peut-être les plus importants historiquement), les polynômes de Hermite, les polynômes de Laguerre, les polynômes d'Abel, etc. Ces propriétés ont eu des applications très importantes en Analyse, telle que la généralisation des formules d'Euler-Mac Laurin donnée par Bourbaki [9] sous le nom de « développement taylorien généralisé ».

Plusieurs travaux ont été réalisés pour étendre les méthodes et résultats du calcul ombral à d'autres situations.

Le problème de l'extension à un anneau de polynômes en une variable sur un corps de base infini de caractéristique $p > 0$ a été abordé par L. Ferrari [19]. À l'instar de nombreuses présentations du calcul ombral classique, celui-ci commence par définir la notion d'opérateur delta. Dans le cadre classique, comme nous l'avons dit ci-dessus, il s'agit d'un opérateur qui, d'une part, commute aux translations et qui, d'autre part, donne au polynôme x une image qui est un polynôme constant non nul. Pour définir une notion d'opérateur delta, L. Ferrari ajoute à ces conditions , une autre condition très restrictive qui depend fortement de la caractéristique p de son corps de base. Il arrive ainsi à la notion de « basic polynomial sequences » analogue à la notion classique de suites associées (suites de Sheffer particulières obtenues en prenant dans la formule (1) pour M la forme linéaire ε telle que $\varepsilon(x^n) = 0$ si $n > 0$ et $\varepsilon(1) = 1$). Malheureusement, ces suites introduites par Ferrari ne sont même plus des suites de type binomial, contrairement au cas classique ; on rappelle [39, Theorem 2.4.7, page 26] qu'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes est dite de type binomial si $\deg p_n = n$ pour tout entier naturel n, et si de plus elle satisfait l'identité binomiale

$$p_n(x + y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y). \tag{2}$$

Dans un article paru en 1992, Van Hamme [54] a abordé un autre problème qui est l'extension du calcul ombral classique à un anneau de fonctions p-adiques. Van Hamme montre deux théorèmes importants [51] concernant des opérateurs linéaires continus de l'algèbre des fonctions continues sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques. Par analogie avec le calcul ombral classique, ces opérateurs considérés par Van Hamme sont appelés des opérateurs delta. Dans la démonstration de ces deux théorèmes, Van Hamme utilise très souvent le fait qu'il travaille sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$, de sorte que ses deux théorèmes sont liés étroitement au nombre premier p.

Ann Verdoodt a montré en 1996 [51] deux théorèmes analogues aux théorèmes de Van Hamme. Elle remplace alors l'opérateur de translation par un opérateur aux q-différences, déjà considéré par Roman dans [41, 43]. Elle obtient ainsi un analogue du calcul q-ombral [41, Sect.11] de Roman dans un contexte d'analyse p-adique.

Diarra prolonge les résultats de Van Hamme et Verdoodt en décrivant complètement [14] les endomorphismes continus de la cogèbre des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ et par ailleurs en étudiant aussi [15] la structure d'algèbre de Hopf de l'espace des fonctions continues sur l'anneau $\mathbb{F}_q[[t]]$ des séries entières formelles à coefficients dans un corps fini. Un point intéressant du premier article est le fait que tout endomorphisme de la cogèbre étudiée s'interprète à l'aide d'une substitution par une fonction convenablement choisie. Une interprétation analogue a lieu dans le cadre du calcul ombral classique, mais cette interprétation n'est pas généralisable sans précaution, en caractéristique quelconque, ainsi que nous l'avons montré dans le théorème 4.11.2.

L'objet du présent mémoire est d'étendre le calcul ombral classique moderne dans deux directions à la fois. D'une part, nous nous affranchirons de toute hypothèse restrictive sur la caractéristique et nous pourrons remplacer le corps de base C par un anneau $\mathcal{R}$ associatif, commutatif et unifère de caractéristique quelconque ; d'autre part, nous remplacerons l'anneau de polynômes $C[x]$ par un type plus large d'« extensions d'Ore », à savoir un anneau d'opérateurs différentiels formels construit à l'aide d'une dérivation ∂ de $\mathcal{R}$. Il est important de remarquer que, lorsque cette dérivation est nulle, l'anneau d'opérateurs différentiels formels associé n'est autre que l'algèbre $\mathcal{R}[x]$ des polynômes en une variable, de sorte que notre exposé contient strictement le cas classique. Inversement, l'analogie bien connue des polynômes en une variable avec les opérateurs différentiels formels nous a conduit à vouloir étudier la possibilité de développer un calcul ombral avec ces opérateurs différentiels.

Présentons maintenant une synthèse de nos principaux résultats. On note par $\mathcal{D} = \mathcal{R}[x, \partial]$, l'anneau des opérateurs différentiels formels. Il s'agit là d'un objet très classique, présenté par exemple par [27]. Si on ne fait aucune hypothèse relative à la caractéristique, le rôle joué dans le calcul ombral classique moderne de Rota et alii par l'algèbre des séries entières formelles en une variable va être rempli par l'algèbre $\mathcal{H}$ des *séries de Hurwitz formelles à coefficients dans* $\mathcal{R}$, qui a été récemment étudiée par Keigher et Pritchard [29]. Rappelons que les éléments de $\mathcal{H}$ sont les suites $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}$; l'addition dans $\mathcal{H}$ se fait terme à terme, la multiplication est donnée par la formule bien connue de convolution de Hurwitz (voir (4.3)), le morphisme de

$\mathcal{R}$ dans $\mathcal{H}$ qui à r dans $\mathcal{R}$ associe la suite $(r, 0, 0, ...)$ fait de $\mathcal{H}$ une $\mathcal{R}$-algèbre. En effet, nous avons constaté, comme on l'avait déjà remarqué [11, 37], que le calcul ombral dépend de l'existence d'une structure de cogèbre sur $C[x]$ donnée par la comultiplication $\Delta : C[x] \longrightarrow C[x] \otimes_C C[x] \simeq C[x, y]$ telle que $\Delta(p) = p(x + y)$. Cette cogèbre a été étudiée en particulier par Joni et Rota [25] qui l'appellent la *cogèbre binomiale univariée*. Le calcul ombral que nous proposons dans le cas général utilise de la même façon une structure analogue de $\mathcal{R}$-cogèbre sur l'anneau $\mathcal{D}$, également isomorphe à la cogèbre binomiale univariée, qui apparaît ainsi comme l'objet primordial dans nos recherches. Cette cogèbre sera notée $\mathcal{D}_{\text{cog}}$. Or, il se trouve que l'algèbre duale de la cogèbre binomiale univariée est isomorphe en général à l'algèbre des séries de Hurwitz formelles, et l'intervention dans le cas classique des séries entières formelles n'est du qu'à l'isomorphisme entre l'algèbre $C[[t]]$ et l'algèbre $\mathcal{H}$ des séries de Hurwitz formelles à coefficients dans C, isomorphisme qui a lieu si C est un corps de caractéristique nulle, mais pas en général (par exemple, sur un anneau intègre C de caractéristique $p > 0$, l'algèbre $C[[t]]$ est intègre, alors que l'algèbre des séries de Hurwitz formelles possède des éléments nilpotents). Tout ceci explique que l'algèbre ombrale dans notre exposé va intervenir sous trois aspects, comme dans le cas classique, mais en modifiant certains d'entre eux. Plus précisément, il y a d'une part l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$, d'autre part l'algèbre $\mathcal{H}$ des séries de Hurwitz formelles, enfin l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition, c'est-à-dire des endomorphismes du $\mathcal{D}_{\text{cog}}$-comodule $\mathcal{D}$. Ces trois algèbres sont isomorphes : par exemple (proposition 4.2.2) $\mathcal{D}^*$ s'identifie à $\mathcal{H}$ en associant à la forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$ la série de Hurwitz formelle $\widehat{\varphi} = (\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$, que nous appelons l'ombre de φ. L'identification de $\mathcal{D}^*$ avec $\mathcal{C}$ (proposition 3.4.1) est un cas particulier d'un résultat général en théorie des cogèbres, pour lequel nous renvoyons à [48, proposition 1, page 39].

Un apport important des dernières années concernant l'algèbre des séries de Hurwitz formelles est la construction par Keigher et Pritchard d'un système de puissances divisées sur cette algèbre. Il existe donc sur l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ un système correspondant de puissances divisées, que nous construisons directement dans le paragraphe 4.8. Une base topologique de l'algèbre duale est alors constituée par les puissances divisées $\left(\delta^{[n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une forme linéaire particulièrement simple δ, qu'on appelle le *générateur* de $\mathcal{D}^*$ (ce nom de générateur est celui employé par Roman et Rota [44, page 105]). Dans l'isomorphisme de $\mathcal{D}^*$ avec $\mathcal{C}$, ces puissances divisées $\delta^{[n]}$ correspondent à des opérateurs de composition D_n, que nous appelons les *opérateurs hyperdifférentiels* (cette terminologie est celle employée dans un cas particulier par K. Conrad [13]). La caractérisation des opérateurs de composition par leur commutation à une dérivation n'est plus valable dans notre contexte (remarque 3.4.10). Par contre, le théorème 3.4.5 caractérise les opérateurs de composition par leur commutation à tous les opérateurs hyperdifférentiels. De même, la coïncidence entre opérateurs de composition et opérateurs shift-invariants, résultat classique, n'est plus vraie dans le contexte plus général où nous nous plaçons : un exemple est donné sur un corps fini par le morphisme de Frobenius qui est shift-invariant, mais qui ne commute pas aux opérateurs hyperdifférentiels (remarque 3.4.11).

La notion d'opérateur delta, centrale dans certains exposés récents du calcul ombral [16, 38], ne figure pas dans notre mémoire. En effet, la correspondance isomorphe entre les formes linéaires et les opérateurs de composition nous a permis de la remplacer par celle de forme delta, déjà présente dans [44] et plus appropriée dans notre contexte. Le lecteur, s'il le souhaite, pourra retranscrire nos résultats écrits en termes de formes delta en faisant intervenir les opérateurs delta. Il n'y trouvera pas de difficulté.

Grâce aux formes delta et aux puissances divisées, les suites de Sheffer d'opérateurs différentiels formels peuvent être définies de manière complètement analogue au calcul ombral classique (Définition 5.3.1). Notre travail consiste donc à étudier les propriétés de ces suites de Sheffer.

Dans cette étude, il est utile d'identifier les suites d'opérateurs différentiels formels à certaines applications de $\mathcal{D}$ dans lui-même de la façon suivante. L'anneau de base $\mathcal{R}$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels formels. Mais, comme l'anneau $\mathcal{D}$ n'est pas en général commutatif, ceci conduit à deux structures de $\mathcal{R}$-module sur $\mathcal{D}$, notées ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{\diamond}$. Nous avons choisi de privilégier le module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ obtenu en faisant agir $\mathcal{R}$ par multiplication à gauche. En conséquence, nous réservons le terme d'opérateur aux endomorphismes de ce module. La donnée d'une base du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, constituée par les puissances d'un élément $x \in \mathcal{D}$, permet d'identifier les suites d'éléments de $\mathcal{D}$ aux opérateurs, au moyen d'un isomorphisme que nous notons Θ. Dans cette correspondance, les suites de Sheffer vont s'associer à un type particulier d'opérateur : les opérateurs de Sheffer. Pour ces opérateurs, nous avons proposé une définition nouvelle : les opérateurs de Sheffer sont les éléments du groupe engendré par les opérateurs de composition bijectifs et les *opérateurs ombraux*. Contrairement au cas classique, les opérateurs ombraux peuvent être définis, non pas comme les automorphismes de la cogèbre, mais seulement comme les automorphismes de $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ dont le transposé commute aux puissances divisées (propositions 4.8.8 et 4.11.4). Grâce à cette restriction, nous avons pu obtenir, dans le cas général de la caractéristique quelconque, des résultats qui se spécialisent au cas de la caractéristique nulle en redonnant exactement les énoncés classiques. Ceci distingue nos résultats de ceux de Ferrari évoqués ci-dessus. Par exemple, nos suites associées (suites d'opérateurs différentiels formels correspondant aux opérateurs ombraux) sont bien des suites de type binomial (ce dernier terme devant être ici interprété à l'aide de la structure de cogèbre), contrairement aux « basic polynomial sequences » de Ferrari.

Une particularité du nouveau calcul ombral que nous proposons ici tient à la non commutativité de l'anneau $\mathcal{D}$. En fait, il existe une involution (opérateur d'adjonction) Λ de $\mathcal{D}$ qui échange les deux structures de $\mathcal{R}$-modules de $\mathcal{D}$. Par conséquent, le conjugué par Λ d'un opérateur, c'est-à-dire d'un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ est un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^{\diamond}$. Il se trouve que le conjugué par Λ d'un opérateur de composition est un opérateur, également de composition (corollaire 3.4.6). Ceci donne donc une transformation de $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^*$, que nous appelons la transformation $\vee$, qui n'est pas $\mathcal{R}$-linéaire. Ceci signifie qu'il y a une transformation involutive $\gamma \longmapsto \gamma^\vee$ des formes linéaires, donnée par une formule relativement compliquée (voir (4.9)), qui reste très peu transparente tant que l'on n'a pas utilisé l'identification de $\mathcal{D}^*$ à $\mathcal{C}$. L'existence de cette transformation non triviale signale sans doute la possibilité d'intéressantes applications. En lien avec ce type de considérations, nous observons que, du fait de la non-commutativité de l'anneau $\mathcal{D}$, la dérivée de Pincherle se dédouble en deux dérivations (paragraphe 2.4) de l'algèbre des opérateurs, qui stabilisent toutes deux la sous-algèbre des opérateurs de composition. Par conséquent, il existe un calcul de Pincherle des formes linéaires, où il y a deux dérivations de l'anneau $\mathcal{D}^*$ qui commutent entre elles. Nous détaillons les propriétés de ce calcul de Pincherle de l'algèbre ombrale, aussi bien dans la version opérateurs de composition (paragraphe 3.5) que dans la version formes linéaires (paragraphe 4.7). En particulier, chacune des deux dérivées de Pincherle se présente de concert avec une réciproque à droite particulièrement simple, pour laquelle nous proposons le nom d'intégrale de Pincherle (paragraphe 2.5).

La fonction génératrice est classiquement un objet important dans l'étude des suites de polynômes. Nous en proposons une version formelle : à tout opérateur T, ou de façon équivalente à toute suite d'opérateurs différentiels formels, nous associons sa fonction génératrice $\mathfrak{F}_T$ qui est une certaine application, non linéaire, de l'anneau de base $\mathcal{R}$ dans l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ (Définition 5.1.1). Nous proposons, au moins lorsque l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, des caractérisations au moyen de leurs fonctions génératrices, des opérateurs ombraux, des opérateurs de composition, des opérateurs de composition inversibles et des opérateurs de Sheffer. Ces résultats permettent de raisonner sur les suites d'opérateurs différentiels formels au moyen de leurs fonctions génératrices, comme on savait le faire depuis très longtemps pour les suites classiques de polynômes [39].

Enfin, il faut signaler que notre analyse montre que le bon objet qui étend la notion classique de suite de type binomial est l'objet que nous appelons « base de type binomial fort » ou plus simplement « base forte » : cette notion est définie (5.2.10) non seulement par une propriété analogue à la formule (2), mais aussi par la propriété d'être une base du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$, et surtout par une propriété supplémentaire que nous exprimons à l'aide de l'opérateur de décalage de la suite considérée. C'est grâce à cette restriction que nous sommes en mesure de conserver dans notre contexte l'équivalence entre les notions de suite de type binomial, de suite associée et de suite conjuguée qui est l'un des principaux résultats du calcul ombral classique. En particulier, nous en déduisons que si $(p_n)_n$ est une base forte, alors $\deg p_n = n$ (corollaire 5.5.4). Une autre caractérisation des bases fortes au moyen de l'application Θ est qu'elles correspondent exactement aux opérateurs ombraux (proposition

5.2.11). Ceci est lié à la possibilité de caractériser, en vertu de nos propositions 4.11.2 et 4.11.4, parmi tous les automorphismes continus de l'algèbre duale, ceux qui s'obtiennent par substitution à droite par une forme linéaire : ce sont ceux qui commutent aux puissances divisées. Ceci fournit un raffinement du résultat publié par ailleurs [23], qui fait l'objet de la deuxième partie de ce mémoire.

La première partie de notre mémoire est sectionnée en six chapitres, dont nous présentons maintenant les contenus.

Dans le premier chapitre, on présente l'anneau $\mathcal{D} = \mathcal{R}[x, \partial]$ des opérateurs différentiels formels en une dérivation ∂ d'un anneau $\mathcal{R}$. Cet anneau $\mathcal{D}$ est filtré par une suite croissante de sous-groupes $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. L'anneau $\mathcal{D} = \mathcal{R}[x, \partial]$ est caractérisé par une propriété universelle que nous explicitons sous une forme originale. Une application de cette propriété universelle de $\mathcal{D}$ est la possibilité de munir le carré tensoriel du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ d'une structure de $\mathcal{D}$-module à gauche. Deux autres applications utiles dans la suite sont les constructions, d'une part, pour a central dans $\mathcal{R}$, d'opérateurs de translation E^a, et d'autre part de l'adjonction Λ qui est un antiendomorphisme de $\mathcal{D}$.

Le deuxième chapitre étudie la notion d'opérateur. Ces opérateurs forment une $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$. La filtration de $\mathcal{D}$ induit une filtration $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$. En fait $\mathcal{O}_n$ est simplement le groupe des opérateurs dont la restriction à $\mathcal{D}_{n-1}$ est nulle. Pour cette filtration, $\mathcal{O}$ est une algèbre topologique complète. Nous définissons aussi la transformée $\vee$ d'un opérateur : ce n'est pas en général un opérateur, mais un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^{\diamond}$. Un exemple important est fourni par l'opérateur M_x de multiplication à droite par x dont la transformée $M_x^{\vee}$ est la multiplication à gauche par $-x$. Nous étudions ensuite les deux dérivations de Pincherle ∂_1 et ∂_2 de l'anneau $\mathcal{O}$: pour un opérateur T, on pose $\partial_1 T = [T, M_x]$ et $\partial_2 T = [T, M_x^{\vee}]$. On définit et on étudie aussi les deux intégrales de Pincherle $\int_1$ et $\int_2$ qui sont des réciproques à droite respectivement de ∂_1 et ∂_2.

Dans le troisième chapitre, on présente la structure de cogèbre sur $\mathcal{D}$ qui est au fond la structure fondamentale explicative de l'existence d'un calcul ombral des suites d'éléments de $\mathcal{D}$. Nous définissons l'augmentation ε et la comultiplication Δ de cette cogèbre, que nous notons $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$. Un opérateur de composition est alors défini comme un endomorphisme du $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$-comodule $(\mathcal{D}, \Delta)$. Des exemples simples de tels opérateurs sont donnés par les multiplications à gauche et les multiplications à droite par les éléments de $\mathcal{R}$, les opérateurs hyperdifférentiels que nous introduisons à partir de la comultiplication, et enfin par les opérateurs de translation. Ces opérateurs de composition s'organisent en une sous-algèbre $\mathcal{C}$ de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$, isomorphe d'après la théorie générale des cogèbres à l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$. Il en résulte le fait très important que l'algèbre $\mathcal{C}$ est commutative : en particulier, tout opérateur de composition est un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^{\diamond}$ et est shift-invariant (dans le sens qu'il commute à tout opérateur de translation). Une caractérisation des opérateurs de composition est obtenue par la propriété de commutation à tous les opérateurs hyperdifférentiels. Ce critère peut être utilisé pour démontrer des propriétés des opérateurs de composition : stabilité par la transformation $\vee$, interprétation de la topologie de $\mathcal{C}$ comme topologie définie par la norme du sup pour des applications linéaires, le fait qu'un opérateur de composition respecte la filtration de $\mathcal{D}$ et aussi caractérisation des opérateurs de composition bijectifs. La sous-algèbre $\mathcal{C}$ est stable par les dérivations de Pincherle et les intégrales de Pincherle, ce qui permet de montrer l'existence d'un calcul de Pincherle sur $\mathcal{C}$. Nous faisons ensuite une étude des codérivations de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$. La codérivation la plus évidente est l'opérateur M_x de multiplication à droite par x. Nous définissons une *codérivation forte* comme une codérivation S de la forme $S = M_x \circ C$, où C est un opérateur de composition. Cette notion nous permet de définir les *opérateurs ombraux* : ce sont les automorphismes T de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ vérifiant $T1 = 1$ et tels qu'il existe une codérivation forte S satisfaisant la relation $T \circ M_x = S \circ T$. Les opérateurs ombraux forment un groupe noté $\mathcal{G}$. Par ailleurs, le groupe d'Appell $\mathcal{A}$ est défini comme le groupe constitué par les opérateurs de composition bijectifs. On en déduit alors un groupe $\mathcal{S}$, appelé groupe de Sheffer, qui est le groupe engendré par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$.

Le quatrième chapitre utilise ce qui précède pour étudier l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$. Cette étude consiste pour une grande part à transcrire dans $\mathcal{D}^*$ les propriétés de l'algèbre $\mathcal{C}$ obtenues dans le chapitre 3. C'est ainsi que sont présentées la filtration de $\mathcal{D}^*$, la transformation $\vee$ des formes linéaires ainsi que le calcul de Pincherle des formes linéaires. Un fait important est que l'algèbre topologique $\mathcal{D}^*$ a un dual topologique isomorphe à $\mathcal{D}$ (Théorème 4.4.2). Il en résulte que les endomorphismes continus du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$ sont exactement les transposés des opérateurs (corollaire 4.4.3) et que les endomorphismes du $\mathcal{D}^*$-module $\mathcal{D}^*$ sont exactement les transposés des opérateurs de composition (corollaire 4.4.4). On montre aussi que les endomorphismes continus de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ sont exactement les transposés des endomorphismes de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ (proposition 4.5.4). Pour aller plus loin, nous construisons ensuite sur l'algèbre $\mathcal{D}^*$ un système de puissances divisées (dans le sens défini par Berthelot [6, page 26]) : notre construction reprend celle de Keigher et Pritchard [29] dans l'algèbre des séries de Hurwitz formelles. Les codérivations fortes peuvent être caractérisées à l'aide des puissances divisées (proposition 4.8.7). On en déduit que tout opérateur ombral, et même plus généralement tout endomorphisme vérifiant $T1 = 1$ et tel qu'il existe une codérivation forte S satisfaisant la relation $T \circ M_x = S \circ T$, a un transposé qui commute aux puissances divisées. Ces puissances divisées peuvent, suivant l'exemple de Keigher et Pritchard, servir à définir une opération de composition entre formes linéaires. À partir de cette composition, sont à leur tour définies les substitutions à droite par une forme linéaire fixée : ces substitutions à droite sont des endomorphismes de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commutent aux puissances divisées. Par ailleurs, l'opération de composition conduit à la notion de forme linéaire réversible, que nous caractérisons de diverses façons (Théorème 4.10.2) et que nous désignerons aussi par le terme de formes delta. Dans le dernier paragraphe du chapitre, on montre en particulier que les substitutions à droite sont exactement les endomorphismes continus de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commutent aux puissances divisées (proposition 4.11.2). Les propositions 4.11.3 et 4.11.4 montrent qu'un opérateur ombral est exactement un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}$ dont le transposé commute aux puissances divisées.

Le chapitre 5 utilise tout l'appareil algébrique présenté auparavant pour étudier les suites d'éléments de $\mathcal{D}$. L'application évidente Θ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ est d'abord utilisée pour définir certaines opérations sur les suites d'opérateurs différentiels formels. Ensuite est étudiée la fonction génératrice d'un opérateur (ou d'une suite d'opérateurs différentiels formels) qui permettent, au moins lorsque l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, de caractériser les opérateurs ombraux, de composition, d'Appell et de Sheffer. La notion de base forte est alors introduite en vue de caractériser les opérateurs ombraux. Les théorèmes de développement du calcul ombral sont ensuite démontrés pour les suites de Sheffer (Théorèmes 5.3.5 et 5.3.6). Ces suites de Sheffer sont caractérisés par notre théorème 5.3.7. Les suites associées donnent lieu également à des formules (voir (5.8, 5.9, 5.10, 5.11) analogues à celles du calcul ombral classique. Les suites conjuguées sont ensuite définies de façon analogue au cas classique. Elles s'identifient aux bases fortes, et par conséquent aussi aux suites associées. On a ainsi une théorie du calcul ombral qui apparaît comme une généralisation très satisfaisante du calcul ombral classique.

Le chapitre 6 présente des exemples de suites d'éléments de $\mathcal{D}$ et de leurs propriétés qui peuvent s'expliquer par le calcul ombral que nous avons développé. Comme la structure de cogèbre est exactement la même que dans le cas classique, les exemples intéressants seront soit des exemples en caractéristique non nulle (nous n'en donnerons pas car notre but a été au contraire de nous affranchir de toute hypothèse sur la caractéristique), soit des exemples sur un anneau $\mathcal{R}$ muni d'une dérivation non nulle, de suites construites au moyen de la structure d'anneau de $\mathcal{D}$, qui est différente de la structure d'une algèbre de polynômes. Ceci nous conduit en particulier à des formules de réversion de séries de Hurwitz formelles et dont l'une entraîne la formule de réversion de Lagrange dans le cas classique.

Conventions générales

Dans le présent mémoire, le vocable anneau désignera un anneau associatif et unifère. Tous les morphismes sont supposés envoyer l'élément unité de l'anneau de départ vers l'élément unité du but. Pour tout anneau $\mathcal{R}$, on notera $\mathcal{R}^\bullet$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{R}$. Si x et y sont deux éléments de $\mathcal{R}$, le symbole $[x, y]$ désigne le commutateur $xy - yx$ de x et de y. On note $[x,\ ]$ l'application de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ qui à $y \in \mathcal{R}$ associe le commutateur $[x, y] = xy - yx$.

Notations

Dans la première partie du présent mémoire, nous adoptons les conventions de notation suivantes.

- Les lettres minuscules latines sont réservées pour désigner des nombres entiers ou bien des opérateurs différentiels formels, y compris les éléments de l'anneau de base $\mathcal{R}$.

- Les lettres majuscules latines désignent généralement des opérateurs, et occasionnellement des endomorphismes du $\mathbb{Z}$-module des opérateurs différentiels formels.

- Les lettres minuscules grecques désignent toujours des formes $\mathcal{R}$-linéaires sur le module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$.

- Les lettres minuscules grecques munies d'un chapeau, telles que $\widehat{\varphi}$, désignent des séries de Hurwitz formelles.

- Les lettres gothiques minuscules sont employées pour désigner des formes $\mathcal{R}$-linéaires sur l'algèbre duale.

- Les lettres gothiques majuscules représentent des endomorphismes $\mathbb{Z}$-linéaires de l'algèbre duale.

Chapitre 1

Anneau des opérateurs différentiels formels

Ce premier chapitre regroupe quelques rappels, définitions et propriétés sur les anneaux différentiels. La propriété universelle de ces anneaux (théorème 1.2.2) montre que le cas étudié en calcul ombral classique de l'anneau des polynômes en une variable est un cas particulier de ces anneaux, obtenu lorsque la dérivation est nulle.

1.1 Premières propriétés

Définition 1.1.1 *On appelle dérivation d'un anneau $\mathcal{R}$, toute application ∂ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ telle que, pour tous r_1 et r_2 dans $\mathcal{R}$, on ait*

$$\begin{aligned} \partial\left(r_1+r_2\right) &= \partial r_1+\partial r_2 \\ \partial\left(r_1 r_2\right) &= r_1\left(\partial r_2\right)+\left(\partial r_1\right) r_2 . \end{aligned}$$

On appelle anneau différentiel tout couple $(\mathcal{R}, \partial)$, où $\mathcal{R}$ est un anneau et ∂ une dérivation de $\mathcal{R}$.

On appelle morphisme d'anneaux différentiels de l'anneau différentiel $(\mathcal{R}_1, \partial_1)$ dans l'anneau différentiel $(\mathcal{R}_2, \partial_2)$, un morphisme $\boldsymbol{f}$ de l'anneau $\mathcal{R}_1$ dans l'anneau $\mathcal{R}_2$ tel que

$$\boldsymbol{f} \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \boldsymbol{f} .$$

Par exemple, pour tout élément x d'un anneau $\mathcal{R}$, l'application $[x, \ ]$ est une dérivation de $\mathcal{R}$, dite *dérivation intérieure*.

Il est bien connu [27, page 25] qu'à tout anneau différentiel $(\mathcal{R}, \partial)$ on peut associer un anneau $\mathcal{R}[x, \partial]$, dont les éléments sont appelés opérateurs différentiels formels en ∂. Nous rappelons que $\mathcal{R}[x, \partial]$ jouit des propriétés suivantes.

Propriété 1.1.2 L'anneau $\mathcal{R}$ est un sous-anneau de $\mathcal{R}[x,\partial]$, de sorte que $\mathcal{R}[x,\partial]$ est muni d'une structure de $\mathcal{R}$-bimodule par les deux opérations de multiplication à gauche $(r,p) \longmapsto rp$ et de multiplication à droite $(p,r) \longmapsto pr$ par les éléments de $\mathcal{R}$.

Propriété 1.1.3 Il existe dans $\mathcal{R}[x,\partial]$ un élément $x \notin \mathcal{R}$ tel que la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de x est une base pour l'une et l'autre des deux structures de $\mathcal{R}$-module ainsi définies sur $\mathcal{R}[x,\partial]$.

Propriété 1.1.4 L'identité suivante (de Leibnitz) est vérifiée pour tout entier naturel n et tout élément r de l'anneau $\mathcal{R}$.

$$x^n r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{(n-k)} x^k$$

en notant $r^{(j)} = \partial^j(r)$.

En particulier, pour $n = 1$, on trouve l'identité

$$[x,r] = \partial r$$

valable pour tout élément r de $\mathcal{R}$.

Notations 1.1.5 Pour alléger les notations, on écrira partout $\mathcal{D}$ pour $\mathcal{R}[x,\partial]$. De plus, le $\mathcal{R}$-module à gauche dont le groupe additif sous-jacent est celui de $\mathcal{D}$ et où $\mathcal{R}$ agit selon la loi $(r,p) \longmapsto rp$ sera noté ${}^{\diamond}\mathcal{D}$; le $\mathcal{R}$-module à droite ayant même groupe additif et où $\mathcal{R}$ agit selon la loi $(p,r) \longmapsto pr$ sera noté $\mathcal{D}^{\diamond}$; et le $\mathcal{R}$-bimodule constitué par ces deux actions de $\mathcal{R}$ sur le groupe additif de $\mathcal{D}$ sera noté ${}^{\diamond}\mathcal{D}^{\diamond}$.

Définissons maintenant une suite $(\mathcal{D}_n)$ de parties de $\mathcal{D}$ en posant $\mathcal{D}_n = \{0\}$ pour n entier négatif, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{R}$ et en convenant que pour $n > 0$, $\mathcal{D}_n$ est le sous ensemble de $\mathcal{D}$ constitué par les éléments $\sum_{j=0}^{n} r_j x^j$ avec $r_j \in \mathcal{R}$ pour tout indice $j \in \{0,\dots,n\}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{D}_n$ est un sous-bimodule de ${}^{\diamond}\mathcal{D}^{\diamond}$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathcal{D}_m\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{m+n} ,$$

de sorte qu'on a la propriété suivante.

Propriété 1.1.6 *La suite $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration croissante, exhaustive et séparée du groupe additif de $\mathcal{D}$, compatible avec ses structures d'anneau et de $\mathcal{R}$-bimodule.*

Définition 1.1.7 *Pour $p \in \mathcal{D}$, $p \neq 0$, nous définissons le degré de p par :*

$$\deg p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p \in \mathcal{D}_n\} .$$

On conviendra de plus que $\deg 0 = -\infty$.

Propriété 1.1.8 *Pour tous éléments p et q de $\mathcal{D}$, on a*

$$\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)) \qquad \deg(pq) \leq \deg p + \deg q\ .$$

Soit p un élément de $\mathcal{D}$ de degré n. En vertu de la propriété 1.1.3, on peut écrire p de façon unique sous la forme

$$p = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k \qquad \text{où } r_k \in \mathcal{R}\ .$$

Puisque p est de degré n, $r_n \neq 0$. Cet élément r_n est appelé le *coefficient dominant* de p.

Propriété 1.1.9 *Soient p et q deux opérateurs différentiels formels. On suppose que le coefficient dominant de p n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{R}$. Alors on a :*

$$\deg(qp) = \deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)\,.$$

Démonstration : Posons $m = \deg p$ et $n = \deg q$. Le coefficient de x^{m+n} dans l'écriture de pq est le produit des coefficients dominants de p et q.
□

1.2 Propriété universelle de l'anneau $\mathcal{D}$

On va maintenant caractériser l'anneau $\mathcal{D}$ par une propriété universelle. Nous aurons besoin de la notion d'anneau pointé.

Définition 1.2.1 *On appelle anneau pointé, tout couple $(\mathcal{R}, x)$ où $\mathcal{R}$ est un anneau et x un élément de $\mathcal{R}$.*

On appelle morphisme d'anneaux pointés de l'anneau pointé $(\mathcal{R}_1, x_1)$ dans l'anneau pointé $(\mathcal{R}_2, x_2)$, tout morphisme $\boldsymbol{f}$ de l'anneau $\mathcal{R}_1$ dans l'anneau $\mathcal{R}_2$ tel que $\boldsymbol{f}(x_1) = x_2$.

Théorème 1.2.2 *Si $(\mathcal{E}, y)$ est un anneau pointé et si $\boldsymbol{f}$ est un morphisme d'anneaux différentiels de $(\mathcal{R}, \partial)$ dans $(\mathcal{E}, [y,\ ])$ alors il existe un unique morphisme d'anneaux pointés $\boldsymbol{g}$ de $(\mathcal{D}, x)$ dans $(\mathcal{E}, y)$ prolongeant $\boldsymbol{f}$.*

Démonstration : Démontrons d'abord l'unicité de $\boldsymbol{g}$. Puisque $\boldsymbol{g}$ est un morphisme d'anneaux pointés, on a $\boldsymbol{g}(x) = y$ d'où

$$\boldsymbol{g}\left(\sum_{k=0}^{n} r_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{f}(r_k)\, y^k\ ,$$

donc $\boldsymbol{g}$ est défini de façon unique.

Pour établir l'existence de $\boldsymbol{g}$, on peut raisonner comme suit. Puisque la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathcal{R}$-module à gauche ${}^\diamond\mathcal{D}$, il existe une unique application $\boldsymbol{g}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ telle que

$$\boldsymbol{g}\left(\sum_{k=0}^{n} r_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{f}(r_k)\, y^k$$

Cette application $\boldsymbol{g}$ est visiblement un morphisme additif de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ prolongeant $\boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{g}(x) = y$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que :

$$\forall p \in \mathcal{D},\ \ \forall q \in \mathcal{D} \qquad\qquad \boldsymbol{g}(pq) = \boldsymbol{g}(p)\,\boldsymbol{g}(q)\ .$$

Par additivité, on peut se limiter au cas $p = rx^m$, $q = sx^n$, où $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathcal{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$pq = rx^m sx^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} rs^{(m-k)} x^{k+n}$$

d'où

$$\boldsymbol{g}(pq) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \boldsymbol{f}(r)\boldsymbol{f}\left(s^{(m-k)}\right) y^{k+n}$$

comme $\boldsymbol{g}(p) = \boldsymbol{f}(r)y^m$ et $\boldsymbol{g}(q) = \boldsymbol{f}(s)y^n$ on est amené à vérifier que

$$y^m \boldsymbol{f}(s) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \boldsymbol{f}\left(s^{(m-k)}\right) y^k \tag{1.1}$$

Démontrons cette égalité par récurrence sur l'entier m.
Le cas où $m = 0$ étant immédiat, soit $m \in \mathbb{N}$ et supposons que (1) soit vraie pour tout $s \in \mathcal{R}$. Calculons alors $y^{m+1}\boldsymbol{f}(s)$; on écrit

$$\begin{aligned} y^{m+1}\boldsymbol{f}(s) &= y^m y \boldsymbol{f}(s) \\ &= y^m [y, \boldsymbol{f}(s)] + y^m \boldsymbol{f}(s)\, y \\ &= y^m \boldsymbol{f}(\partial s) + y^m \boldsymbol{f}(s)\, y \qquad \text{car } \boldsymbol{f} \text{ est un morphisme} \end{aligned}$$

d'où par hypothèse de récurrence

$$y^{m+1}\boldsymbol{f}(s) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \boldsymbol{f}\left(s^{(m-k+1)}\right) y^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \boldsymbol{f}\left(s^{(m-k)}\right) y^{k+1}\ ,$$

ce qui, en utilisant l'identité classique $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ entre coefficients binomiaux, conduit à

$$y^{m+1}\boldsymbol{f}(s) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \boldsymbol{f}\left(s^{(m+1-k)}\right) y^k\ ,$$

ce qui établit par récurrence le résultat cherché. □

Dans le cas particulier où la dérivation ∂ de l'anneau $\mathcal{R}$ est nulle, on sait que $\mathcal{D}$ est simplement l'anneau $\mathcal{R}[t]$ des polynômes à coefficients dans $\mathcal{R}$. La propriété universelle que nous venons de démontrer se traduit alors par la propriété universelle suivante de $\mathcal{R}[t]$.

Théorème 1.2.3 *Si $(\mathcal{E}, y)$ est un anneau pointé et si $\boldsymbol{f}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{E}$ tel que $\boldsymbol{f}(r)$ commute avec y pour tout élément $r \in \mathcal{R}$, alors il existe un unique morphisme d'anneaux pointés $\boldsymbol{g}$ de $(\mathcal{R}[t], t)$ dans $(\mathcal{E}, y)$ prolongeant $\boldsymbol{f}$.*

1.3 Opération de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{R}$

A titre de première application de la propriété universelle de l'anneau $\mathcal{D}$, nous allons retrouver l'interprétation bien connue des éléments de $\mathcal{D}$ comme opérateurs sur $\mathcal{R}$.

Soit $\boldsymbol{f}$ le morphisme de l'anneau $\mathcal{R}$ dans l'anneau $End_{\mathbb{Z}}(\mathcal{R})$ des endomorphismes du groupe additif de $\mathcal{R}$ tel que $\boldsymbol{f}(r)(s) = rs$ pour tout couple $(r, s) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ on observe que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\partial r)(s) &= \partial r\, s \\ &= \partial(rs) - r\partial s \\ &= [\partial, \boldsymbol{f}(r)](s) \end{aligned}$$

de sorte que $\boldsymbol{f}$ est un morphisme de l'anneau différentiel $(\mathcal{R}, \partial)$ dans l'anneau différentiel $(End_{\mathbb{Z}}(\mathcal{R}), [\partial, \ ])$. La propriété universelle de $\mathcal{D}$ fournit l'énoncé suivant :

Proposition 1.3.1 *Il existe un unique morphisme d'anneau différentiel $\boldsymbol{g}$ de $\mathcal{D}$ dans l'anneau $End_{\mathbb{Z}}(\mathcal{R})$ des endomorphismes du groupe additif de $\mathcal{R}$ prolongeant $\boldsymbol{f}$ et tel que $\boldsymbol{g}(x) = \partial$.*

Si $p = \sum_i a_i x^i$ (où chaque a_i est un élément de $\mathcal{R}$) est un élément quelconque de $\mathcal{D}$ et si $r \in \mathcal{R}$ alors on peut expliciter $\boldsymbol{g}(p)(r) = \sum_i a_i \partial^i r$. Pour alléger l'écriture, on notera $p.r$ cet élément. On prendra garde de ne pas confondre l'élément pr de l'anneau $\mathcal{D}$ avec l'élément $p.r$ de $\mathcal{R}$. On notera $\mathcal{R}_0$ le $\mathcal{D}$-module à gauche dont le groupe additif sous-jacent est celui de $\mathcal{R}$ et où $\mathcal{D}$ agit selon la loi $(p, r) \mapsto p.r$.

1.4 Une structure de $\mathcal{D}$-module sur un carré tensoriel

Une deuxième application de la propriété universelle de $\mathcal{D}$ est l'existence, lorsque $\mathcal{R}$ est un anneau commutatif, d'une structure de $\mathcal{D}$-module à gauche sur le carré tensoriel ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{R}}^{\diamond} \mathcal{D}$ du $\mathcal{R}$-module à gauche ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ obtenu en faisant agir $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{D}$ par multiplication à gauche.

Lemme 1.4.1 *Soit $(\mathcal{R}, \partial)$ un anneau différentiel commutatif. Il existe un unique endomorphisme Γ du groupe additif de ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}$ tel que*

$$\Gamma\left(p \otimes q\right) = xp \otimes q + p \otimes xq \quad \textit{pour tout } \ (p,q) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}.$$

Démonstration : En vertu de la propriété universelle définissant le produit tensoriel ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}$, il suffit de vérifier que, pour tout $(p,q) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et pour tout $r \in \mathcal{R}$, on a

$$xrp \otimes q + rp \otimes xq = xp \otimes rq + p \otimes xrq$$

or

$$\begin{aligned} xrp \otimes q + rp \otimes xq &= rxp \otimes q + r'p \otimes q + rp \otimes xq \ \ (\text{où } r' = [x,r]) \\ &= xp \otimes rq + p \otimes r'q + p \otimes rxq \\ &= xp \otimes rq + p \otimes xrq \ , \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. □

Soit maintenant $\boldsymbol{f}$ le morphisme de l'anneau $\mathcal{R}$ dans l'anneau $End_{\mathbb{Z}}\left({}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}\right)$ des endomorphismes du groupe additif de ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}$ tel que

$$\boldsymbol{f}\left(r\right)\left(p \otimes q\right) = rp \otimes q \text{ pour tout } \ (r,p,q) \in \mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$$

on observe que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}\left(\partial r\right)\left(p \otimes q\right) &= (\partial r) p \otimes q = xrp \otimes q - rxp \otimes q \\ &= x\left(rp\right) \otimes q + rp \otimes xq - r\left(xp \otimes q + p \otimes xq\right) \\ &= \Gamma\left(rp \otimes q\right) - r\Gamma\left(p \otimes q\right) \\ &= \left[\Gamma, \boldsymbol{f}\left(r\right)\right]\left(p \otimes q\right), \end{aligned}$$

de sorte que $\boldsymbol{f}$ est un morphisme de l'anneau différentiel $(\mathcal{R}, \partial)$ dans l'anneau différentiel $\left(End_{\ Z}\left({}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}\right), [\Gamma, \ \ ]\right)$. D'où la propriété suivante en vertu de la propriété universelle de $\mathcal{D}$.

Proposition 1.4.2 *Soit $(\mathcal{R}, \partial)$ un anneau différentiel commutatif. Il existe alors sur ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}$ un unique morphisme d'anneaux $\boldsymbol{g}$ de $\mathcal{D}$ dans $End_{\mathbb{Z}}\left({}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes^{\diamond} \mathcal{D}\right)$ prolongeant $\boldsymbol{f}$ et tel que $\boldsymbol{g}\left(x\right) = \Gamma$.*

On notera $p \lhd \flat$ l'élément $\boldsymbol{g}(p)(\flat)$ pour $p \in \mathcal{D}$ et $\flat \in^\diamond \mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$. Ainsi $(^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}, \lhd)$ est un $\mathcal{D}$-module à gauche.

Remarquons que sur le $\mathbb{Z}$-module $^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$ existent aussi deux structures de $\mathcal{D}$-module à droite, que nous noterons $\rhd_1$ et $\rhd_2$ définies par

$$(p_1 \otimes p_2) \rhd_1 q = p_1 q \otimes p_2 \quad \text{et} \quad (p_1 \otimes p_2) \rhd_2 q = p_1 \otimes p_2 q$$

La compatibilité des trois structures de $\mathcal{D}$-modules ainsi définies sur $^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$ est facile à vérifier, ce qui signifie que les identités suivantes sont vraies pour tout choix de p_1, p_2, q, $d \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} ((p_1 \otimes p_2) \rhd_1 q) \rhd_2 d &= ((p_1 \otimes p_2) \rhd_2 d) \rhd_1 q \\ q \lhd [(p_1 \otimes p_2) \rhd_i d] &= [q \lhd (p_1 \otimes p_2)] \rhd_i d \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

1.5 Opérateurs de translation

Soit $\mathcal{R}$ un anneau et a un élément du centre de $\mathcal{R}$. On va définir un opérateur E^a de $\mathcal{D}$, analogue à l'opérateur de translation sur les polynômes qui à $p(x)$ associe $p(x+a)$. Soit Ω l'injection naturelle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire le morphisme d'anneaux tel que $\Omega(r) = r$ pour tout élément r de $\mathcal{R}$. On voit que :

$$\Omega(\partial r) = xr - rx = xr - rx - ra + ra = (x+a)r - r(x+a) = [x+a, r].$$

Ainsi Ω est un morphisme d'anneaux différentiels de $(\mathcal{R}, \partial)$ dans $(\mathcal{D}, [x+a, \ ])$ et donc d'après la propriété universelle de $\mathcal{D}$ (Théorème 1.2.2), on a la proposition suivante.

Proposition 1.5.1 *Soit a un élément central de $\mathcal{R}$. Il existe un unique morphisme d'anneau E^a de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ tel que :*

$$E^a(r) = r \quad si \quad r \in \mathcal{R} \, ,$$

et

$$E^a(x) = x + a \, .$$

L'application E^a est appelée l'opérateur de translation de a.

Propriété 1.5.2 *Soient a et b deux éléments centraux de $\mathcal{R}$. Alors :*

$$E^a \circ E^b = E^{a+b} \, .$$

Par conséquent les opérateurs de translation commutent entre eux.

On remarque que lorsque $\partial = 0$, l'opérateur E^a est exactement l'opérateur $p(x) \longmapsto p(x+a)$ sur les polynômes.

1.6 Adjonction

On va définir une involution Λ de $\mathcal{D}$ appelée *adjonction* car elle fait correspondre à un opérateur différentiel formel son opérateur adjoint au sens classique [24, Section 5.3].

Proposition 1.6.1 *Si l'anneau $\mathcal{R}$ est commutatif, il existe un unique anti-morphisme Λ de $\mathcal{D}$ dans lui-même tel que $\Lambda(a) = a$ pour tout $a \in \mathcal{R}$ et $\Lambda(x) = -x$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{D}^{op}$ l'anneau opposé de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'anneau dont le groupe additif est celui de $\mathcal{D}$ et où la multiplication $*_{op}$ est définie par $p *_{op} q = qp$. On considère l'application Ω de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}^{op}$ telle que $\Omega(a) = a$ pour tout $a \in \mathcal{R}$. On a

$$\Omega(\partial a) = \partial a = xa - ax = (-x) *_{op} a - a *_{op} (-x),$$

ce qui montre que Ω est un morphisme d'anneaux différentiels de $(\mathcal{R}, \partial)$ dans $(\mathcal{D}^{op}, [-x,\ ])$. Par la propriété universelle de l'anneau $\mathcal{D}$ (Théorème 1.2.2), il existe un unique morphisme Λ d'anneaux pointés de $(\mathcal{D}, x)$ dans $(\mathcal{D}^{op}, -x)$ qui prolonge Ω. $\square$

Propriété 1.6.2 *Si l'anneau $\mathcal{R}$ est commutatif, l'adjonction Λ est une involution de $\mathcal{D}$.*

Démonstration : Il suffit d'observer que $\Lambda \circ \Lambda$ est un endomorphisme de l'anneau pointé $(\mathcal{D}, x)$ qui prolonge l'application Ω, d'où $\Lambda \circ \Lambda = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ par la propriété universelle de $\mathcal{D}$. $\square$

Chapitre 2

Opérateurs

Dorénavant, l'anneau $\mathcal{R}$ est supposé commutatif.

Dans ce chapitre, nous commençons le développement de la méthode ombrale [41, 42, 43] dans le contexte des opérateurs différentiels formels étudiés dans le chapitre précédent. Nous avons choisi de commencer par l'étude de la notion d'opérateur, puisque, d'après [45], les méthodes ombrales ne sont que des opérateurs déguisés.

Nous allons étudier la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$ de tous les opérateurs. En particulier, l'adjonction introduite dans le premier chapitre nous permet de définir une transformation, notée $^{\vee}$, qui sera primordiale dans la suite pour la définition de certains opérateurs importants, et qui mérite d'être étudiée de manière plus détaillée.

2.1 Notion d'opérateur

Définition 2.1.1 *On appelle opérateur tout endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $^{\diamond}\mathcal{D}$.* Cette terminologie du calcul ombral peut ici prêter à confusion, dans la mesure où les éléments de $\mathcal{D}$ sont aussi appelés opérateurs. On prendra donc soin de bien spécifier que les éléments de $\mathcal{D}$ sont des *opérateurs différentiels formels* ou en abrégé des *o.d.f.*, ce qui évitera toute ambiguïté.

Un exemple fort important d'opérateur est fourni par les opérateurs de translation E^a de la proposition 1.5.1.

Si T est un opérateur et p un o.d.f., on notera Tp l'o.d.f. image de p par T. Cette notation est celle du calcul ombral, c'est pourquoi nous la choisissons de préférence à la notation standard $T(p)$, qu'il nous arrivera cependant aussi d'utiliser quand cela améliore la lisibilité ou la clarté des formules.

L'ensemble des opérateurs est muni de façon évidente d'une structure de $\mathcal{R}$-algèbre. Nous noterons $\mathcal{O}$ la $\mathcal{R}$-algèbre de tous les opérateurs.

2.2 La topologie de $\mathcal{O}$

Sur la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$, on définit une filtration décroissante $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ exhaustive et séparée en posant

$$\mathcal{O}_n = \{T \in \mathcal{O}\ ;\ \operatorname{Ker} T \supseteq \mathcal{D}_{n-1}\}\ .$$

Il est clair que, quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathcal{O}_n$ est un sous-$\mathcal{R}$-module de $\mathcal{O}$. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{O}$, on définit à partir de cette filtration l'*ordre* de T : c'est l'élément $\operatorname{ord} T$ de $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\operatorname{ord} T = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{Z} \mid T \in \mathcal{O}_n\} & \text{si} \quad T \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad T = 0 \end{cases}\ .$$

En fait, puisque $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ pour $n \leq 0$, il est clair que l'ordre d'un opérateur non nul est toujours un entier naturel.

À partir de la fonction ord, on construit de façon classique une distance ultramétrique. Ainsi l'ensemble $\mathcal{O}$ se trouve muni d'une topologie compatible avec sa structure de $\mathcal{R}$-module, l'anneau $\mathcal{R}$ étant supposé muni de la topologie discrète.

Supposons également l'anneau $\mathcal{D}$ muni de la topologie discrète. Pour un entier naturel $n \geq 1$ et un opérateur T, l'ensemble $T + \mathcal{O}_n$ peut s'interpréter comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}$ qui prennent les mêmes valeurs que T en tout élément de l'ensemble fini $\{1, \ldots, x^{n-1}\}$. Réciproquement, si T est un opérateur et si p est un o.d.f. de degré $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des opérateurs prenant en p les mêmes valeurs que T contient l'ensemble $T + \mathcal{O}_n$ dès que $n > k$. Il en résulte que la topologie que nous avons définie à partir de la fonction ord coïncide avec la topologie de la convergence simple sur le sous-ensemble $\mathcal{O}$ de l'ensemble des applications continues de $\mathcal{D}$ dans lui-même. Par conséquent, comme pour la topologie définie par Roman et Rota dans le cadre classique du calcul ombral sur les polynômes [44, page 127], une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs converge vers un opérateur T si et seulement si, pour tout $p \in \mathcal{D}$, il existe un indice n_0, dépendant de p, tel que $T_n p = Tp$ pour tout $n \geq n_0$. On pourrait aussi caractériser cette topologie de $\mathcal{O}$ comme la topologie la plus faible qui rend continue pour tout o.d.f. p l'application $\boldsymbol{c}_p$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{D}$ qui à T dans $\mathcal{O}$ associe $Tp \in \mathcal{D}$.

Puisque la topologie de $\mathcal{O}$ que nous venons de définir n'est autre que la topologie de la convergence simple, on voit qu'elle est compatible avec la composition des opérateurs. Ainsi $\mathcal{O}$ muni de cette topologie est une $\mathcal{R}$-algèbre topologique. De plus, il est facile de montrer que toute suite de Cauchy d'opérateurs est convergente, de sorte que la $\mathcal{R}$-algèbre topologique $\mathcal{O}$ est complète.

2.3 La transformation $^\vee$

Pour tout endomorphisme A du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{D}$, on note $A^\vee$ l'application $\Lambda \circ A \circ \Lambda$ conjuguée de A par l'adjonction Λ. Cette transformation fait correspondre à la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}$ de tous les opérateurs la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{O}^\vee$ de tous les endomorphismes du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^\diamond$. Puisque Λ est une involution, on a pour tout opérateur T la formule $T^{\vee\vee} = T$.

Si A et B sont deux endomorphismes du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{D}$, il est immédiat que $(A \circ B)^\vee = A^\vee \circ B^\vee$.

Par exemple, pour $r \in \mathcal{R}$, on définit un opérateur L_r en posant $L_r p = rp$. On définit aussi un opérateur M_r par $M_r p = pr$. On vérifie alors que M_r est aussi élément de $\mathcal{O}^\vee$ et que $L_r^\vee = M_r$. Par conséquent, on a aussi $M_r^\vee = L_r$.

Pour un autre exemple, soit M_x l'opérateur dit de “multiplication à droite par x” tel que $M_x p = px$ pour tout o.d.f. p. Alors $M_x^\vee$ est la « multiplication à gauche par $-x$ », telle que $M_x^\vee(p) = -xp$ pour tout $p \in \mathcal{D}$.

2.4 Les dérivées de Pincherle

La dérivée de Pincherle, introduite par Pincherle en 1897 [34] et qui a reçu son nom en 1973 [45, page 694], est une notion cardinale du calcul ombral. Dans le contexte de notre étude du calcul ombral des opérateurs différentiels, du fait que la multiplication de l'anneau $\mathcal{D}$ n'est pas commutative, cette notion est dédoublée, et nous obtenons deux dérivées de Pincherle, que nous allons maintenant présenter.

Définition 2.4.1 *La première dérivée de Pincherle d'un opérateur T est l'opérateur $\partial_1 T = [T, M_x]$.*

Il est évident que la *dérivation de Pincherle* ∂_1 de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ est une dérivation intérieure de l'algèbre $\mathcal{O}$. Tout opérateur qui est $\mathcal{D}$-linéaire à droite est une constante pour la dérivation de Pincherle ∂_1. En particulier, si r est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, l'opérateur L_r de multiplication à gauche par r est une constante de ∂_1. Pour préciser l'anneau des constantes de ∂_1, on va avoir recours à la propriété universelle de l'anneau $\mathcal{R}[t]$.

Proposition 2.4.2 *Il existe un unique morphisme d'anneaux pointés $\boldsymbol{g}$ de $\mathcal{R}[t]$ dans $\mathcal{O}$ tel que $\boldsymbol{g}(r) = L_r$ pour tout élément r de $\mathcal{R}$ et $\boldsymbol{g}(t) = M_x$.*

Démonstration : On considère le morphisme structural de l'algèbre $\mathcal{O}$, c'est-à-dire le morphisme d'anneaux $\boldsymbol{f}$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{O}$ tel que $\boldsymbol{f}(r) = L_r$. Comme on a $L_r \circ M_x = M_x \circ L_r$ pour tout $r \in \mathcal{R}$, le théorème 1.2.3 conduit au résultat. □

L'image $\boldsymbol{g}(\mathcal{R}[t])$ du morphisme $\boldsymbol{g}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}$, notée $\mathcal{R}[M_x]$.

Proposition 2.4.3 *L'anneau des constantes de ∂_1 est exactement $\mathcal{R}[M_x]$.*

Démonstration : Les éléments de $\mathcal{R}[M_x]$ sont les opérateurs qui s'écrivent sous la forme $\displaystyle\sum_i L_{a_i} \circ M_x^i$.

D'une part, un tel élément $\sum_i L_{a_i} \circ M_x^i$ est clairement une constante. Réciproquement si T appartient à $\mathcal{O}$ et $\partial_1(T) = 0$, écrivons $T1 = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ et montrons alors que $T = \sum_i L_{a_i} \circ M_x^i$. Comme ce sont des opérateurs, il suffit de montrer qu'ils donnent même image à tous les éléments de la base $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$. Or, remarquons que $Tx^n = TM_x^n 1$; puisque $\partial_1 T = 0$, on voit que M_x^n et T commutent, d'où

$$Tx^n = M_x^n T1 = M_x^n(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{i+n} = \sum_{i=0}^{N} L_{a_i} \circ M_x^i(x^n).$$

Ce qu'il fallait montrer. □

Exemple 2.4.4 *La première dérivée de Pincherle de l'opérateur de translation E^a est donnée par $\partial_1 E^a = M_a \circ E^a$.*

Démonstration : En effet, les deux membres de cette identité donnent la même image à n'importe quel élément de la base $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Pour définir la deuxième dérivée de Pincherle, nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme 2.4.5 *Si T est un opérateur, alors $[T, M_x^\vee]$ est un opérateur.*

Démonstration : Il s'agit de montrer que, pour tout $r \in \mathcal{R}$, on a $[[T, M_x^\vee], L_r] = 0$ dans l'algèbre de Lie des commutateurs de la $\mathbb{Z}$-algèbre associative des endomorphismes du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{D}$. Dans cette algèbre de Lie, on dispose de l'identité de Jacobi

$$[[T, M_x^\vee], L_r] + [[M_x^\vee, L_r], T] + [[L_r, T], M_x^\vee] = 0.$$

Puisque T est un opérateur, on sait que $[L_r, T] = 0$ quelque soit $r \in \mathcal{R}$. D'autre part, pour tout o.d.f. p, on a $[M_x^\vee, L_r](p) = (-xr + rx)p = -r'p$, donc $[M_x^\vee, L_r] = L_{-r'}$ qui commute à l'opérateur T, ce qui achève la démonstration. □

Définition 2.4.6 *La deuxième dérivée de Pincherle d'un opérateur T est l'application $\partial_2 T = [T, M_x^\vee]$ qui est un opérateur par le lemme 2.4.5.*

La *deuxième dérivation de Pincherle* ∂_2 est évidemment une dérivation de l'anneau $\mathcal{O}$. Les constantes de cette dérivation sont exactement les endomorphismes du $\mathcal{D}$-module à gauche $\mathcal{D}$. En particulier, si r est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, l'opérateur M_r de multiplication à droite par r est une constante de ∂_2.

Proposition 2.4.7 *Les deux dérivations de Pincherle ∂_1 et ∂_2 commutent entres elles.*

Démonstration : Soit T un opérateur. On veut établir que $\partial_1\partial_2 T = \partial_2\partial_1 T$, ce qui revient à montrer que $[[T, M_x^\vee], M_x] = [[T, M_x], M_x^\vee]$. Pour cela , nous allons utiliser l'identité de Jacobi

$$[[T, M_x^\vee], M_x] + [[M_x, T], M_x^\vee] + [[M_x^\vee, M_x], T] = 0.$$

Comme M_x et $M_x^\vee$ commutent, on a $[M_x^\vee, M_x] = 0$ et l'identité de Jacobi se réduit à

$$[[T, M_x^\vee], M_x] + [[M_x, T], M_x^\vee] = 0,$$

or $[[M_x, T], M_x^\vee] = -[[T, M_x], M_x^\vee]$; d'où le résultat. $\square$

Proposition 2.4.8 *Les deux dérivations de Pincherle ∂_1 et ∂_2 sont continues pour la topologie définie sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration : Par la définition de la topologie de $\mathcal{O}$, l'application ∂_1 est continue si et seulement si pour tout o.d.f. p, l'application $\boldsymbol{c}_p \circ \partial_1$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{D}$ est continue. Il suffit donc de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ T & \longmapsto & \boldsymbol{c}_p \circ \partial_1 T \end{array}$$

est continue pour n'importe quel o.d.f. p, or

$$\boldsymbol{c}_p \circ \partial_1 T = (\partial_1 T)p = T \circ M_x(p) - M_x \circ T(p) = \boldsymbol{c}_{M_x(p)}(T) - M_x(\boldsymbol{c}_p(T)) \ ;$$

comme $\mathcal{D}$ est muni de la topologie discrète, toutes les applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ sont continues donc M_x est continue et par conséquent $\boldsymbol{c}_p \circ \partial_1 = \boldsymbol{c}_{M_x(p)} - M_x \circ \boldsymbol{c}_p$ est continue comme composée et somme de fonctions continues. Donc l'application ∂_1 est continue.

De même l'application ∂_2 est continue si et seulement si pour tout o.d.f. p, l'application $\boldsymbol{c}_p \circ \partial_2$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{D}$ est continue. Il suffit donc de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ T & \longmapsto & \boldsymbol{c}_p \circ \partial_2 T \end{array}$$

est continue pour n'importe quel o.d.f. p, or

$$\boldsymbol{c}_p \circ \partial_2 T = (\partial_2 T)p = T \circ M_x^\vee(p) - M_x^\vee \circ T(p) = \boldsymbol{c}_{M_x^\vee(p)}(T) - M_x^\vee(\boldsymbol{c}_p(T)) \ ;$$

comme $M_x^\vee$ est continue, $\boldsymbol{c}_p \circ \partial_2 = \boldsymbol{c}_{M_x^\vee(p)} - M_x^\vee \circ \boldsymbol{c}_p$ est continue comme composée et somme de fonctions continues. Donc ∂_2 est continue. $\square$

2.5 Les intégrales de Pincherle

Le problème de la résolution des équations différentielles en la dérivée de Pincherle a été posé par [45, page 753]. La première question qui se pose dans ce cadre est la détermination des opérateurs ayant une dérivée de Pincherle donnée. Pour répondre à cette question, nous allons maintenant introduire ce que nous appellerons *intégrales de Pincherle*. Ce sont des applications réciproques à droite des dérivations de Pincherle.

Pour construire ces intégrales, nous aurons besoin d'un opérateur particulier Q que nous allons définir.

Définition 2.5.1 *L'opérateur Q est caractérisé par*

$$Qx^n = \begin{cases} x^{n-1} & si \quad n > 0 \\ 0 & si \quad n = 0 \end{cases} .$$

Propriété 2.5.2 *On a l'identité $Q \circ M_x = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.*

Définition 2.5.3 *La première intégrale de Pincherle d'un opérateur T, notée $\int_1 T$ est l'opérateur $\int_1 T = \sum_{n\geq 0} M_x^n \circ T \circ Q^{n+1}$.*

Cette somme converge dans la $\mathcal{R}$-algèbre topologique $\mathcal{O}$, car son terme général tend vers zéro et que $\mathcal{O}$ est une algèbre ultramétrique complète.

Proposition 2.5.4 *La première intégrale de Pincherle d'un opérateur T est l'unique opérateur U tel que $\partial_1 U = T$ et $U1 = 0$.*

Démonstration : Nous allons tout d'abord montrer que la première intégrale de Pincherle est un opérateur U tel que $\partial_1 U = T$ et $U1 = 0$. On calcule alors $\partial_1 U$ avec $U = \sum\limits_{n\geq 0} M_x^n \circ T \circ Q^{n+1}$: utilisant la continuité de ∂_1 (proposition 2.4.8) et la propriété 2.5.2, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_1(\sum_{n\geq 0} M_x^n \circ T \circ Q^{n+1}) &= \sum_{n\geq 0} [M_x^n \circ T \circ Q^{n+1}, M_x] \\ &= \sum_{n\geq 0} (M_x^n \circ T \circ Q^n - M_x^{n+1} \circ T \circ Q^{n+1}) \\ &= M_x^0 \circ T \circ Q^0 = T. \end{aligned}$$

Pour montrer que $U1 = 0$ il suffit juste de remarquer que $Q(1) = 0$ et donc $Q^{n+1}(1) = 0$ et par conséquent $U1 = 0$. Il reste à montrer l'unicité de U . Soit V un autre opérateur vérifiant $\partial_1 V = T$ et $V1 = 0$, on veut montrer par récurrence sur n que $(U - V)x^n = 0$. Pour $n = 0$, on a bien $(U - V)1 = 0$, supposons que $(U - V)x^n = 0$, on a en utilisant le fait que M_x commute à $U - V$ et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$(U - V)x^{n+1} = (U - V)M_x x^n = M_x(U - V)x^n = 0 .$$

$\square$

Dans la proposition 2.4.2, nous avons construit un morphisme d'anneaux $\boldsymbol{g} : \mathcal{R}[t] \to \mathcal{O}$. Nous considérons sur l'anneau $\mathcal{O}$ la structure de $\mathcal{R}[t]$-bimodule induite par ce morphisme $\boldsymbol{g}$. Il résulte des propositions 2.4.3 et 2.5.4 que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}[t] \xrightarrow{g} \mathcal{O} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{O} \longrightarrow 0 \qquad (2.1)$$

est une suite exacte de $\mathcal{R}[t]$-bimodules. Remarquons que la première intégrale de Pincherle $\int_1 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ commute avec la multiplication à gauche par une constante de la première dérivation de Pincherle ∂_1, c'est-à-dire (proposition 2.4.3) par un élément de $\boldsymbol{g}(\mathcal{R}[t])$. En munissant $\mathcal{O}$ de la structure de $\mathcal{R}[t]$-module définie par la multiplication à gauche d'un opérateur par l'image par $\boldsymbol{g}$ d'un polynôme, la suite exacte de $\mathcal{R}[t]$-modules induite par la suite exacte (2.1) de bimodules est donc scindée par la première intégrale de Pincherle $\int_1$, de sorte qu'il existe une rétraction $\boldsymbol{h}$ qui scinde $\boldsymbol{g}$: à T dans $\mathcal{O}$, cette rétraction associe l'élément $\displaystyle\sum_i a_i t^i \in \mathcal{R}[t]$ si $T1 = \displaystyle\sum_i a_i x^i \in \mathcal{D}$.

Corollaire 2.5.5 *Soient T et U deux opérateurs. Si $\partial_1 T = \partial_1 U$ et si $T1 = U1$, alors $T = U$.*

Démonstration : Les hypothèses se traduisent par les égalités $\partial_1(T - U) = 0$ et $\boldsymbol{h}(T-U) = 0$, d'où le résultat par la suite exacte (2.1) scindée par $\boldsymbol{h}$. $\square$

Définition 2.5.6 *La deuxième intégrale de Pincherle d'un opérateur T, notée $\int_2 T$ est l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, définie par $\int_2 T = \sum_{n\geq 0} M_x^{\vee(n)} \circ T \circ Q^{\vee(n+1)}$.*

Cette somme a un sens car à p fixé, il y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_x^{\vee(n)} \circ T \circ Q^{\vee(n+1)}(p) \neq 0$, car dès que $n >$ deg p alors $Q^{\vee(n+1)}(p) = 0$.

Lemme 2.5.7 *Si T est un opérateur, on a*

$$[\textstyle\int_2 T, M_x^\vee] = T \quad \textit{et} \quad \int_2 T(a) = 0 \ \ \forall a \in \mathcal{R}.$$

On remarque que $Q^\vee \circ M_x^\vee = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

Démonstration : Pour tout p o.d.f. de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
[\textstyle\int_2 T, M_x^\vee](p) &= [\displaystyle\sum_{n\geq 0} M_x^{\vee(n)} \circ T \circ Q^{\vee(n+1)}, M_x^\vee](p) \\
&= \sum_{n\geq 0} [M_x^{\vee(n)} \circ T \circ Q^{\vee(n+1)} \circ M_x^\vee(p) - M_x^{\vee(n+1)} \circ T \\
&\circ \ Q^{\vee(n+1)}(p)] \\
&= T(p).
\end{aligned}$$

Pour montrer que $(\int_2 T)(a) = 0$, il suffit de remarquer que :

$$Q^\vee(a) = \Lambda \circ Q \circ \Lambda(a) = \Lambda \circ Q(a) = \Lambda(\ a\ Q(1)) = \Lambda(0) = 0,$$

nous pouvons donc déduire que $Q^{\vee(n+1)}(a) = 0$ et par conséquent que l'on a $(\int_2 T)(a) = 0$ pour tout a dans $\mathcal{R}$. $\square$

Proposition 2.5.8 *Si T est un opérateur alors la deuxième intégrale de Pincherle $\int_2 T$, est un opérateur.*

Démonstration : On a à montrer que la deuxième intégrale de Pincherle $\int_2 T$ est $\mathcal{R}$-linéaire à gauche, ce qui revient à montrer que $(\int_2)T(ax^n) = a(\int_2 T)(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathcal{R}$. Pour cela, faisons une récurrence sur n. Il est clair, d'après le lemme 2.5.7, que $(\int_2 T)(a) = 0 = a(\int_2 T)(1)$. Supposons maintenant que $(\int_2 T)(ax^n) = a(\int_2 T)(x^n)$ et calculons $(\int_2 T)(ax^{n+1})$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\textstyle\int_2 T)(ax^{n+1}) = (\int_2 T)(axx^n) &= (\textstyle\int_2 T)((xa-a')x^n) \\ &= (\textstyle\int_2 T)(xax^n) - (\int_2 T)(a'x^n)\ ;\end{aligned}$$

où, d'après notre notation déjà introduite, a' est l'image de a par la dérivation ∂. Or, $(\int_2 T)(xax^n) = \int_2 T \circ M_x^\vee(-ax^n)$ d'où par l'hypothèse de récurrence

$$(\textstyle\int_2 T)(xax^{n+1}) = \int_2 T \circ M_x^\vee(-ax^n) - a'\int_2 Tx^n\ ;$$

puisque par le lemme 2.5.7, on a $[\int_2 T, M_x^\vee] = T$, on en déduit

$$(\textstyle\int_2 T)(ax^{n+1}) = M_x^\vee \circ \int_2 T(-ax^n) + T(-ax^n) - a'\int_2 Tx^n\ ;$$

on utilise une seconde fois l'hypothèse de récurrence et on obtient :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_2 T(ax^{n+1}) &= M_x^\vee((-a)(\textstyle\int_2 T)x^n) - aTx^n - a'(\int_2 T)x^n \\ &= (xa-a')(\textstyle\int_2 T)x^n - aTx^n \\ &= ax(\textstyle\int_2 T)x^n - aTx^n = a(x(\int_2 T)x^n - Tx^n).\end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. □

Proposition 2.5.9 *Soit T un opérateur. La deuxième intégrale de Pincherle est l'unique opérateur U tel que $\partial_2 U = T$ et $U1 = 0$.*

Démonstration : Le lemme 2.5.7 montre que $\partial_2 U = T$ et $U1 = 0$. Il reste donc à vérifier l'unicité de U. Si V est un autre opérateur vérifiant, $\partial_2 V = T$ et $V1 = 0$, on a $\partial_2(U-V) = 0$ et $(U-V)1 = 0$. Ceci montre que $U-V$ est $\mathcal{D}$-linéaire à gauche, d'où pour tout p o.d.f. de $\mathcal{D}$, les égalités

$$(U-V)p = p(U-V)1 = 0\ .$$

□

Soit $\boldsymbol{g}_2$ l' antimorphisme d'anneaux de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{O}$ tel que $(\boldsymbol{g}_2(d))(p) = pd$ (on vérifie en effet immédiatement que $(\boldsymbol{g}_2(dp))(p) = pdp = (\boldsymbol{g}_2(p))(pd) = (\boldsymbol{g}_2(p)\circ\boldsymbol{g}_2(d))(p)$). On remarque que nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{g_2} \mathcal{O} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{O} \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

de $\mathcal{D}$-bimodules.La structure de $\mathcal{D}$-bimodule de $\mathcal{O}$ est celle qui se déduit de $\boldsymbol{g}_2$; par conséquent elle est constituée de la structure de $\mathcal{D}$-module à droite donnée par la multiplication à gauche $(T, p) \mapsto \boldsymbol{g}_2(p) \circ T$ et de la structure de $\mathcal{D}$-module à gauche donnée par la multiplication à droite $(T, p) \mapsto T \circ \boldsymbol{g}_2(p)$. Cette suite exacte (2.2) induit une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules à droite qui est scindée par la deuxième intégrale de Pincherle $\int_2 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, de sorte qu'il existe une rétraction $\boldsymbol{h}_2$ qui scinde $\boldsymbol{g}_2$. Cette rétraction est un morphisme de $\mathcal{D}$-modules à droite défini par $\boldsymbol{h}_2(T) = T1$.

Chapitre 3

La cogèbre des opérateurs différentiels formels

Nous allons maintenant continuer l'étude des opérateurs en introduisant certaines classes particulières d'opérateurs à l'aide d'une structure de cogèbre de l'anneau $\mathcal{D}$ des o.d.f.. Nous insisterons sur les opérateurs de composition, qui, comme nous le verrons, forment une classe importante d'opérateurs et vers lesquels nous reviendrons toujours. Ces opérateurs de composition sont l'exacte généralisation des opérateurs « shift-invariants » de Rota et autres auteurs anglophones. Notre terminologie sur ce point vient de Bourbaki [9]. D'autres opérateurs, comme les opérateurs ombraux et les opérateurs de Sheffer, sont aussi très utiles pour le développement des méthodes ombrales.

3.1 L'augmentation

On définit l'augmentation comme étant l'unique forme linéaire ε sur le $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ telle que :

$$\begin{aligned} &\varepsilon\,(1) = 1 \\ &\varepsilon\,(x^n) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

On remarque que, quelque soit l'opérateur différentiel formel p,

$$\varepsilon\,(p) = p.1$$

de sorte que l'application ε est en fait l'unique application $\mathcal{D}$-linéaire à gauche de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}_0$ telle que :

$$\varepsilon\,(1) = 1$$

De plus, on dispose de l'identité $p.r = \varepsilon(pr)$.

3.2 L'application diagonale

On définit l'application diagonale, appelée aussi la comultiplication, ou la diagonalisation, comme étant l'unique application $\mathcal{R}$-linéaire Δ de ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ dans ${}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{R}} {}^{\diamond}\mathcal{D}$ telle que :

$$\Delta\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}$$

On remarque que $\Delta\left(x^n\right) = x \lhd \Delta\left(x^{n-1}\right)$ pour tout entier $n \geq 1$, ce qui signifie que Δ est l'unique application $\mathcal{D}$-linéaire à gauche de $\mathcal{D}$ dans $({}^{\diamond}\mathcal{D} \otimes {}^{\diamond}\mathcal{D}, \lhd)$ telle que $\Delta\left(1\right) = 1 \otimes 1$
On a donc l'identité $\Delta\left(p\right) = p \lhd \left(1 \otimes 1\right)$.

On voit que la donnée de ces deux applications ε et Δ confère au $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ une structure de $\mathcal{R}$-cogèbre cocommutative isomorphe à la cogèbre appelée binomiale par Joni et Rota [25, page 9]. Cette cogèbre binomiale a été étudiée de manière plus détaillée dans [23]. Nous appellerons cette $\mathcal{R}$-cogèbre la *cogèbre des opérateurs différentiels formels* ou en abrégé la *cogèbre des o.d.f.*. Elle sera notée $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$.

Remarque 3.2.1 *La cogèbre des o.d.f est munie d'une structure filtrée. En effet avec les $\mathcal{D}_n$ définis dans les propriétés 1.1.4 et 1.1.6, on a une filtration croissante du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ par des sous-cogèbres $\mathcal{D}_n$, avec $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{D}_n = \{0\}$, de sorte que $(\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}, (\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ est une $\mathcal{R}$-cogèbre filtrée.*

Remarque : On sait que, lorsque la dérivation de l'anneau $\mathcal{R}$ est nulle, l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels formels s'identifie à la $\mathcal{R}$-algèbre des polynômes en une indéterminée ; il est alors facile de vérifier que cette structure de $\mathcal{R}$-algèbre de $\mathcal{D}$ est compatible avec la structure de cogèbre, de sorte qu'on a en fait ici une structure de bigèbre. Dans le cas général, il n'en est plus de même, puisque $\mathcal{D}$ n'est pas une $\mathcal{R}$-algèbre. Cependant, on pourrait vérifier que $\mathcal{D}$ est un bialgébroïde sur $\mathcal{R}$ au sens de [31].

3.3 Opérateurs de composition

Définition 3.3.1 *Un opérateur de composition est un opérateur T tel que*

$$\Delta \circ T = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta\ .$$

Autrement dit, un opérateur de composition est un endomorphisme du $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$-comodule $(\mathcal{D}, \Delta)$. Bien sûr, la relation $\Delta \circ T = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$ peut être remplacée dans cette définition par $\Delta \circ T = (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes T) \circ \Delta$, puisque la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ est cocommutative.

3.3.1 Exemples

Les multiplications à gauche
Pour $r \in \mathcal{R}$, on a déjà défini l'opérateur L_r de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ par $L_r p = rp$. Il est immédiat que L_r est un opérateur de composition.

Les multiplications à droite
Pour $r \in \mathcal{R}$, la l'opérateur M_r de multiplication à droite par r est défini par $M_r p = pr$. On vérifie facilement que $\Delta \circ M_r$ et $(M_r \otimes Id_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$ sont deux applications $\mathcal{D}$-linéaires à gauche de $\mathcal{D}$ dans $({}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}, \lhd)$. Comme ces deux applications donnent à 1 la même image $r \otimes 1$, on voit qu'elles sont identiques, et donc que M_r est un opérateur de composition.

Les opérateurs hyperdifférentiels D_i, $i \in \mathbb{N}$ Puisque les puissances x^n de l'élément x forment une base du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$, il existe une unique suite $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs telle que pour tout $p \in \mathcal{D}$ on ait

$$\Delta(p) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes D_i p \,.$$

Explicitement on a

$$\begin{array}{lll} & D_i x^n = \binom{n}{i} x^{n-i} & \text{pour } 0 \le i \le n \\ \text{et} & D_i x^n = 0 & \text{pour } i > n. \end{array}$$

Dans le cas où la dérivation ∂ de $\mathcal{R}$ est nulle, les opérateurs D_i ont été considérés par certains auteurs, notamment Dieudonné [18] qui les relie à ce qu'il appelle les « semi-dérivations ». On les appelle aussi « dérivées de Hasse » en hommage aux travaux précurseurs de Hasse et Schmidt [22]. La terminologie « opérateur hyperdifférentiel » a été utilisée dans des travaux récents [13]. L'énoncé suivant signifie que la suite $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une « dérivation supérieure » de l'anneau $\mathcal{D}$ [50, page 140].

Proposition 3.3.2 *Pour tout couple $(p,q) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} D_0 p &= p \\ D_i 1 &= 0 \qquad \textit{pour } i > 0 \\ D_i(pq) &= \sum_{k=0}^{i} (D_k p)(D_{i-k} q) \end{aligned}$$

En particulier D_1 est une dérivation de l'anneau $\mathcal{D}$.

Démonstration : On a $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, donc $D_0 1 = 1$ et $D_i 1 = 0$ pour $i > 0$. Puisque ε est une coünité de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$, l'application $(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ coincide avec le morphisme naturel qui identifie ${}^\diamond\mathcal{D}$ à ${}^\diamond\mathcal{D} \otimes \mathcal{R}$, d'où l'égalité

$D_0 p = p$ pour tout $p \in \mathcal{D}$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}} D_i\,(pq) \otimes x^i &= \Delta\,(pq) = p \lhd \Delta\,(q) = p \lhd \sum_{j\in\mathbb{N}} (D_j q) \otimes x^j \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} p \lhd \big((D_j q) \otimes x^j\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p \lhd \big((1 \otimes 1) \rhd_1 (D_j q) \rhd_2 x^j\big) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta(p) \rhd_1 (D_j q) \rhd_2 x^j = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} (D_k p)(D_j q) \otimes x^{k+j}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $D_i\,(pq) = \sum_{k=0}^{i} (D_k p)(D_{i-k} q)$. □

Proposition 3.3.3 *Pour tout entier naturel i, l'opérateur D_i est de composition.*

Démonstration : Soit p un o. d. f. ; on considère l'élément $\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes \Delta\,(D_i p)$ de ${}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$. On observe que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes \Delta\,(D_i p) = [(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes \Delta) \circ \Delta]\,(p)\,,$$

d'où par coassociativité et cocommutativité de Δ

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes \Delta\,(D_i p) = [(\Delta \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta]\,(p) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Delta\,(D_i p) \otimes x^i,$$

d'où la relation

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes \Delta\,(D_i p) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} x^j \otimes D_j D_i p \otimes x^i = \sum_{j\in\mathbb{N}} x^j \otimes (D_j \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}})\,(\Delta\,(p))\,.$$

Puisque les $\left(x^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ forment une base du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$, on a $\Delta \circ D_i = (D_i \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$, comme on voulait l'établir. □

Il est utile pour la suite de préciser le lien entre les opérateurs hyperdifférentiels D_i et le degré.

Lemme 3.3.4 *Pour tout élément non nul p de $\mathcal{D}$, on a*

$$\deg p = \max\{i \in \mathbb{N} \mid D_i p \neq 0\}.$$

Démonstration : On remarque en utilisant la définition des opérateurs hyperdifférentiels D_i que $D_i p = 0$ si $i > \deg p$ et que $D_{\deg p} p$ n'est autre que le coefficient dominant de p. □

Les opérateurs de translation E^a.

Proposition 3.3.5 *Pour tout $a \in \mathcal{R}$, l'application E^a est un opérateur de composition.*

Démonstration : Il s'agit de montrer l'identité $\Delta \circ E^a = (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a) \circ \Delta$. Pour cela il suffit de vérifier par récurrence que

$$\Delta\left((x+a)^n\right) = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)\left(\Delta\left(x^n\right)\right) .$$

Pour $n = 0$,

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)(1 \otimes 1) = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)\left(\Delta(1)\right).$$

Supposons que

$$\Delta\left((x+a)^n\right) = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)\left(\Delta\left(x^n\right)\right) ;$$

on calcule

$$\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) = \Delta\left((x+a)(x+a)^n\right) = (x+a) \triangleleft \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)\left(\Delta\left(x^n\right)\right),$$

d'où

$$\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) = (x+a) \triangleleft \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes (x+a)^k ,$$

soit

$$\begin{aligned}
\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} \otimes (x+a)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes x\,(x+a)^k \\
&\quad + a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes (x+a)^k \\
\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} \otimes (x+a)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes (x+a)^{k+1} ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \otimes (x+a)^k ,$$

d'où finalement

$$\Delta\left((x+a)^{n+1}\right) = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes E^a\right)\left(\Delta\left(x^{n+1}\right)\right) ,$$

comme on voulait le vérifier. □

3.4 L'algèbre des opérateurs de composition

Proposition 3.4.1 *Les opérateurs de composition forment une algèbre $\mathcal{C}$ (où la multiplication est la composition des applications) isomorphe à l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ des o.d.f.. L'isomorphisme de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{C}$ est l'application qui à la forme linéaire γ associe $(\gamma \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$. L'isomorphisme réciproque est l'application $T \longmapsto \varepsilon \circ T$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}^*$.*

Démonstration : Voir [48, proposition 1, page 39]. □

Puisque la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ est cocommutative, on a le corollaire qui suit.

Corollaire 3.4.2 *L'algèbre $\mathcal{C}$ est commutative.*

Corollaire 3.4.3 *Tout opérateur de composition est un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^\diamond$ constitué par le groupe additif de $\mathcal{D}$ muni de l'action de $\mathcal{R}$ par multiplication à droite.*

En effet, on a vu que les opérateurs M_r de multiplication à droite sont des opérateurs de composition particuliers.

Corollaire 3.4.4 *Tout opérateur de composition commute à tous les opérateurs de translation E^a.*

Théorème 3.4.5 *Soit T un opérateur. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur T est de composition.*
2. *L'opérateur T commute à l'opérateur hyperdifférentiel D_i pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Démonstration L'implication (1) ⇒ (2) résulte du fait que $\mathcal{C}$ est commutative.
Montrons maintenant (2) ⇒ (1). Pour $p \in \mathcal{D}$ on a

$$\begin{aligned} \Delta(Tp) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes D_i T p = \sum_{i\in\mathbb{N}} x^i \otimes T D_i p \\ &= ((\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes T) \circ \Delta)(p) \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta \circ T = (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes T) \circ \Delta.$$

Corollaire 3.4.6 *Si A est un opérateur de composition, alors $A^\vee$ est un opérateur de composition.*

Démonstration : Il y a deux étapes : d'abord montrer que $A^\vee$ est un opérateur, puis qu'il est de composition en utilisant le théorème 3.4.5.

Par hypothèse, A est un opérateur de composition, donc d'après le corollaire 3.4.3, $A \in \mathcal{O}^\vee = End_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}^\diamond)$ et par conséquent $A^\vee = \Lambda \circ A \circ \Lambda \in \mathcal{O}$ d'où $A^\vee$ est un opérateur.

Pour conclure, il suffit maintenant (théorème 3.4.5) de montrer que $A^\vee$ commute à l'opérateur hyperdifférentiel D_i pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui est équivalent à dire que A commute à $D_i^\vee$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; or un calcul simple montre que ${D_i}^\vee = (-1)^i D_i$ et comme A est un opérateur de composition, on a alors le résultat. $\square$

Le résultat suivant montre que la topologie induite sur l'algèbre $\mathcal{C}$ par la topologie de l'algèbre des opérateurs $\mathcal{O}$ coïncide avec la topologie métrique habituellement définie par la norme sur des espaces d'applications linéaires entre espaces normés. En effet, la topologie discrète de $\mathcal{D}$ est celle induite par la norme $\|p\| = 2^{\deg p}$.

Corollaire 3.4.7 *Si T est un opérateur de composition, on a la formule*

$$\mathrm{ord}(T) = \min_{p \neq 0}(\deg p - \deg Tp) \ .$$

Démonstration : Fixons d'abord un o.d.f. non nul p et posons $i = \deg Tp$. Alors on sait par le lemme 3.3.4 que $D_i Tp \neq 0$. Puisque T est de composition, il commute à D_i (théorème 3.4.5) ; on a donc $T(D_i p) \neq 0$, d'où $\deg D_i p \geq$ ord T. Par la définition de l'opérateur hyperdifférentiel D_i, on a clairement $\deg D_i p \leq \deg p - i$, d'où l'inégalité ord $T \leq \deg p - \deg Tp$.

Réciproquement, posons $p = x^{\mathrm{ord}\, T}$; pour $j > 0$, on sait que $\deg D_j p <$ ord T, donc $TD_j p = 0 = D_j Tp$. Par le lemme 3.3.4, on en déduit que Tp est de degré au plus 0. Puisqu'on sait que $Tp \neq 0$ par définition de ord T, on a en fait $\deg Tp = 0$ et donc $\mathrm{ord} T \geq \min_{p \neq 0}(\deg p - \deg Tp)$. $\square$

Corollaire 3.4.8 *Si T est un opérateur de composition, alors il respecte la filtration de $\mathcal{D}$, au sens que $T(\mathcal{D}_n) \subseteq \mathcal{D}_n$ pour tout entier relatif n.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire 3.4.7 et du fait que l'ordre de T est un entier naturel. $\square$

Corollaire 3.4.9 *Un opérateur de composition T est bijectif si et seulement si $\varepsilon(T1)$ est élément de $\mathcal{R}^\bullet$.*

Démonstration : Soit T un opérateur de composition bijectif. Pour montrer que $\varepsilon(T1)$ est un élément inversible de $\mathcal{R}$, il suffit de montrer la formule $\varepsilon(T1)\,\varepsilon(U1) = \varepsilon(UT1)$ pour tout opérateur de composition U. En effet, si on avait $U \circ T = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, on en conclurait alors $\varepsilon(T1)\varepsilon(U1) = \varepsilon(1) = 1$ ce qui impliquerait bien que $\varepsilon(T1) \in \mathcal{R}^\bullet$.Or on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(T1)\,\varepsilon(U1) &= (\varepsilon \otimes \varepsilon)(T1 \otimes U1) \\
&= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes U) \circ (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta(1) \ ;
\end{aligned}$$

puisque T et U sont des opérateurs de composition, on a $(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes U) \circ (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta = \Delta \circ U \circ T$ donc

$$\varepsilon(T1)\,\varepsilon(U1) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta((U \circ T)(1)) = (\mathrm{Id}_{\mathcal{R}} \otimes \varepsilon) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta(UT1) \ ;$$

mais ε est la coünité de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, c'est-à-dire que $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. On en déduit $\varepsilon(T1)\,\varepsilon(U1) = \varepsilon(UT1)$, comme il fallait le montrer.

Réciproquement, si $\varepsilon(T1)$ est élément de $\mathcal{R}^\bullet$, il suffit de montrer que, pour chaque entier naturel n, l'endomorphisme T_n de $\mathcal{D}_n$ induit par T en vertu du corollaire 3.4.8 est une bijection. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, puisque 1 engendre $\mathcal{D}_0$, il existe $r \in \mathcal{R}$ tel que $T_0(1) = r$; alors $r = \varepsilon(T1)$; puisque, par hypothèse, r est élément de $\mathcal{R}^\bullet$, il forme une base de $\mathcal{D}_0$, ce qui fait voir que T_0 est bijective. Formulons maintenant l'hypothèse de récurrence que T_n est bijectif ; on considère le diagramme suivant de $\mathcal{R}$-modules :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_n & \longrightarrow & \mathcal{D}_{n+1} & \overset{\varepsilon\circ D_{n+1}}{\longrightarrow} & \mathcal{R} & \longrightarrow & 0 \\
 & & T_n\downarrow & & \downarrow T_{n+1} & & \downarrow \boldsymbol{f} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_n & \longrightarrow & \mathcal{D}_{n+1} & \overset{\varepsilon\circ D_{n+1}}{\longrightarrow} & \mathcal{R} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où $\boldsymbol{f}(r) = \varepsilon(T1)r$. Vérifions que ce diagramme est commutatif : c'est évident pour le carré de gauche par définition de T_n et T_{n+1} ; on va donc se limiter au carré de droite. Soit p un élément de $\mathcal{D}_{n+1}$, alors il existe $q \in \mathcal{D}_n$ et $a \in \mathcal{R}$ tels que $p = ax^{n+1} + q$. On a d'une part

$$(\boldsymbol{f} \circ \varepsilon \circ D_{n+1})(p) = \boldsymbol{f} \circ \varepsilon(aD_{n+1}x^{n+1} + D_{n+1}q)\ .$$

Comme deg $q \le n$ on voit que $D_{n+1}q = 0$ et puisque $D_{n+1}x^{n+1} = 1$, on arrive à :

$$(\boldsymbol{f} \circ \varepsilon \circ D_{n+1})(p) = \varepsilon(T1)a\ .$$

D'autre part, calculons

$$(\varepsilon \circ D_{n+1} \circ T_{n+1})(p) = a((\varepsilon \circ D_{n+1} \circ T)(x^{n+1})) + (\varepsilon \circ D_{n+1} \circ T)(q)\ ;$$

or T est un opérateur de composition donc commute à l'opérateur hyperdifférentiel D_{n+1}, de plus par le corollaire 3.4.8 $Tq \in \mathcal{D}_n$ donc $D_{n+1}Tq = 0$; il en résulte

$$(\varepsilon \circ D_{n+1} \circ T_{n+1})(p) = a(\varepsilon(T \circ D_{n+1}(x^{n+1}))) = a\varepsilon(T1)\ ,$$

ce qui achève de vérifier que le diagramme ci-dessus est commutatif. Le lemme du serpent permet de conclure que T_{n+1} est bijectif ; en effet T_n est bijectif par hypothèse de récurrence et $\boldsymbol{f}$ l'est aussi car l'élément $\varepsilon(T1)$ est par hypothèse inversible dans $\mathcal{R}$. □

Remarque : Une autre méthode de preuve du corollaire 3.4.9 m'a été communiquée par B. Diarra : elle consiste d'abord à obtenir la table de multiplication des opérateurs hyperdifférentiels D_i pour $i \ge 0$: on vérifie facilement que $D_iD_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$. Puis on montre que ces opérateurs hyperdifférentiels forment une base topologique de l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition. À partir de là, il est facile de montrer qu'un opérateur de composition $T = \sum_{i\geq 0} a_i D_i$ est inversible si et seulement si a_0 est inversible. Or $a_0 = \varepsilon(T1)$. Nous avons préféré ici une méthode plus intrinsèque puisqu'elle n'utilise pas de base de $\mathcal{C}$.

Remarque 3.4.10 *Contrairement au cas classique, pour qu'un opérateur soit de composition, il n'est pas suffisant qu'il commute à* D_1. En effet si $\mathcal{R}$ est de caractéristique ℓ et si l'on pose $Tx^n = x^r$ où r est le reste de la division euclidienne de n par ℓ, il est alors facile de voir que $D_1 \circ T = T \circ D_1$ alors que $D_\ell \circ T \neq T \circ D_\ell$.

Remarque 3.4.11 *Les réciproques des corollaires 3.4.3 et 3.4.4 sont fausses.* En effet, soit ℓ un nombre premier et posons $\mathcal{R} = \mathbb{F}_\ell$ muni de la dérivation nulle. Alors $\mathcal{D}$ s'identifie à l'anneau de polynômes $\mathbb{F}_\ell[x]$. Soient alors les applications :

$$\begin{array}{rccl} E^a : & \mathbb{F}_\ell[x] & \longrightarrow & \mathbb{F}_\ell[x] \\ & p(x) & \longmapsto & E^a p(x) = p(x+a) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{F}_\ell[x] & \longrightarrow & \mathbb{F}_\ell[x] \\ & p(x) & \longmapsto & Tp(x) = p(x^\ell) = p(x)^\ell \end{array}$$

On a donc :

$$(E^a \circ T)(p(x)) = E^a T p(x) = p(x^\ell + a^\ell) \ ;$$

et

$$(T \circ E^a)(p(x)) = T E^a p(x) = p(x^\ell + a^\ell)$$

donc $E^a \circ T = T \circ E^a$; ainsi T commute avec tous les opérateurs de translation, cependant, si T était un opérateur de composition, d'après le théorème 3.4.5, il devrait commuter avec D_1 ; or pour $p(x) = x$, on a $(T \circ D_1)(p) = T1 = 1$ et $(D_1 \circ T)(p) = D_1 x^p = 0$, donc T n'est pas un opérateur de composition.

3.5 Calcul de Pincherle des opérateurs de composition

Un calcul simple montre que la première dérivée de Pincherle d'un opérateur hyperdifférentiel D_i est, pour tout entier $i \geq 1$, donnée par $\partial_1 D_i = D_{i-1}$. Comme $D_i 1 = 0$ pour $i \geq 1$, il en résulte par la proposition 2.5.4 que

$$\textstyle\int_1 D_i = D_{i+1} \ ,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.5.1 *Si T est un opérateur de composition, alors $\partial_1 T = [T, M_x]$ est un opérateur de composition.*

Démonstration : Comme la première dérivée de Pincherle de T est un opérateur, pour montrer qu'il est de composition, il suffit d'après le théorème 3.4.5, de montrer qu'il commute à l'opérateur hyperdifférentiel D_i pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0$, D_0 est l'identité de $\mathcal{D}$ et il n'y a rien à montrer. Pour traiter le cas $i \geq 1$, nous allons utiliser l'identité de Jacobi

$$[[D_i, M_x], T] + [[T, D_i], M_x] + [[M_x, T], D_i] = 0.$$

Puisque T est un opérateur de composition alors on sait que $[T, D_i] = 0$. On remarque également que $[[D_i, M_x], T] = [D_{i-1}, T] = 0$ car T est un opérateur de composition, d'où $[[T, M_x], D_i] = 0$ et donc $\partial_1 T = [T, M_x]$ est bien un opérateur de composition. $\square$

Proposition 3.5.2 *Si T est un opérateur de composition, alors la première intégrale de Pincherle $\int_1 T$ de l'opérateur T est un opérateur de composition.*

Démonstration : Comme la première intégrale de Pincherle est un opérateur, pour montrer qu'il est de composition, il suffit d'après le théorème 3.4.5, de montrer qu'il commute à l'opérateur hyperdifférentiel D_i pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour cela, nous allons là aussi utiliser l'identité de Jacobi

$$[[\textstyle\int_1 T, M_x], D_i] + [[D_i, \int_1 T], M_x] + [[M_x, D_i], \int_1 T] = 0 \qquad (3.1)$$

Or $[M_x, D_i] = -\partial_1 D_i = -D_{i-1}$, donc le dernier terme du membre de gauche de l'identité (3.1) se réduit à $[[M_x, D_i], \int_1 T] = [-D_{i-1}, \int_1 T] = [\int_1 T, D_{i-1}]$. De même, on sait que la première dérivée de Pincherle de $\int_1 T$ est T (proposition 2.5.4) et donc le premier terme du membre de gauche de l'identité (3.1) n'est rien d'autre que $[[\int_1 T, M_x], D_i] = [T, D_i] = 0$ puisque T est un opérateur de composition. L'identité (3.1) devient

$$[\textstyle\int_1 T, D_{i-1}] + [[D_i, \int_1 T], M_x] = 0\ . \qquad (3.2)$$

Pour montrer que $[\int_1 T, D_i] = 0$, nous allons faire une récurrence sur i. Pour $i = 0$, on a $D_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ et donc $[\int_1 T, D_0] = 0$. Supposons maintenant que $[\int_1 T, D_{i-1}] = 0$ donc l'identité (3.2) devient $[[D_i, \int_1 T], M_x] = 0$ c'est-à-dire $\partial_1 \big([\int_1 T, D_i]\big) = 0$, pour pouvoir conclure que $[\int_1 T, D_i] = 0$, il suffit (corollaire 2.5.5) de vérifier que $[\int_1 T, D_i]1 = 0$, or $[\int_1 T, D_i]1 = \int_1 T(D_i 1) - D_i(\int_1 T1) = 0$ car $D_i 1 = 0$ et $\int_1 T1 = 0$. $\square$

Nous examinons maintenant ce que devient la suite exacte (2.1) par restriction à l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition.

Lemme 3.5.3 *Soit $\boldsymbol{g}$ le morphisme d'anneaux de la proposition 2.4.2 de $\mathcal{R}[t]$ dans $\mathcal{O}$. L'image réciproque $\boldsymbol{g}^{-1}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par $\boldsymbol{g}$ est égale à $\mathcal{R}$.*

Démonstration : D'une part, si $r \in \mathcal{R}$, alors $\boldsymbol{g}(r) = L_r$ est élément de $\mathcal{C}$.

D'autre part, si $p \in \mathcal{R}[t]$ est de degré $d > 0$, on a $\boldsymbol{g}(p)1 = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, où $a_i \in \mathcal{R}$ et $a_d \neq 0$. Donc $\deg \boldsymbol{g}(p)1 = d > 0 = \deg 1$. Donc $\boldsymbol{g}(p)$ n'appartient pas à l'algèbre $\mathcal{C}$ en vertu du corollaire 3.4.8. □

Grâce à ce lemme et à la proposition 3.5.2, il résulte immédiatement de la suite exacte (2.1) que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\boldsymbol{g}_{|\mathcal{R}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

est une suite exacte scindée de $\mathcal{R}$-modules. Remarquons que l'application $\boldsymbol{g}_{|\mathcal{R}}$ est précisément le morphisme structural de l'algèbre $\mathcal{C}$.

Proposition 3.5.4 *Pour un opérateur de composition T, on a les formules*

$$\partial_2 T = (\partial_1(T^\vee))^\vee \qquad \text{et} \qquad \textstyle\int_2 T = (\int_1 (T^\vee))^\vee \ .$$

Démonstration : Puisque T est un opérateur de composition, $T^\vee$ est également un opérateur de composition par le corollaire 3.4.6. Par la définition de la première dérivée de Pincherle d'un opérateur, on a

$$\partial_1(T^\vee) = T^\vee \circ M_x - M_x \circ T^\vee \qquad \text{donc} \qquad (\partial_1(T^\vee))^\vee = T^{\vee\vee} \circ M_x^\vee - M_x^\vee \circ T^{\vee\vee} \ ;$$

et comme $T^{\vee\vee} = T$, on en déduit que

$$(\partial_1(T^\vee))^\vee = T^{\vee\vee} \circ M_x^\vee - M_x^\vee \circ T^{\vee\vee} = T \circ M_x^\vee - M_x^\vee \circ T = \partial_2 T \ ,$$

qui donne la première égalité à démontrer. La deuxième s'en déduit par les propositions 2.5.4 et 2.5.9. □

Corollaire 3.5.5 *Si T est un opérateur de composition, alors sa deuxième dérivée de Pincherle $\partial_2 T$ et sa deuxième intégrale de Pincherle $\int_2 T$ sont des opérateurs de composition.*

Démonstration : D'après la proposition 3.5.4, on a à montrer que $(\partial_1(T^\vee))^\vee$ est un opérateur de composition. L'opérateur T étant par hypothèse un opérateur de composition, , $T^\vee$ est également de composition par le corollaire 3.4.6. Par la proposition 3.5.1, on en déduit que la première dérivée de Pincherle $\partial_1(T^\vee)$ de $T^\vee$ est un opérateur de composition. Par une nouvelle utilisation du corollaire 3.4.6, il s'ensuit bien que $(\partial_1(T^\vee))^\vee$ est de composition. De même, pour montrer que $\int_2 T$ est un opérateur de composition, il suffit d'après la proposition 3.5.4 de montrer que $(\int_1(T^\vee))^\vee$ est un opérateur de composition. Or, comme T est de composition, d'après le corollaire 3.4.6, $T^\vee$ est également un opérateur de composition donc par la proposition 3.5.2, $\int_1(T^\vee)$ est un opérateur de composition et on déduit le résultat par le corollaire 3.4.6. □

À partir de la suite exacte (2.2), nous pouvons aussi écrire une suite exacte pour la deuxième dérivée de Pincherle sur l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition.

Lemme 3.5.6 *Soit $\boldsymbol{g}_2$ l'antimorphisme d'anneaux de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{O}$ tel que l'on ait $(\boldsymbol{g}_2(d))(p) = pd$. L'image réciproque $\boldsymbol{g}_2^{-1}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par $\boldsymbol{g}_2$ est égale à $\mathcal{R}$.*

Démonstration : D'une part, si $r \in \mathcal{R}$, alors $\boldsymbol{g}_2(r) = M_r$ est élément de $\mathcal{C}$.

D'autre part, si $p \in \mathcal{D}$ est de degré $d > 0$, on a $\deg \boldsymbol{g}_2(p)1 = \deg p = d > 0 = \deg 1$. Donc $\boldsymbol{g}_2(p)$ n'appartient pas à l'algèbre $\mathcal{C}$ en vertu du corollaire 3.4.8. ☐

Grâce à ce lemme et au corollaire 3.5.5, il résulte immédiatement de la suite exacte (2.2) que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{g_{2|\mathcal{R}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

est une suite exacte scindée de $\mathcal{R}$-modules.

3.6 Une codérivation de la cogèbre des o.d.f.

Soit M_x l'endomorphisme du $\mathcal{D}$-module à gauche $\mathcal{D}$ tel que $M_x 1 = x$, c'est-à-dire que M_x est la multiplication à droite par x. Rappelons que d'après une notation introduite après la proposition 1.3.1, on désigne par $\mathcal{R}_0$, le $\mathcal{D}$-module à gauche dont le groupe additif sous-jacent est celui de l'anneau $\mathcal{R}$ et où x agit selon la dérivation ∂. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{M_x} \mathcal{D} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{R}_0 \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

est une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules à gauche ; la suite exacte de $\mathcal{R}$-modules qu'elle induit est scindée par l'injection naturelle Ω de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}$, de sorte qu'il existe une rétraction Q, qui est un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, qui scinde M_x. Explicitement, l'application $\mathcal{R}$-linéaire Q est définie par les images des éléments de la base $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par

$$Qx^n = \begin{cases} x^{n-1} & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases} ,$$

c'est-à-dire que, pour tout p de $\mathcal{D}$, Qp est l'unique élément de $\mathcal{D}$ tel que

$$p = (Qp)x + \varepsilon(p) . \tag{3.6}$$

Proposition 3.6.1 *L'endomorphisme M_x de ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ est une codérivation de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f..*

Démonstration : Pour montrer que l'endomorphisme M_x de ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ est une codérivation de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des opérateurs différentiels formels, il suffit de verifier que l'on a :

$$\Delta \circ M_x = (M_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes M_x) \circ \Delta .$$

Puisque $(x^n)_n$ est une base du $\mathcal{R}$- module ${}^\diamond\mathcal{D}$, il suffit de l'appliquer aux deux membres de cette l'égalité et vérifier que l'on a le même résultat. En effet, d'une part on a :

$$\begin{aligned}(\Delta \circ M_x)(x^n) &= \Delta(x^n x)\\ &= \Delta(x^{n+1})\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \otimes x^{n+1-k},\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(M_x \otimes \mathrm{Id}_\mathcal{D} + \mathrm{Id}_\mathcal{D} \otimes M_x) \circ \Delta(x^n) &= (M_x \otimes \mathrm{Id}_\mathcal{D} + \mathrm{Id}_\mathcal{D} \otimes M_x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (M_x x^k) \otimes x^{n-k}\\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes (M_x x^{n-k})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \otimes x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k+1},\end{aligned}$$

ce qui, en utilisant l'identité classique $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ entre coefficients binomiaux, conduit à :

$$(M_x \otimes \mathrm{Id}_\mathcal{D} + \mathrm{Id}_\mathcal{D} \otimes M_x) \circ \Delta(x^n) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \otimes x^{n+1-k} \ .$$

□

Une autre démonstration, moins calculatoire, de la proposition précédente serait la suivante. On peut vérifier facilement que les deux applications $\Delta \circ M_x$ et $(M_x \otimes Id_\mathcal{D} + Id_\mathcal{D} \otimes M_x) \circ \Delta$ sont $\mathcal{D}$-linéaires à gauche de $\mathcal{D}$ dans $({}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}, \lhd)$. Comme ces deux applications donnent à 1 la même image $x \otimes 1 + 1 \otimes x$, on voit qu'elles sont identiques, et donc que l'endomorphisme M_x de ${}^\diamond\mathcal{D}$ est une codérivation de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des opérateurs différentiels formels.

Proposition 3.6.2 *Pour tout opérateur différentiel formel p, on a*

$$\deg(M_x p) = 1 + \deg p \qquad \textit{et} \qquad (\deg p \geq 1 \Longrightarrow \deg(Qp) = \deg p - 1) \ .$$

Démonstration : Comme $M_x p = px$, on a $\deg(M_x p) = \deg px = \deg(p) + 1$ par la propriété 1.1.9. Pour la deuxième assertion, comme $\deg \varepsilon(p) < \deg p$, de l'égalité (3.6) on tire $\deg p = \deg(Qp)x = 1 + \deg(Qp)$.

3.7 Étude générale des codérivations

Lemme 3.7.1 *Pour toute codérivation S de la cogèbre des opérateurs différentiels formels, on a l'identité $\varepsilon \circ S = 0$.*

Démonstration : En identifiant les produits tensoriels $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}$ respectivement à $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$, on calcule $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ S$; puisque ε est la coünité de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, on a

$$(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ S = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{R}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ S = \varepsilon \circ S \ .$$

D'autre part, puisque S est une codérivation, nous pouvons écrire

$$(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ S = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ (S \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes S) \circ \Delta = [(\varepsilon \circ S) \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes (\varepsilon \circ S)] \circ \Delta \ ;$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ S &= ((\varepsilon \circ S) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{R}}) \circ ((\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta) + (\mathrm{Id}_{\mathcal{R}} \otimes \varepsilon \circ S) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta \\ &= \varepsilon \circ S + \varepsilon \circ S; \end{aligned}$$

Donc $\varepsilon \circ S = 0$. □

Corollaire 3.7.2 *Si S est une codérivation de la cogèbre des opérateurs différentiels formels, il existe un unique endomorphisme A du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ tel que $S = M_x \circ A$.*

Définition 3.7.3 *Un endomorphisme T du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ est un correspondant de la codérivation S si $S \circ T = T \circ M_x$. On dira que c'est un correspondant strict si de plus $T1 = 1$.*

On remarque que deux endomorphismes qui correspondent à une même codérivation et qui prennent la même valeur en 1 sont égaux. En outre, toute codérivation admet un unique correspondant strict.

Proposition 3.7.4 *Soit T un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ tel que $T1$ est un élément groupoïdal de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f. et satisfaisant $\varepsilon(T1) = 1$. Si T est un correspondant d'une codérivation, alors T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$.*

Démonstration : Vérifions d'abord que $\varepsilon \circ T = \varepsilon$. Puisque par hypothèse $\varepsilon \circ T(1) = 1 = \varepsilon(1)$, il suffit de montrer que $\varepsilon \circ T(x^n) = 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. Or, en utilisant le fait que T est un correspondant de S et le lemme 3.7.1, on obtient

$$\varepsilon(Tx^n)) = \varepsilon(T \circ M_x(x^{n-1})) = \varepsilon \circ T \circ M_x(x^{n-1}) = \varepsilon \circ S \circ T(x^{n-1}) = 0 \ .$$

Montrons ensuite que $\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \Delta$. Comme $T1$ est un élément groupoïdal, on a $\Delta \circ T(1) = T1 \otimes T1 = (T \otimes T) \circ \Delta(1)$. Raisonnant par récurrence, supposons que $\Delta \circ T(x^n) = (T \otimes T) \circ \Delta(x^n)$ et déduisons-en que $\Delta \circ T(x^{n+1}) = (T \otimes T) \circ \Delta(x^{n+1})$. Puisque T est un correspondant de S, on a

$$\Delta \circ T(x^{n+1}) = \Delta \circ T \circ M_x(x^n) = \Delta \circ S \circ T(x^n) \ ;$$

comme S est une codérivation, on en tire

$$\Delta \circ T(x^{n+1}) = (S \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes S) \circ \Delta \circ T(x^n) \ ;$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence, le fait que M_x est une codérivation et l'égalité $S \circ T = T \circ M_x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta \circ T(x^{n+1}) &= (S \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes S) \circ [(T \otimes T) \circ \Delta](x^n) \\
&= [(S \circ T) \otimes T + T \otimes (S \circ T)] \circ \Delta(x^n) \\
&= (T \otimes T) \circ (M_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes M_x) \circ \Delta(x^n) \\
&= (T \otimes T) \circ \Delta \circ M_x(x^n) = (T \otimes T) \circ \Delta(x^{n+1}),
\end{aligned}$$

comme on voulait le montrer. □

3.8 Codérivations fortes et opérateurs ombraux

Lemme 3.8.1 *Soit C un opérateur de composition. La composée $M_x \circ C$ est une codérivation.*

Démonstration : Comme M_x est une codérivation, on a $\Delta \circ M_x \circ C = (M_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes M_x) \circ \Delta \circ C$; et sachant que C est un opérateur de composition et que Δ est cocommutative, il vient

$$\begin{aligned}
\Delta \circ M_x \circ C &= (M_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes M_x) \circ (C \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta \\
&= (M_x \circ C \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes M_x \circ C) \circ \Delta \ ;
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. □

Nous donnons un nom particulier aux codérivations du lemme 3.8.1, qui seront dans la suite les plus importantes.

Définition 3.8.2 *La codérivation S est dite forte s'il existe un opérateur de composition C tel que $S = M_x \circ C$.*

Définition 3.8.3 *Un opérateur ombral, aussi dit automorphisme fort de la cogèbre des o.d.f., est un automorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ qui est le correspondant strict d'une codérivation forte, autrement dit T est une bijection $\mathcal{R}$-linéaire vérifiant $T1 = 1$ et tel qu'il existe une codérivation forte S satisfaisant l'identité $T \circ M_x = S \circ T$.*

Il résulte de la proposition 3.7.4 qu'un automorphisme fort est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$.

Lemme 3.8.4 *Soient T un opérateur ombral et C un opérateur de composition. Alors $T \circ C \circ T^{-1}$ est un opérateur de composition.*

Démonstration : En utilisant le fait que T et T^{-1} sont des endomorphismes de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ et que C est un opérateur de composition, on voit que

$$\Delta \circ T \circ C \circ T^{-1} = (T \otimes T) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes C) \circ (T^{-1} \circ T^{-1}) \circ \Delta = (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes (T \circ C \circ T^{-1})) \circ \Delta \ ;$$

ce que l'on voulait montrer. □

Remarque 3.8.5 *Dans l'isomorphisme de la proposition 3.4.1, si l'opérateur de composition C correspond à la forme linéaire γ, alors l'opérateur de composition $T \circ C \circ T^{-1}$ correspond à la forme linéaire $(T^{-1})^*(\gamma) = \gamma \circ T^{-1}$.*

Demonstration : En effet

$$\varepsilon \circ T \circ C \circ T^{-1} = \varepsilon \circ C \circ T^{-1} \ ,$$

car on sait que $\varepsilon \circ T = \varepsilon$, puisque T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$.

Lemme 3.8.6 *La composée de deux opérateurs ombraux est un opérateur ombral.*

Démonstration : Soient T et U deux opérateurs ombraux, alors T et U sont des bijections $\mathcal{R}$-linéaires vérifiant $T1 = U1 = 1$ et il existe deux opérateurs de composition C et E tels que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$ et $U \circ M_x = M_x \circ E \circ U$. On en déduit que $T \circ U(1) = T1 = 1$ et que $T \circ U$ est une bijection $\mathcal{R}$-linéaire ; d'autre part, $T \circ U \circ M_x = T \circ M_x \circ E \circ U$ d'où

$$(T \circ U) \circ M_x = M_x \circ (C \circ T \circ E \circ T^{-1}) \circ T \circ U \ ;$$

pour pouvoir conclure que $T \circ U$ est un opérateur ombral, il suffit de remarquer que l'application $C \circ T \circ E \circ T^{-1}$ est un opérateur de composition en vertu du lemme 3.8.4. □

Proposition 3.8.7 *Soit T un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ qui est le correspondant strict d'une codérivation forte $S = M_x \circ C$, où $C \in \mathcal{C}$. Alors T est un opérateur ombral si et seulement si C est une bijection.*

Démonstration : Supposons d'abord que l'application T est un opérateur ombral, c'est-à-dire est bijective. Vérifions qu'alors C est bijectif. Si p est élément du noyau de C, on sait qu'il existe $q \in \mathcal{D}$ tel que $Tq = p$, d'où $T \circ M_x(q) = M_x(C(Tq)) = 0$, d'où $q = 0$ puisque T et M_x sont injectives ; par conséquent C est injectif. D'autre part, si p est un élément quelconque de $\mathcal{D}$, il existe $q \in \mathcal{D}$ tel que $Tq = px$. Appliquant alors la formule (3.6), on écrit $q = dx + a$, où $d = Qq \in \mathcal{D}$ et $a = \varepsilon(q) \in \mathcal{R}$. D'après la proposition 3.7.4, on sait que $\varepsilon \circ T = \varepsilon$, donc $a = \varepsilon(px) = 0$. Appliquant l'égalité $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$ à l'élément d, on en déduit que

$$M_x p = Tq = TM_x d = M_x CTd \ ,$$

d'où $p = CTd$ par injectivité de M_x, par conséquent C est surjectif.

Supposons maintenant que l'opérateur C est bijectif et vérifions que T l'est aussi. Pour montrer d'abord que T est surjectif, il suffit de montrer par récurrence sur n que $\mathcal{D}_n \subseteq T(\mathcal{D})$. Par hypothèse T est un correspondant strict, donc $1 = T1$; comme $\mathcal{D}_0$ est un $\mathcal{R}$-module libre de base (1), on a bien $\mathcal{D}_0 \subseteq T(\mathcal{D})$. Pour mener à bien la récurrence, on fait l'hypothèse que $\mathcal{D}_n \subseteq T(\mathcal{D})$ et il suffit d'en déduire que x^{n+1} est élément de l'image de T. Comme C est bijectif par hypothèse, il existe un élément $p \in \mathcal{D}$ tel que $x^n = Cp$; comme la bijection réciproque C^{-1} de C est un opérateur de composition, le corollaire 3.4.8 montre que $p \in \mathcal{D}_n$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{D}_n \subseteq T(\mathcal{D})$, il existe un élément $q \in \mathcal{D}$ tel que $p = Tq$. Alors

$$M_x \circ C \circ T(q) = M_x \circ C(p) = M_x x^n = x^{n+1} = TM_x q \in T(\mathcal{D}) \ ,$$

ce qui termine la démonstration du fait que T est surjective. Pour montrer par l'absurde que T est injective, on se donne $p \in \ker T \setminus \{0\}$ de degré minimal. Par la formule (3.6), on peut écrire $p = qx + a$ avec $Qp = q$ et $a = \varepsilon(p) = \varepsilon \circ T(p) = 0$ donc $p = qx = M_x q$. On en déduit

$$0 = Tp = T \circ M_x(q) = M_x \circ C \circ T(q) \ ;$$

puisque M_x est injective et que C est par hypothèse bijective, on voit que $Tq = 0$ d'oú, par minimalité du degré de p, $q = 0$ et donc $p = M_x 0 = 0$ ce qui est une contradiction. □

Lemme 3.8.8 *La bijection réciproque d'un opérateur ombral est un opérateur ombral.*

Démonstration : On vérifie facilement que si T est le correspondant strict d'une codérivation forte $M_x \circ C$, avec $C \in \mathcal{C}$, et si T est bijective, alors, comme C est bijective par la proposition 3.8.7, T^{-1} est le correspondant strict de la codérivation forte $M_x \circ (T^{-1} \circ C^{-1} \circ T)$ (en effet, on sait par le lemme 3.8.4 que l'application $T^{-1} \circ C^{-1} \circ T$ est un opérateur de composition), donc T^{-1} est un opérateur ombral. □

Il résulte des lemmes 3.8.6 et 3.8.8 que l'ensemble des opérateurs ombraux muni de la composition est un groupe que nous noterons $\mathcal{G}$.

On note $\mathcal{A}$ le groupe des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{C}$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les *opérateurs d'Appell*; ce sont les opérateurs de composition qui sont bijectifs, c'est-à-dire, en vertu du corollaire 3.4.9, les opérateurs de composition C tels que $\varepsilon(C1)$ est inversible dans $\mathcal{R}$.

Définition 3.8.9 *Le groupe $\mathcal{A}$ est appelé le groupe d'Appell. Le sous-groupe $\mathcal{S}$ du groupe des automorphismes du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ engendré par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$ est appelé le groupe de Sheffer. Un élément de $\mathcal{S}$ est appelé opérateur de Sheffer.*

D'après le lemme 3.8.4, le groupe $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison par les éléments de $\mathcal{G}$. D'autre part, il est facile de vérifier que $\mathcal{A} \cap \mathcal{G} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\}$. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est un produit semi-direct de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{A}$. En particulier, on a la suite exacte scindée de groupes

$$1 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1 \ . \tag{3.7}$$

D'après la proposition 3.8.7, on peut définir une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}$ en associant à un opérateur de composition C l'unique correspondant strict de la codérivation forte $M_x \circ C$. Il est facile de vérifier que cette application est bijective. La bijection réciproque $\natural$ définie par

$$\begin{array}{rccl} \natural : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & T & \longmapsto & C \in \mathcal{A} \mid T \circ M_x = M_x \circ C \circ T \end{array}$$

se laisse alors interpréter comme un cocycle (ou morphisme croisé) de $\mathcal{G}$ dans le groupe abélien $\mathcal{A}$ muni de l'action de $\mathcal{G}$ induite par la conjugaison.

Proposition 3.8.10 *Si S est une codérivation forte admettant T comme correspondant strict, alors l'application T est bijective si et seulement si $\varepsilon(D_1 S 1)$ est élément de $\mathcal{R}^\bullet$.*

Démonstration : Puisque S est une codérivation forte, il existe un opérateur de composition C tel que $S = M_x \circ C$. Puisque T est un correspondant de S, on a l'égalité $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$. On sait par le corollaire 3.4.8 que $C1$ appartient à $\mathcal{D}_0 = \mathcal{R}$; donc

$$\varepsilon(D_1 S 1) = \varepsilon \circ D_1 \circ M_x \circ C(1) = \varepsilon \circ D_1((C1)x) = \varepsilon(C1) \ .$$

En vertu du corollaire 3.4.9, on est ainsi ramené à montrer que T est bijectif si et seulement si C l'est aussi, ce qui est assuré par la proposition 3.8.7.
□

Chapitre 4

L'algèbre duale

Un principe fondamental est que le dual d'une cogèbre est une algèbre, il est alors naturel de travailler sur l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ de $\mathcal{D}$. Les éléments de cette algèbre duale sont des formes linéaires sur $\mathcal{D}$. On retrouve ainsi l'idée fondamentale du calcul ombral classique « moderne » qui est l'étude des suites d'éléments d'un anneau comme images par une forme linéaire d'éléments d'une base d'un module de dimension dénombrable.

4.1 La multiplication sur l'algèbre duale

On note $\mathcal{D}^*$ l'algèbre duale de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ des o.d.f. ; un élément de $\mathcal{D}^*$ est une forme linéaire φ sur le $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$. On note $\langle \varphi \mid p \rangle$ l'image de l'opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$ par la forme linéaire φ.

Le produit dans $\mathcal{D}^*$ est donné par la formule

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \mid x^n \rangle \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle \varphi_1 \mid x^k \right\rangle \left\langle \varphi_2 \mid x^{n-k} \right\rangle . \tag{4.1}$$

Le produit défini par la formule (4.1) est associatif et commutatif. Il admet pour élément unité la coünité ε.

Proposition 4.1.1 *Si φ_1, φ_2,..., φ_m sont m formes linéaires sur $\mathcal{D}$, alors :*

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 ... \varphi_m \mid x^n \rangle = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \binom{n}{i_1, i_2, ..., i_m} \left\langle \varphi_1 \mid x^{i_1} \right\rangle \left\langle \varphi_2 \mid x^{i_2} \right\rangle ... \left\langle \varphi_m \mid x^{i_m} \right\rangle \ .$$

Démonstration : Par récurrence sur m à partir de la formule (4.1).
□

Propriété 4.1.2 *Une forme linéaire φ est inversible dans $\mathcal{D}^*$ si et seulement si l'élément $\langle \varphi \mid 1 \rangle$ appartient à $\mathcal{R}^{\bullet}$.*

Démonstration : La condition est nécessaire car $\varphi \mapsto \langle \varphi \mid 1 \rangle$ est clairement un morphisme d'anneaux. Pour voir que la condition est suffisante, on considère une forme $\varphi \in \mathcal{D}^*$ telle que $\langle \varphi \mid 1 \rangle \in \mathcal{R}^\bullet$ et on pose $\langle \psi \mid 1 \rangle = (\langle \varphi \mid 1 \rangle)^{-1}$. Pour $n > 0$, on définit par récurrence $\langle \psi \mid x^n \rangle$ comme la solution de l'équation

$$0 = \langle \varphi \mid 1 \rangle \langle \psi \mid x^n \rangle + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \langle \varphi \mid x^k \rangle \langle \psi \mid x^{n-k} \rangle \ .$$

La forme linéaire ψ ainsi définie sur $\mathcal{D}$ est l'inverse de φ. □

Si $\mathcal{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on sait que $\mathcal{D}^*$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $\mathcal{R}[[t]]$ par l'application qui à φ associe son indicatrice $\sum_{n \geq 0} \frac{\langle \varphi \mid x^n \rangle}{n!} t^n$.

On peut expliciter l'isomorphisme de $\mathcal{D}^*$ sur $\mathcal{C}$ de la proposition 3.4.1 : c'est le morphisme de $\mathcal{R}$-algèbres qui envoie la forme linéaire φ à l'opérateur F défini par :

$$Fx^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varphi \mid x^k \rangle x^{n-k} \ .$$

On vérifie en effet sans difficulté que cet opérateur est un opérateur de composition. De plus on peut remarquer que le transposé de F est l'endomorphisme $\psi \longmapsto \varphi\psi$ de multiplication par φ dans $\mathcal{D}^*$, car on vérifie facilement que pour toute forme linéaire $\psi \in \mathcal{D}^*$ et pour tout opérateur différentiel formel p, on a

$$\langle \psi \mid Fp \rangle = \langle \psi\varphi \mid p \rangle \ . \tag{4.2}$$

L'isomorphisme réciproque de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}^*$ est visiblement l'application $F \longmapsto \varepsilon \circ F$.

Exemple 4.1.3 Soit $r \in \mathcal{R}$; l'opérateur de translation E^r donne naissance à la forme linéaire $\varepsilon^r = \varepsilon \circ E^r$ que nous appellerons la *forme évaluation en* r. De la propriété 1.5.2, il résulte que $\varepsilon^{a+b} = \varepsilon^a \varepsilon^b$ pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{R}$. En particulier, la forme augmentation ε est la forme évaluation en 0.

4.2 Ombre d'une forme linéaire

On note par $\mathcal{H}$ l'anneau des séries de Hurwitz formelles dont nous tirons la définition de [29]. On rappelle que les éléments de $\mathcal{H}$ sont les suites $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}$; les opérations d'addition et de multiplication dans $\mathcal{H}$ sont définies par :

$$(a_j)_{j \in \mathbf{N}} + (b_j)_{j \in \mathbf{N}} = (a_j + b_j)_{j \in \mathbf{N}} \ ,$$

et

$$(a_j)_{j \in \mathbf{N}} (b_j)_{j \in \mathbf{N}} = \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_k b_{j-k} \right)_{j \in \mathbf{N}} \ . \tag{4.3}$$

On remarque que le morphisme de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{H}$ qui à r dans $\mathcal{R}$ associe la suite $(r, 0, 0, ...)$ fait de $\mathcal{H}$ une $\mathcal{R}$-algèbre. On notera les séries de Hurwitz formelles par des lettres minuscules grecques surmontées d'un chapeau.

Définition 4.2.1 *L'ombre de la forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$ est la série de Hurwitz formelle :*

$$\hat{\varphi} = (\langle \varphi \mid x^n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Inversement, chaque série de Hurwitz formelle $\hat{\varphi} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une forme linéaire φ de $\mathcal{D}^*$ vérifiant

$$\langle \varphi \mid x^n \rangle = a_n \ , \tag{4.4}$$

pour tout $n \geq 0$. La forme linéaire ainsi définie par l'ombre d'une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$ coïncide avec φ. On a en conséquence la proposition suivante :

Proposition 4.2.2 *L'application $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ qui à toute forme linéaire sur $\mathcal{D}$ associe son ombre est un isomorphisme de $\mathcal{R}$-algèbres de $\mathcal{D}^*$ sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration : L'injectivité et la surjectivité résultent de ce que la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$. En outre, le fait que $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ est un morphisme de $\mathcal{R}$-algèbres résulte clairement des définitions des structures de $\mathcal{R}$-algèbres sur $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{H}$, spécialement les formules (4.1) et (4.3). □

Cette dernière proposition nous permet d'identifier $\mathcal{D}^*$ à $\mathcal{H}$. En particulier, pour toute série de Hurwitz formelle $\hat{\varphi} \in \mathcal{H}$ et pour tout opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$, nous noterons $\langle \hat{\varphi} \mid p \rangle$ l'image de p par la forme linéaire définie par $\hat{\varphi}$. Nous appellerons $\mathcal{H}$ l'algèbre ombrale.

Exemple 4.2.3 Pour $a \in \mathcal{R}$, la forme $\varepsilon \circ M_a$, notée μ_a, est caractérisée par

$$\left\langle \mu_a \mid x^j \right\rangle = \partial^j(a) = a^{(j)} = x^j.a \ ,$$

donc on a pour tout opérateur différentiel formel p de $\mathcal{D}$

$$\langle \mu_a \mid p \rangle = p.a \ .$$

L'ombre de la forme μ_a est $\hat{\mu}_a = (\partial^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, élément de $\mathcal{H}$ que nous appelons la *série de Taylor formelle de a*. De même, la forme linéaire μ_a sera appelée la *forme de Taylor de a*. Si a et b sont deux éléments de $\mathcal{R}$, on a $\mu_a\mu_b = \mu_{ab}$ par la formule de Leibnitz. L'application $a \longmapsto \mu_a$ est ainsi un morphisme injectif d'anneaux de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}^*$, que nous appellerons le *plongement taylorien*.

4.3 Filtration de l'algèbre duale

Par transposition et d'après la remarque 3.2.1, $\mathcal{D}^*$ est munie d'une structure filtrée. En effet la suite $\left(\mathcal{D}_n{}^{\perp}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite décroissante d'idéaux de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$, avec $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n{}^{\perp} = \mathcal{D}^*$, de sorte que $\mathcal{D}^*$ est une algèbre filtrée.

Ceci permet la définition de l'ordre d'un élément φ de $\mathcal{D}^*$.

Définition 4.3.1 *Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{D}$. Lorsque φ est non nulle, on définit son ordre par*

$$\operatorname{ord}\varphi = \max\{n \in \mathbb{N}; \varphi \in \mathcal{D}_{n-1}^{\perp}\} = \min\{k \in \mathbb{N}; \langle \varphi \mid x^k \rangle \neq 0\}.$$

En outre, on convient de poser $\operatorname{ord} 0 = +\infty$.

L'énoncé suivant est donc trivial.

Proposition 4.3.2 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}^*$ et $p \in \mathcal{D}$. Si $\operatorname{ord}\varphi > \deg p$ alors $\langle \varphi \mid p \rangle = 0$.*

On remarque que l'ordre d'une forme linéaire φ coïncide avec l'ordre de son ombre $\hat{\varphi}$, au sens défini par [29].

Proposition 4.3.3 *Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires sur $\mathcal{D}$, on a :*

$$\operatorname{ord}\varphi_1\varphi_2 \geq \operatorname{ord}\varphi_1 + \operatorname{ord}\varphi_2 \ ,$$

$$\operatorname{ord}(\varphi_1 + \varphi_2) \geq \min(\operatorname{ord}\varphi_1, \operatorname{ord}\varphi_2) \ .$$

Démonstration : Posons $n_1 = \operatorname{ord}(\varphi_1)$ et $n_2 = \operatorname{ord}(\varphi_2)$, on a en premier lieu

$$\langle \varphi_1 \mid x^{n_1} \rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad (k < n_1 \Rightarrow \quad \langle \varphi_1 \mid x^k \rangle = 0) \ ,$$

et en deuxième lieu

$$\langle \varphi_2 \mid x^{n_2} \rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad (k < n_2 \Rightarrow \quad \langle \varphi_2 \mid x^k \rangle = 0) \ .$$

Pour $n < n_1 + n_2$, on a alors $\langle \varphi_1\varphi_2 \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle \varphi_1 \mid x^k \right\rangle \left\langle \varphi_2 \mid x^{n-k} \right\rangle$; or le deuxième membre de cette égalité est nul, car on a soit $k < n_1$ et dans ce cas $\langle \varphi_1 \mid x^k \rangle = 0$, soit $n - k < n_2$ et dans ce cas $\langle \varphi_2 \mid x^{n-k} \rangle = 0$, d'où $\operatorname{ord}\varphi_1\varphi_2 \geq \operatorname{ord}\varphi_1 + \operatorname{ord}\varphi_2$. □

On munit $\mathcal{D}^*$ de la topologie induite par cette filtration [33, page 380], qui coïncide quand on identifie $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{H}$ avec la topologie naturelle définie par [29]. C'est la topologie la plus faible sur $\mathcal{D}^*$ qui rend continues les applications $\varphi \longmapsto \langle \varphi \mid p \rangle$ pour tout opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$. On peut aussi la décrire par la donnée pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^*$ de la base de voisinages $(\varphi + \mathcal{D}_j^{\perp})_{j \in \mathbb{N}}$ de φ. On munit naturellement $\mathcal{R}$ de la topologie discrète.

En vertu de la proposition 4.3.3, on voit que $\mathcal{D}^*$ est une $\mathcal{R}$-algèbre topologique, dans le sens que les applications $(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi + \psi$, $(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi\psi$, $\varphi \longmapsto -\varphi$ ainsi que l'application Υ qui à r dans $\mathcal{R}$ on associe $r.\varepsilon$ dans $\mathcal{D}^*$ sont toutes continues.

Proposition 4.3.4 *L'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ munie de sa filtration est un $\mathcal{R}$-module filtré complet.*

Démonstration : Ceci découle directement du fait que, si $(\varphi_n)_n$ est une suite de Cauchy [33, page 386] dans $\mathcal{D}^*$, alors chaque suite $\big(\langle \varphi_n \mid x^j \rangle\big)_n$ est stationnaire, donc converge dans $\mathcal{R}$ au sens de la topologie discrète vers un scalaire a_j ; il en résulte que la suite $(\varphi_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}^*$ vers la forme linéaire d'ombre $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. □

Corollaire 4.3.5 *Une série* $\sum \phi_n$ *à termes dans* $\mathcal{D}^*$ *converge si et seulement si on a* $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{ord} \phi_n = +\infty$.

Remarque : On peut dire que l'algèbre $\mathcal{D}^*$ est une algèbre profinie [48, proposition 1, page 44].

Il est intéressant de remarquer que l'isomorphisme de la proposition 3.4.1 entre les algèbres $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$ respecte les filtrations de ces deux algèbres : il s'agit donc d'une isométrie.

Proposition 4.3.6 *Soient* $\varphi \in \mathcal{D}^*$ *et* $F \in \mathcal{C}$ *tels que* $\varepsilon \circ F = \varphi$. *Alors on a*

$$\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} \varphi \ .$$

Démonstration : Ceci résulte clairement des définitions et du fait que

$$Fx^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varphi \mid x^k \rangle x^{n-k} \ .$$

□

4.4 La dualité entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$

Lemme 4.4.1 *Soit* $\mathfrak{f}$ *une forme linéaire de* $\mathcal{D}^*$ *dans* $\mathcal{R}$. *Les énoncés suivants sont logiquement équivalents.*
(i) la forme $\mathfrak{f}$ *est continue ;*
(ii) le noyau $\ker \mathfrak{f}$ *de la forme* $\mathfrak{f}$ *est ouvert dans* $\mathcal{D}^*$ *;*
(iii) le noyau $\ker \mathfrak{f}$ *de la forme* $\mathfrak{f}$ *contient l'orthogonal* $\mathcal{D}_n^\perp$ *du sous-module* $\mathcal{D}_n$ *pour un certain* n.

Démonstration : On montre en chaîne les implications $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que $\mathfrak{f}$ est continue. Alors, puisque $\mathcal{R}$ est un espace topologique discret, $\ker \mathfrak{f} = \mathfrak{f}^{-1}(\{0\})$ est ouvert dans $\mathcal{D}^*$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Il suffit d'utiliser une caractérisation connue des sous-modules ouverts d'un module filtré [33, page 380, proposition 2].

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Pour montrer que $\mathfrak{f}$ est continue, il suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathcal{R}$, l'ensemble $\mathfrak{f}^{-1}(\{a\})$ est ouvert dans $\mathcal{D}^*$. Or soit φ tel que $\mathfrak{f}(\varphi) = a$. Alors $\mathfrak{f}^{-1}(\{a\})$ contient par hypothèse l'ensemble $\varphi + \mathcal{D}_n^\perp$ pour un certain entier naturel n, donc est un voisinage de φ. □

Théorème 4.4.2 *Pour toute forme linéaire continue $\mathfrak{f}$ sur $\mathcal{D}^*$, il existe un unique opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$ tel que $\mathfrak{f}(\varphi) = \langle \varphi \mid p \rangle$ pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$.*

Démonstration : L'unicité d'un tel p découle du fait que $\mathcal{D}$ est un $\mathcal{R}$-module libre. Pour établir l'existence, on se donne $\mathfrak{f}$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^*$. On sait alors par le lemme 4.4.1 que son noyau contient un sous-module $\mathcal{D}_n^\perp$ pour n assez grand. Par conséquent, la forme linéaire $\mathfrak{f}$ induit une forme linéaire sur le module quotient $\mathcal{D}^*/\mathcal{D}_n^\perp$ qui est isomorphe au dual de $\mathcal{D}_n$ (en effet $\mathcal{D}_n$ est facteur direct de $\mathcal{D}$). Comme $\mathcal{D}_n$ est un $\mathcal{R}$-module libre de type fini, il existe un opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}_n$ tel que la forme linéaire ainsi induite par $\mathfrak{f}$ sur $\mathcal{D}_n^*$ soit égale à $\varphi \mapsto \varphi(p)$, d'où le résultat. □

Corollaire 4.4.3 *Soit $\mathfrak{T}$ un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(1) L'endomorphisme $\mathfrak{T}$ est continu ;
(2) il existe un opérateur T tel que $\mathfrak{T} = T^*$ (où T^* est le transposé de T).

Démonstration : Montrons d'abord l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2). Donnons-nous donc un endomorphisme continu $\mathfrak{T}$ du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$. La forme linéaire $\varphi \longmapsto \langle \mathfrak{T}\varphi \mid p \rangle$ de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{R}$ n'est rien d'autre que la composée de $\mathfrak{T}$ avec l'application $\varphi \longmapsto \langle \varphi \mid p \rangle$, elle est donc continue comme composée d'applications continues et par conséquent le théorème 4.4.2 nous assure l'existence d'une unique application T de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^* \ \langle \mathfrak{T}\varphi \mid p \rangle = \langle \varphi \mid T(p) \rangle \ .$$

En utilisant l'unicité de $T(p)$, il est facile de vérifier que l'application T est $\mathcal{R}$-linéaire et on a évidemment $T^* = \mathfrak{T}$.

Montrons réciproquement l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1). Soit T un opérateur et posons $\mathfrak{T} = T^*$: on a à montrer que l'application $\mathfrak{T}$ est continue. Puisque la topologie de $\mathcal{D}^*$ est la topologie la plus faible qui rende continues les applications $\varphi \longmapsto \langle \varphi \mid p \rangle$, $\mathfrak{T}$ est continue si et seulement si l'application $\varphi \longmapsto \langle \mathfrak{T}(\varphi) \mid p \rangle$ est continue pour tout opérateur différentiel formel p. Or c'est bien le cas, puisque $\langle \mathfrak{T}(\varphi) \mid p \rangle = \langle \varphi \mid Tp \rangle$. Par conséquent $\mathfrak{T}$ est continue. □

Corollaire 4.4.4 *Soit $\mathfrak{T}$ un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$, il y a équivalence entre :*

1. *Il existe $\varphi \in \mathcal{D}^*$ telle que $\mathfrak{T}$ est l'application $\psi \longmapsto \varphi\psi$ de multiplication par φ.*
2. *L'endomorphisme $\mathfrak{T}$ est le transposé d'un opérateur de composition.*

Démonstration : Montrons que 2) implique 1). On suppose que $\mathfrak{T} = T^*$, où T est un opérateur de composition. On sait par la formule (4.2) que $\mathfrak{T}$ est l'endomorphisme de multiplication par $\varepsilon \circ T$ dans l'algèbre $\mathcal{D}^*$, d'où le résultat.

Montrons que 1) implique 2). Soit $\mathfrak{T}$ un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$ et supposons qu'il existe φ telle que $\mathfrak{T}$ est la multiplication par φ alors, puisque $\mathcal{D}^*$ est une $\mathcal{R}$-algèbre topologique, $\mathfrak{T}$ est continue ; d'après le corollaire 4.4.3, il existe un opérateur T tel que $T^* = \mathfrak{T}$. Par ailleurs, on a vu dans la démonstration de l'implication précédente que D_i^* est la multiplication par $\varepsilon \circ D_i = \delta^{[i]}$. On en déduit que $T^* \circ D_i^*$ est la multiplication par $\varphi\delta^{[i]}$ et que $D_i^* \circ T^*$ est la multiplication par $\delta^{[i]}\varphi$. Comme l'algèbre $\mathcal{D}^*$ est commutative, on en déduit que $(D_i \circ T)^* = (T \circ D_i)^*$. Or l'application $T \mapsto T^*$ est injective puisque ${}^\diamond\mathcal{D}$ est un $\mathcal{R}$-module libre ; il en résulte que $D_i \circ T = T \circ D_i$ pour tout entier naturel i, c'est-à-dire (théorème 3.4.5) que T est un opérateur de composition. □

4.5 Une base topologique de l'algèbre duale

Définition 4.5.1 *On appelle générateur de $\mathcal{D}^*$ la forme linéaire $\delta = \varepsilon \circ D_1$.*

Explicitement, la forme δ est donnée par la formule

$$\langle \delta \mid x^n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1\,; \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

Pour k un entier naturel, on définit de même la forme linéaire $\delta^{[k]}$ sur $\mathcal{D}$ donnée par :

$$\left\langle \delta^{[k]} \mid x^j \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j\,; \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

On peut remarquer que $\delta^{[0]} = \varepsilon$. De plus, pour tout entier naturel k, on a l'identité $\varepsilon \circ D_k = \delta^{[k]}$.

Proposition 4.5.2 *La famille $(\delta^{[k]})_{k\in\mathbf{N}}$ est une base topologique du $\mathcal{R}$-module topologique $\mathcal{D}^*$.*

En fait on a pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$,

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbf{N}} \langle \varphi \mid x^n \rangle\, \delta^{[n]}\ , \tag{4.7}$$

et pour tout opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$

$$p = \sum_{k\in\mathbf{N}} \left\langle \delta^{[k]} \mid p \right\rangle x^k \tag{4.8}$$

En effet, la série (4.7) converge vers φ dans $\mathcal{D}^*$ car, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{j} \langle \varphi \mid x^n \rangle\, \delta^{[n]} \in (\varphi + \mathcal{D}_j^\perp)\ .$$

De même, la série (4.8) converge vers p pour la topologie discrète sur $\mathcal{D}$, car $\langle \delta^{[k]} \mid p \rangle = 0$ dès que $k > \deg p$.

Lemme 4.5.3 *Soit* $\flat$ *un élément de* ${}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$. *Si pour tout* φ *dans* $\mathcal{D}^*$ *et tout* ψ *dans* $\mathcal{D}^*$, *on a* $(\varphi \otimes \psi)(\flat) = 0$ *alors* $\flat = 0$.

Démonstration : Le $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$ est libre comme carré tensoriel d'un $\mathcal{R}$-module libre. Si $\flat$ est un élément de ${}^\diamond\mathcal{D} \otimes^\diamond \mathcal{D}$, il existe donc une unique double suite $(a_{m,n})_{m,n}$ d'éléments de $\mathcal{R}$, n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls et telle que $\flat = \sum_{m,n} a_{m,n} x^m \otimes x^n$. Appliquant alors à cette égalité la forme $\delta^{[i]} \otimes \delta^{[j]}$, et d'après l'hypothèse, on trouve $0 = \delta^{[i]} \otimes \delta^{[j]}(\flat) = a_{i,j}$ pour tous entiers naturels i et j, c'est-à-dire $\flat = 0$. □

Proposition 4.5.4 *Soit* $\mathfrak{T}$ *un endomorphisme continu du* $\mathcal{R}$*-module* $\mathcal{D}^*$. *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L'endomorphisme* $\mathfrak{T}$ *est le transposé d'un endomorphisme* T *de la cogèbre* $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$.
2. *L'endomorphisme* $\mathfrak{T}$ *est un endomorphisme continu de l'algèbre* $\mathcal{D}^*$.

Démonstration : L'implication $1 \Longrightarrow 2$ est bien connue [50, chapitre I, page 14].

Montrons maintenant l'implication $2 \Longrightarrow 1$. Sachant que $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme continu du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$, on sait par le corollaire 4.4.3 qu'il existe un opérateur T tel que $\mathfrak{T} = T^*$. On veut montrer que $\varepsilon \circ T = \varepsilon$ et que $\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \Delta$. La première identité $\varepsilon \circ T = \varepsilon$ est équivalente à $T^*(\varepsilon) = \varepsilon$, ce qui est vrai car T^* est un morphisme d'anneaux. Pour montrer la deuxième identité, il suffit, d'après le lemme 4.5.3 d'établir pour tout opérateur différentiel formel p de $\mathcal{D}$ et pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $\mathcal{D}^*$ l'égalité

$$(\varphi \otimes \psi)((T \otimes T) \circ \Delta(p)) = (\varphi \otimes \psi)((\Delta \circ T)(p)) .$$

Comme ${}^\diamond\mathcal{D}$ est un $\mathcal{R}$-module engendré par la famille $(x^n)_n$, il suffit d'établir cette dernière égalité avec $p = x^n$, où n est un entier naturel quelconque. Un calcul facile, utilisant la définition de Δ, la formule (4.1) et l'hypothèse $T^*(\varphi\psi) = T^*(\varphi)T^*(\psi)$ conduit au résultat cherché. □

4.6 La transformation $\vee$ des formes linéaires

D'après la proposition 3.4.1, les $\mathcal{R}$-algèbres $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$ sont isomorphes. D'autre part, le corollaire 3.4.6 montre que la transformation $\vee$ laisse stable le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de l'ensemble des endomorphismes du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{D}$. Il en résulte évidemment qu'il existe une transformation correspondante des formes linéaires, que nous appellerons la *transformation* $\vee$ *des formes linéaires*, qui est une application de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{D}^*$. Dans cette section, nous allons expliciter cette transformation.

La transformation $\vee$ des formes linéaires est donc définie grâce au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\vee} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^* & \xrightarrow{\vee} & \mathcal{D}^* \end{array}$$

où les flèches verticales sont l'isomorphisme $T \mapsto \varepsilon \circ T$ de la proposition 3.4.1, qui explicite aussi l'isomorphisme réciproque $\gamma \mapsto (\gamma \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$. Par conséquent, la $\vee$-transformée d'une quelconque forme linéaire $\gamma \in \mathcal{D}^*$ est la forme linéaire

$$\gamma^\vee = \varepsilon \circ \Lambda \circ (\gamma \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta \circ \Lambda \ .$$

La $\vee$-transformée de la forme linéaire peut aussi être caractérisée en explicitant les images des éléments de la base $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. En utilisant la $\mathcal{D}$-linéarité à gauche de l'augmentation ε, on obtient la formule

$$\langle \gamma^\vee \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \ \langle \gamma \mid x^k \rangle^{(n-k)} \ . \tag{4.9}$$

Proposition 4.6.1 *Pour toute forme linéaire $\gamma \in \mathcal{D}^*$, on a $(\gamma^\vee)^\vee = \gamma$.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du caractère involutif de la transformation $^\vee$ des opérateurs. □

Proposition 4.6.2 *Pour toute forme linéaire $\gamma \in \mathcal{D}^*$, on a* $\mathrm{ord}\, \gamma^\vee = \mathrm{ord}\, \gamma$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la formule (4.9). □

4.7 Calcul de Pincherle des formes linéaires

Après avoir traduit au niveau des formes linéaires la transformation $\vee$, nous allons maintenant regarder comment s'interprètent les dérivations et les intégrales de Pincherle dans le langage des formes linéaires.

On sait par la proposition 3.5.1 que la première dérivée de Pincherle de l'opérateur de composition T est un opérateur de composition. Nous définissons alors la *première dérivation de Pincherle* de $\mathcal{D}^*$, notée $\mathfrak{D}_1$, par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^* & \xrightarrow{\mathfrak{D}_1} & \mathcal{D}^* \end{array}$$

où les flèches verticales sont l'isomorphisme $T \mapsto \varepsilon \circ T$ de la proposition 3.4.1. Si donc φ est une forme linéaire correspondant à l'opérateur de composition F, on a

$$\mathfrak{D}_1 \varphi = \varepsilon \circ \partial_1 F = \varepsilon \circ (F \circ M_x) - \varepsilon \circ (M_x \circ F) \ .$$

Puisque $\varepsilon \circ M_x = 0$ et $\varepsilon \circ F = \varphi$, on trouve

$$\mathfrak{D}_1\varphi = \varphi \circ M_x \ .$$

L'application $\mathfrak{D}_1$ est donc une dérivation de l'anneau $\mathcal{D}^*$ dont l'anneau des constantes est le sous-anneau $\mathcal{R}\varepsilon = \Upsilon(\mathcal{R})$ image de $\mathcal{R}$ par le morphisme structural Υ de l'algèbre $\mathcal{D}^*$.

D'autre part, en vertu de la proposition 3.6.1, l'application $\mathfrak{D} = M_x^*$ transposée de M_x est une dérivation de l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$. Elle est explicitement donnée par l'égalité

$$\langle \mathfrak{D}\varphi \mid p\rangle = \langle \varphi \mid px\rangle = \langle \varphi \circ M_x \mid p\rangle,$$

de sorte que $\mathfrak{D}$ est simplement $\mathfrak{D}_1$. Pour alléger la notation, *nous noterons constamment dans la suite* $\mathfrak{D}$ *pour* $\mathfrak{D}_1$. En particulier, un calcul facile permet de vérifier que $\mathfrak{D}\delta = \varepsilon = \delta^{[0]}$ et plus généralement que $\mathfrak{D}\delta^{[k]} = \delta^{[k-1]}$ pour tout entier naturel $k \geq 1$.

En ce qui concerne la deuxième dérivation de Pincherle, on sait par le corollaire 3.5.5 que la deuxième dérivée de Pincherle d'un opérateur de composition est un opérateur de composition ; ceci permet de façon analogue à ce qui précède de définir une dérivation $\mathfrak{D}_2$ de l'anneau $\mathcal{D}^*$. Si φ est une forme linéaire et si F est l'opérateur de composition correspondant, on a

$$\mathfrak{D}_2\varphi = \varepsilon \circ \partial_2 F = \varepsilon \circ (F \circ M_x^\vee) - \varepsilon \circ (M_x^\vee \circ F) \ .$$

En vertu de la $\mathcal{D}$-linéarité à gauche de l'augmentation ε, on a $\varepsilon \circ M_x^\vee = -\partial \circ \varepsilon$. Comme $\varepsilon \circ F = \varphi$, on trouve

$$\mathfrak{D}_2\varphi = \varphi \circ M_x^\vee + \partial \circ \varphi \ . \tag{4.10}$$

En particulier, on remarque que $\mathfrak{D}_2\delta^{[k]} = -\delta^{[k-1]}$ pour tout entier $k \geq 1$, alors que $\mathfrak{D}_2\varepsilon = 0$.

Passons maintenant à la première intégrale de Pincherle. La proposition 3.5.2 assure que, pour $F \in \mathcal{C}$, la première intégrale de Pincherle $\int_1 F$ est un opérateur de composition. Par conséquent, on peut définir une application $\mathfrak{I}_1$ de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{D}^*$ par la condition que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\int_1} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^* & \xrightarrow{\mathfrak{I}_1} & \mathcal{D}^* \end{array}$$

est commutatif (ici encore, les flèches verticales sont l'isomorphisme isométrique qui à $F \in \mathcal{C}$ associe $\varepsilon \circ F$). Par conséquent, si $\varphi = \varepsilon \circ F$ est la forme linéaire qui correspond à l'opérateur de composition F, nous avons

$$\mathfrak{I}_1\varphi = \varepsilon \circ \textstyle\int_1 F = \varepsilon \circ \sum_{n\in\mathbf{N}} M_x^n \circ F \circ Q^{n+1} = \varphi \circ Q \ ,$$

car $\varepsilon \circ M_x = 0$. Par conséquent $\mathfrak{I}_1$ n'est autre que la transposée de Q. Nous noterons simplement $\mathfrak{I}$ pour $\mathfrak{I}_1$.

En identifiant naturellement l'anneau $\mathcal{R}$ à son $\mathcal{R}$-dual, l'application transposée de l'augmentation ε s'identifie au morphisme structural $\Upsilon : \mathcal{R} \to \mathcal{D}^*$ explicitement donné par $\Upsilon(r) = r\varepsilon$ pour tout $r \in \mathcal{R}$. La suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{D}^* \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{D}^* \longrightarrow 0 \tag{4.11}$$

est une suite exacte scindée puisqu'elle est obtenue par transposition de la suite exacte scindée (3.5). Elle correspond d'ailleurs dans la correspondance entre les algèbres $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$ à la suite exacte (3.3). Elle est scindée par la section $\mathfrak{I} = Q^*$ ou par la rétraction $\mathfrak{e}_1 = \Omega^*$. Explicitement, ces applications $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{e}_1$ sont données par :

$$\langle \mathfrak{I}\varphi \mid x^n \rangle = \begin{cases} \langle \varphi \mid x^{n-1} \rangle & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}_1(\varphi) = \langle \varphi \mid 1 \rangle \ .$$

À partir de ces formules, il est immédiat de vérifier que $\mathfrak{I}\delta^{[k]} = \delta^{[k+1]}$ pour tout entier naturel k.

Les applications $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{I}$ sont continues comme transposées d'opérateurs (corollaire 4.4.3). L'application $\mathfrak{e}_1 : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{R}$ est continue par définition de la topologie de $\mathcal{D}^*$. L'application $\Upsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{D}^*$ est également continue quand on munit $\mathcal{R}$ de la topologie discrète.

Lemme 4.7.1 *Étant données deux formes linéaires φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{D}^*$, on a $\varphi_1 = \varphi_2$ si et seulement si $\langle \varphi_1 \mid 1 \rangle = \langle \varphi_2 \mid 1 \rangle$ et $\mathfrak{D}\varphi_1 = \mathfrak{D}\varphi_2$.*

Démonstration : Ceci résulte de la suite exacte (4.11), puisque nous avons observé qu'elle était scindée par la rétraction $\mathfrak{e}_1$. □

En ce qui concerne la deuxième intégrale de Pincherle, le plus simple est d'utiliser la deuxième formule de la proposition 3.5.4. Elle permet de définir une application $\mathfrak{I}_2$ de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{D}^*$ par la formule

$$\mathfrak{I}_2\varphi = (\mathfrak{I}\varphi^\vee)^\vee = (\varphi^\vee \circ Q)^\vee \ .$$

L'application $\mathfrak{I}_2$ est continue comme conjuguée de la transformation continue $\mathfrak{I}_1$ avec l'isométrie $\varphi \mapsto \varphi^\vee$.

On peut aussi, de façon analogue à ce qui précède, utiliser le corollaire 3.5.5 d'après lequel la deuxième intégrale de Pincherle d'un opérateur de composition est un opérateur de composition ; ceci permet de définir la *deuxième intégrale de Pincherle* d'une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$, notée $\mathfrak{I}_2\varphi$, de sorte que, si F est l'opérateur de composition tel que $\varphi = \varepsilon \circ F$, on ait

$$\mathfrak{I}_2\varphi = \varepsilon \circ \textstyle\int_2 F = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \varepsilon \circ M_x^{\vee(n)} \circ F \circ Q^{\vee(n+1)} \ .$$

En vertu de la $\mathcal{D}$-linéarité à gauche de l'augmentation ε, on a $\varepsilon \circ M_x^{\vee(n)} = (-1)^n \partial^n \circ \varepsilon$ et comme $\varepsilon \circ F = \varphi$, on trouve

$$\mathfrak{I}_2 \varphi = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \partial^n \circ \varphi \circ Q^{\vee(n+1)} .$$

Cette application $\mathfrak{I}_2$ est explicitée par

$$\langle \mathfrak{I}_2 \varphi \mid x^n \rangle = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \partial^m \circ \varphi(Q^{\vee(m+1)} x^n) = - \sum_{m=0}^{n-1} \partial^m \circ \varphi((-1)^{m+1} x^{n-m-1}) ;$$

car

$$Q^\vee x^j = \begin{cases} -x^{j-1} & \text{si} \quad j > 0 \\ 0 & \text{si} \quad j = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\langle \mathfrak{I}_2 \varphi \mid x^n \rangle = - \sum_{m=0}^{n-1} \langle \varphi \mid x^{n-m-1} \rangle^{(m)} .$$

La suite exacte (3.4) se traduit dans le langage des formes linéaires par la suite exacte scindée de $\mathcal{R}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\Upsilon_2} \mathcal{D}^* \xrightarrow{\mathfrak{D}_2} \mathcal{D}^* \longrightarrow 0 , \tag{4.12}$$

où Υ_2 est le plongement taylorien $r \mapsto \mu_r$ qui à un scalaire r associe sa forme de Taylor (voir exemple 4.2.3). La suite est scindée par l'intégrale de Pincherle $\int_2$ ou par la rétraction $\mathfrak{e}_1$.

Lemme 4.7.2 *Pour toute forme linéaire φ de $\mathcal{D}^*$, on a*

$$\operatorname{ord} \mathfrak{I} \varphi = \operatorname{ord} \mathfrak{I}_2 \varphi = \operatorname{ord} \varphi + 1$$

et

$$\operatorname{ord} (\mathfrak{D} \varphi) = \operatorname{ord} (\mathfrak{D}_2 \varphi) = \operatorname{ord} \varphi - 1 \quad \textit{si} \quad \operatorname{ord} \varphi \neq 0 .$$

Démonstration : Ceci résulte directement des définitions des applications $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{I}$, de la définition 4.3.1, du fait que $\mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{I}_2$ sont conjuguées respectivement à $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{I}$ par la transformation $^\vee$ et de la proposition 4.6.2. □

Il en résulte en particulier que les applications $\mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{I}_2$ sont continues.

4.8 Puissances divisées sur l'algèbre duale

Définition 4.8.1 *Pour $\varphi \in \mathcal{D}^*$, on définit par récurrence la suite des puissances divisées $(\varphi^{[n]})_n$ de la forme linéaire φ en posant $\varphi^{[0]} = \varepsilon$ et pour $n \geq 1$, $\varphi^{[n]} = \mathfrak{I}\left(\varphi^{[n-1]} \mathfrak{D}(\varphi)\right)$.*

La forme linéaire $\varphi^{[n]}$ sera appelée la *puissance divisée d'exposant* n *de la forme* φ.

Le calcul déjà effectué des éléments $\mathfrak{D}\delta^{[n]}$ et $\mathfrak{I}\delta^{[n]}$ permet de vérifier que la suite des formes linéaires $\delta^{[n]}$ est effectivement la suite des puissances divisées du générateur δ.

Lemme 4.8.2 *Pour tout entier naturel* n *et pour toute forme linéaire* φ *de* $\mathcal{D}^*$*, on a*

$$\operatorname{ord}\left(\varphi^{[n]}\right) \geq n \operatorname{ord}\varphi \ .$$

Démonstration : Cette inégalité étant évidente si $\varphi = 0$ ou si $\operatorname{ord}\varphi = 0$, on peut supposer que $\operatorname{ord}\varphi$ est un entier ≥ 1. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $\varphi^{[0]} = \varepsilon$ et comme $\operatorname{ord}\varepsilon = 0$, l'inégalité est vraie. On suppose alors que $\operatorname{ord}(\varphi) = k \geq 1$ et $\operatorname{ord}\left(\varphi^{[n-1]}\right) \geq (n-1)k$, on a alors par la proposition 4.3.3 et le lemme 4.7.2

$$\operatorname{ord}\left(\varphi^{[n-1]}\right)\mathfrak{D}(\varphi) \geq \operatorname{ord}\left(\varphi^{[n-1]}\right) + \operatorname{ord}\mathfrak{D}(\varphi) \geq (n-1)k + (k-1) \ ,$$

et par une nouvelle utilisation du lemme 4.7.2

$$\operatorname{ord}\mathfrak{I}\left(\varphi^{[n-1]}\mathfrak{D}(\varphi)\right) \geq nk \ ,$$

d'où le résultat. □

Remarquons que, quelque soient les entiers naturels m et n, le nombre rationnel $\dfrac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ est un entier. Ceci permet de donner un sens à l'écriture $\dfrac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ dans tout anneau. Ceci acquis, il est possible de préciser le lemme 4.8.2 par l'énoncé suivant.

Proposition 4.8.3 *Soit* φ *une forme linéaire dans* $\mathcal{D}^*$ *telle que* $\operatorname{ord}\varphi = m$. *Alors*

$$\langle \varphi^{[n]} \mid x^{nm} \rangle \ = \ \frac{(nm)!}{(m!)^n n!}\langle \varphi \mid x^m \rangle^n. \tag{4.13}$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n, en utilisant la définition des puissances divisées. Tout d'abord, si $n = 0$, on a $\langle \varphi^{[0]} \mid x^0 \rangle = \langle \varepsilon \mid 1 \rangle = 1$. D'autre part, en utilisant les définitions des applications $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}$, la formule (4.1), le lemme 4.8.2 et l'hypothèse $\operatorname{ord}\varphi = m$, on vérifie la relation

$$\langle \varphi^{[n+1]} \mid x^{(n+1)m} \rangle = \binom{nm+m-1}{nm} \langle \varphi^{[n]} \mid x^{nm} \rangle \langle \varphi \mid x^m \rangle \ .$$

□

Proposition 4.8.4 *Soient $\varphi \in \mathcal{D}^*$, ϑ et ς des formes linéaires de $\mathcal{D}^*$ vérifiant* $\operatorname{ord}\vartheta > 0$ *et* $\operatorname{ord}\varsigma > 0$ *et des entiers naturels m et n. Alors*

$$\begin{aligned}
(\vartheta+\varsigma)^{[n]} &= \sum_{i+j=n} \vartheta^{[i]}\varsigma^{[j]} \\
(\varphi\varsigma)^{[n]} &= \varphi^n\varsigma^{[n]} \\
\varsigma^{[m]}\varsigma^{[n]} &= \binom{m+n}{n}\varsigma^{[m+n]} \\
\left(\varsigma^{[m]}\right)^{[n]} &= \frac{(mn)!}{(m!)^n n!}\varsigma^{[mn]} \quad \textit{si} \quad m>0 \\
n!\varsigma^{[n]} &= \varsigma^n \ .
\end{aligned}$$

Démonstration : Ce sont des conséquences directes du lemme 4.7.1.
□

Proposition 4.8.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $\varphi \longmapsto \varphi^{[n]}$ de $\mathcal{D}^*$ dans $\mathcal{D}^*$ est continue.*

Démonstration : L'application $\varphi \longmapsto \varepsilon = \varphi^{[0]}$ est continue puisque constante. Les applications $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{I}$ sont continues. Par définition, on a $\varphi^{[n]} = \mathfrak{I}\left(\varphi^{[n-1]}\mathfrak{D}(\varphi)\right)$. Ainsi on voit par récurrence sur n que l'application $\varphi \longmapsto \varphi^{[n]}$ est continue comme composée d'applications continues. □

Proposition 4.8.6 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-module de $\mathcal{D}^*$ qui est fermé, stable par toutes les applications $\varphi \mapsto \varphi^{[n]}$ et qui contient le générateur δ. Alors $\mathcal{M} = \mathcal{D}^*$.*

Démonstration : Puisqu'il est stable par toutes les applications $\varphi \mapsto \varphi^{[n]}$, l'ensemble $\mathcal{M}$ contient toutes les formes linéaires $\delta^{[n]}$. Puisque c'est un sous-module, il contiendra toute combinaison linéaire de ces formes et, puisqu'il est fermé, il contient tout élément de $\mathcal{D}^*$ d'après la formule (4.7). □

Proposition 4.8.7 *Une codérivation S de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f. est forte si et seulement si pour toute forme $\mathcal{R}$-linéaire φ sur $\mathcal{D}$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a l'identité*

$$\varphi^{[n]} \circ S = \varphi^{[n-1]}(\varphi \circ S) \ .$$

Démonstration : Soit S une codérivation forte, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur de composition C tel que $S = M_x \circ C$. Calculons alors

$$\varphi^{[n]} \circ S = \varphi^{[n]} \circ M_x \circ C = \mathfrak{D}\varphi^{[n]} \circ C = (\varphi^{[n-1]}\mathfrak{D}\varphi) \circ C = (\varphi^{[n-1]} \otimes \mathfrak{D}\varphi) \circ \Delta \circ C \ ;$$

puisque C est un opérateur de composition, on sait que $\Delta \circ C = (I \otimes C) \circ \Delta$ et on en tire

$$\varphi^{[n]} \circ S = (\varphi^{[n-1]} \otimes \mathfrak{D}\varphi) \circ (I \otimes C) \circ \Delta = (\varphi^{[n-1]} \otimes (\mathfrak{D}\varphi \circ C)) \circ \Delta \ ,$$

on trouve alors le résultat sachant que $\mathfrak{D}\varphi \circ C = \varphi \circ M_x \circ C = \varphi \circ S$.

Réciproquement, soit S une codérivation telle que pour toute forme $\mathcal{R}$-linéaire φ sur $\mathcal{D}$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a l'identité

$$\varphi^{[n]} \circ S \;=\; \varphi^{[n-1]}(\varphi \circ S) \,. \tag{4.14}$$

Comme S est une codérivation, alors d'après le corollaire 3.7.2, il existe un unique endomorphisme A du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ tel que $S = M_x \circ A$. Pour montrer que la codérivation S est forte, il suffit d'établir que A est un opérateur de composition. Comme $S = M_x \circ A$ et en utilisant l'identité 4.14, on a pour toute forme $\mathcal{R}$-linéaire φ sur $\mathcal{D}$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\varphi^{[n]} \circ M_x \circ A \;=\; \varphi^{[n-1]}(\varphi \circ M_x \circ A) \;; \tag{4.15}$$

or

$$\varphi^{[n]} \circ M_x = M_x^*(\varphi^{[n]}) = \mathfrak{D}(\varphi^{[n]}) = \varphi^{[n-1]}\mathfrak{D}\varphi \;\; \forall n \geq 1 \;;$$

l'identité (4.15) devient alors

$$(\varphi^{[n-1]}\mathfrak{D}\varphi) \circ A \;=\; \varphi^{[n-1]}(\mathfrak{D}\varphi \circ A) \;; \tag{4.16}$$

posons alors $\alpha = \varepsilon \circ A$ et montrons que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^* \;;\; \varphi \circ A \;=\; \alpha\varphi \;; \tag{4.17}$$

c'est-à-dire que A^* est la multiplication par α et le corollaire 4.4.4 nous permet alors de conclure que l'opérateur A est un opérateur de composition. Pour démontrer l'identité (4.17), il suffit de la vérifier pour $\varphi = \delta^{[k]}$, où k est un entier naturel quelconque. Or on a par un calcul immédiat, en posant $\varphi = \delta$ et $n = k+1$ dans l'égalité (4.16)

$$\delta^{[k]} \circ A = \delta^{[k]}(\varepsilon \circ A) = \delta^{[k]}\alpha \;;$$

ce qui achève la démonstration . □

Proposition 4.8.8 *Soit S une codérivation. Si S est forte et que T est un correspondant strict de S, alors T^* commute aux puissances divisées.*

Démonstration : On a à montrer que, quelque soient la forme linéaire φ et l'entier naturel n, on a :

$$T^*(\varphi^{[n]}) = (T^*\varphi)^{[n]} \,.$$

Pour cela, on fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$, comme $\varphi^{[0]} = \varepsilon$, il s'agit simplement de vérifier que $\varepsilon \circ T = \varepsilon$; ce qui a été montré (proposition 3.7.4). Supposons maintenant par récurrence que $T^*(\varphi^{[n]}) = (T^*\varphi)^{[n]}$ c'est-à-dire que $\varphi^{[n]} \circ T = (\varphi \circ T)^{[n]}$. Pour montrer alors que les formes linéaires $\varphi^{[n+1]} \circ T$ et $(\varphi \circ T)^{[n+1]}$ sont égales, on utilise le lemme 4.7.1. Tout d'abord, comme toute puissance divisée d'exposant ≥ 1 est d'ordre au moins 1, on a bien $\langle \varphi^{[n+1]} \circ T \mid$

$1\rangle = \langle\varphi^{[n+1]} \mid T1\rangle = \langle\varphi^{[n+1]} \mid 1\rangle = 0 = \langle(\varphi\circ T)^{[n+1]} \mid 1\rangle$. D'autre part, par définition de la dérivation $\mathfrak{D}$, on a $\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = \varphi^{[n+1]}\circ T\circ M_x$; comme T est un correspondant de la codérivation S, on en déduit $\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = \varphi^{[n+1]}\circ S\circ T$; par la proposition 4.8.7, on a

$$\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = (\varphi^{[n]}(\varphi\circ S))\circ T = (\varphi^{[n]}\otimes(\varphi\circ S))\circ\Delta\circ T\ .$$

Puisque T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ en vertu de la proposition 3.7.4, on voit que

$$\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = (\varphi^{[n]}\otimes(\varphi\circ S))\circ(T\otimes T)\circ\Delta = [(\varphi^{[n]}\circ T)\otimes(\varphi\circ S\circ T)]\circ\Delta\ ;$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que T est un correspondant de la codérivation S, on en tire

$$\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = [(\varphi\circ T)^{[n]}\otimes(\varphi\circ T\circ M_x)]\circ\Delta\ ;$$

comme $\mathfrak{D}$ est la transposée de M_x, ceci montre que

$$\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = [(\varphi\circ T)^{[n]}\otimes\mathfrak{D}(\varphi\circ T)]\circ\Delta = (\varphi\circ T)^{[n]}\mathfrak{D}(\varphi\circ T)\ ;$$

d'où finalement, par la définition des puissances divisées

$$\mathfrak{D}(\varphi^{[n+1]}\circ T) = \mathfrak{D}((\varphi\circ T)^{[n+1]})\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4.9 Composition des formes linéaires

Définition 4.9.1 *Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{D}^*$ avec $\operatorname{ord}\psi > 0$, on définit la composée de φ et ψ par*

$$\varphi\circ\psi \;=\; \sum_{n\geq 0}\langle\varphi \mid x^n\rangle\psi^{[n]}\ . \tag{4.18}$$

En effet, le corollaire 4.3.5 et le lemme 4.8.2 montrent que la série (4.18) est une série convergente pour la topologie de $\mathcal{D}^*$.

Proposition 4.9.2 *Si φ et ψ sont deux éléments de $\mathcal{D}^*$ avec $\operatorname{ord}\psi > 0$, alors*

$$\mathrm{ord}\ (\varphi\circ\psi) \geq \mathrm{ord}\,(\varphi)\mathrm{ord}\,(\psi)\ . \tag{4.19}$$

Démonstration : Par la formule (4.18), on a

$$\mathrm{ord}\ (\varphi\circ\psi) = \mathrm{ord}\left(\sum_{n\geq \mathrm{ord}\ \varphi}\langle\varphi \mid x^n\rangle\psi^{[n]}\right) \geq \min_{n\geq\mathrm{ord}\ \varphi}\{\mathrm{ord}\,\psi^{[n]}\}\ ;$$

et le lemme 4.8.2 nous donne le résultat :

$$\mathrm{ord}\ (\varphi\circ\psi) \geq \mathrm{ord}\,(\varphi)\mathrm{ord}\,(\psi)\ .$$

□

Théorème 4.9.3 *L'application :*

$$\begin{array}{rccl} -\circ- : & \mathcal{D}^* \times \mathcal{D}_0^\perp & \longrightarrow & \mathcal{D}^* \\ & (\varphi,\psi) & \longmapsto & \varphi\circ\psi \end{array}$$

est continue.

Démonstration : Pour tout opérateur différentiel formel $p \in \mathcal{D}$, on note $\mathfrak{e}_p$ la forme linéaire sur $\mathcal{D}^*$ telle que $\mathfrak{e}_p(\varphi) = \langle \varphi \mid p\rangle$. En vertu de la définition de la topologie de $\mathcal{D}^*$, l'application $-\circ-$ est continue si et seulement si les applications $\mathfrak{e}_p\circ(-\circ-)$ sont continues. Il suffit donc de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{D}^* \times \mathcal{D}_0^\perp & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ (\varphi,\psi) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} \langle \varphi \mid x^n\rangle\langle \psi^{[n]} \mid p\rangle \end{array}$$

est continue pour n'importe quel $p \in \mathcal{D}$. Or, par la proposition 4.3.2,

$$\sum_{n\geq 0} \langle \varphi \mid x^n\rangle\langle \psi^{[n]} \mid p\rangle = \sum_{n=0}^{\deg p} \langle \varphi \mid x^n\rangle\langle \psi^{[n]} \mid p\rangle = \sum_{n=0}^{\deg p} \mathfrak{e}_{x^n}(\varphi)\mathfrak{e}_p(\psi^{[n]}) \ ,$$

est une somme finie de fonctions sur $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}_0^\perp$, qui sont continues en vertu de la proposition 4.8.5. Donc l'application $-\circ-$ est continue. □

Proposition 4.9.4 *Pour toute forme φ dans $\mathcal{D}^*$ et pour toute forme ψ d'ordre > 0, on a la* **règle de chaîne**

$$\mathfrak{D}(\varphi\circ\psi) = (\mathfrak{D}\varphi\circ\psi)\mathfrak{D}\psi \ .$$

Démonstration : D'après la formule (4.18), et puisque $\mathfrak{D}$ est continue, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\sum_{n\geq 0} \langle \varphi \mid x^n\rangle\psi^{[n]}) &= \sum_{n\geq 0} \langle \varphi \mid x^n\rangle\mathfrak{D}\psi^{[n]} \\ &= \sum_{n\geq 1} \langle \varphi \mid x^n\rangle\psi^{[n-1]}\mathfrak{D}\psi + \langle \varphi \mid 1\rangle\mathfrak{D}\varepsilon \\ &= (\mathfrak{D}\varphi\circ\psi)\mathfrak{D}\psi, \end{aligned}$$

car $\mathfrak{D}\varepsilon = 0$. □

Proposition 4.9.5 *Étant donnée une forme linéaire ψ d'ordre > 0, l'application $\varphi \longmapsto \varphi\circ\psi$, appelée la* **substitution à droite par la forme** *ψ, est un endomorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées.*

Démonstration : Tout d'abord, remarquons que $\varepsilon\circ\psi = \varepsilon$; en effet

$$\varepsilon\circ\psi = \sum_{n\geq 0} \langle \varepsilon \mid x^n\rangle\psi^{[n]} = \langle \varepsilon \mid 1\rangle\psi^{[0]} = \varepsilon \ .$$

Pour φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{D}^*$ et r_1, r_2 dans $\mathcal{R}$, on a évidemment

$$r_1(\varphi_1 \circ \psi) + r_2(\varphi_2 \circ \psi) = (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) \circ \psi \ . \tag{4.20}$$

Il en résulte que, pour établir la formule

$$(\varphi_1\varphi_2) \circ \psi = (\varphi_1 \circ \psi)(\varphi_2 \circ \psi), \tag{4.21}$$

et d'après le théorème 4.9.3, il suffit de la vérifier lorsque $\varphi_1 = \delta^{[m]}$, $\varphi_2 = \delta^{[n]}$, où m et n sont deux entiers naturels. Dans ce cas, d'après la proposition 4.8.4, on a simplement à vérifier que

$$\binom{m+n}{m}\delta^{[m+n]} \circ \psi = (\delta^{[m]} \circ \psi)(\delta^{[n]} \circ \psi) \ ,$$

ce qui, en utilisant la définition 4.9.1, s'écrit

$$\binom{m+n}{m}\psi^{[m+n]} = \psi^{[m]}\psi^{[n]} \ ,$$

ce qui est vrai d'après la proposition 4.8.4.

Montrons enfin par récurrence sur n que $(\varphi \circ \psi)^{[n]} = \varphi^{[n]} \circ \psi$. Pour $n = 0$, on vérifie facilement que $(\varphi \circ \psi)^{[0]} = \varphi^{[0]} \circ \psi = \varepsilon$. Supposons maintenant que $(\varphi \circ \psi)^{[n-1]} = \varphi^{[n-1]} \circ \psi$ et calculons

$$\mathcal{D}((\varphi \circ \psi)^{[n]}) = (\varphi \circ \psi)^{[n-1]}\mathcal{D}(\varphi \circ \psi),$$

qui, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le règle de chaîne, se transforme en

$$\mathcal{D}((\varphi \circ \psi)^{[n]}) = (\varphi^{[n-1]} \circ \psi)(\mathcal{D}\varphi \circ \psi)\mathcal{D}\psi \ ;$$

par la formule (4.21), on en tire

$$\mathcal{D}((\varphi \circ \psi)^{[n]}) = ((\varphi^{[n-1]}\mathcal{D}\varphi) \circ \psi)\mathcal{D}\varphi \ ,$$

d'où par la définition des puissances divisées de φ et la règle de chaîne les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((\varphi \circ \psi)^{[n]}) &= (\mathcal{D}\varphi^{[n]} \circ \psi)\mathcal{D}\psi \\ &= \mathcal{D}(\varphi^{[n]} \circ \psi), \end{aligned}$$

et le lemme 4.7.1 permet de conclure. □

La proposition suivante précise un cas où il y égalité dans (4.19).

Proposition 4.9.6 *Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ telle que* $\operatorname{ord}\psi = 1$. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) L'élément $\langle \psi \mid x \rangle$ n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $\mathcal{R}$.
(ii) Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}^*$, on a $\operatorname{ord}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{ord}(\varphi)$.
Si ces conditions sont satisfaites, la substitution à droite par ψ est injective.

Démonstration : Montrons tout d'abord que (i) implique (ii). Soit φ une forme linéaire tel que $\operatorname{ord}\varphi = n$, alors d'après la proposition 4.9.2, $\operatorname{ord}(\varphi\circ\psi) \geq \operatorname{ord}\varphi = n$; on évalue alors $\varphi\circ\psi$ en x^n et on obtient, en utilisant la proposition 4.3.2 et le fait que $\operatorname{ord}\varphi = n$, l'égalité

$$\langle \varphi \circ \psi \mid x^n \rangle = \langle \varphi \mid x^n \rangle \langle \psi^{[n]} \mid x^n \rangle \ .$$

D'après la proposition 4.8.3, $\langle \psi^{[n]} \mid x^n \rangle = \langle \psi \mid x \rangle^n$; on a alors

$$\langle \varphi \circ \psi \mid x^n \rangle = \langle \varphi \mid x^n \rangle \langle \psi \mid x \rangle^n \ .$$

Comme $\langle \varphi \mid x^n \rangle \neq 0$ et que $\langle \psi \mid x \rangle$ n'est pas diviseur de zéro, on en déduit que $\operatorname{ord}(\varphi \circ \psi) = n = \operatorname{ord}\varphi$.

Montrons maintenant que (ii) implique (i). On suppose qu'il existe un scalaire non nul $r \in \mathcal{R}$ tel que $r\langle \psi \mid x \rangle = 0$. Alors posons $\varphi = r\delta$. Comme r est supposé non nul, on a $\operatorname{ord}\varphi = 1$, alors que $\varphi \circ \psi = r\psi$ prend en x la valeur zéro, d'où $\operatorname{ord}(\varphi \circ \psi) > 1 = \operatorname{ord}\varphi$.

Vérifions enfin que, si (ii) est satisfaite alors la substitution à droite par ψ est injective. Si en effet on a $\varphi \circ \psi = 0$, alors (ii) montre que $\operatorname{ord}\varphi = +\infty$, donc $\varphi = 0$. □

Proposition 4.9.7 *L'opération de composition des formes linéaires est associative en ce sens que pour tout triplet (φ, ψ, ϱ) de formes linéaires telles que $\operatorname{ord}\psi > 0$ et $\operatorname{ord}\varrho > 0$, on a l'identité*

$$(\varphi \circ \psi) \circ \varrho = \varphi \circ (\psi \circ \varrho) \ .$$

Le générateur δ est élément neutre pour l'opération de composition des formes linéaires en ce sens que $\varphi \circ \delta = \varphi$ pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}^*$ et que $\delta \circ \psi = \psi$ pour toute forme $\psi \in \mathcal{D}^*$ telle que $\operatorname{ord}\psi > 0$.

Démonstration : Par la proposition 4.9.5, on a :

$$(\sum_{k=0}^{n} \langle \varphi \mid x^k \rangle \psi^{[k]}) \circ \varrho = \sum_{k=0}^{n} \langle \varphi \mid x^k \rangle (\psi^{[k]} \circ \varrho) = \sum_{k=0}^{n} \langle \varphi \mid x^k \rangle (\psi \circ \varrho)^{[k]} \ .$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} ((\sum_{k=0}^{n} \langle \varphi \mid x^k \rangle \psi^{[k]}) \circ \varrho) = \lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \langle \varphi \mid x^k \rangle (\psi \circ \varrho)^{[k]}) \ ;$$

d'après le théorème 4.9.3 l'application $- \circ -$ est continue, d'où

$$(\varphi \circ \psi) \circ \varrho = \varphi \circ (\psi \circ \varrho) \ .$$

□

4.10 Éléments réversibles de l'algèbre duale

Définition 4.10.1 *On appelle forme delta tout élément φ de $\mathcal{D}^*$ tel que $\langle\varphi \mid 1\rangle = 0$ et que $\langle\varphi \mid x\rangle$ est un élément inversible de $\mathcal{R}$. En outre, une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{D}_0^\perp$ est dite réversible si et seulement s'il existe ψ dans $\mathcal{D}_0^\perp$ telle que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \delta$.*

Théorème 4.10.2 *Soit φ une forme linéaire telle que* $\operatorname{ord}\varphi > 0$. *Les quatre énoncés suivants sont logiquement équivalents.*
1) La forme linéaire φ est réversible.
2) La forme linéaire φ est une forme delta.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ord}\varphi^{[n]} = n$ *et $\langle\varphi^{[n]} \mid x^n\rangle \in \mathcal{R}^\bullet$.*
4) La famille $(\varphi^{[n]})_n$ est une base topologique de $\mathcal{D}^*$.

Démonstration : Montrons que 1) implique 2). La définition 4.9.1 et la proposition 4.3.2 montrent que pour toute forme linéaire φ et toute forme linéaire ψ telle que $\operatorname{ord}\psi > 0$, on a $\langle\varphi\circ\psi \mid x\rangle = \langle\varphi \mid x\rangle\langle\psi \mid x\rangle$. Par conséquent, s'il existe ψ dans $\mathcal{D}_0^\perp$ telle que $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = \delta$, on en déduit $\langle\varphi \mid x\rangle\langle\psi \mid x\rangle = 1$, et donc φ est une forme delta.

Montrons que 2) implique 3). Si φ est une forme delta, le lemme 4.8.2 montre déjà que $\operatorname{ord}\varphi^{[n]} \geq n$. On a d'après la proposition 4.8.3 $\langle\varphi^{[n]} \mid x^n\rangle = \langle\varphi \mid x\rangle^n$ qui appartient à $\mathcal{R}^\bullet$ par hypothèse. En particulier, le scalaire $\langle\varphi^{[n]} \mid x^n\rangle$ est non nul, de sorte que $\operatorname{ord}\varphi^{[n]} = n$.

Montrons ensuite que 3) implique 4). La condition $\operatorname{ord}\varphi^{[n]} = n$ montre que la famille $(\varphi^{[n]})_n$ est libre dans le $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$: en effet, une combinaison linéaire $\sum_{n\in\daleth} a_n\varphi^{[n]}$, - où $\daleth$ est une partie finie de $\mathbb{N}$ et où, pour tout $n \in \daleth$, a_n est un élément non nul de $\mathcal{R}$ - a pour ordre l'entier $\min\daleth$, donc ne peut être nulle.

Pour montrer que la famille $(\varphi^{[n]})_n$ engendre topologiquement le $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$, introduisons le sous-module $\mathcal{N}$ engendré par la famille $(\varphi^{[n]})_n$, choisissons une forme linéaire ψ sur $\mathcal{D}$, et montrons que ψ est adhérente à $\mathcal{N}$. Supposons en effet qu'il en soit autrement ; alors l'ensemble des entiers $j \in \mathbb{N}$ tels que $\left(\psi + \mathcal{D}_j^\perp\right) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ est non vide, donc admet un plus petit élément n. On remarque que la forme $\langle\psi \mid 1\rangle\varepsilon$ est élément de $\left(\psi + \mathcal{D}_0^\perp\right) \cap \mathcal{N}$, donc $n - 1$ est un entier naturel tel que $\left(\psi + \mathcal{D}_{n-1}^\perp\right) \cap \mathcal{N}$ est non vide ; autrement dit, il existe une forme $\chi \in \mathcal{N}$ telle que $\psi - \chi \in \mathcal{D}_{n-1}^\perp$. Puisque par hypothèse l'élément $\langle\varphi^{[n]} \mid x^n\rangle$ est inversible dans $\mathcal{R}$, on peut définir la forme linéaire $\chi' = \chi + \langle\psi - \chi \mid x^n\rangle\langle\varphi^{[n]} \mid x^n\rangle^{-1}\varphi^{[n]}$, et on vérifie immédiatement que χ' est un élément de $\mathcal{N}$ tel que $\operatorname{ord}(\psi - \chi') \geq n + 1$, c'est-à-dire que $\left(\psi + \mathcal{D}_n^\perp\right) \cap \mathcal{N}$ est non vide, ce qui contredit la définition de n et achève la démonstration.

Montrons enfin que 4) implique 1). Puisque la famille $(\varphi^{[n]})$ est une base topologique de $\mathcal{D}^*$, le générateur δ est adhérent au sous-module engendré par les $(\varphi^{[n]})$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que

$\delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi^{[n]}$. On remarque que $a_0 = 0$ car $\langle\delta \mid 1\rangle = 0$. Soit alors la forme linéaire $\psi = \sum_{n\geq 1} a_n\delta^{[n]}$. On a $\psi\circ\varphi = \sum_{n\geq 1} a_n(\delta^{[n]}\circ\varphi)$; comme $\operatorname{ord}\varphi > 0$, la proposition 4.9.5 implique les identités $\delta^{[n]}\circ\varphi = (\delta\circ\varphi)^{[n]} = \varphi^{[n]}$, d'où $\psi\circ\varphi = \sum_{n\geq 1} a_n\varphi^{[n]} = \delta$. En outre, en utilisant l'égalité $\psi\circ\varphi = \delta$ que nous venons de vérifier, on obtient

$$(\varphi\circ\psi)\circ\varphi = \varphi\circ(\psi\circ\varphi) = \varphi\circ\delta = \varphi = \delta\circ\varphi\,. \tag{4.22}$$

Or $\langle\varphi \mid x\rangle$ n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $\mathcal{R}$, puisque $1 = \langle\delta \mid x\rangle = \sum_{n\geq 1} a_n\langle\varphi^{[n]} \mid x\rangle = a_1\langle\varphi \mid x\rangle$; d'après la proposition 4.9.6, la substitution à droite par φ est injective, donc la formule (4.22) entraîne que $\varphi\circ\psi = \delta$. On en conclut que φ est réversible. □

4.11 Endomorphismes commutants aux puissances divisées

Lemme 4.11.1 *Si T un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f. tel que T^* commute aux puissances divisées alors* $\deg(T1) = 0$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde. Supposons que $\deg(T1) = n > 0$ alors $T1 = ax^n + q$ avec $a \in \mathcal{R}\setminus\{0\}$ et $\deg q < n$. On a :

$$\langle (T^*\delta^{[n]})^{[1]} \mid 1\rangle = 0\ ;$$

et, puisque $n > 0$, on a $\left(\delta^{[n]}\right)^{[1]} = \delta^{[n]}$, d'où

$$\langle T^*(\delta^{[n]})^{[1]}) \mid 1\rangle = \langle\delta^{[n]} \mid T1\rangle = \langle\delta^{[n]} \mid ax^n + q\rangle = a\ ;$$

d'où la contradiction car a est non nul par hypothèse. □

Proposition 4.11.2 *Soit $\mathfrak{T}$ un endomorphisme du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$. Les deux énoncés suivants sont équivalents.*
1. L'opérateur $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées.
2. Il existe une forme linéaire θ, avec $\operatorname{ord}\theta > 0$*, telle que $\mathfrak{T}$ soit la substitution à droite par la forme θ.*

Démonstration : L'implication $2 \Longrightarrow 1$ a déjà été établie (théorème 4.9.3 et proposition 4.9.5).

Montrons maintenant l'implication $1 \Longrightarrow 2$. Soit $\mathfrak{T}$ un endomorphisme continu de $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées. Le corollaire 4.4.3 montre l'existence d'un opérateur T tel que $\mathfrak{T} = T^*$. On pose $\theta = \mathfrak{T}(\delta)$ où δ est le

générateur de $\mathcal{D}^*$. On a $\langle \theta \mid 1 \rangle = \langle \delta \mid T1 \rangle$ et donc $\operatorname{ord} \theta > 0$ par le lemme 4.11.1. Alors l'ensemble $\{\varphi \in \mathcal{D}^* \mid \mathfrak{T}(\varphi) = \varphi \circ \theta\}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{D}^*$ qui contient le générateur δ et qui est stable par toutes les applications $\varphi \mapsto \varphi^{[n]}$; d'après la proposition 4.8.6, cette sous-algèbre est égale à $\mathcal{D}^*$.
□

Proposition 4.11.3 *Soit T un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f. tel que $T1$ est de degré 0. S'il existe un opérateur de composition C tel que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$ alors T^* est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées.*

Démonstration : On sait que, puisque T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, sa transposée T^* est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$. Montrons d'abord l'implication

$$\operatorname{ord} \varphi > 0 \Longrightarrow \operatorname{ord} T^*(\varphi) > 0 . \tag{4.23}$$

En effet, si $\operatorname{ord} \varphi > 0$, c'est que $\langle \varphi \mid 1 \rangle = 0$. L'hypothèse $\deg(T1) = 0$ signifiant que $T1 \in \mathcal{R}$, on en déduit que $\langle \varphi \mid T1 \rangle = 0$, ce qui est la conclusion souhaitée.

Il faut maintenant montrer que T^* commute aux puissances divisées, c'est-à-dire que, quels que soient $\varphi \in \mathcal{D}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T^* \left(\varphi^{[n]}\right) = (T^* \varphi)^{[n]} . \tag{4.24}$$

Montrons (4.24) par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cette formule se réduit à $\varepsilon \circ T = \varepsilon$, ce qui est vrai puisque T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$. Supposons maintenant $n \geq 1$, de sorte que les deux membres de (4.24) sont, d'après (4.23), des formes d'ordre strictement positif. Par le lemme 4.7.1, il suffit donc de montrer pour toute forme linéaire φ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ la formule

$$(\mathfrak{D} \circ T^*) \left(\varphi^{[n]}\right) = (T^* \varphi)^{[n-1]} (\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi) . \tag{4.25}$$

Or $\mathfrak{D} \circ T^* = (T \circ M_x)^*$ est par hypothèse la transposée de $M_x \circ C \circ T$. On en déduit

$$(\mathfrak{D} \circ T^*) \left(\varphi^{[n]}\right) = (T^* \circ C^*)(\mathfrak{D} \left(\varphi^{[n]}\right)) = (T^* \circ C^*) \left(\varphi^{[n-1]} \mathfrak{D}(\varphi)\right) .$$

Mais, puisque C est un opérateur de composition, le corollaire 4.4.4 montre que C^* est simplement la multiplication par une forme linéaire fixée ψ. Par conséquent, on peut écrire

$$(\mathfrak{D} \circ T^*) \left(\varphi^{[n]}\right) = T^* \left(\psi \varphi^{[n-1]} \mathfrak{D}(\varphi)\right) .$$

Par l'hypothèse de récurrence et puisque T^* est un endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{D}^*$, cette égalité se transforme en

$$(\mathfrak{D} \circ T^*) \left(\varphi^{[n]}\right) = (T^*(\varphi))^{[n-1]} T^*(\psi \mathfrak{D}(\varphi)) .$$

Or $T^*(\psi \mathfrak{D}(\varphi)) = (M_x \circ C \circ T)^*(\varphi) = (T \circ M_x)^*(\varphi) = (\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi)$, ce qui achève de prouver la formule (4.25). □

Proposition 4.11.4 *Soit T un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des opérateurs différentiels formels. Si T^* commute aux puissances divisées, alors T est un opérateur ombral (c'est-à-dire qu'il existe un opérateur de composition C tel que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$).*

Démonstration : Puisque T est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, son transposé T^* est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{D}^*$. Il existe donc une unique forme linéaire $\psi \in \mathcal{D}^*$ telle que $(\mathfrak{D} \circ T^*)(\delta) = T^*(\psi)$. Considérons alors la partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}^*$ dont les éléments sont les formes linéaires φ telles que $(\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi) = T^*(\psi\mathfrak{D}(\varphi))$; puisque $\mathfrak{D}$, T^* et la multiplication $\chi \mapsto \psi\chi$ sont des endomorphismes continus du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$, il est immédiat que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-sous-module fermé. Par la définition de ψ, on vérifie que $\delta \in \mathcal{M}$. D'autre part, soit $\varphi \in \mathcal{M}$ et n un entier naturel. Si $n = 0$, on a $T^*(\varepsilon) = \varepsilon \circ T = \varepsilon$, donc $\varepsilon = \varphi^{[0]}$ est élément de $\mathcal{M}$. Supposons maintenant que $n \geq 1$; par hypothèse T^* est un endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées, donc

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi^{[n]}) = \mathfrak{D}(T^*(\varphi)^{[n]}) &= (T^*(\varphi))^{[n-1]}(\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi) \\ &= (T^*(\varphi))^{[n-1]}T^*(\psi\mathfrak{D}(\varphi)) \ ;\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathfrak{D} \circ T^*)(\varphi^{[n]}) = T^*(\varphi^{[n-1]}\psi\mathfrak{D}(\varphi)) = T^*(\psi\mathfrak{D}(\varphi^{[n]})) \ ;$$

ce qui montre que $\mathcal{M}$ est stable par toutes les applications $\varphi \longmapsto \varphi^{[n]}$. Grâce à la proposition 4.8.6, on conclut que $\mathcal{M} = \mathcal{D}^*$, c'est-à-dire que $\mathfrak{D} \circ T^* = T^* \circ C^* \circ \mathfrak{D}$, où C est l'opérateur de composition défini à l'aide du corollaire 4.4.4 par l'identité $C^*(\chi) = \psi\chi$. Comme le $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$ est libre, l'application qui à un opérateur associe son transposé est injective, d'où $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$.
$\square$

Exemple : En vue d'obtenir un exemple d'un endomorphisme non bijectif de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, dont le transposé commute aux puissances divisées, mais ne vérifiant pas la conclusion de la proposition 4.11.4, on fixe un entier naturel $m \geq 2$. On sait par la proposition 4.11.2 que l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ \delta^{[m]}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées. D'après le corollaire 4.4.3, il existe un opérateur T tel qu'on ait l'identité $T^*(\varphi) = \varphi \circ \delta^{[m]}$ pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}^*$. Explicitement, cet opérateur T est donné par

$$Tx^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \text{ ne divise pas } n \\ \dfrac{n!}{(m!)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{m}\right)!}x^{\frac{n}{m}} & \text{si} \quad m \text{ divise } n \end{cases} ,$$

ce qui fait bien voir que T n'est pas bijective. Comme T^* est continue, la proposition 4.5.4 nous montre que T est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$. Par contre, nous allons vérifier qu'il n'existe pas d'opérateur de composition C (et même pas d'opérateur C) tel que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$. En effet, l'existence d'un tel C entraînerait par transposition que $\mathfrak{D} \circ T^* = T^* \circ C^* \circ \mathfrak{D}$. Appliquant cette égalité entre endomorphismes de $\mathcal{D}^*$ à la forme δ, on en déduirait que $\delta^{[m-1]} = \psi \circ \delta^{[m]}$, avec $\psi = C^*(\varepsilon)$. Appliquant cette identité entre formes linéaires à l'opérateur différentiel formel x^{m-1}, on trouve une contradiction.

Chapitre 5

Calcul ombral

On a vu que la donnée des deux applications ε et Δ confère au $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ une structure de $\mathcal{R}$-cogèbre cocommutative isomorphe à la cogèbre binomiale.

Nous allons donc pouvoir considérer sur $\mathcal{D}$, les mêmes objets que ceux construits dans le cadre du calcul ombral développé par de nombreux auteurs et plus particulièrement [40, 44].

Pour présenter ces objets, il sera utile de considérer l'application Θ qui, à un opérateur T fait correspondre la suite $(Tx^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, l'application Θ est une bijection $\mathcal{R}$-linéaire du module $\mathcal{O}$ des opérateurs dans le module $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de $\mathcal{D}$. Cette bijection nous permet de transférer sur $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$ les diverses opérations que nous avons rencontrées dans l'étude des opérateurs. Nous nous proposons dans un premier temps de faire voir quelles sont les opérations correspondantes sur $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$.

Tout d'abord, la multiplication des opérateurs dans $\mathcal{O}$ se traduit dans $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$ par une multiplication qu'on peut définir directement de la façon suivante : si $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ sont deux suites d'o.d.f., leur produit est la suite $(r_n)_n$ telle que $r_n = \sum_{j\in\mathbf{N}} \langle \delta^{[j]} \mid q_n \rangle p_j$. Cette multiplication est l'opération opposée de la composition ombrale définie (au moins dans le cas où $\mathcal{R}$ est un corps de caractéristique nulle muni de la dérivation nulle) par Roman et Rota [44, page 120]. Nous l'appellerons la *composition ombrale renversée.*

On remarque que les dérivées de Pincherle se traduisent par deux dérivations de $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$, que nous noterons encore ∂_1 et ∂_2, telles que

$$\partial_1(p_n)_n = (p_{n+1} - p_n x)_n \qquad \text{et} \qquad \partial_2(p_n)_n = (-p_{n+1} + x p_n)_n \ .$$

On a alors l'identité

$$\partial_1(p_n)_n + \partial_2(p_n)_n = ([x, p_n])_n \ . \tag{5.1}$$

Concernant maintenant les deux intégrales de Pincherle, elles se traduisent par deux applications, encore notées $\int_1$ et $\int_2$ de l'ensemble $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}$ dans lui-même. Ces opérations s'écrivent facilement quand on interprète l'intégrale de Pincherle comme l'opération réciproque à droite de la dérivation de Pincherle, c'est-à-dire que $\int_i (p_n)_n = (q_n)_n$ si et seulement si $\partial_i (q_n)_n = (p_n)_n$ et $q_0 = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On vérifie ainsi que ces intégrales de Pincherle se calculent par les formules

$$\int_1 (p_n)_n = (\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} p_j x^{n-1-j})_n \qquad ; \qquad \int_2 (p_n)_n = (-\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} p_j)_n \ .$$

5.1 Fonction génératrice d'un opérateur

Rappelons (exemple 4.1.3) que, pour un élément a de $\mathcal{R}$, on a défini la forme linéaire évaluation en a par $\varepsilon^a = \varepsilon \circ E^a$.

Nous allons caractériser les opérateurs - ou de façon équivalente les suites d'o.d.f.- par un objet très important : la fonction génératrice.

Définition 5.1.1 *Soit A un opérateur. On définit la fonction génératrice $\mathfrak{F}_A$ de l'opérateur A comme étant l'application $\mathfrak{F}_A$ de $\mathcal{R}$ dans l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ telle que*

$$\forall a \in \mathcal{R} \ , \quad \mathfrak{F}_A(a) = \varepsilon^a \circ A = A^*(\varepsilon^a) = \sum_{k \geq 0} \langle \varepsilon^a \mid A x^k \rangle \delta^{[k]} \ .$$

Proposition 5.1.2 *Soient T et U deux opérateurs de $\mathcal{O}$ et r un élément de $\mathcal{R}$, on a*

$$\mathfrak{F}_{T+U} = \mathfrak{F}_T + \mathfrak{F}_U \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F}_{rT} = r\mathfrak{F}_T \ .$$

Démonstration : En effet, soit $a \in \mathcal{R}$, on a

$$\mathfrak{F}_{T+U}(a) = \varepsilon^a \circ (T + U) = \varepsilon^a \circ T + \varepsilon^a \circ U = \mathfrak{F}_T(a) + \mathfrak{F}_U(a).$$

De même, il est facile de voir que pour $a \in \mathcal{R}$, on a $\mathfrak{F}_{rT}(a) = \varepsilon^a \circ (rT) = r\mathfrak{F}_T(a)$, qui est le résultat souhaité. □

Cette proposition 5.1.2 peut s'exprimer en disant que l'application $\mathfrak{F}$ de l'algèbre des opérateurs $\mathcal{O}$ dans le $\mathcal{R}$-module des applications de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}^*$ est $\mathcal{R}$-linéaire.

Proposition 5.1.3 *Soit T un opérateur. La fonction génératrice de la première dérivée de Pincherle de T est donnée par :*

$$\mathfrak{F}_{\partial_1 T}(a) = \mathfrak{D}\left(\mathfrak{F}_T(a)\right) - \mathfrak{F}_{M_x \circ T}(a) \ .$$

Démonstration : Soit r un élément de $\mathcal{R}$, un simple calcul montre que

$$\mathfrak{F}_{T \circ M_x}(a) = \varepsilon^a \circ T \circ M_x = \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_T(a)) \ ,$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5.1.4 *Pour tout opérateur T, on a la formule*

$$\varepsilon \circ \partial_1 T = \mathfrak{D}(\varepsilon \circ T) .$$

Démonstration : C'est le cas $a = 0$ de la proposition 5.1.3, compte tenu du fait que $\varepsilon \circ M_x = 0$. □

Proposition 5.1.5 *Soit T un opérateur. La fonction génératrice de la deuxième dérivée de Pincherle de T est donnée par :*

$$\mathfrak{F}_{\partial_2 T}(a) = \mathfrak{D}_2\left(\mathfrak{F}_T(a)\right) + a\mathfrak{F}_T(a) .$$

Démonstration : Fixons $a \in \mathcal{R}$. Puisque l'opérateur de translation E^a est un endomorphisme de $\mathcal{D}$ et que $M_x^\vee$ est à la multiplication à gauche par $-x$, on a $E^a \circ M_x^\vee = M_x^\vee \circ E^a - aE^a$, c'est-à-dire $\partial_2 E^a = -aE^a$. Passant aux formes linéaires à partir de cette relation entre opérateurs de composition, on en déduit que $\mathfrak{D}_2 \varepsilon^a = -a\varepsilon^a$. En utilisant la formule (4.10), ceci s'écrit

$$\partial \circ \varepsilon^a + \varepsilon^a \circ M_x^\vee = -a\varepsilon^a .$$

Composant cette dernière égalité avec l'opérateur T à droite, on a

$$\partial \circ \varepsilon^a \circ T + \varepsilon^a \circ M_x^\vee \circ T = -a\varepsilon^a \circ T ,$$

soit, en utilisant à nouveau la formule (4.10),

$$\mathfrak{D}_2(\varepsilon^a \circ T) + \varepsilon^a \circ M_x^\vee \circ T = \varepsilon^a \circ T \circ M_x^\vee - a\varepsilon^a \circ T ,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$\mathfrak{D}_2(\varepsilon^a \circ T) + a\varepsilon^a \circ T = \varepsilon^a \circ [T, M_x^\vee] = \varepsilon^a \circ \partial_2 T ,$$

ce qui est le résultat cherché. □

Corollaire 5.1.6 *Pour tout opérateur T, on a la formule*

$$\varepsilon \circ \partial_2 T = \mathfrak{D}_2(\varepsilon \circ T) .$$

Démonstration : C'est le cas $a = 0$ de la proposition 5.1.5. □

5.1.1 Dérivée d'une fonction génératrice

Pour travailler avec les fonctions génératrices, il est intéressant de savoir si la fonction génératrice caractérise l'opérateur. Ce n'est pas le cas en général, comme le prouve le cas bien connu où $\mathcal{R}$ est un corps fini muni de la dérivation nulle $\partial = 0$. Nous allons maintenant voir que tout se passe bien dans le cas où l'anneau de base est intègre et infini ; ceci nous permet, sous cette hypothèse, de définir la dérivée d'une fonction génératrice. Nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme 5.1.7 *Si un anneau différentiel $(\mathcal{R}, \partial)$ est intègre et infini, alors son sous-anneau des constantes $\mathcal{R}_c = \{a \in \mathcal{R} \mid a' = 0\}$ est infini.*

Démonstration : Si la caractéristique de $\mathcal{R}$ est nulle, alors l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs s'injecte dans le sous-anneau $\mathcal{R}_c$. Si la caractéristique de $\mathcal{R}$ est non nulle, alors c'est un nombre premier ℓ puisque $\mathcal{R}$ est supposé intègre. L'application $r \mapsto r^\ell$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ est alors un morphisme injectif dont l'image est contenue dans le sous-anneau $\mathcal{R}_c$ qui est donc infini. □

Lemme 5.1.8 *Étant donnée une suite finie $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments constants de $\mathcal{R}$ - c'est-à-dire que $a_1' = \cdots = a_n' = 0$ -, on a $\langle \varepsilon \mid \prod_{i=1}^{n}(x + a_i)\rangle = \prod_{i=1}^{n} a_i$.*

Démonstration : par récurrence sur n. □

Théorème 5.1.9 *Supposons que l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini. Pour deux opérateurs quelconques A et B éléments de $\mathcal{O}$, on a l'implication*

$$(\forall a \in \mathcal{R} \ \ \varepsilon^a \circ A = \varepsilon^a \circ B) \implies A = B \ .$$

Démonstration : Sans restreindre la généralité, on peut considérer le seul cas où $B = 0$. Il suffit de montrer que $p = 0$ dès que $\langle \varepsilon^a \mid p\rangle = 0$. Si au contraire p était de degré $m \geq 0$, on pourrait, d'après le lemme 5.1.7, construire une suite $c_0, c_1, \ldots, c_m$ de $m+1$ éléments deux à deux distincts du sous-anneau des constantes $\mathcal{R}_c$. Pour un entier $k \in \{0, \ldots, m+1\}$, posons $q_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x - c_i)$ (en particulier, selon la convention usuelle, $q_0 = 1$; on va montrer par récurrence sur k que q_k est un diviseur de p à droite, donc $m = \deg p \geq \deg q_k = k$, ce qui, pour $k = m + 1$, est une contradiction qui prouvera que $p = 0$. Pour $k = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $p = dq_k$ pour un o.d.f. d et un entier $k \in \{0, \ldots, m\}$; on écrit

$$0 = \langle \varepsilon^{c_k} \mid p\rangle = \langle \varepsilon^{c_k} \mid dq_k\rangle \ ;$$

puisque par définition on a $\varepsilon^{c_k} = \varepsilon \circ E^{c_k}$ et que l'opérateur de translation E^{c_k} est un endomorphisme de l'anneau $\mathcal{D}$, on en déduit par $\mathcal{D}$-linéarité à gauche de ε

$$0 = \langle \varepsilon \mid (E^{c_k} d)(E^{c_k} q_k)\rangle = (E^{c_k} d).\langle \varepsilon \mid E^{c_k} q_k\rangle \ .$$

Puisque $E^{c_k}q_k = \prod_{i=1}^{k-1}(x + c_k - c_i)$ est produit de facteurs du premier degré à coefficients constants, le lemme 5.1.8 montre que $\langle \varepsilon \mid E^{c_k}q_k\rangle = \prod_{i=0}^{k-1}(c_k - c_i)$ qui appartient au sous-anneau $\mathcal{R}_c$ des constantes de $\mathcal{R}$, donc commute à tous les éléments de $\mathcal{D}$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} 0 = (E^{c_k}d).\prod_{i=1}^{k-1}(c_k - c_i) = \langle \varepsilon \mid E^{c_k}d\prod_{i=1}^{k-1}(c_k - c_i)\rangle &= \langle \varepsilon \mid \prod_{i=1}^{k-1}(c_k - c_i)E^{c_k}d\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{k-1}(c_k - c_i)\langle \varepsilon \mid E^{c_k}d\rangle \ . \end{aligned}$$

Puisque l'anneau $\mathcal{R}$ est supposé intègre et que $c_k \neq c_i$ pour tout indice $i \neq k$, on en déduit que $\langle \varepsilon \mid E^{c_k}d\rangle = 0$.

Par utilisation de la formule (3.6), $E^{c_k}d = (QE^{c_k}d)x + \langle \varepsilon \mid E^{c_k}d\rangle$ est multiple à gauche de x, donc $d = E^{-c_k}E^{c_k}d$ est multiple à gauche de $E^{-c_k}x = x - c_k$. Par conséquent p est multiple à gauche de $(x - c_k)q_k = q_{k+1}$, ce qui achève la récurrence. □

Corollaire 5.1.10 *Si l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, l'application $\mathfrak{F} : T \mapsto \mathfrak{F}_T$ est une injection de $\mathcal{O}$ dans l'ensemble des applications de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{D}^*$.*

Démonstration : C'est une conséquence directe du théorème 5.1.9.
□

Définition 5.1.11 *Supposons que l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini. La dérivée de la fonction génératrice de l'opérateur A, notée $\mathfrak{F}'_A$ est la fonction génératrice de l'opérateur $D_1 \circ A$. Autrement dit,*

$$\mathfrak{F}'_A = \mathfrak{F}_{D_1 \circ A} \ .$$

La définition 5.1.11 fait sens puisque, d'après le corollaire 5.1.10, la fonction $\mathfrak{F}_A$ ne peut être fonction génératrice d'un opérateur autre que A.

5.1.2 Caractérisation par fonction génératrice d'un opérateur ombral

Théorème 5.1.12 *Soit un opérateur $T \in \mathcal{O}$. Pour que T soit un opérateur ombral, il est nécessaire qu'il existe une forme linéaire delta φ telle que la fonction génératrice de T est donnée par*

$$\forall a \in \mathcal{R}, \qquad \mathfrak{F}_T(a) = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)} \ .$$

Si de plus l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, cette condition est aussi suffisante pour que T soit un opérateur ombral.

Démonstration : Supposons que T est un opérateur ombral. Alors sa réciproque T^{-1} est un opérateur ombral d'après le lemme 3.8.8. Considérons l'endomorphisme $\mathfrak{T} = (T^{-1})^*$ du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$ qui est le transposé de T^{-1}. Puisque T^{-1} est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, l'application $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ d'après la proposition 4.5.4. En outre, d'après la définition 3.8.3 d'un opérateur ombral et la proposition 4.11.3, on sait que $\mathfrak{T}$ commute aux puissances divisées. En vertu de la proposition 4.11.2, il existe donc une forme linéaire φ sur $\mathcal{D}$, avec $\operatorname{ord}\varphi > 0$, telle que $\mathfrak{T}$ est la substitution à droite par la forme φ. Puisque $\mathfrak{T}$ est un automorphisme de $\mathcal{D}^*$ comme transposé d'un automorphisme de $\mathcal{D}$, on voit que la forme linéaire φ est réversible, c'est-à-dire est une forme delta (théorème 4.10.2). On voit ainsi que le transposé de T est la substitution à droite par la forme delta $\varphi^{\circ(-1)}$ réciproque de φ. En particulier, si a est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, on a $\mathfrak{F}_T(a) = T^*(\varepsilon^a) = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}$.

Réciproquement, étant donnée une forme delta φ, soit T un opérateur tel que $\varepsilon^a \circ T = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}$ pour tout $a \in \mathcal{R}$. Définissons un endomorphisme $\mathfrak{U}$ du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$ par $\mathfrak{U}(\psi) = \psi \circ \varphi^{\circ(-1)}$. En vertu de la proposition 4.11.2, on sait que $\mathfrak{U}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées. Puisque $\mathfrak{U}$ est continu, il existe par la proposition 4.5.4 un endomorphisme U de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ tel que $\mathfrak{U}$ est le transposé de U. Puisque φ est une forme delta, on sait que $\mathfrak{U}$ est la bijection réciproque de $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, qui est elle-même la transposée d'un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, et ce dernier est nécessairement la bijection réciproque de U. Ainsi, on voit que U est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des o.d.f. dont le transposé commute aux puissances divisées ; la proposition 4.11.4 nous assure que U un opérateur ombral. La fonction génératrice de U est donnée par

$$\mathfrak{F}_U(a) = U^*(\varepsilon^a) = \mathfrak{U}(\varepsilon^a) = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)} = \mathfrak{F}_T(a) \ ,$$

d'où, puisque $\mathcal{R}$ a été supposé intègre et infini, $U = T$ par le théorème 5.1.9. Par conséquent T est bien un opérateur ombral. □

5.1.3 Caractérisation par fonction génératrice d'un opérateur de composition

Propriété 5.1.13 *Soit un opérateur $T \in \mathcal{O}$. Pour que T soit un opérateur de composition, il est nécessaire qu'il existe une forme linéaire τ telle que la fonction génératrice de T est donnée par*

$$\forall a \in \mathcal{R}, \qquad \mathfrak{F}_T(a) = \tau\varepsilon^a \ .$$

Si de plus l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, cette condition est aussi suffisante pour que T soit un opérateur de composition.

Démonstration : Soit T un opérateur de composition. Comme la formule (4.2) montre que le transposé de T est la multiplication par la forme linéaire $\tau = \varepsilon \circ T$, on en déduit que la fonction génératrice de T vérifie $\mathfrak{F}_T(a) = T^*(\varepsilon^a) = \tau\varepsilon^a$ pour tout $a \in \mathcal{R}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une forme linéaire $\tau \in \mathcal{D}^*$ telle que $\varepsilon^a \circ T = \tau\varepsilon^a$. Soit $U = (\tau \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ \Delta$ l'opérateur de composition correspondant à τ dans l'isomorphisme entre $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$. On a alors, d'après ce qui précède,

$$\mathfrak{F}_U(a) = \tau\varepsilon^a = \varepsilon^a \circ T = \mathfrak{F}_T(a)\,,$$

ce qui, puisque l'anneau $\mathcal{R}$ a été supposé intègre et infini, entraîne que $U = T$ par le théorème 5.1.9. Ainsi, l'opérateur T est bien de composition. $\square$

5.1.4 Caractérisation par fonction génératrice d'un opérateur d'Appell

Propriété 5.1.14 *Soit un opérateur $A \in \mathcal{O}$. Pour que A soit un opérateur d'Apell, il est nécessaire qu'il existe une forme linéaire inversible τ telle que la fonction génératrice de A est donnée par*

$$\forall a \in \mathcal{R}, \qquad \mathfrak{F}_A(a) = \tau\varepsilon^a\,.$$

Si de plus l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, cette condition est aussi suffisante pour que A soit un opérateur d'Appell.

Démonstration : Ceci se déduit de la propriété 5.1.13 moyennant la simple observation qu'un opérateur de composition T est un opérateur d'Appell si et seulement la forme linéaire $\tau = \varepsilon \circ T$ est inversible dans $\mathcal{D}^*$. Cette dernière observation est une conséquence directe de la proposition 3.4.1. $\square$

5.1.5 Caractérisation par fonction génératrice d'un opérateur de Sheffer

Propriété 5.1.15 *Soit un opérateur $G \in \mathcal{O}$. Pour que G soit un opérateur de Sheffer, il est nécessaire qu'il existe une forme linéaire inversible γ et une forme delta φ telle que la fonction génératrice de G est donnée par*

$$\forall a \in \mathcal{R}, \qquad \mathfrak{F}_G(a) = \gamma(\varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)})\,.$$

Si de plus l'anneau de base $\mathcal{R}$ est intègre et infini, cette condition est aussi suffisante pour que G soit un opérateur de Sheffer.

Démonstration : Soit G un opérateur de Sheffer, de sorte qu'il existe un opérateur ombral T et un opérateur d'Appell A tels que $G = T \circ A$. D'après le théorème 5.1.12, il existe une forme delta φ telle que $\varepsilon^a \circ T = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}$ pour tout $a \in \mathcal{R}$. D'autre part, le corollaire 4.4.4 montre l'existence d'une forme linéaire γ telle que le transposé de A^* de A est l'application de multiplication par γ. La forme linéaire γ est inversible, puisque $\gamma = A^*(\varepsilon) = \varepsilon \circ A$ est la forme linéaire qui correspond à l'opérateur d'Appell A dans l'isomorphisme entre $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$. On en déduit la fonction génératrice $\mathfrak{F}_G$ de l'opérateur G :

$$\mathfrak{F}_G(a) = \varepsilon^a \circ G = \varepsilon^a \circ T \circ A = A^*(\varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}) = \gamma(\varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}) \ ,$$

comme il fallait le montrer.

Réciproquement, étant données une forme linéaire inversible γ et une forme delta φ, soit G un opérateur tel que ${}_G(a) = \gamma(\varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)})$ pour tout $a \in \mathcal{R}$. Puisque $\mathcal{R}$ est intègre infini, le théorème 5.1.12 et la propriété 5.1.14 assurent l'existence respectivement d'un opérateur ombral T et d'un opérateur d'Appell A tels que $\varepsilon^a \circ T = \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)}$ et $\varepsilon^a \circ A = \gamma\varepsilon^a$. Alors $T \circ A$ est un opérateur de Sheffer dont la fonction génératrice est, d'après ce qui précède, identique à la fonction génératrice de G. Le théorème 5.1.9 conduit alors à l'égalité $G = T \circ A$ qui montre que G est bien un opérateur de Sheffer. □

5.2 Suites de type binomial

Définition 5.2.1 *Soit $(p_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. On dit que la suite $(p_n)_{n\in N}$ est une suite de type binomial si $\langle \varepsilon \mid p_0 \rangle = 1$ et $\Delta(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \otimes p_{n-k}$.*

Par exemple, la suite $(x^n)_n$ est de type binomial.

Propriété 5.2.2 *Si $(p_n)_{n\in N}$ est une suite de type binomial alors $\langle \varepsilon \mid p_n \rangle = 0$ pour $n \geq 1$.*

Démonstration : Puisque ε est la coünité de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$, on a pour tout entier naturel n l'égalité $((\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(p_n) = p_n$; autrement dit

$$\forall n \geq 1 \ \ , \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \langle \varepsilon \mid p_{n-k} \rangle p_k = 0 \ ;$$

et si l'on suppose que $\langle \varepsilon \mid p_1 \rangle = \langle \varepsilon \mid p_2 \rangle = \cdots = \langle \varepsilon \mid p_{n-1} \rangle = 0$, on en déduit que $\langle \varepsilon \mid p_n \rangle = 0$ en utilisant l'hypothèse $\langle \varepsilon \mid p_0 \rangle = 1$. □

Proposition 5.2.3 *L'application Θ induit une bijection entre les suites de type binomial et les endomorphismes de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ des opérateurs différentiels formels.*

Démonstration : Ceci résulte directement des définitions. □

Proposition 5.2.4 *Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de type binomial et si φ et ψ sont deux formes linéaires sur ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, on a :*

$$\langle \varphi\psi \mid p_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varphi \mid p_k \rangle \langle \psi \mid p_{n-k} \rangle \ .$$

La proposition 5.2.4 peut être généralisée au cas d'un nombre fini quelconque de formes linéaires.

Proposition 5.2.5 *Si* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de type binomial et si* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *sont k formes linéaires sur* ${}^\diamond\mathcal{D}$, *on a :*

$$\langle \varphi_1\varphi_2...\varphi_k \mid p_n\rangle = \sum_{j_1+j_2+...+j_k=n} \binom{n}{j_1, j_2, ..., j_k} \langle \varphi_1 \mid p_{j_1}\rangle\langle \varphi_2 \mid p_{j_2}\rangle...\langle \varphi_k \mid p_{j_k}\rangle\ .$$

Définition 5.2.6 *Soit* $(p_n)_{n\in N}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{D}$. *On dit que la suite* $(p_n)_{n\in N}$ *est une base de type binomial si c'est une suite de type binomial qui forme une base de* ${}^\diamond\mathcal{D}$.

Proposition 5.2.7 *L'application* Θ *induit une bijection entre les bases de type binomial et les automorphismes de la cogèbre* $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ *des opérateurs différentiels formels.*

Démonstration : En effet, on sait que les automorphismes d'un $\mathcal{R}$-module sont caractérisés parmi tous les endomorphismes par la propriété de transformer une base en une autre base. □

Définition 5.2.8 *Soit* $(p_n)_{n\in N}$ *une base de* ${}^\diamond\mathcal{D}$. *On appelle opérateur de décalage de la base* $(p_n)_n$, *l'endomorphisme* $\mathcal{R}$*-linéaire de* ${}^\diamond\mathcal{D}$ *tel que* $Sp_n = p_{n+1}$.

Lemme 5.2.9 *Soit* T *un opérateur bijectif tel que* $\varepsilon \circ T = \varepsilon$ *et* S *l'opérateur de décalage de la base* $(Tx^n)_n$. *Alors* $T \circ M_x = M_x \circ Q \circ S \circ T$, *où* Q *est l'endomorphisme du* $\mathcal{R}$*-module* ${}^\diamond\mathcal{D}$ *défini par (3.6).*

Démonstration : D'une part $T \circ M_x(x^n) = Tx^{n+1}$; d'autre part, S étant l'opérateur de décalage de la base $(Tx^n)_n$, on a

$$M_x \circ Q \circ S \circ T(x^n) = M_x \circ Q(Tx^{n+1}) = Q(Tx^{n+1})x\ ;$$

or, d'après (3.6) on sait que $Tx^{n+1} = (QTx^{n+1})x + \langle\varepsilon \mid Tx^{n+1}\rangle$; par l'hypothèse $\varepsilon \circ T = \varepsilon$, on en déduit le résultat souhaité. □

Définition 5.2.10 *Soit* S *l'opérateur de décalage d'une base* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* ${}^\diamond\mathcal{D}$. *On dit que* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de type binomial fort (ou pour abréger une base forte) si c'est une base de type binomial vérifiant* $p_0 = 1$ *et telle que l'opérateur* $Q \circ S$ *est un opérateur de composition.*

Soit ℓ un nombre premier et s_ℓ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui, à un entier naturel n, associe la somme de ses chiffres en base ℓ. Si $\mathcal{R}$ est un anneau de caractéristique ℓ qui contient un élément inversible a tel que $a^{\ell-1} \neq 1$, alors la suite $(a^{s_\ell(n)}x^n)_n$ est un exemple de base de type binomial qui n'est pas une base forte. En effet, l'opérateur $Q \circ S$ est alors défini par la formule $(Q \circ S)(x^n) = a^{s_\ell(n+1)-s_\ell(n)}x^n$ pour tout entier naturel n ; s'il était de composition, on aurait $D_1 \circ Q \circ S = Q \circ S \circ D_1$ (théorème 3.4.5) ; or, il est facile de constater que $D_1 \circ Q \circ S(x^{\ell-1}) \neq Q \circ S \circ D_1(x^{\ell-1})$ si $a^{\ell-1} \neq 1$.

Proposition 5.2.11 *L'application Θ induit une bijection entre les bases fortes et les opérateurs ombraux. De plus, l'opérateur de décalage d'une base forte est une codérivation forte.*

Démonstration : Soit T un opérateur ombral. Puisque T est le correspondant strict d'une dérivation forte, on sait que $T1 = 1$. Reste à montrer que l'opérateur $Q \circ S$ est un opérateur de composition. D'après la définition d'un opérateur ombral, il existe un opérateur de composition C tel que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$. Remarquons que d'après le lemme 5.2.9, on a $T \circ M_x = M_x \circ Q \circ S \circ T$. D'où $M_x \circ C \circ T = M_x \circ Q \circ S \circ T$; puisque T est bijective et que M_x est injective, on en déduit $C = Q \circ S$, donc $Q \circ S$ est un opérateur de composition.

Réciproquement, soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base forte et T l'opérateur tel que $Tx^n = p_n$; d'après la proposition 5.2.7, T est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$; pour montrer que T est un opérateur ombral, il suffit de vérifier que $T1 = 1$ et qu'il existe un opérateur de composition C tel que $T \circ M_x = M_x \circ C \circ T$. Or, d'une part $T1 = p_0 = 1$, et d'autre part $Q \circ S$ est un opérateur de composition. Puisque $T \circ M_x = M_x \circ Q \circ S \circ T$ (lemme 5.2.9), le résultat désiré est atteint. En outre, on a $S = M_x \circ Q \circ S$ d'après le lemme 3.7.1 et la formule (3.6), donc S est bien une codérivation forte. □

Il en résulte par exemple que la suite de type binomial $(x^n)_n$ est une base forte.

5.3 Suites de Sheffer

Définition 5.3.1 *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. On dit que $(p_n)_n$ est une suite de Sheffer s'il existe une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ et une forme delta φ telles que, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, on ait*

$$\left\langle \psi\varphi^{[m]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = m\,; \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (5.2) est appelée une suite d'Appell dans le cas où $\varphi = \delta$ et suite associée dans le cas où $\psi = \varepsilon$. Dans ce qui suit, on travaillera très souvent avec cette classe particulière des suites de Sheffer qui est celle des suites associées.

Définition 5.3.2 *On dit qu'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à la forme delta φ si :*

$$\left\langle \varphi^{[k]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n\,; \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Proposition 5.3.3 *Pour toute forme delta φ et pour toute forme inversible ψ, il existe une et une seule suite de Sheffer définie par (5.2). En particulier, pour toute forme delta φ, il existe une et une seule suite associée.*

Démonstration : Comme φ est une forme delta, d'après le théorème 4.10.2, la famille $(\varphi^{[m]})_m$ est une base topologique de $\mathcal{D}^*$; puisque ψ est une forme inversible, la famille $(\psi\varphi^{[m]})_m$ est aussi une base topologique de $\mathcal{D}^*$. Alors le théorème 4.4.2 montre l'existence et l'unicité de l'opérateur différentiel formel p_m tel que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, on ait :

$$\left\langle \psi\varphi^{[m]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases}$$

□

Théorème 5.3.4 *L'application Θ induit une bijection entre les suites de Sheffer et les opérateurs de Sheffer.*

Démonstration : Soit G un opérateur de Sheffer ; montrons que $\Theta(G)$ est une suite de Sheffer. Il existe un opérateur ombral T et un opérateur d'Appell A tels que $G = T \circ A$. L'endomorphisme T^* transposé de T est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées (proposition 4.11.3). Par la proposition 4.11.2, T^* est donc la substitution à droite par une forme linéaire θ nécessairement réversible, puisque T^* est un automorphisme. Soit $\varphi = \theta^{\circ(-1)}$ la forme réciproque de θ : c'est une forme delta (théorème 4.10.2). Considérons aussi la forme linéaire $\psi = (T^*)^{-1}(\varepsilon \circ A^{-1})$: elle est inversible, car, d'une part $\varepsilon \circ A^{-1}$ est inversible comme correspondant à un opérateur d'Appell dans l'isomorphisme entre $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}$, et d'autre part $(T^*)^{-1}$ est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$. Pour deux entiers naturels quelconques m et n, on calcule

$$\langle \psi\varphi^{[m]} \mid Gx^n \rangle = \langle (T^*)^{-1}((\varepsilon \circ A^{-1})\delta^{[m]} \mid T(Ax^n) \rangle = \langle (\varepsilon \circ A^{-1})\delta^{[m]} \mid Ax^n \rangle \,,$$

ce qui, puisque A est de composition, se transforme en

$$\langle \psi\varphi^{[m]} \mid Gx^n \rangle = \langle \varepsilon\delta^{[m]} \mid x^n \rangle = \langle \delta^{[m]} \mid x^n \rangle \,,$$

et ceci prouve que $\Theta(G)$ est bien une suite de Sheffer.

Réciproquement, étant donnée une suite de Sheffer $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, soit G l'opérateur tel que $\Theta(G) = (p_n)_{n\in/N}$. Par définition, il existe une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ et une forme delta φ telles que l'égalité

$$\left\langle \psi\varphi^{[m]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = m\,; \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases}$$

ait lieu pour tout couple (m, n) d'entiers naturels. Définissons un endomorphisme $\mathfrak{T}$ du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}^*$ par $\mathfrak{T}(\alpha) = \alpha \circ \varphi^{\circ(-1)}$. En vertu de la proposition 4.11.2, on sait que $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées. Puisque $\mathfrak{T}$ est continu, il existe par la proposition 4.5.4 un endomorphisme T de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ tel que $\mathfrak{T}$ est le transposé de T. Puisque φ est une forme delta, on sait que $\mathfrak{T}$ est la bijection réciproque de $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, qui est elle-même la transposée d'un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$, et ce dernier est nécessairement la bijection réciproque de T. Ainsi, on voit que T est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ des o.d.f. dont le transposé commute aux puissances divisées ; la proposition 4.11.4 nous assure que T est un opérateur ombral. La forme linéaire $\mathfrak{T}(\psi) = \psi \circ T$ est inversible dans $\mathcal{D}^*$ comme image de la forme inversible ψ par l'automorphisme $\mathfrak{T}$. Elle est de la forme $\varepsilon \circ A^{-1}$ pour un opérateur d'Appell A bien déterminé. On remarque alors que, puisque ψ est inversible et φ est réversible, la famille $(\psi\varphi^{[m]})_{m\in\mathbf{N}}$ est une base topologique de l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ (théorème 4.10.2). Par hypothèse l'endomorphisme G^* transposé de G envoie cette base sur la base des puissances divisées de δ. Or, comme $T^* = \mathfrak{T}$ est un endomorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées, on a $A^*(T^*(\psi\varphi^{[m]})) = A^*(\psi \circ T\delta^{[m]})$; et, comme A^*, en tant que transposé de l'opérateur de composition A, est la multiplication par la forme linéaire $\varepsilon \circ A$, on voit finalement que $A^*(T^*(\psi\varphi^{[m]})) = \delta^{[m]}$, donc $(T \circ A)^* = G^*$. Puisque le $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$ est libre, il en résulte que $G = T \circ A$ est bien un opérateur de Sheffer. □

5.3.1 Théorème de développement pour les suites de Sheffer

Théorème 5.3.5 *Soit $(p_n)_n$ une suite de Sheffer pour une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ et une forme delta φ. Une forme linéaire χ quelconque dans $\mathcal{D}^*$ se développe sous la forme*

$$\chi = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \chi \mid p_k \rangle \psi\varphi^{[k]} \; .$$

Démonstration : On a l'égalité suivante :

$$\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \chi \mid p_k \rangle \psi\varphi^{[k]} \mid p_n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \chi \mid p_k \rangle \langle \psi\varphi^{[k]} \mid p_n \rangle \; ;$$

comme par hypothèse la suite $(p_n)_n$ est une suite de Sheffer, on a

$$\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \chi \mid p_k \rangle \psi\varphi^{[k]} \mid p_n \rangle = \langle \chi \mid p_n \rangle \; ;$$

le résultat s'en déduit puisque $(p_n)_n$ est une base du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$, comme image de la base $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ par un automorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$ (théorème 5.3.4). □

5.3.2 Théorème de développement des o.d.f.

Théorème 5.3.6 *Soit $(p_n)_n$ une suite de Sheffer pour une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ et une forme delta φ, alors tout o.d.f. d se développe sous* *la forme*

$$d = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \psi\varphi^{[k]} \mid d\rangle p_k \ .$$

Démonstration : Comme $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ forme une base du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, on peut écrire

$$d = \sum_{k\geq 0} a_k p_k \ ; \tag{5.4}$$

pour une certaine suite $(a_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{R}$, dont seulement un nombre fini est non nul. On en déduit

$$\langle \psi\varphi^{[h]} \mid d\rangle = \sum_{k\geq 0} a_k \langle \psi\varphi^{[h]} \mid p_k\rangle = a_h \ ;$$

et en remplaçant a_h par son expression dans la formule (5.4), on obtient le résultat cherché. □

5.3.3 Théorème de caractérisation des suites de Sheffer

Soit F un opérateur de composition et k un entier naturel. On note $F^{[k]}$ l'opérateur de composition tel que $\varepsilon \circ F^{[k]} = (\varepsilon \circ F)^{[k]}$. Ceci signifie qu'on transporte les puissances divisées de l'algèbre duale $\mathcal{D}^*$ à l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition au moyen de l'isomorphisme de la proposition 3.4.1.

Théorème 5.3.7 *Soit $(p_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$, φ une forme linéaire delta et F l'opérateur de composition tel que $\varepsilon \circ F = \varphi$. Pour qu'il existe une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ telle que la suite $(p_n)_n$ est une suite de Sheffer satisfaisant (5.2), il est nécessaire et suffisant que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*
- $(S1)$ $\langle \varepsilon \mid p_0\rangle$ *est inversible dans l'anneau $\mathcal{R}$;*
- $(S2)$ *pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on a*

$$F^{[k]}p_n = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p_{n-k} & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{si} \quad n < k \end{cases} .$$

Démonstration : Supposons qu'il existe une forme linéaire ψ inversible dans $\mathcal{D}^*$ telle que la suite $(p_n)_n$ est une suite de Sheffer satisfaisant (5.2). Alors, par la formule (4.2), nous savons que le transposé ${F^{[l]}}^*$ de l'opérateur $F^{[l]}$ est simplement la multiplication par la forme linéaire $\varphi^{[l]}$. Par conséquent, en fixant un couple (k, n) d'entiers naturels

$$\langle \psi\varphi^{[k]} \mid F^{[l]}p_n\rangle = \langle \psi\varphi^{[k]}\varphi^{[l]} \mid p_n\rangle \ ,$$

ce qui, par la proposition 4.8.4 appliquée à la forme φ d'ordre strictement positif peut s'exprimer par

$$\langle \psi\varphi^{[k]} \mid F^{[l]}p_n\rangle = \binom{k+l}{k}\langle \psi\varphi^{[k+l]} \mid p_n\rangle \ .$$

D'autre part, pour $n \geq l$, on a pour tout entier naturel k

$$\langle \psi\varphi^{[k]} \mid \binom{n}{l}p_{n-l}\rangle = \binom{n}{l}\langle \psi\varphi^{[k]} \mid p_{n-l}\rangle \ .$$

Puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Sheffer satisfaisant (5.2) et que la suite $(\psi\varphi^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est une base topologique de l'algèbre $\mathcal{D}^*$, on en déduit que $F^{[l]}p_n = \binom{n}{l}p_{n-l}$ si $n \geq l$. Dans le cas où $n < l$, on voit que

$$\langle \psi\varphi^{[k]} \mid F^{[l]}p_n\rangle = \binom{k+l}{k}\langle \psi\varphi^{[k+l]} \mid p_n\rangle = 0 \ ,$$

car p_n satisfait (5.2). De même que précédemment, on en déduit $F^{[l]}p_n = 0$ pour $n < l$. Reste à montrer la validité de $(S1)$. Par (5.2) appliqué avec $n = k = 0$, on obtient $\langle \psi \mid p_0\rangle = 1$. Or, par le théorème 5.3.4, il existe un opérateur d'Appell A et un opérateur ombral T tel que $p_0 = TA1$. On en déduit que

$$\Delta(p_0) = (\Delta \circ T)(A1) = [(T \otimes T) \circ \Delta \circ A](1) = [(T \circ A) \otimes T] \circ \Delta(1) = p_0 \otimes 1 \ .$$

Il en résulte que

$$1 = \langle \psi \mid p_0\rangle = \langle \varepsilon\psi \mid p_0\rangle = \langle \varepsilon \mid p_0\rangle\langle \psi \mid 1\rangle \ ,$$

ce qui fait voir que $\langle \varepsilon \mid p_0\rangle$ est inversible dans l'anneau $\mathcal{R}$.

Réciproquement, on suppose que les conditions $(S1)$ et $(S2)$ sont simultanément vérifiées. Soit l'opérateur G tel que $\Theta(G) = (p_n)_n$ et $\mathfrak{T}$ l'endomorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ défini par $\mathfrak{T}(\alpha) = \alpha \circ \varphi^{\circ(-1)}$. Comme $\mathfrak{T}$ est continu, c'est le transposé d'un opérateur T. On sait par la proposition 4.11.4 que T est un opérateur ombral. La suite $(Tx^n)_n$ est une suite associée à la forme delta φ et donc par la partie directe vérifie la condition $(S2)$; on a donc pour tout entier naturel k

$$F^{[k]} \circ T = T \circ D_k \ ,$$

par la condition $(S2)$, on a aussi

$$F^{[k]} \circ G = G \circ D_k \ ;$$

et donc pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$(T^{-1}\circ G)\circ D_k = T^{-1}\circ(G\circ D_k) = T^{-1}\circ(F^{[k]}\circ G) = (T^{-1}\circ F^{[k]})\circ G = D_k\circ(T^{-1}\circ G) \ ;$$

on en déduit que $T^{-1} \circ G$ est un opérateur de composition. Reste à vérifier que c'est un opérateur d'Appell, pour cela par le corollaire 3.4.9, il suffit de vérifier que $\langle \varepsilon \mid (T^{-1} \circ G)1\rangle \in \mathcal{R}^\bullet$. De l'identité $\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon$ résulte $\langle \varepsilon \mid (T^{-1} \circ G)1\rangle = \langle \varepsilon \circ \varphi \mid G1\rangle = \langle \varepsilon \mid p_0\rangle \in \mathcal{R}p^\bullet$ car $(T^{-1})^*$ est la substitution à droite par φ. Donc $G = T \circ (T^{-1} \circ G)$ est de Sheffer. On termine la démonstration en appliquant le théorème 5.3.4. $\square$

5.4 Suites associées

Théorème 5.4.1 *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs différentiels formels. Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base forte si et seulement si elle est la suite associée à une forme delta.*

Démonstration : Soit $(p_n)_n$ la suite associée à la forme delta φ. Puisque φ est une forme delta, on sait (Théorème 4.10.2) qu'elle est réversible, de sorte qu'il existe une série ψ d'ordre ≥ 1 telle que $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = \delta$. Soit $\mathfrak{T}$ l'application $\chi\mapsto\chi\circ\psi$ de substitution à droite par la forme ψ. D'après la proposition 4.9.5, on sait que $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées. De plus, l'application $\mathfrak{T}$ est une bijection puisqu'elle admet pour réciproque la substitution à droite par la forme φ. Désignons par T l'endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$ tel que $Tx^n = p_n$ pour tout entier naturel n. Comme la famille $(\varphi^{[k]})_k$ est une base topologique de $\mathcal{D}^*$, que $(x^n)_n$ est une base de ${}^\diamond\mathcal{D}$ et que $\mathfrak{T}$ est continu (théorème 4.9.3), la relation de définition de la suite associée $\langle\varphi^{[k]}\mid p_n\rangle = \langle\delta^{[k]}\mid x^n\rangle$ montre que $\mathfrak{T} = T^*$. Si maintenant p est un quelconque opérateur différentiel formel, alors la forme linéaire $\mathfrak{e}_p\circ\mathfrak{T}^{-1}$ sur $\mathcal{D}^*$ est continue comme composée d'applications continues ; par le théorème 4.4.2, il existe donc un unique $q\in\mathcal{D}$ tel que $\mathfrak{e}_q = \mathfrak{e}_p\circ\mathfrak{T}^{-1}$, c'est-à-dire tel que $Tq = p$. Ainsi, l'opérateur T est bijectif ; comme la proposition 4.5.4 montre que T est un endomorphisme de la cogèbre , on en conclut que T est un automorphisme de $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ dont le transposé commute aux puissances divisées. La proposition 5.2.11 permet de conclure que $(p_n)_n$ est une base forte.

Réciproquement, soit $(p_n)_n$ une base forte et T l'opérateur tel que $Tx^n = p_n$. La proposition 5.2.11 montre que T est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ dont le transposé commute aux puissances divisées. Son transposé T^* est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées, donc il existe une forme linéaire $\psi\in\mathcal{D}_0^\perp$ telle que T^* est la substitution à droite par la forme ψ. Puisque T^* est un automorphisme, il existe une forme linéaire φ telle que $\varphi\circ\psi=\delta$. On en déduit que φ est une forme delta. De plus, si k et n sont deux entiers naturels, on a

$$\langle\varphi^{[k]}\mid p_n\rangle = \langle\varphi^{[k]}\mid Tx^n\rangle = \langle\varphi^{[k]}\circ\psi\mid x^n\rangle = \langle(\varphi\circ\psi)^{[k]}\mid x^n\rangle = \langle\delta^{[k]}\mid x^n\rangle\ ,$$

ce qui montre que $(p_n)_n$ est la suite associée à la forme delta φ. □

L'objet du lemme suivant est de représenter explicitement l'opérateur de décalage d'une suite associée comme le composé de la codérivation M_x par un opérateur de composition, ce qui précise la proposition 5.2.11 d'après lequel cet opérateur de décalage est une codérivation forte.

Lemme 5.4.2 *Soit $(p_n)_n$ la suite associée à la forme delta φ et S l'opérateur de décalage de la suite $(p_n)_n$, et F l'opérateur de composition tel que $\varepsilon\circ F=\varphi$. Alors l'opérateur de composition $\partial_1 F$ est bijectif et on a*

$$S = M_x\circ(\partial_1 F)^{-1}\ . \tag{5.5}$$

Démonstration : Par l'isomorphisme entre l'algèbre $\mathcal{D}^*$ et l'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition, on voit que $\partial_1 F$ est bijectif si et seulement si $\mathfrak{D}\varphi$ est inversible dans $\mathcal{C}$. Or $\langle \mathfrak{D}\varphi \mid 1\rangle = \langle \varphi \mid x\rangle$ qui, puisque φ est une forme delta, est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{R}$. La propriété 4.1.2 permet de conclure que l'opérateur $\partial_1 F$ est bijectif.

Montrer la formule (5.5) revient maintenant à montrer que $S \circ \partial_1 F = M_x$; puisque le $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}$ est libre, ceci équivaut à l'égalité des transposés de ces opérateurs, c'est-à-dire

$$\mathfrak{D} = (\partial_1 F)^* \circ S^* \ . \tag{5.6}$$

On a donc à montrer, pour toute forme linéaire $\alpha \in \mathcal{D}^*$, l'égalité

$$\mathfrak{D}\alpha = \mathfrak{D}\varphi\, S^*\alpha \ . \tag{5.7}$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des formes linéaires qui vérifient (5.7). On remarque que $S^*\varphi = \varepsilon$; en effet, puisque $(p_n)_n$ est associée à φ, on a en vertu de (5.3) :

$$\langle \varphi \circ S \mid p_n\rangle = \langle \varphi \mid p_{n+1}\rangle = \langle \varepsilon \mid p_n\rangle \ ;$$

puisque $(p_n)_n$ est une base du $\mathcal{R}$-module $\mathcal{D}$, on en conclut $\varphi \circ S = \varepsilon$, c'est-à-dire que $\varphi \in \mathcal{M}$. Soit maintenant α un élément de $\mathcal{M}$, montrons que $\alpha^{[k]}$ appartient aussi à $\mathcal{M}$. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\alpha^{[k]} = \alpha^{[k-1]}\mathfrak{D}\alpha &= \alpha^{[k-1]}\mathfrak{D}\varphi S^*\alpha \\ &= (\mathfrak{D}\varphi)\alpha^{[k-1]}S^*\alpha \ ; \end{aligned}$$

puisqu'on sait par la proposition 5.2.11 que l'opérateur S est une codérivation forte, on a $\alpha^{[k-1]}S^*\alpha = S^*\alpha^{[k]}$ par la proposition 4.8.7, donc $\alpha^{[k]} \in \mathcal{M}$, comme on le souhaitait. De plus $\mathcal{M}$ est évidemment un sous $\mathcal{R}$-module de $\mathcal{D}$, fermé dans $\mathcal{D}$ en raison de la continuité en α des deux membres de (5.7). Puisque φ est réversible, ceci suffit à prouver que $\mathcal{M} = \mathcal{D}^*$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 5.4.3 *Toute suite associée $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type binomial c'est-à-dire vérifie $\langle \varepsilon \mid p_0\rangle = 1$ et $\Delta(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \otimes p_{n-k}$. De plus, on a $p_0 = 1$.*

Démonstration : D'après le théorème 5.4.1, il existe une bijection entre les bases fortes et les suites associées à une forme delta, or par définition d'une base forte c'est une base de type binomial, elle vérifie donc en particulier l'identité binomiale. La définition des bases fortes assure que $p_0 = 1$. □

Théorème 5.4.4 (Théorème de développement) *Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{D}^*$ et φ une forme delta à laquelle est associée une suite $(p_n)_n$, alors :*

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi \mid p_k\rangle \varphi^{[k]} \ .$$

Démonstration : C'est un cas particulier du théorème 5.3.5. □

Corollaire 5.4.5 *Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{D}^*$, φ une forme delta et $(p_n)_n$ la suite associée à φ. Si une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ est telle que $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi^{[k]}$, alors $a_k = \langle \psi \mid p_k \rangle$.*

Proposition 5.4.6 *Soit $(p_n)_n$ la suite associée à la forme delta φ. Pout tout d dans $\mathcal{D}$, on a*

$$d = \sum_{k\geq 0} \langle \varphi^{[k]} \mid d \rangle p_k \ .$$

Démonstration : C'est un cas particulier du théorème 5.3.6. □

5.4.1 Formulaire pour les suites associées

Soit $(p_n)_n$ la suite associée à la forme delta φ, on a les formules suivantes

$$p_n x = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \langle \mathfrak{D}\varphi \mid p_{n-k+1} \rangle p_k \ . \tag{5.8}$$

$$p_n x = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \langle \mathfrak{D}\varphi \circ \varphi^{\circ(-1)} \mid x^{n-k+1} \rangle p_k \ . \tag{5.9}$$

$$D_1 p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \langle \delta \mid p_{n-k} \rangle p_k \ . \tag{5.10}$$

$$D_1 p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \langle \varphi^{\circ(-1)} \mid x^{n-k} \rangle p_k \ . \tag{5.11}$$

Démonstration des formules : En ce qui concerne la formule (5.8), il suffit par la proposition 5.4.6 de calculer

$$\langle \varphi^{[k]} \mid p_n x \rangle = \langle \varphi^{[k]} \circ M_x \mid p_n \rangle = \langle \mathfrak{D}\varphi^{[k]} \mid p_n \rangle \ ;$$

or par définition des puissances divisées dans l'algèbre $\mathcal{D}^*$, on peut écrire $\mathfrak{D}\varphi^{[k]} = \varphi^{[k-1]}\mathfrak{D}\varphi$ d'où

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^{[k]} \mid p_n x \rangle = \langle \varphi^{[k-1]}\mathfrak{D}\varphi \mid p_n \rangle &= (\varphi^{[k-1]} \otimes \mathfrak{D}\varphi) \circ \Delta(p_n) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \langle \varphi^{[k-1]} \mid p_l \rangle \langle \mathfrak{D}\varphi \mid p_{n-l} \rangle \ .
\end{aligned}$$

Puisque la suite $(p_n)_n$ est associée à la forme delta φ, cette somme se réduit au seul terme d'indice $k-1$ et vaut $\binom{n}{k-1} \langle \mathfrak{D}\varphi \mid p_{n-k+1} \rangle$ d'où le résultat souhaité.

Pour la formule (5.9), soit T l'opérateur tel que $\Theta(T) = (p_n)_n$. Par le théorème 5.4.1 et la proposition 5.2.11, on sait que T est un opérateur ombral ; comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 5.1.12, ceci implique que son transposé T^* est la substitution à droite par une forme delta ; puisque $\langle \varphi \mid p_n \rangle = \langle \delta \mid x^n \rangle$, on voit que cette forme delta est égale à $\varphi^{\circ(-1)}$; d'où le résultat.

Pour la formule (5.10), il suffit d'appliquer la proposition 5.4.6 en remarquant que D_1^* est simplement la multiplication par la forme δ, d'où

$$\langle \varphi^{[k]} \mid D_1 p_n \rangle = \langle D_1^* \varphi^{[k]} \mid p_n \rangle = \langle \delta \varphi^{[k]} \mid p_n \rangle = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \langle \varphi^{[k]} \mid p_l \rangle \langle \delta \mid p_{n-l} \rangle \ ;$$

Puisque la suite $(p_n)_n$ est associée à la forme delta φ, cette somme se réduit au seul terme d'indice k et vaut $\binom{n}{k} \langle \delta \mid p_{n-k} \rangle$ d'où le résultat souhaité.

Pour passer de là à la formule (5.11), il suffit de raisonner de la même manière que pour passer de (5.8) à (5.9). □

Proposition 5.4.7 *Si $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base forte et φ une forme delta, alors :*

$$\langle \varphi^{[n]} \mid p_n \rangle \quad = \quad (\langle \varphi \mid p_1 \rangle)^n \in \mathcal{R}^\bullet. \tag{5.12}$$

Démonstration : Puisque $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base forte, d'après le théorème 5.4.1, il existe une forme delta ψ dont c'est la suite associée. Par le théorème 5.4.4, on a l'égalité $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi \mid p_j \rangle \psi^{[j]}$, qui entraîne $\langle \varphi \mid x \rangle = \langle \varphi \mid p_1 \rangle \langle \psi \mid x \rangle$; puisque φ et ψ sont des formes delta, on en déduit que $\langle \varphi \mid p_1 \rangle$ est élément de $\mathcal{R}^\bullet$.

On pose alors $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi \mid p_j \rangle \delta^{[j]}$, de sorte que $\varphi = \theta \circ \psi$ et $\langle \theta \mid x \rangle = \langle \varphi \mid p_1 \rangle$, ce qui implique que $\operatorname{ord} \theta = 1$. Par un calcul simple, on obtient

$$\langle \varphi^{[n]} \mid p_n \rangle = \langle (\theta \circ \psi)^{[n]} \mid p_n \rangle = \langle \theta^{[n]} \circ \psi \mid p_n \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle \theta^{[n]} \mid x^k \rangle \langle \psi^{[k]} \mid p_n \rangle \ ,$$

ce qui, puisque $(p_n)_n$ est la suite associée à la forme delta ψ, montre que $\langle \varphi^{[n]} \mid p_n \rangle = \langle \theta^{[n]} \mid x^n \rangle$ pour tout entier naturel n ; la formule $\langle \varphi^{[n]} \mid p_n \rangle = (\langle \varphi \mid p_1 \rangle)^n$ s'obtient alors comme un cas particulier de la proposition 4.8.3. □

On peut observer que le résultat de la proposition 5.4.7 n'est plus valable en général quand $(p_n)_n$ n'est pas une base forte, même si elle est de type binomial. Reprenons pour le constater l'exemple de la suite $(a^{s_\ell(n)} x^n)_n$, dans le cas où $\mathcal{R}$ est un anneau dont la caractéristique est le nombre premier ℓ, et a un élément de $\mathcal{R}^\bullet$ tel que $a^{\ell-1} \neq 1$. En prenant $\varphi = \delta$, on voit que $\langle \delta^{[n]} \mid p_n \rangle = a^{s_\ell(n)}$. La conclusion de la proposition 5.4.7 ne serait vraie que si l'on avait $a^{s_\ell(n)} = a^n$ pour tout entier naturel n. Or ceci est déjà faux si $n = \ell$.

Proposition 5.4.8 *Soit* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite associée à la forme delta* φ *de réciproque* $\varphi^{\circ(-1)}$. *On a alors*

$$\forall a \in \mathcal{R}\ ;\ \varepsilon^a \circ \varphi^{\circ(-1)} = \sum_{k\geq 0} \langle \varepsilon^a \mid p_k \rangle \delta^{[k]}\ .$$

Démonstration : En effet les deux membres de cette égalité expriment chacun la fonction génératrice de l'opérateur T tel que $\Theta(T) = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (cf. le théorème 5.1.12). □

5.5 Suites conjuguées

Définition 5.5.1 *La suite conjuguée à la forme delta* φ *est la suite d'opérateurs différentiels formels* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$q_n = \sum_{k\geq 0} \langle \varphi^{[k]} \mid x^n \rangle x^k\ .$$

Puisque φ est une forme delta, on sait que $\operatorname{ord}\varphi^{[k]} = k$. Il en résulte que $\langle \varphi^{[k]} \mid x^n \rangle = 0$ si $k > n$ donc deg $q_n \leq n$; de plus, d'après la proposition 4.8.3 $\langle \varphi^{[n]} \mid x^n \rangle = \langle \varphi \mid x \rangle^n \neq 0$ donc on a montré la propriété suivante.

Propriété 5.5.2 *Si la suite* $(q_n)_n$ *est conjuguée à une forme delta* φ*, alors* $\deg q_n = n$.

Théorème 5.5.3 *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'opérateurs différentiels formels. Alors la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base forte si et seulement si elle est la suite conjuguée à une forme delta.*

Démonstration : Soit une base forte $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la proposition 5.2.11, l'opérateur T tel que $Tx^n = p_n$ est un automorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\text{cog}}$ dont le transposé T^* commute aux puissances divisées. Vérifions d'abord que la forme $\varphi = T^*(\delta)$ est une forme delta : en effet $\langle T^*(\delta) \mid 1 \rangle = \langle \delta \mid p_0 \rangle = \langle \delta \mid 1 \rangle = 0$ et $\langle T^*(\delta) \mid x \rangle = \langle \delta \mid Tx \rangle = \langle \delta \mid p_1 \rangle$ qui est inversible dans $\mathcal{R}$ d'après la proposition 5.4.7. Soit alors $(q_n)_n$ la suite conjuguée à la forme delta φ et montrons que $q_n = p_n$ pour tout entier naturel n. Puisque T^* commute aux puissances divisées, on a

$$\langle \varphi^{[k]} \mid x^n \rangle = \langle (T^*(\delta))^{[k]} \mid x^n \rangle = \langle T^*(\delta)^{[k]} \mid x^n \rangle = \langle \delta^{[k]} \mid p_n \rangle\,,$$

d'où $q_n = p_n$ d'après la formule (4.8).

Réciproquement, soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite conjuguée à une forme delta φ, de sorte qu'on a $\langle \delta^{[k]} \mid p_n \rangle = \langle \varphi^{[k]} \mid x^n \rangle$ pour tout couple (k, n) d'entiers naturels. Soit $\mathfrak{T}$ l'application $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ de substitution à droite par la forme φ. D'après la proposition 4.9.5, on sait que $\mathfrak{T}$ est un endomorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre

$\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées ; c'est un automorphisme puisque φ est réversible par le théorème 4.10.2. Introduisons donc l'opérateur T tel que $Tx^n = p_n$ pour tout entier naturel n. Un calcul simple montre que, quelque soient les entiers naturels k et n, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{T}(\delta^{[k]}) \mid x^n \rangle = \langle \delta^{[k]} \circ \varphi \mid x^n \rangle &= \langle (\delta \circ \varphi)^{[k]} \mid x^n \rangle \\ &= \langle \varphi^{[k]} \mid x^n \rangle = \langle \delta^{[k]} \mid p_n \rangle = \langle \delta^{[k]} \mid Tx^n \rangle \ , \end{aligned}$$

ce qui, puisque $\mathfrak{T}$ est continu (théorème 4.9.3), que $(\delta^{[k]})_k$ est une base topologique de $\mathcal{D}^*$ et que $(x^n)_n$ est une base du $\mathcal{R}$-module ${}^\diamond\mathcal{D}$, montre que $\mathfrak{T}$ est le transposé T^* de T. On en déduit (proposition 4.5.4) que T est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$; donc $(p_n)_n$ est une base forte en vertu de la proposition 5.2.11. □

Corollaire 5.5.4 *Si $(p_n)_n$ est une base forte, alors* $\deg p_n = n$.

Chapitre 6

Applications à l'étude de suites d'o.d.f.

Dans cette partie, nous allons donner quelques applications de ce nouveau calcul ombral qui est celui des opérateurs différentiels formels. On appliquera alors quelques exemples classiques au cas des opérateurs différentiels formels ce qui nous permet d'étudier en particulier les formes et opérateurs d'Abel et de retrouver alors une formule de réversion des séries de Hurwitz qui entraîne la formule classique de réversion de Lagrange. On retrouve également grâce aux opérateurs d'Abel quelques identités différentielles. Un exemple de suites factorielles descendantes est également adapté aux cas des opérateurs différentiels formels, et là aussi on a une formule de réversion et quelques identités. Des exemples de suites d'Appell sont étudiés ce qui nous permet trouver des formules de récurrence pour ces suites.

6.1 Opérateurs d'amplification

Définition 6.1.1 *À tout $a \in \mathcal{R}$, on associe l'opérateur d'amplification de rapport a, noté A_a, comme l'endomorphisme du $\mathcal{R}$-module ${}^{\diamond}\mathcal{D}$ tel que $A_a x^n = (ax)^n$ pour tout entier naturel n.*

On remarque que $A_a \circ M_x = M_x \circ M_a \circ A_a$ (en effet ces deux opérateurs ont la même image $((ax)^{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ par l'application Θ). Comme de plus $A_a 1 = 1$, on voit que A_a s'interprète comme l'unique correspondant strict de la codérivation forte $M_x \circ M_a$. Par conséquent, A_a est un endomorphisme de la cogèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{cog}}$ (proposition 3.7.4) dont le transposé commute aux puissances divisées (proposition 4.11.3).

D'après notre proposition 4.11.2, il existe donc une forme linéaire $\psi_a \in \mathcal{D}^*$ telle que le transposé de l'opérateur A_a est la substitution à droite par ψ_a. On a alors la proposition suivante.

Proposition 6.1.2 *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^*$, pour tout p dans $\mathcal{D}$, on a :*

$$\langle \varphi \mid A_a p \rangle = \langle \varphi \circ \psi_a \mid p \rangle \ . \tag{6.1}$$

Cette formule ne présente d'intérêt que lorsque la forme ψ_a peut être explicitée. Mais ceci est facile. En effet, en prenant $\varphi = \delta$ et $p = x^n$ dans la formule (6.1), on obtient $\langle \psi_a \mid x^n \rangle = \langle \delta \mid (ax)^n \rangle$. Pour $n \geq 1$, on peut écrire $(ax)^n = M_x((ax)^{n-1}a)$, d'où $\langle \psi_a \mid x^n \rangle = \left\langle \mathfrak{D}(\delta) \mid (ax)^{n-1}a \right\rangle$ par définition de $\mathfrak{D}$. Puisque $\mathfrak{D}(\delta) = \varepsilon$ est une application $\mathcal{D}$-linéaire à gauche de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}_0$, on en déduit

$$\langle \psi_a \mid x^n \rangle = \begin{cases} (ax)^{n-1}.a & \text{si} \quad n \geq 1 \ ; \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \, . \end{cases} \tag{6.2}$$

D'après notre proposition 5.2.3, nous voyons que la suite $((ax)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type binomial, c'est-à-dire qu'elle satisfait l'identité

$$\Delta((ax)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ax)^k \otimes (ax)^{n-k} \, .$$

Remarque 6.1.3 *Cette formule n'est en fait rien d'autre que la formule de Leibnitz pour la dérivée d'un produit de deux facteurs appliquée à la dérivation $a\partial$ de l'anneau $\mathcal{R}$. En effet, on pourrait facilement vérifier que lorsqu'on définit une action du carré tensoriel de ${}^\diamond\mathcal{D}$ sur $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ en posant $(p \otimes q).(r, s) = (p.r)(q.s)$, on a l'identité $\Delta(p).(r, s) = p.(rs)$.*

Si on suppose de plus que le scalaire a est inversible dans $\mathcal{R}$, on sait alors que l'opérateur M_a est bijectif, de réciproque $M_{a^{-1}}$. Donc, par la proposition 3.8.7, on voit que A_a est un opérateur ombral. Par la proposition 5.2.11, on en déduit que la suite $((ax)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base forte, donc aussi, en vertu du théorème 5.4.1, une suite associée. En utilisant la formule (6.1), on voit qu'elle est associée à la forme delta χ_a réciproque de ψ_a. Le calcul explicite de χ_a résulte de la formule (5.5) : en effet, cette dernière formule fait voir que l'opérateur de composition X_a tel que $\varepsilon \circ X_a = \chi_a$ a pour première dérivée de Pincherle l'inverse de l'opérateur M_a, c'est-à-dire l'opérateur $M_{a^{-1}}$ de multiplication à droite par l'inverse de a. Comme de plus, on sait que l'ordre de X_a est égal à l'ordre de χ_a, donc égal à 1, il en résulte que X_a est la première intégrale de Pincherle de $M_{a^{-1}}$, d'où $X_a = \sum_{n\geq 0} M_x^n \circ M_{a^{-1}} \circ Q^{n+1}$, d'où $\chi_a = \varepsilon \circ X_a = \mu_{a^{-1}} \circ Q$, avec la forme linéaire $\mu_{a^{-1}}$ définie dans l'exemple 4.2.3. L'ombre de χ_a est donc la série de Hurwitz formelle $(\chi_{a,n})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\chi_{a,n} = \begin{cases} \left(a^{-1}\right)^{(n-1)} & \text{si} \quad n \geq 1 \ ; \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \, . \end{cases}$$

Puisque χ_a et ψ_a sont réciproques l'une de l'autre, on a démontré le théorème de réversion d'une série de Taylor formelle qui suit.

Théorème 6.1.4 *Soit $(\mathcal{R}, \partial)$ un anneau différentiel. Si a est un élément inversible de $\mathcal{R}$, la réciproque de la série de Hurwitz formelle $(\chi_{a,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\chi_{a,0} = 0$ et $\chi_{a,n} = (a^{-1})^{(n-1)} = \partial^{n-1}(a^{-1})$ pour tout entier $n \geq 1$ est la série de Hurwitz formelle $(\psi_{a,n})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\psi_{a,0} = 0$ et $\psi_{a,n} = (ax)^{n-1}.a$ pour tout entier $n \geq 1$.*

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, il est bien connu que l'algèbre $\mathcal{H}$ des séries de Hurwitz formelles s'identifie à l'algèbre $\mathcal{R}[[t]]$ des séries entières formelles, de sorte que notre théorème 6.1.4 donne une formule pour la série réciproque d'une série formelle de la forme $\sum_{n\geq 1}(a^{-1})^{(n-1)}\frac{t^n}{n!}$. Par divers choix de $\mathcal{R}$ et de a, on peut retrouver des séries réciproques connues : par exemple, si $\mathcal{R} = \mathbb{C}(z)$ et $\partial z = z$, on trouve que la série réciproque de $\sum_{n\geq 1} z\frac{t^n}{n!}$ est $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}z^{-n}\frac{t^n}{n}$, formule à vrai dire bien connue. Mais ici, nous possédons un procédé général pour aborder le problème de réversion des séries et qui de plus est valable pour les séries de Hurwitz en toute caractéristique. On pourrait par exemple prendre $\mathcal{R} = \mathbb{Q}(a_1)[a_2, a_3, \ldots]$, où $a_1, a_2, \ldots$ sont des indéterminées et choisir une dérivation ∂ de l'anneau $\mathcal{R}$ de sorte que $\partial a_i = a_{i+1}$, et ceci fournirait une formule universelle pour la réciproque de la série générique $\sum_{n\geq 1} a_n\frac{t^n}{n!}$: c'est la série $\sum_{n\geq 1}\left(a_1^{-1}x\right)^{n-1}.(a_1^{-1})\frac{t^n}{n!}$. De même, on a une formule générique pour la réciproque d'une série de Hurwitz formelle inversible pour la loi de composition définie par Keigher et Pritchard.

6.2 Suites d'Abel

6.2.1 Formes et opérateurs d'Abel

Pour un élément quelconque a de l'anneau $\mathcal{R}$, on définit la *forme linéaire d'Abel* $\alpha^a = \delta\varepsilon^a$. Il est facile de vérifier que $\langle\alpha^a \mid 1\rangle = 0$ et que $\langle\alpha^a \mid x\rangle = 1$, de sorte que α^a est une forme delta. L'opérateur de composition correspondant à la forme linéaire α^a est *l'opérateur d'Abel* $A^a = D_1 \circ E^a$. La première dérivée de Pincherle de l'opérateur d'Abel A^a est $\partial_1 A^a = \partial_1 D_1 \circ E^a + D_1 \circ \partial_1 E^a = E^a + D_1 \circ M_a \circ E^a$. Soit S l'opérateur de décalage de la suite associée à la forme delta α^a, par le lemme 5.4.2, on a $S = M_x \circ (\partial_1 A^a)^{-1}$ c'est à dire que $S \circ \left(E^0 + D_1 \circ M_a\right) = M_x \circ E^{-a}$. Posons alors $p_n = (x - na)^{n-1}x$ pour $n \geq 1$ et $p_0 = 1$. Montrons par récurrence sur n que $p_n = S^n 1$. Pour $n = 0$ c'est évident. Supposons donc que $p_n = S^n 1$ et montrons que $p_{n+1} = S^{n+1}1$. On peut poser $q_n = (x-na)^n$ et calculer $(E^0+D_1\circ M_a)q_n = (x-na)^n+D_1(x-na)^n a = p_n$, d'où $S^{n+1}1 = Sp_n = S \circ \left(E^0 + D_1 \circ M_a\right) q_n = M_x \circ E^{-a} q_n = (x - a - na)^n x = p_{n+1}$.

On en déduit que la suite $(p_n)_n$ est la suite associée à la forme delta α^a. Cette suite est appelée la suite d'Abel. En vertu de la proposition 5.4.1, c'est une base forte et par la proposition 5.2.11, l'opérateur T_a qui à x^n associe $p_n = (x - na)^{n-1}x$ est un opérateur ombral. L'endomorphisme T_a^* transposé de T_a est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées (proposition 4.11.3). Par la proposition 4.11.2, T_a^* est donc la substitution à droite par une forme linéaire θ_a de sorte que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^*$, pour tout p

dans $\mathcal{D}$, on a :

$$\langle \varphi \mid T_a p \rangle = \langle \varphi \circ \theta_a \mid p \rangle \ ,$$

et par conséquent $\theta_a = \alpha^{a\circ(-1)}$.

Proposition 6.2.1 *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^*$ et pour tout p dans $\mathcal{D}$, on a :*

$$\langle \varphi \mid T_a p \rangle = \langle \varphi \circ \alpha^{a\circ(-1)} \mid p \rangle \ . \tag{6.3}$$

Nous allons expliciter θ_a qui est la forme linéaire réciproque de α^a. Il suffit de poser $\varphi = \delta$ et $p = x^n$ dans la formule (6.3), on obtient $\langle \theta_a \mid x^n \rangle = \langle \delta \mid (x - na)^{n-1} x \rangle$. Pour $n \geq 1$, on peut écrire $(x - na)^{n-1} x = M_x((x - na)^{n-1})$, d'où $\langle \theta_a \mid x^n \rangle = \left\langle \mathfrak{D}(\delta) \mid (x - na)^{n-1} \right\rangle$ par définition de $\mathfrak{D}$. Puisque $\mathfrak{D}(\delta) = \varepsilon$ est une application $\mathcal{D}$-linéaire à gauche de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}_0$, on en déduit

$$\langle \theta_a \mid x^n \rangle = (x - na)^{n-1}.1 \ .$$

L'ombre de la forme linéaire $\theta_a = \alpha^{a\circ(-1)}$ est donc la série de Hurwitz formelle donnée par :

$$\hat{\theta_a} = \left(0, ((x - na)^{n-1}.1)_{n\geq 1}\right) \ .$$

De même, nous pouvons expliciter l'ombre de la forme linéaire $\alpha^a = \delta\varepsilon^a$. On a :

$$\langle \alpha^a \mid x^n \rangle = \langle \delta\varepsilon^a \mid x^n \rangle = \langle \varepsilon^a \mid nx^{n-1} \rangle = \langle \varepsilon \mid n(x + a)^{n-1} \rangle = n(x + a)^{n-1}.1 \ .$$

L'ombre de la forme linéaire α^a est donc la série de Hurwitz formelle donnée par :

$$\hat{\alpha^a} = \left(0, (n(x + a)^{n-1}.1)_{n\geq 1}\right) \ .$$

L'expression de la fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$\forall b \in \mathcal{R} \ ; \ \mathfrak{F}_{T_a}(b) = \varepsilon^b \circ \alpha^{a\circ(-1)} = \sum_{k\geq 0} \langle \varepsilon^b \mid p_k \rangle \delta^{[k]} \ ,$$

d'où

$$\mathfrak{F}_{T_a}(b) = \sum_{k\geq 0} (x + b - ak)^{k-1}.b \quad \delta^{[k]} \ .$$

6.2.2 Formule de réversion

Comme on l'a dit plus haut, les formes linéaires θ_a et α^a sont réciproques l'une de l'autre. Donc les deux séries de Hurwitz formelles $\hat{\theta_a}$ et $\hat{\alpha^a}$ sont réciproques l'une de l'autre et on obtient le théorème de réversion suivant :

Théorème 6.2.2 *Soit $(\mathcal{R}, \partial)$ un anneau différentiel et a un élément de $\mathcal{R}$. La réciproque de la série de Hurwitz formelle $\hat{\theta_a} = \left(0, ((x - na)^{n-1}.1)_{n\geq 1}\right)$, est la série de Hurwitz formelle $\hat{\alpha^a} = \left(0, (n(x + a)^{n-1}.1)_{n\geq 1}\right)$.*

Nous allons montrer que cette formule implique la formule classique de réversion de Lagrange. Cette formule [35, page 145] est la suivante. Soit $\mathcal{K}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre, donc de caractéristique nulle. Pour calculer la réciproque d'une série entière formelle de la forme $f(T) = \dfrac{T}{\varphi(T)}$, où $\varphi(T)$ appartient à $\mathcal{K}[[T]]$ et satisfait $\varphi(0) \neq 0$, il suffit d'écrire

$$f^{\circ(-1)}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}[\varphi(X)]^n}{dX^{n-1}} \right]_{X=0} .$$

Pour montrer que notre théorème 6.2.2 implique cette formule de Lagrange, une première étape consiste à se ramener au cas où $\varphi(0) = 1$. Supposons donc la formule de Lagrange vraie dans ce cas particulier et déduisons-en le cas général : il suffit d'écrire $\varphi_0(T) = \dfrac{\varphi(T)}{\varphi(0)}$, de sorte que $\varphi_0(0) = 1$. Par hypothèse, nous aurons, en posant $f_0(T) = \dfrac{T}{\varphi_0(T)} = \varphi(0)f(T)$:

$$f_0{}^{\circ(-1)}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}[\varphi_0(X)]^n}{dX^{n-1}} \right]_{X=0} ,$$

d'où

$$f^{\circ(-1)}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi(0)U)^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}[\varphi_0(X)]^n}{dX^{n-1}} \right]_{X=0} ,$$

c'est-à-dire

$$f^{\circ(-1)}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}[\varphi(0)^n\varphi_0(X)]^n}{dX^{n-1}} \right]_{X=0} ,$$

ce qui est la formule de Lagrange dans le cas général.

La deuxième étape est, en écrivant $f(T) = T + \sum_{n\geq 2} a_n \dfrac{T^n}{n!}$ de se ramener au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{Q}\left[\dfrac{a_2}{2}, \dfrac{a_3}{3}, \ldots\right]$, où les coefficients a_n sont algébriquement indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Si donc la formule de Lagrange est supposée vraie dans ce cas particulier, on pose $\mathcal{R} = \mathbb{Q}\left[\dfrac{X_2}{2}, \dfrac{X_3}{3}, \ldots\right]$, où les $X_2, X_3, \ldots$ sont des indéterminées. La réciproque de la série $\boldsymbol{f}(T) = T + \sum_{n\geq 2} X_n \dfrac{T^n}{n!}$ est par hypothèse donnée par la formule de Lagrange

$$\boldsymbol{f}^{\circ(-1)}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}[\boldsymbol{g}(X)]^n}{dX^{n-1}} \right]_{X=0} ,$$

où $\boldsymbol{g}(X) = \dfrac{X}{\boldsymbol{f}(X)}$. Maintenant, soit $\mathcal{K}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre quelconque et $f(T) = T + \sum_{n\geq 2} a_n \dfrac{T^n}{n!} \in \mathcal{K}[[T]]$. Il existe un unique morphisme d'anneaux de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{K}$ qui envoie X_i sur a_i pour tout entier $i \geq 2$. L'image par ce morphisme d'un élément $r \in \mathcal{R}$ sera notée $r^\star$. Ce morphisme se prolonge de façon évidente en un morphisme continu de l'anneau $\mathcal{R}[[T]]$ dans l'anneau $\mathcal{K}[[T]]$ envoyant T sur T. Il est facile de voir que ce dernier morphisme respecte la composition des séries entières formelles et par conséquent envoie la réciproque de $\boldsymbol{f}(T)$ sur la réciproque de $f(T)$. Par ailleurs ce morphisme commute aussi à la dérivation par rapport à T et par rapport aux morphismes "d'évaluation en zéro". Donc, il envoie $\left[\dfrac{d^{n-1}[\boldsymbol{g}(X)]^n}{dX^{n-1}}\right]_{X=0}$ sur $\left[\dfrac{d^{n-1}[\varphi(X)]^n}{dX^{n-1}}\right]_{X=0}$, ce qui montre la formule de Lagrange sur $\mathcal{K}$ à partir de celle sur $\mathcal{R}$.

Toutes ces réductions ayant été faites, on a à montrer la formule de Lagrange dans le cas d'une série $f(T) = T + \sum_{n\geq 2} a_n \dfrac{T^n}{n!}$, où les coefficients a_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, avec $\mathcal{K} = \mathbb{Q}\left[\dfrac{a_2}{2}, \dfrac{a_3}{3}, \ldots\right]$. On peut alors munir l'anneau $\mathcal{K}$ de la dérivation ∂ telle que $\partial(a_i/i) = a_{i+1}/(i+1) - (a_2/2)(a_i/i)$. En posant $a = a_2/2$, une récurrence immédiate sur n montre que $\langle \alpha_a \mid x^n\rangle = n(x+a)^{n-1}.1 = a_n$ pour $n \geq 2$. On voit donc que la série de Hurwitz formelle $\hat{\alpha^a}$ s'identifie à la série $f(T)$ l'anneau des séries de Hurwitz formelles sur $\mathcal{K}$ à l'anneau des séries entières formelles sur $\mathcal{K}$. Donc, la série entière formelle $f^{\circ(-1)}(T)$ s'identifie à la série de Hurwitz formelle θ_a. Par ailleurs, la série $\varphi(T) = T/f(T)$ correspond à la forme linéaire ε^{-a}, donc $(\varphi(T))^n$ à la forme linéaire ε^{-na}, et par conséquent $\dfrac{d^{n-1}[\varphi(X)]^n}{dX^{n-1}}$ à la forme linéaire $\mathfrak{D}^{n-1}(\varepsilon^{-na}) = \varepsilon^{-na} \circ {M_x}^{n-1}$. Par conséquent, le scalaire $\left[\dfrac{d^{n-1}[\varphi(X)]^n}{dX^{n-1}}\right]_{X=0}$ est égal à $\langle \varepsilon^{-na} \circ {M_x}^{n-1} \mid 1\rangle = \langle \varepsilon^{-na} \mid x^{n-1}\rangle$. Or, d'après notre théorème 6.2.2, on a

$$\langle \theta_a \mid x^n\rangle = (x - na)^{n-1}.1 = (E^{-na}x^{n-1}).1 = \langle \varepsilon \mid E^{-na}x^{n-1}\rangle = \langle \varepsilon^{-na} \mid x^{n-1}\rangle \ .$$

6.2.3 Quelques identités différentielles

Le théorème 5.4.4 (Théorème de développement) est important pour établir des identités différentielles, en effet ce théorème nous donne l'écriture d'une forme linéaire ψ sur $\mathcal{D}^*$ en fonction d'une forme delta φ à laquelle est associée une suite $(p_n)_n$, par la relation :

$$\psi \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi \mid p_k\rangle \varphi^{[k]}. \qquad (6.4)$$

Il est alors intéressant de voir ce qui se passe dans le cas de la forme d'Abel α^a. Posant dans la formule (6.4), la forme linéaire $\psi = \varepsilon^b$ avec $b \in \mathcal{R}$, on obtient alors dans ce cas

$$\varepsilon^b = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varepsilon^b \mid p_k \rangle \alpha^{a[k]} .$$

Comme $p_k = (x-ka)^{k-1}x$ et $\alpha^a = \delta\varepsilon^a$, on arrive à la relation suivante :

$$\varepsilon^b = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varepsilon^b \mid (x-ka)^{k-1}x \rangle (\delta\varepsilon^a)^{[k]}. \tag{6.5}$$

Par ailleurs, on sait d'après la deuxième identité de la proposition 4.8.4 que $(\delta\varepsilon^a)^{[k]} = \delta^{[k]}\varepsilon^{ak}$ ce qui est équivalent à $(\varepsilon^a \circ D_1)^{[k]} = \varepsilon^{ka} \circ D_k$. Soit alors p un élément de ${}^{\diamond}\mathcal{D}$, la formule (6.5) devient

$$\langle \varepsilon^b \mid p \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varepsilon^b \mid (x-ka)^{k-1}x \rangle \langle \varepsilon^{ka} \mid D_k p \rangle, \tag{6.6}$$

or sachant que $\langle \varepsilon^b \mid p \rangle = E^b p.1$ et que $\langle \varepsilon^{ka} \mid D_k p \rangle = D_k \circ E^{ka} p.1$, d'où une première identité différentielle

$$E^b p.1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left((x+b-ak)^{k-1}.b\right)\left(D_k \circ E^{ka} p.1\right). \tag{6.7}$$

D'autre part on a vu dans l'exemple 4.1.3 que $\varepsilon^{b+c} = \varepsilon^b\varepsilon^c$, où b et c sont deux éléments quelconques de $\mathcal{R}$. En appliquant la forme linéaire $\varepsilon^{b+c} = \varepsilon^b\varepsilon^c$ à l'o.d.f. $p_n = (x-na)^{n-1}x$, où n est un entier ≥ 1, on obtient d'une part :

$$\langle \varepsilon^{b+c} \mid p_n \rangle = \langle \varepsilon^{b+c} \mid (x-na)^{n-1}x \rangle = (x+b+c-na)^{n-1}.(b+c) ,$$

et d'autre part

$$\langle \varepsilon^b\varepsilon^c \mid p_n \rangle = \left(\varepsilon^b \otimes \varepsilon^c\right) \circ \Delta(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varepsilon^b \mid p_k \rangle \langle \varepsilon^c \mid p_{n-k} \rangle ;$$

qui n'est rien d'autre que

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^b\varepsilon^c \mid p_n \rangle &= (x+b-na)^{n-1}.b + (x+c-na)^{n-1}.c \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left((x+b-ka)^{k-1}.b\right) \left((x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c\right) \end{aligned}$$

d'où une deuxième identité différentielle qui est :

$$\begin{aligned} (x+b+c-na)^{n-1}.(b+c) &= (x+b-na)^{n-1}.b + (x+c-na)^{n-1}.c \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left((x+b-ka)^{k-1}.b\right) \left((x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c\right) . \end{aligned}$$

6.2.4 Application : identités classiques

On peut, à partir de l'identité différentielle précédente, donner à a, b, c des valeurs qui permettent de retrouver des identités classiques. Pour ce faire, prenons pour l'anneau de base $\mathcal{R}$ le corps $\mathbb{Q}(t)$ muni de la dérivation $\partial = d/dt$. On considère alors notre identité différentielle :

$$\begin{aligned}(x+b+c-na)^{n-1}.(b+c) &= (x+b-na)^{n-1}.b + (x+c-na)^{n-1}.c \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \big((x+b-ka)^{k-1}.b\big)\big((x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c\big) \ .\end{aligned}$$

- Avec $a = 0$ et $\partial b = \partial c = 0$, on montre par récurrence sur n que
$$(x+b+c)^{n-1}.(b+c) = (b+c)^n \ .$$
De même
$$(x+b)^{k-1}.b = b^k \qquad et \quad (x+c)^{n-k-1}.c = c^{n-k} \ ;$$
on a alors l'identité binomiale suivante
$$(b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k c^{n-k} \ .$$
- Dans le cas particulier où $\partial a = \partial b = \partial c = 0$, on remarque facilement que :
$$(x+b+c-na)^{n-1}.(b+c) = (b+c-na)^{n-1}(b+c) \ ;$$
de même
$$(x+b-ka)^{k-1}.b = (b-ak)^{k-1}b$$
et
$$(x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c = (c-(n-k)a)^{n-k-1}c \ ;$$
on trouve alors l'identité binomiale pour les polynômes d'Abel donnée dans l'exemple de Roman et Rota [44, page 114] et qui est :
$$(b+c-na)^{n-1}(b+c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-ak)^{k-1} b (c-(n-k)a)^{n-k-1} c \ .$$
- Toujours avec la même identité différentielle, mais on se place maintenant dans une extension de $\mathbb{Q}(t)$ et on pose alors $a = \alpha/t$, $b = \beta/t$ et $c = \gamma/t$. On remarque tout d'abord que pour $f(x) \in \mathbb{Q}(t)$, on a :
$$(x+b)f(t) = f'(t) + \frac{\beta}{t} f(t) = \frac{1}{t^\beta}[t^\beta f'(t) + \beta t^{\beta-1} f(t)] = t^{-\beta}[t^\beta f(t)]' \ ;$$
on en déduit alors par récurrence sur n que
$$(x+b)^n f(t) = t^{-\beta}[t^\beta f(t)]^{(n)} \ ;$$

d'où

$$(x+b-ka)^{k-1}.b = t^{-\beta+\alpha k}[t^{\beta-\alpha k}\frac{\beta}{t}]^{(k-1)} = \beta t^{-\beta+\alpha k}[t^{\beta-\alpha k-1}]^{(k-1)}\ ;$$

et on obtient enfin

$$(x+b-ka)^{k-1}.b = \beta t^{-\beta+\alpha k}(\beta-\alpha k-1)(\beta-\alpha k-2)\dots(\beta-\alpha k-(k-1))t^{\beta-\alpha k-k}\ ;$$

et donc après simplification, on obtient :

$$(x+b-ka)^{k-1}.b = \beta(\beta-\alpha k-1)(\beta-\alpha k-2)\dots(\beta-\alpha k-(k-1))t^{-k}\ .$$

De même, on calcule les termes $(x+b+c-na)^{n-1}.(b+c)$ et $(x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c$, et on obtient après simplification

$$(x+c-(n-k)a)^{n-k-1}.c = \gamma(\gamma-\alpha(n-k)-1)\dots(\gamma-\alpha(n-k)-(n-k-1))t^{-n+k}\ ;$$

ansi que

$$(x+b+c-na)^{n-1}.(b+c) = (\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha n-1)\dots(\beta+\gamma-\alpha n-(n-1))t^{-n}\ ;$$

d'où la relation suivante indépendante de t

$$\begin{aligned}(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha n-1)\dots(\beta+\gamma-\alpha n-(n-1)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta(\beta-\alpha k-1)\\ \dots\quad (\beta-\alpha k-(k-1))\gamma(\gamma-\alpha(n-k)-1)\dots(\gamma-\alpha(n-k)-(n-k-1)).\end{aligned}$$

- Nous allons travailler avec cette relation que nous venons de trouver, on pose alors $a=0$, $\beta = tb = -y$ et $\gamma = tc = -z$, on aura alors d'une part :

$$\begin{aligned}&(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha n-1)\dots(\beta+\gamma-\alpha n-(n-1))\\ =\ &(-y-z)(-y-z-1)\dots(-y-z-(n-1))\\ =\ &(-1)^n(y+z)(y+z+1)\dots(y+z+(n-1));\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta(\beta-\alpha k-1)\dots(\beta-\alpha k-(k-1))\gamma(\gamma-\alpha(n-k)-1)\\ &\dots\quad (\gamma-\alpha(n-k)-(n-k-1))\\ &=\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-y)(-y-1)\dots(-y-(k-1))(-z)(-z-1)\\ &\dots\quad (-z-(n-k-1));\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta(\beta-\alpha k-1)\dots(\beta-\alpha k-(k-1))\gamma(\gamma-\alpha(n-k)-1)$$
$$\dots\quad(\gamma-\alpha(n-k)-(n-k-1))$$
$$=\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(y)(y+1)\dots(y+(k-1))(-1)^{n-k}(z)(z+1)$$
$$\dots\quad(z+(n-k-1)).$$

On obtient finalement la relation binomiale suivante :

$$(-1)^n(y+z)(y+z+1)\dots(y+z+(n-1))$$
$$=\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(y)(y+1)\dots(y+(k-1))(-1)^{n-k}(z)(z+1)$$
$$\dots\quad(z+(n-k-1));$$

qui après simplification devient,

$$(y+z)(y+z+1)\dots(y+z+(n-1))$$
$$=\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(y)(y+1)\dots(y+(k-1))(z)(z+1)$$
$$\dots\quad(z+(n-k-1));$$

et en posant $\langle y\rangle_k=(y)(y+1)\dots(y+n-1)$ on retrouve l'identité binomiale pour la suite factorielle montante donnée dans l'exemple de Roman et Rota [44, page 114] c'est-à-dire :

$$\langle y+z\rangle_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\langle y\rangle_k\langle z\rangle_{n-k}\ ;$$

- Nous allons travailler toujours avec cette relation que nous venons de trouver, on pose dans cette relation $\alpha=a/b$, $\beta=y/b$ et $\gamma=z/b$, on aura alors d'une part :

$$(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha n-1)\dots(\beta+\gamma-\alpha n-(n-1))$$
$$=\quad\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{b}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{b}-\frac{a}{b}n-1\right)\dots\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{b}-\frac{a}{b}n-(n-1)\right)$$
$$=\quad\left(\frac{y-z}{b}\right)\left(\frac{1}{(y+z-an)/b}\right)\left(\frac{y+z-an}{b}\right)\left(\frac{y+z-an}{b}-1\right)$$
$$\dots\left(\frac{y+z-an}{b}-(n-1)\right);$$

et qui n'est rien d'autre que :

$$\frac{y+z}{y+z-an}\left(\frac{y+z-an}{b}\right)_n=G_n(y+z,a,b)\ ,$$

où les $G_n(y+z,a,b)$ sont les polynômes de Gould [44, page 115]. De même, on montre que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta(\beta-\alpha k-1)\dots(\beta-\alpha k-(k-1))\gamma(\gamma-\alpha(n-k)-1)$$
$$\dots\quad(\gamma-\alpha(n-k)-(n-k-1))$$
$$=\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{y}{y-ak}\left(\frac{y-ak}{b}\right)_k\frac{z}{z-a(n-k)}\left(\frac{y-a(n-k)}{b}\right)_{n-k}.$$

On obtient l'identité binomiale pour les polynôme de Gould $G_n(y+z,a,b)$ [44, page 115] qui est

$$G_n(y+z,a,b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k(y,a,b)G_{n-k}(z,a,b)\ .$$

6.3 Les suites factorielles descendantes

Soit a un élément inversible de l'anneau $\mathcal{R}$. On définit la forme linéaire $\varphi^a=\varepsilon^a-\varepsilon$. Il est facile de vérifier que c'est une forme delta. L'opérateur de composition correspondant à la forme linéaire φ^a est l'opérateur E^a-E^0. La première dérivée de Pincherle de l'opérateur de composition E^a-E^0 est $\partial_1(E^a-E^0)=M_a\circ E^a$. Soit S l'opérateur de décalage de la suite $(p_n)_n$ associée à la forme delta φ^a, par le lemme 5.4.2, on a $S=M_x\circ(\partial_1(E^a-E^0))^{-1}=M_x\circ(M_a\circ E^a)^{-1}$ c'est à dire que $S=M_x\circ M_{a^{-1}}\circ E^{-a}$. On a $p_0=1$ et $p_1=S^1 1=M_x\circ M_{a^{-1}}\circ E^{-a}1=a^{-1}x$ et on montre facilement par récurrence que $p_n=S^n 1=(a^{-1}x-(n-1))(a^{-1}x-(n-2))\dots(a^{-1}x-1)(a^{-1}x)$ pour $n\geq 1$.

On peut exprimer $(p_n)_n$ à l'aide de la notion de factorielle descendante. Dans un anneau quelconque $\mathcal{H}$, pour $h\in\mathcal{H}$, la factorielle descendante d'ordre n de h est l'élément noté $(h)_n=h(h-1)\cdots(h-(n-1))$. On peut d'ailleurs remarquer que les facteurs $h,h-1,\dots,h-(n-1)$ commutent entre eux. Ici, dans notre cas, $p_n=(a^{-1}x-1)_{n-1}a^{-1}x$; puisque les facteurs de p_n commutent entre eux, on a aussi $p_n=(a^{-1}x)_n=(a^{-1}x)(a^{-1}x-1)_{n-1}$. Cette suite p_n n'est donc rien d'autre que la suite des factorielles descendantes de $a^{-1}x$. En vertu de la proposition 5.4.1, c'est une base forte et par la proposition 5.2.11, l'opérateur U_a qui à x^n associe $p_n=(a^{-1}x)(a^{-1}x-1)\dots(a^{-1}x-(n-2))(a^{-1}x-(n-1))$ est un opérateur ombral. L'endomorphisme U_a^* transposé de U_a est un automorphisme de la $\mathcal{R}$-algèbre $\mathcal{D}^*$ qui commute aux puissances divisées (proposition 4.11.3). Par la proposition 4.11.2, U_a^* est donc la substitution à droite par une forme linéaire η_a de sorte que pour tout $\varphi\in\mathcal{D}^*$, pour tout p dans $\mathcal{D}$, on a :

$$\langle\varphi\mid U_a p\rangle\quad=\quad\langle\varphi\circ\eta_a\mid p\rangle\ . \tag{6.8}$$

On remarque que pour $\varphi = \varphi^a$ et $p = x^n$, on aura

$$\langle \delta \mid x^n \rangle = \langle \varphi^a \mid p_n \rangle = \langle \varphi^a \mid U_a x^n \rangle = \langle \varphi^a \circ \eta_a \mid x^n \rangle \; ;$$

et par conséquent on en déduit que $\eta_a = \varphi^{a \circ (-1)}$. Nous allons expliciter η_a qui est la forme linéaire réciproque de φ^a. Il suffit de poser $\varphi = \delta$ et $p = x^n$ dans la formule (6.8), on obtient $\langle \eta_a \mid x^n \rangle = \langle \delta \mid p_n \rangle$. On définit le coefficient de Stirling de a de première espèce donné par $s(n, k, a) = \langle \delta^{[k]} \mid p_n \rangle$ et pour $a = 1$, on retrouve le nombre de Stirling [39, page 57] $s(n, k, 1) = s(n, k)$. Revenons donc au calcul de $\langle \eta_a \mid x^n \rangle = \langle \delta \mid p_n \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \eta_a \mid x^n \rangle = \langle \delta \mid p_n \rangle &= \langle \delta \mid (a^{-1}x - (n-1)) \dots (a^{-1}x - 1)(a^{-1}x) \rangle \\
&= \langle \varepsilon \mid (a^{-1}x - (n-1)) \dots (a^{-1}x - 1)(a^{-1}) \rangle \\
&= (a^{-1}x - (n-1)) \dots (a^{-1}x - 1).a^{-1} \\
&= (a^{-1}x - 1)_{n-1}.a^{-1} \; ;
\end{aligned}$$

or d'après Roman [39, page 57],

$$(a^{-1}x - 1)_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)(a^{-1}x - 1)^k \; ; \tag{6.9}$$

on en déduit alors que

$$\langle \eta_a \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)(a^{-1}x - 1)^k.a^{-1} \; .$$

L'ombre de la forme linéaire $\eta_a = \varphi^{a \circ (-1)}$ est donc la série de Hurwitz formelle donnée par :

$$\begin{aligned}
\hat{\eta_a} &= \big(0, ((a^{-1}x - 1)_{n-1}.a^{-1})_{n \geq 1}\big) \\
&= \left(0, \left(\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)(a^{-1}x - 1)^k.a^{-1}\right)_{n \geq 1}\right) \; .
\end{aligned}$$

De même, nous pouvons expliciter l'ombre de la forme linéaire $\varphi^a = \varepsilon^a - \varepsilon$. On a :

$$\langle \varphi^a \mid x^n \rangle = \langle \varepsilon^a - \varepsilon \mid x^n \rangle = \langle \varepsilon^a \mid x^n \rangle = \langle \varepsilon \mid (x + a)^n \rangle = (x + a)^n.1 \; .$$

L'ombre de la forme linéaire φ^a est donc la série de Hurwitz formelle donnée par :

$$\hat{\varphi^a} = (0, ((x + a)^n.1)_{n \geq 1}) \; .$$

6.3.1 Formule de réversion

Comme nous venons de le voir, les formes linéaires η_a et φ^a sont réciproques l'une de l'autre. Donc les deux séries de Hurwitz formelles $\hat{\eta_a}$ et $\hat{\varphi^a}$ sont réciproques l'une de l'autre et on obtient le théorème de réversion suivant :

Théorème 6.3.1 *Soit $(\mathcal{R}, \partial)$ un anneau différentiel et a un élément inversible de $\mathcal{R}$. La réciproque de la série de Hurwitz formelle*

$$\hat{\eta_a} = \left(0, \left(\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(a^{-1}x-1)^k.a^{-1}\right)_{n\geq 1}\right) ,$$

est la série de Hurwitz formelle $\hat{\varphi^a} = (0, ((x+a)^n.1)_{n\geq 1})$.

6.3.2 Identités

- On établit, grâce à la remarque 6.1.3, l'identité binomiale de la suite $(p_n)_n$ des factorielles descendantes,

$$p_n.(rs) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p_k.r)(p_{n-k}.s) ;$$

  pour tout éléments r et s de $\mathcal{R}$. Cette identité est une version différentielle de l'identité de Vandermonde que l'on obtient dans le cas classique [39, page 57].
- On remarque également, que par le théorème 5.3.7, on obtient la relation suivante :

$$E^a p_n = p_n + np_{n-1} .$$

- Le théorème 5.4.4 nous donne l'écriture d'une forme linéaire ψ sur $\mathcal{D}^*$ en fonction de la forme delta φ^a à laquelle est associée la suite des factorielles descendantes $(p_n)_n$, on a alors :

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi \mid p_k \rangle \varphi^{a[k]} ; \tag{6.10}$$

  et pour $\psi = \delta^{[m]}$, on obtient

$$\delta^{[m]} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta^{[m]} \mid p_k \rangle \varphi^{a[k]}.$$

  or le coefficient de Stirling de a de première espèce est donné par $s(n,k,a) = \langle \delta^{[k]} \mid p_n \rangle$ et on obtient alors :

$$\delta^{[m]} = \sum_{k\geq m} s(k,m,a)\varphi^{a[k]} ;$$

  Le coefficient de Stirling de deuxième espèce de a est donné par :

$$\mathfrak{S}(n,k,a) = \langle (\varphi^a)^{[k]} \mid x^n \rangle . \tag{6.11}$$

- Par la proposition 5.4.6, on a la formule de développement suivante, pour tout o.d.f. p de $\mathcal{D}$:
$$p = \sum_{k\geq 0} \langle (\varphi^a)^{[k]} \mid p\rangle p_k \ ;$$
dans le cas particulier où $p = x^n$, on obtient :
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \langle (\varphi^a)^{[k]} \mid x^n\rangle p_k \ ;$$
d'où une caractérisation du coefficient de Sterling de deuxième espèce de a :
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{S}(n,k,a) p_k \ .$$

6.3.3 Suite conjuguée : la suite des opérateurs différentiels exponentiels

On a vu plus haut que

$$\langle \eta_a \mid x^n\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(a^{-1}x-1)^k.a^{-1} = (a^{-1}x-1)_{n-1}.a^{-1} \ ;$$

la suite associée à la forme delta $\eta_a = (\varphi^a)^{\circ(-1)}$, est la suite notée $(q_n)_n$ conjuguée à la forme delta φ^a. L'o.d.f. q_n est appelé *opérateur différentiel exponentiel* de a d'ordre n par analogie avec les polynômes exponentiels considérés par Roman dans [39, page 63, chapter 4, section 1.3]. D'après la définition 5.5.1

$$q_n = \sum_{k\geq 0} \langle (\varphi^a)^{[k]} \mid x^n\rangle x^k \ ,$$

mais d'après la formule (6.11), on a $\langle (\varphi^a)^{[k]} \mid x^n\rangle = \mathfrak{S}(n,k,a)$ et par conséquent,

$$q_n = \sum_{k\geq 0} \mathfrak{S}(n,k,a) x^k \ ; \tag{6.12}$$

Nous notons K_a l'opérateur de composition correspondant à la forme linéaire η_a. Soit S' l'opérateur de décalage de la suite associée à la forme delta η_a, par le lemme 5.4.2, on a $S' = M_x \circ (\partial_1(K_a))^{-1}$. Pour calculer $(\partial_1(K_a))^{-1}$, on passe aux formes linéaires : on a $\varphi^a \circ \eta_a = \delta$, donc par la règle de chaîne de la proposition 4.9.4, on en tire $((\mathfrak{D}\varphi^a)\circ\eta_a)\mathfrak{D}\eta_a = \mathfrak{D}\delta = \varepsilon$. Comme $\mathfrak{D}\varphi^a = \mathfrak{D}\varepsilon^a = \mu_a\varepsilon^a$, on en déduit que $(\mathfrak{D}\eta_a)^{-1} = (\mu_a\varepsilon^a)\circ\eta_a = (\mu_a\circ\eta_a)(\varepsilon^a\circ\eta_a) = (\mu_a\circ\eta_a)(\varepsilon+\delta)$. Passant aux opérateurs de composition correspondants, et en utilisant la remarque 3.8.5, on en déduit que $(\partial_1(K_a))^{-1} = U_a^{-1}\circ M_a \circ U_a \circ (E^0 + D_1)$. On a donc

$$S' = M_x \circ U_a^{-1} \circ M_a \circ U_a \circ (E^0 + D_1) \ ;$$

d'où la proposition suivante :

Proposition 6.3.2 *La suite* $(q_n)_n$ *associée à la forme delta* η_a *est donnée par la relation* $q_n = S'^n 1$ *où*

$$S' = M_x \circ U_a^{-1} \circ M_a \circ U_a \circ (E^0 + D_1) \; .$$

Nous venons donc de généraliser la première formule opérationnelle donnée par Roman [39, page 64] ce qui permet un calcul par récurrence des $(q_n)_n$, et donc des nombres de Stirling de deuxième espèce de a et ceci grâce à la formule (6.12).

Remarquons qu'on a pour l'opérateur $U_a^{-1} \circ M_a \circ U_a$ qui intervient dans l'expression de S', la formule explicite suivante :

$$U_a^{-1} \circ M_a \circ U_a \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) D_k \; , \tag{6.13}$$

en effet en passant aux formes linéaires, l'opérateur de composition $U_a^{-1} \circ M_a \circ U_a$ correspond à la forme linéaire $(U_a)^* \mu_a = \mu_a \circ U_a$ et ceci grâce à la remarque 3.8.5 et l'opérateur $\sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) D_k$ correspond à la forme $\sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) \delta^{[k]}$, on est donc finalement amené à montrer l'égalité suivante :

$$\mu_a \circ U_a \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) \delta^{[k]} \; . \tag{6.14}$$

Or en appliquant les deux membres de l'égalité (6.14) à x^n, on obtient

$$\langle \mu_a \circ U_a \mid x^n \rangle \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) \langle \delta^{[k]} \mid x^n \rangle \; ; \tag{6.15}$$

ce qui revient finalement à montrer l'égalité (6.15), or

$$\langle \mu_a \circ U_a \mid x^n \rangle = \langle \mu_a \mid U_a x^n \rangle = \langle \mu_a \mid p_n \rangle \; ;$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_k.a) \langle \delta^{[k]} \mid x^n \rangle = p_n.a \; ;$$

et on arrive donc à l'égalité

$$\langle \mu_a \mid p_n \rangle = p_n.a \; ;$$

qui est la définition même de μ_a (voir l'exemple 4.2.3). Ce qui montre la formule (6.13).

6.4 Suites d'Appell

Rappelons (exemple 4.1.3) que, pour un élément a de $\mathcal{R}$, on a défini la forme linéaire évaluation en a par $\varepsilon^a = \varepsilon \circ E^a$. Il est facile de vérifier que $\langle \varepsilon^a \mid 1 \rangle = 1$, de sorte que ε^a est une forme inversible. Soit $(p_n)_n$ la suite d'Appell définie par cette forme inversible ε^a. On a, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, la relation

$$\left\langle \varepsilon^a \delta^{[k]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k\ ; \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k\,. \end{cases} \tag{6.16}$$

Il est alors facile de voir que si l'on pose $p_n = (x - a)^n$, cette suite p_n vérifie l'égalité (6.16), en effet

$$\langle \varepsilon^a \delta^{[k]} \mid (x-a)^n \rangle = \langle \delta^{[k]} \mid E^a E^{-a} x^n \rangle = \langle \delta^{[k]} \mid x^n \rangle\ .$$

On en déduit que la suite $(p_n)_n$ définie par $p_n = (x-a)^n$ est une suite d'Appell et on a la relation de récurrence suivante :

$$p_{n+1} = p_n x - p_n a\ .$$

Pour un élément quelconque a de l'anneau $\mathcal{R}$, on définit la *forme linéaire d'Hermite* $\vartheta^a = \varepsilon^a \circ \delta^{[2]}$. Il est facile de vérifier que $\langle \vartheta^a \mid 1 \rangle = 1$, de sorte que ϑ^a est une forme inversible. On cherche une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on ait

$$\left\langle (\varepsilon^a \circ \delta^{[2]}) \delta^{[k]} \mid p_n \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k\ ; \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k\,. \end{cases} \tag{6.17}$$

L'isomorphisme de $\mathcal{D}^*$ sur $\mathcal{C}$ de la proposition 3.4.1 est un morphisme de $\mathcal{R}$-algèbres qui envoie dans notre cas la forme linéaire $\vartheta^a = \varepsilon^a \circ \delta^{[2]}$ à l'opérateur de composition noté H_a défini par :

$$\begin{aligned} H_a x^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \vartheta^a \mid x^k \rangle x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varepsilon^a \circ \delta^{[2]} \mid x^k \rangle x^{n-k}\ ; \end{aligned}$$

or

$$\varepsilon^a \circ \delta^{[2]} = \sum_{n \geq 0} \langle \varepsilon^a \mid x^n \rangle (\delta^{[2]})^{[n]} = \sum_{n \geq 0} \langle \varepsilon^a \mid x^n \rangle \frac{(2n)!}{2^n n!} \delta^{[2n]}\ ;$$

et par conséquent

$$\left\langle \varepsilon^a \circ \delta^{[2]} \mid x^n \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{impair}\ ; \\ \langle \varepsilon^a \mid x^{k/2} \rangle \dfrac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{pair}\,, \end{cases} \tag{6.18}$$

en remplaçons l'expression (6.18) dans la formule de H_a, on obtient :

$$H_a x^n = \sum_{k=0,kpair}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} \langle \varepsilon^a \mid x^{k/2} \rangle x^{n-k} \; ; \tag{6.19}$$

or d'après la formule (4.2), on a

$$\langle \delta^{[k]} \mid H_a p_n \rangle = \langle (\varepsilon^a \circ \delta^{[2]}) \delta^{[k]} \mid p_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n \; ; \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n \, , \end{cases}$$

on en déduit alors que $H_a p_n = x^n$ et par conséquent que $p_n = H_a^{-1} x^n$, or d'après l'exemple 4.1.3, on a : pour tous éléments a et b de $\mathcal{R}$; $\varepsilon^{a+b} = \varepsilon^a \varepsilon^b$, ceci nous permet donc, grâce à l'expression (6.19), d'avoir l'identité suivante : pour tous éléments a et b de $\mathcal{R}$ on a $H_{a+b} = H_a \circ H_b$, on a alors pour $b = -a$, l'égalité $H_0 = H_a \circ H_{-a}$, et comme H_0 est l'identité de $\mathcal{D}$, on obtient $H_a^{-1} = H_{-a}$. On en déduit alors la suite d'Appell suivante :

$$p_n = H_a^{-1} x^n = \sum_{k=0,kpair}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} \langle \varepsilon^{-a} \mid x^{k/2} \rangle x^{n-k} \; ;$$

cette suite d'Appell s'appelle la suite d'Hermite de a.

Grâce au théorème 5.3.7, on déduit une formule de récurrence pour les suites d'Appell :

$$D_k p_n = \begin{cases} \binom{n}{k} p_{n-k} & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{si} \quad n < k \end{cases} .$$

Deuxième partie

Endomorphisms of the binomial coalgebra

Introduction

A close relative of the algebra of formal power series, namely the algebra of formal Hurwitz series, has recently been studied by Keigher and Pritchard [29]. Its main interest lies in the fact that it provides formal solutions to homogeneous linear ordinary differential equations in any characteristic and so seems to have many potential applications to the study of differential algebra. Seeking to interpret the elements of this algebra as formal functions, Keigher and Pritchard have defined a composition of Hurwitz series. As in the realm of formal power series, this composition allows one to build algebra endomorphisms ; specifically, for h a fixed series without constant term, the mapping $g \longmapsto g \circ h$ is an endomorphism of the algebra of formal Hurwitz series. Besides, Keigher and Pritchard [29] have provided the algebra of formal Hurwitz series with the so-called natural topology which corresponds to the usual order topology of the algebra of formal power series [55, chapitre VII, §1, pages 130-133].

Now, it is known that any continuous endomorphism of the algebra of formal power series can be described in the same manner as composition on the right with a fixed formal power series without constant term [55, chapitre VII, §1, page 136]. It is therefore natural to ask whether any continuous endomorphism of the algebra of formal Hurwitz series can be expressed as composition on the right with a fixed formal Hurwitz series.

The main objective of this paper is to determine all continuous endomorphisms of the algebra of formal Hurwitz series in the case where the ground ring is a reduced ring of prime characteristic. As a result of our analysis, we shall see that, in that case, continuous endomorphisms other than those arising from the composition of Hurwitz series do exist (Example 6.5).

The principal idea for our description stems from the umbral calculus. In the case where the ground ring is a field of characteristic 0, it has indeed been shown [40, 44] that umbral calculus can be traced back to the existence of a duality between polynomials and formal power series, leading to an interplay between the structure of the algebra of polynomials and the less apparent structure of coalgebra that is induced by this duality. Whatever the characteristic of the ground ring, we observe in an analogous way that the algebra of formal Hurwitz series is, up to a topological isomorphism, nothing but the dual of the univariate binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$, as defined by Joni and Rota in [25] (see Lemma 1.0.2). From this it follows that the map sending an endomorphism of the module $\mathcal{B}_1$ to its adjoint linear mapping induces a bijection from the set of endomorphisms of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ to the set of continuous endomorphisms of the algebra of formal Hurwitz series (see Lemma 1.0.3). Hence the problem of completely describing all continuous endomorphisms of the algebra of formal Hurwitz series boils down to the determination of all endomorphisms of the binomial coalgebra.

Dealing with the problem in this way seems to make it more tractable, as we can use the tools of the coalgebra theory. In particular, the determination of the so-called "coradical filtration", its interpretation as the filtration canonically associated to a very simple grading of $\mathcal{B}_1$, and the systematic use of the components of the linear maps between graded modules that naturally arise in our problem, are the foundations upon which our exposition rests. The translation of these results to properties of the dual algebra seems to lead to somewhat convoluted expressions, which our method will enable us to avoid.

Our principal result (Theorem 1.0.1) shows that an endomorphism of the binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ is determined by some of its components, i.e. by some linear applications between submodules of $\mathcal{B}_1$, and that it can be built from such arbitrarily given components. This gives us another way to define such an endomorphism, as we shall see in our examples (Chapter 6).

We note that an alternative method for studying the endomorphisms of the binomial coalgebra is used within the framework of umbral calculus [25]. It consists in using the notion of a sequence of binomial type. A sequence $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of polynomials, indexed by the set $\mathbb{N}$ of non-negative integers, is said to be a sequence of binomial type if $p_0 = 1$, $\deg p_n = n$ and the binomial identity

$$p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(s) p_{n-k}(t) \tag{20}$$

is satisfied in the ring of bivariate polynomials for every non-negative integer n.

In the case where the ground ring R is a field of characteristic zero, it has been observed that the automorphisms of this coalgebra, often called umbral operators, are in bijective correspondence with the polynomial sequences of binomial type [25, 40]. This bijection is obtained by identifying the R-module $\mathcal{B}_1$ with the R-module $R[t]$ underlying the polynomial algebra ; so any endomorphism of the R-module $\mathcal{B}_1$ is identified with a suitable endomorphism of $R[t]$, and we know that such an endomorphism is characterized by the images of all the monomials t^n, for $n \in \mathbb{N}$. By means of this identification, we can therefore think of endomorphisms of the R-module $\mathcal{B}_1$ as sequences of polynomials. If R is a field of characteristic zero, the condition for a given endomorphism of the R-module $\mathcal{B}_1$ to be a coalgebra automorphism is precisely that the corresponding sequence of polynomials be a sequence of binomial type. In particular, it means that, in this case, the degree of an element of the binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ is invariant by every coalgebra automorphism of $\mathcal{B}_1$. In the case of prime characteristic, on the contrary, we shall see that there exist coalgebra automorphisms of $\mathcal{B}_1$ that do not preserve the degree, as in our Example 4 (see Section 6).

As a consequence, we can forget the condition $\deg p_n = n$ in the definition of a sequence of binomial type, since this condition appears to be irrelevant to the study of endomorphisms of the binomial coalgebra in the case of positive characteristic. Accordingly we deviate from the terminology of umbral calculus and we decide from here on to refer to as a sequence of binomial type any sequence $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ of polynomials, such that $p_0 = 1$ and which satisfies the binomial identity. It is easy to see that such a sequence determines an endomorphism - not necessarily bijective - of the binomial coalgebra.

Now, in positive characteristic, a method, which has aroused recent interest [13], for building such sequences of binomial type has been provided by Carlitz [10] in the context of his discovery of the object now known as the Carlitz module. His construction is described as follows. Let R be once again the ground ring, the characteristic of which is the prime number p. Given a sequence $(\Psi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ of additive polynomials, it suffices to set for each non-negative integer $n = \nu_0 + \nu_1 p + \ldots + \nu_d p^d$, where $0 \leq \nu_i < p$,

$$G_n(t) = \Psi_0(t)^{\nu_0}\Psi_1(t)^{\nu_1}\ldots\Psi_d(t)^{\nu_d}\ .$$

Then one can easily check, using the Lucas congruences [32], that the sequence $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is of binomial type. This sequence can be interpreted in the manner described above as an endomorphism of the binomial coalgebra. Still we shall see that not all the endomorphisms of the binomial coalgebra can be obtained by this process, as illustrated by our Example 4 (Chapter 6).

Our paper is organized as follows. In Chapter 1, we introduce the necessary definitions, state our principal results and set out the method of proof. In Chapter 2, we first recall some facts about graded modules, graded maps and binomial coefficients. These results appear to be more or less known, but are included in order to supply a suitable foundation for our work. Next Chapter 3 deals with the multi-integers and partitions and more particularly, we shall give some results concerning computation modulo p of multinomial coefficients. Then, in Chapter 4, we shall show how to characterize an endomorphism of the binomial coalgebra by some of its components (Theorem 4.8.1). In order to reverse the process by building a coalgebra endomorphism from these particular components, we shall address, in Chapter 5, the link between multi-integers and the coalgebraic structures, which will enable us to determine the wanted endomorphisms. Finally, we shall examine a few examples in Chapter 6.

Chapitre 1

The results and the method of proof

Throughout the paper, $\mathbb{N}$ stands for the set of non-negative integers and R for a fixed commutative ring with identity, which will be called the *ground ring*. For each pair (M, N) of R-modules, we denote by $\mathrm{Hom}(M, N)$ the set of all R-linear maps from M to N.

Let a, n be two non-negative integers ; as usual, $\binom{n}{a}$ denotes the binomial coefficient defined by the identity

$$(1+t)^n = \sum_{a \geq 0} \binom{n}{a} t^a \tag{1.1}$$

between polynomials.

We start by the definition of the main subject of our paper.

Definition 1.0.1 *The (univariate) binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ is defined as the triple $(\mathcal{B}_1, \Delta, \varepsilon)$ where*
-the R-module underlying $\mathcal{B}_1$, also denoted by $\mathcal{B}_1$, is the free R-module with denumerable basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
-the comultiplication Δ is the R-linear map from $\mathcal{B}_1$ to $\mathcal{B}_1 \otimes_R \mathcal{B}_1$, such that

$$\Delta(e_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k \otimes e_{n-k} \ .$$

-the counit ε is the R-linear map from $\mathcal{B}_1$ to R, such that

$$\varepsilon(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad n = 0 \end{cases} \ .$$

Let p be a prime number. For each non-negative integer n, we denote by $s_p(n)$ the sum of base p digits of n (see Definition 2.2.2). For each non-negative integer a, let $\mathcal{P}_a$ be the submodule of $\mathcal{B}_1$ spanned by the elements e_n such that $s_p(n) = a$. It is clear that $\mathcal{B}_1 = \oplus_{a\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_a$. Now fix an R-linear endomorphism ϕ of $\mathcal{B}_1$. For each ordered pair (a, b) of non-negative integers, we denote by ϕ_a^b the (a, b)-component of ϕ, i.e. the R-linear map from $\mathcal{P}_a$ to $\mathcal{P}_b$, defined by

$$\phi(x) = \sum_{b\in\mathbb{N}} \phi_a^b(x) , \qquad \phi_a^b(x) \in \mathcal{P}_b , \qquad \text{for all } x \in \mathcal{P}_a.$$

Let us define a map Θ from the set of R-coalgebra endomorphisms of $\mathcal{B}_1$ to the product $\prod_{\ell\geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$, by setting $\Theta(\phi) = (\phi_\ell^1)_{\ell\geq 1}$. Our main result is the following.

Theorem 1.0.1 *If R is a reduced ring of characteristic p, then the map Θ is bijective.*

By using a related method of proof, we shall be able to characterize automorphisms of the binomial coalgebra in the following way.

Proposition 1.0.1 *If R is a reduced ring of characteristic p, then a coalgebra endomorphism ϕ is bijective, if and only if its component ϕ_1^1 is bijective.*

Let us now explain the link between these statements and the study of endomorphisms of the algebra of formal Hurwitz series. We recall [28] that the algebra HR of formal Hurwitz series is defined as the R-module $R^{\mathbb{N}}$ of maps from $\mathbb{N}$ to R, provided with Hurwitz multiplication. By Hurwitz multiplication, we refer to the operation which associates, to a pair (g, h) of elements in $R^{\mathbb{N}}$, the product gh defined by

$$(gh)(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)h(n-k) .$$

For any non-negative integer n, we denote by π_n, as in [29], the map from HR to R which sends a formal Hurwitz series h to $h(n)$. For each $x \in \mathcal{B}_1$, we define the map c_x from $\mathcal{B}_1^*$ to R by $c_x(y) = y(x)$, where y is an arbitrary element in $\mathcal{B}_1^*$.

We provide the set R with the discrete topology ; and HR with the natural topology [29, page 293], that is the weakest topology that makes all the maps π_n continuous. Similarly, we provide the dual algebra $\mathcal{B}_1^*$ of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ with the weak topology which, by definition, is the weakest topology that makes all the maps c_x continuous, $x \in \mathcal{B}_1$. For h in HR and $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ in $\mathcal{B}_1$, we define

$$\langle h, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} h(n)x_n \quad \in R. \tag{1.2}$$

This makes sense as $x_n = 0$ for all but a finite number of non-negative integers n.

Lemma 1.0.2 *The pairing $\langle , \rangle$ induces a topological isomorphism from HR to $\mathcal{B}_1^*$.*

By means of this isomorphism, we shall be able to interpret any continuous endomorphism of HR as a continuous endomorphism of $\mathcal{B}_1^*$. So, we shall show the following.

Lemma 1.0.3 *The map sending any endomorphism of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ to its adjoint linear map defines a bijection from the set of endomorphisms of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ to the set of continuous endomorphisms of HR .*

When R is a field of characteristic zero, we know that HR is topologically isomorphic to the algebra $R[[t]]$ of univariate formal power series with coefficients in R [29, page 292], and that every continuous endomorphism of this algebra can be described as a composition on the right by a fixed series without constant term. Then Lemma 1.0.3 gives us a description of coalgebra endomorphisms in terms of power series. This explains the link between polynomial sequences of binomial type and formal power series, which lies at the core of umbral calculus.

In prime characteristic, by composing the two bijections of Theorem 1.0.1 and Lemma 1.0.3, we obtain the following theorem which allows us to describe all the continuous endomorphisms of the algebra HR of formal Hurwitz series.

Theorem 1.0.2 *If R is a reduced ring of characteristic p, then the map from the set of continuous endomorphisms of HR to $\prod_{\ell \geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$, sending χ to $\Theta(\phi)$, where ϕ is the endomorphism of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ adjoint to χ, is bijective.*

This completes the statement of our results. We now describe the main features of our proof of Theorem 1.0.1.

The first point to note is the extensive use of the notion of the components of a linear map between graded modules. The necessary definitions and theory are developed in Chapter 2. A crucial point is the fact that such a linear map is completely determined by the collection of all its components (Remark 2.1.1). This is used for translating the relations between linear maps into relations between components. This idea generalizes the characterization of linear maps between vector spaces by their matrices. So, the proofs of Proposition 4.7.1 and Lemma 4.7.2, which transcribe the definition of a coalgebra endomorphism, are straightforward, once the necessary properties have been elaborated. By this argument, the proof of Theorem 1.0.1 boils down to showing that the collection of all the components ϕ_a^b of a coalgebra endomorphism ϕ of $\mathcal{B}_1$ are uniquely determined by only the components ϕ_ℓ^1 for $\ell \geq 1$.

Furthermore, the coalgebra theory as explained by Sweedler [50] was the starting point of our analysis. A salient fact in his exposition is Theorem 9.1.4

of [50] which shows that any coalgebra endomorphism has to be compatible with the so-called coradical filtration, once the ground ring is a field. So our first idea in investigating endomorphisms of $\mathcal{B}_1$ was to determine the coradical filtration of the binomial coalgebra; this is done, under the hypothesis that the ground ring is a reduced ring of characteristic p, in Proposition 4.5.1. It turns out that this coradical filtration is the filtration canonically associated to the grading of $\mathcal{B}_1$ by the submodules $\mathcal{P}_a$, for $a \in \mathbb{N}$. This is the reason why this grading is an essential tool in the proof. Moreover, in the case where the ground ring is of characteristic p, an interesting property of this grading is the fact that the binomial coalgebra, provided with it, is a graded coalgebra as defined by [50, page 228]. We express this property by saying that the comultiplication Δ is a ρ-graded linear map for a suitable choice of ρ (see Lemma 4.6.1). This property simplifies our computations, as exemplified by the proof of Proposition 4.7.1. Also in Sweedler's book [50, page 5], is the notion of what we call the "diagonal map of order j" $\Delta^{(j)}$ where j is a non-negative integer. We define this R-linear map, from $\mathcal{B}_1$ to its j-th tensor power $\mathcal{B}_1^{\otimes j}$, by the induction formula $\Delta^{(j+1)} = (\Delta^{(j)} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}_1}) \circ \Delta$ and the condition $\Delta^{(0)} = \varepsilon$ (it is agreed that $\mathcal{B}_1^{\otimes 0}$ is simply the ground ring R). In particular, using the canonical identification of $R \otimes_R \mathcal{B}_1$ to $\mathcal{B}_1$ and the counit property of ε, one has $\Delta^{(1)} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}_1}$, so $\Delta^{(2)} = \Delta$.

In order to study the diagonal map of order j via its components, we must work with a suitable grading of $\mathcal{B}_1^{\otimes j}$, which we define by means of *multi-integers*. A multi-integer of length j is an element of $\mathbb{N}^j$. For such a multi-integer $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_j)$, we define the *degree* of $\boldsymbol{a}$ as the non-negative integer $|\boldsymbol{a}| = a_1 + \dots + a_j$, and we set $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}} = \mathcal{P}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_{a_j}$. From the fact already observed that $\mathcal{B}_1 = \oplus_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_a$, it follows that $\mathcal{B}_1^{\otimes j} = \oplus_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^j} \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$ (as the R-module $\mathcal{B}_1$ is free, we can see $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$ as a sub-R-module of $\mathcal{B}_1^{\otimes j}$). From the graded property of the comultiplication Δ, it is easily seen that, for all non-negative integers j and δ, the diagonal map $\Delta^{(j)}$ sends $\mathcal{P}_\delta$ to $\oplus_{\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^j, |\boldsymbol{b}| = \delta} \mathcal{P}_{\boldsymbol{b}}$. For any multi-integer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^j$ of length j, we accordingly define the map $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ from $\mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}$ to $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$ by the relation

$$\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}(x) = \sum_{\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^j, |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|} \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{b}}(x)\ , \qquad \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{b}}(x) \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{b}}\ , \qquad \text{for all } x \in \mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}.$$

These maps $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ are interpreted in our paper as components of the diagonal map $\Delta^{(j)}$ of order j. When expressed in terms of components, the coassociativity property of the comultiplication Δ gives Proposition 5.1.2.

An important fact, to be used repeatedly in our proofs, is that the maps $\Delta^{(2)}_{a,b}$ are injective for any multi-integer (a, b) of length 2. This is the content of Lemma 4.6.2. It depends only upon an arithmetic property of binomial coefficients (Lemma 3.1.2). With the ingredients explained so far, the proof of the injectivity of Θ is easy (Theorem 4.8.1).

In order to show the surjectivity of Θ, the idea is to build the components ϕ_a^b of a coalgebra endomorphism ϕ from the particular components ϕ_ℓ^1, for

$\ell \in \mathbb{N}$. For this, one can observe that, for all non-negative integers j, such an endomorphism ϕ verifies the relation

$$\Delta^{(j)} \circ \phi = \phi^{\otimes j} \circ \Delta^{(j)} \, . \tag{1.3}$$

We fix the multi-integer $1^{\times j} = (1, \ldots, 1)$, ($j$ times) and δ a non-negative integer ; we write $\psi_\ell = \phi_\ell^1$ for each $\ell \in \mathbb{N}$. Then a particular component of the right hand side of (1.3) is the map $h_{\delta,j}$ from $\mathcal{P}_\delta$ to $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$, given by (5.5). A simple calculation shows that the corresponding component of the left hand side of (1.3) is $\Delta^{(j)}_{1^{\times j}} \circ \phi^j_\delta$. This explains why the equation (5.6), viz. $\Delta^{(j)}_{1^{\times j}} \circ \phi^j_\delta = h_{\delta,j}$, is a necessary condition for ϕ to be a coalgebra endomorphism. As the right hand side of (5.6) depends only upon the ϕ^1_ℓ, this equation can be used to find the component ϕ^j_δ from the given components of ϕ. A part of the proof of Theorem 1.0.1 is to verify that the solutions ϕ^j_δ of this equation (5.6), if they exist, are precisely the components of a coalgebra endomorphism. But the most difficult part is to show the existence of a solution for (5.6). This part is built on the determination of the range of the map $f_j = \Delta^{(j)}_{1^{\times j}}$ (Lemma 5.3.5) and needs a somewhat intricate analysis (Chapter 5), based on properties of multinomial coefficients developed in Chapter 3.

Chapitre 2

Basic notions

2.1 Graded modules

As in the preceding Chapter, the ground ring is denoted by R. For every R-module M, let I_M denote the identity map of M.

2.1.1 Gradings

Let M be a R-module and A a non-empty set. Recall [8, chapitre II, page 164] that a *grading* of type A on M is the data, for each element α in A, of a submodule M_α of M, such that the family $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ satisfies

$$M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \ .$$

Definition 2.1.1 *A graded module of type A consists of a R-module M together with a grading of type A on M.*

Setting a graded R-module M of type A yields the maps $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ such that $i_\alpha(x) = x$, for each x in M_α. Besides, a unique map pr^α from M to M_α is defined by

$$\mathrm{pr}^\alpha \circ i_{\alpha'} = \begin{cases} I_{M_\alpha} & \text{if} \quad \alpha = \alpha' \ ; \\ 0 & \text{if} \quad \alpha \neq \alpha' \ . \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.2 Components of a linear map

Definition 2.1.2 *Let u be a linear map of the graded R-module M of type A to the graded R-module N of type B. Fix $\alpha \in A$ and $\beta \in B$. The (α,β)-component of u is defined to be the linear map u_α^β from M_α to N_β, such that*

$$u_\alpha^\beta = \mathrm{pr}^\beta \circ u \circ i_\alpha \ .$$

Notice that

$$u \ = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} i_\beta \circ u_\alpha^\beta \circ \mathrm{pr}^\alpha. \tag{2.2}$$

This makes sense since, for every x in M, the element $i_\beta \circ u_\alpha^\beta \circ \mathrm{pr}^\alpha(x)$ is trivial except for a finite number of (α, β).

Remark 2.1.1 *Let M and N be two graded R-modules of types A and B respectively. Two linear maps u and v from M to N are equal if and only if they have the same components, that is if and only if, for each element (α, β) in $A \times B$, we have*

$$u_\alpha^\beta = v_\alpha^\beta \, .$$

2.1.3 Computation of components of the composition of two linear maps

Proposition 2.1.2 *Let u be a linear map from a graded R-module M of type A to a graded R-module N of type B, and v another linear map from N to a graded R-module P of type Γ. For every element (α, γ) in $A \times \Gamma$, the (α, γ)-component of $v \circ u$ is*

$$(v \circ u)_\alpha^\gamma = \sum_{\beta \in B} v_\beta^\gamma \circ u_\alpha^\beta \, .$$

This sum makes sense since for a fixed x in M, the element $v_\beta^\gamma \circ u_\alpha^\beta(x)$ is zero, except for finitely many β.

Proof. Fix α and γ in A and Γ respectively. The first step of the proof consists in applying Definition 2.1.2, getting

$$(v \circ u)_\alpha^\gamma = \mathrm{pr}^\gamma \circ (v \circ u) \circ i_\alpha \; ;$$

by associativity of composition, this becomes

$$(v \circ u)_\alpha^\gamma = (\mathrm{pr}^\gamma \circ v) \circ (u \circ i_\alpha) \; ; \tag{2.3}$$

but equality (2.2) yields

$$v = \sum_{(\beta, \gamma') \in B \times \Gamma} i_{\gamma'} \circ v_\beta^{\gamma'} \circ \mathrm{pr}^\beta \quad \text{and} \quad u = \sum_{(\alpha', \beta') \in A \times B} i_{\beta'} \circ u_{\alpha'}^{\beta'} \circ \mathrm{pr}^{\alpha'} \, .$$

Substituting these expressions in equality (2.3) gives

$$(v \circ u)_\alpha^\gamma = \sum_{(\beta, \gamma') \in B \times \Gamma} \sum_{(\alpha', \beta') \in A \times B} \mathrm{pr}^\gamma \circ i_{\gamma'} \circ v_\beta^{\gamma'} \circ \mathrm{pr}^\beta \circ i_{\beta'} \circ u_{\alpha'}^{\beta'} \circ \mathrm{pr}^{\alpha'} \circ i_\alpha .$$

Finally, the result is deduced from relations (2.1).

2.1.4 Graded maps

Definition 2.1.3 *Let M and N be two graded R-modules of the same type A. An R-linear map u from M to N is said to be graded when $u(M_\alpha) \subseteq N_\alpha$, for each α in A.*

We have just defined the category of graded modules of type A; one can readily verify that it is an abelian category.

The map u is graded if and only if the component $u_\alpha^{\alpha'}$ is trivial whenever $\alpha \neq \alpha'$. In this case, equality (2.2) becomes

$$u = \sum_{\alpha \in A} i_\alpha \circ u_\alpha \circ \mathrm{pr}^\alpha ,$$

where $u_\alpha = u_\alpha^\alpha$.

Generally speaking, given a graded R-module M of type A, a graded R-module N of type B and a map ρ from B to A, we know [8, chapitre II, page 163, exemple 2] how to define the grading of N of type A, induced from $(N_\beta)_{\beta \in B}$ by means of the map ρ. An R-linear map u from M to N is said to be *ρ-graded* when it is graded in the sense of Definition 2.1.3 for the gradings of type A given on M and thus defined on N. This is equivalent to the condition

$$u(M_\alpha) \subseteq \bigoplus_{\rho(\beta)=\alpha} N_\beta ,$$

for each α in A. The map u is ρ-graded if and only if the component u_α^β is trivial whenever $\rho(\beta) \neq \alpha$. Then equality (2.2) becomes

$$u = \sum_{\beta \in B} i_\beta \circ u_\beta \circ \mathrm{pr}^{\rho(\beta)} , \tag{2.4}$$

setting $u_\beta = u_{\rho(\beta)}^\beta$.

2.1.5 Tensor product of graded modules

Let M and N be two graded R-modules of type A and B respectively. The tensor product $M \otimes_R N$ is endowed with the product grading of type $A \times B$, given by the decomposition in direct summands :

$$M \otimes_R N = \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in A \times B} (i_\alpha \otimes i_\beta)(M_\alpha \otimes_R N_\beta) ,$$

where $i_\alpha : M_\alpha \to M$ and $i_\beta : N_\beta \to N$ are the injections defined above.

When M and N are flat R-modules, so are their direct summands M_α and N_β. In this case, we shall systematically identify the R-module $M_\alpha \otimes_R N_\beta$ with its image by the injection $i_\alpha \otimes i_\beta$, thus writing

$$M \otimes_R N = \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in A \times B} (M_\alpha \otimes_R N_\beta) .$$

2.1.6 Components of the tensor product of two linear maps

Proposition 2.1.3 *Let M_1, M_2, N_1 and N_2 be four flat graded R-modules of types A_1, A_2, B_1 and B_2 respectively. Let u be a linear map from M_1 to N_1 and v another linear map from M_2 to N_2. For each element $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ in $A_1 \times A_2 \times B_1 \times B_2$ we have*

$$(u \otimes v)^{(\beta_1,\beta_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)} = u^{\beta_1}_{\alpha_1} \otimes v^{\beta_2}_{\alpha_2} \,.$$

Proof. For every $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ fixed in $A_1 \times A_2 \times B_1 \times B_2$, Definition 2.1.2 yields

$$(u \otimes v)^{(\beta_1,\beta_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \mathrm{pr}^{(\beta_1,\beta_2)} \circ (u \otimes v) \circ i_{(\alpha_1,\alpha_2)} \,.$$

Since M_1, M_2, N_1 and N_2 are flat R-modules , as already noticed, the tensor product of the homogenous components is identified with the homogenous component of the tensor product, which is expressed by the identities

$$\mathrm{pr}^{(\beta_1,\beta_2)} = \mathrm{pr}^{\beta_1} \otimes \mathrm{pr}^{\beta_2} \quad \text{and} \quad i_{(\alpha_1,\alpha_2)} = i_{\alpha_1} \otimes i_{\alpha_2} \,.$$

Thus

$$\begin{aligned}
(u \otimes v)^{(\beta_1,\beta_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)} &= (\mathrm{pr}^{\beta_1} \otimes \mathrm{pr}^{\beta_2}) \circ (u \otimes v) \circ (i_{\alpha_1} \otimes i_{\alpha_2}) \\
&= (\mathrm{pr}^{\beta_1} \circ u \circ i_{\alpha_1}) \otimes (\mathrm{pr}^{\beta_2} \circ v \circ i_{\alpha_2}) \\
&= u^{\beta_1}_{\alpha_1} \otimes v^{\beta_2}_{\alpha_2} \,,
\end{aligned}$$

hence the result.

2.1.7 Tensor algebra of a graded module

Let M be a flat graded R-module of type Γ and let $\widehat{\Gamma}$ stand for the disjoint union of the sets Γ^j, where j runs over $\mathbb{N}$. The tensor algebra $T(M)$ of the R-module M is endowed with the grading of type $\widehat{\Gamma}$ that associates to every "multi-degree" $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j) \in \Gamma^j$ the submodule $T_\gamma(M) = M_{\gamma_1} \otimes M_{\gamma_2} \otimes \cdots \otimes M_{\gamma_j}$, so that $T(M) = \bigoplus_{\gamma \in \widehat{\Gamma}} T_\gamma(M)$. Further, the grading thus defined is compatible with the tensor product, in the sense that the tensor product of an element of $T_\gamma(M)$ by an element of $T_{\gamma'}(M)$ belongs to $T_{\gamma\gamma'}(M)$, where the product in $\widehat{\Gamma}$ of γ and γ' is the concatenation product of words, that is, if $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j)$ and $\gamma' = (\gamma_{j+1}, \gamma_{j+2}, \ldots, \gamma_{j+k})$, then

$$\gamma\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_{j+k}). \tag{2.5}$$

2.2 Binomial coefficients

Let p be a fixed prime number. Recall from Chapter 1 the identity (1.1) defining binomial coefficients. It is known that, for any pair (a, b) of integers such that $0 \leq a \leq b$, one has $\binom{b}{a} = \dfrac{b!}{a!(b-a)!}$. Our next task is an investigation of the vanishing modulo the prime p of binomial coefficients ; this will be made through the consideration of a particular binary relation between natural integers.

2.2.1 An ordering of natural integers

Definition 2.2.1 *Let $\prec$ stand for the binary relation over $\mathbb{N}$, such that*

$$a \prec b \Longleftrightarrow \binom{b}{a} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Lemma 2.2.1 *Let a and b be two non-negative integers. If $a \prec b$ then $a \leq b$.*

Proof. By the definition of binomial coefficients, we have indeed $\binom{b}{a} = 0$, when $a > b$.

Lemma 2.2.2 *The relation $\prec$ is an order relation over $\mathbb{N}$.*

Proof. The reflexivity of $\prec$ is straightforward, the antisymmetry results directly from Lemma 2.2.1 and the transitivity from the equality $\binom{c}{a}\binom{c-a}{c-b} = \binom{b}{a}\binom{c}{b}$.

2.2.2 Sum of digits function

Definition 2.2.2 *The sum of base p digits function is the function s_p from $\mathbb{N}$ to itself, recursively defined by the formulae*

$$s_p(0) = 0 \quad \text{and} \quad s_p(lp + m) = s_p(l) + m \ , \quad \text{if} \quad 0 \leq m < p \ .$$

When a is a non-negative integer, let $\mathbb{N}_{a,p}$ stand for the set of all non-negative integers n such that $s_p(n) = a$.

Recall that the p-adic *valuation* $\mathcal{V}_p$ is the map from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ defined by $\mathcal{V}_p(0) = +\infty$ and for $q \in \mathbb{Q}^*$, $\mathcal{V}_p(q) = k$ for $q = p^k \dfrac{a}{b}$, where a and b are integers coprime to p.

Lemma 2.2.3 *For every n in $\mathbb{N}$ and every k in the set $\{0, 1, \ldots, n\}$, the p-adic valuation of the binomial coefficient is given by the formula*

$$\mathcal{V}_p\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{s_p(k) + s_p(n-k) - s_p(n)}{p-1} \ .$$

Proof. This is a direct consequence of a known formula for the p-adic valuation of a factorial [30, exercice 13, page 7].

Corollary 2.2.4 *Let a and b be two non-negative integers such that $a \leq b$; then $a \prec b$ is equivalent to $s_p(b-a) = s_p(b) - s_p(a)$.*

Proof. By definition, the relation $a \prec b$ is equivalent to the vanishing of the p-adic valuation of the binomial coefficient $\binom{b}{a}$, hence the result by Lemma 2.2.3.

Lemma 2.2.5 *Let a and b be two non-negative integers such that $a \neq b$. If $a \prec b$ then $s_p(a) < s_p(b)$.*

Proof. By corollary 2.2.4, $a \prec b$ implies that $s_p(b-a) = s_p(b) - s_p(a)$, therefore $s_p(a) < s_p(b)$.

Lemma 2.2.6 *For any positive integer n, there exists a non-negative integer m such that :*

$$m \prec n \qquad \text{and} \qquad s_p(m) = s_p(n) - 1.$$

Proof. We write the base p representation of n as $n = \sum_{i=0}^{d} \nu_i p^i$; since $n > 0$, there exists some index $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ such that $\nu_k > 0$. Then let us set $m = n - p^k$, so that $s_p(m) = s_p(n) - 1$. It remains to prove that $m \prec n$; for this, it is sufficient to compute the p-adic valuation of $\binom{n}{m}$ by Lemma (2.2.3). But $s_p(m) - s_p(n) = -1$ and $s_p(n-m) = s_p(p^k) = 1$ thus $\mathcal{V}_p\left(\binom{n}{m}\right) = 0$ and therefore $\binom{n}{m}$ is coprime to p, that is $m \prec n$.

Chapitre 3

Multi-integers and partitions

In this Chapter, we examine the combinatorial notion of a partition of a positive integer. We shall have to use the connected notion of a multi-integer, by which we begin. Our main objective is the setting of various kinds of multinomial coefficients, which will be used in the sequel for expressing the diagonal maps $\Delta^{(j)}, j \in \mathbb{N}$. Of peculiar interest are the computations modulo a prime number of multinomial coefficients (Lemmas 3.1.5 and 3.1.6).

For every finite set F, the cardinality of F is denoted by card F.

3.1 Multi-integers

3.1.1 Definitions and notations

If j is a non-negative integer, a *multi-integer* $\boldsymbol{a}$ of *length* j is a list $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j) \in \mathbb{N}^j$, where the a_i for $1 \leq i \leq j$ are all non-negative integers. Observe that there exists only one multi-integer of length 0, namely the empty list which we denote by $\diamondsuit$. Let $\widehat{\mathbb{N}}$ denote the set $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^j$ of all multi-integers of any length. We then provide $\widehat{\mathbb{N}}$ with the concatenation operation defined by formula (2.5), so that $\widehat{\mathbb{N}}$ is a monoid the identity of which is the empty list $\diamondsuit$. For every multi-integer $\boldsymbol{a}$ and for every non-negative integer n, we denote by $\boldsymbol{a}^{\times n}$ the $n-th$ power of $\boldsymbol{a}$ for this concatenation operation. In particular $\boldsymbol{a}^{\times 0} = \diamondsuit$ for each multi-integer $\boldsymbol{a}$.

For any multi-integer $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j) \in \mathbb{N}^j$, let $\boldsymbol{a}!$ stand for the positive integer $\boldsymbol{a}! = a_1!a_2! \cdots a_j!$, called the *factorial* of $\boldsymbol{a}$. Moreover $|\boldsymbol{a}|$ is defined as the non-negative integer $|\boldsymbol{a}| = a_1 + a_2 + \cdots + a_j$, that we call the *degree* of $\boldsymbol{a}$. We agree that $\diamondsuit! = 1$ and $|\diamondsuit| = 0$. For $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ a multi-integer of positive length $j > 0$ and p a prime number, let $\mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p}$ stand for $\mathbb{N}_{a_1,p} \times \mathbb{N}_{a_2,p} \times \cdots \times \mathbb{N}_{a_j,p}$. We agree that $\mathbb{N}_{\diamondsuit,p} = \{\diamondsuit\}$.

We shall have to use the following interpretation of the base p representation of an integer n, where p is a fixed prime number. Let n be a non-negative integer, such that $s_p(n) = j$. We write $n = \nu_0 + \nu_1 p + \cdots + \nu_d p^d$, the base

p representation of n, so that the digits ν_i belong to $\{0,\ldots,p-1\}$ for each $i \in \{0,\ldots,d\}$, and satisfy $\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_d = j$. Then one defines a map ω from $\mathbb{N}_{j,p}$ to $\mathbb{N}_{1^{\times j},p}$ by setting

$$\omega(n) = 1^{\times \nu_0} p^{\times \nu_1} \cdots p^{d^{\times \nu_d}} . \tag{3.1}$$

Lemma 3.1.1 *The map ω satisfies the identity*

$$|\omega(n)| = n \ ,$$

for every integer $n \in \mathbb{N}_{j,p}$.

This allows us to generalize Lemma 2.2.6 in the following way.

Lemma 3.1.2 *Let n and j be non-negative integers such that $s_p(n) = j$ and let k be a non-negative integer such that $k \le j$. Then there exists a non-negative integer m such that $m \prec n$ and $s_p(m) = k$.*

Proof. Put $\omega(n) = 1^{\times \nu_0} p^{\times \nu_1} \cdots p^{d^{\times \nu_d}}$. As $\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_d = j$, there exist non-negative integers $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_d$, such that $\mu_0+\cdots+\mu_d = k$, with $0 \le \mu_i \le \nu_i$ for each index $i \in \{0,\ldots,d\}$. Define an integer m by $m = |1^{\times \mu_0} p^{\times \mu_1} \cdots p^{d^{\times \mu_d}}|$. As $n - m = |\omega(n)| - |\omega(m)| = \sum_{i=0}^{d} (\nu_i - \mu_i) p^i$, where $0 \le \nu_i - \mu_i < p$, we have $m \prec n$, so that the number m answers our problem.

3.1.2 Multinomial coefficient

Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of length j. The *multinomial coefficient* of the multi-integer $\boldsymbol{a}$ is the positive integer $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a})$, defined by

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) = \binom{a_1+a_2+\cdots+a_j}{a_1,a_2,\ldots,a_j} = \frac{|\boldsymbol{a}|!}{\boldsymbol{a}!}. \tag{3.2}$$

Lemma 3.1.3 *Let $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_j)$ and $\boldsymbol{a}' = (a_{j+1},a_{j+2},\ldots,a_{j+k})$ be two multi-integers, then*

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}') \ = \ \binom{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}'|}{|\boldsymbol{a}|} \mathfrak{M}(\boldsymbol{a})\, \mathfrak{M}(\boldsymbol{a}'). \tag{3.3}$$

Proof. By formula (3.2), we have the following equality

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}') = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'|!}{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}')!} \ ;$$

as $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'$ is the concatenation product of words $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{a}'$, we have $|\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}'|$ and $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}')! = \boldsymbol{a}!\boldsymbol{a}'!$, from which formula (3.3) follows.

3.1.3 Action of symmetric group

Let S_j be the symmetric group on j symbols. We let S_j act on $\mathbb{N}^j$ in a natural way, defining $\sigma\boldsymbol{a}$ for each $(\sigma, \boldsymbol{a}) \in S_j \times \mathbb{N}^j$ as $\sigma\boldsymbol{a} = (a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(j)})$ or in an equivalent way $(\sigma\boldsymbol{a})_i = a_{\sigma^{-1}(i)}$. It is obvious that $(\sigma\tau)\boldsymbol{a} = \sigma(\tau\boldsymbol{a})$.

Remark 3.1.4 *The multinomial coefficient $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a})$ of a multi-integer $\boldsymbol{a}$ is invariant by the symmetric group S_j, in the sense that for every permutation $\sigma \in S_j$ and for every multi-integer $\boldsymbol{a}$ of length j, we have $\mathfrak{M}(\sigma\boldsymbol{a}) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{a})$.*

3.1.4 Computation of multinomial coefficients modulo p

Lemma 3.1.5 *Let p be a fixed prime number and $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j)$ a multi-integer of length j, such that at least p components are equal to the same power p^ν of p. Then $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv 0 \pmod p$.*

Proof. By hypothesis there exist p indices $i_1, i_2, \dots, i_p$ in $\{1, 2, \dots, j\}$, such that for all $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ one has $a_{i_k} = p^\nu$. By Remark 3.1.4, we can suppose that $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_p = p$. Now consider the multi-integer $\boldsymbol{b} = (p^\nu)^{\times p}$ of length p. As $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$, where $\boldsymbol{c}$ is a multi-integer of length $j - p$, it is sufficient by Lemma 3.1.3 to show that $\mathfrak{M}(\boldsymbol{b}) \equiv 0 \pmod p$. Writing $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}''$, where $\boldsymbol{b}' = (p^\nu)^{\times(p-1)}$ and $\boldsymbol{b}'' = (p^\nu)^{\times 1}$, Lemma 3.1.3 gives

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{b}) = \binom{p^{\nu+1}}{(p-1)p^\nu}\mathfrak{M}(\boldsymbol{b}')\mathfrak{M}(\boldsymbol{b}'') \ ;$$

and lastly Lemma 2.2.3 yields

$$\binom{p^{\nu+1}}{(p-1)p^\nu} \equiv 0 \pmod p \ ,$$

hence the result.

Lemma 3.1.6 *Let p be a fixed prime number and $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}_{1^{\times j},p}$ a multi-integer of length j, all the components of which are powers of p. Then $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv$ card $stab(\boldsymbol{a}) \pmod p$, where $stab(\boldsymbol{a})$ is the stabilizer in S_j of the multi-integer $\boldsymbol{a}$.*

Proof. Suppose that at least p components of $\boldsymbol{a}$ are the same power of p. From Lemma 3.1.5 we infer that $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv 0 \pmod p$. On the other hand $stab(\boldsymbol{a})$ contains at least the subgroup of S_j that permutes these p components amongst themselves; thus card $stab(\boldsymbol{a})$ is a multiple of $p!$, and then card $stab(\boldsymbol{a}) \equiv 0 \pmod p$.

Therefore, we can suppose that each power of p appears at most $p-1$ times among the components of $\boldsymbol{a}$. At first, we tackle the case where $\boldsymbol{a} = (p^\nu)^{\times j}$, with

$j < p$. The case $j = 0$ is obvious and we proceed by induction on j. Suppose that $\mathfrak{M}(p^{\nu \times (j-1)}) \equiv (j-1)! \pmod p$. Let us set $\boldsymbol{a} = (p^\nu)^{\times j}$ and compute

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) = \mathfrak{M}((p^\nu)^{\times j}) = \binom{jp^\nu}{p^\nu} \mathfrak{M}\left((p^\nu)^{\times (j-1)}\right) \mathfrak{M}(p^\nu) \ ;$$

as $\mathfrak{M}(p^\nu) = 1$, using the Lucas congruences [32, chapitre 23, page 418], we obtain

$$\mathfrak{M}((p^\nu)^{\times j}) \equiv j(j-1)! \pmod p \ ,$$

that is to say

$$\mathfrak{M}((p^\nu)^{\times j}) \equiv j! \pmod p. \tag{3.4}$$

Now we look at the general case : we write, up to a permutation leaving $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a})$ unchanged, $\boldsymbol{a} = (p^{\nu_1})^{\times j_1} \cdots (p^{\nu_k})^{\times j_k}$, where all the integers $j_1, \ldots, j_k$ are smaller than p. Then Lemma 3.1.3 allows us to write

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) = \binom{j_1 p^{\nu_1} + \cdots + j_k p^{\nu_k}}{j_1 p^{\nu_1}} \mathfrak{M}[(p^{\nu_1})^{\times j_1}] \mathfrak{M}[(p^{\nu_2})^{\times j_2} \cdots (p^{\nu_k})^{\times j_k}] \ .$$

In this last formula, the binomial coefficient is $\equiv 1 \pmod p$ by Lucas congruences [32, *loc. cit.*], and so we obtain

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv \mathfrak{M}[(p^{\nu_1})^{\times j_1}] \mathfrak{M}[(p^{\nu_2})^{\times j_2} \cdots (p^{\nu_k})^{\times j_k}] \pmod p \ ;$$

using an easy induction and formula (3.4), we find $\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv j_1! \ldots j_k! \pmod p$; as $j_1! \ldots j_k!$ is nothing but card $stab(\boldsymbol{a})$ we deduce that

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{a}) \equiv \text{card } stab(\boldsymbol{a}) \pmod p \ .$$

3.2 Partitions

3.2.1 The multinomial coefficient of a partition

Let j be a positive integer. We recall that a *partition* λ of a positive integer $n > 0$ into j summands can be thought of [12, chapitre II] either as a non-increasing solution $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j \geq 1$ in positive integers (called summands of the partition) of the equation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j = n \ ,$$

or as a solution in non-negative integers a_i (number of summands equal to i) of the system

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n & = & n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & j \end{cases} \ .$$

This second aspect allows one to associate with a partition λ, the multi-integer of degree n, defined as $1^{\times a_1}2^{\times a_2}\cdots n^{\times a_n}$. Thus the set of partitions of the positive integer n into j summands is identified to the set of orbits under the action of S_j of multi-integers of length j and degree n. We take advantage of this to define the *multinomial coefficient* of a partition $\lambda = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ of n into j summands as $\mathfrak{M}(1^{\times a_1}2^{\times a_2}\cdots n^{\times a_n})$, that is $\mathfrak{M}(\lambda) = \dfrac{n!}{(1!)^{a_1}(2!)^{a_2}\cdots(n!)^{a_n}}$.

3.2.2 A variant of multinomial coefficients

Let λ be a partition $(1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n})$ of the positive integer n. We associate with λ a modified multinomial coefficient, that is the rational number

$$((\lambda)) = \frac{n!}{(1!)^{a_1}(2!)^{a_2}\cdots(n!)^{a_n}a_1!a_2!\cdots a_n!}. \tag{3.5}$$

Lemma 3.2.1 *If λ is a partition of n, then the element $((\lambda))$ is an integer.*

This result was proved by Weill in 1880 [17, chapter 26, page 266]. The number $((\lambda))$ is called a Faà di Bruno coefficient in [25].

3.2.3 A lemma

Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of length $j > 0$ and n a positive integer. We suppose that $\boldsymbol{a} \neq 0^{\times j}$. We designate by $\mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p,n}$ the set of multi-integers in $\mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p}$ of degree equal to n. Let $Part_{\boldsymbol{a}}(n)$ denote the set of partitions of n into at most j nonzero summands (identified to non-increasing sequences of non-negative integers $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_j \geq 0$, such that $y_1 + y_2 + \cdots + y_j = n$), that satisfy the condition

$$\forall i \in \{1, \ldots, j\} \quad s_p(y_i) = a_i.$$

Definition 3.2.1 *Let j be a positive integer, $\boldsymbol{a} \neq 0^{\times j}$ a multi-integer of length j and $(\sigma, \lambda) \in \coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$ that is an ordered pair (σ, λ) where $\sigma \in S_j$ and $\lambda = (y_1, y_2, \ldots, y_j)$ is a non-increasing sequence of j non-negative integers such that $s_p(y_i) = a_{\sigma^{-1}(i)}$ for every index $i \in \{1, \ldots, j\}$ and $y_1 + y_2 + \cdots + y_j = n$. We set*

$$\kappa(\sigma, \lambda) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(j)}). \tag{3.6}$$

Lemma 3.2.2 *For every multi-integer $\boldsymbol{a} \neq 0^{\times j}$ of length $j > 0$ and for every positive integer n, the equality (3.6) defines a map κ from the set $\coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$ to $\mathbb{N}_{a,p,n}$. For $\boldsymbol{z} \in \mathbb{N}_{a,p,n}$, the cardinality of $\kappa^{-1}(\boldsymbol{z})$ is given by*

$$\mathrm{card}\,\kappa^{-1}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b}! = \prod_{k=0}^{n} b_k!$$

where $b_k = \mathrm{card}\,\{i \in \{1, \ldots, j\} \mid \ z_i = k\}$*. In particular,* κ *is surjective.*

Proof. As $s_p(y_i) = a_{\sigma^{-1}(i)}$, that is $s_p(y_{\sigma(i)}) = a_i$, the multi-integer $\kappa(\sigma, \lambda)$ indeed belongs to $\mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p}$; besides, since *ex hypothesi* $y_1 + y_2 + \cdots + y_j = n$, the sum $y_{\sigma(1)} + y_{\sigma(2)} + \cdots + y_{\sigma(j)}$ is equal to n, so that κ defines a map from the set $\coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$ to the set $\mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p,n}$.

For $\boldsymbol{z} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p,n}$, we write $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_j)$; there obviously exists a permutation σ such that the sequence $\sigma\boldsymbol{z}$ is non-increasing. Set then $y_i = z_{\sigma^{-1}(i)}$ for each index $i \in \{1, \ldots, j\}$. It is readily verified that $\lambda = (y_1, \ldots, y_j)$ belongs to the set $Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$. Thus (σ, λ) belongs to the set $\coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$ and its image by κ is $\boldsymbol{z}$. This shows already that the map κ is surjective.

Suppose now that two elements (σ, λ) and (σ', λ') in $\coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$ have the same image $\boldsymbol{z}$ by κ. Since λ and λ' are non-increasing, necessarily $\lambda = \lambda'$. From this we infer that $\sigma\sigma'^{-1}$ belongs to the stabilizer under the action of the group S_j of the multi-integer $\boldsymbol{z}$. Therefore the set of antecedents of $\boldsymbol{z}$ by the map κ is in bijection with the stabilizer of $\boldsymbol{z}$. Thus the result.

Chapitre 4

The binomial coalgebra

In the present Chapter, our objective is to describe the coalgebra endomorphisms of the binomial coalgebra in prime characteristic. In the sequel we intend, at least in the case where R is a reduced ring, to determine the group-like elements of the binomial coalgebra and to study its coradical filtration. This enables us to show that a coalgebra map of $\mathcal{B}_1$ is uniquely determined by some of its components with respect to the grading of the binomial coalgebra by the submodules $\mathcal{P}_a$, $a \in \mathbb{N}$.

4.1 The degree filtration

The definition 1.0.1 of the binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ has been given in Chapter 1. This coalgebra $\mathcal{B}_1$ can be provided with a filtered structure. Indeed by setting $C_0 = Re_0$, $C_1 = Re_0 + Re_1$, $\ldots$, $C_j = Re_0 + Re_1 + \cdots + Re_j$, $\ldots$we get a non-decreasing filtration of the R-module $\mathcal{B}_1$ by sub-coalgebras C_n, with $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \mathcal{B}_1$. It is clear that $\Delta(C_n) \subseteq \oplus_{k=0}^{n} C_k \otimes C_{n-k}$, so that $\mathcal{B}_1$ is a filtered R-coalgebra in the sense of Sweedler [50, Section 11.1, page 226] ; this allows one to define the degree $\deg(x)$ of an element x of $\mathcal{B}_1$ by setting

$$\deg(x) = \min\{n \in \mathbb{N}; x \in C_n\}. \tag{4.1}$$

4.2 The dual algebra

As in Chapter 1, we denote by HR the Hurwitz algebra provided with its natural topology, and the dual algebra ${\mathcal{B}_1}^*$ of the coalgebra $\mathcal{B}_1$ is provided with the weak topology. Recall from Chapter 1 that, for any $x \in \mathcal{B}_1$, the map c_x from $\mathcal{B}_1^*$ to R is defined by $c_x(y) = y(x)$. As Keigher and Pritchard, for every non-negative integer m, we denote by $x^{[m]}$ the element of $R^{\mathbb{N}}$ defined by $x^{[m]}(n) = 0$, if $m \neq n$ and $x^{[m]}(m) = 1$.

The bilinear pairing (1.2) induces the R-linear map Φ from HR to $\mathcal{B}_1^*$ defined by $\Phi(h)(x) = \langle h, x\rangle$, for all $h \in HR$ and $x \in \mathcal{B}_1$.

4.2.1 Proof of Lemma 1.0.2

Consider the map Ω from $\mathcal{B}_1^*$ to HR sending the R-linear form x^* to $(x^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. It is easy to verify that Φ and Ω are bijections reciprocal to each other, and that they are algebra morphisms. So we have only to prove that Ω and Φ are continuous. To prove the continuity of Ω, it is sufficient, by definition of the natural topology of HR, to prove that the maps $\pi_n \circ \Omega : {\mathcal{B}_1}^* \longrightarrow R$ are continuous for all non-negative integers n. Now $\pi_n \circ \Omega = c_{e_n}$ is continuous by the definition of the weak topology. Similarly, in order to show the continuity of Φ, it is sufficient to prove that the map $c_x \circ \Phi$ from HR to R is continuous for every element x in $\mathcal{B}_1$. Such an element x is in C_n for some $n \in \mathbb{N}$, so that $c_x \circ \Phi(h)$ depends upon the only $\pi_k(h)$, $0 \le k \le n$. Thus $c_x \circ \Phi$ is a locally constant map, hence continuous on HR. This ends the proof.

4.2.2 Proof of Lemma 1.0.3

By Lemma 1.0.2, we can think of the linear adjoint of an R-linear endomorphism T of $\mathcal{B}_1$ as the map $T^* : HR \longrightarrow HR$, such that $\langle T^*(h), x\rangle = \langle h, T(x)\rangle$, for all elements $h \in HR$ and $x \in \mathcal{B}_1$. Such an adjoint T^* is continuous : indeed it suffices by the definition of the natural topology to verify that the map $\pi_n \circ T^*$ is continuous for each non-negative integer n ; by means of the definition of T^*, this map sends every $h \in HR$ to $\langle h, T(e_n)\rangle$; thus $\pi_n \circ T^* = c_{T(e_n)} \circ \Phi$ is locally constant hence continuous. It is known that the adjoint of a coalgebra endomorphism is an algebra endomorphism [50, Proposition 1.4.1, page 14]. The injectivity of the map sending any R-linear endomorphism of $\mathcal{B}_1$ to its adjoint is a direct consequence of the freeness of the R-module $\mathcal{B}_1$.

It remains to prove that every continuous algebra endomorphism $\mathfrak{T}$ of HR is the adjoint of a coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$. A key observation, immediate since R is discrete, is that any R-linear continuous form $\mathfrak{f}$ on HR is locally constant. Thus such a linear form $\mathfrak{f}$ vanishes on the subset $H_nR = \{h \in HR \mid \forall k \le n,\ \pi_k(h) = 0\}$, for some non-negative integer n. Therefore the form $\mathfrak{f}$ can be factorized through the quotient HR/H_nR, which is a free R-module of finite type. We infer that, for any continuous R-linear map $\mathfrak{f}$ on HR, there exists an element $x \in \mathcal{B}_1$ such that $\mathfrak{f}(h) = \langle h, x\rangle$, for every $h \in HR$; further x is unique since it is clear from (1.2) that, if $\langle h, x\rangle = 0$ for every $h \in HR$ then $x = 0$.

Now let $\mathfrak{T}$ be a continuous algebra endomorphism of HR. For a given $x \in \mathcal{B}_1$, the map $c_x \circ \Phi \circ \mathfrak{T}$ is an R-linear form on HR that is continuous as a composition of continuous maps. Thus there exists a unique element $T(x)$ in $\mathcal{B}_1$ such that $\langle \mathfrak{T}(h), x\rangle = c_x \circ \Phi \circ \mathfrak{T}(h) = \langle h, T(x)\rangle$. By the uniqueness of $T(x)$ for a given x, it is readily verified that T is an R-linear map from $\mathcal{B}_1$ to itself, such that $T^* = \mathfrak{T}$. Since $\mathfrak{T}(1) = 1$ we have, for every element x of $\mathcal{B}_1$, the equality $\varepsilon(x) = \langle 1, x\rangle = \langle 1, T(x)\rangle = (\varepsilon \circ T)(x)$. This verifies $\varepsilon \circ T = \varepsilon$.

In order to show that T is a coalgebra map, it remains to prove the equality

$\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \Delta$. We observe that it is sufficient to verify for every pair (i, j) of non-negative integers the equality

$$\big(\Phi(x^{[i]}) \otimes \Phi(x^{[j]})\big) \circ \Delta \circ T = \big(\Phi(x^{[i]}) \otimes \Phi(x^{[j]})\big) \circ (T \otimes T) \circ \Delta. \tag{4.2}$$

This follows from the interpretation of the R-linear forms $\Phi(x^{[i]}) \otimes \Phi(x^{[j]})$ as coordinate linear forms associated to the basis $(e_m \otimes e_n)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ of $\mathcal{B}_1 \otimes_R \mathcal{B}_1$ (indeed we have $\langle x^{[i]}, e_m\rangle = 0$ if $i \neq m$ and $\langle x^{[i]}, e_i\rangle = 1$). We also observe that the adjunction property between T and $\mathfrak{T}$ can be expressed by the identity

$$\forall h \in HR, \quad \Phi(h) \circ T = \Phi(\mathfrak{T}(h))\ . \tag{4.3}$$

Then, by using the definition of multiplication in the dual algebra $\mathcal{B}_1^*$, the fact that Φ and $\mathfrak{T}$ are algebra morphisms, and the identity (4.3), we find

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(x^{[i]}) \otimes \Phi(x^{[j]})\big) \circ \Delta \circ T &= \big(\Phi(x^{[i]})\Phi(x^{[j]})\big) \circ T \\
&= (\Phi \circ \mathfrak{T})(x^{[i]}x^{[j]}) \\
&= \big(\Phi(x^{[i]}) \circ T\big)\big(\Phi(x^{[j]}) \circ T\big) \\
&= \big(\Phi(x^{[i]}) \otimes \Phi(x^{[j]})\big) \circ (T \otimes T) \circ \Delta\ ,
\end{aligned}$$

which shows formula (4.2) and completes the proof of Lemma 1.0.3.

4.3 Group-like elements

Recall the definition of *group-like* elements of a coalgebra as given in [50, page 57].

Definition 4.3.1 *We call x a group-like element of a R-coalgebra (C, Δ, ε), when x is an element of C satisfying the relation*

$$\Delta(x) = x \otimes x.$$

Proposition 4.3.1 *Let R be a reduced ring.The group-like elements of the binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ are exactly those of the form re_0, where r is an idempotent of R.*

Proof. It is clear that elements of $\mathcal{B}_1$ of the form re_0, with $r^2 = r$, are group-like. Examine the reciprocal : let $x = \sum_{j=0}^{N} r_j e_j$ be a group-like with $r_N \neq 0$, let us show that $N = 0$ and $r_0^2 = r_0$. As x is group-like, the equality $\Delta(x) = x \otimes x$ is true. On the one hand we can compute

$$\Delta(x) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{j} r_j \binom{j}{i} e_i \otimes e_{j-i}\ ,$$

and on the other hand

$$x \otimes x = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} r_i r_j e_i \otimes e_j.$$

By identification, we find that for each ordered pair (i, j) of integers, such that $i + j \leq N$, the equality

$$r_i r_j = r_{i+j} \binom{i+j}{i}$$

is true, and that if $i + j > N$ then $r_i r_j = 0$. For $i = j = 0$, we see that $r_0^2 = r_0$ and consequently r_0 is idempotent. When $N \neq 0$, by putting $i = j = N$, this gives $r_N^2 = 0$, which inevitably implies that r_N is zero because R is a reduced ring. Hence the result.

Note that, for every element r of R, the element $e_0 + re_1$ is group-like if and only if $r^2 = 0$. Thus Proposition 4.3.1 is no longer valid when R is not reduced.

4.4 The coradical filtration

Definition 4.4.1 *We define by induction a sequence $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of submodules of $\mathcal{B}_1$ by setting $E_0 = Re_0$ and, for every integer $k \geq 1$*

$$E_k = ker((\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0) \circ \Delta)$$

where, for each non-negative integer j, ϖ_j is the canonical surjection from $\mathcal{B}_1$ to $\mathcal{B}_1/E_j$.

In the case where R is a field, E_k is the $(k+1) - th$ power of E_0 for the "wedge" operation defined in [50, page 179]. Hence $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is the coradical filtration defined by [50, page 185].

As a first step in our investigation of the coalgebra $\mathcal{B}_1$, we have to determine the submodules E_k. This will be made under the supplementary assumption that R has a prime characteristic.

4.5 The case of prime characteristic

Let p be a prime number. In the case where R is a ring of characteristic p, by the definition of $\prec$ (Definition 2.2.1), the comultiplication Δ can be expressed by

$$\Delta(e_n) \quad = \quad \sum_{k \prec n} \binom{n}{k} e_k \otimes e_{n-k}. \tag{4.4}$$

Recall from Chapter 1 that, for a non-negative integer j, $\mathbb{N}_{j,p}$ is the set of non-negative integers n, the sum of base p digits of which is equal to j, and

$\mathcal{P}_j$ is the R-submodule of $\mathcal{B}_1$ spanned by the subset $\{e_n; n \in \mathbb{N}_{j,p}\}$. For any non-negative integer k, we define F_k as the R-submodule of $\mathcal{B}_1$ spanned by the elements e_n, where $n \notin \mathbb{N}_{0,p} \cup \mathbb{N}_{1,p} \cup \cdots \cup \mathbb{N}_{k,p}$.

The data of $(\mathcal{P}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is a grading of type $\mathbb{N}$ on $\mathcal{B}_1$. We shall show that the filtration canonically associated with this grading is nothing but the coradical filtration. In other words, we have the following.

Proposition 4.5.1 *If R is a ring of characteristic the prime number p, then*

$$E_k = \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j \ .$$

Proof. We proceed by induction on the non-negative integer k. When $k = 0$, it is obvious that $\mathcal{P}_0 = Re_0 = E_0$. Let us suppose that $E_{k-1} = \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j$ and infer from this that $E_k = \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j$.

To prove the inclusion $E_k \supseteq \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j$, it is sufficient to show that e_m belongs to E_k as soon as $s_p(m) \leq k$. Accordingly we fix a non-negative integer m such that $s_p(m) \leq k$; let us show that $\Delta(e_m)$ belongs to the kernel of $\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0$. By formula (4.4), we have

$$(\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0)\Delta(e_m) \ = \ \sum_{l \prec m} \binom{m}{l} \varpi_{k-1}(e_l) \otimes \varpi_0(e_{m-l}).$$

By our induction hypothesis, it is known that $\varpi_{k-1}(e_l) = 0$ when $s_p(l) < k$. Besides we have $\varpi_0(e_0) = 0$. So we can write

$$(\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0)\Delta(e_m) \ = \ \sum_{l \prec m, l \neq m, s_p(l) \geq k} \binom{m}{l} \varpi_{k-1}(e_l) \otimes \varpi_0(e_{m-l}).$$

This last sum is restricted to indices l such that $s_p(l) \geq k$. On the other hand *ex hypothesi* $s_p(m) \leq k$, hence $s_p(l) \geq s_p(m)$. Then Lemma 2.2.5 implies that $l \not\prec m$, so that $\binom{m}{l} \equiv 0 \pmod{p}$. Therefore $(\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0)\Delta(e_m) = 0$, and this means that e_m indeed belongs to the kernel of $(\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0) \circ \Delta$, as was to be shown.

In order to show the reciprocal inclusion $E_k \subseteq \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j$, let us fix an element x in E_k. As $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a basis of the R-module $\mathcal{B}_1$, we can write $x = \sum_{n=0}^{N} r_n e_n$, where $r_n \in R$ for each integer $n \in \{0, \ldots, N\}$, so that

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{N} r_n \sum_{l \prec n} \binom{n}{l} e_l \otimes e_{n-l}. \tag{4.5}$$

Applying the map $(\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0)$ to the two sides of the preceding equality (4.5) and using the fact that $x \in E_k$, we obtain

$$0 = (\varpi_{k-1} \otimes \varpi_0)\Delta(x) = \sum_{n=0}^{N} r_n \sum_{l \prec n, l \neq n, s_p(l) \geq k} \binom{n}{l} \varpi_{k-1}(e_l) \otimes \varpi_0(e_{n-l}). \tag{4.6}$$

By our induction hypothesis $E_{k-1} = \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j$, we know that the submodules E_{k-1} and F_{k-1} of $\mathcal{B}_1$ are complementary. Thus the restriction of ϖ_{k-1} to F_{k-1} is an isomorphism from F_{k-1} on $\mathcal{B}_1/E_{k-1}$. Then we can define a morphism

$$\vartheta_{k-1} : \mathcal{B}_1/E_{k-1} \longrightarrow \mathcal{B}_1$$

as the composition of the natural injection from F_{k-1} to $\mathcal{B}_1$ with $(\varpi_{k-1} \mid_{F_{k-1}})^{-1}$. In the same way, we define $\vartheta_0 : \mathcal{B}_1/E_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1$ as the composition of the natural injection from F_0 to $\mathcal{B}_1$ with $(\varpi_0 \mid_{F_0})^{-1}$. Then we can apply $\vartheta_{k-1} \otimes \vartheta_0$ to the two sides of the equality (4.6), getting

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{l \prec n, s_p(l) \geq k, l \neq n} \binom{n}{l} r_n e_l \otimes e_{n-l} = 0 \ .$$

As the subset $\{e_l \otimes e_m : (l, m) \in \mathbb{N}^2\}$ of $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ is R-linearly independent, we see that, for every $n \in \{0, \ldots, N\}$ and for every $l \prec n$ such that $l \neq n$, the relation $s_p(l) \geq k$ implies that $\binom{n}{l} r_n = 0$. Let $n \in \{0, \ldots, N\}$ be such that $s_p(n) > k > 0$; Lemma 2.2.6 shows the existence of a non-negative integer l with $l \prec n$ and $s_p(l) = s_p(n) - 1$, so that $\binom{n}{l}$ is coprime to p, and therefore $r_n = 0$, for each n such that $s_p(n) > k$. Thus x indeed belongs to $\bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j$.

Corollary 4.5.2 *If R is a ring of characteristic the prime number p, then the R-module E_k is a direct summand of $\mathcal{B}_1$.*

Proof. The submodule F_k is complementary to E_k according to Proposition 4.5.1.

Lemma 4.5.3 *If R is a ring of characteristic the prime number p, then for each integer $k \geq 1$, we have*

$$E_k = \Delta^{-1}(E_{k-1} \otimes \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1 \otimes E_0).$$

Proof. This is a straightforward consequence of the fact that E_{k-1} and E_0 are direct summands of $\mathcal{B}_1$ by Corollary 4.5.2.

Proposition 4.5.4 *Let R be a reduced ring of characteristic equal to p. Then the submodule E_k is stable by every endomorphism ϕ of the coalgebra $\mathcal{B}_1$.*

Proof. Let ϕ be an endomorphism of the coalgebra $\mathcal{B}_1$. Let us prove by induction on k that $\phi(E_k) \subseteq E_k$. For $k = 0$, by Proposition 4.3.1 we have $\phi(e_0) = re_0$, with r an idempotent of R, so that $\phi(E_0) \subseteq E_0$. Let us suppose now that $\phi(E_{k-1}) \subseteq E_{k-1}$ and let x be an element in E_k. By Lemma 4.5.3, we have

$$\Delta \circ \phi(x) = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta(x) \in (\phi \otimes \phi)(E_{k-1} \otimes \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1 \otimes E_0) \; ;$$

hence the desired result $\phi(x) \in E_k$ by our induction hypothesis.

4.6 The components of the comultiplication

Let ρ be the mapping from $\mathbb{N}^2$ to $\mathbb{N}$ such that $\rho(a, b) = a + b$.

Lemma 4.6.1 *If the ground ring R is a ring of prime characteristic p and the R-module $\mathcal{B}_1$ is endowed with its grading by the submodules $\mathcal{P}_j$, $j \in \mathbb{N}$, then the comultiplication Δ is ρ-graded from $\mathcal{B}_1$ to $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$.*

Proof. By formula (4.4), for each $n \in \mathbb{N}_{j,p}$, $\Delta(e_n)$ is the sum of the terms $\binom{n}{k} e_k \otimes e_{n-k}$, for all $k \prec n$. But $k \prec n$ if and only if $s_p(n) = s_p(k) + s_p(n-k)$ (see Corollary 2.2.4), so that we have $\Delta(\mathcal{P}_j) \subseteq \bigoplus_{\rho(a,b)=j} \mathcal{P}_a \otimes \mathcal{P}_b$.

From Lemma 4.6.1 and Proposition 4.5.1 follows the interesting fact that E_k is a sub-coalgebra of $\mathcal{B}_1$, in the sense that $\Delta(E_k) \subseteq E_k \otimes E_k$. (Observe that, since E_k is a free R-module, $E_k \otimes E_k$ is identified with a submodule of $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$.)

According to formula (2.4) in Chapter 2, we deduce from Lemma 4.6.1 the expression

$$\Delta = \sum_{a,b \geq 0} (i_a \otimes i_b) \circ \Delta_{a,b} \circ \mathrm{pr}^{a+b} \; ,$$

where

$$\Delta_{a,b} = (\mathrm{pr}^a \otimes \mathrm{pr}^b) \circ \Delta \circ i_{a+b}.$$

Lemma 4.6.2 *If the ground ring R is a ring of prime characteristic p, and if $\mathcal{B}_1$ is provided with its grading by the submodules $\mathcal{P}_a$, with $a \in \mathbb{N}$, then the map $\Delta_{a,b}$ from $\mathcal{P}_{a+b}$ to $\mathcal{P}_a \otimes \mathcal{P}_b$ is injective for every $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.*

Proof. Let $x \in \mathcal{P}_{a+b}$ such that $\Delta_{a,b}(x) = 0$. As $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_{a+b,p}}$ is a basis of the submodule $\mathcal{P}_{a+b}$ of $\mathcal{B}_1$, we can find a finite subset F of $\mathbb{N}_{a+b,p}$ and a list $(r_n)_{n\in F}$ of elements in R, such that $x = \sum_{n\in F} r_n e_n$. Let $D \subseteq \mathbb{N}^2$ the finite set of all ordered pairs (n, j) of non-negative integers, such that $n \in F, j \in \mathbb{N}_{a,p}$ and $j \prec n$. By formula (4.4), we write

$$0 = \sum_{(n,j)\in D} r_n \binom{n}{j} e_j \otimes e_{n-j} \; .$$

The family $(e_j \otimes e_{n-j})_{(n,j)\in D}$ is R-linear independent as a subfamily of the basis $(e_j \otimes e_k)_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ of $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$. So we deduce that $r_n \binom{n}{j} = 0$, for all (n, j) belonging to D. If n is a fixed element in F, Lemma 3.1.2 shows the existence of a non-negative integer $j \in \mathbb{N}_{a,p}$, such that (n, j) belongs to D, i.e. such that the binomial coefficient $\binom{n}{j}$ is invertible modulo the prime number p. For such an integer j, the relation $r_n \binom{n}{j} = 0$ implies $r_n = 0$. We have shown that $r_n = 0$, for all $n \in F$, and accordingly $x = 0$. In this way, we see that $\Delta_{a,b}$ is an injective map.

4.7 The components of a coalgebra endomorphism

As before, we provide the R-module $\mathcal{B}_1$ with its grading by the submodules $\mathcal{P}_a$, $a \in \mathbb{N}$. As in Chapter 2, for each endomorphism T of the R-module $\mathcal{B}_1$, letting T_a^b denote the (a, b)-component of T (see Definition 2.1.2), we have

$$T = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} i_b \circ T_a^b \circ \mathrm{pr}^a.$$

Proposition 4.7.1 *Suppose that R is of characteristic p. Let T be an endomorphism of the R-module $\mathcal{B}_1$. The identity $\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \Delta$ is true if and only if, for all non-negative integers l, m, δ, we have the following equality*

$$\Delta_{l,m} \circ T_\delta^{l+m} = \sum_{a+b=\delta} (T_a^l \otimes T_b^m) \circ \Delta_{a,b}.$$

Proof. Firstly, we remark that the data of the submodules $\mathcal{P}_a$ provide the R-module $\mathcal{B}_1$ with a grading of type $\mathbb{N}$ and consequently $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ with a grading of type $\mathbb{N}^2$. Let us compute the $(\delta, (l, m))$-component of $\Delta \circ T$. By Proposition 2.1.2, for δ and (l, m) fixed respectively in $\mathbb{N}$ and $\mathbb{N}^2$, we have

$$(\Delta \circ T)_\delta^{(l,m)} \;=\; \sum_{\beta\in\mathbb{N}} \Delta_\beta^{(l,m)} \circ T_\delta^\beta \; . \tag{4.7}$$

As Δ is ρ-graded (Lemma 4.6.1), we have $\Delta_{\beta}^{(l,m)} = 0$ whenever $\beta \neq l+m$. Therefore the sum on the right-hand side of formula (4.7) is restricted to a single term with $\beta = l+m$, hence

$$(\Delta \circ T)_{\delta}^{(l,m)} = \Delta_{l+m}^{(l,m)} \circ T_{\delta}^{l+m} .$$

But, as we let $\Delta_{l,m}$ denote $\Delta_{l+m}^{(l,m)}$, the $(\delta,(l,m))$-component of $\Delta \circ T$ is

$$(\Delta \circ T)_{\delta}^{(l,m)} = \Delta_{l,m} \circ T_{\delta}^{l+m} .$$

Now let us compute the $(\delta,(l,m))$-component of $(T \otimes T) \circ \Delta$. By Proposition 2.1.2, for δ and (l,m) fixed respectively in $\mathbb{N}$ and $\mathbb{N}^2$, we have

$$[(T \otimes T) \circ \Delta]_{\delta}^{(l,m)} = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} (T \otimes T)_{(a,b)}^{(l,m)} \circ \Delta_{\delta}^{(a,b)} . \tag{4.8}$$

As $\mathcal{B}_1$ is free as a R-module, it is flat, so that Proposition 2.1.3 allows us to write

$$(T \otimes T)_{(a,b)}^{(l,m)} = T_a^l \otimes T_b^m .$$

Substituting this equality in formula (4.8), we get

$$[(T \otimes T) \circ \Delta]_{\delta}^{(l,m)} = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} (T_a^l \otimes T_b^m) \circ \Delta_{\delta}^{(a,b)} . \tag{4.9}$$

As Δ is ρ-graded, we have $\Delta_{\delta}^{(a,b)} = 0$ if $a+b \neq \delta$, and therefore the sum on the right-hand side of formula (4.9) is restricted to a sum of terms such that $a+b=\delta$; hence the $(\delta,(l,m))$-component of $(T \otimes T) \circ \Delta$ is

$$[(T \otimes T) \circ \Delta]_{\delta}^{(l,m)} = \sum_{a+b=\delta} (T_a^l \otimes T_b^m) \circ \Delta_{a,b} .$$

Lastly, Remark 2.1.1 gives the required equivalence.

Lemma 4.7.2 *Suppose that R is a reduced ring of characteristic p. Let ϕ be an endomorphism of the R-coalgebra $\mathcal{B}_1$. The $(a,0)$-component and the $(0,b)$-component of ϕ are zero for all positive integers a and b. The $(0,0)$-component of ϕ is simply $I_{\mathcal{P}_0}$.*

Proof. The map ϕ is an endomorphism of the R-coalgebra $\mathcal{B}_1$, so that $\varepsilon \circ \phi = \varepsilon$. Provide R with its unique grading of type $\{0\}$. For a a non-negative integer, let ε_a denote the $(a,0)$-component of ε. Let us compute the $(a,0)$-component of $\varepsilon \circ \phi$. By Proposition 2.1.2, we have

$$(\varepsilon \circ \phi)_a^0 = \sum_{b\in\mathbb{N}} \varepsilon_b \circ \phi_a^b . \tag{4.10}$$

Now $\varepsilon_a = 0$ when $a \neq 0$. Therefore the sum on the right-hand side of equality (4.10) is restricted to a single term, hence

$$(\varepsilon \circ \phi)_a^0 = \varepsilon_0 \circ \phi_a^0 .$$

By Remark 2.1.1, we can write

$$\varepsilon_a \;=\; \varepsilon_0 \circ \phi_a^0. \tag{4.11}$$

Moreover, it can be observed that ε_0 is the linear map from the rank 1 free R-module $\mathcal{P}_0$ to R that maps $e_0 \in \mathcal{P}_0$ to $1 \in R$. Therefore ε_0 is bijective. We are in one of the following cases :
If $a = 0$, the equality (4.11) gives $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \circ \phi_0^0$. As ε_0 is bijective, we deduce $\phi_0^0 = I_{\mathcal{P}_0}$.
If $a \neq 0$, the equality (4.11) becomes $0 = \varepsilon_0 \circ \phi_a^0$, so $\phi_a^0 = 0$, for $a > 0$.
Lastly, Proposition 4.5.4 shows that for $a > b$ we have $\phi_b^a = 0$. Hence $\phi_0^a = 0$, for $a > 0$.

4.8 Characterization of coalgebra endomorphisms

Recall from Chapter 1 the definition of the map Θ from the set of R-coalgebra endomorphisms of $\mathcal{B}_1$ to the product $\prod_{\ell \geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$, such that

$$\Theta(\phi) \;=\; (\phi_\ell^1)_{\ell \geq 1}. \tag{4.12}$$

In the proof of Theorem 1.0.1, a first step is to show the following theorem concerning the injectivity of Θ.

Theorem 4.8.1 *If R is a reduced ring of characteristic p, then the map Θ, defined by (4.12), is injective.*

Proof. Let ϕ and ϕ' be two endomorphisms of the R-coalgebra $\mathcal{B}_1$, such that $\Theta(\phi) = \Theta(\phi')$. We only have to verify that the (a, b)-components ϕ_b^a and ${\phi'}_b^a$ agree for all non-negative integers a and b. We prove this by induction on a. Lemma 4.7.2 shows that this is true for $a = 0$. Fix now a non-negative integer a and suppose that $\phi_b^a = {\phi'}_b^a$ for every $b \geq 0$; let us show that $\phi_b^{a+1} = {\phi'}_b^{a+1}$, for all $b \geq 0$. By Proposition 4.7.1, we have

$$\begin{aligned}
\Delta_{a,1} \circ \phi_b^{a+1} &= \sum_{\alpha+\beta=b} (\phi_\alpha^a \otimes \phi_\beta^1) \circ \Delta_{\alpha,\beta} \\
&= \sum_{\alpha+\beta=b} ({\phi'}_\alpha^a \otimes {\phi'}_\beta^1) \circ \Delta_{\alpha,\beta} \\
&= \Delta_{a,1} \circ {\phi'}_b^{a+1}.
\end{aligned}$$

Now, by Lemma 4.6.2, the map $\Delta_{a,1}$ is injective, thus $\phi_b^{a+1} = {\phi'}_b^{a+1}$ for each non-negative integer b, as required.

Theorem 4.8.1 shows that ϕ is completely characterized by $\Theta(\phi)$. In order to show Theorem 1.0.1, it remains to prove that Θ is surjective. We need some preliminary results about coalgebras and particularly about the diagonal maps of higher order. This will be examined in the next Chapter.

Chapitre 5

Multi-integers and coalgebras

The main tool in our proof will be the diagonal map $\Delta^{(j)}$ introduced in Chapter 1. We recall its definition.

Definition 5.0.1 *Let (C, Δ, ε) be a R-coalgebra and j a non-negative integer. The diagonal map of order j is the R-linear map $\Delta^{(j)}$ from C to $C^{\otimes j}$, defined by induction on j by setting $\Delta^{(0)}$ as the counit ε of C, $\Delta^{(1)} = I_C$ and $\Delta^{(j+1)} = (\Delta^{(j)} \otimes I_C) \circ \Delta$, for each non-negative integer $j \geq 1$.*

Throughout this Chapter, the ground ring R is supposed to be a reduced ring of characteristic p, and the coalgebra $\mathcal{B}_1$ is supposed to be provided with its grading of type $\mathbb{N}$ by the submodules $\mathcal{P}_a$, for $a \in \mathbb{N}$.

For every multi-integer $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_j)$ of length j, we denote by $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$ the R-module $\bigotimes_{i=1}^{j} \mathcal{P}_{a_i}$ (denoted by $T_{\boldsymbol{a}}(\mathcal{B}_1)$ in Chapter 2) so that we have ${\mathcal{B}_1}^{\otimes j} \simeq \bigoplus_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^j} \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$. For a multi-integer $\boldsymbol{a}$ of length j, we denote by $e_{\boldsymbol{a}}$ the tensor product $\bigotimes_{i=1}^{j} e_{a_i}$, by $i_{|\boldsymbol{a}|}$ the injection from $\mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}$ to $\mathcal{B}_1$, by $\mathrm{pr}^{\boldsymbol{a}} = \bigotimes_{i=1}^{j} \mathrm{pr}^{a_i}$ the projection from ${\mathcal{B}_1}^{\otimes j}$ to $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$. All these definitions make sense in the case of the unique multi-integer $\diamondsuit$ of length 0, if we agree to set $\mathcal{P}_\diamondsuit = R = \mathcal{B}_1^{\otimes 0}$, so that $e_\diamondsuit = 1$ and $\mathrm{pr}^\diamondsuit = I_R$.

5.1 The components of the diagonal map of order j

For any non-negative integer j, let ρ_j be the map from $\mathbb{N}^j$ to $\mathbb{N}$ that sends a multi-integer $\boldsymbol{a}$ of length j to the integer $|\boldsymbol{a}|$.

Lemma 5.1.1 *The map $\Delta^{(j)}$ from $\mathcal{B}_1$ to $\mathcal{B}_1^{\otimes j}$ is ρ_j-graded.*

Proof. This follows from Lemma 4.6.1 by induction on the non-negative integer j.

Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of length j. Let $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ denote the $(|\boldsymbol{a}|, \boldsymbol{a})$-component of $\Delta^{(j)}$:

$$\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{pr}^{\boldsymbol{a}} \circ \Delta^{(j)} \circ i_{|\boldsymbol{a}|} \ ;$$

the map $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ is an R-linear map from $\mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}$ to $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$. Notice that $\Delta^{(0)}_{\diamondsuit}$ is none other than the bijection ε_0 from $\mathcal{P}_0$ to R sending e_0 to 1.

Proposition 5.1.2 *Let $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ be two multi-integers of length respectively i and j, where i and j are non-negative integers. We have the formula*

$$\Delta^{(i+j)}_{\boldsymbol{bc}} = (\Delta^{(i)}_{\boldsymbol{b}} \otimes \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{c}}) \circ \Delta_{|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|} \ ,$$

where $\boldsymbol{bc}$ denotes the concatenation product of $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ defined by (2.5).

Proof. The coassociativity of Δ or the counit property of ε give the equality

$$\Delta^{(i+j)} = (\Delta^{(i)} \otimes \Delta^{(j)}) \circ \Delta \ .$$

Considering $(|\boldsymbol{bc}|, \boldsymbol{bc})$- components on both sides of the preceding equality, Proposition 2.1.2 implies

$$\Delta^{(i+j)}_{\boldsymbol{bc}} \ = \ \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2} (\Delta^{(i)} \otimes \Delta^{(j)})^{\boldsymbol{bc}}_{(\alpha,\beta)} \circ \Delta^{(\alpha,\beta)}_{|\boldsymbol{bc}|} \ . \tag{5.1}$$

Now Proposition 2.1.3 gives

$$(\Delta^{(i)} \otimes \Delta^{(j)})^{\boldsymbol{bc}}_{(\alpha,\beta)} = (\Delta^{(i)})^{\boldsymbol{b}}_{\alpha} \otimes (\Delta^{(j)})^{\boldsymbol{c}}_{\beta} \ ;$$

by Lemma 5.1.1, we have $(\Delta^{(i)})^{\boldsymbol{b}}_{\alpha} = 0$ if $\alpha \neq |\boldsymbol{b}|$ and $(\Delta^{(j)})^{\boldsymbol{c}}_{\beta} = 0$ if $\beta \neq |\boldsymbol{c}|$; moreover for $\alpha = |\boldsymbol{b}|$ and $\beta = |\boldsymbol{c}|$, we have

$$\begin{aligned}(\Delta^{(i)} \otimes \Delta^{(j)})^{\boldsymbol{bc}}_{(\alpha,\beta)} \ &= \ (\Delta^{(i)})^{\boldsymbol{b}}_{|\boldsymbol{b}|} \otimes (\Delta^{(j)})^{\boldsymbol{c}}_{|\boldsymbol{c}|} \\ &= \ \Delta^{(i)}_{\boldsymbol{b}} \otimes \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{c}}.\end{aligned}$$

Substituting this last expression in equality (5.1), we get

$$\Delta^{(i+j)}_{\boldsymbol{bc}} = (\Delta^{(i)}_{\boldsymbol{b}} \otimes \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{c}}) \circ \Delta^{|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|}_{|\boldsymbol{bc}|} \ ,$$

which is the required identity.

The following lemma makes the images by the map $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ of the elements of the basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_{|a|,p}}$ of $\mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}$ explicit.

Lemma 5.1.3 *Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of length $j \in \mathbb{N}$. For $n \in \mathbb{N}_{|\boldsymbol{a}|,p}$, we have*

$$\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}}(e_n) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=n, \boldsymbol{k}\in\mathbb{N}_{a,p}} \mathfrak{M}(\boldsymbol{k}) e_{\boldsymbol{k}} \ .$$

Proof. This is straightforward by induction on j, by means of Proposition 5.1.2 and Lemma 3.1.3.

5.2 A map linked to the diagonal map of order j

For a multi-integer $\boldsymbol{a}$ of positive length, recall the notation $Part_{\boldsymbol{a}}(n)$ introduced before Definition 3.2.1. We shall use the Faà di Bruno coefficient $((\lambda))$ attached to a partition λ by the formula (3.5).

Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of positive length j, n a positive integer and λ a partition element of $Part_{\boldsymbol{a}}(n)$. We let e_λ stand for the tensor product $e_{y_1} \otimes e_{y_2} \otimes \cdots \otimes e_{y_j} \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$, if λ is the partition $n = y_1 + \cdots + y_j$, with $y_1 \geq \cdots \geq y_j \geq 0$.

Definition 5.2.1 *Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of positive length j, such that $\boldsymbol{a} \neq 0^{\times j}$. We define the map $\Xi^{(j)}_{\boldsymbol{a}}$ of $\mathcal{P}_{|\boldsymbol{a}|}$ to $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$ such that, for $n \in \mathbb{N}_{|\boldsymbol{a}|,p}$,*

$$\Xi^{(j)}_{\boldsymbol{a}}(e_n) \quad = \sum_{\lambda \in Part_{\boldsymbol{a}}(n)} ((\lambda)) e_\lambda \, . \tag{5.2}$$

Definition 5.2.2 *Let σ belongs to the set S_j. We define the map $\tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}}$ from $\mathcal{P}_{\sigma\boldsymbol{a}}$ to $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$, which with an element $(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_j) \in P_{\sigma\boldsymbol{a}}$ associates the element $(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(j)}) \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$.*

Lemma 5.2.1 *Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer of length j such that $\boldsymbol{a} \neq 0^{\times j}$ and $\tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}}$ as in Definition 5.2.2. We have*

$$\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{a}} = \sum_{\sigma \in S_j} \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}} \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{a}}.$$

Proof. It suffices to verify that the two sides of the desired identity send e_n to the same element of $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}$, for every $n \in \mathbb{N}_{|\boldsymbol{a}|,p}$. We denote by X the set $\coprod_{\sigma \in S_j} Part_{\sigma\boldsymbol{a}}(n)$. By Definitions 5.2.1 and 5.2.2, we have, for any $n \in \mathbb{N}_{|\boldsymbol{a}|,p}$,

$$\sum_{\sigma \in S_j} \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}} \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{a}}(e_n) = \sum_{(\sigma,\lambda) \in X} ((\lambda)) \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}}(e_\lambda) \, .$$

A direct computation gives $\tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}}(e_\lambda) = e_{\kappa(\sigma,\lambda)}$, where κ is the map of Definition 3.2.1. From this we infer

$$\sum_{\sigma \in S_j} \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}} \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{a}}(e_n) = \sum_{\boldsymbol{z} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{a},p,n}} \sum_{(\sigma,\lambda) \in \kappa^{-1}(\boldsymbol{z})} ((\lambda)) e_{\boldsymbol{z}} \, .$$

By Lemma 5.1.3, it remains only to prove that $\sum_{(\sigma,\lambda) \in \kappa^{-1}(z)} ((\lambda)) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{z})$. Now, by (3.5), the Faà di Bruno coefficient $((\lambda))$ is the same for all $(\sigma, \lambda) \in \kappa^{-1}(\boldsymbol{z})$

and by Lemma 3.2.2 the cardinality of $\kappa^{-1}(\boldsymbol{z})$ is $\boldsymbol{b}!$, where $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_j)$ is the multi-integer such that $b_k = \mathrm{card}\{i \in \{1, \ldots, j\} \mid z_i = k\}$. Thus $\displaystyle\sum_{(\sigma,\lambda)\in\kappa^{-1}(\boldsymbol{z})} ((\lambda)) = \boldsymbol{b}!((\lambda)) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{z})$, hence the result.

Lemma 5.2.2 *Let $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ be two multi-integers, both of length j, and $\psi_1, \ldots, \psi_j$ be R-linear maps such that ψ_i maps $\mathcal{P}_{a_i}$ to $\mathcal{P}_{b_i}$. Then we have*

$$\left[\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_i\right] \circ \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{a}} = \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{b}} \circ \left[\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{\sigma^{-1}i}\right] .$$

Proof. The proof is direct.

5.3 The maps f_j and Tr_j

We set $f_0 = \varepsilon_0$. Given a positive integer j, let f_j denote the map from $\mathcal{P}_j$ to $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ defined by

$$f_j = (f_{j-1} \otimes I_{\mathcal{P}_1}) \circ \Delta_{j-1,1}.$$

We can identify f_1 with $I_{\mathcal{P}_1}$ by means of the canonical isomorphism of $R \otimes \mathcal{P}_1$ with $\mathcal{P}_1$.

Lemma 5.3.1 *The map f_j is injective.*

Proof. This follows easily by induction on j from the flatness of the R-module $\mathcal{P}_1$ and from Lemma 4.6.2.

Proposition 5.3.2 *The map f_j is equal to the $(j, 1^{\times j})$-component of the diagonal map of order j, where $1^{\times j} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^j$.*

Proof. We proceed by induction on the non-negative integer j. For $j = 0$, we have $f_0 = \varepsilon_0 = \Delta^{(0)}_{1^{\times 0}}$. Suppose now that $f_{j-1} = \Delta^{(j-1)}_{1^{\times(j-1)}}$ and let us prove that $f_j = \Delta^{(j)}_{1^{\times j}}$. By Proposition 5.1.2, we have by setting $\boldsymbol{b} = 1^{\times(j-1)}$ and $\boldsymbol{c} = 1^{\times 1}$, the equality

$$\Delta^{(j)}_{1^{\times j}} \quad = \quad (\Delta^{(j-1)}_{1^{\times(j-1)}} \otimes \Delta^{(1)}_{1^{\times 1}}) \circ \Delta_{j-1,1}. \tag{5.3}$$

But $f_{j-1} = \Delta^{(j-1)}_{1^{\times(j-1)}}$ (induction hypothesis) and $\Delta^{(1)}_{1^{\times 1}} = I_{\mathcal{P}_1}$, thus by substituting in equality (5.3), we have

$$\Delta^{(j)}_{1^{\times j}} = (f_{j-1} \otimes I_{\mathcal{P}_1}) \circ \Delta_{j-1,1} ,$$

which is simply f_j.

Let j be a positive integer and σ a permutation in S_j. We have already defined (Definition 5.2.2) the endomorphism $\tau_{\sigma^{-1},1^{\times j}}$ of $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ which to an element

$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_j)$, associates the element $(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(j)})$. The map Tr_j from $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ to $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ is then defined by $Tr_j = \sum_{\sigma \in S_j} \tau_{\sigma^{-1}, 1^{\times j}}$, that is

$$Tr_j \left(\bigotimes_{i=1}^{j} x_i \right) = \sum_{\sigma \in S_j} \bigotimes_{i=1}^{j} x_{\sigma(i)} \; .$$

Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer in $\mathbb{N}_{1^{\times j}, p}$. It is easily verified that

$$Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) = \sum_{\sigma \in S_j} e_{\sigma \boldsymbol{a}} \; .$$

On the other hand

$$\sum_{\sigma \in S_j} e_{\sigma \boldsymbol{a}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}} \sum_{\tau \in stab(\boldsymbol{a})} e_{\sigma \tau \boldsymbol{a}} \; ;$$

where $\mathcal{R}$ is a set of class representatives for the left cosets of $stab(\boldsymbol{a})$ in S_j. We deduce

$$Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}} \text{card } stab(\boldsymbol{a}) e_{\sigma \boldsymbol{a}} \; . \tag{5.4}$$

Lemma 5.3.3 *Let n be a non-negative integer such that $s_p(n) = j$ and $\boldsymbol{a} = \omega(n)$ the multi-integer defined by the formula (3.1). We have*

$$f_j(e_n) = Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) \; .$$

Proof. By Lemma 3.1.1, we have $|\boldsymbol{a}| = n$. By Proposition 5.3.2, $f_j(e_n) = \Delta^{(j)}_{1^{\times j}}(e_n)$ and Lemma 5.1.3 gives the equality

$$\Delta^{(j)}_{1^{\times j}}(e_n) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_{1^{\times j}, p, n}} \mathfrak{M}(\boldsymbol{k}) e_{\boldsymbol{k}} \; .$$

The set $\mathbb{N}_{1^{\times j}, p, n}$ can be divided in two mutually disjoint subsets : firstly the set of multi-integers where at least one element appears at least p times, and secondly the set of multi-integers where no element is repeated more than $p-1$ times. If $\boldsymbol{k}$ is an element of the first subset, then $\mathfrak{M}(\boldsymbol{k}) \equiv 0 \pmod{p}$ by Lemma 3.1.5 ; and if $\boldsymbol{k}$ is an element of the second subset, then it belongs to the orbit $S_j \boldsymbol{a}$ by the uniqueness of the base p representation of n. Since R is of characteristic p, we can accordingly write

$$f_j(e_n) = \sum_{\boldsymbol{k} \in S_j \boldsymbol{a}} \mathfrak{M}(\boldsymbol{k}) e_{\boldsymbol{k}} \; ;$$

Lemma 3.1.6 allows us to write

$$f_j(e_n) = \sum_{\boldsymbol{k} \in S_j \boldsymbol{a}} \text{card } stab(\boldsymbol{k}) e_{\boldsymbol{k}} \; ;$$

and since the order of the stabilizer is constant over the orbit of $\boldsymbol{a}$, the required result follows from formula (5.4).

Lemma 5.3.4 *Let $\boldsymbol{a}$ be a multi-integer in $\mathbb{N}_{1\times j,p}$. If an integer appears at least p times in $\boldsymbol{a}$, then $Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) = 0$.*

Proof. By hypothesis there are p components of $\boldsymbol{a}$ which have the same value. As $stab(\boldsymbol{a})$ contains the subgroup of S_j that permutes these p components amongst themselves, its order is divisible by p. The result now follows from the formula (5.4).

Lemma 5.3.5 *For each positive integer j, the submodules $Im(f_j)$ and $Im(Tr_j)$ of $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ are equal.*

Proof. As $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_{j,p}}$ is a basis for the R-module $\mathcal{P}_j$, the submodule $Im(f_j)$ is spanned by the elements $f_j(e_n)$, where n runs over $\mathbb{N}_{j,p}$. For $n \in \mathbb{N}_{j,p}$, the element $f_j(e_n)$ belongs to $Im(Tr_j)$ by Lemma 5.3.3. This shows the inclusion $Im(f_j) \subseteq Im(Tr_j)$.

Let us show the reciprocal inclusion. As $(e_{\boldsymbol{a}})_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}_{1\times j,p}}$ is a basis for the R-module $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$, the submodule $Im(Tr_j)$ is spanned by the elements $Tr_j(e_{\boldsymbol{a}})$, where $\boldsymbol{a}$ runs over $\mathbb{N}_{1\times j,p}$. Fix $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}_{1\times j,p}$. Either at least one integer appears at least p times among the components of $\boldsymbol{a}$, and then $Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) = 0$ by Lemma 5.3.4, or any integer appears at most $p-1$ times in the multi-integer $\boldsymbol{a}$. In this case, by the uniqueness of the base p representation of the integer $n = |\boldsymbol{a}|$, there exists $\tau \in S_j$ such that $\boldsymbol{a} = \tau(\omega(n))$, where ω is the function defined by the formula (3.1). As $s_p(n) = j$, Lemma 5.3.3 then implies that $Tr_j(e_{\boldsymbol{a}}) = f_j(e_n) \in Im(f_j)$.

5.4 Proof of Theorem 1.0.1

Let $(\psi_\ell)_{\ell\geq 1}$ be an element in the set $\prod_{\ell\geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$. We write $\psi_0 = 0$ for the sake of convenience. Let δ and j be two non-negative integers. We define a map $h_{\delta,j}$ from $\mathcal{P}_\delta$ to $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ by

$$h_{\delta,j} = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^j, |\boldsymbol{b}|=\delta} \left[\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{b_i}\right] \circ \Delta_{\boldsymbol{b}}^{(j)}. \tag{5.5}$$

In particular we remark that $h_{0,0} = \varepsilon_0$, $h_{\delta,0} = 0$ for $\delta > 0$, $h_{0,j} = 0$ for $j > 0$ and $h_{\delta,1} = \psi_\delta$.

We look for an endomorphism ϕ of the R-coalgebra $\mathcal{B}_1$, such that $\phi_\ell^1 = \psi_\ell$ for each positive integer ℓ. By formula (2.2), it is sufficient to define its components ϕ_a^b. As explained in Chapter 1, for two non-negative integers δ and j, we are brought to look for an R-linear map ϕ_δ^j from $\mathcal{P}_\delta$ to $\mathcal{P}_j$ such that

$$f_j \circ \phi_\delta^j \quad = \quad h_{\delta,j}. \tag{5.6}$$

Lemma 5.4.1 *For any positive integer j and for any non-negative integer δ, the image $Im(h_{\delta,j})$ is a submodule of $Im(Tr_j)$.*

Proof. As $h_{0,j} = 0$, the result is obvious for $\delta = 0$. Accordingly we suppose $\delta > 0$. For each multi-integer $\boldsymbol{b}$ of length $j > 0$, such that $|\boldsymbol{b}| = \delta$, we then have $\boldsymbol{b} \neq 0^{\times j}$, so by Lemma 5.2.1 and formula (5.5), we obtain

$$h_{\delta,j} = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^j,|\boldsymbol{b}|=\delta} [\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{b_i}] \circ \sum_{\sigma\in S_j} \tau_{\sigma^{-1},\boldsymbol{b}} \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{b}} \ ;$$

then Lemma 5.2.2 gives

$$h_{\delta,j} = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^j,|\boldsymbol{b}|=\delta} \sum_{\sigma\in S_j} \tau_{\sigma^{-1},1^{\times j}} \circ [\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{(\sigma\boldsymbol{b})_i}] \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{b}} \ ;$$

inverting the summations, we get

$$h_{\delta,j} = \sum_{\sigma\in S_j} \tau_{\sigma^{-1},1^{\times j}} \circ \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^j,|\boldsymbol{b}|=\delta} [\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{(\sigma\boldsymbol{b})_i}] \circ \Xi^{(j)}_{\sigma\boldsymbol{b}} \ ;$$

writing $\boldsymbol{c} = \sigma\boldsymbol{b}$, we find

$$h_{\delta,j} = Tr_j \circ \left(\sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{N}^j,|\boldsymbol{c}|=\delta} [\bigotimes_{i=1}^{j} \psi_{c_i}] \circ \Xi^{(j)}_{\boldsymbol{c}} \right) \ .$$

The proof of the lemma is complete.

Lemma 5.4.2 *For each ordered pair $(\delta, j) \in \mathbb{N}^2$, the equation (5.6) has a unique solution $\phi^j_\delta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\delta, \mathcal{P}_j)$.*

Proof. The uniqueness of ϕ^j_δ follows from the injectivity of f_j (Lemma 5.3.1). If $j = 0$, there is an obvious solution $\phi^0_\delta = 0$ if $\delta > 0$, or $\phi^0_0 = I_{\mathcal{P}_0}$. Now suppose $j > 0$. By Lemmas 5.3.5 and 5.4.1, it is found that $Im(h_{\delta,j}) \subseteq Im(f_j)$. As the R-module $\mathcal{P}_\delta$ is free for any $\delta \in \mathbb{N}$, this suffices to establish the existence of a solution ϕ^j_δ.

Lemma 5.4.3 *Suppose given, for each $(\delta, j) \in \mathbb{N}^2$, an R-linear map ϕ^j_δ from $\mathcal{P}_\delta$ to $\mathcal{P}_j$, which satisfies the equation (5.6). Then the R-linear endomorphism ϕ of $\mathcal{B}_1$, with (δ, j)-component equal to ϕ^j_δ, is a coalgebra endomorphism.*

Proof. Since f_0 is bijective, the relation (5.6) proves that $\phi^0_\delta = 0$ if $\delta > 0$ and $\phi^0_0 = I_{\mathcal{P}_0}$ if $\delta = 0$. It results that $\varepsilon \circ \phi = \varepsilon$. It remains to prove the identity $\Delta \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta$. By Proposition 4.7.1, this is equivalent to proving that, for all non-negative integers l, m, δ, we have

$$\Delta_{l,m} \circ \phi^{l+m}_\delta \ = \ \sum_{a+b=\delta} (\phi^l_a \otimes \phi^m_b) \circ \Delta_{a,b}. \tag{5.7}$$

Now, by Lemma 5.3.1 the map f_j is injective and as the submodules $\mathcal{P}_j$ are flat, we infer that $f_l \otimes f_m$ is injective. Thus equality (5.7) is equivalent to the equality given by composition on the left with $\Delta^{(l)}_{1^{\times l}} \otimes \Delta^{(m)}_{1^{\times m}} = f_l \otimes f_m$. By Propositions 5.1.2 and 3.4.3, it only remains to prove

$$f_{l+m} \circ \phi^{l+m}_{\delta} = \sum_{a+b=\delta} (f_l \circ \phi^l_a) \otimes (f_m \circ \phi^m_b) \circ \Delta_{a,b} ;$$

and using formula (5.6), we see it is sufficient to prove that

$$h_{\delta,l+m} = \sum_{a+b=\delta} (h_{a,l} \otimes h_{b,m}) \circ \Delta_{a,b} .$$

We compute the right-hand sum

$$\sum_{a+b=\delta} (h_{a,l} \otimes h_{b,m}) \circ \Delta_{a,b} = \sum_{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^m, |\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=\delta} \left[(\bigotimes_{i=1}^{l} \psi_{\boldsymbol{b}_i}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{m} \psi_{\boldsymbol{c}_i}) \right] \circ [(\Delta^{(l)}_{\boldsymbol{b}} \otimes \Delta^{(m)}_{\boldsymbol{c}}) \circ \Delta_{|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|}].$$

But, by Proposition 5.1.2, $(\Delta^{(l)}_{\boldsymbol{b}} \otimes \Delta^{(m)}_{\boldsymbol{c}}) \circ \Delta_{|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|} = \Delta^{(l+m)}_{\boldsymbol{bc}}$, thus

$$\sum_{a+b=\delta} (h_{a,l} \otimes h_{b,m}) \circ \Delta_{a,b} = \sum_{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^m, |\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=\delta} (\bigotimes_{i=1}^{l} \psi_{\boldsymbol{b}_i}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{m} \psi_{\boldsymbol{c}_i}) \circ \Delta^{(l+m)}_{\boldsymbol{bc}} ;$$

and by setting $\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}$ with $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{l+m}$, the last equality becomes

$$\sum_{a+b=\delta} (h_{a,l} \otimes h_{b,m}) \circ \Delta_{a,b} = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{l+m}, |\boldsymbol{a}|=\delta} [\bigotimes_{i=1}^{l+m} \psi_{\boldsymbol{a}_i}] \circ \Delta^{(l+m)}_{\boldsymbol{a}} = h_{\delta,l+m} ;$$

hence the Lemma.

According to Lemma 5.4.2, for any choice of $(\psi_\ell)_{\ell \geq 1}$ in $\prod_{\ell \geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$, we can build maps ϕ^j_δ satisfying the equation (5.6), for all $(\delta, j) \in \mathbb{N}^2$. These maps can be interpreted as components of an R-linear endomorphism ϕ of $\mathcal{B}_1$. By Lemma 5.4.3 ϕ is a R-coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$, such that $\Theta(\phi) = (\psi_\ell)_{\ell \geq 1}$; so we conclude that Θ is surjective and this ends the proof of Theorem 1.0.1.

5.5 Automorphisms of the binomial coalgebra

Now we intend to prove Proposition 1.0.1.

Suppose that ϕ is a R-coalgebra automorphism of $\mathcal{B}_1$. Let us show that the component ϕ^1_1 is a bijection. Set $\varphi = \phi^{-1}$, so that φ is a R-coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$, such that $\phi \circ \varphi = I_{\mathcal{B}_1}$ and $\varphi \circ \phi = I_{\mathcal{B}_1}$. Let us compute the (a,b)-component of the compositions $\varphi\circ\phi$ and $\phi\circ\varphi$. By Proposition 2.1.2, we obtain

$$(\varphi\circ\phi)_a^b=\sum_{\beta\in\mathbb{N}}\varphi_\beta^b\circ\phi_a^\beta \qquad \text{and} \qquad (\phi\circ\varphi)_a^b=\sum_{\beta\in\mathbb{N}}\phi_\beta^b\circ\varphi_a^\beta\ .$$

As $\varphi\circ\phi=I_{\mathcal{B}_1}$ and $\phi\circ\varphi=I_{\mathcal{B}_1}$, using Proposition 4.5.4 and Lemma 4.7.2, we get

$$\varphi_1^1\circ\phi_1^1=I_{\mathcal{P}_1} \qquad \text{and} \qquad \phi_1^1\circ\varphi_1^1=I_{\mathcal{P}_1}\ ;$$

which means that ϕ_1^1 is an automorphism of $\mathcal{P}_1$.

Reciprocally, let ϕ be a R-coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$ such that ϕ_1^1 is an automorphism of $\mathcal{P}_1$; let us show that ϕ is bijective. We need the following lemma.

Lemma 5.5.1 *Let ϕ be an endomorphism of $\mathcal{B}_1$; if ϕ_1^1 is an automorphism of $\mathcal{P}_1$ then, for every non-negative integer j, ϕ_j^j is an automorphism of $\mathcal{P}_j$.*

Proof. By Lemma 4.7.2 we know that $\phi_0^0=I_{\mathcal{P}_0}$; the map ϕ_1^1 is *ex hypothesi* an automorphism of $\mathcal{P}_1$. Let us show that for every integer $j\geq 2$, ϕ_j^j is an automorphism of $\mathcal{P}_j$. It is immediate that $\phi_1^{1\otimes j}$ is an automorphism of $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$. By equality (5.6) we have

$$f_j\circ\phi_j^j \quad = \quad \phi_1^{1\otimes j}\circ f_j\ . \tag{5.8}$$

As f_j is known to be injective (Lemma 5.3.1), this shows that ϕ_j^j is injective too.

Having in mind to show that ϕ_j^j is surjective, we observe that the endomorphisms $\phi_1^{1\otimes j}$ and Tr_j of $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ commute by the definition of Tr_j and Lemma 5.2.2. Let y be an element of $\mathcal{P}_j$; by Lemma 5.3.5, there exists an element z in $\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ such that $f_j(y)=Tr_j(z)$; as $\phi_1^{1\otimes j}$ is an automorphism, there exists $w\in\mathcal{P}_1^{\otimes j}$ such that $z=\phi_1^{1\otimes j}(w)$, hence we can write $f_j(y)=(Tr_j\circ\phi_1^{1\otimes j})(w)=(\phi_1^{1\otimes j}\circ Tr_j)(w)$; again using Lemma 5.3.5, there exists x belonging to $\mathcal{P}_j$ satisfying $Tr_j(w)=f_j(x)$. Thus $f_j(y)=\phi_1^{1\otimes j}(f_j(x))$; formula (5.8) then gives $f_j(y)=f_j(\phi_j^j(x))$; as f_j is injective, we deduce that $y=\phi_j^j(x)$, which ends the proof of our lemma.

We now show that ϕ is bijective by using the grading of type $\mathbb{N}$ given over $\mathcal{B}_1$ by the sub-R-modules $(\mathcal{P}_a)_{a\in\mathbb{N}}$.

In order to show that ϕ is a surjection, it suffices to prove that, for any non-negative integer a, each element y in $\mathcal{P}_a$ belongs to $Im(\phi)$. We proceed by induction on a. For $a=0$, by Lemma 4.7.2, we have $\phi_0^0=I_{\mathcal{P}_0}$, so that $y=\phi(y)$. Suppose that for $b<a$, we have $\mathcal{P}_b\subseteq Im(\phi)$ and let $y\in\mathcal{P}_a$; by Lemma 5.5.1, there exists x belonging to $\mathcal{P}_a$ such that $y=\phi_a^a(x)$. Now let us compute $\phi(x)-y$; formula (2.2) yields

$$\phi(x)=\sum_{b=1}^{a}i_b\circ\phi_a^b\circ\mathrm{pr}^a(x)\ =\sum_{b=1}^{a}\phi_a^b(x)\ ;$$

then $\phi(x) - y = \sum_{b=1}^{a-1} \phi_a^b(x)$; as $\phi_a^b(x) \in \mathcal{P}_b$ for $b < a$, by induction hypothesis we have $\phi_a^b(x) \in Im(\phi)$, for $b < a$. Then we write $\phi_a^b(x) = \phi(x_b)$ for some x_b in $\mathcal{B}_1$. Hence $y = \phi(x) - \sum_{b=1}^{a-1} \phi(x_b)$, which proves that $y \in Im(\phi)$; thus ϕ is surjective.

It remains to prove that ϕ is injective. Suppose that there exists $x \neq 0$ with $\phi(x) = 0$. Then we can write $x = \sum_{a=0}^{d} x_a$, with $x_d \neq 0$, for some $d \in \mathbb{N}$ and $x_a \in \mathcal{P}_a$ for $a \in \{0, \ldots, d\}$. Then $0 = \phi(x) = \sum_{0 \leq b \leq a \leq d} \phi_a^b(x_a)$. Taking the components of the two sides of this last equality in $\mathcal{P}_d$, we get $0 = \phi_d^d(x_d)$; therefore Lemma 5.5.1 implies that $x_d = 0$. This contradiction ends the proof.

Chapitre 6

Examples

We fix a reduced ring R the characteristic of which is a prime number p.

In this last Chapter, we present some examples of endomorphisms of the binomial coalgebra in prime characteristic. Examples 1 and 2 consider endomorphisms defined very directly by means of our Theorem 1.0.1. These examples can also be built by Carlitz's method. Both preserve the degree as defined by formula (4.1). Example 3 is Carlitz's original example. Example 4 cannot be obtained by Carlitz's method. It does not preserve the degree. Finally, we show that our Example 1 cannot be constructed by means of the composition of formal Hurwitz series in the way we have explained in the introduction of our paper.

6.1 Example 1

Let r be an element in R ; we consider the element $(\Lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ in $\prod_{\ell\geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$ such that $\Lambda_\ell = 0$ if $\ell \neq 1$ and $\Lambda_1 : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ is defined by $\Lambda_1(x) = rx$. By Theorem 1.0.1, we define in a unique way the endomorphism ϕ_r of the binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$ by the condition

$$\Theta(\phi_r) = (\Lambda_\ell)_{\ell\geq 1} \ ,$$

where Θ is the same map as in formula (4.12). It is easy to verify by formula (5.6) that

$$\phi_r(e_n) = r^{s_p(n)} e_n \ ,$$

for each non-negative integer n. This example can be built by Carlitz's method, as explained at the beginning of our paper. Indeed, let us set $\Psi_i(t) = rt^{p^i}$, so that

$$\Psi_i(s+t) \quad = \quad \Psi_i(s) + \Psi_i(t) \ . \tag{6.1}$$

From this, the Carlitz method builds a polynomial sequence $(G_n)_n$ of binomial type, such that

$$G_n(t) = \Psi_0(t)^{\nu_0}\Psi_1(t)^{\nu_1}\dots\Psi_d(t)^{\nu_d} \ ,$$

where $n = \nu_0 + \nu_1 p + \ldots + \nu_d p^d$ is the base p representation of n. An easy computation gives

$$G_n(t) = r^{s_p(n)} t^n \ .$$

As $(G_n)_n$ is of binomial type, that is it verifies the binomial formula (20), by identifying $\mathcal{B}_1$ with $R[t]$, the R-linear map ϕ from $R[t]$ to $R[t]$ that sends t^n to $G_n(t) = r^{s_p(n)} t^n$ is identified to the R-coalgebra endomorphism ϕ_r of $\mathcal{B}_1$.

6.2 Example 2

Let r be an fixed element in R; for $\ell > 1$, let Υ_ℓ denote the zero morphism from $\mathcal{P}_\ell$ to $\mathcal{P}_1$ and define Υ_1 as the endomorphism of the R-module $\mathcal{P}_1$, such that $\Upsilon_1(e_n) = r^n e_n$, for $n \in \mathbb{N}_{1,p}$. Consider the element $(\Upsilon_\ell)_{\ell \geq 1}$ in the product $\prod_{\ell \geq 1} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$ and let Θ be the map defined by formula (4.12). By Theorem 1.0.1, we define in a unique way the endomorphism ϕ'_r of $\mathcal{B}_1$ by setting

$$\Theta(\phi'_r) = (\Upsilon_\ell)_{\ell \geq 1} \ .$$

Using formula (5.6), we easily find

$$\forall n \in \mathbb{N}; \phi'_r(e_n) = r^n e_n \ .$$

This example is also obtainable by Carlitz's method. Indeed, let us set $\Psi_i(t) = r^{p^i} t^{p^i}$. This sequence $(\Psi_i)_i$ satisfies equality (6.1) and if $n = \nu_0 + \nu_1 p + \ldots + \nu_d p^d$ is the base p representation of n, the Carlitz method builds a polynomial sequence $(G_n)_n$ of binomial type such that

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \Psi_0(t)^{\nu_0} \Psi_1(t)^{\nu_1} \ldots \Psi_d(t)^{\nu_d} \\ &= r^n t^n. \end{aligned}$$

As $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is of binomial type, by identifying $\mathcal{B}_1$ with $R[t]$, the R-linear map ϕ' from $R[t]$ to $R[t]$ that sends t^n to $G_n(t) = r^n t^n$ is identified to the R-coalgebra endomorphism ϕ'_r of $\mathcal{B}_1$.

6.3 Example 3

By taking up the original example of Carlitz as described by Diarra in [15], we can get another endomorphism of the coalgebra $\mathcal{B}_1$. Let us describe it.

The Carlitz module defined in [21] leads us to the introduction of two important series, namely the Carlitz exponential series and the Carlitz logarithm. For x an element belonging to $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$, we define $e_c(x)$ (the Carlitz exponential series) by

$$e_c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{p^i}}{D_i} \ ,$$

where D_i is the product of all monic polynomials of degree i in $\mathbb{F}_p[T]$. Putting $C_T(x) = x^p + Tx$, we arrive at the functional equation

$$e_c(Tx) = C_T(e_c(x)) \ .$$

The Carlitz logarithm Log_c is the reciprocal series of e_c and it is shown that

$$Log_c x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{p^i}}{L_i} \ ,$$

where $L_i = \prod_{l=1}^{i} \left(T^{p^l} - T\right)$. It is not difficult to see that

$$e_c(zLog_c x) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j(z) x^{p^j} \ ,$$

with $E_j(z) = \sum_{l=0}^{j} (-1)^{j-l} \frac{z^{p^l}}{L_{j-l}^{p^l} D_l}$. Now we study the sequence of polynomials (E_j) ; we remark that

$$E_j(s+t) = E_j(s) + E_j(t)$$

in $\mathbb{F}_p[s,t]$, so that by setting $\Psi_i = E_i$, the sequence Ψ_i satisfies relation (6.1). Let n be a non-negative integer, we write $n = \nu_0 + \nu_1 p + \ldots + \nu_d p^d$, with $0 \leq \nu_i < p$. Here Carlitz's construction gives us a new example of a coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$, indeed the sequence $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by

$$h_n = E_0^{\nu_0} E_1^{\nu_1} \ldots E_d^{\nu_d} \ ,$$

is a polynomial sequence of binomial type and hence by identifying $\mathcal{B}_1$ with $R[z]$, the R-linear map ϕ from $R[z]$ to $R[z]$ that sends z^n to $h_n(z) = \prod_{i=0}^{d} E_i^{\nu_i}(z)$ defines a R-coalgebra endomorphism ϕ_{Ca} of $\mathcal{B}_1$.

6.4 Example 4

We now give an example of an R-coalgebra endomorphism of $\mathcal{B}_1$ which cannot be built by Carlitz's method. Suppose that $p \neq 2$ and consider the element $(\psi_\ell)_{\ell\geq 1}$ in the product $\prod_{\ell\geq 1} Hom(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_1)$, such that $\psi_1 = I_{\mathcal{P}_1}$, ψ_2 is the map from $\mathcal{P}_2$ to $\mathcal{P}_1$ defined by $\psi_2(e_{p^m+p^n}) = e_{p^{m+n}}$ for all non-negative integers m and n, and $\psi_\ell = 0$ when $\ell \geq 3$. By Theorem 1.0.1, we define in a unique way the coalgebra endomorphism ϕ of $\mathcal{B}_1$ by setting

$$\Theta(\phi) = (\psi_\ell)_{\ell\geq 1} \ .$$

By formulas (2.2) and (5.6), it is easily verified that

$$\phi(e_{p^m+p^n}) = e_{p^{m+n}} + e_{p^m+p^n} \ .$$

If this example can be built by means of Carlitz's method, we should have, identifying $\mathcal{B}_1$ with $R[t]$, the following identities

$$t^{p^m+p^n} + t^{p^{m+n}} = G_{p^m+p^n}(t) = \Psi_m(t)\Psi_n(t) \ ,$$

with $\Psi_m(t) = t^{p^m}$, which is not the case.

6.5 An endomorphism not arising from the composition of Hurwitz series

Let r be an element of the ring R such that $r^p \neq r$. Such a r exists in R when for example R is a field that is not reduced to the prime subfield.

We are now going to show that the endomorphism ϕ_r of example 6.1, defined by $\phi_r(e_n) = r^{s_p(n)}e_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, cannot be construed as the adjoint of an endomorphism of HR built as composition on the right by a formal Hurwitz series without constant term.

From Lemma 1.0.3, the linear adjoint ϕ_r^* can be seen as a continuous endomorphism of the topological algebra HR, such that $\phi_r^*(x^{[n]}) = r^{s_p(n)}x^{[n]}$, where $x^{[n]}$ is, in accordance with the notation of Keigher and Pritchard [29, page 293], the formal Hurwitz series defined by $x^{[n]}(m) = 0$ if $n \neq m$ and $x^{[n]}(n) = 1$. Let us search for a formal Hurwitz series f without constant term, such that $\phi_r^*(x^{[n]}) = r^{s_p(n)}x^{[n]} = x^{[n]} \circ f$; if f exists, we necessarily have $f = rx^{[1]}$. As, for each non-negative integer n, the n-th divided power of f is given [29, page 295] by $f^{[n]} = x^{[n]} \circ f$, we are reduced to looking for a formal Hurwitz series without constant term f, such that

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{[n]} = r^{s_p(n)}x^{[n]}.$$

As $f = rx^{[1]}$, we have by [29, page 293], $f^{[n]} = r^n x^{[n]}$, and the very existence of f would give us the equality

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r^n x^{[n]} = r^{s_p(n)}x^{[n]} \ .$$

In particular, for $n = p$, we obtain $r^p = r$; but we have supposed that $r^p \neq r$, which is a contradiction and hence there is no $f \in HR$, without constant term, such that $\phi_r^*(x^{[n]}) = x^{[n]} \circ f$; and so the endomorphism ϕ_r of the binomial coalgebra cannot be obtained by the composition method described above.

Bibliographie

[1] **E. T. Bell**, *Euler Algebra*, Trans. Amer. Math. Soc 25 (1923), 135-154.

[2] **E. T. Bell**, *Relations between the Numbers of Bernoulli,f Euler, Genocchi, and Lucas*, Messenger of Mathematics 52 (1923), 56-68.

[3] **E. T. Bell**, *Certain Invariant Sequences of Polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc 31 (1929), 405-421.

[4] **E. T. Bell**, *The history of Blissard's symbolic calculus, with a sketch of the inventor's life*, Amer. Math. Monthly 45 (1938), 414-421.

[5] **E. T. Bell**, *Postulational bases for the umbral calculus*, Amer. J. Math. 62 (1940), 717-724.

[6] **Pierre Berthelot**, *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Mathematics, 407, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

[7] **John Blissard**, *Theory of Generic Equations*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 4 (1861), 279-305.

[8] **Nicolas Bourbaki**, *Éléments de mathématique, Algèbre, Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris 1970.

[9] **Nicolas Bourbaki**, *Éléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Chapitres 4,5,6 et 7*, Hermann, Paris 1961.

[10] **L. Carlitz**, *A set of polynomials*, Duke Math. Jour. 6, 1940, 486-504.

[11] **L. Cerlienco, G. Nicoletti, F. Piras**, *Coalgebre e calcolo umbrale*, Conferenza tenuta dal prof. Nicoletti il 14 aprile 1984, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 54 (1984), 79-100.

[12] **Louis Comtet**, *Analyse combinatoire*, tome premier, Collection Sup "Le Mathématicien", 4, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[13] **Keith Conrad**, *The digit principle*, J. Number Theory 84 (2000), 230–257.

[14] **Bertin Diarra**, *The continuous coalgebra endomorphisms of* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, Bull. Belg. Math. Soc., Simon Stevin - Supplement, December 2002, 63-79.

[15] **Bertin Diarra**, *The Hopf algebra structure of the space of continuous functions on power series over* $\mathbb{F}_q$ *and Carlitz polynomials*, Contemp. Math. 319 (2003), 75-97. MR2004d : 16067

[16] **A. Di Bucchianico**, *An introduction to Umbral Calculus*, Euler Institute for Discrete Mathematics and its Applications. February 1998.

[17] **Leonard Eugene Dickson**, *History of the theory of numbers, volume I : Divisibility and Primality*, reprint, Chelsea Publishing Company, New York, 1971.

[18] **Jean Dieudonné**, *Semi-dérivations et formule de Taylor en caractéristique p*, Arch. Math. 2 (1950), 364–366.

[19] **L. Ferrari**, *An Umbral Calculus over Infinite Coefficient Fields of Positive Characteristic, Umbral calculus and its applications*, (Cortona, 1998). Comput. Math. Appl. 41, (2001), 1099-1108.

[20] **J. W. L. Glaisher**, *On the Bernoullian Function*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 29 (1898), 1-168.

[21] **D. Goss**, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergeb. Math. u. i. Grenz. 35, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1998.

[22] **H. Hasse und F. K. Schmidt**, *Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten*, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 215-237.

[23] **M. Héraoua and A. Salinier**, *Endomorphisms of the binomial coalgebra*, à paraître dans Journal of Pure and Applied Algebra.

[24] **E. L. Ince**, *Ordinary differential equations*, with diagrams, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[25] **S. A. Joni and G.-C. Rota**, *Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics*, Contemporary Mathematics, Volume 6 (1982), 1-47.

[26] **Alexandre Junod**, *Congruences par l'analyse p-adique et le calcul symbolique* , Thèse de l'Université de Neuchâtel, Suisse (2003).

[27] **Christian Kassel**, *Cours sur les groupes quantiques, 1^{ière} partie*, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, n° 492, 1992.

[28] **William F. Keigher**, *On the ring of Hurwitz series*, Comm. Algebra 25 (1997), 1845-1859.

[29] **William F. Keigher and F. Leon Pritchard**, *Hurwitz series as formal functions*, Journal of Pure and Applied Algebra, 146 (2000), 291-304.

[30] **Neal Koblitz**, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Graduate Texts in Mathematics, 58, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1977.

[31] **Jiang-Hua Lu**, *Hopf algebroids and quantum groupoids*, Intern. J. of Math., 7 (1996), 47-70.

[32] **Édouard Lucas**, *Théorie des nombres*, nouveau tirage, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1958.

[33] **D.G. Northcott**, *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge, at the University press, 1968.

[34] **S. Pincherle**, *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Ann. 49 (1897), 325-382.

[35] **G. Pólya, G. Szegö**, *Problems and Theorems in Analysis I*, Second Printing, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1976.

[36] **Earl D. Rainville**, *Special Functions*, Library of Congress catalog card number : 60-5115. The Macmillan Company, New York, Brett-Macmillan Ltd.,Galt, Ontario. Printed in the United States of America 1960.

[37] **Nigel Ray**, *Universal Constructions in Umbral Calculus*, Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota (Cambridge, MA, 1996), 343-357, Progr. Math. 161, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[38] **Alain M. Robert**, *A Course in p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer-Verlag New york Berlin Heidelberg (2000).

[39] **Steven Roman**, *The umbral calculus*, Pure and Applied Mathematics, 111. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1984.

[40] **Steven Roman**, *The umbral calculus*, chapter 16 in *Advanced linear algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 135, Springer-Verlag, New York, 1992.

[41] **Steven Roman**, *The theory of umbral calculus I*, J. Math. Anal. Appl. 87 (1982), 57-115.

[42] **Steven Roman**, *The theory of umbral calculus II*, J. Math. Anal. Appl. 89 (1982), 290-314.

[43] **Steven Roman**, *The theory of umbral calculus III*, J. Math. Anal. Appl. 95 (1983), 528-563.

[44] **Steven Roman and Gian-Carlo Rota**, *The umbral calculus*, Advances in Math, 27 (1978), no. 2, 95-188.

[45] **G.-C. Rota, D. Kahaner, and A. Odlyzko**, *Finite Operator Calculus*, J. Math. Anal. Appl., 42 (1973), 684-760.

[46] **G.-C. Rota and B. Taylor**, *An introduction to the umbral calculus*, In H. Srivastava and T. Rassias (Eds.) Analysis, Geometry and Groups : A Riemann Legacy Volume, Palm Harbor, pp. 513-525. Hadronic Press. (MR 96a :05015).

[47] **G.-C. Rota and B. Taylor**, *The classical umbral calculus*, SIAM Journal of Mathematical Analysis 25 (1994), 694-711.

[48] **Jean-Pierre Serre**, *Gèbres*, Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 1-2, 33–85.

[49] **I. M. Sheffer**, *Some properties of polynomial sets of type zero*, Duke Mathematical Journal 5 (1939), 590-622.

[50] **Moss E. Sweedler**, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

[51] **Ann Verdoodt**, *p-adic q-umbral calculus*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 198 (1996), 166-177.

[52] **L. Van Hamme**, *Jackson's interpolation formula in p-adic analysis.* Proceedings of the Conference on p-adic Analysis, (Nijmegen, June 1978), Report, 7806, Katholieke Univ, Nijmegen, 119-125.

[53] **L. Van Hamme**, *Three generalizations of Mahler's expansion for continuous functions on* $\mathbb{Z}_p$. p-adic Analysis, (Trento, 1989), 356-361, Lecture Notes in Math. 1454, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[54] **L. Van Hamme**, *Continuous operators which commute with translations, on the space of continuous functions on* $\mathbb{Z}_p$. p-adic Functional Analysis (Laredo, 1990), 75-88, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 137, Dekker, New York, 1992

[55] **Oscar Zarisky and Pierre Samuel**, *Commutative algebra, volume II*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1960.

Cogèbre binomiale et calcul ombral des opérateurs différentiels

Résumé : Cette thèse se compose de deux parties dont les sujets sont étroitement liés. La première partie construit un calcul ombral des opérateurs différentiels. Ce nouveau calcul étend le calcul ombral classique dans deux directions : d'une part, on s'affranchit de toute hypothèse restrictive sur la caractéristique et le corps de base est remplacé par un anneau $\mathcal{R}$, associatif, commutatif et unifère de caractéristique quelconque ; d'autre part, l'anneau des polynômes est remplacé par un anneau d'opérateurs différentiels formels construit à l'aide d'une dérivation ∂ de $\mathcal{R}$. Lorsque la dérivation ∂ est nulle, l'anneau des opérateurs différentiels formels associé n'est autre que l'algèbre $\mathcal{R}[x]$, de sorte que notre exposé contient strictement le cas classique de Roman et Rota. Comme application de ce nouveau calcul, on obtient des identités différentielles et des formules pour la réversion des séries de Hurwitz formelles. Dans la deuxième partie, on détermine, dans le cas où l'anneau de base est un anneau réduit de caractéristique un nombre premier p, tous les endomorphismes continus de l'algèbre de Hurwitz HR, ou, ce qui est équivalent, les endomorphismes de la cogèbre binomiale univariée $\mathcal{B}_1$. On fait le lien avec d'autres méthodes permettant de construire des endomorphismes de $\mathcal{B}_1$. Ces méthodes, déjà présentes dans la littérature, ne permettent pas de déterminer tous les endomorphismes de $\mathcal{B}_1$, comme on le montre par des exemples concrets.

Binomial coalgebra and umbral calculus of differential operators

Abstract : This thesis is composed of two parts whose subjects are closely dependent. The first part builds an umbral calculus of differential operators. This new calculus extends traditional umbral calculus in two directions : on the one hand, one frees oneself from any restrictive assumption on the characteristic and the base field is replaced by an associative, commutative ring with identity $\mathcal{R}$ of unspecified characteristic ; on the second hand, the ring of the polynomials is replaced by a ring of formal differential operators built using a derivation ∂ of $\mathcal{R}$. When the derivation ∂ is trivial, the associated ring of the formal differential operators is no other that the algebra $\mathcal{R}[x]$, so that our work strictly contains the traditional case of Roman and Rota. As an application of this new calculation, one obtains differential identities and formulas for the reversion of the formal series of Hurwitz. In the second part, one determines, if the base ring is a reduced ring of characteristic a prime number p, all the continuous endomorphisms of the algebra of Hurwitz HR, or, which is equivalent, the endomorphisms of the univariate binomial coalgebra $\mathcal{B}_1$. One establishes the link with other methods which allow to build endomorphisms of $\mathcal{B}_1$. These methods, already present in the literature, do not enable to determine all the endomorphisms of $\mathcal{B}_1$, as concrete examples show.

Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation (LACO), 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex.