

**UNIVERSITE DE LIMOGES**

**Faculté des Sciences et Techniques**

**Ecole Doctorale Science, Technologie et Santé**

**Laboratoire de Mécanique et de Modélisation des Matériaux et  
des Structures du Génie Civil**

N° : 06 2003

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITE DE LIMOGES**

Discipline : Génie Civil

Présentée et soutenue publiquement par

**Hery RANDRIAMBOLOLONA**

Le 27 mars 2003

**MODELISATION DU COMPORTEMENT DIFFERE  
DU BOIS EN ENVIRONNEMENT VARIABLE**

Directeurs de Thèse : Christophe Petit / Frédéric Dubois

**JURY**

Joseph Gril	Directeur de recherche CNRS, Université de Montpellier	Rapporteur
Parviz Navi	Docteur ès-sciences, Ecole polytechnique de Lausanne	Rapporteur
Patrick Castera	Chargé de recherche CNRS, Université de Bordeaux	Examinateur
Frédéric Dubois	Maître de conférence, Université de Limoges	Examinateur
Alain Vergne	Professeur, Université de Clermont-Ferrand	Examinateur
Christophe Petit	Professeur, Université de Limoges	Directeur de Thèse



**UNIVERSITE DE LIMOGES**

**Faculté des Sciences et Techniques**

**Ecole Doctorale Science, Technologie et Santé**

**Laboratoire de Mécanique et de Modélisation des Matériaux et  
des Structures du Génie Civil**

N° : 06 2003

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITE DE LIMOGES**

Discipline : **Génie Civil**

Présentée et soutenue publiquement par

**Hery RANDRIAMBOLOLONA**

Le 27 mars 2003

**MODELISATION DU COMPORTEMENT DIFFERE  
DU BOIS EN ENVIRONNEMENT VARIABLE**

Directeurs de Thèse : **Christophe Petit / Frédéric Dubois**

**JURY**

Joseph Gril	Directeur de recherche CNRS, Université de Montpellier	Rapporteur
Parviz Navi	Docteur ès-sciences, Ecole polytechnique de Lausanne	Rapporteur
Patrick Castera	Chargé de recherche CNRS, Université de Bordeaux	Examineur
Frédéric Dubois	Maître de conférence, Université de Limoges	Examineur
Alain Vergne	Professeur, Université de Clermont-Ferrand	Examineur
Christophe Petit	Professeur, Université de Limoges	Directeur de Thèse



# Remerciement

Mes travaux de thèse ont été effectués au Laboratoire de Mécanique et de Modélisation des Matériaux et des Structures du génie Civil d'Egletons sous la direction de monsieur Christophe PETIT et l'encadrement scientifique de monsieur Frédéric DUBOIS.

Je remercie monsieur Christophe PETIT directeur du Laboratoire de Mécanique et de Modélisation des Matériaux et des Structures du génie Civil d'Egletons, pour m'avoir accepté dans son équipe et sa bienveillance à ce que mon travail puisse s'effectuer dans de bonnes conditions.

Je remercie vivement monsieur Frédéric DUBOIS qui a remarquablement encadré et soutenu mon travail. Ses conseils, soutiens, orientations et contributions tiennent une part importante dans la réussite de ce travail, qu'il trouve à travers ces quelques mots l'expressions de toute ma reconnaissance.

Je suis très honoré que messieurs Joseph GRIL et Parviz NAVI ont contribué en tant que rapporteurs de cette thèse ainsi que messieurs Patrick CASTERA et Alain VERGNE pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie les membres du laboratoire 3MSGC d'Egletons pour m'avoir accepter parmi eux durant ces quelques années, surtout à mes compagnons doctorants pour les bons moments que nous avons passé ensemble.

Je tiens à associer à mes remerciements tous le personnel de l'UT Génie Civil d'Egletons, plus particulièrement mes collègues enseignants pour leur excellent accueil. Je remercie messieurs Johan MILLAUD et Pierre GALIANA pour m'avoir aidé à faire mes premiers pas dans le monde de l'enseignement.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe du Laboratoire de Matériaux de Construction de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse), notamment monsieur Parviz NAVI et madame Valérie PITTET pour m'avoir accueilli durant mes séjours de travail.

Je dédie ce travail à mon ami Martha LESCURE et ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé, autant que je suis éloigné de Madagascar.

Je remercie mon Seigneur Dieu de m'avoir toujours béni.

---

# Résumé

Ce travail concerne une modélisation numérique par la méthode des éléments finis du fluage du bois en environnement variable. Des validations expérimentales sont effectuées sur le pin maritime.

Dans une première partie, nous rappelons les influences de l'humidité et de la température sur la viscoélasticité du bois à travers le vieillissement hydrothermique par transfert de masse et par relaxation structurale. Les aspects phénoménologiques du fluage du bois en environnement variable et l'état de l'art sur la modélisation sont présentés.

Une seconde partie décrit le développement d'un modèle numérique du comportement viscoélastique vieillissant du bois en environnement variable en accord avec les principes de la thermodynamique. Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé caractérisé, par des paramètres rhéologiques vieillissants et dépendants du niveau et de l'histoire de l'humidité, est associé au modèle du comportement non viscoélastique (retrait-gonflement et mécano-sorption) de Ranta-Maunus. Le modèle global est implanté dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M et vérifié numériquement.

Dans une troisième partie, il est entrepris des validations expérimentales du modèle avec des essais de traction uniaxiaux à l'échelle mésoscopique du matériau sur des éprouvettes de petites dimensions. Ces validations ont été réalisées au Laboratoire de Matériau de construction de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Une dernière partie est consacrée à la modélisation et la simulation du fluage d'une poutre de structure soumise à des variations d'humidité relative ambiante à partir du modèle développé à l'échelle mésoscopique. Ce dernier est couplé à un modèle de transfert hydrique et thermique.

**Mots clefs** : Fluage, mécano-sorption, vieillissement, viscoélasticité, teneur en eau, température, transfert hydrique et thermique, thermodynamique, modèle de Kelvin-Voigt généralisé, éléments finis.



# Abstract

The objective of this thesis is to model the creep behavior of wood in variable climate conditions with the finite element method. An experimental validation is carried out in maritime pine.

In a first part, a review of moisture content and temperature effects on the viscoelasticity of wood material are described, integrating the hygro-thermal ageing by mass transfer and structural relaxation. The phenomenological aspects of wood creep in variable climate conditions and the state of art of modelling are presented.

In a second part, a new thermo-hygro-mechanical numerical modelling of wood viscoelasticity is presented, integrating the hereditary effects (strain-stress history) and the environmental effects (moisture content and temperature). Based on the thermodynamic principles, the environmental effects are taken into account in the generalized Kelvin-Voigt model. This last is associated with the Ranta-Maunus model of non viscoelastic behaviour (swelling-shrinkage and mechano-sorption). The model is implanted in the finite element program CAST3M and numerically checked.

In a third part, an experimental validation is presented from creep-recovery tests carried out on thin specimens subjected to a longitudinal tension loading and moisture variations.

The last part shows the results of creep simulation of timber subjected to relative humidity variations. The mechanical model developed at mesoscopic scale is coupled with model of mass and heat transfer.

**Keywords** : Creep, mechano-sorption, ageing, viscoelasticity, moisture content, temperature, mass and heat transfer, thermodynamics, generalized Kelvin-Voigt model, finite element.

---

# Nomenclature

$\mathbf{J}$	: tenseur de fluage d'ordre 4, $\text{Pa}^{-1}$
$\mathbf{R}$	: tenseur de relaxation d'ordre 4, Pa
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	: tenseur de déformation d'ordre 2, $\text{m m}^{-1}$
$\underline{\underline{\sigma}}$	: tenseur de contrainte d'ordre 2, Pa
$\sigma_{\text{rupt}}$	: contrainte de rupture, Pa
$\varepsilon_e$	: déformation élastique
$\varepsilon_{\text{an}}$	: déformation anélastique
$\varepsilon_{\text{ve}}$	: déformation viscoélastique
$\varepsilon_{\text{w0}}$	: déformation de retrait-gonflement libre
$\varepsilon_{\text{ws}}$	: déformation dû à l'influence mécanique sur le retrait-gonflement
$\varepsilon_{\text{ms}}$	: déformation mécano-sorptive,
$\varepsilon_r$	: déformation corrigée, $\varepsilon_r = \varepsilon - \varepsilon_{\text{w0}}$
$E'$	: module dynamique
$\delta$	: angle de frottement interne
$k$	: rigidité, Pa
$\eta$	: viscosité, Pa s
$b(w)$	: fonction de correction en humidité de la rigidité
$a(w)$	: fonction de correction en humidité de la viscosité
$\alpha$	: coefficient de retrait-gonflement libre
$m$	: coefficient de couplage mécano-sorptif, $m = m_{\text{H}}$ (absorption) et $m_{\text{S}}$ (désorption)
$\psi$	: énergie libre spécifique
$s$	: entropie spécifique
HR	: humidité relative, Pa Pa <sup>-1</sup>
T	: température, °C
$T_{\text{b}}$	: température du bois, °C
$T_{\text{g}}$	: température de transition vitreuse, °C
$T_{\text{surf}}$	: température en surface de l'éprouvette, °C
$T_{\infty}$	: température de l'air extérieur, °C
$T_{\text{v}}$	: température de vieillissement, °C
$t_{\text{v}}$	: temps de vieillissement, s
$\underline{\underline{\lambda}}$	: tenseur de conductivité thermique, $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\underline{\underline{D}}_{\text{w}}$	: tenseur de diffusité hydrique, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\underline{\underline{D}}_{\text{wT}}$	: tenseur de diffusité hydrique par thermo-migration, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\underline{\underline{D}}_{\text{b}}$	: tenseur de diffusité de l'eau liée, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\underline{\underline{D}}_{\text{v}}$	: tenseur de diffusité de la vapeur d'eau, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\underline{\underline{D}}_{\text{T}}$	: tenseur de diffusité thermique, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\underline{\underline{K}}$	: tenseur de perméabilité intrinsèque,

- $\underline{K}_{r1}$  : tenseur de perméabilité relative,  
 $F_w$  : flux massique d'eau évaporé,  $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$   
 $Q_T$  : flux de chaleur échangé avec le milieu extérieur,  $\text{W m}^{-2}$   
 $C_p$  : chaleur massique,  $\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$   
 $K_l$  : taux volumique de changement de phase pour l'eau liquide,  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$   
 $K_b$  : taux volumique de changement de phase pour l'eau liée,  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$   
 $\Delta h_b$  : chaleur différentielle de sorption,  $\text{J Kg}^{-1}$   
 $h_v$  : chaleur latente de vaporisation,  $\text{J Kg}^{-1}$   
 $h_w$  : coefficient d'échange hydrique,  $\text{m s}^{-1}$   
 $h_T$  : coefficient d'échange de chaleur,  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$   
 $w$  : teneur en eau du bois,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $w_b$  : teneur en eau liée,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $w_{eq}$  : teneur en eau d'équilibre hygroscopique,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $w_{psf}$  : teneur en eau au point de saturation des fibres,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $w_{surf}$  : teneur en eau en surface de l'éprouvette,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $M_m$  : masse molaire de l'eau,  $M_m=18 \text{ g mole}^{-1}$   
 $M$  : masse du bois,  $\text{Kg}$   
 $M_s$  : masse anhydre du bois,  $\text{Kg}$   
 $M_l$  : masse de l'eau libre dans le bois,  $\text{Kg}$   
 $M_b$  : masse de l'eau liée dans le bois,  $\text{Kg}$   
 $M_v$  : masse de la vapeur d'eau dans le bois,  $\text{Kg}$   
 $M_g$  : masse de l'air humide dans le bois,  $\text{Kg}$   
 $V_l$  : volume occupé par l'eau libre dans le bois,  $\text{m}^3$   
 $V_b$  : volume occupé par l'eau liée dans le bois,  $\text{m}^3$   
 $V_v$  : volume du vide,  $\text{m}^3$   
 $V_s$  : volume totale du bois anhydre,  $\text{m}^3$   
 $P_v$  : pression de vapeur,  $\text{Pa}$   
 $P_{vs}$  : pression de vapeur saturante,  $\text{Pa}$   
 $P_l$  : pression de l'eau liquide,  $\text{Pa}$   
 $P_g$  : pression de l'air humide,  $\text{Pa}$   
 $P_c$  : pression capillaire  $P_c = P_l - P_g$ ,  $\text{Pa}$   
 $\epsilon$  : porosité  $\epsilon = V_v/V_s$ ,  $\text{m}^3 \text{m}^{-3}$   
 $S$  : saturation en eau libre  $S = V_l/V_s$ ,  $\text{m}^3 \text{m}^{-3}$   
 $C$  : fraction massique de vapeur dans l'air  $C = M_v/M_g$ ,  $\text{Kg Kg}^{-1}$   
 $\rho_g$  : masse volumique de l'air humide  $\rho_g = M_g/(V_v - V_l)$ ,  $\text{Kg m}^{-3}$   
 $\rho_v$  : concentration de vapeur dans l'air humide  $\rho_v = C\rho_g = M_v/V_g$ ,  $\text{Kg m}^{-3}$   
 $\rho_s$  : masse volumique anhydre du bois  $\rho_s = M_s/V_s$ ,  $\text{Kg m}^{-3}$   
 $\rho_l$  : masse volumique de l'eau libre  $\rho_l = M_l/V_l$ ,  $\text{Kg m}^{-3}$

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I. Influence de l'environnement sur le vieillissement et le fluage</b>	<b>5</b>
I.1 Introduction	5
I.2 Structure de la paroi cellulaire	5
I.2.1 Ultrastructure	5
I.2.2 Composition chimique	7
I.3 Vieillissement hydrothermique	7
I.3.1 Phénomène de sorption	7
I.3.2 Vieillissement par transfert de masse	8
I.3.3 Cycle de vieillissement par relaxation structurale	11
I.4 Fluage du bois en environnement variable	14
I.4.1 Introduction	14
I.4.2 Description phénoménologique du fluage	15
I.5 Modélisation du fluage du bois en environnement variable - Etat de l'art	22
I.5.1 Modèle à "activation indépendante"	23
I.5.2 Modèle à "activation combinée"	27
I.6 Conclusion	31
<b>Chapitre II. Modélisation viscoélastique du bois en environnement variable</b>	<b>33</b>
II.1 Introduction	33
II.2 Viscoélasticité linéaire vieillissante	34
II.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé	34
II.2.2 Restriction thermodynamique	36
II.2.3 Equation intégrale	42
II.3 Formulation du retrait-gonflement sous influence mécanique	44
II.4 Formulations incrémentales	45
II.4.1 Loi incrémentale du comportement viscoélastique assouplissant	45
II.4.2 Loi incrémentale du comportement viscoélastique rigidifiant	47
II.4.3 Formulation incrémentale du retrait-gonflement sous influence mécanique	49
II.4.4 Formulation incrémentale de la déformation totale	49
II.5 Couplage des loi de comportement pour une variation non monotone de la rigidité	51
II.5.1 Comportement élastique	51
II.5.2 Généralisation au comportement viscoélastique	53
II.6 Résolution par la méthode des éléments finis	55
II.6.1 Comportement tridimensionnel	55
II.6.2 Principe des travaux virtuels	55
II.7 Vérifications numériques	58

II.7.1	Fluage sans vieillissement sous une humidité constante . . . . .	59
II.7.2	Fluage assouplissant pendant une humidification . . . . .	60
II.7.3	Fluage rigidifiant pendant un séchage . . . . .	62
II.7.4	Eprouvette sous une contrainte variable avec une humidité et des caractéristiques mécaniques constantes . . . . .	63
II.8	Conclusion . . . . .	65
<b>Chapitre III. Validations expérimentales</b>		<b>67</b>
III.1	Introduction . . . . .	67
III.2	Expérimentation . . . . .	67
III.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	67
III.2.2	Eprouvettes de traction . . . . .	69
III.2.3	Protocole expérimental . . . . .	70
III.2.4	Identification des paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé . . . . .	71
III.3	Modélisation numérique . . . . .	72
III.3.1	Discrétisation par éléments finis de l'éprouvette de traction . . . . .	72
III.3.2	Discrétisation par éléments finis de l'éprouvette pour simuler la diffusion hydrique . . . . .	72
III.4	Résultats expérimentaux et simulations . . . . .	73
III.4.1	Essai de Pittet . . . . .	73
III.4.2	Expériences réalisées au LMC . . . . .	81
III.5	conclusion . . . . .	99
<b>Chapitre IV. Modélisation à l'échelle de la structure</b>		<b>101</b>
IV.1	Introduction . . . . .	101
IV.2	Modèle de transfert de masse et de chaleur . . . . .	101
IV.2.1	Mouvement d'eau à l'intérieur du bois . . . . .	101
IV.2.2	Equation de conservation . . . . .	103
IV.2.3	Conditions aux limites . . . . .	103
IV.2.4	Modèle de type diffusif . . . . .	105
IV.3	Résolution numérique . . . . .	106
IV.3.1	Formulation adimensionnelle . . . . .	106
IV.3.2	Formulation variationnelle et discrétisation par élément fini . . . . .	107
IV.3.3	Discrétisation temporelle . . . . .	108
IV.4	Etude du comportement d'une poutre de structure . . . . .	110
IV.4.1	Essai de Bengston . . . . .	110
IV.4.2	Simulation . . . . .	112
IV.5	Conclusion . . . . .	119
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>121</b>
<b>Annexe A. Complément de vérifications numériques</b>		<b>125</b>

# Liste des figures

1	(a) Evolution de l'humidité interne à 10 mm de la surface (point 1), à 40 mm de la surface (point 2) et au centre de la section (point 3). (b) La plus faible valeur mensuelle de la flèche relative, d'une poutre de structure (345 mm×169 mm×4500 mm) soumise à un chargement mécanique constant pendant une année (Meierhofer & Sell, 1979) [MAR 92], [THE 94]. . . . .	1
2	La flèche relative d'une éprouvette de petites dimensions (2 mm×2 mm×60 mm) soumise à des variations cycliques de l'humidité [HEA64]. . . . .	2
I.1	Structure de la paroi cellulaire. . . . .	6
I.2	(a) Isotherme de sorption du Douglas (b) Isotherme d'absorption de l'épicéa à différentes températures [SKA 88] . . . . .	8
I.3	Les états de transitions de l'épicéa (résineux) et de l'érable (feuillu) identifiés par une analyse thermomécanique dynamique (DMTA) sur le module dynamique $E'$ et la tangente de l'angle de perte $\tan \varphi$ pour une teneur en eau $w=8\%$ [KEL 87].	9
I.4	Températures $T_g$ des polymères du bois en fonction de la teneur en eau $w$ [BAC 82].	10
I.5	Effet de l'humidité sur les propriétés mécaniques dynamiques de l'épicéa : $\log E'$ et $\tan \delta$ [KEL 87]. . . . .	10
I.6	Evolution de la température $T_g(w)$ pendant les cycles d'humidité. . . . .	11
I.7	Variation du volume libre avec la température au cours du vieillissement physique d'un polymère amorphe porté à la température $T_v < T_g$ et influence du temps de vieillissement sur le fluage-recouvrance du polymère amorphe Polyester PET (poly téréphthalate d'éthylène) vieilli à $T_v=59^\circ\text{C}$ [PER 92]. . . . .	12
I.8	Influence du temps de vieillissement après une désorption (a) et après une absorption (b) sur le fluage en condition isotherme. . . . .	13
I.9	Evolution de la déformation de fluage $\varepsilon$ en traction et compression et du retrait-gonflement libre $\varepsilon_{w0}$ . . . . .	14
I.10	Evolution de la flèche d'une poutre soumise à des variations d'humidité. . . . .	15
I.11	Influence du niveau de contrainte sur la limite de fluage [HEA 64]. . . . .	16
I.12	Fluage-recouvrance en traction sous des cycles hygrométriques entr 30% et 75% à une température $T=21,5^\circ\text{C}$ sur une petite éprouvette (3 mm×0,7 mm×30 mm) de pin maritime [PIT 96]. . . . .	18
I.13	(a) Isotherme de sorption ( $T=32^\circ\text{C}$ ) pour la désorption initiale, la résorption et la seconde désorption. (b) Isotherme de sorption du Douglas sous cycles hygrométriques [SKA 88]. . . . .	19
I.14	Isotherme de sorption de l'épicéa en relation à la pression hydrostatique. . . . .	19
I.15	Distribution de teneur eau dans la section de poutre (345 mm×169 mm) un jour d'été et un jour d'hiver [THE 94]. . . . .	20

I.16	Evolution de la teneur en eau d'équilibre et de la teneur eau à 10 mm de la surface (point 1), à 40 mm de la surface (point 2) et au centre de la section (point 3) de poutre (345 mm×169 mm) soumise à une variation hydrique journalière [THE 94].	21
I.17	Modèle de type "Maxwell".	23
I.18	Modèle de type "Kelvin".	23
I.19	Modèle à "activation combinée".	27
I.20	Modèle rhéologique de Mukuday [MUK86].	28
I.21	Modèle Hygro-verreux [GRI88].	29
II.1	Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.	35
II.2	Partition des contraintes.	41
II.3	Comportement élastique sous une variation non monotone de l'humidité.	51
II.4	Plaque en traction.	58
II.5	Décomposition spectrale de $J_{LL}(t)$ .	59
II.6	Fluage sans vieillissement sous une humidité constante.	60
II.7	Fluage assouplissant avec temps réduit.	62
II.8	Fluage rigidifiant avec temps réduit.	63
II.9	Essai à contrainte $\sigma(t)$ linéaire et humidité constante.	65
III.1	L'ensemble du dispositif expérimental	68
III.2	La presse de traction-compression avec la cellule hygro-thermique.	68
III.3	(a) Emplacement de l'éprouvette dans la cellule. (b) Fixation de l'extensomètre sur l'éprouvette.	69
III.4	Eprouvette de traction de petites dimensions.	70
III.5	Décomposition spectrale d'une courbe de fluage expérimentale.	71
III.6	Modélisation de l'éprouvette de traction en contrainte plane.	72
III.7	La section transversale discrétisée par des éléments finis QUA4.	73
III.8	Evolution de la déformation totale expérimentale $\epsilon$ et du retrait-gonflement libre $\epsilon_{w0}$ et simulation du comportement viscoélastique en environnements constants (HR=30% et HR=75%) et variables (cycles 75%-30%)	74
III.9	Evolution de la teneur en eau $w(t)$	75
III.10	Déformation non viscoélastique $\epsilon_w$ .	76
III.11	Comparaison entre la déformation totale expérimentale et simulée.	77
III.12	Evolution de la déformation totale expérimentale $\epsilon$ et du retrait-gonflement libre $\epsilon_{w0}$ et simulation du comportement viscoélastique en environnements constants (HR=30% et HR=75%) et variables (cycles 30%-75%).	78
III.13	Simulation du comportement non viscoélastique.	79
III.14	Comparaison entre la déformation totale expérimentale et simulée.	80
III.15	Sollicitation thermo-hygro-mécanique.	82
III.16	L'évolution de la déformation totale.	82
III.17	Retrait-gonflement libre.	83
III.18	Isothermes d'absorption et de désorption expérimentales du pin maritime [PIT 96] et interpolation par le modèle de Dent.	84
III.19	Teneur en eau $w_{def}$ déduite de la déformation libre, teneur moyenne $w_{moy}$ simulée et teneur en eau d'équilibre $w_{eq}$ obtenue à partir l'isotherme de sorption linéaire.	85
III.20	Retrait-gonflement libre expérimental et simulé avec $\alpha_L = 4,83 \cdot 10^{-5}$ .	86
III.21	Essai de fluage-recouvrance en environnement constant HR=73±1% et T=20,5±0,1°C et simulation.	87

III.22	Simulation du comportement viscoélastique en environnement variable . . . . .	89
III.23	Déformation totale expérimentale et simulée. . . . .	90
III.24	Evolution expérimentale de la déformation totale. . . . .	92
III.25	Retrait-gonflement libre. . . . .	94
III.26	Essai de fluage-recouvrance en environnement humide constant HR=74±1% et T=20,4±0,1°C et simulation. . . . .	95
III.27	Simulation du comportement viscoélastique en environnement variable . . . . .	97
III.28	Déformation totale simulée et expérimentale. . . . .	98
IV.1	Sollicitation hygrométrique. . . . .	110
IV.2	Flexion 4 points. . . . .	110
IV.3	Evolution expérimentale des déformations totales $\epsilon$ et corrigées $\epsilon_c = \epsilon - \epsilon_{w0}$ des faces extrêmes tendues et comprimées. . . . .	111
IV.4	Evolution expérimentale de la flèche. . . . .	111
IV.5	Maillage et conditions aux limites pour le calcul mécanique . . . . .	112
IV.6	Transfert hydrique unidimensionnel dans la direction tangentielle. . . . .	113
IV.7	Isotherme de sorption à T=22°C. . . . .	113
IV.8	Evolution de la teneur en eau en surface $w_{surf}$ , au centre $w_{centre}$ et la valeur moyenne $w_{moy}$ pendant le premier cycle. . . . .	114
IV.9	Evolution de la teneur en eau en surface $w_{surf}$ , au centre $w_{centre}$ et moyenne $w_{moy}$ pendant l'essai. . . . .	115
IV.10	Simulation des déformations corrigées et des déformations viscoélastiques sur les faces extrêmes tendues et comprimées. . . . .	116
IV.11	Simulation des déformations totales sur les faces extrêmes tendues et comprimées. . . . .	117
IV.12	Simulation de la partie viscoélastique de la flèche. . . . .	118
IV.13	Simulation de la flèche totale. . . . .	118
IV.14	Prise en compte de la diffusion par une modélisation multi-couche bi-dimensionnelle. . . . .	123
A.1	Fluage sous une humidité variable. . . . .	126
A.2	Fluage assouplissant sans temps réduit. . . . .	127
A.3	Fluage rigidifiant sans temps réduit. . . . .	129
A.4	Essai à contrainte $\sigma(t)$ linéaire et humidité variable. . . . .	131
A.5	Essai à contrainte linéaire et un assouplissement sans temps réduit. . . . .	132
A.6	Essai à contrainte linéaire et une rigidification sans temps réduit. . . . .	134
A.7	Essai à contrainte linéaire et un assouplissement avec temps réduit. . . . .	136
A.8	Essai à contrainte linéaire et une rigidification avec temps réduit. . . . .	137



# Liste des tableaux

I.1	Partitions des déformations . . . . .	22
III.1	Caractéristiques du modèle rhéologiques. . . . .	76
III.2	Caractéristiques du modèle rhéologiques. . . . .	79
III.3	Dimensions des éprouvettes . . . . .	81
III.4	Valeurs de la déformation aux points $A_0$ à $A_4$ de la figure III.17. . . . .	83
III.5	Paramètres du modèle de Dent pour une température de $21^\circ\text{C}$ . . . . .	84
III.6	Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état humide $\text{HR}=73\pm 1\%$ . . . . .	86
III.7	Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état de référence. . . . .	88
III.8	Fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques . . . . .	88
III.9	Valeurs de la déformation aux points $B_0$ à $B_4$ de la figure III.25. . . . .	93
III.10	Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état humide $\text{HR}=74\pm 1\%$ . . . . .	96
III.11	Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état de référence $w_{\text{ref}} = 3,78\%$ . . . . .	96
III.12	Les fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques . . . . .	96
IV.1	Caractéristiques du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état sec et humide. . . . .	115
IV.2	Fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques . . . . .	116



# Introduction générale

Le nombre d'ouvrages à ossatures bois en ambiance extérieure (maisons, ponts, passerelles, pilônes,...) est en constante progression à cause des propriétés de légèreté, de souplesse et environnementales qu'offre le matériau. Le comportement en service de ces ouvrages est un sujet de préoccupation majeure, tant pour les constructeurs que pour les exploitants. Le bois utilisé dans ces ouvrages est soumis à des charges permanentes et à des variations d'humidité interne provoquées par les variations journalières et saisonnières du climat. Pour illustrer le couplage entre les chargements mécaniques et hydriques, la figure 1 présente un essai effectué par Meierhofer et Sell sur une poutre en bois lamellé collé fléchie et soumise à des variations climatiques saisonnières.

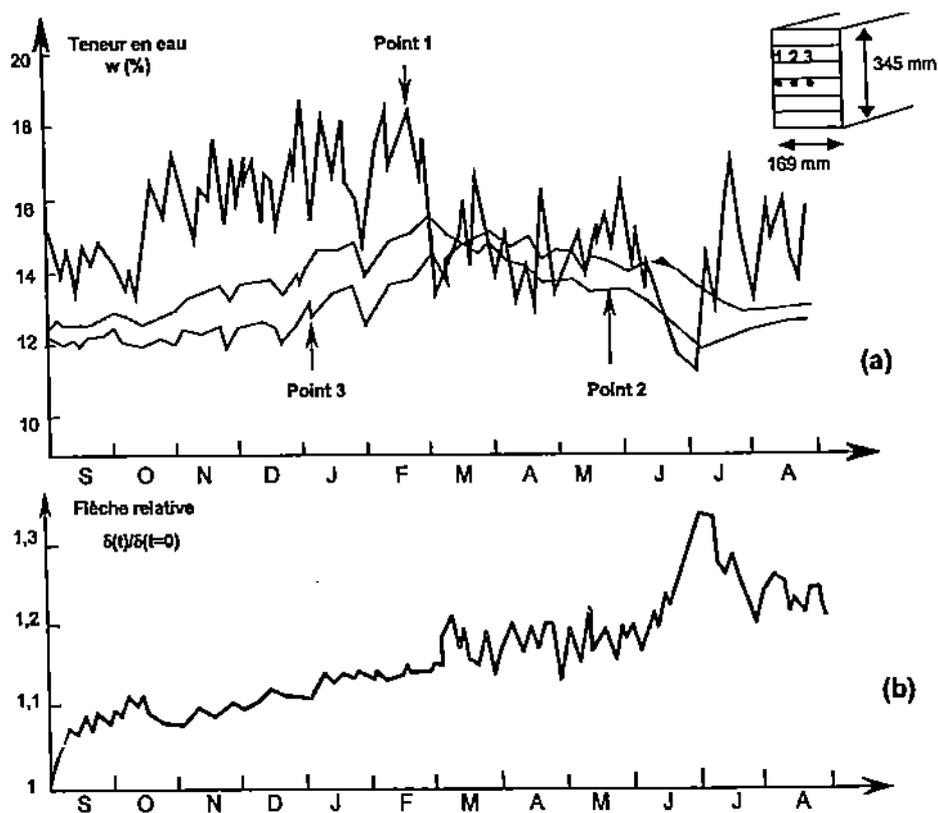


Figure 1 - (a) Evolution de l'humidité interne à 10 mm de la surface (point 1), à 40 mm de la surface (point 2) et au centre de la section (point 3). (b) La plus faible valeur mensuelle de la flèche relative, d'une poutre de structure (345 mm×169 mm×4500 mm) soumise à un chargement mécanique constant pendant une année (Meierhofer & Sell, 1979) [MAR 92], [THE 94].

Cet effet se manifeste par une évolution de la flèche corrélée, en partie, par les propriétés de fluage et le processus de diffusion hydrique dans la poutre. Les effets du temps et de l'environnement se manifestent sur le matériau par le fluage, le retrait-gonflement et l'évolution temporelle des propriétés mécaniques (vieillessement). Les changements d'humidité interne peuvent affecter les propriétés mécaniques du bois et provoquer des déformations indésirables. La flèche d'une poutre sous charges permanentes peut augmenter d'une manière significative lorsque celle-ci est soumise à des variations d'humidité interne, sans aucune mesure en regard de la flèche de cette poutre à une humidité constante, figure 2.

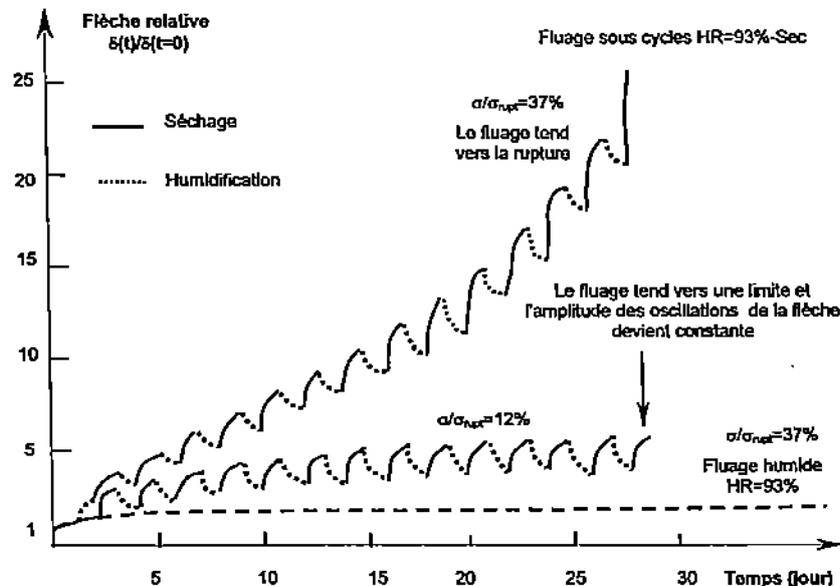


Figure 2 – La flèche relative d'une éprouvette de petites dimensions (2 mm×2 mm×60 mm) soumise à des variations cycliques de l'humidité [HEA64].

Ce phénomène, engendré par l'interaction entre les variations d'humidité et le chargement mécanique, est appelé "mécano-sorption" [ARM 60]. Dans des conditions de chargement sévères, les déformations peuvent amener à la ruine du matériau. Actuellement, si la réglementation européenne "Eurocode 5" sur "la construction bois" tient seulement compte de la durée du chargement mécanique (classe de durée de charge) et du niveau maximum de l'humidité relative de l'environnement au cours de l'utilisation de l'ouvrage (classe de service), elle n'intègre pas encore le caractère variationnel cyclique de l'environnement [EUR 99]. D'autre part, dans le cadre du suivi des ouvrages, les outils prévisionnels du comportement d'une pièce en bois se sont multipliés dans les laboratoires de recherche [HAN 00]. De nombreux modèles phénoménologiques ont été développés pour prédire l'état de déformation d'une planche au cours du séchage et calculer la flèche d'une poutre de structure. Cependant, ces modèles sont souvent validés pour un seul type ou un seul mode de sollicitation, les mécanismes réels du comportement n'étant pas correctement isolés. Les interactions entre les différents processus (viscoélasticité, retrait-gonflement, couplages mécano-sorptifs) font qu'il est très difficile de découpler correctement les différents processus mis en jeu dans la mécano-sorption. On est d'ailleurs à se demander si les modèles actuels sont en accord avec les lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique. Dans ce contexte, nous proposons le développement d'un modèle numérique du comportement différé du maté-

riau bois en environnement variable permettant le découplage des différents processus physiques (viscoélasticité vieillissante, retrait-gonflement sous contrainte). A ce sujet, des travaux récents permettent de supposer que les fluages viscoélastiques et mécano-sorptifs sont deux phénomènes faiblement couplés. Si cette supposition est confirmée, notre approche qui consiste à découpler les fluages viscoélastiques et mécano-sorptifs serait une réalité physique [HAN 98], [NAV 02]. Afin d'écartier les difficultés liées au phénomène de diffusion hydrique et à l'hétérogénéité du matériau, l'étude se limite à l'échelle mésoscopique de quelques fibres. Afin d'obtenir une modélisation réaliste des différents phénomènes, ce travail repose essentiellement sur une approche thermodynamique du comportement. L'ensemble des développements sera accompagné d'une stratégie d'identification des paramètres alimentant le modèle. Le développement et l'implantation sont envisagés dans un code aux éléments finis. Dans un deuxième temps, le passage à l'échelle d'un élément massif de structure nécessite la modélisation du transfert hydrique et thermique dans le matériau. L'objectif est donc d'aboutir à un modèle thermo-hydro-mécanique adapté au bois pour lequel les paramètres "matériau" restent facilement identifiables. La formulation aux éléments finis doit permettre de traiter le problème d'une façon globale. Cette approche apparaît comme assez lourde mais doit permettre de mieux maîtriser les phénomènes. A terme, nous visons une modélisation simplifiée pour calculer des structures plus complexes. Quatre chapitres permettent d'initier cette démarche.

Un premier chapitre d'étude bibliographique décrit les influences de l'humidité et de la température sur la viscoélasticité du bois à travers le vieillissement hydrothermique par transfert de masse et par relaxation structurale. Les aspects phénoménologiques du fluage du bois en environnement variable et les modèles phénoménologiques existants à l'heure actuelle sont présentés.

Dans un second chapitre, nous développons la modélisation du comportement viscoélastique vieillissant du bois en accord avec les principes fondamentaux de la thermodynamique ; l'objectif final étant de découpler les différents phénomènes fondamentaux du comportement différé du bois en environnement variable. Le comportement viscoélastique est représenté par le modèle de Kelvin-Voigt généralisé avec des paramètres rhéologiques vieillissant évoluant avec la température et l'humidité interne. Deux équations différentielles distinctes du comportement viscoélastique du bois sont obtenues suivant que le matériau s'assouplit à l'absorption (humidification) ou se rigidifie à la désorption (séchage). Les formulations incrémentales de ces deux modèles, traitées par la méthode des travaux virtuels, sont ensuite implantées dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M <sup>1</sup>.

Le troisième chapitre décrit les validations expérimentales du modèle basées sur des essais de fluage-recouvrance appliqués à des petites éprouvettes de pin maritime en traction parallèle aux fibres du bois, et effectués au Laboratoire de Matériaux de Construction de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse). De taille réduite, les éprouvettes regroupent seulement quelques fibres afin de réduire l'effet de diffusion et permettre ainsi des variations homogènes de l'humidité et de la température. Les essais ont été établis dans le but d'identifier tous les paramètres du modèle sur la même éprouvette.

Un quatrième chapitre est consacré à la modélisation du comportement des éléments de structure en environnement variable. Un couplage du modèle mécanique avec un modèle de transfert de masse et de chaleur est présenté. Un essai de fluage, sur une poutre de structure soumise

---

<sup>1</sup>Logiciel développé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA).

à des variations hygrométriques, est simulé intégrant la mécano-sorption et la distribution non homogène de l'humidité.

Enfin, une conclusion générale est élaborée pour faire le point sur les performances de ce modèle et définir les axes de développement permettant son amélioration et son extension. Les principaux résultats concernant la problématique structure sont également abordés et les perspectives d'études dans ce domaine sont enfin évoquées.

# Chapitre I

## Influence de l'environnement sur le vieillissement et le fluage du bois

### I.1 Introduction

Le bois est un bio-composite polymérique fortement hygroscopique dont les propriétés mécaniques et physiques peuvent évoluer dans le temps. Ceci résulte des effets de l'environnement et de l'instabilité du matériau dont la teneur en eau et la température s'équilibrent avec l'hygrométrie et la température de l'air ambiant. Ce processus de modification des propriétés est appelé "vieillissement". Comme beaucoup de polymères, le bois présente une accélération du fluage sous des cycles d'humidité [HAB 01]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux effets de l'humidité et de la température ainsi qu'à l'histoire de l'humidité sur le vieillissement hydrothermique et les conséquences sur le comportement viscoélastique. Dans une première partie, nous présentons le vieillissement hydrothermique, induit par la sorption, représenté par le vieillissement par transfert de masse (solvant ou plastifiant) et le vieillissement par relaxation structurale. Il est décrit en relation avec la structure moléculaire du bois. Dans la deuxième partie, nous donnons une description phénoménologique des effets de la température et de l'humidité sur son comportement mécanique différé. Enfin, dans une troisième partie, nous passerons en revue les modèles existants à propos du fluage du bois en environnement variable.

### I.2 Structure de la paroi cellulaire

Le bois possède une structure complexe à différents niveaux d'observation : macroscopique, ultrastructurel et moléculaire. Pour comprendre les effets hydrothermiques sur les propriétés mécaniques et hygroscopiques du bois, nous nous intéressons plus particulièrement à l'ultrastructure et à la nature des constituants chimiques de sa paroi cellulaire.

#### I.2.1 Ultrastructure

La paroi cellulaire est formée de plusieurs couches. De l'extérieur de la cellule vers le lumen, on distingue successivement la *paroi primaire* et la *paroi secondaire* subdivisée en trois couches : S1, S2 et S3. Les parois primaire et secondaire sont constituées de microfibrilles (cellulose) entourées d'une matrice (hémicelluloses - lignine), figure I.1. Chaque cellule est séparée de ses voisines par la *lamelle mitoyenne*. Les différentes couches de la paroi cellulaire ont les caractéristiques suivantes :

**La lamelle mitoyenne (LM)** : elle a une épaisseur de 1 à 4  $\mu\text{m}$  et ne comporte pas de microfibrilles mais uniquement de la lignine et des matières pectiques.

La paroi primaire (P) : elle a une épaisseur de  $0,1 \mu\text{m}$  et les microfibrilles sont orientées aléatoirement.

La paroi secondaire (S1, S2, S3) : elle est subdivisée en trois couches.

– Couche S1 : elle est constituée de 4 à 6 lamelles de microfibrilles disposées en deux spirales alternées. Elle a une épaisseur de  $0,15 \mu\text{m}$  et les microfibrilles font un angle de  $50$  à  $70^\circ$  par rapport à l'axe longitudinal de la cellule.

– Couche S2 : elle forme la majeure partie de la paroi cellulaire avec une épaisseur de  $10 \mu\text{m}$ . Elle est composée de 30 à 150 lamelles de microfibrilles avec un angle par rapport à l'axe longitudinal de la cellule compris entre  $10$  et  $30^\circ$ . Les propriétés mécaniques du bois sont fortement corrélées aux angles des microfibrilles de la couche S2. Plus les angles sont élevés, plus le retrait-gonflement longitudinal [MEY 72], la complaisance instantanée et la complaisance différée du bois sont élevés [HUN 86].

– Couche S3 : elle a une épaisseur de  $0,08 \mu\text{m}$ . Elle est similaire à la couche S1. L'angle des microfibrilles par rapport à l'axe longitudinal de la cellule est compris entre  $60^\circ$  et  $90^\circ$ .

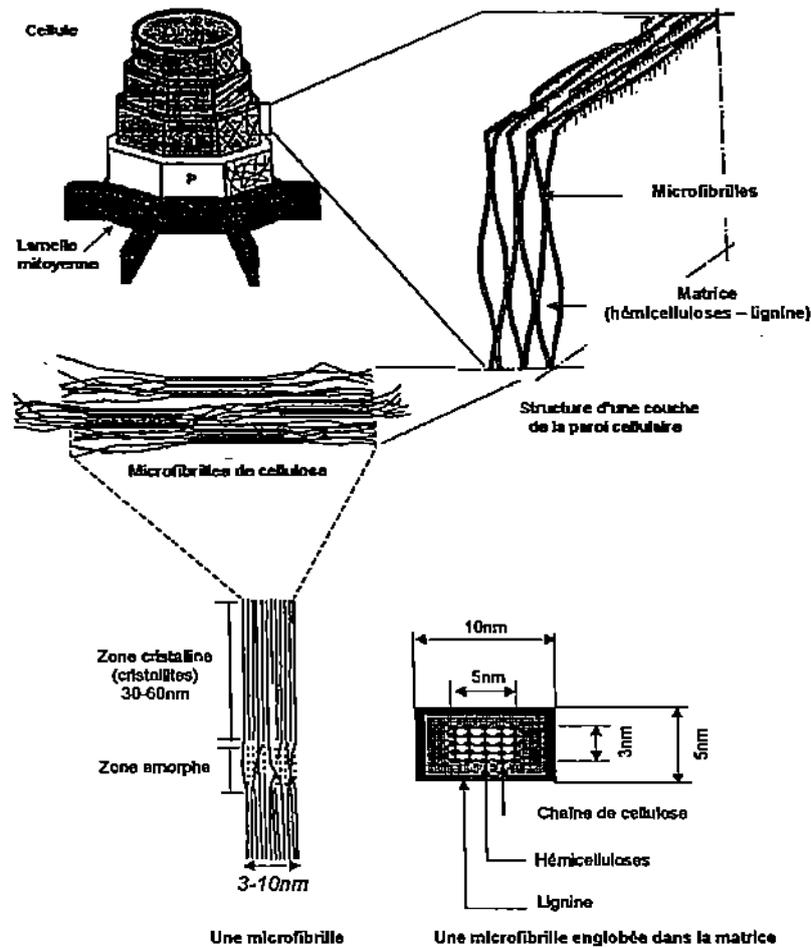


Figure I.1 – Structure de la paroi cellulaire.

## I.2.2 Composition chimique

Les couches de la paroi sont constituées principalement des trois polymères suivants :

- La cellulose : les chaînes de cellulose sont disposées parallèlement avec une alternance de zones cristallines et de zones amorphes pour former les microfibrilles, figure I.1. La cellulose comporte de nombreux groupes hydroxyles pouvant assurer la liaison entre les chaînes ou accueillir les molécules d'eau dans sa partie amorphe. La cristallinité de la cellulose (le pourcentage de zones amorphes dans les microfibrilles) a une influence importante sur le comportement mécanique de la paroi cellulaire en relation avec le taux d'humidité de la paroi [AND 88].
- Les hemicelluloses : elles sont associées à la lignine pour constituer la matrice englobant les microfibrilles. Elles sont situées autour de la microfibrille de cellulose assurant la cohésion entre la lignine et les microfibrilles, figure I.1. Elles sont reliées à la microfibrille de cellulose par des liaisons hydrogènes et à la lignine par des liaisons covalentes. Par ailleurs, une petite portion des hémicelluloses est cocrystallisée dans la microfibrille. Les hémicelluloses sont amorphes et fortement hydrophiles avec un faible degré de polymérisation.
- La lignine : Elle est une composante de la matrice avec les hémicelluloses. Elle contient des groupes phényles qui la rendent moins hydrophile d'où sa contribution importante à la rigidité du matériau à l'état humide. Elle est amorphe, hétérogène et forme la majeure partie de la lamelle mitoyenne collant les cellules adjacentes entre elles.

## I.3 Vieillissement hydrothermique

Le comportement viscoélastique du bois dépend fortement de son humidité interne et de sa température qui modifient ses propriétés. Dans cette section, nous décrivons le rôle de l'humidité et de la température sur le vieillissement hydrothermique et sur le comportement des polymères du bois. Ce vieillissement, induit par la sorption, est représenté par le vieillissement par transfert de masse et le vieillissement par relaxation structural.

### I.3.1 Phénomène de sorption

L'humidité du bois est généralement représentée par sa teneur en eau  $w$  définie comme le rapport de la masse d'eau dans un échantillon représentatif sur la masse anhydre de ce même échantillon :

$$w = \frac{\text{Masse d'eau}}{\text{Masse de matière anhydre}} \quad [I.1]$$

L'hygroscopicité traduit la capacité du matériau à absorber ou désorber l'eau et à la retenir en fonction de l'humidité relative de l'air ambiant, que ce soit par adsorption moléculaire surfacique ou par condensation capillaire. A température fixée, le nombre de couches de molécules de vapeur d'eau absorbée (adsorption moléculaire surfacique), dans et à la surface de la paroi cellulaire, est une fonction croissante de l'hygrométrie de l'air humide dans le lumen. Les énergies de liaison de ces diverses couches diminuent avec la distance par rapport à la paroi. Le tracé des isothermes de sorption permet de décrire ce phénomène, figure I.2. Aux basses humidités relatives, une première couche d'eau est adsorbée sur la surface de la paroi cellulaire. L'énergie de liaison est importante et les molécules d'eau sont peu mobiles. Pour les humidités relatives intermédiaires, des molécules d'eau sont adsorbées sur des molécules déjà adsorbées ou sur de nouveaux sites. Au-delà d'une certaine humidité, l'accroissement de l'épaisseur de la couche absorbée conduit à une condensation de l'eau dans les pores : c'est la condensation capillaire.

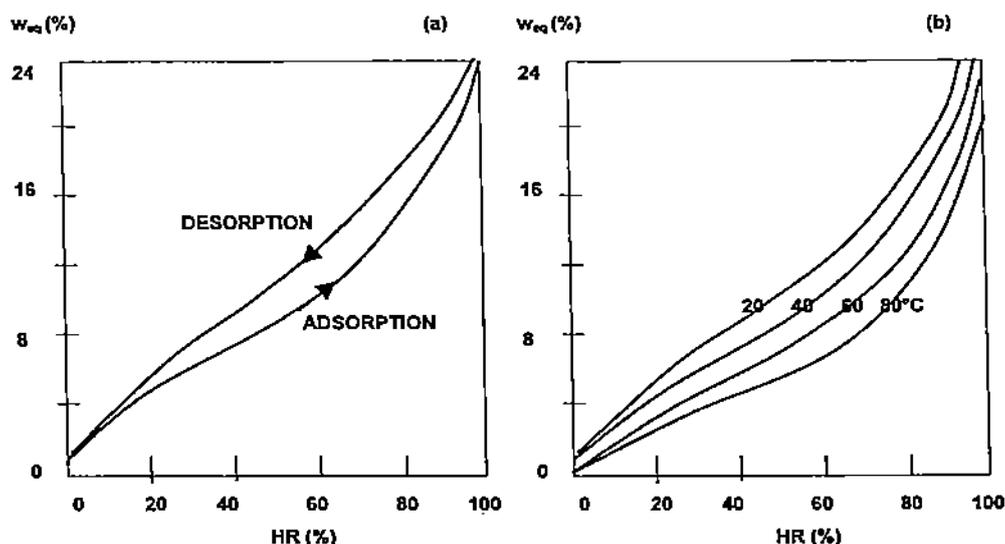


Figure I.2 – (a) Isotherme de sorption du Douglas (b) Isotherme d'absorption de l'épicéa à différentes températures [SKA 88]

Un phénomène d'hystérésis est observé entre l'adsorption et la désorption, figure I.2(a). La teneur en eau d'équilibre  $w_{eq}$  est plus faible pendant l'adsorption que pendant la désorption, due à une déshydratation incomplète des sites de sorption. Enfin, la teneur en eau d'équilibre d'une éprouvette, à une humidité relative donnée, dépend fortement de la température (figure I.2(b)), de l'état de contrainte et de l'histoire de l'humidité [SKA 88]. L'effet de ces deux dernières est encore mal connu jusqu'à nos jours. Or c'est un point essentiel dans l'étude de la mécano-sorption.

### I.3.2 Vieillissement par transfert de masse

Le vieillissement par transfert de masse est associé aux variations des propriétés mécaniques (module d'élasticité, complaisances viscoélastiques, ...) et physiques avec la concentration locale en substance plastifiante (eau). Ce type de vieillissement ne conduit pas à une modification irréversible de la structure chimique du matériau contrairement au vieillissement chimique tel que le vieillissement par coupure de chaîne, par réticulation dans le cas des polymères [VER 00] ou la maturation dans le cas du béton (solidification) [BAZ 79]. Il peut être réversible par un processus inverse.

#### I.3.2.1 Les états de transition du bois

Le bois a un comportement multi-transitions où chaque état de transition est défini à une température donnée. Ces transitions correspondent à une relaxation moléculaire induisant un changement brusque des propriétés mécaniques (module d'élasticité, complaisances viscoélastiques, ...) [SAL 77]. Dans le cas du bois, deux types de transitions ont été identifiés par une spectrométrie mécanique sous des sollicitations mécaniques dynamiques [KEL 87] ou par des essais statiques [GEN 88] (figure I.3) :

- la transition vitreuse (relaxation  $\alpha_1$ ),
- les transitions secondaires (relaxations  $\alpha_2$  et  $\beta$ ).

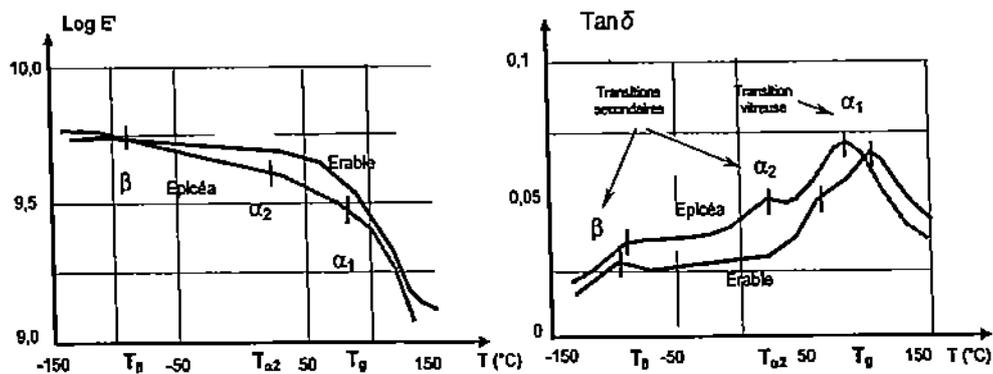


Figure I.3 – Les états de transitions de l'épicéa (résineux) et de l'érable (feuillu) identifiés par une analyse thermomécanique dynamique (DMTA) sur le module dynamique  $E'$  et la tangente de l'angle de perte  $\tan \varphi$  pour une teneur en eau  $w = 8\%$  [KEL 87].

Chaque transition est liée à un constituant chimique du bois : la lignine pour la transition  $\alpha_1$ , les hémicelluloses pour la transition  $\alpha_2$  et l'eau adsorbée pour la transition  $\beta$  [KEL 87], [GEN 88].

La transition vitreuse (relaxation  $\alpha_1$ ) correspond à une plage de température autour d'une valeur de référence appelée température de transition vitreuse  $T_g$  où il apparaît une variation significative des propriétés mécaniques (module d'élasticité, viscosité,...) avec la température. Lorsque la température du bois est très inférieure à  $T_g$ , les molécules n'ont pas assez d'énergie et les distances intermoléculaires (volume libre) sont faibles. Les chaînes polymériques tendent à rester immobiles. Les polymères sont alors fortement liés entre eux par les liaisons hydrogènes. Le bois est dans un état vitreux caractérisé mécaniquement par une rigidité et une viscosité élevées. Le bois tend à avoir un comportement élastique.

Dans la zone de transition vitreuse, le comportement des polymères est instable et aucun équilibre thermodynamique ne peut être considéré. Il varie entre le comportement d'un solide vitreux et le comportement d'un fluide visqueux. Le bois a un comportement viscoélastique caractérisé par sa capacité à dissiper une partie de l'énergie qui lui est fournie, l'autre étant emmagasinée et restituable.

Au-dessus de la transition vitreuse, les distances intermoléculaires (volume libre) sont élevées et l'énergie des liaisons covalentes est faible. Des quantités de liaisons hydrogènes sont rompues si la température est très élevée par rapport à la température de transition vitreuse  $T_g$  et les segments de chaînes peuvent glisser les uns sur les autres. La rigidité et la viscosité sont alors très faibles.

### I.3.2.2 Effet plastifiant de l'eau

Les molécules d'eau absorbées dans la paroi cellulaire peuvent diffuser à travers la structure moléculaire des polymères, diminuant l'énergie de liaisons dans les parties cristallines de la paroi (zones cristallines des microfibrilles de cellulose), et augmentant les volumes libres intermoléculaires dans les parties amorphes (matrice et zones amorphes de la cellulose). Ces dernières entraînent une diminution des frottements entre les chaînes et un accroissement de la mobilité de ces chaînes polymériques. Alors, la rigidité et la viscosité du matériau diminuent localement. L'eau joue ainsi le rôle de plastifiant (ou assouplissant) car en augmentant le volume libre, elle

abaisse la température de transition vitreuse des polymères du bois accentuant le passage d'un état vitreux à un état visqueux [VER 00]. L'effet plastifiant de l'eau sur la cellulose est moins marqué quand le taux de cristallinité de cette dernière est élevé [BAC 82], [AND 88]. La température de transition vitreuse des polymères du bois, en fonction de la teneur en eau et du taux de cristallinité dans le cas de la cellulose, est donnée à la figure I.4 :

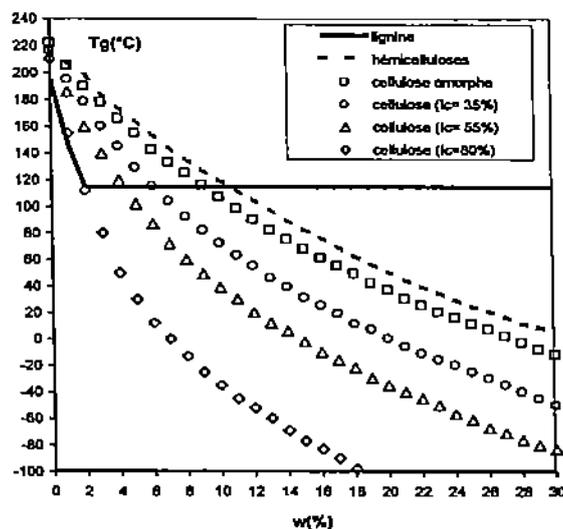


Figure I.4 – Températures  $T_g$  des polymères du bois en fonction de la teneur en eau  $w$  [BAC 82].

Par ailleurs, les liaisons hydrogènes établies entre les chaînes à la faveur des interactions entre leurs groupements fonctionnels et les groupes hydroxyles des polymères peuvent se briser. Sur le plan mécanique, les molécules d'eau augmentent l'amortissement interne  $\tan \delta$  et diminuent la rigidité  $E'$ , figure I.5. En outre, plus le bois est humide, plus les températures de transitions  $T_g$ ,  $T_{\alpha_2}$ ,  $T_{\beta}$  et le module dynamique  $E'$  sont faibles et plus l'amortissement interne  $\tan \delta$  est élevé.

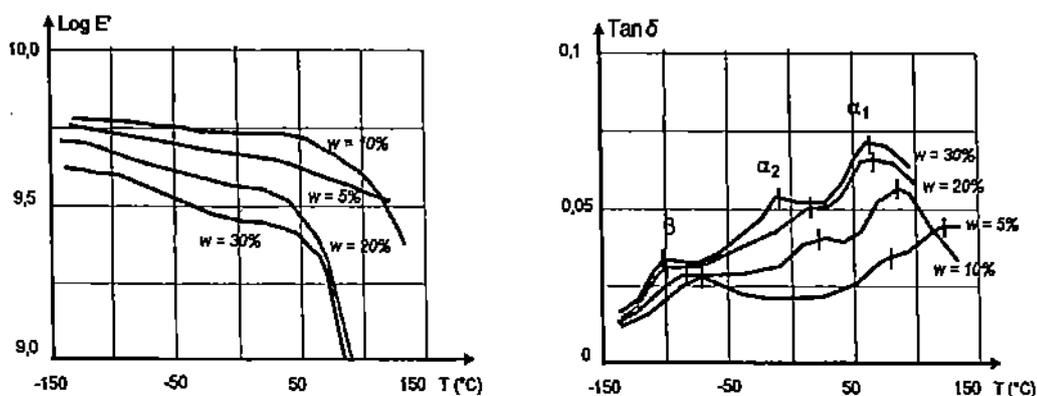


Figure I.5 – Effet de l'humidité sur les propriétés mécaniques dynamiques de l'épicéa :  $\log E'$  et  $\tan \delta$  [KEL 87].

### I.3.3 Cycle de vieillissement par relaxation structurale

Une variation de teneur eau génère une variation de la température de transition vitreuse  $T_g(w)$ , figure I.6. Le bois aura alors différents états suivant sa température par rapport à  $T_g(w)$ .

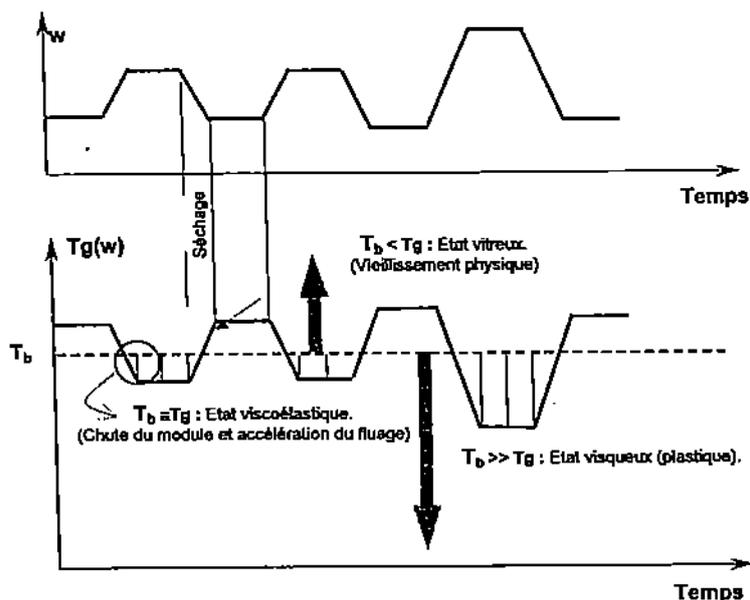


Figure I.6 – Evolution de la température  $T_g(w)$  pendant les cycles d'humidité.

Lorsque la température du bois  $T_b$  est au dessus de  $T_g$ , les polymères amorphes sont dans un état d'entropie relativement élevée avec des volumes libres intermoléculaires considérables et une grande mobilité des chaînes polymériques. La complaisance viscoélastique du matériau augmente et le fluage est accéléré. Si  $T_b$  est très supérieur à  $T_g$ , le comportement devient visqueux. En dessous de  $T_g$  ( $T_b < T_g$ ), le matériau est à l'état vitreux et l'accroissement des déformations diminue par la reformation des liaisons hydrogènes (rigidification). Les chaînes polymériques sont lentement figées. D'autre part, la durée où le matériau est en dessous de  $T_g$ , appelée temps de vieillissement  $t_v$ , est un facteur important sur l'évolution du fluage [STR 78]. En effet, il se produit un vieillissement physique (ou relaxation structurale) lorsque le matériau passe à l'état vitreux ( $T_b < T_g(w)$ ). La théorie du vieillissement physique stipule que les polymères amorphes ne sont pas dans un état d'équilibre thermodynamique en dessous de leurs transitions vitreuses. Les polymères ont tendance à retourner lentement vers l'équilibre modifiant leurs propriétés viscoélastiques [STR 78], [PER 92]. Pendant cette période transitoire, l'évolution du fluage est fonction du temps de vieillissement  $t_v$  représentant la durée entre le temps où le polymère est passé au dessous de la transition vitreuse et le début du chargement, figure I.7.

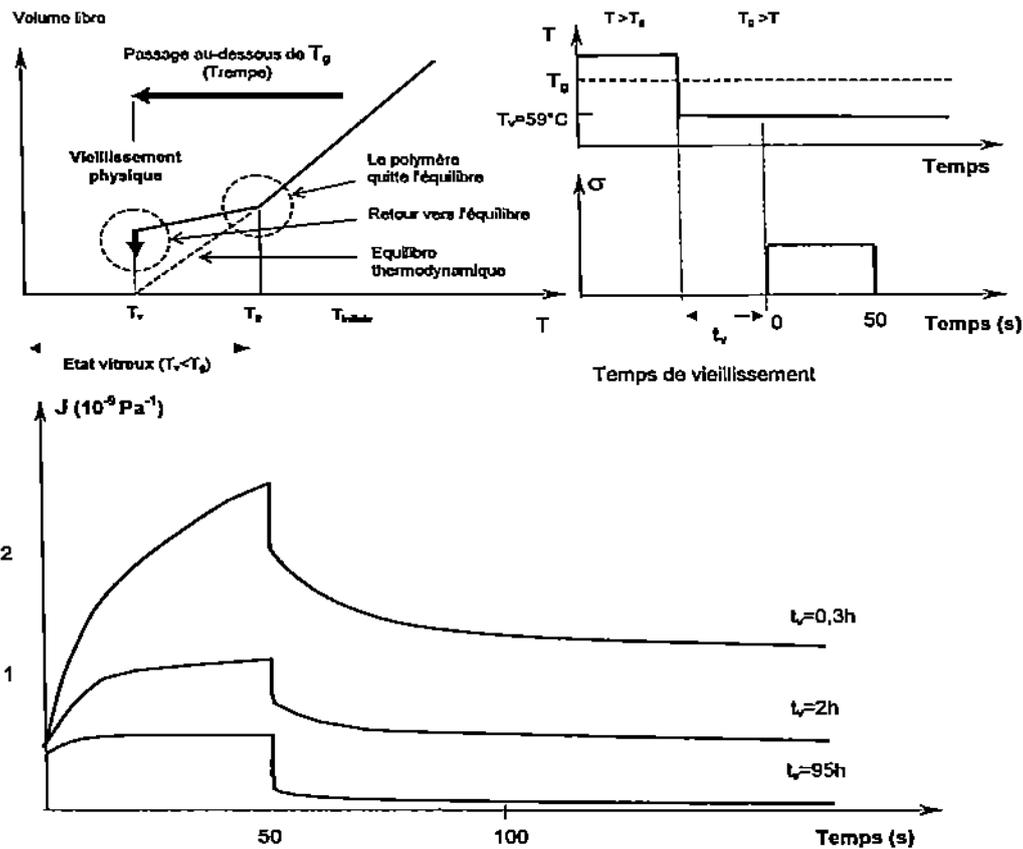


Figure I.7 – Variation du volume libre avec la température au cours du vieillissement physique d'un polymère amorphe porté à la température  $T_v < T_g$  et influence du temps de vieillissement sur le fluage-recouvrance du polymère amorphe Polyester PET (poly téréphthalate d'éthylène) vieilli à  $T_v=59^\circ\text{C}$  [PER 92].

Le vieillissement physique a peu d'influence sur les propriétés à court terme comme le module d'élasticité. Cependant, il agit beaucoup sur les propriétés à long terme. L'aptitude du matériau à se déformer diminue avec le temps de vieillissement. Le vieillissement physique est thermo-réversible par un processus inverse car il suffit de reporter le polymère à la température à partir de la quelle il a été refroidi pour que le même effet de vieillissement soit observé de nouveaux [STR 78], [PAD 93]. Le temps de vieillissement après une absorption affectent aussi les propriétés viscoélastiques à l'instar du temps de vieillissement après une désorption [PAD 93], figure I.8.

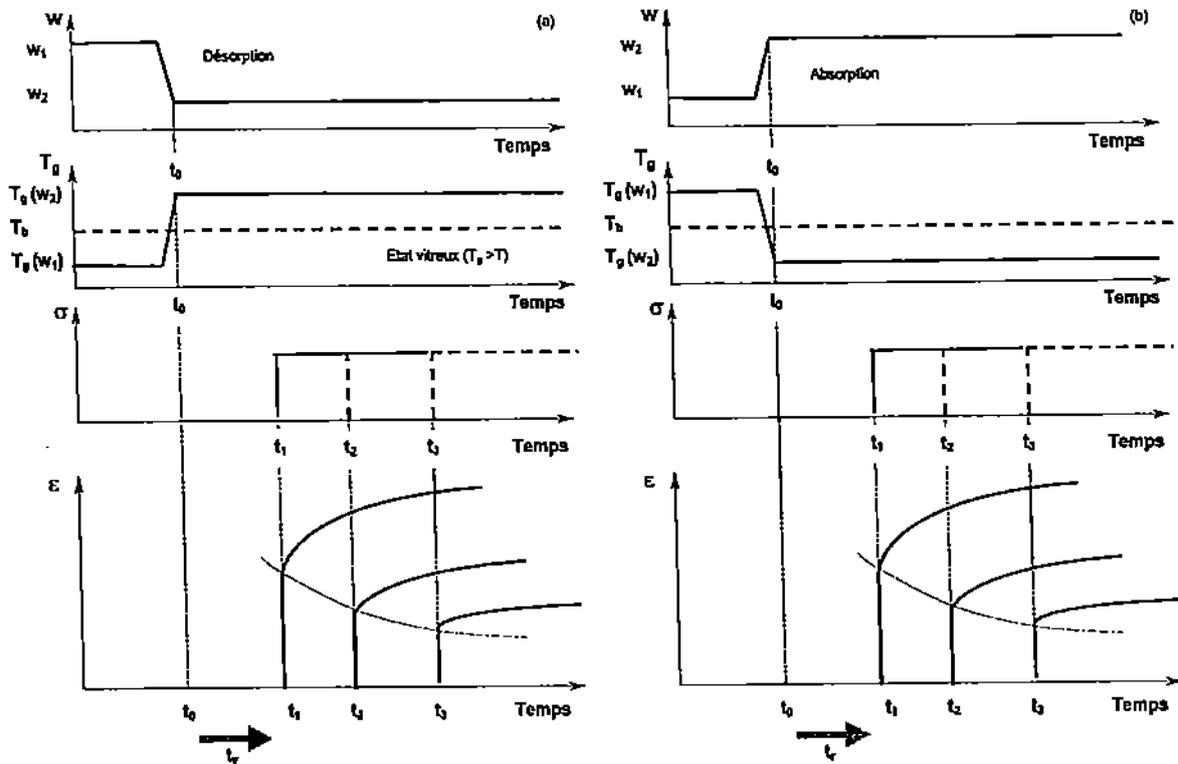


Figure I.8 – Influence du temps de vieillissement après une désorption (a) et après une absorption (b) sur le fluage en condition isotherme.

Au cours des cycles hydriques, l'accélération du fluage peut s'expliquer par une forte instabilité moléculaire, notamment, au début des phases de vieillissement ou des phases de rajeunissement [PAD 93]. Pendant les cycles hydriques, le bois est continuellement dans un état hors équilibre. Dans une condition isotherme, Pandanyi montre que le fluage dépend du temps de vieillissement ( $t_v$ ) après une désorption et une absorption. En d'autres termes, la durée où le matériau est resté dans un état hydrique donné est un paramètre important sur l'évolution du matériau vers un équilibre. La progression du retour vers un état d'équilibre est de forme asymptotique [HUN 96]. Le vieillissement physique et le rajeunissement constituent ainsi un concept supplémentaire dans l'explication à l'échelle moléculaire de "l'accumulation du fluage induite par les variations d'humidité" (mécano-sorption) en complément à la théorie de la rupture et de la reformation des liaisons hydrogènes sous un processus de report de contrainte (stress bias) [GRO 76]. Le fait que la mécano-sorption s'explique au niveau des liaisons hydrogènes est confirmé par les travaux de Norimoto et de Gril [GRI 88] montrant une forte réduction de l'effet mécano-sorptif par des traitements chimiques tels que l'acétylation ou le traitement par formaldéhyde qui réduisent les réactions entre les groupes hydroxyles des polysaccharides (cellulose et hemicelluloses) et les molécules d'eau.

## I.4 Fluage du bois en environnement variable

### I.4.1 Introduction

Le fluage du bois soumis à des variations cycliques d'humidité est similaire à d'autres polymères hygroscopiques [WAN 93], [HAS 94], [HAB 01] qui présentent tous une accélération du fluage à chaque cycle d'humidification et de séchage et une déformation plus élevée que celle obtenue dans un environnement constant et humide. Dans un essai de fluage, on observe initialement une déformation instantanée  $\epsilon_{inst}$  en réponse à l'application d'un chargement mécanique. Si le chargement mécanique et le climat sont constants, la déformation augmente avec le temps. Lorsque l'éprouvette est soumise à des changements d'humidité, on observe une oscillation de la déformation totale. Après un cycle complet d'humidification et de séchage, la déformation totale est plus élevée que la déformation de fluage en environnement constant. L'évolution de la déformation totale de fluage  $\epsilon$  en traction et compression, ainsi que le retrait-gonflement libre  $\epsilon_{w0}$ , sont présentés à la figure I.9.

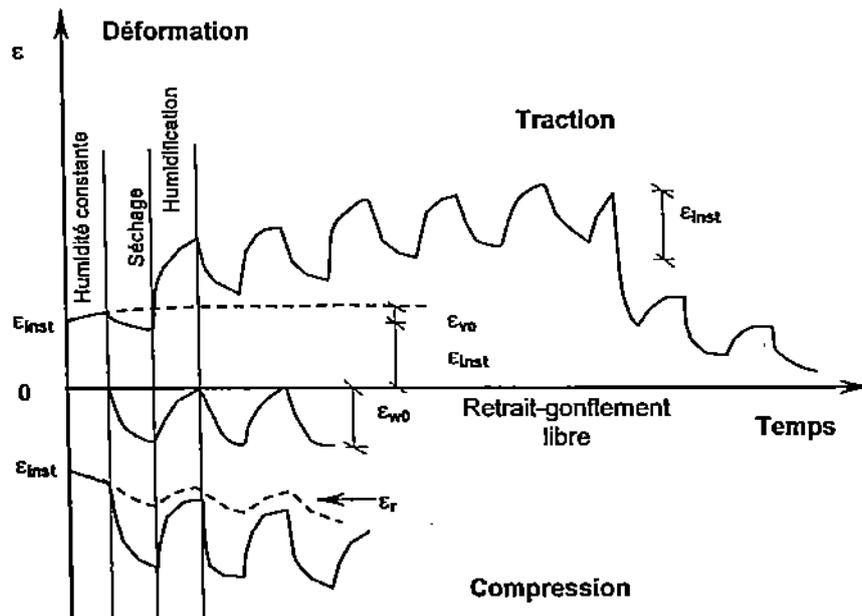


Figure I.9 – Evolution de la déformation de fluage  $\epsilon$  en traction et compression et du retrait-gonflement libre  $\epsilon_{w0}$ .

Dans le cas d'un essai de flexion (figure I.10), la déformation mesurée est la flèche  $\delta$ . La réponse en flexion résulte des réponses des zones comprimées et tendues dans la section de la poutre (compression sur les fibres supérieures et traction sur les fibres inférieures). Une flèche élastique instantanée  $\delta_{inst}$  est constatée à l'application du chargement. Si le chargement et l'humidité sont maintenus constants, la flèche, représentée par le fluage normal  $\delta_{ve}$ , augmente dans le temps. Lorsque l'humidité varie, des oscillations de la flèche sont observées. Alors que le retrait-gonflement libre n'a pas d'influence sur la courbure de la poutre, les oscillations observées représentent la différence de réponses entre les zones comprimées et tendues. La flèche mécano-sorptive est définie par  $\delta_{ms} = \delta - \delta_{inst} - \delta_{ve}$  [HUN 89], [MAR 92]. Un essai de flexion rend ainsi plus facile l'estimation de la magnitude de la mécano-sorption par rapport à un essai uniaxial.

Cependant, il est difficile d'estimer l'influence des zones comprimées et tendues à chaque changement d'humidité.

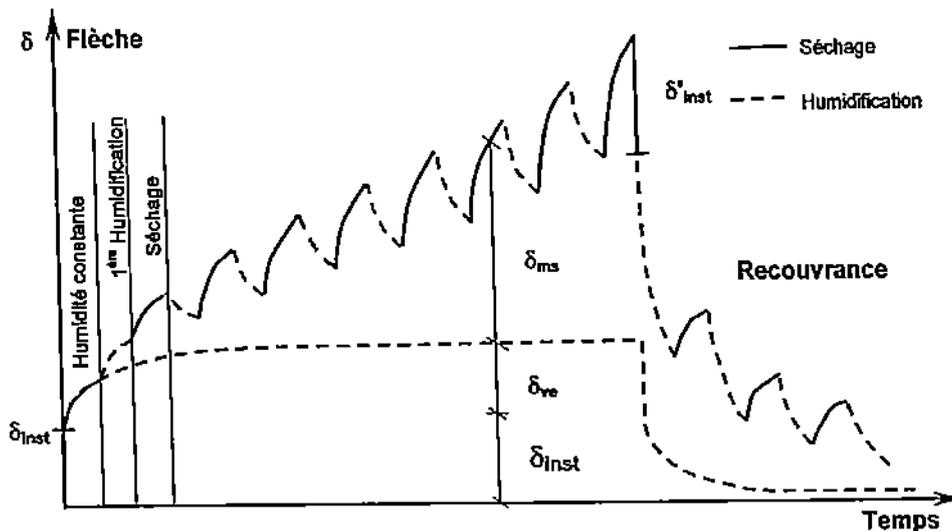


Figure I.10 – Evolution de la flèche d'une poutre soumise à des variations d'humidité.

#### I.4.2 Description phénoménologique du fluage

Dans la littérature, le fluage d'une éprouvette soumise à des variations d'humidité est souvent décomposé en trois parties : le fluage viscoélastique, le fluage mécano-sorptif et le retrait-gonflement. Le fluage viscoélastique dépend des niveaux de contrainte, de température et d'humidité. Dans la plupart des études, il est identifié à une température et une humidité constantes. Le fluage mécano-sorptif, quand à lui, est associé aux variations d'humidité. Les oscillations des déformations sont attribuées aux déformations hydriques. Nous présentons ici les principales caractéristiques du comportement différé du bois en environnement variable :

##### a- Interaction entre les fluages viscoélastiques et mécano-sorptifs :

- Pittet montre que le temps d'application des variations hydriques n'a pas d'influence sur le fluage mécano-sorptif, soutenant l'hypothèse de l'indépendance temporelle du fluage mécano-sorptif [PIT 96]. Par ailleurs, la flèche totale dépend essentiellement de l'amplitude des variations d'humidité et moins de la vitesse de celles-ci [SCH 68]. Le fluage mécano-sorptif peut être considéré comme indépendant du fluage viscoélastique. Cependant, Hunt et Gril [HUN 96] montrent que le fluage sous des variations rapides d'humidité est légèrement plus élevé que sous des variations lentes. Le fluage mécano-sorptif n'est donc pas totalement indépendant du temps. En outre, la cinétique de fluage viscoélastique (environnement constant) est plus faible après une période de cycles hydriques sous chargement mécanique [HAN 98].

- Le fluage viscoélastique (dépendant du temps) est prédominant si l'éprouvette a été conditionnée à une humidité élevée pendant longtemps. Pour un conditionnement à une faible humidité, le fluage mécano-sorptif (dépendant du variations d'humidité) est prédominant [HAN 98].

b - Influence du type de sollicitation :

- La déformation corrigée de traction ( $\varepsilon_r = \varepsilon - \varepsilon_{w0}$ ) augmente pendant le séchage [ARM 62]. Une déformation de traction réduit ainsi le retrait et inversement pour la compression.

- Lorsque l'humidité d'une éprouvette en flexion varie entre deux bornes fixes, la flèche augmente aux séchages et à la première humidification si c'est le premier changement d'humidité sous chargement. Par contre, elle diminue pour les humidifications ultérieures, figure I.11 [HEA 64].

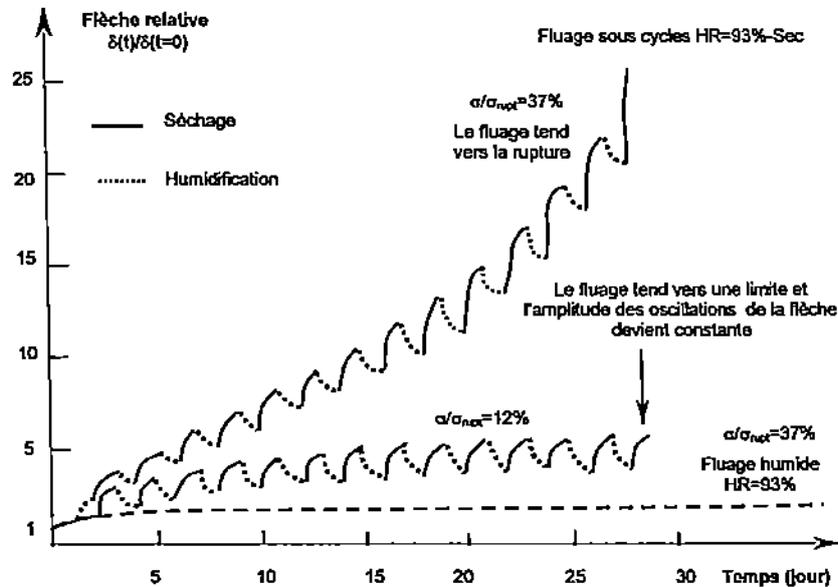


Figure I.11 – Influence du niveau de contrainte sur la limite de fluage [HEA 64].

- L'effet des variations d'humidité, sur le fluage en traction et en compression, est plus prononcé lorsque d'humidité actuelle dépasse l'humidité maximale jamais atteinte par l'éprouvette pendant le chargement.

c - Influence du niveau de chargement et linéarité du comportement par rapport à la contrainte :

- Une éprouvette soumise à un faible niveau de contrainte et à des cycles d'humidité présente une oscillation de la flèche avec une amplitude qui augmente avec la flèche totale. Après un certain nombre de cycles, cette amplitude tend vers une valeur constante. A des niveaux de contraintes élevées, l'amplitude augmente continuellement et amène la rupture de l'éprouvette, figure I.11 [HEA 64], [MOH 93]. Les oscillations de la flèche sont liées au comportement des zones comprimées et tendues de la section et l'évolution du fluage en compression est la même qu'en flexion [HUN 88].

- Pour un faible niveau de contrainte, ce qui concerne généralement les éléments de structure, le fluage est linéaire avec la contrainte. La limite de linéarité matérielle dépend du type de sollicitation (traction, compression, flexion), du niveau de contrainte et du niveau d'humidité. La linéarité n'est vérifiée que si la recouvrance est totale après un temps suffisamment long après

le déchargement mécanique. La limite de linéarité du fluage se situe à une contrainte comprise entre 10% et 20% de la contrainte de rupture  $\sigma_{rupt}$  en compression et entre 20% et 30% de  $\sigma_{rupt}$  en traction et flexion [HUN 88].

**d - Existence d'une limite de fluage :**

Lorsqu'une éprouvette est soumise à des cycles d'humidité avec des bornes de variations fixées dans le domaine linéaire, l'accroissement de flèche par cycle tend à diminuer et la flèche tend à se stabiliser vers une valeur limite, figure I.11 [HUN 89]. Cependant, l'existence d'une limite de fluage est très discutée, notamment, par les essais multi-palier [GRI 88].

**e - Influence de l'état mécanique sur la déformation hydrique :**

• A l'état limite du fluage, où le fluage s'est stabilisé, l'amplitude des oscillations, due aux variations hydriques, est constante. Ces oscillations représentent la déformation hydrique. Hunt a montré qu'elle est plus faible sous une déformation de traction, et plus élevée sous une déformation de compression comparée au retrait-gonflement libre [HUN 89], [HUN 94].

• Dans le cas d'une flexion, il apparaît une flèche supplémentaire au fluage viscoélastique. Elle est attribuée à la différence d'amplitude, entre le retrait et le gonflement longitudinal pour une même amplitude de variation d'humidité, induite par l'état de déformation des zones tendues et comprimées [HUN 89].

**f - Recouvrance :**

• Une recouvrance élastique instantanée est observée après un déchargement total de la contrainte. Elle est supérieure ou égale à la réponse élastique initiale dans le même climat (effet mémoire) [GIB 65], [MOH 93], [PIT 96].

• L'évolution de la recouvrance est similaire au fluage viscoélastique. Elle est accélérée par les variations d'humidité, notamment, à la première humidification, figure I.12. Elle est plus grande pendant l'humidification que pendant le séchage [CHR 62], [RAN 75], [PIT 96].

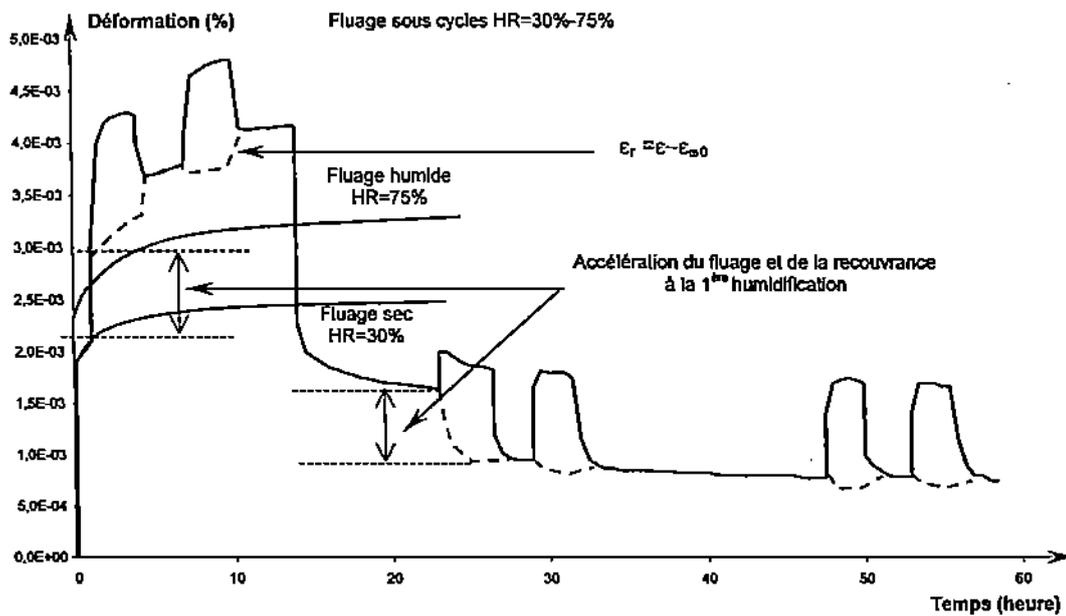


Figure I.12 – Fluage-recouvrance en traction sous des cycles hygrométriques entr 30% et 75% à une température  $T=21,5^{\circ}\text{C}$  sur une petite éprouvette (3 mm×0,7 mm×30 mm) de pin maritime [PIT 96].

**g - Influence des variations thermiques :**

Un comportement similaire à la mécano-sorption n'existe pas pour les variations de température. Toratti montre que les variations cycliques de température entre  $20^{\circ}\text{C}$  et  $-5^{\circ}\text{C}$  sur une poutre enduite de pare vapeur de section (33 mm×33 mm×860 mm) n'induisent pas une accumulation du fluage [TOR 92]. Le fluage observé est inférieur au fluage à une température constante de  $20^{\circ}\text{C}$ . De même, Fridley constate que la durée de vie d'une poutre de section (50 mm×100 mm) est plus courte sous une température constante de  $55^{\circ}\text{C}$  que sous des cycles thermiques entre  $20^{\circ}\text{C}$  et  $55^{\circ}\text{C}$  [FRI 89], [FRI 90].

**h - Influence des cycles hygrométriques et de la contrainte sur la sorption**

- La teneur en eau d'équilibre  $w_{eq}$  est plus élevé pendant une désorption initiale du bois vert comparée aux adsorptions et aux désorptions ultérieures, figure I.13 (a) [SKA 88]. Par ailleurs, les isothermes de sorption pour des cycles hygrométriques d'amplitude constante sont inclus dans l'hystérésis des isothermes enveloppes désorption-absorption obtenues pour une variation hygrométrique entre  $\text{HR}=0\%$  et  $\text{HR}=100\%$ .

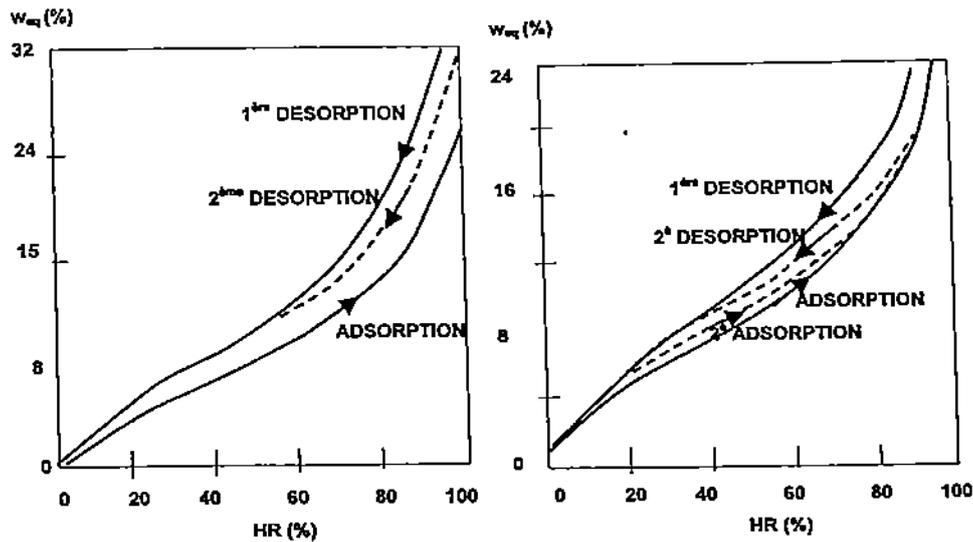


Figure I.13 – (a) Isotherme de sorption ( $T=32^{\circ}\text{C}$ ) pour la désorption initiale, la résorption et la seconde désorption. (b) Isotherme de sorption du Douglas sous cycles hygrométriques [SKA 88].

• L'application d'une contrainte modifie la sorption. La sorption est accélérée et la teneur en eau d'équilibre est plus élevée sous une contrainte de traction comparée à celle d'une éprouvette non chargée [LIB 67], [SIM 71], [CAS 87],[SKA 88], figure I.14. En effet, une contrainte de compression densifie la paroi cellulaire du bois entraînant une diminution des volumes libres et des sites de sorption. Le coefficient de diffusion est plus faible à l'absorption par rapport à la désorption. Par ailleurs, si on applique une pression hydrostatique qui s'oppose au gonflement d'une éprouvette, la teneur en eau d'équilibre est plus faible comparée à celle d'une éprouvette non chargée.

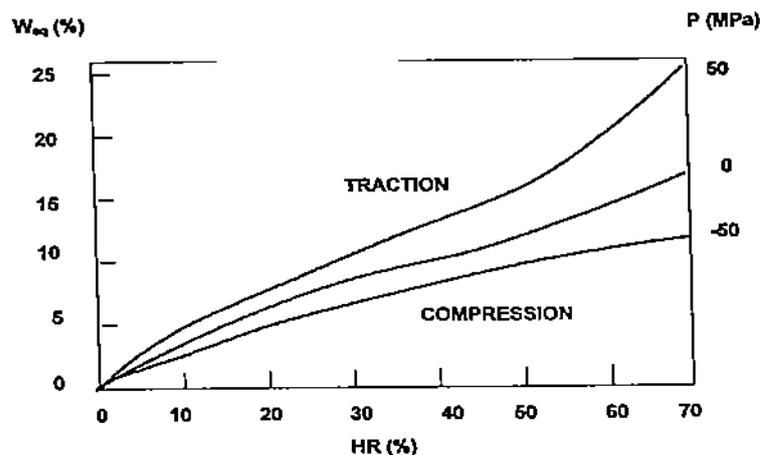


Figure I.14 – Isotherme de sorption de l'épicéa en relation à la pression hydrostatique.

i- Evolution de la teneur en eau dans une poutre de structure

Le comportement des poutres de structure est lié aux variations de teneur en eau locale qui dépendent de la taille de l'élément. Plus l'épaisseur de la section est faible, plus l'effet mécano-sorptif est important [GRO 76]. Cependant, la flèche relative d'une poutre (44 mm×97 mm×3900 mm) est aussi grande que la flèche relative d'une éprouvette de petite dimension (10 mm×10 mm×300 mm) sous une même contrainte de flexion de 10 MPa et des cycles hygrométriques entre 15% et 90% de période de 20 jours à une température ambiante de 20°C [MOH 93]. Les variations climatiques journalières n'ont aucune influence sur le fluage des poutres de sections supérieures à (45 mm×1000 mm). Tandis que les variations mensuelles ou saisonnières sont déterminantes pour les sections (45 mm×1000 mm), elles laissent insensibles les plus fortes sections (190 mm×600 mm) [LEB 97], [LAS 00]. Une accélération du fluage est observée sur des poutres en bois massif (45 mm×45 mm×1040 mm) soumises à des cycles hygrométriques entre 30% et 90% avec une période de 14 jours [MOH 93]. En effet, la distribution de l'humidité dans une section de poutre dépend de l'épaisseur de l'élément, des caractéristiques des cycles climatiques (période, amplitude), des coefficients de transfert hydrique et du coefficient d'échange convectif avec l'air ambiant. La distribution de teneur en eau dans une section de poutre (345 mm×169 mm), soumise à une variation climatique saisonnière, est présentée à la figure I.15.

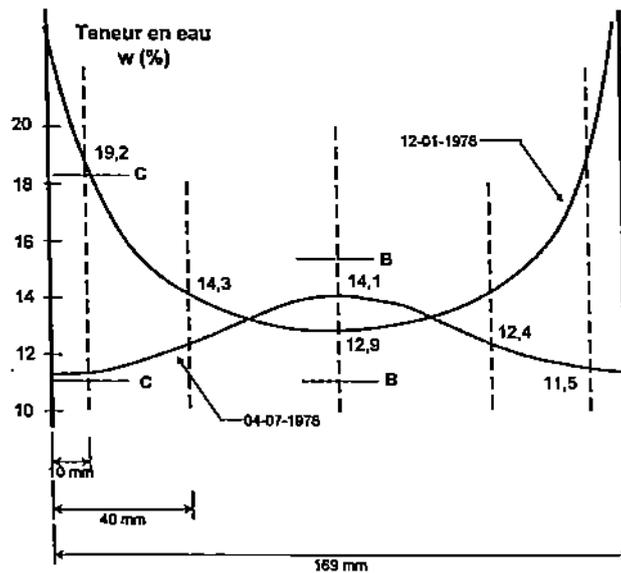


Figure I.15 – Distribution de teneur eau dans la section de poutre (345 mm×169 mm) un jour d'été et un jour d'hiver [THE 94].

Par ailleurs, la figure I.16 montre l'évolution de la teneur en eau en divers points de cette même section (345 mm×169 mm) soumise à une variation climatique journalière.

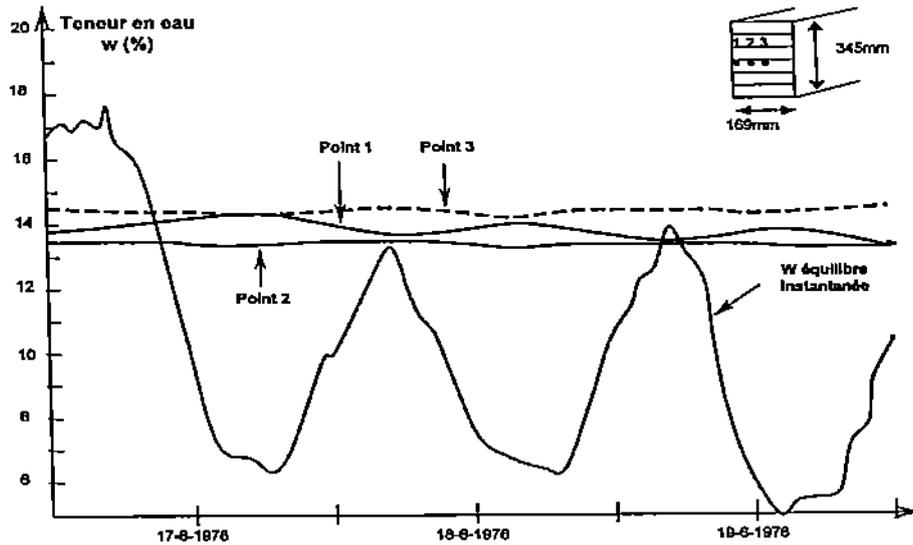


Figure I.16 – Evolution de la teneur en eau d'équilibre et de la teneur eau à 10 mm de la surface (point 1), à 40 mm de la surface (point 2) et au centre de la section (point 3) de poutre (345 mm×169 mm) soumise à une variation hydrique journalière [THE 94].

## I.5 Modélisation du fluage du bois en environnement variable - Etat de l'art

La modélisation du comportement du bois en environnement variable (mécano-sorption) a commencé au début des années soixante dix. Deux types de modèles ont été développés. D'une part, les modèles phénoménologiques, basés sur les observations macroscopiques de la déformation, sont mathématiques. D'autre part, les modèles physiques sont fondés sur une interprétation physique de la déformation observée en relation avec la microstructure et la structure moléculaire du bois.

Nous présentons ici une synthèse des modèles phénoménologiques du fluage du bois en environnement variable existant dans la littérature et reposant sur deux hypothèses :

- Le fluage total est considéré comme une partition du fluage viscoélastique dépendant du temps, du niveau d'humidité et du fluage mécano-sorptif lui-même dépendant des variations d'humidité mais pas du temps. Ce découpage est souvent adopté et suppose que l'ensemble des déformations est faiblement couplé. Ces modèles sont appelés "modèle à activation indépendante".

- L'effet du temps et celui des variations d'humidité ne peuvent pas être découplé indépendamment l'une de l'autre. Le modèle est appelé "modèle à activation combinée".

Dans ce contexte, on distingue les hypothèses de partition des déformations suivantes :

Déformation totale	
Modèle à activation indépendante	$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_{w0}(t)$
	$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_{w0}(t) + \varepsilon_{w\sigma}(t)$
Modèle à activation combinée	$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve+ms}(t) + \varepsilon_{w0}(t)$
	$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve+ms}(t) + \varepsilon_{w0}(t) + \varepsilon_{w\sigma}(t)$

Tableau I.1 - Partitions des déformations

avec

- $\varepsilon(t)$  : déformation totale,
- $\varepsilon_e(t)$  : déformation élastique instantanée,
- $\varepsilon_{ve}(t)$  : déformation viscoélastique,
- $\varepsilon_{w0}(t)$  : déformation de retrait-gonflement libre,
- $\varepsilon_{w\sigma}(t)$  : déformation due à l'influence mécanique sur le retrait-gonflement tel que,  
 $\varepsilon_w(t) = \varepsilon_{w0}(t) + \varepsilon_{w\sigma}(t)$ ,
- $\varepsilon_{ms}(t)$  : déformation mécano-sorptive,
- $\varepsilon_{ve+ms}(t)$  : déformation traduisant l'hypothèse que le fluage dépendant du temps et le fluage dépendant des variations d'humidité sont indissociables sur l'évolution du fluage.

Les termes sont traités en associant à chacun d'eux une équation différentielle ou une inté-

grale héréditaire. La partie viscoélastique est traitée de deux manières dans les modèles, soit par rapport à une humidité constante de référence, soit par rapport à une humidité donnée en considérant le bois comme un matériau thermo-hydro-rhéologiquement simple obéissant au principe de superposition temps-température-humidité. La fonction de fluage, à cette humidité et à un temps donné, est alors déduite d'une courbe maîtresse par une translation temporelle horizontale.

Enfin, chaque modèle est caractérisé par leur aptitude à traiter la recouvrance mécano-sorptive observée pendant les changements d'humidité après déchargement mécanique.

### I.5.1 Modèle à "activation indépendante"

Les premiers modèles mécano-sorptifs [LEI 71], [RAN 75] ont été développés sur la base d'un modèle de type "Maxwell", figure I.17. Le fluage mécano-sorptif est décrit par un "amortisseur mécano-sorptif" dans lequel la variable "accroissement hydrique"  $|dw|$  est utilisée à la place de la variable "accroissement temporelle"  $dt$  dans la loi de Newton. La relation  $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma$  est alors remplacée par  $\frac{d\epsilon}{dw} = m \sigma$ . Ce type de modèle est le plus élémentaire mais il ne décrit pas la recouvrance mécano-sorptive quand l'humidité interne continue à varier alors que la contrainte est nulle.

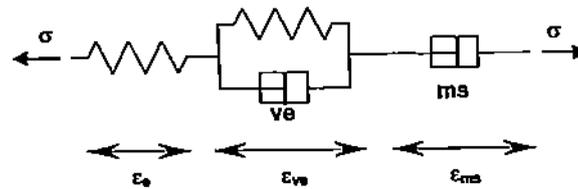


Figure I.17 - Modèle de type "Maxwell".

La deuxième catégorie de modèle mécano-sorptif est de type "Kelvin", figure I.18 [HUN 88], [YAH 91], [TOR 92], [MAR 97]. Dans ce type de modèle, l'amortisseur mécano-sorptif est placé en parallèle avec un ressort. Il présente l'avantage de décrire la recouvrance mécano-sorptive et le ralentissement du fluage quand l'amplitude du fluage total accumulé augmente.

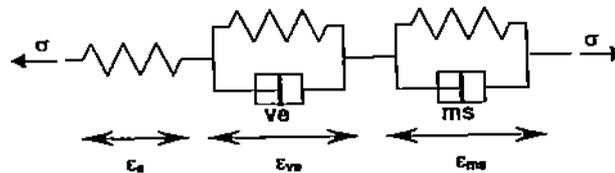


Figure I.18 - Modèle de type "Kelvin".

Une propriété, commune aux deux modèles, est l'utilisation de la valeur absolue  $|dw|$  dans la modélisation du fluage mécano-sorptif. Ceci implique l'hypothèse que le fluage est similaire pendant l'humidification et pendant le séchage. Le fluage mécano-sorptif est observé à la fois pendant l'humidification et pendant le séchage. Mais, l'accumulation de fluage n'est pas la même dans les deux cas [HAN 95]. Dans les modèles de type "Maxwell" et "Kelvin", le modèle du fluage mécano-sorptif est séparé de celui du fluage viscoélastique. Ils sont associés en série. Cependant,

il est montré que les deux mécanismes sont corrélés bien que le couplage ne soit pas très fort [HAN98].

### I.5.1.1 Modèle de Leicester (1971)

Le modèle de Leicester [LEI 71], [LU 97] est le premier modèle phénoménologique du fluage du bois en environnement variable. Le modèle est basé sur la décomposition de la déformation totale en une déformation élastique et une déformation mécano-sorptive, tel que :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ms}(t) \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_{ms}(t) \quad [I.2]$$

La cinétique de déformation élastique est définie par la loi tangente :

$$\dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{k} \quad [I.3]$$

Le module d'élasticité  $k$  du bois n'est pas précisé si celui-ci est indépendant de l'humidité  $w$ . La déformation mécano-sorptive, générée par l'interaction entre la contrainte et les variations d'humidité, est déduite de l'équation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ms}(t) = \frac{\sigma(t)}{k} f(w(t)) \quad [I.4]$$

où  $f(w(t))$  définit un facteur de fluage incrémental tel que :

$$f(w(t)) = \begin{cases} -m \dot{w}(t) & \text{Séchage} \\ 0 & \text{Humidification} \\ -2m w_0 \Delta N & \text{Cycles hydriques avec } w(t) = w_{\text{moy}} + w_0 \sin \omega t \end{cases} \quad [I.5]$$

$\Delta N$  est le nombre de cycle dans l'incrément de temps  $dt$  et  $m$  est un paramètre du matériau.

### I.5.1.2 Modèle de Ranta-Maunus (1975)(1989)

Ranta-Maunus [RAN 75], [RAN 88] propose un modèle rhéologique où la déformation totale est le cumul de la déformation élastique, de la déformation viscoélastique (définies pour toutes les humidités de l'expérience), du retrait-gonflement libre et de la déformation mécano-sorptive :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_{w0}(t) \quad [I.6]$$

Le module d'élasticité du bois  $k(w, T)$  dépend de l'humidité  $w$  et la température  $T$ . La cinétique de déformation élastique n'est pas définie par la loi de Hooke mais par la loi tangente :

$$\dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{1}{k(w(t), T(t))} \dot{\sigma}(t) \quad [I.7]$$

Le retrait-gonflement libre  $\varepsilon_{w0}(t)$  est donné par la relation :

$$\dot{\varepsilon}_{w0}(t) = \alpha \dot{w}(t) \quad [I.8]$$

Enfin, la cinétique de déformation mécano-sorptive est représentée par la relation :

$$\dot{\varepsilon}_{ms}(t) = m \sigma(t) \dot{w}(t) \quad [I.9]$$

Le coefficient hydro-viscoélastique  $m$  peut prendre les valeurs ( $m^+$ ,  $m^{++}$ ) pour une humidification et ( $m^-$ ) pour un séchage. Ce coefficient distingue la première humidification (par l'utilisation de  $m^{++}$ ) des autres. Ce modèle, en isolant l'effet de la première variation hydrique, donne de bons résultats en regard de l'expérimentation. Cependant, la recouvrance est ignorée, qu'elle soit partielle ou totale. La déformation mécano-sorptive peut être aussi interprétée comme étant l'influence de l'état de contrainte et du processus de diffusion (humidification ou séchage) sur le retrait-gonflement.

### I.5.1.3 Modèle de Hunt (1988)

A la différence de Ranta-Maunus, Hunt propose la partition de la déformation totale suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_w(t) \quad [I.10]$$

où le retrait-gonflement  $\varepsilon_w(t)$  dépend de l'état de déformation du matériau, tel que :

$$\dot{\varepsilon}_w(t) = \dot{\varepsilon}_{w0}(t) + \dot{\varepsilon}_{w\sigma}(t) = (\alpha + m\varepsilon(t)) \dot{w}(t) \quad [I.11]$$

avec le retrait-gonflement libre :

$$\dot{\varepsilon}_{w0}(t) = \alpha \dot{w}(t) \quad [I.12]$$

et l'influence de l'état mécanique :

$$\dot{\varepsilon}_{w\sigma}(t) = m \varepsilon(t) \dot{w}(t) \quad [I.13]$$

où  $m$  est un paramètre constant indépendant du changement d'humidité. On remarque que  $\dot{\varepsilon}_{w\sigma}(t)$  est de même forme que  $\dot{\varepsilon}_{ms}(t)$  du modèle de Ranta-Maunus [I.9] en remplaçant  $\sigma$  par  $\varepsilon$  et en prenant un coefficient  $m$  indépendant des conditions d'humidification et de séchage. En se basant sur la représentation des trajectoires mécano-sorptives par la courbe  $\varepsilon_{ms} = f(w)$ , Hunt montre qu'on peut lisser de manière précise la déformation mécano-sorptive en utilisant l'équation suivante [HUN 88], [HUN 94] :

$$\varepsilon_{ms}(t) = \left[ J_1 \left( 1 + e^{-\frac{\sum |S_w|}{u_1}} \right) + J_2 \left( 1 + e^{-\frac{\sum |S_w|}{u_2}} \right) \right] \sigma_0 \quad [I.14]$$

$S_w$  est une variation quelconque de l'humidité du bois.  $J_1$  et  $J_2$  sont des complaisances mécano-sorptives.  $u_1$  et  $u_2$  sont des temps de relaxation. Les simulations montrent que ce modèle ne considère pas l'accélération de la déformation lorsque l'humidité est supérieure aux précédentes humidités sous chargement mécanique [TOR 92].

### I.5.1.4 Modèle de Toratti (1992)

Considérant la partition des déformations [I.12] et l'influence de l'état de déformation du matériau sur le retrait-gonflement [I.11] [HUN 89], la déformation mécano-sorptive est définie par l'équation différentielle introduisant l'hypothèse d'une limite de fluage et l'effet mémoire du chargement sur la déformation mécano-sorptive [HUN 89] :

$$\dot{\varepsilon}_{ms} = \frac{J^\infty \sigma - \varepsilon_{ms}}{\tau_{ms}} |\dot{w}| \quad [I.15]$$

ou encore

$$\varepsilon_{ms}(t) = \int_0^t J^\infty \left[ 1 + e^{\left( -\frac{1}{\tau_{ms}} \int_\tau^t |dw(\mu)| \right)} \right] \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad [I.16]$$

$J^\infty$  est la complaisance mécano-sorptive tandis que  $\tau_{ms}$  représente le temps de relaxation du fluage mécano-sorptif. Dans ce cas, les déformations, dues aux effets mécano-sorptifs, ont une valeur limite pour de faibles niveaux de contrainte. Ce genre de modèle permet de prendre en compte la recouvrance mécano-sorptive pendant les changements d'humidité. Par ailleurs, le fluage viscoélastique  $\varepsilon_{ve}(t)$  est toujours interpolé par le modèle Kelvin-Voigt généralisé à une humidité constante de référence.

### I.5.1.5 Modèle de Salin (1992)

Considérant la partition des déformations [I.6], une forme différentielle de la déformation mécano-sorptive, de type Kelvin, a été introduite par Salin [SAL 92] :

$$\dot{\varepsilon}_{ms} = (m \sigma - k_{ms} \varepsilon_{ms}) |\dot{w}| \quad [I.17]$$

Ce modèle est identique au modèle de Toratti [I.16] et au modèle de Ranta-maunus [I.9] avec  $m$  constant et en posant  $k_{ms} = 0$ .

### I.5.1.6 Modèle de Martensson et Svensson (1997)

Le modèle de Martensson et Svensson [MAR 97], [SVE 99] est fondé sur la partition du taux de déformation totale en quatre termes :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_{ve}(t) + \dot{\varepsilon}_{ms}(t) + \dot{\varepsilon}_{w0}(t) \quad [I.18]$$

Le retrait-gonflement libre  $\varepsilon_{w0}$  est défini par la relation :

$$\dot{\varepsilon}_{w0}(t) = \alpha \dot{w}(t) \quad [I.19]$$

Le coefficient de retrait-gonflement  $\alpha$  est indépendant du taux d'humidité  $w$ . Comme dans le modèle de Ranta-Maunus, la cinétique de déformation élastique est donnée par la loi tangente :

$$\dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{k(T, w)} \quad [I.20]$$

$k(T, w)$  est le module élastique dépendant de la température et du taux d'humidité. L'évolution du fluage viscoélastique dépendant du temps est donnée par la forme différentielle de Kelvin-Voigt :

$$\dot{\varepsilon}_{ve} = \sum_{m=1}^M \frac{J^{(m)} \sigma - \varepsilon^{(m)}}{\tau^{(m)}} \quad [I.21]$$

$J^{(m)}$  et  $\tau^{(m)}$  sont des paramètres du matériau indépendant du taux d'humidité. Le fluage viscoélastique, à une température et une humidité données, est obtenu à partir d'une courbe maîtresse et d'une fonction de translation  $a_{T,w}$  en appliquant le principe de superposition temps-température-humidité. On en déduit alors un temps réduit  $\xi$  tel que :

$$d\xi = \frac{dt}{a_{T,w}(T, w)} \quad [I.22]$$

Enfin, la déformation mécano-sorptive est définie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ms} = \frac{J_{ms} \sigma - \varepsilon_{ms}}{\tau_{ms}} |\dot{\varepsilon}_w| \quad [I.23]$$

$J_{ms}$  est la complaisance mécano-sorptive indépendante de la température et  $\tau_{ms}$  le coefficient de relaxation dépendant de la température.

### I.5.1.7 Synthèse des différents modèles à "activation indépendante"

Les modèles de type "Maxwell" et "Kelvin" montrent une accumulation du fluage lors des variations d'humidité. Cependant les deux types de modèles se différencient par leur comportement à la recouvrance. En effet, le modèle de type "Kelvin" (Toratti, Hunt, Martensson) permet une recouvrance totale de la déformations mécano-sorptive accumulée lors des variations d'humidité après déchargement, contrairement au modèle de type "Maxwell" (Ranta-Maunus, Leicester), où la déformation mécano-sorptive pendant le fluage est en partie irréversible après déchargement totale de la contrainte. Par ailleurs, le modèle de type "Kelvin" admet un ralentissement du fluage vers une valeur limite après quelques cycles d'humidité, contrairement au modèle de "Maxwell" où une limite n'existe pas.

### I.5.2 Modèle à "activation combinée"

Plusieurs auteurs ont proposé des approches unifiées des deux mécanismes de fluage (viscoélasticité, mécano-sorption) [HUN 96], [HUN 99], [YAH 91], [BAZ 85], [GRI 88], [HAN 95]. On en déduit alors le modèle à "activation combinée" (combinaison de l'activation du fluage viscoélastique et mécano-sorptif), figure I.19.

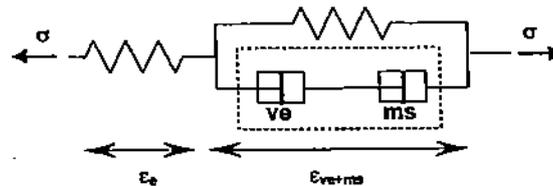


Figure I.19 - Modèle à "activation combinée".

#### I.5.2.1 Modèle de Schaffer (1972)

Le modèle Schaffer [SCH 72] est basé sur le comportement des liaisons intermoléculaires et sur la capacité de l'eau à diminuer l'énergie nécessaire à augmenter la distance entre les molécules. En réduisant l'énergie nécessaire à déformer le matériau, l'eau a les mêmes effets que la température et la contrainte. Les effets de la contrainte  $\sigma_0$ , de la température  $T$ , de l'humidité  $w$  et de la cinétique de diffusion  $\dot{w}$  sont alors introduites dans l'expression de la vitesse de fluage de la manière suivante :

$$\dot{\epsilon}(t) = S \left( 1 + \frac{\dot{w}(t)}{\rho} \right) e^{\left( -\frac{Q_S}{RT} + \beta \frac{\sigma_0}{T} + \gamma w(t) \right)} \quad [I.24]$$

$Q_S$  représente l'énergie d'activation d'un changement de position moléculaire.  $S$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  sont des paramètres du matériau,  $f$  la fraction de liaisons non rompues et  $\frac{\sigma_0}{f}$  la contrainte par liaison.

#### I.5.2.2 Modèle de Bazant (1985)

Le modèle de Bazant [BAZ 85] est composé d'un modèle de Maxwell généralisé associé à un élément de retrait-gonflement. Le fluage est accéléré par le processus de micro-diffusion. L'interaction entre l'humidité et la température est prise en compte directement. La déformation de la

m<sup>ième</sup> cellule de Maxwell est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}^{(m)}}{k^{(m)}} + \frac{\sigma^{(m)}}{\eta^{(m)}} + \alpha \dot{H} + \beta \dot{T} \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_m^M \sigma^{(m)} \quad [I.25]$$

$\alpha$ ,  $\beta$  représentent respectivement le coefficient d'expansion hydrique et le coefficient de dilatation thermique. La rigidité  $k^{(m)}$  est constante tandis que la viscosité  $\eta^{(m)}$  dépend de l'accroissement hydrique  $\dot{H}$  et de l'accroissement thermique  $\dot{T}$ , telle que :

$$\frac{1}{\eta^{(m)}} = \frac{1}{\eta_0^{(m)}} f^{(m)}(\dot{H}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\eta_0^{(m)}} = \frac{\varphi^{(m)}(w)}{k^{(m)} \tau^{(m)}} e^{\left( \frac{Q_c}{RT_{ref}} - \frac{Q_c}{RT} \right)} \quad [I.26]$$

$Q_c$  est l'énergie d'activation du fluage,  $h$  l'humidité relative dans le lumen et  $H$  le taux de pore humide tel que  $\dot{H} = \dot{h} + c\dot{T}$  et  $\dot{H} = \dot{h}$  à  $T$  constante.

L'équation [I.25] peut être reformulée en considérant que l'accumulation de la déformation mécano-sorptive est induite par le retrait-gonflement et la dilatation thermique. La vitesse de fluage s'écrit alors :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}^{(m)}}{k^{(m)}} + \frac{\sigma^{(m)}}{\eta_0^{(m)}} + \dot{\varepsilon}_S + \dot{\varepsilon}_T \quad [I.27]$$

La viscosité  $\eta_0^{(m)}$  dépend de  $H$  et de  $T$  et non de leur variation  $\dot{H}$  et  $\dot{T}$ . L'accroissement de déformation de retrait-gonflement et de dilatation thermique sont données par les équations :

$$\dot{\varepsilon}_S = \alpha(1 + r^{(m)} \text{sign}(\dot{H})) \dot{H} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_T = \beta(1 + s^{(m)} \text{sign}(\dot{H})) \dot{T} \quad [I.28]$$

### I.5.2.3 Modèle de Mukuday (1986)

Le modèle rhéologique de Mukuday [MUK 86] est basé sur le comportement de deux éléments en parallèle (I) et (II) représentant, respectivement, les couches S1+P+M+P+S1 et les couches S2+S3 (figure I.1) de la paroi cellulaire du bois, figure I.20.

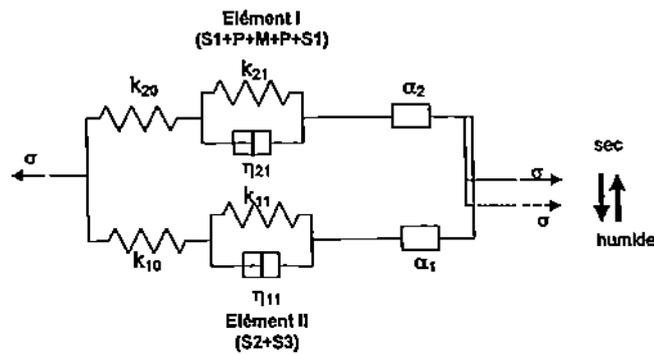


Figure I.20 – Modèle rhéologique de Mukuday [MUK86].

À l'état humide, l'adhérence entre les deux éléments est assurée par le gonflement de S2 qui vient frotter S1 (hoop effect). À l'état sec, l'élément (II) est partiellement décollé de l'élément

(I) du fait des retraits différentiels des couches. Elle reste malgré tout solidaire de l'élément (I) grâce à l'existence des liaisons hydrogènes. Le décollement partiel entraîne un report d'une partie de la contrainte totale de l'élément (II) vers l'élément (I) à l'aide d'une rotule qui permet le report de contrainte (stress bias). La déformation macroscopique est alors reliée directement à la déformation de l'élément (I). Le fait que l'élément (I) soit moins rigide implique que le report de contrainte de l'élément (II) sur l'élément (I) entraîne une diminution de la rigidité globale du matériau. La rigidité global du bois est plus élevée à l'état sec. Lors des variations d'humidité, au moment de l'apparition du report de contrainte de l'élément (II) vers l'élément (I) "stress bias" (séchage) ou la disparition de celui-ci (humidification), il se produit une désolidarisation provisoire de l'élément (I) et de l'élément (II). Elle cesse dès qu'apparaît de nouveau un frottement entre les couches S2 et S1 (hoop effect) lors d'une humidification et un ancrage par rigidification des liaisons (effet "liaisons hydrogènes") dans le cas du séchage.

#### I.5.2.4 Modèle de Gril (1988)

Le modèle "hygro-verrous" de Gril [GRI 88] est basé sur une activation hydrique du fluage où le comportement des éléments rhéologiques dépend de l'histoire de l'humidité. Le modèle permet le blocage des déformations si un seuil en humidité n'est pas dépassé. Il est constitué d'un ressort représentant la contribution élastique du réseau de microfibrilles et d'un attelage hygro-verrous en parallèle, composé de ressorts et d'amortisseurs, représentant la matrice amorphe, figure I.21.

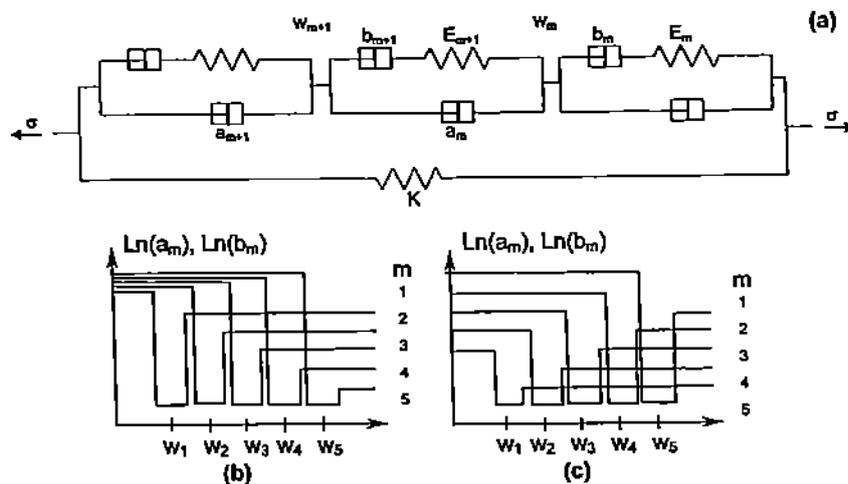


Figure I.21 – Modèle Hygro-verrous [GRI88].

Le modèle hygro-verrous contient un nombre fini de processus individuel (une boîte) qui couvre la totalité du domaine hygroscopique (de l'état sec au point de saturation des fibres). L'état de chaque boîte est totalement décrit par les variables internes contenant les contraintes internes ou les contraintes permanentes. Lorsque la boîte est ouverte, ces variables internes peuvent changer. Pour chaque humidité  $w_m$ , il existe :

- un ressort de raideur  $E_m$  soumis à une contrainte  $p_m$ ,
- un amortisseur en parallèle de viscosité  $a_m$  et de déformation  $\alpha_m$  sous une contrainte  $q_m$ ,
- un amortisseur en série de viscosité  $a_m$  et de déformation  $\beta_m$  sous une contrainte  $p_m$ .

$\sigma$  représente la contrainte externe,  $\epsilon$  la déformation totale,  $\epsilon_m$  la déformation de chaque boîte individuelle et  $\sigma'$  la contrainte appliquée à la matrice. Le modèle est décrit par les relations ci-dessous :

$$\sigma = K\epsilon + \sigma' \quad \text{et} \quad \epsilon = \sum \epsilon_m \quad [\text{I.29}]$$

$$\sigma'_m = p_m + q_m \quad [\text{I.30}]$$

$$q_m = a_m \frac{d\alpha_m}{dt} \quad \text{et} \quad p_m = b_m \frac{d\beta_{m+1}}{dt} \quad [\text{I.31}]$$

Les viscosités  $a_m$  et  $b_m$  sont toujours élevées sauf lorsque l'humidité approche  $w_m$  où elles diminuent fortement de sorte que la majeure partie de la contrainte de la matrice  $\sigma'_m$  est soutenue par le ressort  $E_m$ , tandis que la contrainte interne dans la boîte au-dessous tombe presque à zéro. Les valeurs de  $a_m$  et  $b_m$  sont données à la figure I.21 (b) et (c). Le ressort en parallèle permet d'obtenir une déformation limite et une recouvrance totale après un déchargement mécanique. Le modèle vérifie aussi la recouvrance mécano-sorptive observée à la première humidification après déchargement mécanique.

#### 1.5.2.5 Modèle de Van der Put (1989)

Le modèle de Van Der Put [VAN 89] est basé sur une activation moléculaire du processus de déformation. Le matériau est considéré élastique sauf aux sites de déformation où les molécules peuvent bouger à l'arrivée d'une molécule d'eau. Le comportement est interpolé par un modèle de Maxwell avec un amortisseur non linéaire. Les déformations mécano-sorptive et viscoélastique sont combinées et la déformation de la  $m^{\text{ième}}$  cellule de Maxwell est définie par l'expression suivante :

$$\dot{\epsilon}^{(m)} = \dot{\epsilon}_e^{(m)} + (A^{(m)} + B^{(m)}\epsilon^{(m)}) \cdot \sinh(\sigma^{(m)}\rho^{(m)}(1 - C^{(m)}\epsilon^{(m)})) \quad [\text{I.32}]$$

Le taux de déformation élastique de la  $m^{\text{ième}}$  cellule de Maxwell  $\dot{\epsilon}_e^{(m)}$  est défini par :

$$\dot{\epsilon}_e^{(m)} = \frac{\dot{\sigma}^{(m)}}{K^{(m)}} \quad [\text{I.33}]$$

$\rho^{(m)}$  est l'énergie d'activation et  $B^{(m)}$ ,  $C^{(m)}$  sont les paramètres de changement structural. D'après la théorie de Van der Put, l'effet mécano-sorptif est moins important pour des éprouvettes de grandes dimensions, où les variations d'humidité interne se font plus lentement.

#### 1.5.2.6 Modèle de Yahiaoui (1991)

Yahiaoui [YAH 91] propose l'utilisation d'une cellule de Kelvin-Voigt dans laquelle l'accumulation du fluage mécano-sorptif est prise compte en modifiant le temps de relaxation  $\tau^{(m)}$  de chaque cellule viscoélastique de Kelvin-Voigt en le faisant dépendre du changement de taux d'humidité  $|\dot{w}|$ . Ceci correspond à une modification des viscosités des amortisseurs. L'expression de la déformation de fluage, avec  $M$  cellules de Kelvin-Voigt en série, est la suivante :

$$\epsilon_{ve} = \sum_{m=1}^M \epsilon_{ve}^{(m)} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_{ve}^{(m)} = \frac{J^{(m)} \sigma - \epsilon_{ve}^{(m)}}{\tau^{(m)}} \left(1 + \beta^{(m)}|\dot{w}|\right) \quad [\text{I.34}]$$

$\beta^{(m)}$  sont les paramètres du matériau associés au développement du fluage mécano-sorptif.

### I.5.2.7 Modèle de Hanhijarvi (1995)

Hanhijarvi [HAN 95] a développé un modèle non linéaire de type "activation combinée" basé sur l'équation de Van der Put [I.32] à partir de la théorie des cinétiques de déformation moléculaire. L'accumulation de la déformation mécano-sorptive est prise en compte par la "non-linéarité" de l'équation de fluage [I.35], et non par l'utilisation de la valeur absolue du changement d'humidité. Le fluage est interpolé par un modèle de Maxwell généralisé avec des amortisseurs non linéaires et des éléments de retrait-gonflement linéaires. L'équation du modèle est donnée par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}^{(m)}}{K^{(m)}} + A^{(m)} \sinh(\phi^{(m)}\sigma^{(m)} + B \tanh(D \dot{h})) + \alpha_h^{(m)} \dot{h} \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_{m=1}^M \sigma^{(m)} \quad \text{[I.35]}$$

$A^{(m)}$ ,  $\phi^{(m)}$ ,  $B$  et  $D$  sont des paramètres positifs et  $\alpha_h^{(m)}$  sont les coefficients de retrait-gonflement, dans chaque cellule de Maxwell, dépendant du type de sollicitation (traction ou compression). Les amplitudes du retrait-gonflement et du fluage sont des fonctions à la fois de l'amplitude et de la vitesse des variations de l'humidité. Enfin, le modèle prend en compte la limite de fluage.

### I.5.2.8 Synthèse des différents modèles à "activation combinée"

Dans les modèles à "activation combinée", le fluage viscoélastique et mécano-sorptive sont gérés par les viscosités du modèle rhéologique. L'évolution de la viscosité est fonction de la teneur en eau et de l'histoire de cette dernière. Dans le modèle de Gril, la viscosité dépend des seuils d'humidité maximum, alors que les modèles de Mukuday, de Yahaoui et de Hanhijarvi ne prennent en compte que le taux de variation d'humidité. Par ailleurs, la non-linéarité matérielle est intégrée dans les modèles de Schaffer, de Van Der Put et de Hanhijarvi.

## I.6 Conclusion

Le découplage des différents processus du fluage du bois en environnement variable, à savoir le retrait-gonflement, la viscoélasticité et la mécano-sorption n'est pas réalisable sans faire une hypothèse forte sur l'interaction entre les processus. Cet état de fait met en lumière la justesse de la partition des déformations dans les modèles. Le fait que chaque processus dépend de la contrainte, du niveau d'humidité et des variations hydriques, les modèles à "activation combinée" semblent alors être plus proches de la réalité, mais différents travaux montrent que les fluages viscoélastiques et mécano-sorptifs sont deux phénomènes faiblement couplés [HAN 98], [NAV 02]. La modélisation du comportement viscoélastique doit prendre en compte le vieillissement hydrothermique du matériau représenté par les variations des propriétés mécaniques. Une modélisation correcte du comportement viscoélastique va nous permettre d'isoler les autres effets et de mieux les cerner. Ceci n'est pas le cas des modèles présentés dans la littérature. La réponse élastique d'un matériau de rigidité variable est modélisé soit par la loi de Hooke  $\sigma(t) = k(t)\varepsilon(t)$ , soit par la loi tangente  $\dot{\sigma}(t) = k(t)\dot{\varepsilon}(t)$ . Le premier génère un accroissement de la déformation à la première humidification, ce qui n'est pas le cas de la deuxième où il n'y a pas d'incrément de déformation sans variation de contrainte. En considérant la loi de Hooke, l'accélération de la déformation prise en compte par un coefficient  $m^{++}$  [RAN 75] est en fait un incrément de déformation élastique lors de la première humidification. L'utilisation de ces deux lois dans les modèles viscoélastiques sera discutée dans le prochain chapitre. Pour s'assurer de la conformité des lois de comportement des modèles rhéologiques, il est alors nécessaire de les confronter aux principes fondamentaux de la thermodynamique.



## Chapitre II

# Modélisation viscoélastique du bois en environnement variable

### II.1 Introduction

Nous avons vu que le bois est un matériau viscoélastique vieillissant avec des propriétés mécaniques évoluant avec la température et l'humidité interne où l'effet de l'humidité est prédominant par rapport à celui de la température (à basse température) [TOR 92], [TIS 96]. Dans ce contexte, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'effet de l'humidité sur le fluage (température constante). On observe que lorsque le bois est soumis à des variations cycliques d'humidité sous un chargement mécanique constant, il admet une accélération et une accumulation des déformations connues sous le nom de mécano-sorption. Dans la littérature, les modèles phénoménologiques sont nombreux mais sont souvent validés pour un type ou un mode de chargement et difficilement généralisables à d'autres problèmes. Ceci vient du fait que les différents mécanismes de déformation lors du fluage en environnement variable ne sont pas bien isolés. Dans la plupart des modèles, le fluage viscoélastique dépend seulement du temps et du niveau d'humidité mais est indépendant de l'histoire de l'humidité. Quant au fluage mécano-sorptif, il dépend seulement des changements d'humidité. Cependant, divers expériences ont montré que les deux fluages sont couplés [HUN 96], [HAN 98], [HUN 99]. Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation du comportement viscoélastique linéaire du bois soumis à un vieillissement hydro-thermique qui se traduit par des variations des propriétés mécaniques instantanées et différées induites par les variations hydriques internes. Le modèle est développé pour être en accord avec les principes de la thermodynamique s'assurant d'une dissipation toujours positive. Ceci va nous permettre d'isoler les phénomènes non viscoélastiques mis en jeu lors du fluage en environnement variable. Dans une première partie, une nouvelle approche numérique du comportement viscoélastique vieillissant du bois est présentée, intégrant à la fois les effets héréditaires du matériau tels que l'histoire des contraintes (ou des déformations) et l'histoire de l'humidité. Le développement du modèle repose sur une approche thermodynamique. L'effet de l'humidité est pris en compte dans le comportement du modèle rhéologique de Kelvin-Voigt généralisé où les paramètres rhéologiques évoluent avec l'humidité. En deuxième partie, une formulation incrémentale est obtenue en effectuant une intégration par la méthode des différences finies de l'équation différentielle induite par le modèle. Elle est ensuite implantée dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M [GHA 95]. Dans une troisième partie, nous présentons les validations numériques de cette modélisation en comparant les résultats numériques à ceux obtenus à partir d'une résolution analytique sur des cas simples.

## II.2 Viscoélasticité linéaire vieillissante

Dans le traitement classique du comportement viscoélastique linéaire d'un matériau vieillissant, la relation entre l'état de contrainte  $\underline{\sigma}$  et l'état de déformation  $\underline{\varepsilon}$  est donnée par les équations intégrales de Stijles-Volterra [II.1] [BAZ 99] :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_{0^-}^t \mathbf{J}(t, \tau) : \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(t) = \int_{0^-}^t \mathbf{R}(t, \tau) : \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{[II.1]}$$

où l'origine des temps est prise avant tout chargement.  $\mathbf{J}(t, \tau)$ ,  $\mathbf{R}(t, \tau)$  sont, respectivement, les tenseurs d'ordre 4 de fluage et de relaxation à deux variables.  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  sont les tenseurs d'ordre 2, respectivement, des contraintes et des déformations. On peut calculer le noyaux de relaxation connaissant celui de fluage et vice-versa, par une résolution de l'équation de Volterra d'ordre 1. Dans le cas unidimensionnel, si la déformation est une fonction Heaviside  $\varepsilon(t) = H(t - t_0)$ , l'histoire de la contrainte qui lui correspond sera la fonction  $\sigma(t) = R(t, t_0)$ . Inversement, on peut considérer  $\sigma(t) = R(t, t_0)$  comme la contrainte appliquée et  $\varepsilon(t) = H(t - t_0)$  comme la réponse qui lui correspond. La relation intégrale qui relie  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{R}$  est la suivante :

$$\int_{t_0}^t \mathbf{J}(t, \tau) \frac{\partial R(\tau, t_0)}{\partial \tau} d\tau = H(t - t_0) \quad \text{[II.2]}$$

avec  $H(t - t_0) = 0$  si  $t < t_0$  et  $H(t - t_0) = 1$  si  $t \geq t_0$ .

Dans le cas non vieillissant, le noyau de l'intégrale de Stijles ne dépend plus que d'une seule variable ( $t - \tau$ ) au lieu de deux dans le cas vieillissant, tel que :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_{0^-}^t \mathbf{J}_o(t - \tau) : \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(t) = \int_{0^-}^t \mathbf{R}_o(t - \tau) : \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{[II.3]}$$

Certains auteurs admettent une forme puissance (loi parabolique) de l'évolution du fluage [CAR 87], [LEG 88], [HUE 88]. Cette loi présente l'avantage d'obtenir simplement, à partir de 3 ou 4 paramètres, une réponse fidèle d'une courbe de fluage pour des temps relativement courts. Cependant, ce type de loi est difficilement exploitable par une approche thermodynamique pour définir les différentes sources de dissipation énergétique (viscosité, vieillissement). Nous lui préférons alors les modèles rhéologiques composés de ressorts et d'amortisseurs. Dans ce domaine, les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt généralisés sont souvent utilisés. Les solutions de l'équation différentielle de ces modèles sont de type exponentielle (série de Dirichlet) présentant un avantage pour le calcul numérique car il n'est pas nécessaire de stocker toute l'histoire mécanique dans une formulation incrémentale. Le modèle de Maxwell repose sur une stratégie d'identification des paramètres basée sur des essais de relaxation-effacement ou de module complexe. Pour le modèle de Kelvin-Voigt, les paramètres sont identifiés à partir d'essais de fluage-recouvrance.

### II.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Dans le cas du bois, les résultats expérimentaux d'essais de fluage-recouvrance sont abondants. Cette situation nous a amenés à étudier le modèle de Kelvin-Voigt généralisé plus adapté pour interpoler le fluage du bois sous une contrainte mécanique imposée. Afin de simplifier la présentation, nous nous restreignons à une visualisation uniaxiale, où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont, respectivement, la contrainte et la déformation uniaxiales. Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé, présenté à la figure

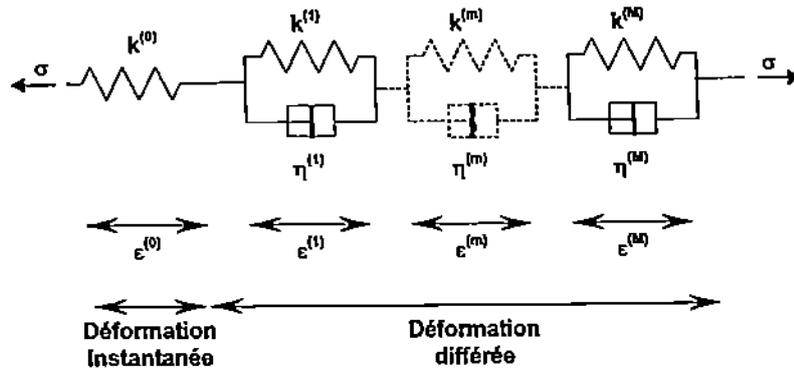


Figure II.1 – Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

II.1, est composé d'un premier ressort traduisant le comportement instantané  $\varepsilon^{(0)}$  et d'une série de cellules de Kelvin-Voigt  $\sum_{m=1}^M \varepsilon^{(m)}$  représentant la réponse différée (fluage primaire). La déformation viscoélastique  $\varepsilon_{ve}(t)$  se décompose alors de la façon suivante :

$$\varepsilon_{ve}(t) = \varepsilon^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{(m)}(t) \quad [II.4]$$

Afin de déterminer le comportement global du modèle de Kelvin-Voigt généralisé, il est nécessaire de connaître le comportement de ces éléments. Le vieillissement hydrique apparaît comme une évolution des propriétés mécaniques du matériau (rigidité, viscosité,...) avec le temps. Pour le bois, l'origine de ce vieillissement est attribué aux variations d'humidité interne. Les paramètres rhéologiques vont donc évoluer avec la teneur en eau locale du bois. La rigidité du ressort vieillissant  $k(w)$  est définie à partir d'une fonction  $b(w)$  et d'une rigidité de référence  $k_{ref}$  associée à une humidité de référence  $w_{ref}$ , telle que :

$$k(t) = b(t) k_{ref} \quad \text{avec} \quad b(w(t)) = b(t), \quad b(w_{ref}) = 1 \quad \text{et} \quad k_{ref} > 0 \quad [II.5]$$

La rigidité globale du bois diminue pendant l'humidification et augmente pendant le séchage :

$$\begin{cases} \dot{b}(t) \leq 0 & \text{si } \dot{w}(t) \geq 0 : \text{assouplissement} \\ \dot{b}(t) \geq 0 & \text{si } \dot{w}(t) \leq 0 : \text{rigidification} \end{cases} \quad [II.6]$$

De la même manière, la viscosité d'un amortisseur vieillissant  $\eta(w)$  évolue avec l'humidité à partir d'une fonction  $a(w)$  et d'une viscosité de référence  $\eta_{ref}$  associée à l'humidité de référence  $w_{ref}$ , telle que :

$$\eta(t) = a(t) \eta_{ref} \quad \text{avec} \quad a(w(t)) = a(t), \quad a(w_{ref}) = 1 \quad \text{et} \quad \eta_{ref} > 0 \quad [II.7]$$

La vitesse de fluage est plus élevée à l'état humide avec une viscosité plus faible :

$$\begin{cases} \dot{a}(t) \leq 0 & \text{si } \dot{w}(t) \geq 0 \\ \dot{a}(t) \geq 0 & \text{si } \dot{w}(t) \leq 0 \end{cases} \quad [II.8]$$

## II.2.2 Restriction thermodynamique

Du point de vue thermodynamique, le matériau ne peut pas stocker plus d'énergie qu'on lui en a fourni et ne peut pas en restituer plus qu'il en possède. Cet état de fait est pris en compte par le second principe de la thermodynamique qui stipule que la dissipation dans le matériau (ou puissance dissipée) doit toujours être positive. Ceci se traduit au niveau de la loi de comportement par les critères suivants :

$$J(t, \tau) \geq 0, \quad \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 J(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} \leq 0 \quad \text{[II.9]}$$

Le second principe est satisfait par la fonction de fluage  $J(t, \tau)$  si il l'est par le modèle rhéologique. Cependant, si les lois thermodynamiques sont violées par le modèle rhéologique, elles ne le sont pas nécessairement par la fonction de fluage. Pour être conforme, il est alors préférable mais pas obligatoire que le modèle rhéologique satisfasse ces lois thermodynamiques. Ainsi, les lois de comportement, des ressorts et des amortisseurs vieillissants, doivent être en accord avec le second principe de la thermodynamique (dissipation positive). Ainsi, deux lois distinctes sont proposées par Bazant [BAZ 79], [BAZ 93] pour définir le comportement d'un ressort vieillissant, la loi de Hooke dans le cas d'un vieillissement assouplissant et la loi tangente pour un vieillissement rigidifiant.

$$\sigma(t) = b(t) k_{\text{ref}} \varepsilon(t) \quad \text{si} \quad \dot{b}(t) < 0 : \text{assouplissement} \quad \text{[II.10]}$$

$$\dot{\sigma}(t) = b(t) k_{\text{ref}} \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{si} \quad \dot{b}(t) > 0 : \text{rigidification} \quad \text{[II.11]}$$

La forme différentielle de la loi de Hooke [II.10] s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{b(t) k_{\text{ref}}} - \frac{\dot{b}(t)}{b^2(t) k_{\text{ref}}} \sigma(t) \quad \text{[II.12]}$$

Dans certains modèles, la loi de Hooke est employée pour les deux configurations. Or, si on considère une rigidification du matériau ( $\dot{b}(t) > 0$ ), la relation II.12 exprimerait un incrément de déformation négative (compression) sous une contrainte de traction constante, ce qui n'aurait pas de sens du point de vue physique. Il est clairement admis que la loi de Hooke ne peut être utilisée lors d'une phase de séchage.

Par ailleurs, le comportement de l'amortisseur vieillissant est toujours défini par la loi de Newton :

$$\sigma(t) = a(t) \eta_{\text{ref}} \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{[II.13]}$$

La déformation  $\varepsilon$  de chaque élément rhéologique (ressort ou amortisseur) peut se décomposer comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{\text{an}} \quad \text{[II.14]}$$

où  $\varepsilon_e$  est la déformation élastique (reversible et restituée lors d'un déchargement) et  $\varepsilon_{\text{an}}$  la déformation anélastique (non reversible instantanément).

### II.2.2.1 Second principe de la thermodynamique

L'état thermodynamique du matériau est défini par son énergie libre spécifique  $\psi$  qui est une fonction des variables d'état : la déformation élastique  $\varepsilon_e$ , la température  $T$  et les variables internes  $\Theta^{(p)}$ ,  $p \in (1, 2, \dots, P)$  exprimant les changements d'équilibres hydriques, tel que :

$$\psi = \psi(\varepsilon_e, T, \Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(p)}) \quad \text{[II.15]}$$

Dans l'hypothèse de petites déformations et d'une sollicitation unidimensionnelle, le deuxième principe est défini par l'inégalité de Clausius-Duhem suivante :

$$D_{\text{tot}} = \sigma \dot{\varepsilon} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \quad [\text{II.16}]$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $\vec{q}$  le vecteur courant de chaleur et  $s$  l'entropie spécifique.

D'après la relation [II.48], on a :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} \dot{\varepsilon}_e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial \psi}{\partial \Theta^{(p)}} \dot{\Theta}^{(p)} \quad [\text{II.17}]$$

En introduisant [II.17] dans [II.16], on obtient :

$$\sigma (\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{\text{an}}) - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} \dot{\varepsilon}_e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial \psi}{\partial \Theta^{(p)}} \dot{\Theta}^{(p)} + s\dot{T} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \quad [\text{II.18}]$$

L'inégalité [II.18] peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} \right) \dot{\varepsilon}_e + \sigma \dot{\varepsilon}_{\text{an}} - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \sum_{p=1}^M \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Theta^{(p)}} \dot{\Theta}^{(p)} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \quad [\text{II.19}]$$

En supposant une transformation à température constante ( $\dot{T} = 0$ ) et uniforme ( $\vec{\nabla}T = \vec{0}$ ) sans génération de déformation anélastique ( $\dot{\varepsilon}_{\text{an}} = 0$ ) et une vitesse de variation des variables internes nulle ( $\dot{\Theta}^{(p)} = 0$ ), l'inégalité (II.19) est toujours vérifiée, quelque soit  $\sigma$ , si et seulement si :

$$\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = 0 \quad [\text{II.20}]$$

De même, si on suppose une transformation pour laquelle la température évolue d'une façon homogène ( $\vec{\nabla}T = \vec{0}$ ) avec des taux de variables internes nuls ( $\dot{\Theta}^{(p)} = 0$ ), l'inégalité (II.20) est vérifiée si et seulement si :

$$s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad [\text{II.21}]$$

On en déduit les équations d'état :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad A^{(p)} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Theta^{(p)}} \quad [\text{II.22}]$$

où  $A^{(p)}$  est la force thermodynamique associée à chaque variable interne  $\Theta^{(p)}$ . L'inégalité de Clausius-Duhem devient alors :

$$D_{\text{tot}} = \sigma \dot{\varepsilon}_{\text{an}} - \sum_{p=1}^P A^{(p)} \dot{\Theta}^{(p)} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \quad [\text{II.23}]$$

### II.2.2.2 Restriction thermodynamique sur le ressort vieillissant

Une partie de l'énergie mécanique, fournie au ressort, est dissipée pendant le processus de vieillissement. Dans la formulation de l'énergie libre spécifique d'Helmholtz  $\psi$ , les variables d'état sont la déformation élastique  $\varepsilon_e$ , la température  $T$  et le paramètre de vieillissement  $b(t)$ . Pour un ressort vieillissant, l'énergie libre  $\psi = \psi(\varepsilon_e, T, b)$  peut être définie par la relation :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} b(t) k_{\text{ref}} (\varepsilon_e(t))^2 \quad [\text{II.24}]$$

La dissipation intrinsèque du ressort est déduite de l'inégalité de Clausius-Duhem [II.25] en considérant la seule variable interne  $b$  associée à la force thermodynamique  $A$ , telle que :

$$D_{\text{tot}} = \sigma \dot{\varepsilon}_{\text{an}} - A \dot{b} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad [\text{II.25}]$$

#### a- Ressort assouplissant

Pour un ressort assouplissant, la forme de l'énergie libre [II.24] associée à [II.22] permet d'obtenir la loi de Hooke en notant une déformation anélastique nulle :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{b(t) k_{\text{ref}}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\text{an}}(t) = 0 \quad [\text{II.26}]$$

La force thermodynamique  $A$ , associée à la variable interne  $b$ , est obtenue à partir de l'expression de l'énergie libre [II.24] et de l'équation d'état [II.22], telle que :

$$A = \rho \frac{\partial \psi}{\partial b} = \frac{1}{2} k_{\text{ref}} (\varepsilon_e(t))^2 = \frac{\sigma^2(t)}{2b^2(t) k_{\text{ref}}} \quad [\text{II.27}]$$

En supposant une variation homogène de la température ( $\vec{\nabla} T = 0$ ) et en introduisant les relations [II.26] et [II.27] dans l'inégalité de Clausius-Duhem [II.25], la dissipation totale est :

$$D_{\text{ka}}(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}_{\text{an}}(t) - A(t) \dot{b}(t) = -\frac{\dot{b}(t) \sigma^2(t)}{2b^2(t) k_{\text{ref}}} \geq 0 \quad [\text{II.28}]$$

Si nous posons une rigidité constante correspondant à un état de référence quelconque ( $k_{\text{ref}}, b=1, \dot{b}=0$ ), l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée si :

$$k_{\text{ref}} \geq 0 \quad \forall \quad w_{\text{ref}} \quad [\text{II.29}]$$

Par ailleurs, si la rigidité du ressort varie dans le temps, telle que  $k(t) = b(t) k_{\text{ref}}$  avec  $k_{\text{ref}} \geq 0$ , l'inégalité [II.28] impose :

$$\dot{b}(t) \leq 0 \quad [\text{II.30}]$$

En conclusion, la rigidité du ressort  $k(t)$  est toujours positive et l'utilisation de la loi de Hooke n'est légitime que pour un comportement assouplissant ( $\dot{b}(t) \leq 0$ ). Il est donc nécessaire de considérer une autre loi de comportement pour les phases de rigidification.

b - Ressort rigidifiant

Le comportement d'un ressort rigidifiant est représenté par la loi tangente [BAZ 79] :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{b(t)k_{\text{ref}}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_{\text{an}}(t) \quad [\text{II.31}]$$

Comme précédemment, la déformation élastique  $\varepsilon_e$  est obtenue lors d'un déchargement instantané :

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{b(t)k_{\text{ref}}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{b(t)k_{\text{ref}}} - \frac{\dot{b}(t)\sigma(t)}{b^2(t)k_{\text{ref}}} \quad [\text{II.32}]$$

A partir des relations [II.31] et [II.32], l'accroissement de déformation anélastique  $\dot{\varepsilon}_{\text{an}}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{\text{an}}(t) = \dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{\dot{b}(t)\sigma}{b^2(t)k_{\text{ref}}} \quad [\text{II.33}]$$

La force thermodynamique  $A$  est déduite de l'expression de l'énergie libre [II.24] :

$$A = \rho \frac{\partial \psi}{\partial b} = \frac{1}{2} k_{\text{ref}} (\varepsilon_e(t))^2 = \frac{\sigma^2(t)}{2b^2(t)k_{\text{ref}}} \quad [\text{II.34}]$$

Les relations [II.33] et [II.34] sont ensuite introduites dans l'inégalité de Clausius-Duhem [II.25]. En posant une variation homogène de la température ( $\nabla T = 0$ ), nous obtenons la dissipation totale suivante pour un ressort rigidifiant :

$$\mathcal{D}_{\text{kr}}(t) = \sigma(t)\dot{\varepsilon}_{\text{an}}(t) - A(t)\dot{b}(t) = \frac{\dot{b}(t)\sigma^2(t)}{2b^2(t)k_{\text{ref}}} \geq 0 \quad [\text{II.35}]$$

Pour une rigidité donnée  $\dot{b}(t) = 0$ , associée à un état de référence quelconque ( $k_{\text{ref}}, b=1$ ), l'inégalité de Clausius-Duhem (II.35) est vérifiée si :

$$k_{\text{ref}} \geq 0 \quad \forall \quad w_{\text{ref}} \quad [\text{II.36}]$$

Enfin, lorsque la rigidité évolue dans le temps, telle que  $k(t) = b(t)k_{\text{ref}}$  et  $k_{\text{ref}} \geq 0$ , l'inégalité (II.35) est vérifiée si et seulement si :

$$\dot{b}(t) \geq 0 \quad [\text{II.37}]$$

Les expressions de la dissipation  $\mathcal{D}_{\text{ka}}$  [II.28] et  $\mathcal{D}_{\text{kr}}$  [II.35] montrent que physiquement le matériau va dissiper la même énergie dans une phase de séchage et d'humidification pour une même variation relative des propriétés mécaniques :

$$\mathcal{D}_k(t) = \frac{|\dot{b}(t)|\sigma^2(t)}{2b^2(t)k_{\text{ref}}} \geq 0 \quad [\text{II.38}]$$

### II.2.2.3 Restriction thermodynamique sur l'amortisseur vieillissant

Nous constatons qu'une modification de la viscosité d'un amortisseur dans une cellule de Kelvin-Voigt agit sur une accélération ou un ralentissement du fluage. L'évolution de cette viscosité  $\eta$ , en fonction de la teneur en eau  $w(t)$ , se définit à partir d'une fonction  $a(w(t))$  et d'un état de référence  $\eta_{ref}$  correspondant à une teneur en eau de référence  $w_{ref}$  telle que :

$$\eta(t) = a(t) \eta_{ref} \quad \text{avec} \quad a(w(t)) = a(t) \quad \text{et} \quad a(w_{ref}) = 1 \quad \text{[II.39]}$$

Le comportement d'un amortisseur est défini par la loi de Newton linéaire suivante :

$$\sigma(t) = a(t) \eta_{ref} \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{[II.40]}$$

L'énergie libre et la déformation élastique sont nulles ( $\psi = 0$ ,  $\varepsilon_e = 0$ ). Dans ce cas, la force thermodynamique  $A$  associé à  $b$  est également nulle. Pour une transformation à température homogène, l'inégalité de Clausius-Duhem [II.25] se réduit à l'expression simplifiée :

$$\mathcal{D}_\eta(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}_{an}(t) = \frac{\sigma^2(t)}{a(t) \eta_{ref}} \quad \text{[II.41]}$$

En introduisant la relation [II.40] dans [II.41], on a :

$$\mathcal{D}_\eta(t) = a(t) \eta_{ref} (\dot{\varepsilon}(t))^2 \geq 0 \quad \text{[II.42]}$$

Si nous supposons que la viscosité de l'amortisseur est constante ( $\dot{a}(t) = 0$ ) et prise comme référence ( $\eta_{ref}$ ,  $a=1$ ), l'inégalité de Clausius-Duhem [II.42] est vérifiée si :

$$\eta_{ref} \geq 0 \quad \forall \quad w_{ref} \quad \text{[II.43]}$$

Par ailleurs, si la viscosité évolue dans le temps, telle que  $\eta(t) = a(t) \eta_{ref}$  et  $\eta_{ref} \geq 0$ , l'inégalité [II.42] induit :

$$a(t) \geq 0 \quad \text{[II.44]}$$

En conclusion, la viscosité de référence  $\eta_{ref}$  est toujours positive et la loi de Newton satisfait les principes thermodynamiques si la viscosité est positive et ce durant les phases de rigidification ou d'assouplissement.

### II.2.2.4 Dissipation mécanique dans le modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La dissipation mécanique dans le modèle de kelvin-Voigt généralisé est donnée par la dissipation dans le ressort vieillissant et dans les cellules de Kelvin-Voigt, telle que :

$$\mathcal{D}_{tot}(t) = \mathcal{D}^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^M \mathcal{D}^{(m)}(t) \quad \text{[II.45]}$$

La dissipation  $\mathcal{D}^{(0)}(t)$  dans le ressort isolé est donnée par la relation :

$$\mathcal{D}^{(0)}(t) = \frac{|\dot{b}^{(0)}(t)| \sigma^2(t)}{2 (b^{(0)}(t))^2 k_{ref}^{(0)}} \quad \text{[II.46]}$$

La dissipation  $\mathcal{D}^{(m)}(t)$ , dans chaque cellule de Kelvin-Voigt, est la somme des dissipations dans le ressort et l'amortisseur, telle que :

$$\mathcal{D}^{(m)}(t) = \mathcal{D}_k^{(m)}(t) + \mathcal{D}_\eta^{(m)}(t) \quad [\text{II.47}]$$

la partition de la contrainte dans la cellule de Kelvin-Voigt (figure II.2) génère les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma^{(m)}(t) = \sigma_k^{(m)}(t) + \sigma_\eta^{(m)}(t) \\ \varepsilon^{(m)}(t) = \varepsilon_k^{(m)}(t) = \varepsilon_\eta^{(m)}(t) \end{cases} \quad [\text{II.48}]$$

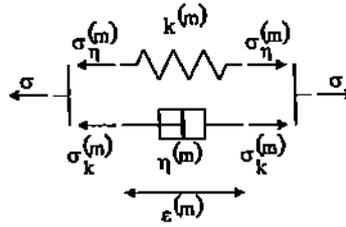


Figure II.2 – Partition des contraintes.

on en déduit ainsi l'expression de la dissipation suivante :

$$\mathcal{D}^{(m)}(t) = \frac{|\dot{b}^{(m)}(t)| \left( \sigma_k^{(m)}(t) \right)^2}{2 \left( b^{(m)}(t) \right)^2 k_{\text{ref}}^{(m)}} + \frac{\left( \sigma_\eta^{(m)}(t) \right)^2}{a^{(m)}(t) \eta_{\text{ref}}^{(m)}} \quad [\text{II.49}]$$

En écrivant  $\mathcal{D}^{(m)}(t)$  en fonction de la contrainte  $\sigma^{(m)}(t)$  et de la déformation  $\varepsilon^{(m)}(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(m)}(t) &= \frac{|\dot{b}^{(m)}(t)|}{2 \left( b^{(m)}(t) \right)^2 k_{\text{ref}}^{(m)}} \left( \sigma(t) - a^{(m)}(t) \eta_{\text{ref}}^{(m)} \dot{\varepsilon}^{(m)}(t) \right)^2 \\ &+ a^{(m)}(t) \eta_{\text{ref}}^{(m)} \left( \dot{\varepsilon}^{(m)}(t) \right)^2 \end{aligned} \quad [\text{II.50}]$$

### II.2.3 Equation intégrale

#### II.2.3.1 Comportement viscoélastique assouplissant

Nous considérons un comportement viscoélastique vieillissant dont la rigidité des ressorts décroît dans le temps (assouplissement). C'est le cas, par exemple, lorsque le taux d'humidité du bois augmente. Pour développer la formulation intégrale correspondante, il est nécessaire d'introduire le comportement basique de l'amortisseur [II.13] et du ressort assouplissant [II.10] dans les différentes partitions [II.51]. Le comportement global du modèle de Kelvin-Voigt généralisé est donné par les relations :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{(m)}(t) \\ \sigma(t) = \sigma^{(0)}(t) = \sigma^{(m)}(t) \\ \sigma(t) = \sigma_k^{(m)}(t) + \sigma_\eta^{(m)}(t) \\ \sigma(t) = b^{(0)}(t) k_{\text{ref}}^{(0)} \varepsilon^{(0)}(t) \\ \sigma_k^{(m)}(t) = b^{(m)}(t) k_{\text{ref}}^{(m)} \varepsilon^{(m)}(t) \\ \sigma_\eta^{(m)}(t) = a^{(m)}(t) \eta_{\text{ref}}^{(m)} \varepsilon^{(m)}(t) \end{cases} \quad \text{[II.51]}$$

#### a - Déformation élastique instantanée

Le comportement est décrit par la loi de Hooke :

$$\varepsilon^{(0)}(t) = \frac{\sigma(t)}{b^{(0)}(t) k_{\text{ref}}^{(0)}} \quad \text{[II.52]}$$

or, la contrainte peut s'écrire sous la forme intégrale :

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad \sigma(0^-) = 0 \quad \text{[II.53]}$$

La réponse élastique instantanée est alors définie par :

$$\varepsilon^{(0)}(t) = \int_{0^-}^t J_a^{(0)}(t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad J_a^{(0)}(t, \tau) = \frac{1}{b^{(0)}(t) k_{\text{ref}}^{(0)}} \quad \text{[II.54]}$$

#### b - Déformation viscoélastique différée

La réponse différée est donnée par l'association en série de plusieurs cellules de Kelvin-Voigt. L'expression de la déformation d'une cellule de Kelvin-Voigt fait appel à une partition de la contrainte dans les deux branches, figure II.2. En introduisant le comportement du ressort [II.10] et de l'amortisseur [II.13] dans l'égalité [II.51], nous obtenons l'équation différentielle :

$$\dot{\varepsilon}^{(m)} + \left( \frac{b^{(m)}}{a^{(m)}} \lambda_{\text{ref}}^{(m)} \right) \varepsilon^{(m)} = \frac{\sigma}{a^{(m)} \eta_{\text{ref}}^{(m)}} \quad \text{avec} \quad \lambda_{\text{ref}}^{(m)} = \frac{k_{\text{ref}}^{(m)}}{\eta_{\text{ref}}^{(m)}} \quad \text{[II.55]}$$

La résolution de l'équation [II.55] permet de calculer l'évolution de la déformation de chaque cellule de Kelvin-Voigt :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_{0^-}^t J_a^{(m)}(t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad J_a^{(m)}(t, \tau) = \int_{\tau}^t e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \int_{\vartheta}^{\tau} \frac{b^{(m)}(\mu)}{a^{(m)}(\mu)} d\mu} \frac{1}{a^{(m)}(\vartheta) \eta_{ref}^{(m)}} d\vartheta \quad [\text{II.56}]$$

### II.2.3.2 Comportement viscoélastique rigidifiant

Afin de prendre en compte une augmentation de la rigidité des ressorts dans la réponse instantanée et différée, nous considérons les comportements basique du ressort rigidifiant [II.11] et de l'amortisseur [II.13].

#### a- Déformation élastique instantanée

La réponse instantanée est obtenue en intégrant la loi tangente [II.11] du ressort rigidifiant, telle que :

$$\varepsilon^{(0)}(t) = \int_{0^-}^t J_r^{(0)}(t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad J_r^{(0)}(t, \tau) = \frac{1}{b^{(0)}(\tau) k_{ref}^{(0)}} \quad [\text{II.57}]$$

#### b- Déformation viscoélastique différée

En introduisant les comportements [II.11] et [II.70] dans la partition des contraintes [II.51], nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\sigma}(t) = b^{(m)}(t) k_{ref}^{(m)} \dot{\varepsilon}(t) + \overbrace{a^{(m)}(t) \eta_{ref}^{(m)}} \dot{\varepsilon}(t) \quad [\text{II.58}]$$

On en déduit ainsi une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{\varepsilon}^{(m)}(t) + \left( \frac{b^{(m)}(t)}{a^{(m)}(t)} \lambda_{ref}^{(m)} + \frac{\dot{a}^{(m)}(t)}{a^{(m)}(t)} \right) \dot{\varepsilon}^{(m)}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{a^{(m)}(t) \eta_{ref}^{(m)}} \quad [\text{II.59}]$$

La résolution de l'équation [II.59] s'effectue en deux temps. Une première intégration permet de définir le taux de déformation suivant :

$$\dot{\varepsilon}^{(m)}(t) = \int_{0^-}^t e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \int_{\tau}^t \frac{b^{(m)}(\zeta)}{a^{(m)}(\zeta)} d\zeta} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad [\text{II.60}]$$

Une seconde intégration permet d'obtenir la déformation  $\varepsilon^{(m)}$  telle que :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t} \left( \int_{\tau=0}^{\tau=\vartheta} e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b^{(m)}(\zeta)}{a^{(m)}(\zeta)} d\zeta} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right) d\vartheta \quad [\text{II.61}]$$

En intervertissant l'ordre d'intégration, la double intégrale ci-dessus avec  $\vartheta \in [0, t]$  et  $\tau \in [0, \tau]$ , est aussi équivalente à la double intégrale [II.61] avec  $\tau \in [0, t]$  et  $\vartheta \in [\tau, t]$  :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left( \int_{\vartheta=\tau}^{\vartheta=t} e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b^{(m)}(\zeta)}{a^{(m)}(\zeta)} d\zeta} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\vartheta \right) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{[II.62]}$$

L'expression de la fonction de fluage  $J_r^{(m)}(t, \tau)$  est déduite de la relation [II.62] :

$$\varepsilon^{(m)}(t) = \int_{0^-}^t J_r^{(m)}(t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad J_r^{(m)}(t, \tau) = \int_{\tau}^t e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b^{(m)}(\mu)}{a^{(m)}(\mu)} d\mu} \frac{d\vartheta}{a^{(m)}(\vartheta) \eta_{\text{ref}}^{(m)}} \quad \text{[II.63]}$$

### II.3 Formulation du retrait-gonflement sous influence mécanique

Pour représenter la déformation totale du bois en environnement variable, la partie non viscoélastique est modélisée par un élément traduisant le retrait-gonflement sous influence mécanique noté  $\varepsilon_w$ . En supposant une indépendance temporelle du retrait-gonflement, ce phénomène est découplé du comportement viscoélastique. La déformation totale  $\varepsilon(t)$  s'écrit alors sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_w(t) \quad \text{[II.64]}$$

Si ce phénomène est observé sans chargement à travers les déformations libres  $\varepsilon_{w0}(t)$ , sa forme est modifiée lorsque la structure est chargée [HUN 84], [HUN 89]. Ce processus met en évidence un couplage entre les variations d'humidité et l'état de déformation du matériau. La déformation de retrait-gonflement  $\varepsilon_w(t)$  est décomposée en une partie représentant la déformation libre  $\varepsilon_{w0}(t)$  et une autre notée  $\varepsilon_{w\sigma}(t)$  montrant à la fois l'influence mécanique et celui des variations d'humidité :

$$\varepsilon_w(t) = \varepsilon_{w0}(t) + \varepsilon_{w\sigma}(t) \quad \text{[II.65]}$$

avec la déformation libre suivante :  $\varepsilon_{w0}(t)$  :

$$\varepsilon_{w0}(t) = \int_{0^-}^t \alpha \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{[II.66]}$$

où  $\alpha$  est le coefficient uniaxial de retrait-gonflement libre.  $\varepsilon_{w\sigma}(t)$  est définie par :

$$\varepsilon_{w\sigma}(t) = \int_{0^-}^t (m_L \varepsilon_{ve}(\tau)) \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{[II.67]}$$

Le coefficient  $m_L$  traduit la différence d'amplitude entre le retrait et le gonflement pour une même variation d'humidité (humidification et séchage) sous l'effet de la déformation viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$ , tel que :

$$m_L = \begin{cases} m_H & \text{si } \dot{w}(t) > 0 & : \text{ humidification} \\ m_S & \text{si } \dot{w}(t) < 0 & : \text{ séchage} \end{cases}$$

Dans la littérature, la déformation  $\varepsilon_{w\sigma}(t)$  est appelée déformation mécano-sorptive. Ranta-Maunus en propose une forme semblable mais en différenciant la première humidification des autres [RAN 75]. Cette déformation représente l'accumulation des déformations permanentes à chaque cycle humidification-séchage.

## II.4 Formulations incrémentales

Dans le passé, certains travaux [ZIE 68] intègrent directement des formulations intégrales semblables à [II.1] dans un code aux éléments finis. Cependant, le calcul de cette intégrale suppose la connaissance de la totalité de l'histoire des différents champs à intégrer. Cette méthode atteint rapidement des limites dans le cas de simulations basées sur des géométries complexes et pour de nombreux temps de calcul (stockage coûteux en mémoire et temps de calcul important). Pour cette raison, nous proposons une formulation incrémentale explicite qui permet de calculer l'évolution des différents champs mécaniques dans un incrément de temps tout en effectuant un stockage équivalent dans des champs remis à jour à chaque pas de calcul. Entre deux instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , nous pouvons exprimer la partition des déformations [II.68] de façon incrémentale :

$$\Delta\varepsilon_n = \Delta\varepsilon_{ve} + \Delta\varepsilon_w \quad \text{[II.68]}$$

avec

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon(t_n) - \varepsilon(t_{n-1}) \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_{ve} = \Delta\varepsilon_n^{(0)} + \sum_{m=1}^M \Delta\varepsilon_n^{(m)}$$

Dans un premier temps, nous établissons les lois de comportement viscoélastique assouplissant et rigidifiant. Dans un second temps, nous définissons l'incrément  $\Delta\varepsilon_w$  dont l'évolution dépend de la déformation viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$ .

### II.4.1 Loi incrémentale du comportement viscoélastique assouplissant

L'incrément de déformation instantanée  $\Delta\varepsilon_n^{(0)}$  est déterminé en considérant la dérivée de la forme intégrale [II.54] :

$$\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} = \frac{1}{k_{ref}^{(0)}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma(t)}{b^{(0)}(t)} \right) = \frac{1}{k_{ref}^{(0)}} \frac{d}{dt} \left( c^{(0)}(t) \sigma(t) \right) \quad \text{avec} \quad c^{(0)}(t) = \frac{1}{b^{(0)}(t)} \quad \text{[II.69]}$$

En intégrant l'expression [II.69] entre les instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$ ,  $\Delta\varepsilon_n^{(0)}$  est donné par :

$$\Delta\varepsilon_n^{(0)} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \varepsilon^{(0)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{k_{ref}^{(0)}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( c^{(0)}(\tau) \sigma(\tau) \right) d\tau \quad \text{[II.70]}$$

En supposant une évolution linéaire des fonctions  $\sigma(t)$  et  $c^{(0)}(t)$  dans l'incrément de temps  $\Delta t_n$ , la résolution de [II.70] donne la relation suivante :

$$\Delta\varepsilon_n^{(0)} = M_a^{(0)} \Delta\sigma_n + \tilde{\varepsilon}_a^{(0)} \quad \text{[II.71]}$$

avec

$$M_a^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_{n-1}) + \Delta c_n^{(0)}}{k_{ref}^{(0)}}$$

$$\tilde{\varepsilon}_a^{(0)} = \frac{\Delta c_n^{(0)}}{k_{ref}^{(0)}} \sigma(t_{n-1})$$

L'incrément de déformation de chaque cellule de Kelvin Voigt s'obtient en considérant dans la formulation [II.56] le changement de variable suivant :

$$\phi = \int_0^t \frac{b^{(m)}(\zeta)}{a^{(m)}(\zeta)} d\zeta \quad \text{et} \quad \phi - \phi' = \int_\tau^t \frac{b^{(m)}(\zeta)}{a^{(m)}(\zeta)} d\zeta \quad [\text{II.72}]$$

La variable  $\phi$  est appelée communément "temps réduit". La relation [II.72] est ensuite introduite dans [II.56] pour donner :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(m)}(t_n) = & \int_0^{\phi_{n-1}^{(m)}} \frac{e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi_n^{(m)} - \phi')}}{\eta_{ref}^{(m)}} c^{(m)}(\phi') \sigma(\phi') d\phi' \\ & + \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi_n^{(m)} - \phi')}}{\eta_{ref}^{(m)}} c^{(m)}(\phi') \sigma(\phi') d\phi' \end{aligned} \quad [\text{II.73}]$$

avec

$$c^{(m)}(\tau) = \frac{1}{b^{(m)}(\tau)}$$

Nous démontrons [RAN 01a], [RAN 01c], [RAN 01b], [RAN 02] que la relation [II.73] peut être transformée en faisant apparaître le terme de déformation calculé à l'instant  $t_{n-1}$  :

$$\varepsilon^{(m)}(t_n) = e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \varepsilon^{(m)}(t_{n-1}) + \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi_n^{(m)} - \phi')}}{\eta_{ref}^{(m)}} c^{(m)}(\phi') \sigma(\phi') d\phi' \quad [\text{II.74}]$$

Ainsi, l'incrément de déformation s'exprime d'après [II.68] et [II.74] par :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = \left( e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} - 1 \right) \varepsilon^{(m)}(t_{n-1}) + \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi_n^{(m)} - \phi')}}{\eta_{ref}^{(m)}} c^{(m)}(\phi') \sigma(\phi') d\phi' \quad [\text{II.75}]$$

Si les fonctions  $\sigma$  et  $c^{(m)}$  évoluent linéairement dans l'incrément de temps réduit  $[\phi_{n-1}, \phi_n]$ , nous obtenons l'incrément de déformation :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = M_a^{(m)} \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_a^{(m)} \quad [\text{II.76}]$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_a^{(m)} &= \frac{c^{(m)}(t_{n-1})}{k_{\text{ref}}^{(m)}} B^{(m)} + \frac{\Delta c_n^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} C^{(m)} \\
 \tilde{\varepsilon}_a^{(m)} &= \sigma(t_{n-1}) \left( \frac{c^{(m)}(t_{n-1})}{k_{\text{ref}}^{(m)}} A^{(m)} + \frac{\Delta c_n^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} B^{(m)} \right) - \varepsilon^{(m)}(t_{n-1}) A^{(m)}
 \end{aligned}
 \tag{II.77}$$

et

$$\begin{aligned}
 A^{(m)} &= 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \\
 B^{(m)} &= 1 - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \right) \\
 C^{(m)} &= 1 - \frac{2}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \right) \right) \\
 \Delta \phi_n^{(m)} &= \phi_n^{(m)} - \phi_{n-1}^{(m)}
 \end{aligned}
 \tag{II.78}$$

#### II.4.2 Loi incrémentale du comportement viscoélastique rigidifiant

La dérivée de la déformation instantanée  $\varepsilon^{(0)}(t)$  est déduite de la formulation [II.57], telle que :

$$\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} = \frac{c^{(0)}(t)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{avec} \quad c^{(0)}(t) = \frac{1}{b^{(0)}(t)}
 \tag{II.79}$$

L'intégration de l'expression [II.79] donne l'égalité suivante :

$$\Delta \varepsilon_n^{(0)} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \varepsilon^{(0)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} c^{(0)}(\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau
 \tag{II.80}$$

Si nous supposons une évolution linéaire des fonctions  $\sigma$  et  $c^{(0)}$  entre les instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , l'équation [II.80] s'écrit comme suit :

$$\Delta \varepsilon_n^{(0)} = M_r^{(0)} \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_r^{(0)}
 \tag{II.81}$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_r^{(0)} &= \frac{1}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \left( c^{(0)}(t_{n-1}) + \frac{\Delta c_n^{(0)}}{2} \right) \\
 \tilde{\varepsilon}_r^{(0)} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.82}$$

Le calcul de l'incrément de déformation de la  $m^{\text{ième}}$  cellule de Kelvin Voigt s'effectue en développant l'équation différentielle [II.59], et ce, dans le contexte de la formulation incrémentale :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \varepsilon^{(m)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{\partial \varepsilon^{(m)}(\phi')}{\partial \phi'} d\phi'
 \tag{II.83}$$

La notation  $\phi$  représente, comme précédemment, le temps réduit dont la définition est donnée par la relation [II.72]. L'introduction du temps réduit dans l'équation [II.60] permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial \varepsilon^{(m)}(\phi)}{\partial \phi} = \frac{c^{(m)}(\phi)}{\eta_{ref}^{(m)}} \int_0^{\phi} e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi-\phi')} \frac{\partial \sigma(\phi')}{\partial \phi'} d\phi' \quad [II.84]$$

En intégrant par partie l'intégrale [II.84] et en considérant l'expression [II.83], la formulation de l'accroissement  $\Delta \varepsilon_n^{(m)}$  se définit par :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{c^{(m)}(\phi)}{\eta_{ref}^{(m)}} \sigma(\phi) d\phi - \frac{\lambda_{ref}^{(m)}}{\eta_{ref}^{(m)}} \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \left( c^{(m)}(\phi) \int_0^{\phi} e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi-\phi')} \sigma(\phi') d\phi' \right) d\phi \quad [II.85]$$

ou encore,

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \frac{c^{(m)}(\phi)}{\eta_{ref}^{(m)}} \sigma(\phi) d\phi - \lambda_{ref}^{(m)} \int_{\phi_{n-1}^{(m)}}^{\phi_n^{(m)}} \left( c^{(m)}(\phi) e^{-\lambda_{ref}^{(m)}\phi} \bar{\varepsilon}^{(m)}(\phi) \right) d\phi \quad [II.86]$$

avec

$$\bar{\varepsilon}^{(m)}(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{e^{-\lambda_{ref}^{(m)}(\phi-\phi')}}{\eta_{ref}^{(m)}} \sigma(\phi') d\phi' \quad [II.87]$$

$\bar{\varepsilon}^{(m)}$  représente la déformation de la  $m^{i\text{ème}}$  cellule de Kelvin-Voigt d'un matériau non vieillissant pour un teneur en eau de référence  $w_{ref}$ .

En supposant une forme linéaire des fonctions  $\sigma$  et de  $c^{(m)}$  dans l'incrément de temps réduit  $[\phi_{n-1}, \phi_n]$ , nous obtenons pour la formulation incrémentale suivante :

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = M_r^{(m)} \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_r^{(m)} \quad [II.88]$$

avec

$$\begin{aligned} M_r^{(m)} &= \frac{c^{(m)}(t_{n-1})}{k_{ref}^{(m)}} B^{(m)} + \frac{\Delta c_n^{(m)}}{2k_{ref}^{(m)}} E^{(m)} \\ \tilde{\varepsilon}_r^{(m)} &= \sigma(t_{n-1}) \left( \frac{c^{(m)}(t_{n-1})}{k_{ref}^{(m)}} A^{(m)} - \frac{\Delta c_n^{(m)}}{k_{ref}^{(m)}} D^{(m)} \right) \\ &\quad + \bar{\varepsilon}^{(m)}(t_{n-1}) \left( -c^{(m)}(t_{n-1}) A^{(m)} + \Delta c_n^{(m)} D^{(m)} \right) \end{aligned} \quad [II.89]$$

$A^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$  et  $C^{(m)}$  sont définis par les relations [II.78] et

$$D^{(m)} = e^{-\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \right) - \frac{1}{\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \quad [II.90]$$

$$E^{(m)} = 1 + \frac{2}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left[ e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \right) - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta \phi_n^{(m)}} \right] \quad [\text{II.91}]$$

L'évolution incrémentale  $\Delta \tilde{\varepsilon}^{(m)}$  est semblable à  $\Delta \varepsilon_n^{(m)}$  en imposant  $c^{(m)}(t_{n-1}) = 1$  et  $\Delta c_n^{(m)} = 0$  dans l'égalité [II.77], telle que :

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_n^{(m)} = M_{r\tilde{\varepsilon}}^{(m)} \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_{r\tilde{\varepsilon}}^{(m)} \quad [\text{II.92}]$$

avec

$$\begin{aligned} M_{r\tilde{\varepsilon}}^{(m)} &= \frac{B^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} \\ \tilde{\varepsilon}_{r\tilde{\varepsilon}}^{(m)} &= \sigma(t_{n-1}) \frac{A^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} - \tilde{\varepsilon}(t_{n-1}) A^{(m)} \end{aligned} \quad [\text{II.93}]$$

### II.4.3 Formulation incrémentale du retrait-gonflement sous influence mécanique

L'incrément de déformation de retrait-gonflement sous contrainte, entre les instants  $[t_{n-1}, t_n]$ , est donné par la relation :

$$\Delta \varepsilon_w = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\alpha + m_L \varepsilon_{ve}(\tau)) \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad [\text{II.94}]$$

Pour simplifier l'intégration de [II.94], on considère que  $\varepsilon_{ve}$  et  $w$  sont linéaires dans l'incrément de temps considéré. On obtient alors l'expression suivante :

$$\Delta \varepsilon_w = M_w \Delta w_n \quad [\text{II.95}]$$

avec

$$M_w = \alpha + m_L \left( \frac{\Delta \varepsilon_{ve}}{2} + \varepsilon_{ve}(t_{n-1}) \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ve}(t_{n-1}) = \varepsilon^{(0)}(t_{n-1}) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{(m)}(t_{n-1})$$

### II.4.4 Formulation incrémentale de la déformation totale

L'incrément de déformation totale  $\Delta \varepsilon_n$  est la somme de l'incrément de déformation viscoélastique et celui de la déformation de retrait-gonflement sous contrainte. Dans le cas d'un comportement assouplissant, il est calculé en sommant les relations [II.71], [II.76] et [II.95]. Pour un comportement rigidifiant, l'incrément découle de la combinaison des expressions [II.81], [II.88] et [II.95]. Dans les deux cas, on en déduit alors la relation générale suivante :

$$\Delta \varepsilon_n = M \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon} \quad [\text{II.96}]$$

avec

$$M = \begin{cases} M_a \\ M_r \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_a & : \text{Comportement assouplissant} \\ \tilde{\varepsilon}_r & : \text{Comportement rigidifiant} \end{cases}$$

M représente la complaisance viscoélastique équivalente qui permet de traduire l'effet d'une variation linéaire de la contrainte pendant l'incrément de temps. Elle dépend de la taille de l'incrément de temps ainsi que des caractéristiques viscoélastiques du matériau. Dans le cas assouplissant et rigidifiant, nous obtenons :

$$M_a = \left(1 + \frac{m_L \Delta w_n}{2}\right) \left(M_a^{(0)} + \sum_{m=1}^M M_a^{(m)}\right) \quad [\text{II.97}]$$

$$M_r = \left(1 + \frac{m_L \Delta w_n}{2}\right) \left(M_r^{(0)} + \sum_{m=1}^M M_r^{(m)}\right) \quad [\text{II.98}]$$

$\tilde{\varepsilon}$  est considérée comme une déformation initiale. Elle mémorise toute l'histoire du chargement et de l'humidité.

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_a &= (\alpha + m_L \varepsilon_{ve}(t_{n-1})) \Delta w_n \\ &+ \left(\tilde{\varepsilon}_a^{(0)} + \sum_{m=1}^M \tilde{\varepsilon}_a^{(m)}\right) (1 + m_L \Delta w_n) \end{aligned} \quad [\text{II.99}]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= (\alpha + m_L \varepsilon_{ve}(t_{n-1})) \Delta w_n \\ &+ \left(\tilde{\varepsilon}_r^{(0)} + \sum_{m=1}^M \tilde{\varepsilon}_r^{(m)}\right) (1 + m_L \Delta w_n) \end{aligned} \quad [\text{II.100}]$$

Dans la formulation [II.96], tous les termes sont exprimés en fonction de l'incrément de temps réduit. Sa définition [II.72] permet de calculer l'incrément de temps réduit  $\Delta\phi_n$  en fonction de l'incrément de temps réel en supposant, dans l'incrément  $[t_{n-1}, t_n]$ , une évolution linéaire de la fonction :

$$y^{(m)}(t) = \frac{b^{(m)}(t)}{a^{(m)}(t)} \quad \text{avec} \quad b^{(m)}(t) = \frac{1}{c^{(m)}(t)} \quad [\text{II.101}]$$

L'incrément de temps réduit  $\Delta\phi_n$  est donc donné par la relation :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_n^{(m)} &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} y^{(m)}(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{\Delta t_n}{2 c^{(m)}(t_n) a^{(m)}(t_n)} + \frac{\Delta t_n}{2 c^{(m)}(t_{n-1}) a^{(m)}(t_{n-1})} \end{aligned} \quad [\text{II.102}]$$

## II.5 Couplage des loi de comportement pour une variation non monotone de la rigidité

Dans le précédent paragraphe, nous avons établis deux formulations incrémentales du comportement viscoélastique pour une variation monotone de la rigidité (rigidification ou assouplissement). Elles présentent une forme similaire mais les termes d'histoire  $\bar{\epsilon}_a$  et  $\bar{\epsilon}_r$  ne sont pas mis à jour d'une façon identique. Pour une variation monotone de la rigidité (rigidification ou assouplissement) depuis le début du chargement, les deux formulations incrémentales sont employées d'une façon découplée [RAN 01a]. Cependant, si nous souhaitons modéliser les effets d'une variation non monotone de l'humidité du bois (alternance des phases d'humidification et de séchage), les deux formulations doivent être couplées afin que le comportement soit compatible avec les principes de la thermodynamique.

### II.5.1 Comportement élastique

Afin de clarifier ce fait, nous prenons comme exemple, le comportement élastique d'une éprouvette de bois soumise à une contrainte de traction constante sous des variations de rigidité, suivie d'une décharge totale de la contrainte, figure II.3.

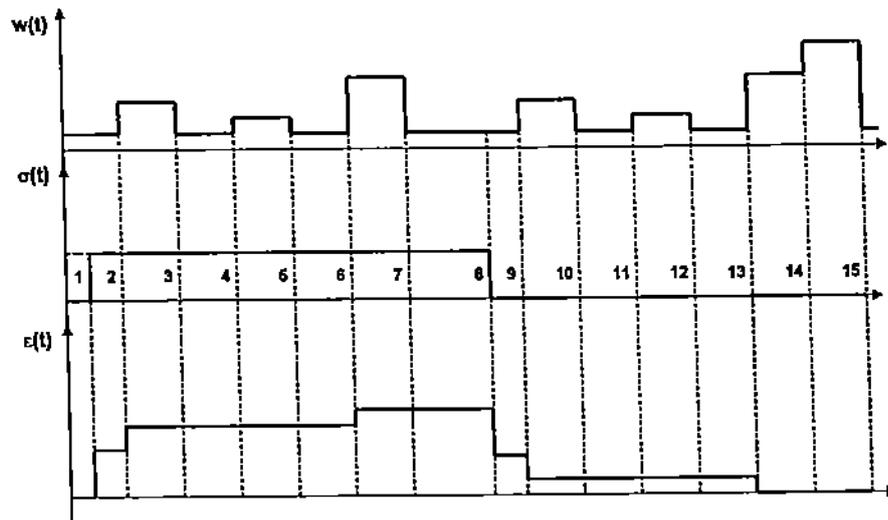


Figure II.3 – Comportement élastique sous une variation non monotone de l'humidité.

La déformation est une fonctionnelle de la contrainte et de la rigidité. La réponse donnée à la figure II.3 doit vérifier le principe de superposition, telle que :

$$\begin{cases} \epsilon_1(t) = S \{ \sigma_1(\tau), k(\tau) / \tau \in [0, t] \} \\ \epsilon_2(t) = S \{ \sigma_2(\tau), k(\tau) / \tau \in [0, t] \} \end{cases} \quad [\text{II.103}]$$

on en déduit :

$$\epsilon(t) = \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t) = S \{ \sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau), k(\tau) / \tau \in [0, t] \} \quad [\text{II.104}]$$

Sous une contrainte mécanique, la déformation est figée au séchage. L'activation de la déformation est gérée par un seuil en humidité. Après déchargement, la déformation, bloquée lors

des phases de séchage, est libérée lors d'une humidification (recouvrance hydrique). Si nous appliquons le même chemin de variations d'humidité pendant le chargement et le déchargement, nous avons une réversibilité de la déformation. Ce comportement est semblable au comportement atypique déjà présenté dans la littérature par Gril [GRI 88] avec le modèle hygro-verrou décrit au chapitre précédent. Pour reproduire ce type de comportement, nous utilisons les lois de comportement (assouplissant et rigidifiant) en prenant en compte l'histoire hydrique, notamment le blocage de la déformation si l'humidité jamais atteinte auparavant n'est pas dépassée sous une contrainte constante. Le stockage de l'histoire entre les deux formulations incrémentales doit être effectué correctement. Les trois cas suivants sont à considérer dans la mise à jour des paramètres :

• **Cas 1 :** Lorsque la teneur en eau maximale jamais atteinte est dépassée ( $w(t_n) \geq w_{\max}$ ), le comportement du ressort est assouplissant et la déformation est mise à jour de la façon suivante :

$$\Delta \varepsilon_x^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_x + \frac{\Delta c_x^{(0)}}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \sigma(t_x) \quad [\text{II.105}]$$

avec

- ◊  $t_x = t(w_{\max})$
- ◊  $\Delta \varepsilon_x^{(0)} = \varepsilon^{(0)}(t_n) - \varepsilon(t_x)$
- ◊  $\Delta \sigma_x^{(0)} = \sigma^{(0)}(t_n) - \sigma(t_x)$
- ◊  $\Delta c_x^{(0)} = c^{(0)}(t_n) - c(t_x)$

L'incrément de déformation élastique entre l'instant  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\Delta \varepsilon_n^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_n + \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} (\sigma(t_{n-1}) - \sigma(t_x)) + \frac{\Delta c_x^{(0)}}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \sigma(t_x) + \varepsilon^{(0)}(t_x) - \varepsilon^{(0)}(t_{n-1}) \quad [\text{II.106}]$$

• **Cas 2 :** Lorsque la teneur en eau du bois est au dessus de la teneur en eau atteinte lors de la dernière humidification, tout en restant inférieure à la teneur en eau maximale ( $w_{\max} \geq w(t_n) \geq w_h$ ), le comportement du ressort est rigidifiant et la déformation est mise à jour comme suit :

$$\Delta \varepsilon_x^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_x \quad [\text{II.107}]$$

Dans ce cas, l'incrément de déformation élastique  $\Delta \varepsilon_n^{(0)}$  est donné par cette relation :

$$\Delta \varepsilon_n^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_n + \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} (\sigma(t_{n-1}) - \sigma(t_x)) + \varepsilon^{(0)}(t_x) - \varepsilon^{(0)}(t_{n-1}) \quad [\text{II.108}]$$

• **Cas 3** : Lorsque la teneur en eau actuelle est inférieure à la teneur en eau atteinte à la dernière humidification ( $w_h \geq w(t_n)$ ), le comportement du ressort est rigidifiant et la déformation est mise à jour comme suit :

$$\Delta \varepsilon_h^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_h \quad [\text{II.109}]$$

avec

- $t_h = t(w_h)$
- $\Delta c_h^{(0)} = c^{(0)}(t_n) - c(t_h)$
- $\Delta \sigma_h^{(0)} = \sigma^{(0)}(t_n) - \sigma(t_h)$
- $\Delta \varepsilon_h^{(0)} = \varepsilon^{(0)}(t_n) - \varepsilon(t_h)$

Comme précédemment, on en déduit de la relation [II.109] l'incrément de déformation élastique  $\Delta \varepsilon_n$  suivant :

$$\Delta \varepsilon_n^{(0)} = \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} \Delta \sigma_n + \frac{c^{(0)}(t_n)}{k_{\text{ref}}^{(0)}} (\sigma_{n-1} - \sigma(t_h)) + \varepsilon^{(0)}(t_h) - \varepsilon^{(0)}(t_{n-1}) \quad [\text{II.110}]$$

## II.5.2 Généralisation au comportement viscoélastique

Dans le cas du comportement viscoélastique, nous appliquons le même formalisme de mise à jour :

• **Cas 1** : La formulation est celle d'un matériau assouplissant et la mise à jour de la déformation se fait par rapport aux valeurs des paramètres à l'instant  $t_x = t(w_{\text{max}})$ , telle que :

$$\Delta \varepsilon_x^{(m)} = M_{\text{ax}}^{(m)} \Delta \sigma_x + \tilde{\varepsilon}_{\text{ax}}^{(m)} \quad [\text{II.111}]$$

d'où

$$\Delta \varepsilon_n^{(m)} = M_{\text{ax}}^{(m)} \Delta \sigma_n + \left[ M_{\text{ax}}^{(m)} (\sigma_{n-1} - \sigma_x) + \tilde{\varepsilon}_{\text{ax}}^{(m)} + (\varepsilon^{(m)}(t_x) - \varepsilon^{(m)}(t_{n-1})) \right] \quad [\text{II.112}]$$

avec

$$\begin{aligned} M_{\text{ax}}^{(m)} &= \frac{c^{(m)}(t_x)}{k_{\text{ref}}^{(m)}} B_x^{(m)} + \frac{\Delta c_x^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} C_x^{(m)} \\ \tilde{\varepsilon}_{\text{ax}}^{(m)} &= \sigma(t_x) \left( \frac{c^{(m)}(t_x)}{k_{\text{ref}}^{(m)}} A_x^{(m)} + \frac{\Delta c_x^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} B_x^{(m)} \right) - \varepsilon^{(m)}(t_x) A_x^{(m)} \end{aligned} \quad [\text{II.113}]$$

et

$$\begin{aligned}
 A_x^{(m)} &= 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \\
 B_x^{(m)} &= 1 - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \right) \\
 C_x^{(m)} &= 1 - \frac{2}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \right) \right) \\
 \Delta\phi_x^{(m)} &= \phi_n^{(m)} - \phi_x^{(m)}
 \end{aligned} \tag{II.114}$$

• **Cas 2 :** La loi de comportement rigidifiant est appliquée en considérant les paramètres à l'instant  $t_x$ , telle que :

$$\Delta\varepsilon_x^{(m)} = M_{rx}^{(m)} \Delta\sigma_x + \tilde{\varepsilon}_{rx}^{(m)} \tag{II.115}$$

d'où

$$\Delta\varepsilon_n^{(m)} = M_{rx}^{(m)} \Delta\sigma_n + \left[ M_{rx}^{(m)} (\sigma_{n-1} - \sigma_x) + \tilde{\varepsilon}_{rx}^{(m)} + (\varepsilon^{(m)}(t_x) - \varepsilon^{(m)}(t_{n-1})) \right] \tag{II.116}$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_{rx}^{(m)} &= \frac{c^{(m)}(t_x)}{k_{\text{ref}}^{(m)}} B_x^{(m)} + \frac{\Delta c_x^{(m)}}{2k_{\text{ref}}^{(m)}} E_x^{(m)} \\
 \tilde{\varepsilon}_{rx}^{(m)} &= \sigma(t_x) \left( \frac{c^{(m)}(t_x)}{k_{\text{ref}}^{(m)}} A_x^{(m)} - \frac{\Delta c_x^{(m)}}{k_{\text{ref}}^{(m)}} D_x^{(m)} \right) \\
 &\quad + \tilde{\varepsilon}^{(m)}(t_x) \left( -c^{(m)}(t_x) A_x^{(m)} + \Delta c_x^{(m)} D_x^{(m)} \right)
 \end{aligned} \tag{II.117}$$

$A_x^{(m)}$ ,  $B_x^{(m)}$  et  $C_x^{(m)}$  sont définis dans le cas 1 ci-dessus [II.114] et

$$D_x^{(m)} = e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \right) - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \tag{II.118}$$

et

$$E_x^{(m)} = 1 + \frac{2}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left[ e^{-\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \right) - \frac{1}{\lambda_{\text{ref}}^{(m)} \Delta\phi_x^{(m)}} \right] \tag{II.119}$$

• **Cas 3 :** La mise à jour de la déformation se fait par rapport aux valeurs des paramètres à un taux d'humidité  $w_h$ , en employant la formulation rigidifiante, telle que :

$$\Delta\varepsilon_h^{(m)} = M_{rh}^{(m)} \Delta\sigma_h + \tilde{\varepsilon}_{rh}^{(m)} \tag{II.120}$$

d'où

$$\Delta\varepsilon_n^{(m)} = M_{rh}^{(m)} \Delta\sigma_n + \left[ M_{rh}^{(m)} (\sigma_{n-1} - \sigma_h) + \tilde{\varepsilon}_{rh}^{(m)} + (\varepsilon^{(m)}(t_h) - \varepsilon^{(m)}(t_{n-1})) \right] \tag{II.121}$$

avec

$$\begin{aligned} M_{rh}^{(m)} &= \frac{c^{(m)}(t_h)}{k_{ref}^{(m)}} B_h^{(m)} + \frac{\Delta c_h^{(m)}}{2k_{ref}^{(m)}} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_{ref}^{(m)} \Delta \phi_h^{(m)}} D_h^{(m)} \right) \\ \tilde{\varepsilon}_{rh}^{(m)} &= \sigma(t_h) \left( \frac{c^{(m)}(t_h)}{k_{ref}^{(m)}} A_b^{(m)} + \frac{\Delta c_x^{(m)}}{k_{ref}^{(m)}} B_h^{(m)} \right) \\ &\quad + \bar{\varepsilon}^{(m)}(t_h) \left( -c^{(m)}(t_h) A_h^{(m)} + \Delta c_h^{(m)} C_h^{(m)} \right) \end{aligned} \quad [II.122]$$

Les expressions de  $A_h^{(m)}$ ,  $B_h^{(m)}$ ,  $C_h^{(m)}$  et  $D_h^{(m)}$  sont identiques à celles de  $A_x^{(m)}$ ,  $B_x^{(m)}$ ,  $C_x^{(m)}$  et  $D_x^{(m)}$  en remplaçant  $\Delta \phi_x^{(m)}$  par  $\Delta \phi_h^{(m)}$ .

## II.6 Résolution par la méthode des éléments finis

### II.6.1 Comportement tridimensionnel

Afin de généraliser la loi de comportement incrémentale uniaxiale en une loi tridimensionnelle, on applique le principe de superposition rendu possible par la linéarité du comportement. On définit la déformation  $\Pi_{ijkl}$  dans la direction  $ij$  engendrée par une contrainte uniaxiale  $\sigma_{kl}$  et on écrit la composante  $\varepsilon_{ij}$  du tenseur de déformation telle que  $\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} \Pi_{ijkl}$ . On en déduit alors l'incrément de déformation  $\Delta \varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} \Delta \Pi_{ijkl}$  où l'incrément de déformation  $\Delta \Pi_{ijkl}$  est donnée par la relation :

$$\Delta \Pi_{ijkl} = M_{ijkl} \Delta \sigma_{kl} + \tilde{\Pi}_{ijkl} \quad (\text{sans sommation sur } k \text{ et } l) \quad [II.123]$$

L'incrément de déformation  $\Delta \varepsilon_{ij}$  s'écrit ainsi sous la forme :

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} M_{ijkl} \Delta \sigma_{kl} + \sum_{k,l} \tilde{\Pi}_{ijkl} \quad [II.124]$$

La relation [II.124] peut également s'écrire sous une forme tensorielle :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{M}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \quad [II.125]$$

ou encore

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \quad [II.126]$$

d'où

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\bar{\sigma}}} \quad \text{avec } \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \quad \text{et } \underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \quad [II.127]$$

### II.6.2 Principe des travaux virtuels

Dans le but de résoudre l'équation incrémentale [II.125], dans un algorithme éléments finis, nous employons la méthode proposée par Ghazlan [GHA 95] dérivée du principe des travaux virtuels qui repose sur le bilan énergétique faisant intervenir l'énergie de déformation  $W_\varepsilon$  et le travail des efforts extérieurs  $W_{ext}$ . Connaissant les champs de contraintes et de déformations à l'instant  $t_{n-1}$ , nous cherchons à connaître ces champs à l'instant  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ . Pour un champ de déplacement  $\underline{\underline{u}}^*$  virtuel et cinématiquement admissible, traduisant une perturbation du champ

réel  $\underline{u}$  dans une configuration d'équilibre à l'instant  $t_n$ , le principe des travaux virtuels est défini par l'égalité :

$$W_\varepsilon^*(t_n) = W_{\text{ext}}^*(t_n) \quad \forall \quad \underline{u}^* \text{ cinématiquement admissible} \quad [\text{II.128}]$$

Le champ d'accroissement de déplacement virtuel  $\Delta \underline{u}^*$ , de coordonnées  $\Delta u_i^*$ , induit un taux de déformation virtuelle  $\Delta \varepsilon_i^*$  tel que :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad [\text{II.129}]$$

A l'instant  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ , les vecteurs colonnes de la contrainte  $\underline{\sigma}$ , de la force volumique  $\underline{f}_V$  et surfacique  $\underline{f}_S$  se décomposent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(t_n) = \underline{\sigma}(t_{n-1}) + \Delta \underline{\sigma} \\ \underline{f}_V(t_n) = \underline{f}_V(t_{n-1}) + \Delta \underline{f}_V \\ \underline{f}_S(t_n) = \underline{f}_S(t_{n-1}) + \Delta \underline{f}_S \end{cases} \quad [\text{II.130}]$$

L'énergie de déformation et le travail des efforts extérieurs sont donnés par les relations :

$$W_\varepsilon^*(t_n) = \int_{V(t_n)} \underline{\sigma}^T(t_n) \cdot \Delta \underline{\varepsilon}^* dV \quad [\text{II.131}]$$

et

$$W_{\text{ext}}^*(t_n) = \int_V \underline{f}_V^T(t_n) \cdot \Delta \underline{u}^* dV + \int_{S_V} \underline{f}_S^T(t_n) \cdot \Delta \underline{u}^* dS \quad [\text{II.132}]$$

Le principe des travaux virtuels [II.128] à l'instant  $t_n$  s'exprime par :

$$\begin{aligned} \int_V \left( \underline{\sigma}^T(t_{n-1}) + \Delta \underline{\sigma}^T \right) \cdot \Delta \underline{\varepsilon}^* dV &= \int_V \left( \underline{f}_V^T(t_{n-1}) + \Delta \underline{f}_V^T \right) \cdot \Delta \underline{u}^* dV \\ &+ \int_{S_V} \left( \underline{f}_S^T(t_{n-1}) + \Delta \underline{f}_S^T \right) \cdot \Delta \underline{u}^* dS \end{aligned} \quad [\text{II.133}]$$

Le principe des travaux virtuels est aussi valable à l'instant  $t_{n-1}$ . On a donc la simplification suivante :

$$\int_V \Delta \underline{\sigma}^T \cdot \Delta \underline{\varepsilon}^* dV = \int_V \Delta \underline{f}_V^T \cdot \Delta \underline{u}^* dV + \int_{S_V} \Delta \underline{f}_S^T \cdot \Delta \underline{u}^* dS \quad [\text{II.134}]$$

L'équation d'équilibre incrémentale ci-dessus est introduite dans une discrétisation du domaine par éléments finis. Le vecteur colonne  $\Delta \underline{u}(t_n)$  (incrément du champ de déplacements à l'intérieur d'un élément  $V$ ) est relié au vecteur colonne  $\Delta \underline{q}(t_n)$  (incrément du champ de déplacements nodaux de l'élément considéré) par la matrice  $\mathbf{N}(x, y)$  des fonctions de forme de chaque élément, tel que :

$$\Delta \underline{u}(x, y, t_n) = \mathbf{N}(x, y) \cdot \Delta \underline{q}(t_n) \quad [\text{II.135}]$$

La variation du champ de déformation  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}$ , calculée aux points d'intégration, est déterminée d'après le vecteur colonne des incréments des déplacements nodaux noté  $\Delta \underline{q}(t_n)$  et de la matrice jacobienne  $\mathbf{B}$  caractérisant le type d'élément fini  $V$  :

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}(t_n) = \mathbf{B} \cdot \Delta \underline{q}(t_n) \quad [\text{II.136}]$$

En intégrant l'équation incrémentale [II.125] dans l'élément  $V$ , on obtient l'équation d'équilibre élément fini suivante :

$$\int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Delta \underline{q}(t_n) dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}(t_{n-1}) dV = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \Delta \underline{f}_V(t_n) dV + \int_{S_V} \mathbf{B}^T \cdot \Delta \underline{f}_S(t_n) dS \quad [\text{II.137}]$$

$\underline{\underline{\epsilon}}(t_{n-1})$  représente le vecteur colonne formé des composantes du tenseur  $\underline{\underline{\epsilon}}$  défini aux points de Gauss de chaque élément  $V$ . L'équation d'équilibre [II.137] peut être aussi écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta \underline{q}(t_n) = \Delta \underline{F}^{\text{ext}}(t_n) + \underline{F}^{\text{hist}}(t_{n-1}) \quad [\text{II.138}]$$

où  $\mathbf{K}_T$  désigne une matrice tangente équivalente assemblée à partir des composantes du tenseur  $\mathbf{M}$  et de la matrice Jacobienne  $\mathbf{B}$ , telle que :

$$\mathbf{K}_T = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} dV \quad [\text{II.139}]$$

$\Delta \underline{F}^{\text{ext}}(t_n)$  représente le vecteur colonne de l'accroissement des efforts extérieurs durant l'incrément de temps  $\Delta t_n$ .

$$\Delta \underline{F}^{\text{ext}}(t_n) = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \Delta \underline{f}_V dV + \int_{S_F} \mathbf{B}^T \cdot \Delta \underline{f}_S dS \quad [\text{II.140}]$$

$\underline{F}^{\text{hist}}(t_{n-1})$  est le vecteur colonne du chargement équivalent prenant en compte l'histoire passée du chargement mécanique et hydrique. Il est défini par la relation suivante :

$$\underline{F}^{\text{hist}}(t_{n-1}) = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(t_{n-1}) dV \quad [\text{II.141}]$$

L'équation d'équilibre [II.138] est ensuite implantée dans le code aux éléments finis CAST3M.

## II.7 Vérifications numériques

Nous avons implanté dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M une procédure viscoélastique linéaire intégrant le couplage du vieillissement rigidifiant et assouplissant et le retrait-gonflement sous contrainte. Il convient de le vérifier avant d'envisager son utilisation pour des applications réelles. L'objectif est de vérifier, pour des problèmes simples où il existe des solutions analytiques, qu'aucune erreur ne s'est glissée dans la programmation. Des exemples simples sont résolus analytiquement. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par calcul élément finis. Dans le but de simplifier le calcul et d'obtenir des champs mécaniques homogènes, nous prenons une plaque en traction avec un matériau orthotrope. La plaque est modélisée par un élément fini linéaire quadrilatère à 4 noeuds (QUA4).

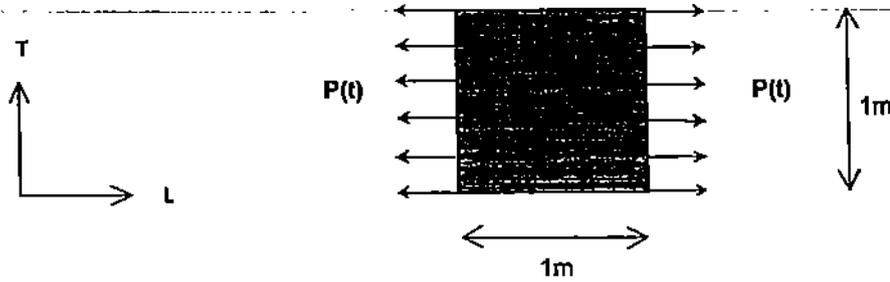


Figure II.4 – Plaque en traction.

Afin de simplifier le problème, nous nous limitons à une modélisation en contraintes planes. Ainsi, le champ de contraintes et le tenseur de fluage prennent les formes suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} P(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}(t, \tau) = \begin{pmatrix} J_{LL}(t, \tau) & J_{LT}(t, \tau) & 0 \\ J_{TL}(t, \tau) & J_{TT}(t, \tau) & 0 \\ 0 & 0 & J_{LTLT}(t, \tau) \end{pmatrix} \quad \text{[II.142]}$$

En outre, nous posons les hypothèses suivantes :

$$\frac{J_{LT}(t, \tau)}{J_{LL}(t, \tau)} = \frac{J_{TL}(t, \tau)}{J_{LL}(t, \tau)} = \frac{J_{LT}(0, 0)}{J_{LL}(0, 0)} = -\nu_{LT} \quad \text{[II.143]}$$

$$\frac{J_{TT}(t, \tau)}{J_{LL}(t, \tau)} = \frac{J_{TT}(0, 0)}{J_{LL}(0, 0)} = \frac{E_{LL}}{E_{TT}} \quad \text{[II.144]}$$

$$\frac{J_{LTLT}(t, \tau)}{J_{LL}(t, \tau)} = \frac{J_{LTLT}(0, 0)}{J_{LL}(0, 0)} = \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \quad \text{[II.145]}$$

On obtient le tenseur de fluage suivant :

$$\mathbf{J}(t, \tau) = J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \quad \text{[II.146]}$$

Le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  est supposé constant dans le temps et seule la complaisance  $J_{LL}(t)$  aura des caractéristiques différées modifiées avec la température et le taux d'humidité. Dans la

vérification de l'expression  $\Delta \epsilon_n = M \cdot \Delta \sigma_n + \tilde{\epsilon}$ , nous validons, d'abord, le terme  $\tilde{\epsilon}$  par des essais de fluage puis, dans un deuxième temps, le terme M par des essais où la contrainte évolue linéairement. Dans toutes les vérifications, nous fixons les paramètres suivants :

- les coefficients de poisson :  $\nu_{LT} = 0,43$ ,  $\nu_{LR} = 0,53$  et  $\nu_{TR} = 0,58$ ,
- le module d'Young longitudinal :  $E_{LL} = 11000$  MPa,
- le module d'Young transversal :  $E_{TT} = 715$  MPa,
- le module de cisaillement :  $G_{LT} = 1615$  MPa,
- une cellule de Kelvin-Voigt :  $k_{ref}^{(1)} = 10000$  MPa,  $\eta_{ref}^{(1)} = 10000$  MPa·min,
- les coefficients de retrait-gonflement libres :  $\alpha_L = 2 \cdot 10^{-5}$  et  $\alpha_T = 1,9 \cdot 10^{-3}$ ,
- les paramètres de couplage entre le retrait-gonflement et l'état de déformation :  $m_L$  et  $m_T$ ,

$$m_L = \begin{cases} m_{HL} = 1 \cdot 10^{-4} \\ m_{SL} = 1 \cdot 10^{-4} \end{cases} \quad \text{et} \quad m_T = \begin{cases} m_{HT} = 1 \cdot 10^{-4} \\ m_{ST} = 1 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Nous fixons l'évolution de la fonction  $J_{LL}(t)$  suivant le modèle de Kelvin Voigt généralisé décrit à la figure II.5.

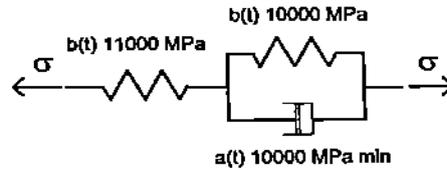


Figure II.5 – Décomposition spectrale de  $J_{LL}(t)$ .

### II.7.1 Fluage sans vieillissement sous une humidité constante

La première vérification consiste à contrôler la mise en mémoire des champs mécaniques en ignorant l'effet du temps réduit. On se trouve donc dans le cas d'un matériau non vieillissant où les caractéristiques mécaniques ne varient pas ( $a(t)=1$  et  $b(t)=1$ ). Nous supposons un essai de fluage en imposant une contrainte de traction constante  $P_0=10$  MPa. La déformation est définie de la façon suivante :

$$\underline{\epsilon}(t) = \mathbf{J}(t, 0) : \underline{\sigma}_0 \quad [\text{II.147}]$$

La relation [II.147] peut alors s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{LL}(t) \\ \epsilon_{TT}(t) \\ \gamma_{LT}(t) \end{pmatrix} = J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{II.148}]$$

avec

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{k_{re\Omega LL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{re\Omega LL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{re\Omega LL}^{(1)}(t-\tau)} \right) \quad [II.149]$$

L'expression numérique de  $J_{LL}(t, 0)$  est la suivante :

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{1}{11000} + \frac{1}{10000} \left( 1 - e^{-t} \right) \quad [II.150]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  calculées analytiquement et celles données par la procédure sont représentées à la figure II.6.

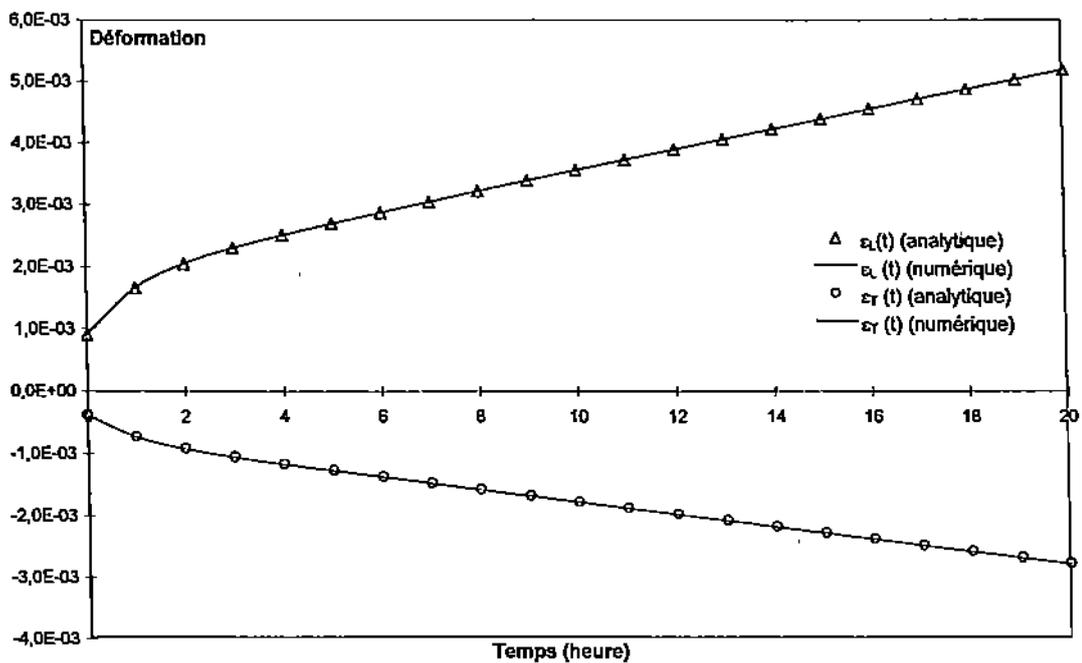


Figure II.6 – Fluage sans vieillissement sous une humidité constante.

### II.7.2 Fluage assouplissant pendant une humidification

On vérifie le terme  $\bar{\varepsilon}$  pour un matériau assouplissant en prenant en compte le temps réduit en imposant  $a(t)=1$  et une évolution linéaire et croissante de  $c(t)$  telle que :

$$c(t) = \frac{1}{b(t)} \quad \text{et} \quad c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = 0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [II.151]$$

D'autre part, on applique une évolution linéaire et croissante de la teneur en eau telle que :

$$w(t) = 0,01 t + 0,12 \quad [II.152]$$

La déformation totale s'exprime sous la forme :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{\varepsilon}_{ve}(t) + (\underline{\alpha} + \mathbf{m} : \underline{\varepsilon}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{II.153}]$$

avec

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_L & 0 & 0 \\ 0 & m_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\varepsilon}_{ve} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} \quad [\text{II.154}]$$

et

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} = J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{II.155}]$$

Dans le cas d'un comportement assouplissant, la fonction de fluage s'écrit :

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(t)k_{refLL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{\vartheta}^t \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu} \frac{1}{a(\vartheta)\eta_{refLL}^{(1)}} d\vartheta \quad [\text{II.156}]$$

d'où

$$\begin{aligned} J_{LL}(t, 0) &= \frac{c_1 t + c_0}{k_{ref}^{(0)}} + \frac{c_0}{k_{ref}^{(1)}} \left[ 1 - \left( \frac{c_1 t + c_0}{c_0} \right) \left( -\frac{\lambda_{ref}^{(1)}}{c_1} \right) \right] + c_1 t \left( \frac{1}{k_{ref}^{(0)}} + \frac{1}{k_{ref}^{(1)}} \right) \\ &\quad - \frac{(c_1 t + c_0) \left( -\frac{\lambda_{ref}^{(1)}}{c_1} \right)}{\left( k_{ref}^{(1)} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_{ref}^{(1)}}{c_1} \right)} \cdot \left[ (c_1 t + c_0) \left( 1 + \frac{\lambda_{ref}^{(1)}}{c_1} \right) + c_0 \left( 1 + \frac{\lambda_{ref}^{(1)}}{c_1} \right) \right] \end{aligned} \quad [\text{II.157}]$$

L'expression numérique de  $J_{LL}(t, 0)$  est :

$$\begin{aligned} J_{LL}(t, 0) &= \frac{0,001 t + 1}{11000} + \frac{1}{10000} \left[ 1 - (0,001 t + 1)^{-\frac{1}{0,001}} \right] + 0,001 t \left( \frac{1}{11000} + \frac{1}{11000} \right) \\ &\quad + \frac{(0,001 t + 1)^{\left(-\frac{1}{0,001}\right)}}{10000 \left(1 + \frac{1}{0,001}\right)} \left[ (0,001 t + 1)^{\left(1 + \frac{1}{0,001}\right)} + 1 \right] \end{aligned} \quad [\text{II.158}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées en figure II.7.

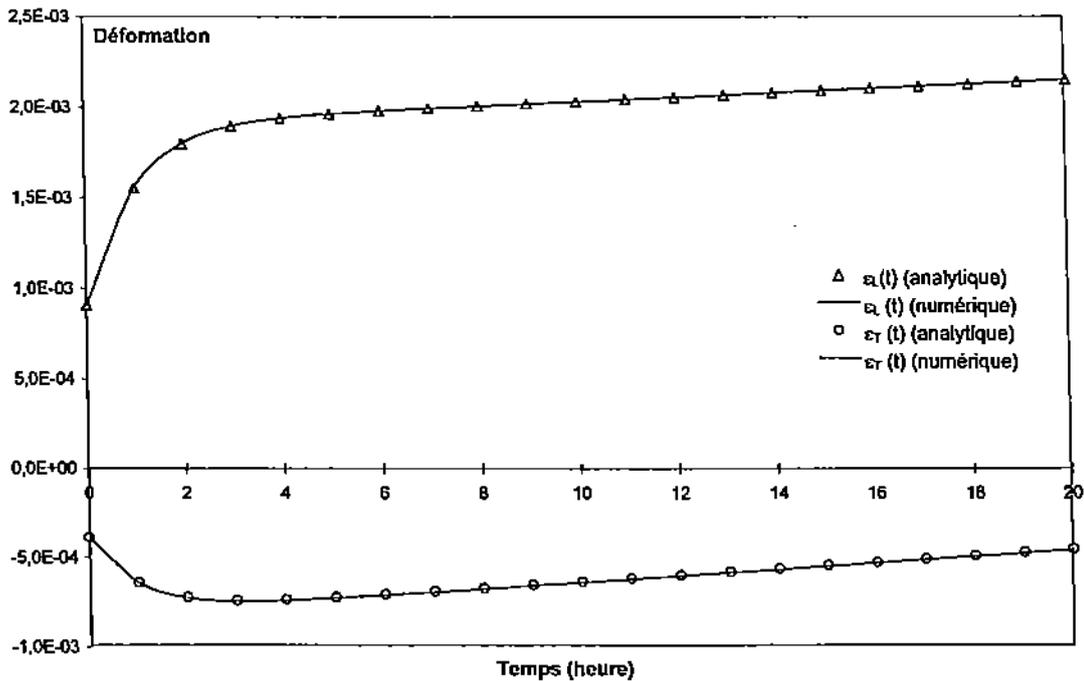


Figure II.7 - Fluage assouplissant avec temps réduit.

### II.7.3 Fluage rigidifiant pendant un séchage

On complète la vérification du terme  $\bar{\epsilon}$  dans le cas où le matériau se rigidifie avec le temps réduit en posant  $a(t)=1$  et une évolution linéaire et décroissante de  $c(t)$ , telle que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = -0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{II.159}]$$

Le champ de teneur en eau est uniforme et présente une évolution linéaire et décroissante, telle que :

$$w(t) = -0,01 t + 0,3 \quad [\text{II.160}]$$

Le vecteur colonne, formé des composantes du tenseur de la déformation totale, est donné par la relation :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(t) = \underline{\underline{\epsilon}}_{ve}(t) + \left( \underline{\underline{\alpha}} + m : \underline{\underline{\epsilon}}_{ve}(t) \right) (w(t) - w(0)) \quad [\text{II.161}]$$

avec

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{ve}(t) = J(t, 0) : \underline{\underline{\sigma}}_0 \quad [\text{II.162}]$$

et

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{c(t)}{k_{refLL}^{(0)}} + \int_{0^-}^t e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{0^-}^{\vartheta} \frac{1}{c(\mu) \cdot a(\mu)} d\mu} a(\vartheta) \eta_{refLL}^{(1)} d\vartheta \quad [\text{II.163}]$$

ou encore

$$J_{LL}(t, 0) = - \frac{\left( (c_1 t + c_0) \left( 1 - \frac{\lambda_{reLL}^{(1)}}{c_1} \right) - c_0 \left( 1 - \frac{\lambda_{reLL}^{(1)}}{c_1} \right) \right)}{\eta_{reLL}^{(1)} \cdot \left( c_0 \left( 1 - \frac{\lambda_{reLL}^{(1)}}{c_1} \right) \right) \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_{reLL}^{(1)}}{c_1} \right)} + \frac{c_0}{k^{(0)}} \quad [II.164]$$

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{1}{11000} - \frac{\left( (0,001 t + 1) \left( 1 - \frac{1}{0,001} \right) - 1 \left( 1 - \frac{1}{0,001} \right) \right)}{10000 \cdot \left( 1 - \frac{1}{0,001} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{0,001} \right)} \quad [II.165]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont données à la figure II.8.

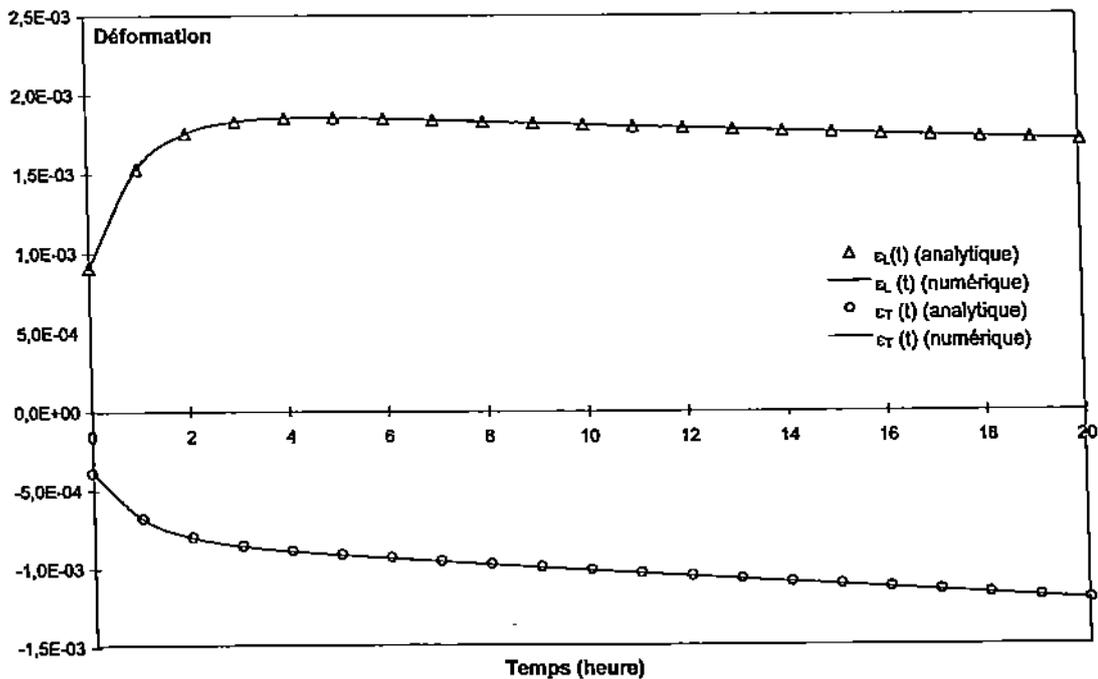


Figure II.8 - Fluage rigidifiant avec temps réduit.

#### II.7.4 Eprouvette sous une contrainte variable avec une humidité et des caractéristiques mécaniques constantes

Il s'agit à présent de vérifier le terme M, dans un premier temps, dans le cas d'un matériau non vieillissant. Ainsi, on applique un chargement qui évolue linéairement sous la forme :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [II.166]$$

La déformation totale est définie de la façon suivante :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_{0+}^t \mathbf{J}(t, \tau) : \frac{\partial \underline{\sigma}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \mathbf{J}(t, 0) : \underline{\sigma}(0) \quad \text{[II.167]}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{LL}(t) \\ \varepsilon_{TT}(t) \\ \gamma_{LT}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ + J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{[II.168]}$$

avec

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)}(t-\tau)} \right) \quad \text{[II.169]}$$

et

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{1}{11000} + \frac{1}{10000} \left( 1 - e^{-t} \right) \quad \text{[II.170]}$$

On en déduit les expressions analytiques de  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  :

$$\varepsilon_{LL}(t) = P_1 \left[ \frac{t}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{t}{k_{refLL}^{(1)}} - \frac{1}{\lambda_{refLL}^{(1)} k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t} \right) \right] \\ + P_0 \left[ \frac{1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t} \right) \right] \quad \text{[II.171]}$$

et

$$\varepsilon_{TT}(t) = -\nu_{LT} \varepsilon_{LL}(t) \quad \text{[II.172]}$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure II.9.

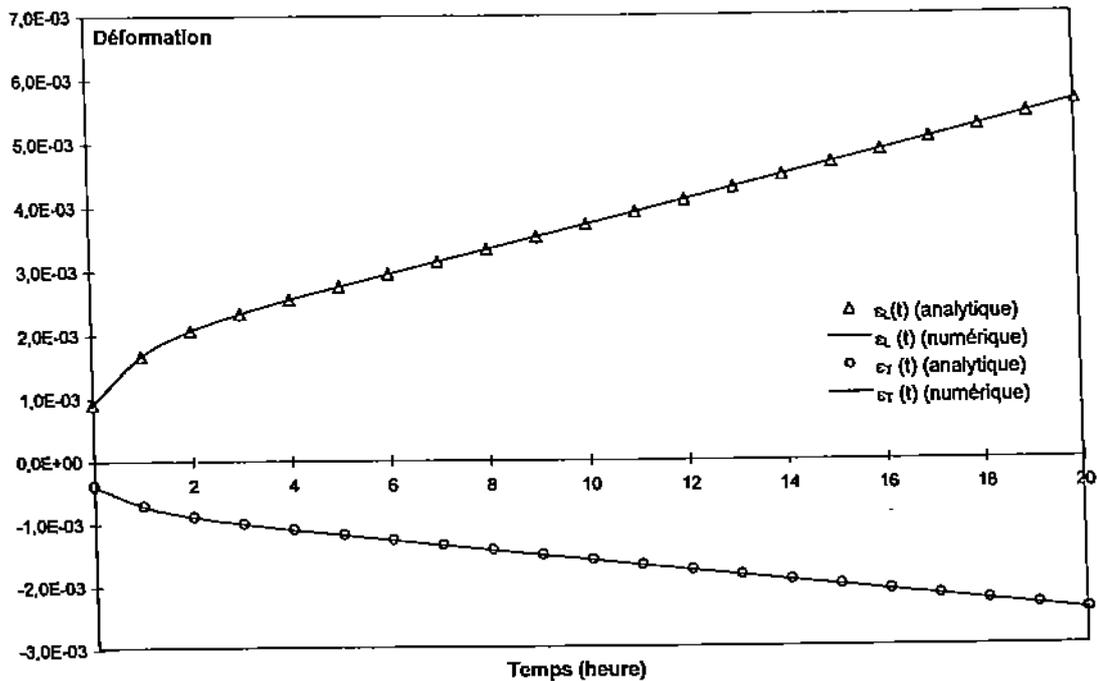


Figure II.9 – Essai à contrainte  $\sigma(t)$  linéaire et humidité constante.

## II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une modélisation numérique du comportement viscoélastique linéaire du bois en environnement variable. L'implantation, dans le code aux éléments finis CAST3M, a été effectuée en se limitant à une formulation pseudo orthotrope c'est à dire que les autres composantes du tenseur de fluage sont proportionnelles à la composante longitudinale  $J_{LL}(t)$ . Une généralisation à un comportement orthotrope peut être faite en se calquant sur la programmation du comportement viscoélastique linéaire non vieillissant orthotrope [DUB 97]. D'autre part, la vérification numérique, réalisée ci-dessus, montre un bon comportement de la modélisation. L'écart, entre les résultats analytiques et numériques, ne dépasse pas 0,1%. Des vérifications complémentaires sont présentées dans l'annexe A du mémoire. Les vérifications numériques ont été seulement réalisées pour des variations monotones de l'humidité, humidification (assouplissement) ou séchage (rigidification) où il est possible de résoudre une formulation analytique de la loi de comportement. Pour une variation non monotone de l'humidité (alternance d'humidification et de séchage), il n'existe pas de formulation intégrale pouvant être résolue analytiquement. On est donc amené à réaliser la validation du modèle numérique à partir de résultats expérimentaux.



## Chapitre III

# Validations expérimentales

### III.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux validations expérimentales du modèle numérique décrit dans le précédent chapitre. Dans un premier temps, nous avons cherché à effectuer les validations à partir d'un essai uniaxial (traction ou compression) sur des éprouvettes de taille limitée à quelques fibres, d'une part, pour permettre une distribution homogène de l'humidité interne et, d'autre part, pour réduire l'effet transitoire de la diffusion et permettre une stabilisation rapide de la teneur en eau de l'éprouvette vis-à-vis de l'environnement ambiant. Nous nous sommes alors intéressés aux travaux expérimentaux de Pittet [PIT 96] sur l'étude de la mécano-sorption sur des éprouvettes de petites dimensions sollicitées en traction parallèle aux fibres de bois. Cependant, la plupart des essais présentés ne permettent pas d'identifier tous les paramètres du modèle sur une même éprouvette. De plus, le niveau de contrainte appliqué est relativement élevée dépassant les limites de linéarité du comportement. Dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire de Matériaux de Constructions (LMC) de l'EPFL (Lausanne), nous avons pu effectuer un certain nombre d'essais de fluage-recouvrance sur des petites éprouvettes de pin maritime en environnement variable. En première partie de ce chapitre, nous décrivons le dispositif expérimental et les éprouvettes utilisées, puis, nous présentons le protocole expérimental pour identifier les différents paramètres du modèle. Les simulations numériques sont présentées dans une seconde partie. Nous débutons, dans un premier temps, par deux essais réalisés par Pittet et nous complétons par des essais réalisés par nos soins en introduisant la stratégie d'identification intégrée dans le protocole expérimental. Pour enrichir la simulation, notamment, pendant les phases transitoires, l'évolution de la teneur en eau dans l'éprouvette est simulée à l'aide d'un modèle de diffusion hydrique. Ce dernier, indispensable pour les pièces massives, est détaillé au chapitre 4.

### III.2 Expérimentation

#### III.2.1 Dispositif expérimental

Pour permettre des essais fiables sur des éprouvettes de bois de petites dimensions en environnement variable, il est nécessaire, d'une part, de disposer d'un moyen de mesure suffisamment précis et, d'autre part, de pouvoir contrôler de manière correcte les conditions environnementales imposées à l'éprouvette. Des essais de fluage-recouvrance très satisfaisants ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Pittet [PIT 96] sur des petites éprouvettes. La répétitivité des résultats expérimentaux a mis évidence la qualité du dispositif d'essais. Pour nos expérimentations, nous avons utilisé le même dispositif expérimental développé au LMC et décrit à la figure III.1, comportant :

- une presse mécanique de traction-compression ;
- une cellule hygro-thermique placée autour de l'éprouvette ;
- un bain thermostatique et un régulateur de mélange d'air sec et humide.

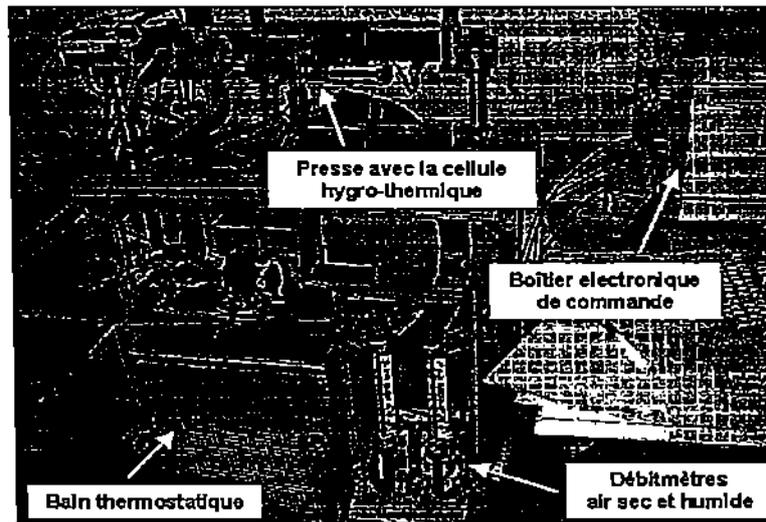


Figure III.1 – L'ensemble du dispositif expérimental

La presse de traction-compression Walter & Bai AG (figure III.1) est caractérisée par une capacité de charge maximale de 500 N. Le positionnement de la traverse est commandé manuellement par l'intermédiaire d'un boîtier électronique de type CS-6000-PC et piloté automatiquement par un ordinateur.

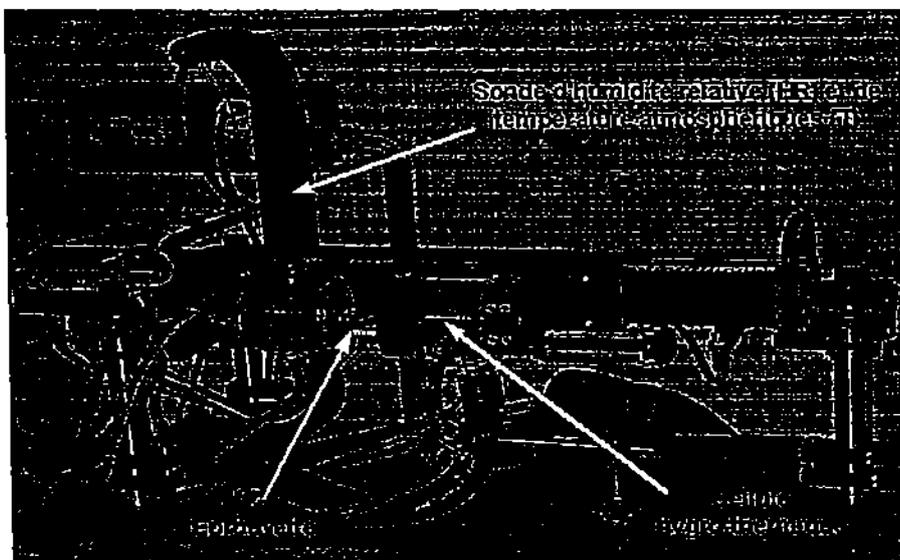


Figure III.2 – La presse de traction-compression avec la cellule hygro-thermique.

L'appareil permet d'ajuster la gamme de force (50 N, 100 N, 250 N, 500 N) et celle de la

déformation (1000  $\mu\text{m}$ , 500  $\mu\text{m}$ , 200  $\mu\text{m}$ , 100  $\mu\text{m}$ ) en fonction du type d'essai à réaliser, de manière à obtenir une meilleure précision de mesure. Il est aussi possible de réaliser des essais avec des régulations de force nulle ou de déformation nulle et de mesurer ainsi de manière précise les déformations libres d'une éprouvette soumise à une sollicitation hydrique quelconque. Les mesures de la déformation se font par l'intermédiaire d'un extensomètre très léger (8 g) pincé sur l'éprouvette de bois, figure III.3. La précision de l'extensomètre est de 1  $\mu\text{m}$  en pleine échelle.

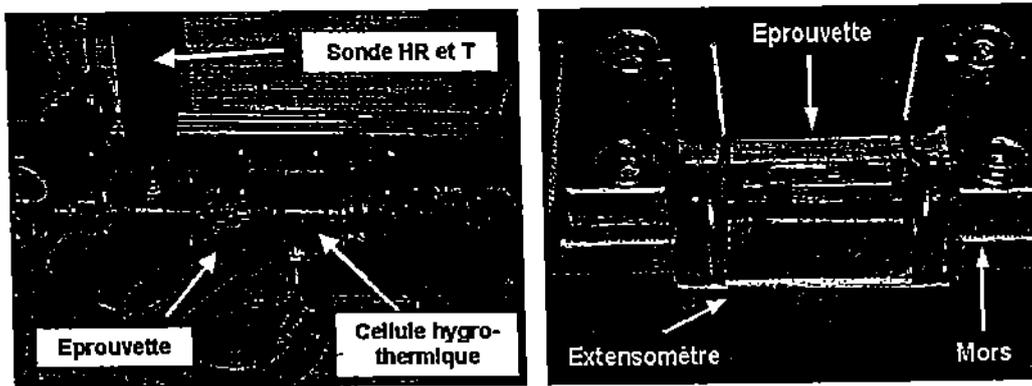


Figure III.3 – (a) Emplacement de l'éprouvette dans la cellule. (b) Fixation de l'extensomètre sur l'éprouvette.

Une cellule hygro-thermique est placée autour de l'éprouvette en englobant une partie des tiges de fixation des mors. Elle est composée de deux demi-cylindres de 8 cm de diamètre et de 10 cm de longueur chacun. Ceux-ci peuvent coulisser sur le bras des mors de manière à permettre la fixation de l'éprouvette et la mise en place de l'extensomètre. La fermeture de la cellule est assurée par un joint en caoutchouc naturel. La cellule est toujours en surpression. Il n'y a donc pas de problème sur le fait qu'elle soit ou non suffisamment hermétique. La cellule comporte une double paroi dans laquelle circule de l'eau à une température donnée dont la régulation est assurée par un bain thermostatique, et une sonde PT100 placée dans la cellule d'une précision de  $\pm 0,1^\circ\text{C}$  entre  $-100^\circ\text{C}$  et  $200^\circ\text{C}$ . Le dispositif permet d'imposer une température entre  $10^\circ\text{C}$  et  $60^\circ\text{C}$ . Un régulateur d'humidité, indépendant de celui de la température, permet d'obtenir des variations rapides de l'humidité relative entre divers paliers par des mélanges appropriés d'air sec et humide réglés par le moyen de débitmètres. Une sonde d'humidité relative atmosphérique ROTRONIC est placée à travers la cellule pour mesurer l'humidité relative de l'air à l'intérieur de celle-ci. La précision de la sonde est de  $\pm 1\%$  pour une mesure de l'humidité relative entre 5% et 95%, et ce, à une température de  $23 \pm 2^\circ\text{C}$ .

### III.2.2 Eprouvettes de traction

Les essais ont été réalisés sur de petites éprouvettes de pin maritime (*Pinus Pinaster*). Elles proviennent de plaquettes prélevées dans des cernes de bois d'été. Elles sont ensuite taillées dans la direction longitudinale. Une éprouvette comporte environ une vingtaine de fibres dans le sens de l'épaisseur. L'éprouvette a une épaisseur de 0,7 mm dans la direction radiale, une largeur de 3 mm dans la direction transversale et une longueur de 30 mm dans la direction longitudinale, figure III.4. Pour pouvoir fixer les éprouvettes sur les mors d'essai, les deux extrémités des éprouvettes ont été enrobées de résine epoxy (10 mm  $\times$  10 mm  $\times$  1,1 mm). La mise en place de cet enrobage se fait par l'utilisation de moules en teflon usinés selon la dimension des éprouvettes. La résine

est chargée par une poudre de quartz de manière à éviter au maximum une pénétration au sein de la structure du matériau et est ensuite séchée.

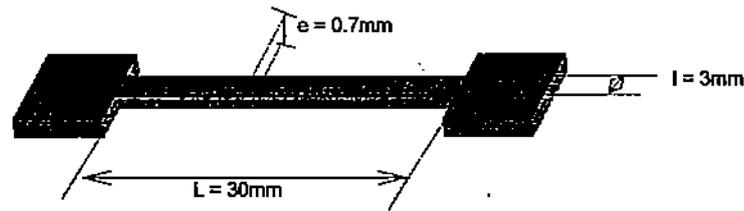


Figure III.4 – Eprouvette de traction de petites dimensions.

### III.2.3 Protocole expérimental

Dans l'objectif de valider le modèle numérique, nous avons établi une stratégie expérimentale pour identifier les différents paramètres du modèle :

- le coefficient de retrait-gonflement libre longitudinal  $\alpha_L$  ;
- les paramètres rhéologiques du modèle de kelvin-Voigt généralisé à une teneur en eau de référence  $w_{ref}$  :  $k_{ref}^{(0)}$ ,  $k_{ref}^{(m)}$  et  $\eta_{ref}^{(m)}$ ,  $m \in (1, \dots, M)$  ;
- les fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques du modèle de Kelvin-Voigt généralisé :  $b^{(0)}(w)$ ,  $b^{(m)}(w)$ , et  $a^{(m)}(w)$ ,  $m \in (1, \dots, M)$ , afin de permettre le calcul des rigidités et des viscosités à un taux d'humidité quelconque par interpolation ;
- les paramètres de couplage mécano-sorptif  $m_H$  et  $m_S$ .

Nous avons alors effectué en continuité, sur une même éprouvette, un essai de retrait-gonflement libre sur une éprouvette non chargée pour identifier le coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$ , puis, un essai de fluage-recouvrance en environnement constant à une basse humidité relative  $HR_1$  choisie comme l'état de référence pour la teneur en eau ( $w_{ref} = w_{HR_1}$ ). Nous pouvons ainsi identifier les paramètres rhéologiques du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à partir de la courbe de fluage obtenue à l'état de référence par une décomposition spectrale. Ensuite, un essai de fluage-recouvrance est effectué en environnement constant à haute humidité relative  $HR_2$  pour obtenir la courbe de fluage correspondante et pour en déduire les paramètres rhéologiques du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état humide. Nous pouvons ensuite calculer les fonctions de correction en humidité des rigidités  $b^{(m)}(w)$  et des viscosités  $a^{(m)}(w)$ , et ce, à partir des valeurs à l'état sec et humide. Enfin, un essai de fluage-recouvrance est réalisé en environnement cyclique où l'humidité relative varie entre les deux paliers  $HR_1$  et  $HR_2$ . La déformation, traduisant le couplage entre le retrait-gonflement et l'état de déformation local du bois, est isolée en soustrayant la déformation totale à la déformation viscoélastique et au retrait-gonflement libre. À partir de la déformation accumulée à chaque cycle d'humidité, il est alors possible d'identifier les coefficients  $m_H$  et  $m_S$ . La température ambiante est constante et identique pour tous les essais, et ce, pour éviter les effets des variations de température sur la sorption et sur les propriétés mécaniques du bois.

### III.2.4 Identification des paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

L'interpolation d'une courbe de fluage expérimentale  $g(t)$  par le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est généralement effectuée par la méthode des moindres carrés mais celle-ci peut générer des rigidités négatives dans la fonction de fluage  $J(t)$  définie par la série de Dirichlet :

$$J(t) = J^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^M J^{(m)}(t) = \frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{k^{(m)}} \cdot (1 - e^{\lambda^{(m)}t}) \quad \text{[III.1]}$$

Nous avons alors opté pour la méthode de décomposition spectrale de la courbe de fluage expérimentale proposée par Dubois [DUB97]. La rigidité  $k^{(0)}$  est immédiatement évaluée en considérant la réponse instantanée, telle que :

$$g(0) = J(0) = J^{(0)}(0) \Leftrightarrow k^{(0)} = \frac{1}{g(0)} \quad \text{[III.2]}$$

La réponse différée  $f(t) = g(t) - g(0)$  est représentée par une série de cellules de Kelvin-Voigt. Chaque cellule doit contribuer à l'interpolation de la courbe expérimentale  $f(t)$  dans une plage de temps spécifique, figure III.5.

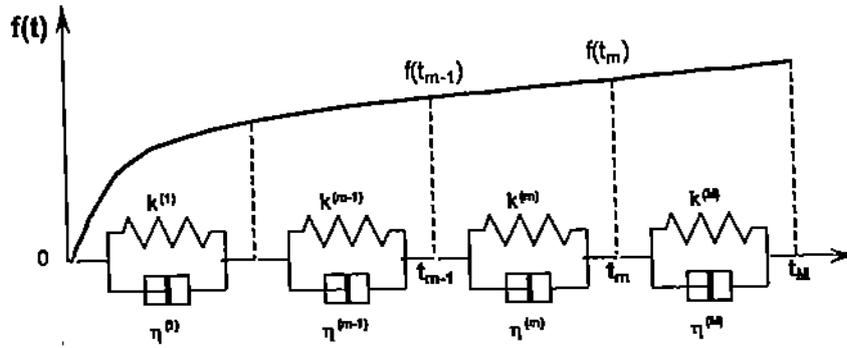


Figure III.5 – Décomposition spectrale d'une courbe de fluage expérimentale.

Pour une plage de temps bornée par  $t_{m-1}$  et  $t_m$ , la fonction  $h^{(m)}(t_m) = 1 - e^{\lambda^{(m)}t_m}$  doit satisfaire les critères suivants :

$$\begin{cases} h^{(m)}(t) < 1 & \text{si } t < t_m \\ h^{(m)}(t_m) = 1 \end{cases} \quad \text{[III.3]}$$

Le second critère n'est pas réalisable car il entraînerait  $\lambda^{(m)} \rightarrow +\infty$ . Néanmoins, il existe un  $\lambda^{(m)}$  fini à un instant donnée  $t_m$ , tel que :

$$h^{(m)}(t_m) \leq 1 - e^{\lambda^{(m)}t_m} = 1 - \xi^{(m)} \quad \text{[III.4]}$$

$\xi^{(m)}$  est une imprécision que l'on fixe arbitrairement ( $\xi^{(m)} = 1\%$ ). Il va permettre à chaque temps  $t_m$  de calculer le coefficient de relaxation  $\lambda^{(m)}$  correspondant, tel que :

$$\lambda^{(m)} = \frac{k^{(m)}}{\eta^{(m)}} = -\frac{\ln(\xi^{(m)})}{t_m} \quad \text{[III.5]}$$

En utilisant  $M$  cellules de Kelvin-Voigt pour interpoler une courbe expérimentale et connaissant  $\lambda^{(m)}$ , on obtient un système d'équation linéaire à  $M$  inconnues,  $k^{(m)}$ ,  $m \in \{1, M\}$ , tel que :

$$f(t_n) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{k^{(m)}} \left( 1 - e^{-\lambda^{(m)} t_n} \right) \quad n \in \{1, M\} \quad \text{[III.6]}$$

Le temps  $t_M$  représente le temps global de la simulation. L'interpolation numérique donne de bons résultats en imposant le rapport de temps suivant [BAZ 84], [DUB 97] :

$$\frac{t^{(m)}}{t^{(m-1)}} \geq 10, \quad m \in \{1, M\} \quad \text{[III.7]}$$

### III.3 Modélisation numérique

#### III.3.1 Discrétisation par éléments finis de l'éprouvette de traction

Afin de simuler un essai de traction, nous supposons que la contrainte est homogène dans l'éprouvette et que l'état de contrainte est plan. Nous avons représenté l'éprouvette par un seul élément linéaire quadrilatère à quatre noeuds (QUA4) (figure III.6). Les faces AD et BC sont soumises à une contrainte uniforme  $\sigma_L$  dans la direction longitudinale.

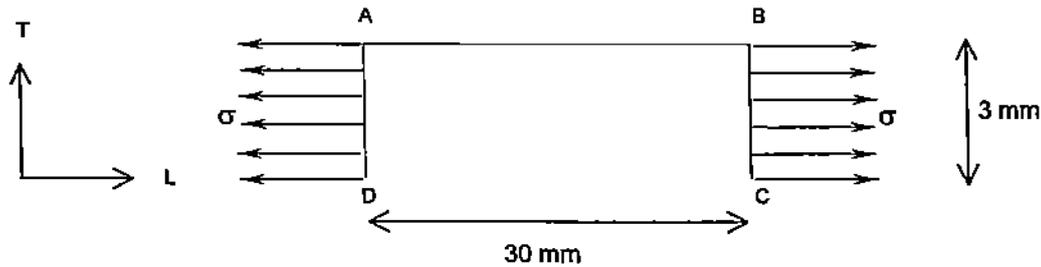


Figure III.6 - Modélisation de l'éprouvette de traction en contrainte plane.

#### III.3.2 Discrétisation par éléments finis de l'éprouvette pour simuler la diffusion hydrique

Pour simuler les essais de Pittet, nous avons supposé que la teneur en eau dans l'éprouvette est homogène du fait de la taille réduite de l'éprouvette et elle est proportionnelle à la déformation de retrait-gonflement libre. On peut alors calculer l'évolution de la teneur en eau dans l'éprouvette connaissant les valeurs de la teneur en eau à l'état sec et humide après stabilisation (équilibre). Cependant, cette procédure donne uniquement des valeurs correctes lorsque la stabilisation est atteinte. Pour affiner la simulation des essais que nous avons développé au Laboratoire de Matériaux de Constructions de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne dans la phase transitoire, l'évolution de la teneur en eau moyenne de l'éprouvette durant l'essai est simulée en considérant un modèle de diffusion hydrique bi-dimensionnel dans le domaine hygroscopique [III.8] dans la section transversale (plan R-T) et décrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{D}_w \nabla w) \\ -(\underline{D}_w \nabla w) \cdot \vec{n} = h_w (w_{surf} - w_{eq}) \end{cases} \quad \text{[III.8]}$$

où  $w_{surf}$  est la teneur en eau en surface,  $w_{surf}$  la teneur en eau d'équilibre du bois avec l'ambiance extérieure,  $\underline{D}_w$  le tenseur des coefficients de diffusion hydrique et  $h_w$  le coefficient d'échange convectif. Un modèle complet de transfert hydrique, utilisé pour l'étude des éléments massifs de structure, est décrit au chapitre 4 et implanté dans le code de calcul par éléments finis CAST3M. La section transversale de l'éprouvette est discrétisée en 200 éléments linéaires quadrilatères (QUA4) et le contour EFGH est régi par une condition limite de type convective entre l'éprouvette et l'environnement extérieur.

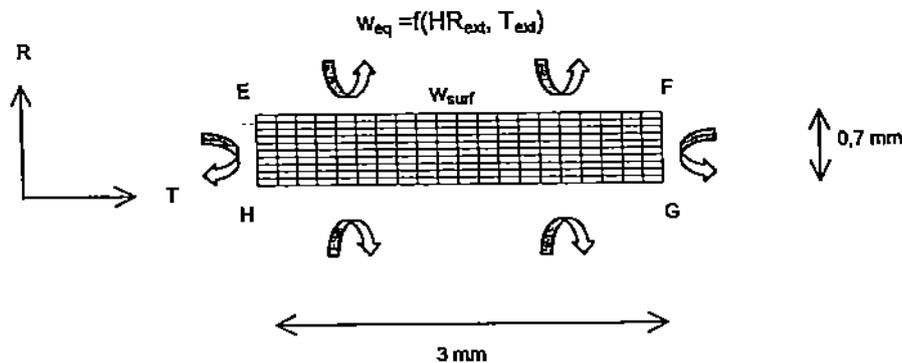


Figure III.7 – La section transversale discrétisée par des éléments finis QUA4.

### III.4 Résultats expérimentaux et simulations

Dans un premier temps, nous présentons la simulation de deux essais de fluage-recouvrance en traction effectués par Pittet [PIT 96], [NAV 02] sur une éprouvette initialement humide et sur une éprouvette initialement sèche soumises à des cycles d'humidité relative. Cependant, ces essais ne permettent pas d'identifier tous les paramètres du modèle sur une même éprouvette et le niveau de contrainte appliqué est relativement élevée ( $\sigma \geq 0,20 \sigma_{rupt}$ ) induisant un comportement non linéaire. Dans un deuxième temps, nous présentons deux essais que nous avons effectué dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire des Matériaux de Construction. Ces essais ont été définis pour permettre d'identifier tous les paramètres du modèle sur les mêmes éprouvettes. Elles sont chacune soumises à un faible niveau de contrainte, respectivement, 6% et 12% de la contrainte de rupture. Pendant la phase de fluage, il est appliqué deux séries de cycles hygrométriques espacés d'un temps donné. Les deux essais se différencient par les nombres de cycles hygrométriques dans une série de cycle et par la durée séparant les deux séries.

#### III.4.1 Essai de Pittet

##### III.4.1.1 Essai de fluage-recouvrance sur une éprouvette initialement humide (stabilisée à une humidité relative ambiante de 75%)

L'éprouvette est soumise à une traction constante  $\sigma_L=32$  MPa soit 20% de la contrainte de rupture ( $\sigma_{rupt}=160$  MPa) [PIT 96]. La mise en charge est effectuée à l'état humide  $HR=75\%$ , figure III.8.

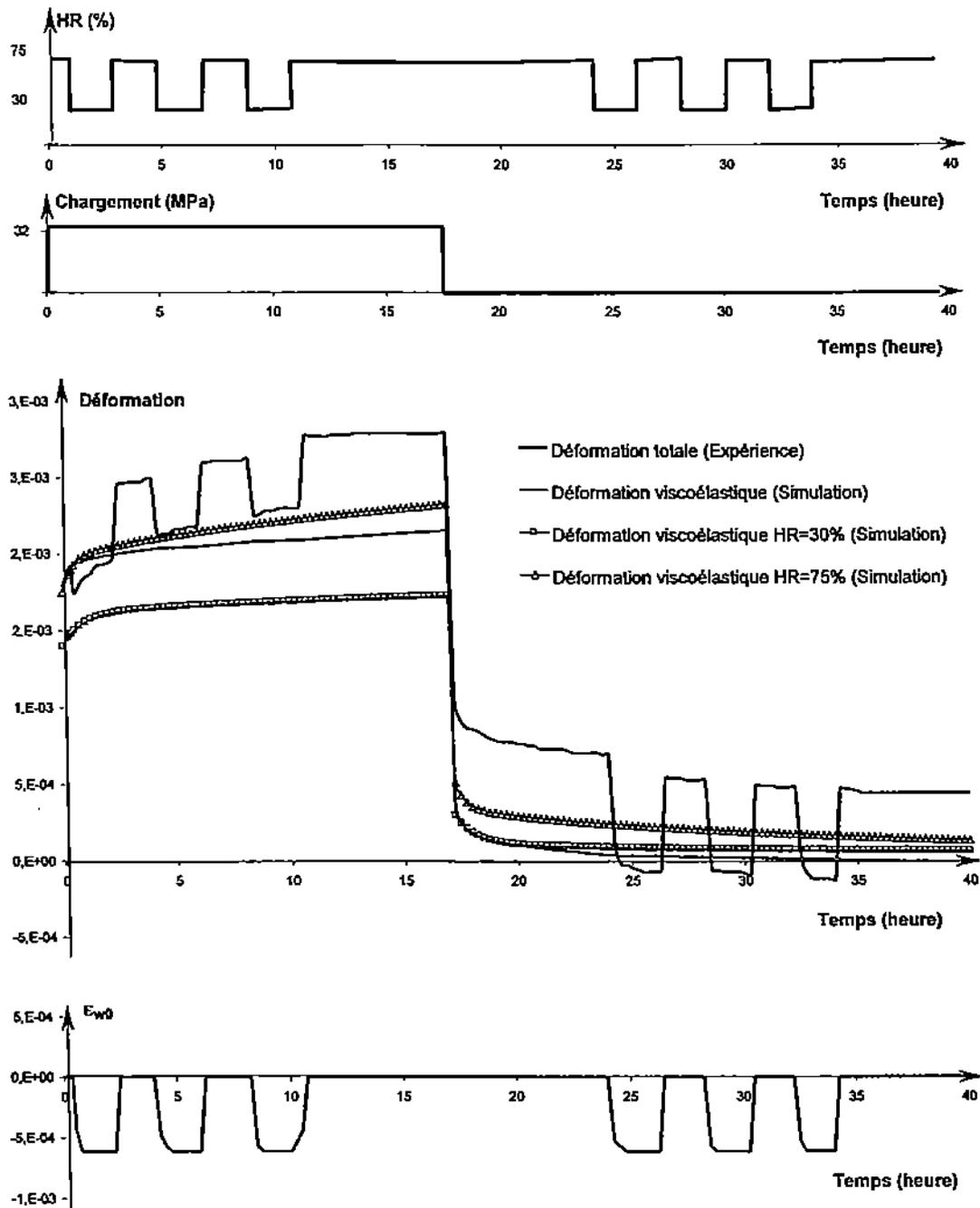


Figure III.8 – Evolution de la déformation totale expérimentale  $\epsilon$  et du retrait-gonflement libre  $\epsilon_{w0}$  et simulation du comportement viscoélastique en environnements constants (HR=30% et HR=75%) et variables (cycles 75%-30%)

Trois cycles d'humidité relative entre 75% et 30% d'une période de 4 heures sont effectués à une température constante de 21,5°C pendant les 12 premières heures et trois autres après le déchargement. Les humidités relatives HR=75% et HR=30% sont respectivement associées aux teneurs en eau d'équilibre  $w_{75\%} = 7,6\%$  et  $w_{30\%} = 4\%$  pour une température constante de 21,5°C. La déformation de retrait-gonflement libre, mesurée avant l'essai de fluage, nous permet d'identifier le coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$ . Il est calculé de la manière suivante :

$$\alpha_L = \frac{\epsilon_{w0}(7,6\%) - \epsilon_{w0}(4\%)}{7,6\% - 4\%}$$

On en déduit alors un coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L = 1,17 \cdot 10^{-4}$ . L'évolution de la teneur en eau  $w$  de l'éprouvette est ensuite obtenue à partir de l'évolution de la déformation  $\epsilon_{w0}$ , telle que :

$$w = \frac{\epsilon_{w0}(w) - \epsilon_{w0}(4\%)}{\alpha_L} + 4\%$$

Elle est présentée à la figure III.9.

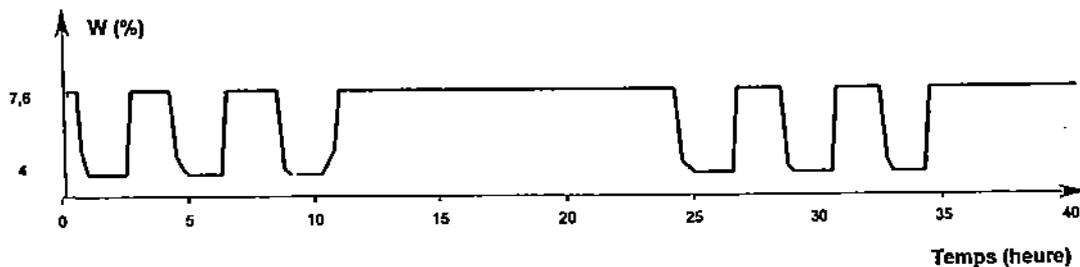


Figure III.9 – Evolution de la teneur en eau  $w(t)$

Afin de simuler le comportement viscoélastique du bois en environnement variable, il est nécessaire de connaître la fonction de fluage  $J(w, t)$  à n'importe quelle teneur en eau  $w$ . L'essai présenté à la figure III.8 ne permet pas une identification des paramètres viscoélastiques. Il nous faut au moins les courbes de fluage en ambiance constante sèche HR=30% et humide HR=75%. Ces courbes sont obtenues à partir d'essai de fluage en environnement constant effectués sur des éprouvettes jumelles [PIT 96]. Elles sont ensuite interpolées par une série de Dirichlet obtenue par décomposition spectrale de la fonction de fluage en utilisant 3 cellules de Kelvin-Voigt. L'état sec est pris comme état référence  $w_{ref} = w_{30\%} = 4\%$ . A partir des valeurs des paramètres rhéologiques des deux états extrêmes, on calcule les fonctions de correction en humidité  $b^{(p)}(w)$  et  $a^{(q)}(w)$ , respectivement, des rigidités des ressorts et des viscosités des amortisseurs telles que :

$$k^{(p)}(w) = b^{(p)}(w) \cdot k_{ref} \quad \text{et} \quad \eta^{(q)}(w) = a^{(q)}(w) \cdot \eta_{ref}$$

Par soucis de simplification, les fonctions de correction sont définies par des fonctions linéaires par rapport à la teneur en eau  $w$ .

Le tableau III.1 précise les valeurs des rigidités  $k_{ref}^{(p)}$  (MPa) et des viscosités  $\eta_{ref}^{(q)}$  (MPa s) ainsi que les fonctions de correction en fonction de la teneur en eau  $a^{(p)}(w)$ ,  $b^{(q)}(w)$ .

Etat de référence $w_{ref} = 4\%$	Etat humide $w_{75} = 7,6\%$	Fonction de correction des paramètres en fonction de w
$k_{ref}^{(0)} = 23 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(0)} = 18 \cdot 10^3$	$b^{(0)} = 1 - 0,055 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(1)} = 150 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(1)} = 146 \cdot 10^3$	$b^{(1)} = 1 - 0,012 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(2)} = 1200 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(2)} = 650 \cdot 10^3$	$b^{(2)} = 1 - 0,12 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(3)} = 89 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(3)} = 70 \cdot 10^3$	$b^{(3)} = 1 - 0,059 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(1)} = 4,6 \cdot 10^8$	$\eta_{75}^{(1)} = 2,1 \cdot 10^8$	$a^{(1)} = 1 - 0,15 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(2)} = 24,7 \cdot 10^9$	$\eta_{75}^{(2)} = 6,4 \cdot 10^9$	$a^{(2)} = 1 - 0,20 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(3)} = 18,6 \cdot 10^9$	$\eta_{75}^{(3)} = 6,8 \cdot 10^9$	$a^{(3)} = 1 - 0,17 \cdot (w - 4)$

Tableau III.1 – Caractéristiques du modèle rhéologiques.

La simulation du comportement viscoélastique de l'éprouvette soumise à des variations hygrométriques cycliques est montrée à la figure III.8. Le modèle viscoélastique vieillissant montre qu'il n'y a pas une accélération de la déformation au première séchage sous chargement mécanique, ni aux humidifications ultérieures car l'humidité maximale n'est pas dépassée. Les déformations résiduelles observées en fin d'essai provient de l'accumulation des déformations due au couplage entre les variations dimensionnelles hydriques et l'état de déformation. Cet effet est distinct aux phases d'humidification et de séchage, d'où, des coefficients  $m_H$  et  $m_S$  différents. Nous avons isolé la déformation non viscoélastique en soustrayant la déformation totale expérimentale de la déformation viscoélastique simulée. Les coefficients  $m_H$  et  $m_S$  sont déduits du calage de la déformation non viscoélastique avec la déformation  $\epsilon_w = \int_0^t (\alpha + m \epsilon_{ve}(\tau)) \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} d\tau$  et ont pour valeurs  $m_H = -3,4 \cdot 10^{-2}$  et  $m_S = -7,8 \cdot 10^{-2}$ , figure III.10.

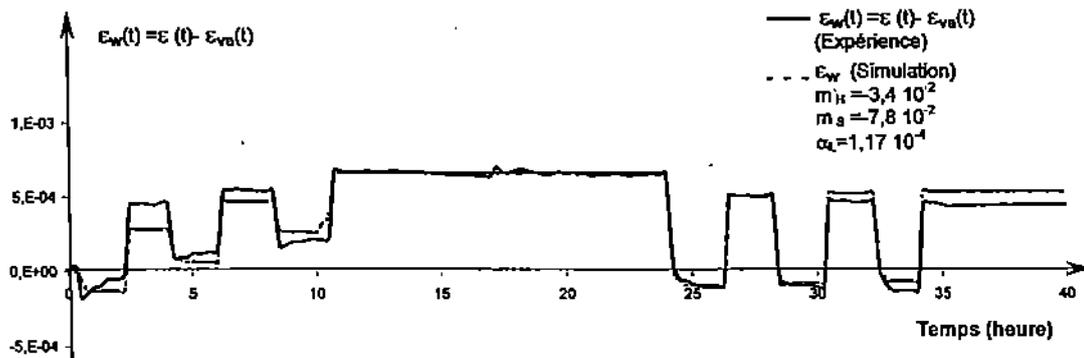


Figure III.10 – Déformation non viscoélastique  $\epsilon_w$ .

La déformation totale simulée est obtenue en faisant la somme de la déformation viscoélastique, du retrait-gonflement libre et du terme de couplage entre les variations dimensionnelles hydriques et l'état de déformation. Le résultat de la simulation est montré à la figure III.11.

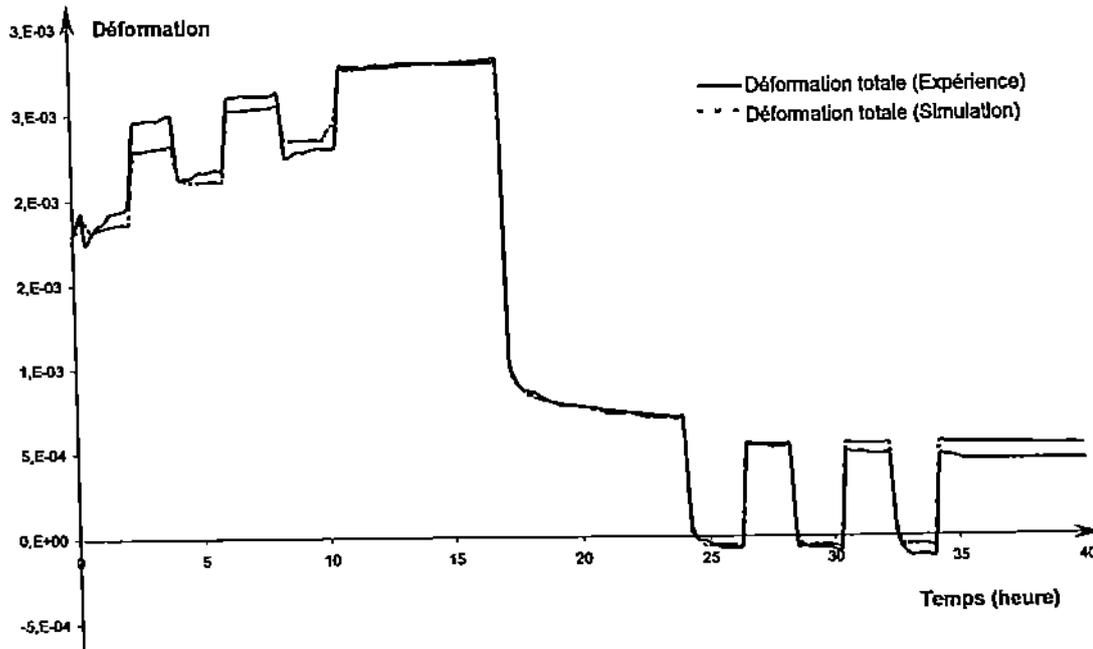


Figure III.11 – Comparaison entre la déformation totale expérimentale et simulée.

On remarque dans la phase de fluage une différence entre les déformations expérimentales et simulées. Cette différence peut provenir du fait que l'état de déformation du matériau a une influence sur le processus de sorption et sur l'évolution de la teneur en eau ; un phénomène qui n'est pas pris en compte dans la modélisation.

#### III.4.1.2 Essai de fluage-recouvrance sur une éprouvette initialement sèche (stabilisée à une humidité relative ambiante de 30%)

Une autre éprouvette prélevée à un autre endroit de l'arbre est soumise à une contrainte constante de traction de 18 MPa représentant 20% de la contrainte de rupture [PIT 96]. La mise en charge est effectuée à l'état sec et la durée du fluage est de 14 heures. Deux cycles séchage-humidification sont produits pendant la phase de fluage et quatre autres pendant la phase de recouvrance, figure III.12. Comme dans l'essai précédent, la teneur en eau de l'éprouvette varie entre 4% et 7,6% sous une température constante de 21,5°C. Les variations dimensionnelles hydriques mesurées avant le chargement mécanique nous permettent d'identifier le coefficient de retrait-gonflement longitudinal libre  $\alpha_L = 2,7 \cdot 10^{-4}$ .

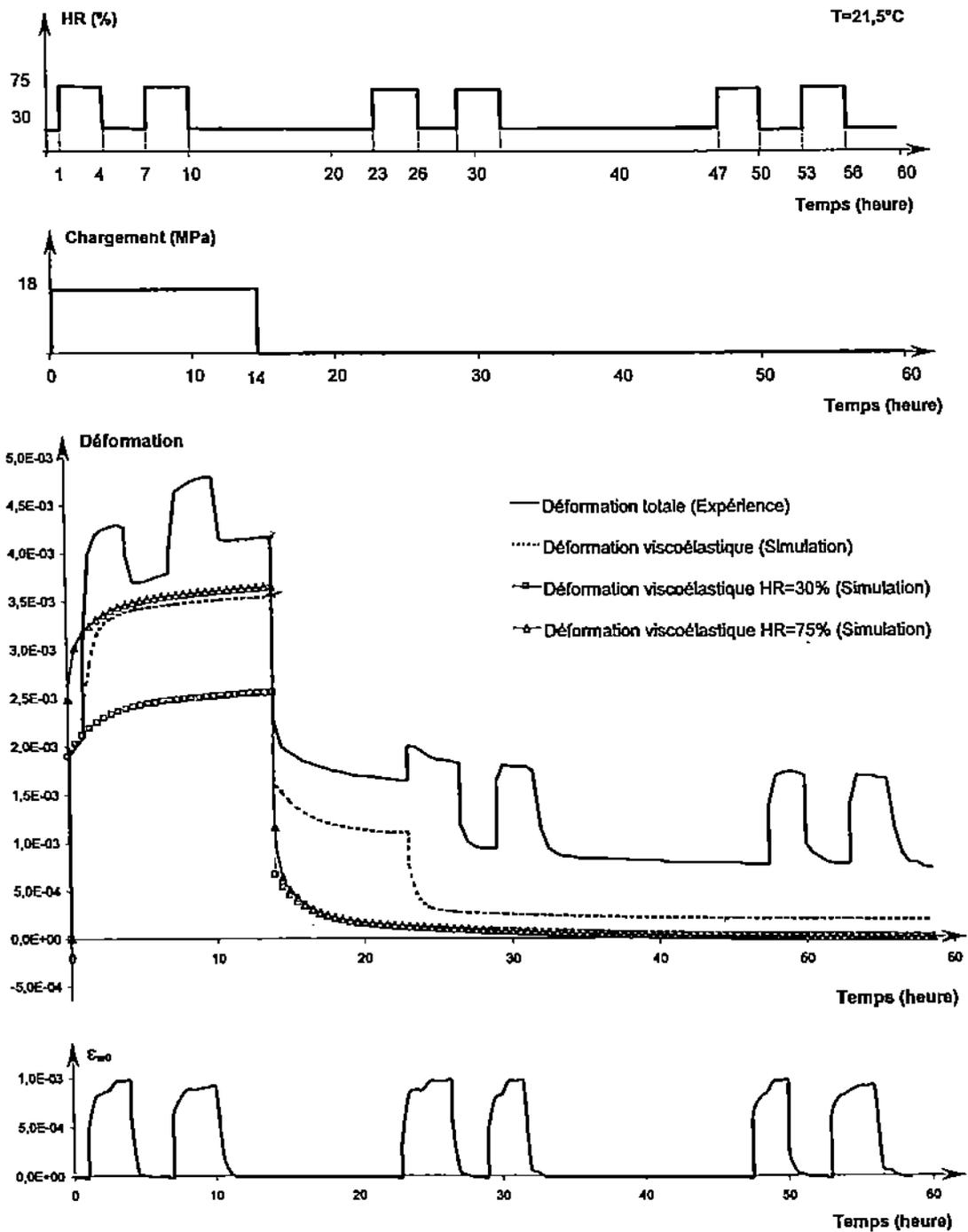


Figure III.12 - Evolution de la déformation totale expérimentale  $\epsilon$  et du retrait-gonflement libre  $\epsilon_{w0}$  et simulation du comportement viscoélastique en environnements constants (HR=30% et HR=75%) et variables (cycles 30%-75%).

Les courbes de fluage expérimentales, établies sur des éprouvettes jumelles en environnements constants sec et humide, sont interpolées par 3 cellules de Kelvin-Voigt. Le tableau III.2 donne les paramètres viscoélastiques  $k_{ref}^{(p)}$  (MPa) et  $\eta_{ref}^{(q)}$  (MPa s) à l'état de référence et à l'état humide ainsi que les fonctions de correction  $b^{(p)}(w)$  et  $a^{(q)}(w)$ .

Etat de référence $w_{ref} = 4\%$	Etat humide $w_{75} = 7,6\%$	Fonction de correction des paramètres en fonction de w
$k_{ref}^{(0)} = 9,5 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(0)} = 7,2 \cdot 10^3$	$b^{(0)} = 1 - 0,066 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(1)} = 86 \cdot 10^4$	$k_{75}^{(1)} = 46 \cdot 10^4$	$b^{(1)} = 1 - 0,26 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(2)} = 38 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(2)} = 33 \cdot 10^3$	$b^{(2)} = 1 - 0,038 \cdot (w - 4)$
$k_{ref}^{(3)} = 53 \cdot 10^3$	$k_{75}^{(3)} = 45 \cdot 10^3$	$b^{(3)} = 1 - 0,131 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(1)} = 6,1 \cdot 10^8$	$\eta_{75}^{(1)} = 0,3 \cdot 10^8$	$a^{(1)} = 1 - 0,264 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(2)} = 2,7 \cdot 10^8$	$\eta_{75}^{(2)} = 1,9 \cdot 10^8$	$a^{(2)} = 1 - 0,079 \cdot (w - 4)$
$\eta_{ref}^{(3)} = 3,7 \cdot 10^9$	$\eta_{75}^{(3)} = 1,6 \cdot 10^9$	$a^{(3)} = 1 - 0,16 \cdot (w - 4)$

Tableau III.2 – Caractéristiques du modèle rhéologiques.

On observe sur la simulation du comportement viscoélastique sous cycles que le modèle viscoélastique vieillissant de Kelvin-Voigt généralisé prend bien en compte l'accélération de la déformation à la première humidification sous chargement mécanique; effet que l'on ne retrouve pas à la deuxième humidification car l'humidité maximale atteinte à la première humidification n'est pas dépassée. Après un déchargement total de la contrainte, il apparaît des déformations résiduelles dont une partie sera recouverte à la première humidification. Les déformations résiduelles observées en fin d'essai provient de l'accumulation des déformations due au couplage entre le processus retrait-gonflement et l'état de déformation qui est distinct aux phases d'humidification et de séchage. En considérant les coefficients  $m_H = -0,1 \cdot 10^{-2}$  et  $m_S = -3,4 \cdot 10^{-2}$ , la simulation de la déformation non viscoélastique est présentée à la figure III.13.

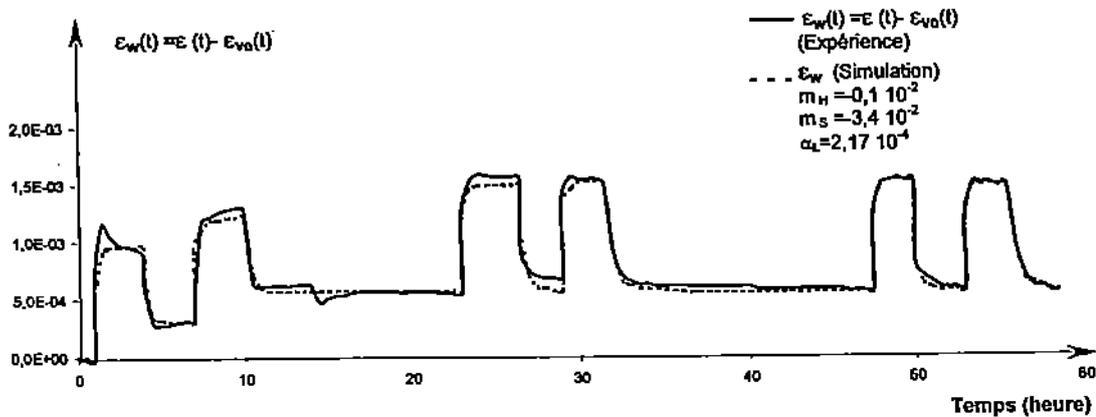


Figure III.13 – Simulation du comportement non viscoélastique.

La déformation totale expérimentale et simulée sont ensuite présentées à la figure III.14.

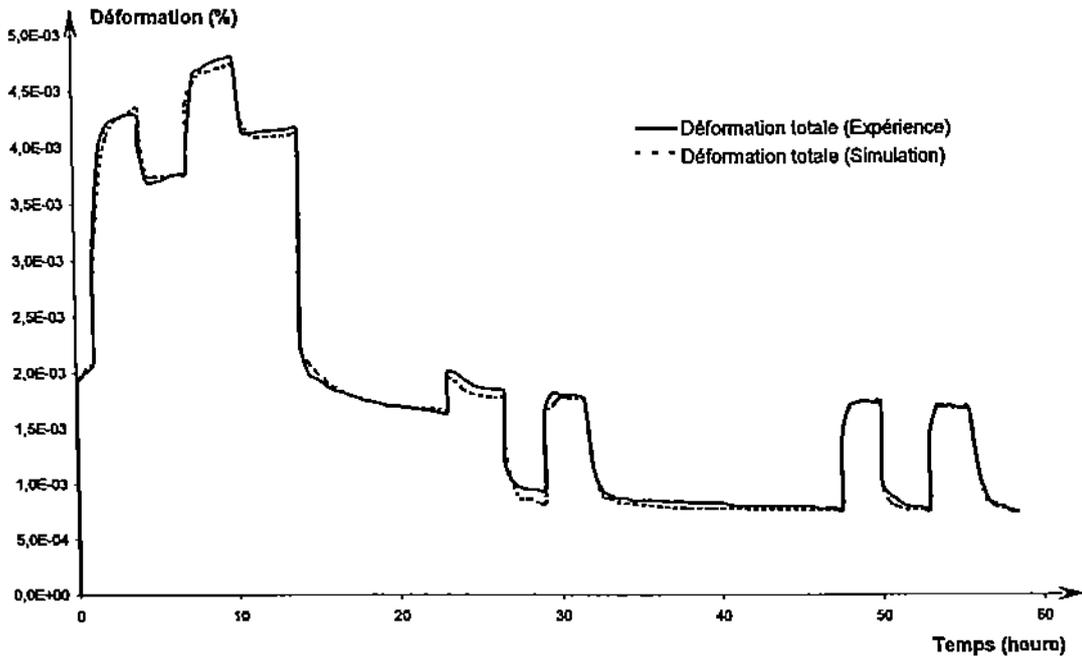


Figure III.14 – Comparaison entre la déformation totale expérimentale et simulée.

#### III.4.1.3 Conclusion

A travers la simulation des essais de Pittet, le modèle permet de découpler les différents effets mis en jeu dans ce type d'essai (viscoélasticité, retrait-gonflement libre et influence de l'état mécanique sur le retrait-gonflement) que nous ne pouvions pas mettre en évidence directement par les résultats expérimentaux. La simulation du comportement viscoélastique vieillissant nous a permis d'isoler les déformations non viscoélastiques que nous avons modélisées avec le modèle Ranta-Maunus. On remarque qu'il existe des différences entre les résultats de la simulation et de l'expérience, notamment pour l'essai de fluage sur une éprouvette initialement humide. D'une part, ces différences peuvent provenir du fait que les propriétés viscoélastiques à l'état humide et sec ne sont pas identifiées sur la même éprouvette donc de l'écart de propriété entre des éprouvettes jumelles qui atténue la qualité de la simulation. D'autre part, le caractère non linéaire du comportement induit par le niveau de contrainte n'est pas pris en compte par le modèle. Pour une meilleure validation du modèle, il est ainsi nécessaire de faire des essais permettant une identification de tous les paramètres du modèle sur une même éprouvette et de charger l'éprouvette à un faible niveau de contrainte ( $\sigma_L < 0,20\sigma_{rupl}$ ). Dans la suite de ce chapitre, des essais ont été effectués en considérant ces remarques.

### III.4.2 Expériences réalisées au LMC

Dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire de Matériaux de Construction de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, deux expériences ont été effectuées sur deux éprouvettes initialement sèche et humide soumises à un faible niveau de contrainte et à deux séries de cycles hygrométriques espacés d'un temps donné. Les deux expériences se différencient par :

- la contrainte appliquée, respectivement,  $\sigma=12\pm 1$  MPa ( $0,06 \sigma_{rupt}$ ) pour la première expérience et  $\sigma=22\pm 1$  MPa ( $0,12 \sigma_{rupt}$ ) pour la deuxième expérience,
- les nombres de cycles hygrométriques dans une série de cycles,
- la durée séparant les deux séries et enfin par la période des cycles.

Les dimensions de l'éprouvette sont mesurées à l'aide d'un pied à coulisse d'une précision de 0,1 mm. Les dimensions précises des éprouvettes pour les deux expériences sont données dans le tableau III.4.2 :

	e (mm)	l (mm)	L (mm)
Expérience 1	$0,7\pm 0,1$	$2,8\pm 0,1$	30
Expérience 2	$0,6\pm 0,1$	$2,9\pm 0,1$	30

Tableau III.3 – Dimensions des éprouvettes

#### III.4.2.1 Expérience 1 : essai avec un niveau de contrainte de 6%

L'expérience 1 est composée d'un essai de retrait-gonflement libre, d'un essai mécano-sorptif sur une éprouvette initialement sèche et d'un essai de fluage-recouvrance en environnement constant humide, comme le montre la figure III.15. L'éprouvette est soumise, dans les phases de fluage, à une contrainte de traction constante  $\sigma_L=11,97$  MPa, représentant environ 6% de la contrainte de rupture à l'état sec, ce qui permet de considérer un comportement quasi-linéaire. Lors de la phase de fluage, une première série de 4 cycles d'humidité relative d'une période de 4 heures est appliquée suivie 4 heures après d'une deuxième série de 2 cycles. L'évolution de la déformation totale est présentée à la figure III.16

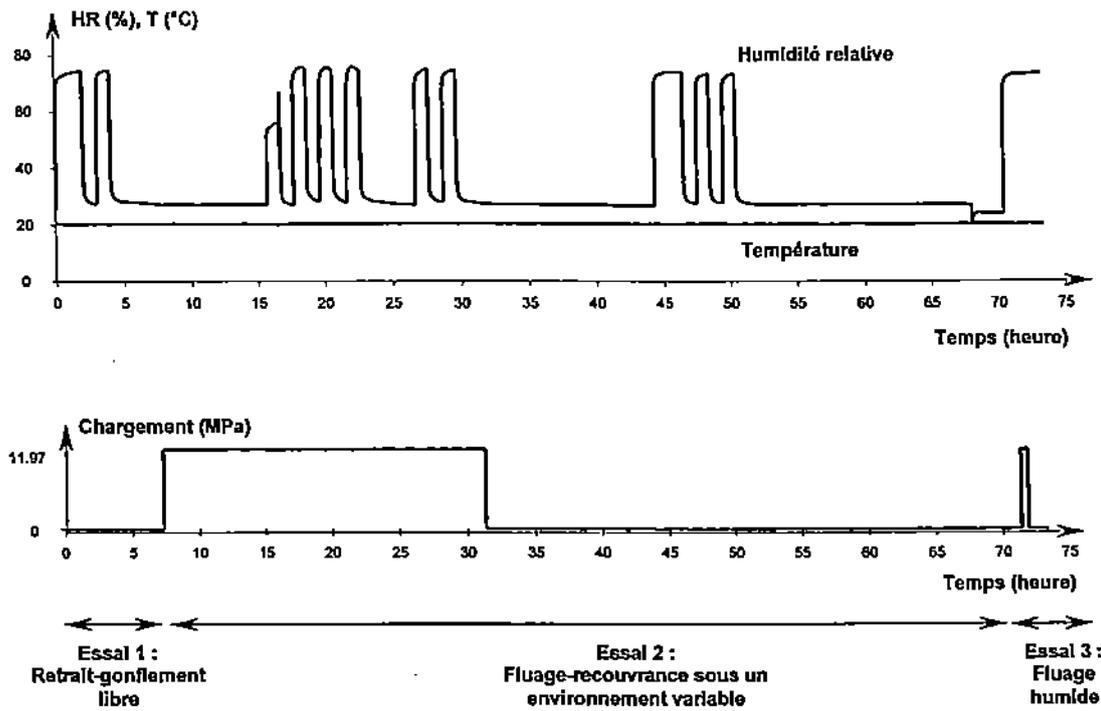


Figure III.15 – Sollicitation thermo-hygro-mécanique.

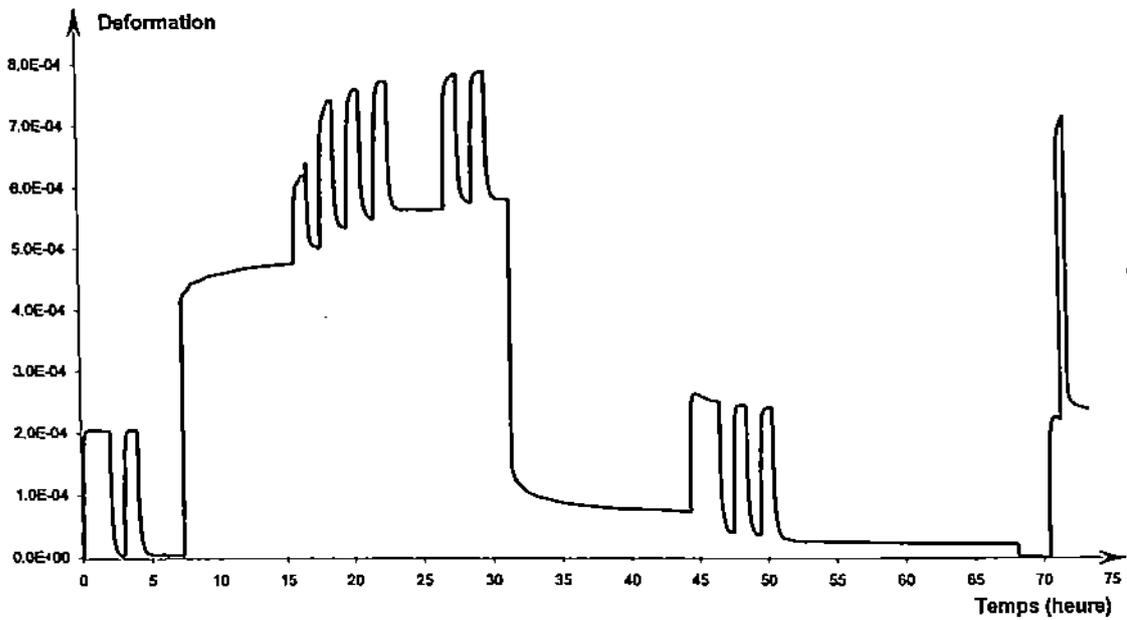


Figure III.16 – L'évolution de la déformation totale.

a - Retrait-gonflement libre

Nous voulons, dans un premier temps, identifier le coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$ . L'éprouvette est alors soumise à des conditions climatiques décrites à la figure III.17. L'humidité relative ambiante varie entre  $HR=25,6\% \pm 0,1\%$  et  $HR=74,9\% \pm 0,1\%$  à une température constante  $T=20,5 \pm 0,1^\circ\text{C}$ . La déformation libre longitudinale est représentée à la figure III.17 et dans le tableau III.4 à différents instants de l'essai.

Point	Temps (heure)	HR ( $\% \pm 0,1\%$ )	T ( $^\circ\text{C} \pm 0,1^\circ\text{C}$ )	$\varepsilon$
A <sub>0</sub>	0	25,6	20,5	0
A <sub>1</sub>	2	74,6	20,3	$2,03 \cdot 10^{-4}$
A <sub>2</sub>	3	27,6	20,4	$0,03 \cdot 10^{-4}$
A <sub>3</sub>	4	74,9	20,3	$2,04 \cdot 10^{-4}$
A <sub>4</sub>	7,323	27,6	20,5	$0,03 \cdot 10^{-4}$

Tableau III.4 - Valeurs de la déformation aux points A<sub>0</sub> à A<sub>4</sub> de la figure III.17.

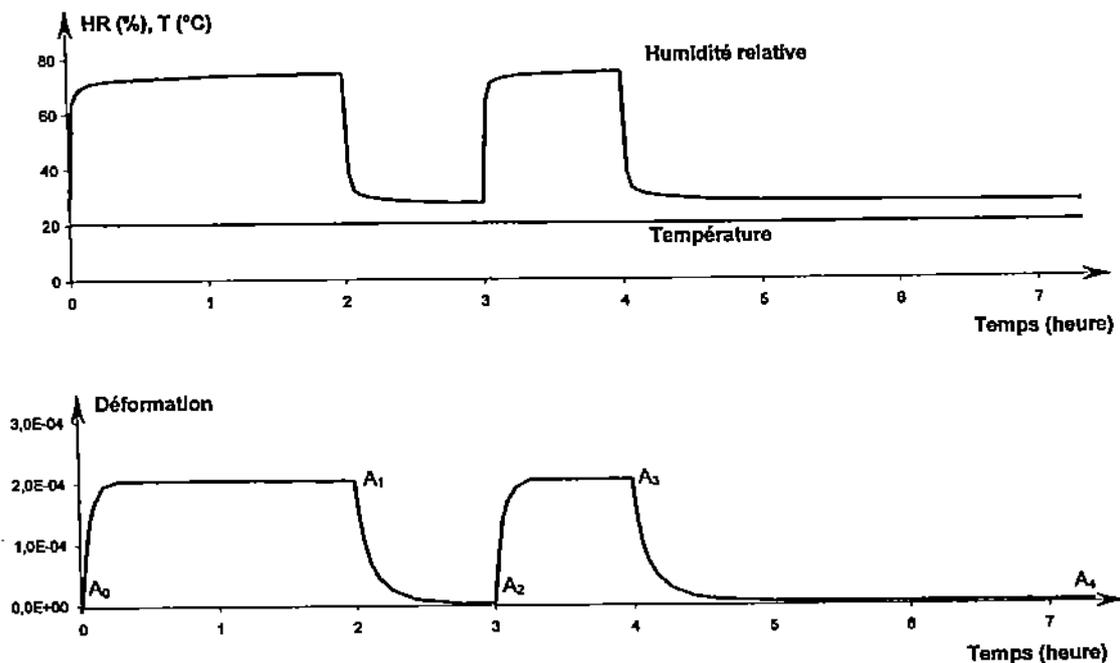


Figure III.17 - Retrait-gonflement libre.

Nous remarquons que la stabilisation de la déformation libre est atteinte plus rapidement après une humidification qu'après un séchage. La déformation est stabilisée environ 20 minutes après l'augmentation de l'humidité relative de  $HR_1=27,6\%$  à  $HR_2=74,9\%$ . Dans le cas du séchage, le temps de stabilisation est plus long, environ 45 minutes, quand on passe de  $HR_2=74,9\%$  à  $HR_3=27,6\%$ . Ceci se manifeste par une hystérésis sur la courbe du retrait-gonflement libre en fonction de l'humidité relative extérieure. La déformation se stabilise lorsque la teneur en eau d'équilibre  $w_{eq}$  est atteinte. Elle est obtenue à l'aide des isothermes d'adsorption et de

désorption  $w_{eq} = f(HR)$  à une température  $T=20,5^{\circ}C$ . Les humidités relatives  $HR_1$  et  $HR_2$  sont, respectivement, associées aux teneurs en eau d'équilibre  $w_{HR_1} = 3,6\%$  et  $w_{HR_2} = 7,7\%$ , figure III.18. Les isothermes d'adsorption et de désorption pour une température de  $21^{\circ}C$ , données par Pittet pour du bois d'été de Pin maritime, sont calées par le modèle Dent :

$$w_{eq}(HR) = \frac{HR}{a HR^2 + b HR + c} \quad [III.9]$$

avec les paramètres suivants :

	a	b	c
Adsorption	$-1,75 \cdot 10^{-4}$	$-14,75 \cdot 10^{-2}$	21,72
Désorption	$-7,09 \cdot 10^{-4}$	$6,28 \cdot 10^{-2}$	6,25

Tableau III.5 – Paramètres du modèle de Dent pour une température de  $21^{\circ}C$

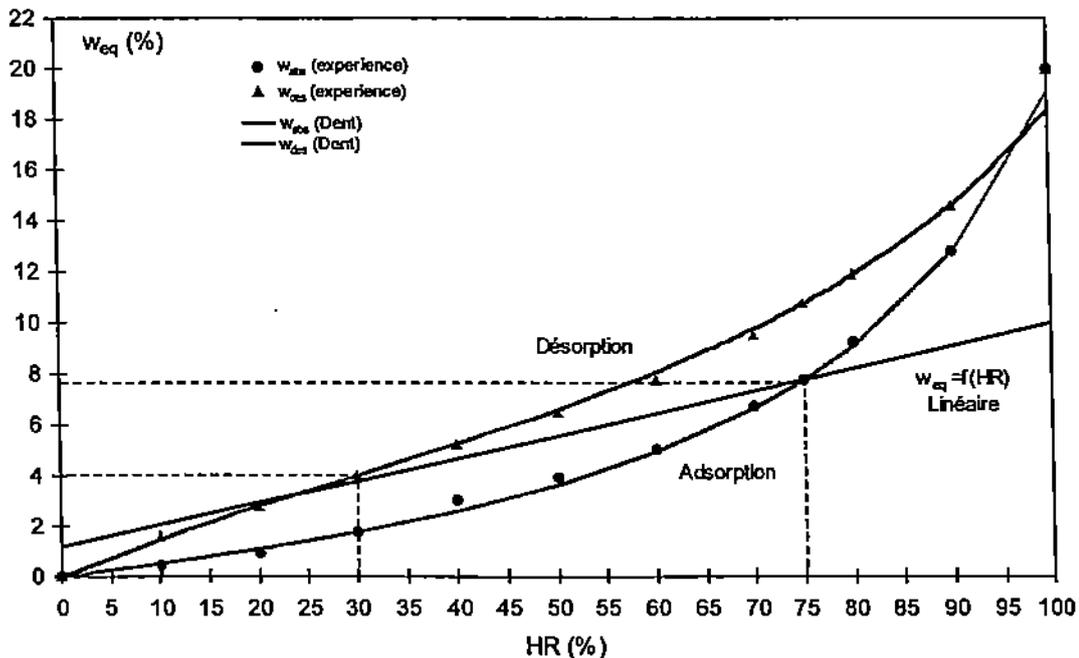


Figure III.18 – Isothermes d'adsorption et de désorption expérimentales du pin maritime [PIT 96] et interpolation par le modèle de Dent.

Pour des cycles hygrométriques entre deux bornes fixes, nous avons simplifié l'isotherme de sorption par une fonction linéaire :

$$w_{eq}(HR) = 0,0882 HR + 1,135 \quad [III.10]$$

L'identification du coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$  est effectuée à partir des déformations après stabilisation (équilibre). Il est calculé de la manière suivante :

$$\alpha_L = \frac{\epsilon_{w0}(7,7\%) - \epsilon_{w0}(3,6\%)}{7,7\% - 3,6\%} \quad [III.11]$$

On en déduit un coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L = 4,83 \cdot 10^{-5}$ .

L'évolution de la teneur en eau  $w$  de l'éprouvette est donnée par l'évolution de la déformation libre  $\varepsilon_{w0}$  en réponse aux variations hygrométriques, telle que :

$$w = \frac{\varepsilon_{w0}(w) - \varepsilon_{w0}(3,6\%)}{\alpha_L} - 3,6\% \quad \text{[III.12]}$$

On observe que la cinétique de sorption est plus élevée à l'adsorption qu'à la désorption. A partir de l'évolution de la teneur en eau obtenue à l'aide de la déformation libre expérimentale, on en déduit un coefficient de diffusion hydrique  $D_b = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2 \text{ s}^{-1}\text{)}$  et un coefficient de transfert hydrique  $h_w = 2 \cdot 10^{-6} \text{ (m s}^{-1}\text{)}$  à introduire dans les équations [III.8]. La figure III.19 représente la teneur en eau induite de la déformation libre et celle calculée à partir du modèle de diffusion.

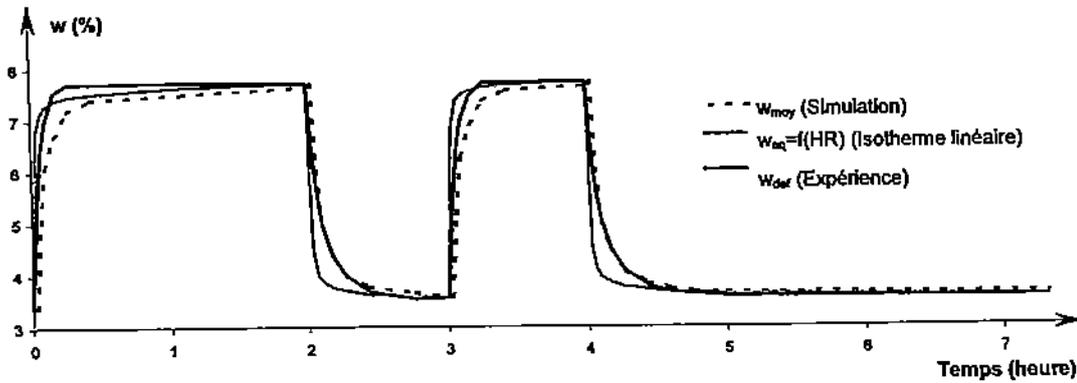


Figure III.19 – Teneur en eau  $w_{def}$  déduite de la déformation libre, teneur moyenne  $w_{moy}$  simulée et teneur en eau d'équilibre  $w_{eq}$  obtenue à partir l'isotherme de sorption linéaire

On remarque que la teneur en eau d'équilibre déduite d'une isotherme linéaire est faible à l'absorption. Dans la simulation, la teneur en eau dans l'éprouvette est homogène. En effet, le coefficient de diffusion  $D_b$  a moins d'influence sur l'évolution de la teneur en eau du fait de la dimension réduite de l'éprouvette, contrairement au coefficient de transfert hydrique  $h_w$ . La simulation de la déformation libre avec  $\alpha_L = 4,83 \cdot 10^{-5}$  est donnée à la figure III.20 :

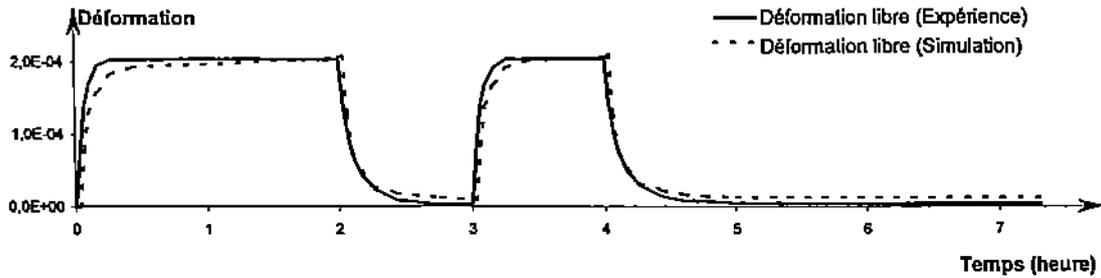


Figure III.20 – Retrait-gonflement libre expérimental et simulé avec  $\alpha_L = 4,83 \cdot 10^{-5}$ .

On remarque que la stabilisation de la déformation est moins rapide pour la simulation que pour l'expérience.

**b - Fluage-recouvrance en environnement humide constant**

Pour permettre l'identification des fonctions de correction en humidité  $a(w)$  et  $b(w)$ , il faut au moins deux courbes de fluage à différentes humidités constantes. Nous avons donc réalisé un essai de fluage-recouvrance à une humidité relative  $HR=73\pm 1\%$  et à une température  $T=20,5\pm 0,1^\circ C$ , figure III.21. La valeur de la recouvrance instantanée  $|\Delta\epsilon_{C_2C_3}| = 4,16 \cdot 10^{-6}$  est relativement proche de la valeur de la déformation instantanée  $\epsilon_{inst} = \Delta\epsilon_{C_0C_1} = 4,20 \cdot 10^{-6}$ , telle que  $|\Delta\epsilon_{C_1C_2}| \approx 0,99 \epsilon_{inst}$ . Par ailleurs, 1,5 heures après le déchargement total de la contrainte, il existe une déformation résiduelle  $\epsilon_{res} = \epsilon_{C_0C_4} = 0,18 \cdot 10^{-6}$ , telle que  $\epsilon_{res} = 0,04 \epsilon_{inst}$ . La simulation du fluage-recouvrance à l'état humide  $HR=73\pm 1\%$  est réalisée en considérant les paramètres rhéologiques suivants :

Rigidité (MPa)	viscosité (MPa s)
$k_{73}^{(0)} = 2,85 \cdot 10^4$	-
$k_{73}^{(1)} = 37,98 \cdot 10^4$	$\eta_{73}^{(1)} = 1,7 \cdot 10^7$
$k_{73}^{(2)} = 33,53 \cdot 10^4$	$\eta_{73}^{(2)} = 1,9 \cdot 10^8$
$k_{73}^{(3)} = 23,41 \cdot 10^4$	$\eta_{73}^{(3)} = 2,3 \cdot 10^9$

Tableau III.6 – Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état humide  $HR=73\pm 1\%$

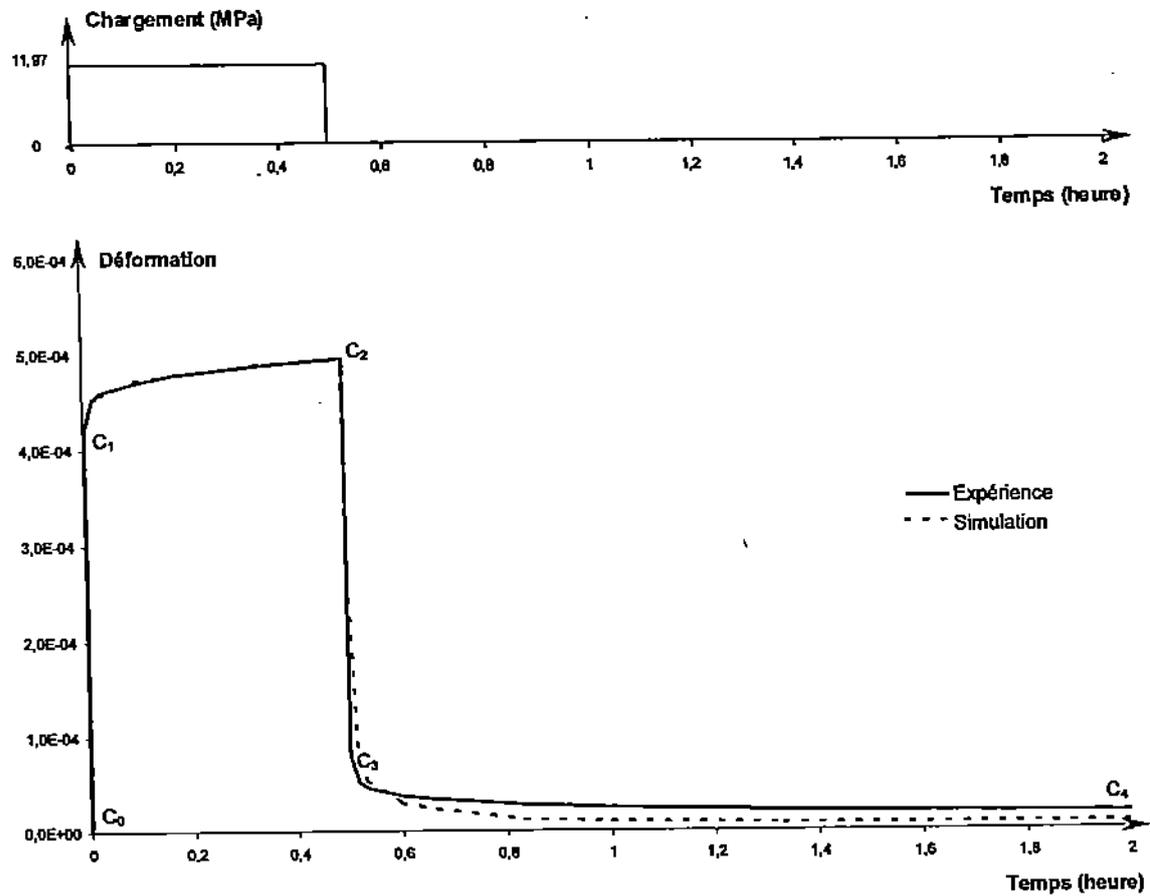


Figure III.21 - Essai de fluage-recouvrance en environnement constant HR=73±1% et T=20,5±0,1°C et simulation.

c- Fluage-recouvrance sous une humidité relative atmosphérique variable

Un essai de fluage-recouvrance est réalisé en environnement variable où l'humidité relative varie entre HR=27,5% et HR=76% à une température constante T=20,5°C. La mise en charge de l'éprouvette est effectuée à l'état sec sous une contrainte constante  $\sigma_L=11,97$  MPa. Pour permettre l'identification de la fonction de fluage à l'état sec, le climat est maintenu suffisamment longtemps (8 heures) à une humidité relative HR=27,5%, figure III.22. La suppression de la contrainte est effectuée 24 heures après le chargement. Dans cet essai, nous retrouvons les faits caractéristiques d'un essai de fluage-recouvrance en traction sous un environnement variable déjà montrés par Pittet [PIT 96], notamment, l'augmentation brusque de la déformation totale à la première humidification et l'accélération de la recouvrance à la première humidification après un déchargement total mécanique. La valeur de la recouvrance instantanée  $|\Delta \epsilon_{S_2S_3}| = 3,88 \cdot 10^{-6}$  est légèrement supérieure à la valeur de la déformation instantanée  $\epsilon_{inst} = \Delta \epsilon_{S_0S_1} = 4,05 \cdot 10^{-6}$  telle que  $|\Delta \epsilon_{S_2S_3}| \approx 1,04 \epsilon_{inst}$ . Pour simuler l'essai, on utilise les courbes de fluage à l'état sec HR=27% et à l'état humide HR=73%. Les courbes expérimentales sont interpolées par une série de Dirichlet obtenue par décomposition spectrale de la fonction de fluage en utilisant 3 cellules de Kelvin-Voigt associées en série à un ressort. L'état sec est pris comme état référence  $w_{ref} = w_{27\%}=4,1\%$ . Le tableau III.7 précise les valeurs de  $k_{ref}^{(p)}, \eta_{ref}^{(q)}$ .

Rigidité (MPa)	Viscosité (MPa s)
$k_{ref}^{(0)} = 3,08 \cdot 10^4$	-
$k_{ref}^{(1)} = 40,84 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(1)} = 4,5 \cdot 10^7$
$k_{ref}^{(2)} = 53,22 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(2)} = 7,64 \cdot 10^8$
$k_{ref}^{(3)} = 23,46 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(3)} = 5,6 \cdot 10^9$

Tableau III.7 – Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état de référence.

A partir des valeurs des paramètres rhéologiques des deux états extrêmes, on calcule les fonctions de correction linéaire  $b^{(p)}(w)$  et  $a^{(q)}(w)$ , telles que :

$$k^{(p)}(w) = b^{(p)}(w) \cdot k_{ref} \text{ et } \eta^{(q)}(w) = a^{(q)}(w) \cdot \eta_{ref}$$

Les fonctions de correction sont présentées au tableau III.8.

Fonctions de correction en humidité	
Rigidité	Viscosité
$b^{(0)} = 1 - 0,019 \cdot (w - w_{ref})$	-
$b^{(1)} = 1 - 0,018 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(1)} = 1 - 0,157 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(2)} = 1 - 0,094 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(2)} = 1 - 0,188 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(3)} = 1 - 0,0004 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(3)} = 1 - 0,150 \cdot (w - w_{ref})$

Tableau III.8 – Fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques

La déformation viscoélastique de l'éprouvette, soumise à des variations cycliques de l'humidité relative, est ensuite simulée en utilisant les paramètres ci-dessus, figure III.22.

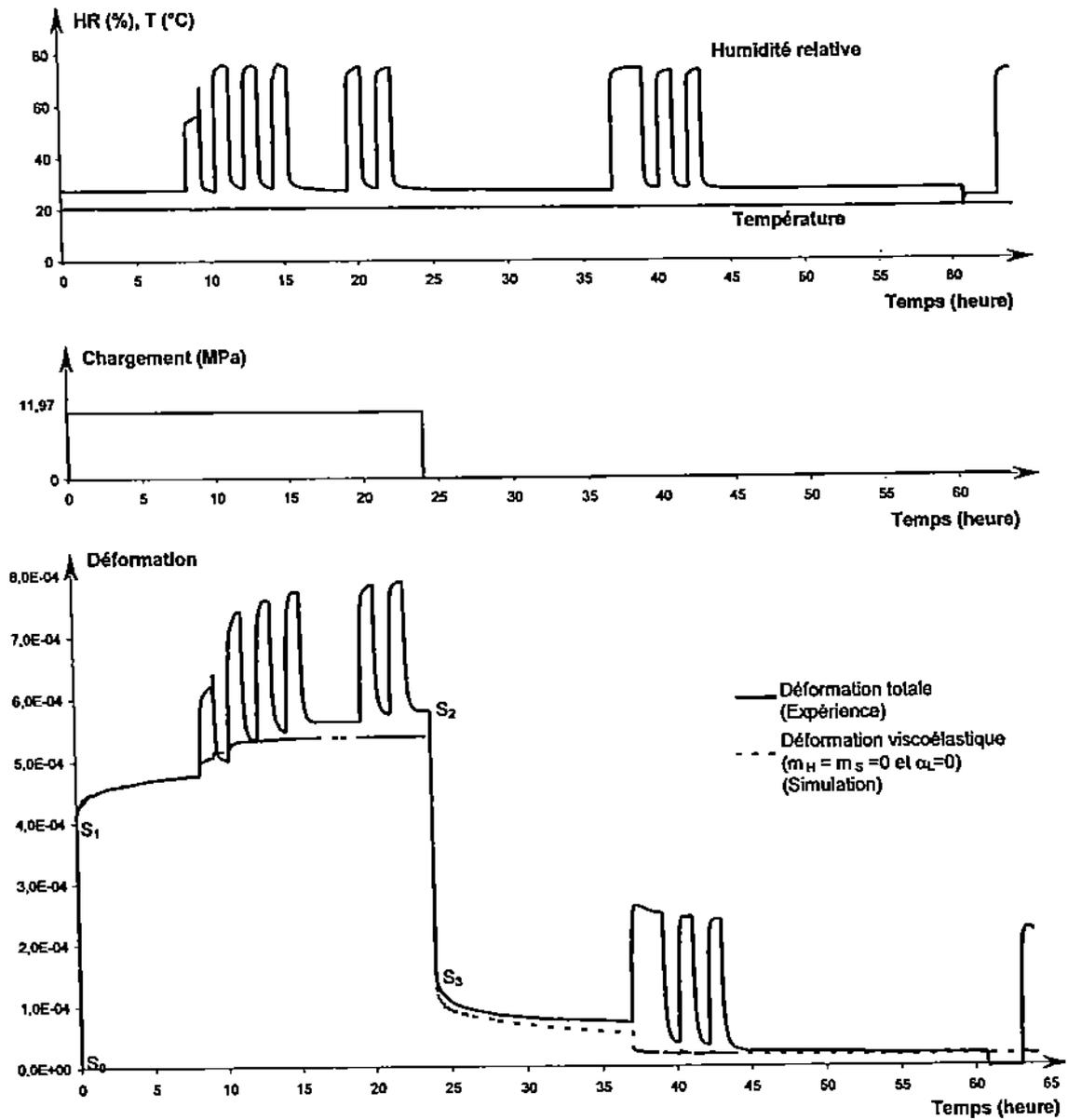


Figure III.22 – Simulation du comportement viscoélastique en environnement variable

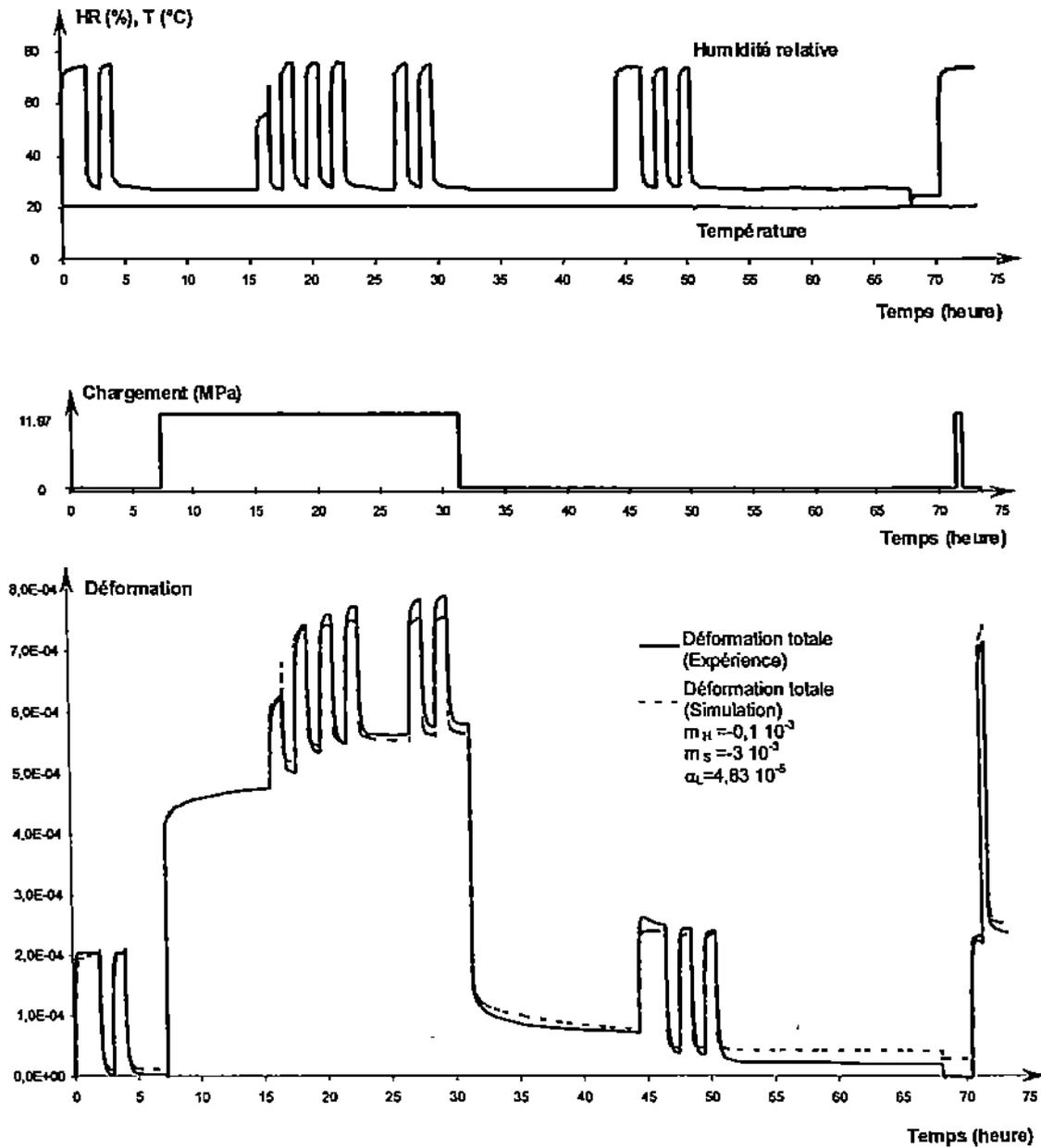


Figure III.23 – Déformation totale expérimentale et simulée.

En considérant les coefficients  $m_H = -0,1 \cdot 10^{-3}$  et  $m_S = -3 \cdot 10^{-3}$ , la simulation de la déformation totale est présentée à la figure III.23. Dans la phase de fluage, les déformations expérimentale et simulée sont relativement proches mais des écarts sur les amplitudes entre les deux déformations existent et s'amplifient au fil des cycles. La même observation est faite dans la phase de recouvrance. L'écart évolue avec la déformation. Ce phénomène peut s'expliquer en partie par le fait que l'évolution de la teneur en eau de l'éprouvette est modifiée par l'état de déformation du matériau [?], [CAS 87], [SKA 88]; un phénomène que nous n'avons pas pris en compte dans le modèle de diffusion pour simuler l'évolution de la teneur en eau au cours de l'essai. Par ailleurs, le modèle mécano-sorptif (type Ranta-Maunus) utilisé peut ne pas représenter correctement les phénomènes non viscoélastiques. Les résultats de ce premier essai maintient qu'il est nécessaire d'augmenter les plages de fluage à humidité constante afin d'augmenter la précision de la décomposition spectrale. De plus, pour augmenter les effets de couplage de la déformation de retrait-gonflement sous contrainte, il est nécessaire d'augmenter la contrainte sans sortir du domaine linéaire. Enfin, pour bien définir l'accumulation des déformations lors des cycles, il est nécessaire d'augmenter leur nombre. Nous proposons d'intégrer ces améliorations expérimentales dans un deuxième essai.

#### III.4.2.2 Expérience 2 : essai avec un niveau de contrainte de 12%

L'éprouvette est soumise à une contrainte de traction constante  $\sigma_t = 22,19$  MPa sous des conditions climatiques décrites à la figure III.24. Comme pour l'expérience 1, cette expérience est composée d'un essai de retrait-gonflement libre, d'un essai de fluage-recouvrance en environnement variable avec une phase initiale de fluage de 24 heures à une hygrométrie constante  $HR = 26\%$  et d'un essai de fluage-recouvrance à l'état humide  $HR = 74\%$  dans le but d'identifier les paramètres du modèle. Lors de la phase de fluage, l'éprouvette est soumise à deux séries de cycles d'humidité relative espacés d'une durée de 10 heures. La première série est composée de 6 cycles d'une période de 2 heures et la deuxième série est de 5 cycles. La réponse de l'éprouvette est montrée à la figure III.24.

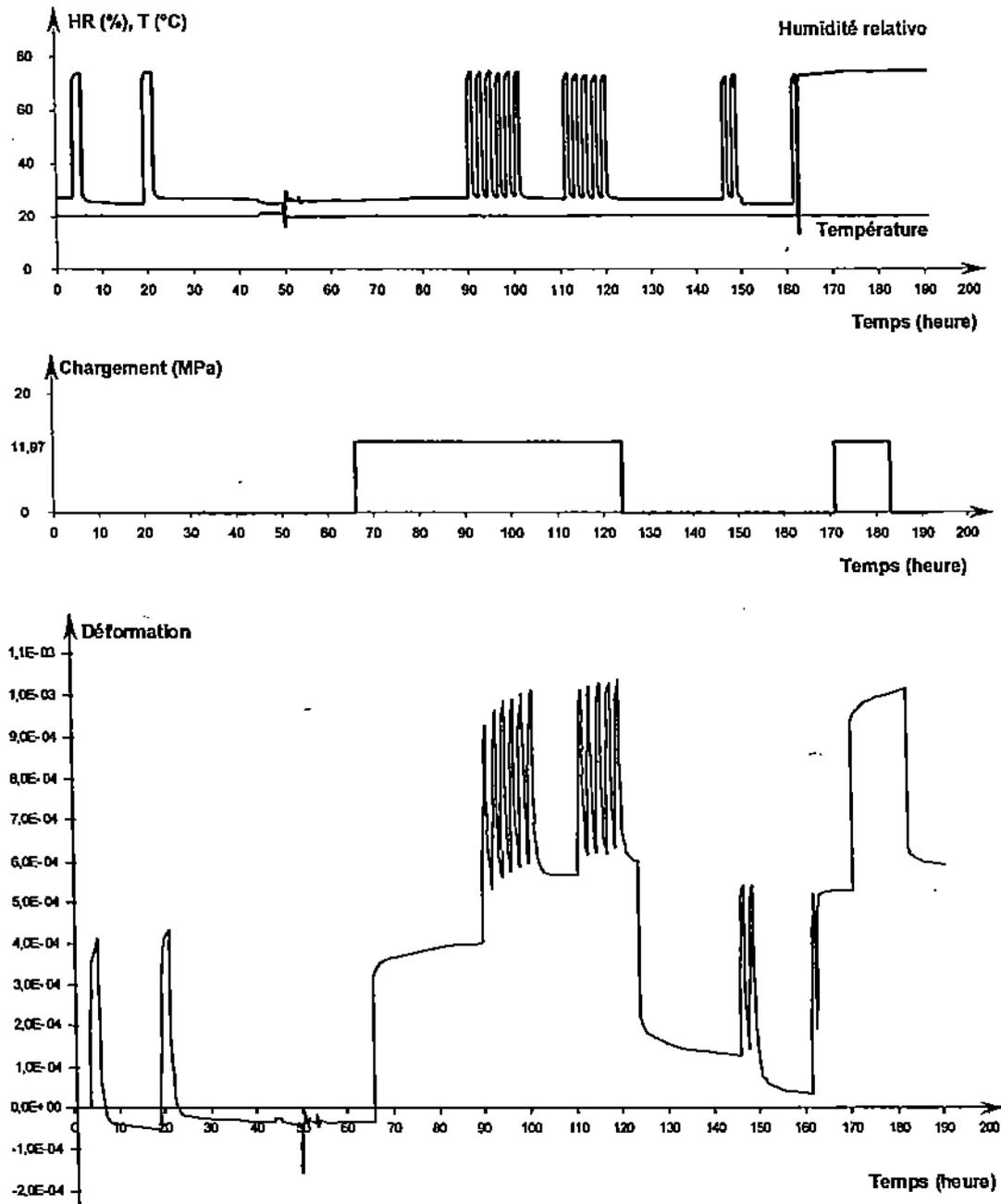


Figure III.24 – Evolution expérimentale de la déformation totale.

a - Retrait-gonflement libre

Un essai de retrait-gonflement libre est effectué, dans un premier temps, pour identifier le coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$ . L'éprouvette est alors soumise à des conditions climatiques décrites à la figure III.25. L'humidité relative ambiante varie entre HR=25% et HR=74,4% à une température constante  $T=20,5\pm 0,1^\circ\text{C}$ . La déformation libre longitudinale est représentée à la figure III.25 et dans le tableau III.9 à différents instants de l'essai.

Point	Temps (heure)	HR (%±0,1%)	T (°C±0,1°C)	$\epsilon$
B <sub>0</sub>	0	27,4	20,4	0
B <sub>1</sub>	5,67	73,8	20,4	$4,13 \cdot 10^{-4}$
B <sub>2</sub>	19,27	25	20,5	$-4,84 \cdot 10^{-5}$
B <sub>3</sub>	21,43	74,4	20,5	$4,32 \cdot 10^{-4}$
B <sub>4</sub>	28,97	27	20,4	$-2,56 \cdot 10^{-5}$

Tableau III.9 - Valeurs de la déformation aux points B<sub>0</sub> à B<sub>4</sub> de la figure III.25.

La teneur en eau d'équilibre  $w_{eq} = f(\text{HR})$  est obtenue à l'aide des isothermes d'adsorption et de désorption décrites pour l'expérience précédente. Les humidités relatives HR<sub>1</sub>=27,4% et HR<sub>2</sub>=73,8% sont respectivement associées aux teneurs en eau d'équilibre  $w_{HR_1} = 3,8\%$  et  $w_{HR_2} = 7,7\%$ .

Le coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L$  est identifié à partir des déformations après stabilisation, tel que :

$$\alpha_L = \frac{\epsilon_{w0}(7,7\%) - \epsilon_{w0}(3,8\%)}{7,7\% - 3,8\%} \quad \text{[III.13]}$$

On en déduit un coefficient de retrait-gonflement libre  $\alpha_L = 1,1 \cdot 10^{-4}$ . La simulation de la teneur en eau moyenne de l'éprouvette est réalisée en prenant les mêmes paramètres de diffusion hydrique que l'expérience précédente. Le retrait-gonflement libre expérimental et simulé est présenté à la figure III.25.

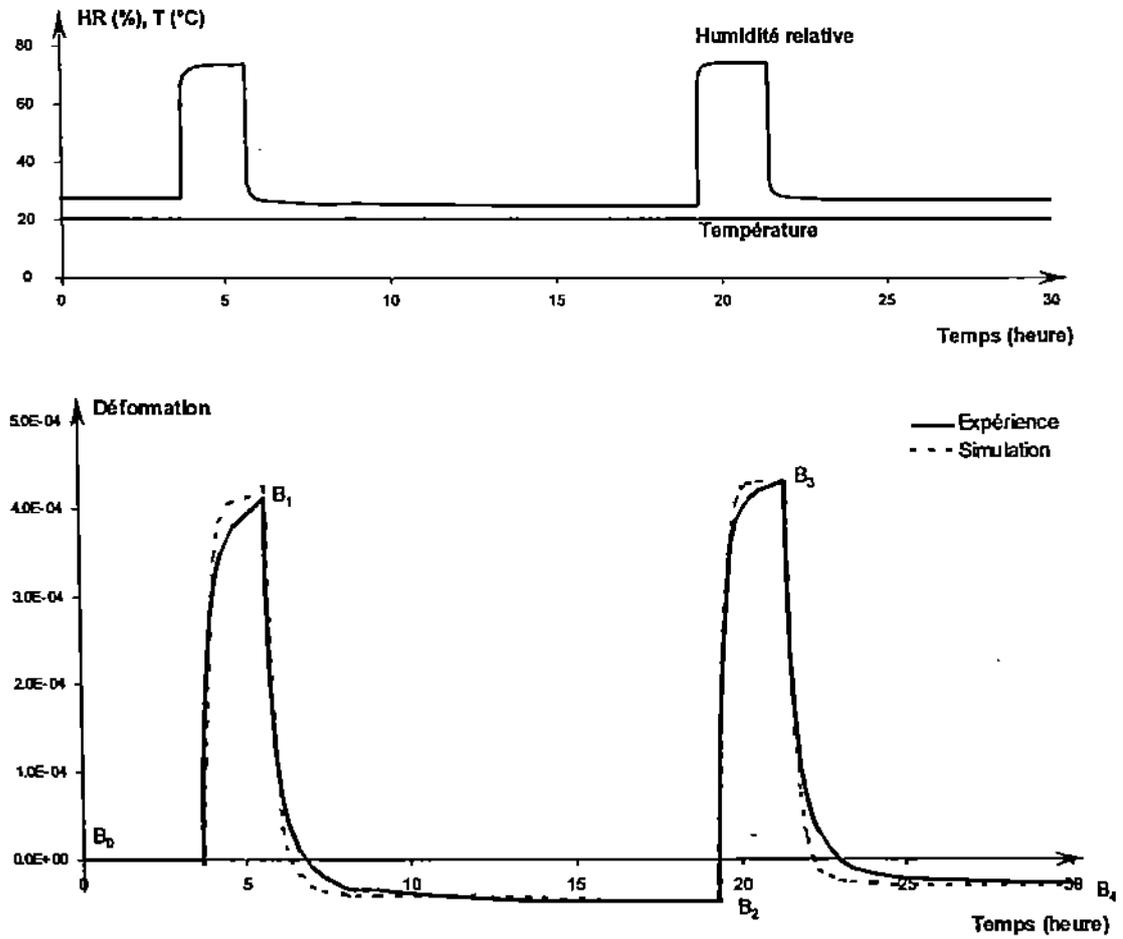


Figure III.25 – Retrait-gonflement libre.

b- Fluage-recouvrance en environnement humide constant

Pour identifier les paramètres viscoélastiques à l'état humide, un essai de fluage-recouvrance est réalisé à une humidité relative constante  $HR=74\pm 1\%$  et à température constante  $T=20,4\pm 0,1^\circ\text{C}$ , figure III.26.

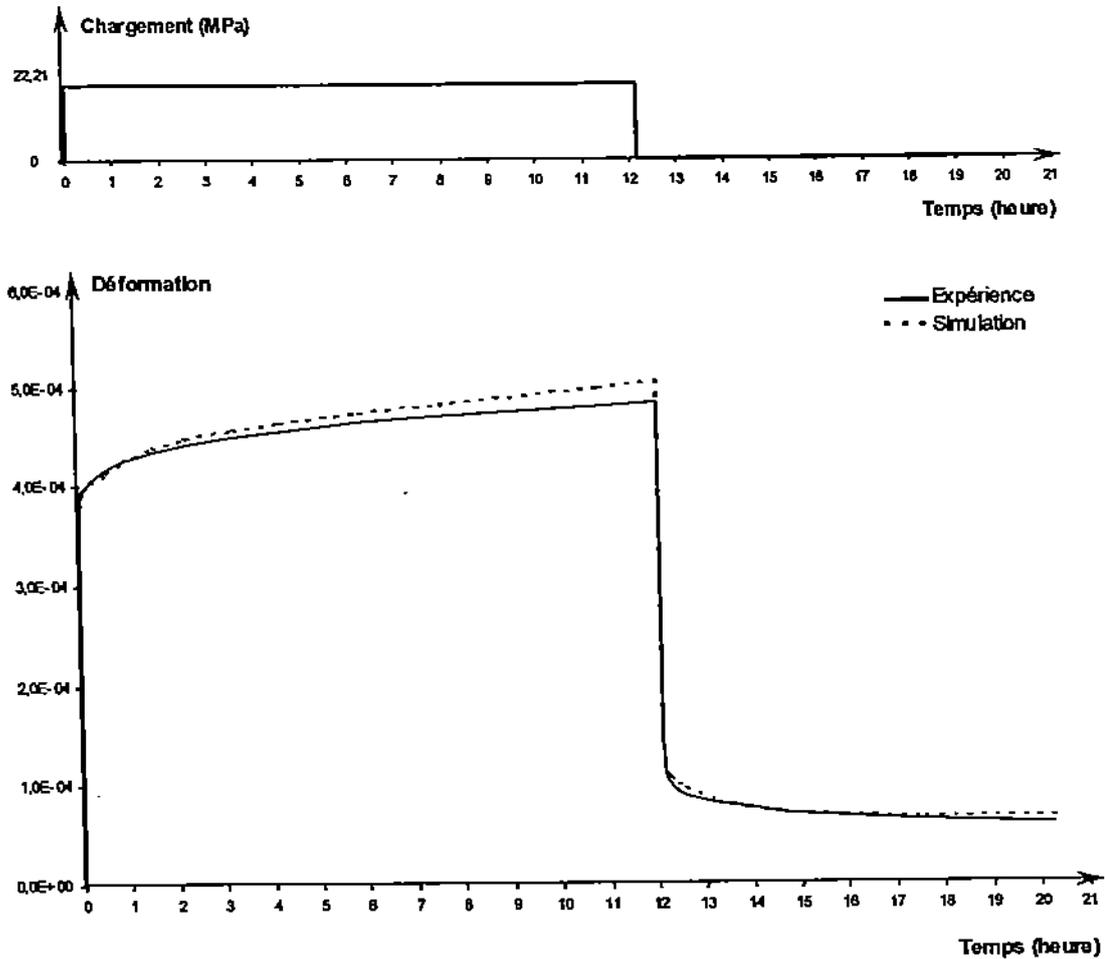


Figure III.26 – Essai de fluage-recouvrance en environnement humide constant  $HR=74\pm 1\%$  et  $T=20,4\pm 0,1^\circ\text{C}$  et simulation.

Une interpolation de la courbe de fluage-recouvrance est réalisée en considérant 3 cellules de Kelvin-Voigt avec les paramètres rhéologiques suivants :

Rigidité (MPa)	Viscosité (MPa s)
$k_{74}^{(0)} = 3,51 \cdot 10^4$	-
$k_{74}^{(1)} = 1,10 \cdot 10^4$	$\eta_{74}^{(1)} = 8,15 \cdot 10^9$
$k_{74}^{(2)} = 27,47 \cdot 10^4$	$\eta_{74}^{(2)} = 1,03 \cdot 10^9$
$k_{74}^{(3)} = 23,35 \cdot 10^4$	$\eta_{74}^{(3)} = 44,47 \cdot 10^7$

Tableau III.10 – Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état humide HR=74±1%

c- Fluage-recouvrance sous une humidité relative atmosphérique variable

Un essai de fluage-recouvrance est réalisé avec une humidité relative variant entre HR=26% et HR=74,18% et à une température constante T=20,4±0,1°C. La mise en charge de l'éprouvette est effectuée à l'état sec sous une contrainte constante  $\sigma_L=22,21$  MPa. Pour permettre l'identification de la fonction de fluage à l'état sec, le climat est maintenu constant à une humidité relative HR=26% pendant 24 heures. Pour simuler l'essai, on utilise les courbes de fluage à l'état sec HR=26% et à l'état humide HR=74%. La courbe de fluage expérimentale est interpolée par 3 cellules de Kelvin-Voigt. L'état sec est pris comme état de référence  $w_{ref} = w_{26\%} = 3,78\%$ . Le tableau III.11 précise les valeurs des rigidités et des viscosités à l'état de référence  $k_{ref}^{(p)}, \eta_{ref}^{(q)}$ .

Rigidité (MPa)	viscosité (MPa s)
$k_{ref}^{(0)} = 3,64 \cdot 10^4$	-
$k_{ref}^{(1)} = 3,20 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(1)} = 28,02 \cdot 10^9$
$k_{ref}^{(2)} = 26,33 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(2)} = 2,48 \cdot 10^9$
$k_{ref}^{(3)} = 44,98 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(3)} = 3,95 \cdot 10^7$

Tableau III.11 – Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état de référence  $w_{ref} = 3,78\%$ .

A partir des valeurs des paramètres rhéologiques des deux états extrêmes, on en déduit les fonctions de correction en humidité  $b^{(p)}(w)$  et  $a^{(q)}(w)$ , tableau III.12.

Fonctions de correction en humidité	
Rigidité	Viscosité
$b^{(0)} = 1 - 0,009 \cdot (w - w_{ref})$	-
$b^{(1)} = 1 - 0,164 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(1)} = 1 - 0,177 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(2)} = 1 - 0,007 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(2)} = 1 - 0,146 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(3)} = 1 - 0,120 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(3)} = 1 - 0,220 \cdot (w - w_{ref})$

Tableau III.12 – Les fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques

La déformation viscoélastique de l'éprouvette soumise à des variations cycliques de l'humidité relative est ensuite simulée, figure III.27.

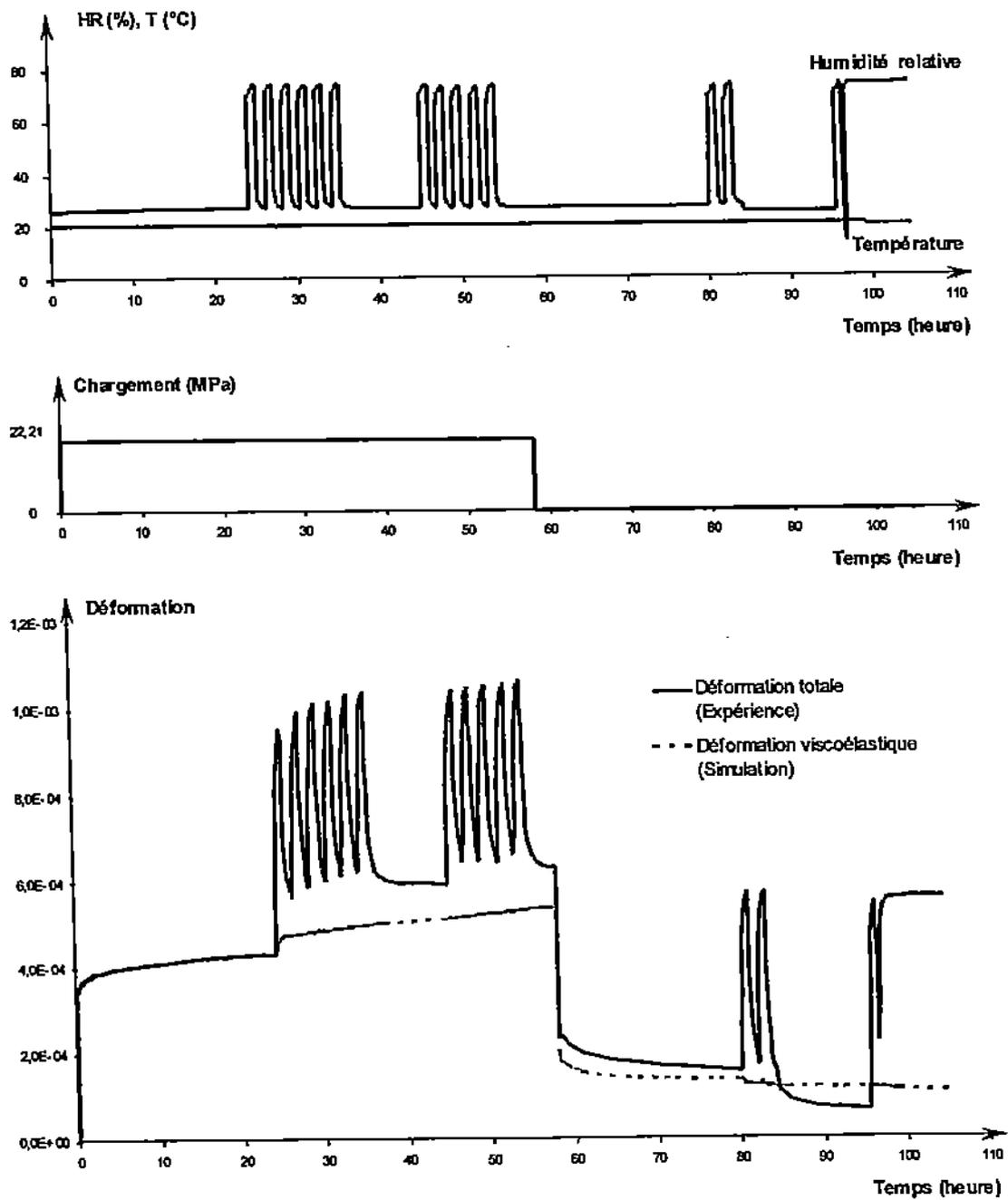


Figure III.27 – Simulation du comportement viscoélastique en environnement variable

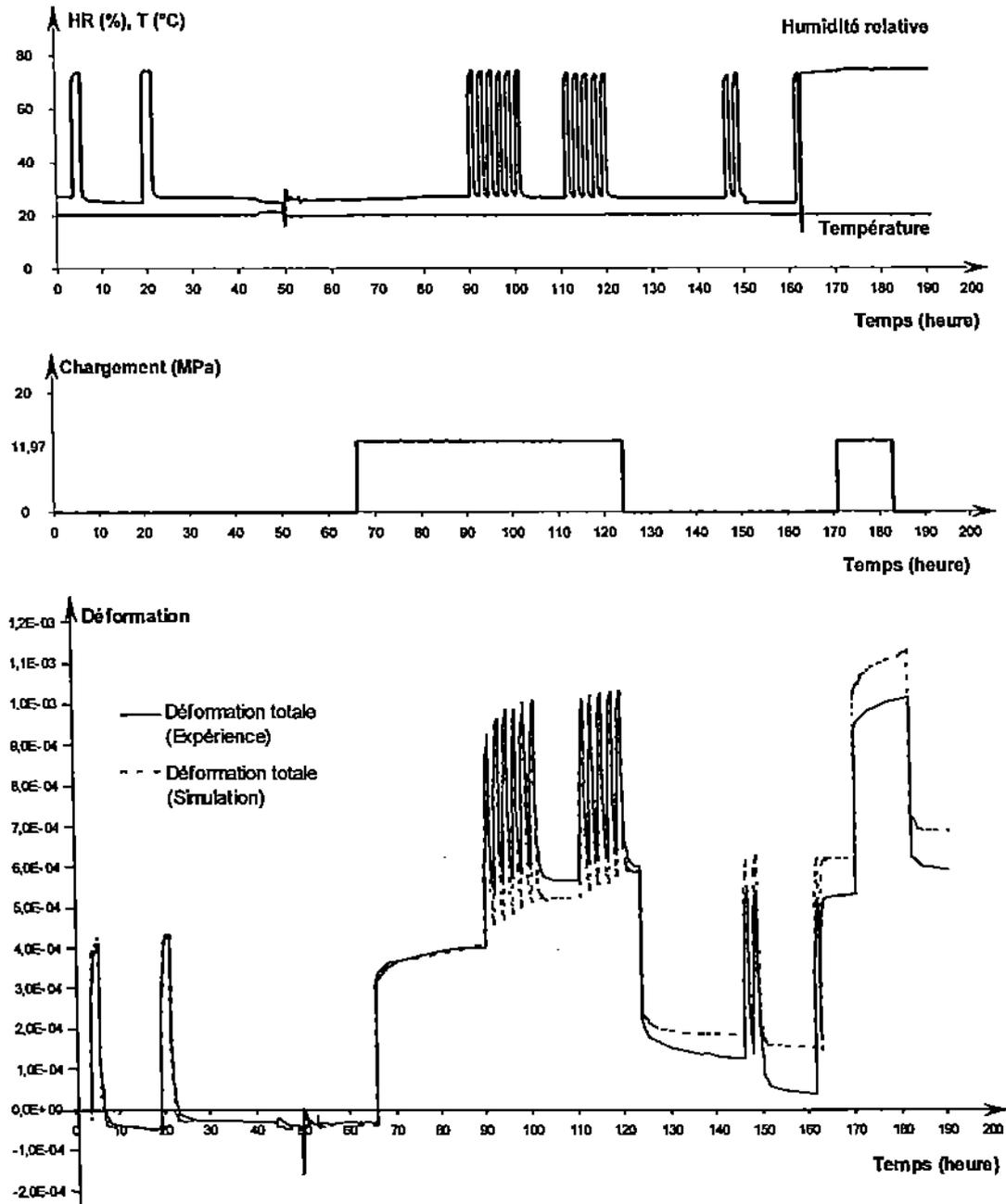


Figure III.28 – Déformation totale simulée et expérimentale.

En prenant les paramètres de couplage entre le retrait-gonflement et l'état de déformation,  $m_H = -0,1 \cdot 10^{-5}$  et  $m_S = -1,8 \cdot 10^{-3}$ , une simulation complète de l'expérience 2 est donnée à la figure III.28. On remarque un écart entre la simulation et l'expérience lors des cycles d'humidité dans la phase de fluage et lors de la phase de recouvrance. Ceci peut provenir du fait que la teneur en eau durant l'essai et surtout pendant les phases transitoires est assez loin de la réalité. En effet, la période des cycles d'humidité relative est de 2 heures et la teneur en eau de l'éprouvette ne stabilise pas au bout d'une heure. Enfin, l'influence de l'état mécanique sur l'évolution de la teneur en eau durant les phases transitoires n'est pas pris en compte par le modèle. Ce phénomène peut aussi expliquer l'écart observé à la recouvrance.

### III.5 conclusion

Les validations ont montré la qualité du modèle viscoélastique vieillissant. Le modèle a permis de bien isoler les phénomènes non viscoélastiques. Il montre que l'accélération des déformations à la fois pendant le fluage et la recouvrance lorsque l'humidité jamais atteinte est dépassée, est en fait d'origine viscoélastique et non mécano-sorptive. Cependant, la qualité des simulations est altérée par le rôle important de la teneur sur eau sur le comportement. Or, l'évolution de cette variable n'est pas directement connue au cours des essais. En effet, l'utilisation d'éprouvettes de taille réduite a permis, dans un premier temps, de supposer une variation homogène de la teneur en eau dans l'éprouvette et une stabilisation rapide de la teneur en eau avec l'environnement extérieur et donc de négliger les phénomènes dus à la non homogénéité de l'humidité dans la section d'éprouvette. Egalement, la modélisation de la déformation de retrait-gonflement sous influence mécanique a été empruntée aux travaux de Ranta-Maunus et n'a pas été étudiée plus précisément dans ce travail. Les qualités de découplage du modèle présenté permet donc d'envisager une étude approfondie du retrait-gonflement sous contrainte en employant par exemple, une approche thermodynamique. Néanmoins, l'influence de la déformation sur l'évolution de l'humidité interne montrée par plusieurs auteurs n'est pas prise en compte. Ce fait peut expliquer une partie des différences entre l'expérience et la simulation. La qualité de la modélisation et des interprétations des couplages dans la mécano-sorption résulte de la résolution de ce problème. Une investigation expérimentale de l'effet mécanique sur l'évolution de la teneur en eau est essentielle pour une meilleure compréhension de la mécano-sorption. Ce chapitre a montré la validité du modèle à l'échelle de quelques fibres de bois. Notre objectif initial étant d'appliquer ce modèle à l'échelle d'un élément massif de structure, le modèle mécanique est couplé à un modèle de transfert hydrique. La modélisation d'une poutre de structure fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre IV

# Modélisation à l'échelle de la structure. Application au fluage d'une poutre de structure

### IV.1 Introduction

Précédemment, nous avons présenté un modèle de fluage du bois en environnement variable à l'échelle mésoscopique du matériau (quelques fibres de bois). Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation du fluage d'une poutre de structure en environnement variable à partir du modèle matériau. La géométrie massive nécessite alors de connaître l'état hydro-thermique en tout point de l'élément en y définissant la distribution de teneur en eau et de température.

La première partie de ce chapitre décrit un modèle de transferts couplés de masse et de chaleur. Nous avons implanté ce modèle dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M.

Dans une deuxième partie, nous proposons la simulation d'un essai de fluage réalisé par Bengtsson [BEN 92] sur une poutre de structure de moyenne section (45 mm×45 mm) soumise à des cycles hygrométriques entre HR=30% et HR=90% sous une température constante de 22°C.

### IV.2 Modèle de transfert de masse et de chaleur

Pour modéliser l'évolution de la teneur en eau interne d'une poutre soumise à des variations climatiques, nous nous sommes intéressés au modèle de transferts couplés de masse et de chaleur dérivant d'un bilan massique et enthalpique d'un volume élémentaire représentatif utilisé pour décrire le séchage du bois [PER 90], [BON 91]. Dans cette partie, nous présentons le modèle complet qui couvre les transports de l'humidité suivant l'état de l'eau dans le bois.

#### IV.2.1 Mouvement d'eau à l'intérieur du bois

L'eau dans le bois se présente sous trois états : eau libre, eau liée et vapeur d'eau. La relation entre la quantité d'eau et ses différents états est donnée par :

$$\underbrace{\rho_s w}_{\text{eau totale}} = \underbrace{\epsilon S \rho_l}_{\text{eau libre}} + \underbrace{\rho_s w_b}_{\text{eau liée}} + \underbrace{\epsilon(1-S) \rho_v}_{\text{vapeur d'eau}} \quad [\text{IV.1}]$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique du bois anhydre,  $\rho_l$  la masse volumique de l'eau liquide,  $S$  la saturation,  $\epsilon$  la porosité et  $w_b$  la teneur en eau liée.

Le mouvement d'eau est différent suivant son état : eau libre, eau liée ou vapeur d'eau. L'équation [IV.1] peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{m_{\text{eau}}}{V_s} = \frac{m_l}{V_s} + \frac{m_b}{V_s} + \frac{m_v}{V_s} \quad [\text{IV.2}]$$

où  $V_s$  représente le volume du bois anhydre,  $m_{\text{eau}}$  la masse de l'eau dans le bois,  $m_l$  la masse de l'eau libre et  $m_b$  la masse de l'eau liée.

– **Transport dans le lumen** : le mouvement d'eau dans les lumens se fait par convection et capillarité. La migration d'eau par convection est due à un gradient de pression d'eau libre  $P_l$  et à la gravité, tandis que la migration par capillarité est due à un gradient de pression capillaire  $P_c$ . Cette dernière représente la différence de pression à l'interface entre l'air humide  $P_g$  et l'eau liquide  $P_l$ , telle que :

$$P_c = P_g - P_l \quad [\text{IV.3}]$$

Le flux massique de liquide  $\vec{J}_l$  est donnée par la loi de Darcy :

$$\vec{J}_l = \rho_l \vec{v}_l = -\rho_l \frac{\underline{K} \underline{K}_{rl}}{\mu_l} \left( \underbrace{\vec{\nabla} P_g - \rho_l \vec{g}}_{\text{convection}} - \underbrace{\vec{\nabla} P_c}_{\text{capillarité}} \right) \quad [\text{IV.4}]$$

où  $\vec{v}_l$  est la vitesse du liquide,  $\underline{K}$  le tenseur diagonal des perméabilités intrinsèques du bois définies par la loi de Darcy pour un milieu saturé,  $\underline{K}_{rl}$  le tenseur diagonal des perméabilités relatives de la phase liquide dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 et dépendent de la saturation  $S$ , de la viscosité de l'eau  $\mu_l$  et de la pesanteur notée  $\vec{g}$ .

– **Transport de vapeur d'eau** : elle migre dans les pores par diffusion et convection. La diffusion est induite par un gradient de concentration de vapeur et la convection due au déplacement de l'air humide provoquant un déplacement de la vapeur d'eau. Le flux massique de vapeur d'eau est défini par la relation :

$$\vec{J}_v = \rho_v \vec{v}_v = \underbrace{\rho_v \vec{v}_g}_{\text{convection}} - \underbrace{D_v \vec{\nabla} \rho_v}_{\text{diffusion}} \quad [\text{IV.5}]$$

$\vec{v}_v$  est la vitesse de la vapeur,  $D_v$  le tenseur de diffusion de la vapeur,  $\rho_v$  la concentration de vapeur vapeur d'eau dans l'air humide et  $\vec{v}_g$  la vitesse de l'air humide dans le pore, exprimée par la loi de Darcy généralisée suivante :

$$\vec{v}_g = \frac{\underline{K} \underline{K}_{rg}}{\mu_g} (\vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g}) \quad [\text{IV.6}]$$

où  $\mu_g$  est la viscosité de l'air humide et  $\underline{K}_{rg}$  le tenseur diagonal des perméabilités relatives de la phase gazeuse dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

– **Transport dans la membrane** : la migration de l'eau liée se fait par diffusion et thermomigration. Cette dernière définit le mouvement de l'eau liée en réponse à un gradient de température. Le flux massique de l'eau liée est défini par la relation :

$$\vec{J}_b = \rho_b \vec{v}_b = \rho_b \left( \underbrace{D_b \vec{\nabla} w_b}_{\text{diffusion}} + \underbrace{D_{bT} \vec{\nabla} T}_{\text{thermomigration}} \right) \quad [\text{IV.7}]$$

$\underline{D}_b$  et  $\underline{D}_{bT}$  sont les tenseurs respectifs de diffusion de l'eau liée et de diffusion par thermomigration.

#### IV.2.2 Equation de conservation

Par ailleurs, les équations de conservation de la vapeur d'eau, de l'eau libre et de l'eau liée sont données par les relations suivantes :

- Vapeur d'eau :

$$\frac{\partial(\epsilon(1-S)\rho_v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_v = K_l + K_b \quad [IV.8]$$

- Eau libre :

$$\frac{\partial(\epsilon S \rho_l)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_l = -K_l \quad [IV.9]$$

- Eau liée :

$$\frac{\partial(\rho_s w_b)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_b = -K_b \quad [IV.10]$$

$K_l$  et  $K_b$  sont, respectivement, le taux volumique de changement de phase de l'eau libre en vapeur et celui de l'eau liée en vapeur.

En faisant la sommation des expressions [IV.8] à [IV.9], le bilan massique et enthalpique s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho_s w)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_l + \vec{J}_b + \vec{J}_v) = 0 \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\underline{\lambda} \vec{\nabla} T) + (h_v + \Delta h_b) K_b + h_v K_l + (C_{pl} \vec{J}_l + C_{pv} \vec{J}_v) \cdot \vec{\nabla} T = 0 \end{cases} \quad [IV.11]$$

où  $h_v$  et  $\Delta h_b$  sont, respectivement, la chaleur latente d'évaporation à une température de référence et la chaleur différentielle de sorption.  $\rho C_p$  est la chaleur massique globale telle que :

$$\rho C_p = \rho_s C_{ps} + (\rho_l + \rho_v) C_{pl} + \rho_v C_{pv} + \rho_a C_{pa} \quad [IV.12]$$

avec  $\rho_i C_{pi}$  la chaleur massique d'un constituant (i) tel que (s) matière ligneuse, (l) eau liquide, (v) vapeur et (a) air sec.

#### IV.2.3 Conditions aux limites

Pour notre étude, nous supposons uniquement des conditions aux limites de type convectif au niveau de la surface d'échange entre le matériau et l'air ambiant. Elles s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} (\vec{J}_l + \vec{J}_b + \vec{J}_v) \cdot \vec{n} = F_w \\ -\left\{ (\underline{\Delta} \nabla T) + (h_v + \Delta h_b) \vec{J}_b + h_v \vec{J}_l \right\} \cdot \vec{n} = Q_T \end{cases} \quad [IV.13]$$

où  $F_w$  est le flux de masse en surface ( $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).  $Q_T$  est le flux thermique ( $\text{W m}^{-2}$ ).  $\vec{n}$  est la normale sortante à la surface du corps considéré.

– Flux massique :

Le flux massique en surface est donné par la relation :

$$F_w = h_M (\rho_{v\text{surf}} - \rho_{v\infty}) \quad [IV.14]$$

$h_M$  est le coefficient de transfert convectif ( $\text{m s}^{-1}$ ),  $\rho_{v\text{surf}} = \rho_g C_{\text{surf}}$  la concentration de vapeur d'eau à la surface de l'échantillon ( $\text{Kg m}_g^{-3}$ ) et  $\rho_{v\infty} = \rho_g C_{\infty}$  la concentration de vapeur d'eau dans l'air ambiant ( $\text{Kg m}_g^{-3}$ ),  $C$  désignant la fraction massique de vapeur ( $\text{Kg Kg}_g^{-3}$ ).

L'équation [IV.14] résulte de l'expression de la loi de Fick intégrée dans la couche limite. La force motrice de cette loi est le gradient de concentration de vapeur d'eau dans l'air. Pour écrire le terme moteur de l'expression [IV.14] sous la forme d'une différence de teneur en eau, nous utilisons les propriétés hygroscopiques du bois en faisant l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local et en écrivant l'isotherme de sorption sous la forme suivante :

$$w_{\text{eq}} = f(\text{HR}, T) \quad \text{avec} \quad \text{HR} = \frac{P_v}{P_{vs}(T)} = \frac{\rho_v R T}{M_m P_{vs}(T)} \quad [IV.15]$$

où  $M_m$  est la masse molaire de l'eau ( $M_m = 18 \text{ g mole}^{-1}$ ). Nous pouvons en déduire une relation qui donne la teneur eau du bois en équilibre sous une atmosphère définie par sa température et sa concentration en vapeur  $\rho_v$ . L'expression [IV.14] peut aussi s'écrire à l'aide de la teneur en eau du bois à la surface  $w_{\text{surf}}$  et de la teneur en eau à l'équilibre  $w_{\text{eq}}$  avec les conditions en dehors de la couche limite, telle que :

$$F_w = \frac{h_M (\rho_{v\text{surf}} - \rho_{v\infty})}{(w_{\text{surf}} - w_{\text{eq}})} (w_{\text{surf}} - w_{\text{eq}}) = h_w (w_{\text{surf}} - w_{\text{eq}}) \quad [IV.16]$$

$h_w$  représente le coefficient de transfert de masse à la surface de l'éprouvette lorsque la force motrice considérée est le gradient de teneur en eau.

– Flux de chaleur :

Le flux de chaleur échangé avec le milieu extérieur est donnée par la relation :

$$Q_T = h_T (T_{\text{surf}} - T_{\infty}) \quad [IV.17]$$

$h_T$ ,  $T_{\text{surf}}$  et  $T_{\infty}$  désignent, respectivement, le coefficient de transfert thermique convectif à la surface de l'éprouvette, la température en surface et la température de l'air extérieur.

#### IV.2.4 Modèle de type diffusif

En négligeant les effets de la gravité et des gradients de pression en phase liquide et en transformant le terme de transport capillaire en un terme de diffusion liquide et le terme de transport convectif de vapeur en un terme de diffusion de vapeur, le modèle complet [IV.10] peut s'écrire sous une forme diffusif avec deux forces motrices que sont la température  $T$  et la teneur en eau  $w$  [BON 91]. Un unique couplage est considéré, en l'occurrence l'action d'un gradient de température sur les mouvements d'eau dans l'éprouvettes (effet Sorret). Le couplage inverse n'est pas considéré, compte tenu de la rapidité des phénomènes de transferts thermiques en comparaison avec les transferts hydriques [LAS 00]. L'équation de transfert hydrique est écrite comme une combinaison des phénomènes de diffusion et de thermomigration. L'équation de transfert de chaleur est décrite par le phénomène de conduction de la température. Les équations de transfert [IV.10] sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{D}_w \nabla w + \underline{D}_{wT} \nabla T) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{D}_T \nabla T) = 0 \end{cases} \quad [IV.18]$$

$\underline{D}_w(w, T)$  étant le tenseur de diffusivité hydrique lié à la teneur en eau et  $\underline{D}_{wT}(w, T)$  celui lié à la thermo-migration et  $\underline{D}_T(w, T)$  le tenseur de diffusivité thermique, tels que :

$$\begin{aligned} \underline{D}_w &= -\frac{\rho_l \underline{K} \underline{K}_{r1}}{\rho_s \mu_1} \frac{\partial P_c}{\partial w} + \frac{1}{1-C} \frac{\rho_g \underline{D}_g}{\rho_s} \frac{\partial C}{\partial w} + \underline{D}_b \\ \underline{D}_{wT} &= -\frac{\rho_l \underline{K} \underline{K}_{r1}}{\rho_s \mu_1} \frac{\partial P_c}{\partial T} + \frac{1}{1-C} \frac{\rho_g \underline{D}_g}{\rho_s} \frac{\partial C}{\partial T} + \underline{D}_{bT} \\ \underline{D}_T &= \frac{\lambda}{\rho_s C_p} \end{aligned} \quad [IV.19]$$

Le bois dans la construction se trouvent généralement dans le domaine hygroscopique. Dans ce cas, il n'existe alors plus que de l'eau liée dans le matériau. Ainsi, nous pouvons noter :

$$\underline{D}_w = \underline{D}_b \quad \text{et} \quad \underline{D}_{wT} = \underline{D}_{bT}. \quad [IV.20]$$

Les conditions aux limites sur les surfaces d'échanges de normal  $\vec{n}$  sont définies à partir des flux d'humidité et de chaleur échangés entre le matériau et le milieu extérieur. L'hypothèse de la couche limite permet alors d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} -(\underline{D}_w \nabla w + \underline{D}_{wT} \nabla T) \cdot \vec{n} = h_w (w_{\text{surf}} - w_{\text{eq}}) \\ (-\underline{D}_T \cdot \nabla T) \cdot \vec{n} = h_T (T_{\text{surf}} - T_{\infty}) + (h_v + \Delta h_b) h_w (w_{\text{surf}} - w_{\text{eq}}) \end{cases} \quad [IV.21]$$

$h_w$  et  $h_T$  sont, respectivement, le coefficient d'échange hydrique et le coefficient d'échange convectif.  $T_{\text{surf}}$  et  $w_{\text{surf}}$  désignent la température et la teneur en eau du matériau en surface. La teneur en eau d'équilibre du bois  $w_{\text{eq}}$  dans un environnement  $(HR_{\infty}, T_{\infty})$  est obtenue à partir des isothermes de sorption (adsorption et désorption).

### IV.3 Résolution numérique

La résolution numérique fait appel à la méthode des éléments finis [IRU 90], [LAS 00]. Les systèmes linéaires, auxquelles on aboutit après discrétisation, sont résolus par la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Afin d'équilibrer le poids relatif des divers coefficients, et ainsi d'éviter des problèmes de stabilité numérique, les systèmes d'équation et de conditions limites sont écrits sous forme adimensionnelle. Le schéma de discrétisation en temps est explicite.

#### IV.3.1 Formulation adimensionnelle

Nous posons les variables adimensionnées suivantes :

- Coordonnées d'espace :

$$x', y' = \frac{x, y}{L} \quad [IV.22]$$

$L$  étant une longueur de référence, caractéristique de l'échantillon, par exemple la grande dimension de l'échantillon.

- Coordonnée de temps :

$$t' = \frac{D_{wref} t}{L^2} \quad [IV.23]$$

où  $D_{wref}$  est une valeur de référence du coefficient de diffusion de masse  $D_w$ .

- Les variables :

$$T' = \frac{T}{T_{ref}} \quad \text{ou} \quad w' = \frac{w}{w_{ref}} \quad [IV.24]$$

La température  $T$  est adimensionnée par une température de référence  $T_{ref}$  prise, par exemple, à 20°C. La teneur en eau  $w$  est adimensionnée par une teneur en eau de référence  $w_{ref}$  prise, par exemple, à 12%.

Les dérivées en temps et en espace deviennent ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{D_{wref}}{L^2} \frac{\partial}{\partial t'} \quad \text{et} \quad \nabla = \frac{1}{L} \nabla' \quad [IV.25]$$

En remplaçant les inconnus et les dérivées en temps et en espace par leurs expressions adimensionnées, l'équation IV.18 s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial w'}{\partial t'} = \vec{\nabla}' \cdot (\underline{D}'_w \cdot \vec{\nabla}' w' + \underline{D}'_{wT} \cdot \vec{\nabla}' T') \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} = \vec{\nabla}' \cdot (\underline{D}'_T \cdot \vec{\nabla}' T') \end{cases} \quad [IV.26]$$

La mise sous forme adimensionnelle des conditions limites conduit à :

$$\begin{cases} -(\underline{D}'_w \vec{\nabla}' w' + \underline{D}'_{wT} \vec{\nabla}' T') \cdot \vec{n} = B_w (w'_{\text{surf}} - w'_{\text{eq}}) \\ (-\underline{D}'_T \vec{\nabla}' T') \cdot \vec{n} = B_{T1} (T'_{\text{surf}} - T'_{\infty}) + B_{T2} (w'_{\text{surf}} - w'_{\text{eq}}) \end{cases} \quad [\text{IV.27}]$$

avec

$$\begin{aligned} D'_w &= \frac{D_w}{D_{w\text{ref}}} & D'_{wT} &= \frac{D_T}{D_{w\text{ref}}} \frac{T_{\text{ref}}}{w_{w\text{ref}}} & D'_T &= \frac{D_T}{D_{w\text{ref}}} \\ B_w &= \frac{h_w L}{D_{w\text{ref}}} & B_{T1} &= \frac{h_T L}{D_{w\text{ref}}} & B_{T2} &= \frac{(h_v + \Delta h_b) h_w L w_{\text{ref}}}{D_{w\text{ref}} T_{\text{ref}}} \end{aligned} \quad [\text{IV.28}]$$

Pour plus de clarté dans l'écriture, les "primes" provenant de la mise sous forme adimensionnelle et désignant les variables sans dimensions, n'apparaîtront pas dans les paragraphes suivants.

### IV.3.2 Formulation variationnelle et discrétisation par élément fini

Pour résoudre les équations de transfert non linéaire ci-dessus, nous écrivons leurs formes faibles puis nous appliquons la formule de Green en considérant un domaine de calcul  $V$  et sa surface  $S$ . Ensuite, nous multiplions les équations de la teneur en eau et de la chaleur, respectivement, par les fonction de pondération  $\varphi$  et  $\psi$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dV + \int_V (\underline{D}_w(w, T) \vec{\nabla} w) \cdot \vec{\nabla} \varphi dV + \int_V (\underline{D}_{wT}(w, T) \vec{\nabla} T) \cdot \vec{\nabla} \varphi dV \\ & + \int_S B_w(w, T) (w - w_{\infty}) \varphi dS = 0 \end{aligned} \quad [\text{IV.29}]$$

et

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial T}{\partial t} \psi dV + \int_V (\underline{D}_T(w, T) \vec{\nabla} T) \cdot \vec{\nabla} \psi dV \\ & + \int_S B_{T1}(w, T) (T - T_{\infty}) \psi dS + \int_S B_{T2}(w, T) (w - w_{\infty}) \psi dS = 0 \end{aligned} \quad [\text{IV.30}]$$

L'approximation par éléments finis sur un élément fini  $V^e$  à  $n$  noeuds consiste à dire que les champs de teneur en eau  $w$  et  $T$  peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_i(t) \quad \text{et} \quad T(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) T_i(t) \quad [\text{IV.31}]$$

où  $N_i(x, y)$  sont les fonctions de forme aux noeuds de l'élément considéré et  $w_i$  et  $T_i$  sont les valeurs de la teneur en eau et de la température aux noeuds de l'élément. En introduisant l'équation [IV.31] dans les équations [IV.29] et [IV.30], les fonctions de pondération sont égales aux fonctions de forme ( $N_i = \varphi_i = \psi_i$ ), on en déduit les équations éléments finis suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_i^n \frac{\partial}{\partial t} w_i \int_{V^e} N_i N_j dV + \sum_i^n w_i \int_{V^e} (\underline{D}_w(w, T) \vec{\nabla} N_i \cdot \vec{\nabla} N_j) dV \\ & + \sum_i^n T_i \int_{V^e} (\underline{D}_{wT}(w, T) \vec{\nabla} N_i \cdot \vec{\nabla} N_j) dV \\ & + \int_S B_w(w, T) (w - w_{\infty}) N_j dS = 0 \end{aligned} \quad [\text{IV.32}]$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_i^n \frac{\partial}{\partial t} T_i \int_{V^e} N_i N_j dV + \sum_i^n T_i \int_{V^e} (\underline{D}_T(w, T) \vec{\nabla} N_i \cdot \vec{\nabla} N_j) dV \\ & + \int_S (B_T(w, T) (T - T_\infty) N_j + B_{wT}(w, T) (w - w_\infty)) N_j dS = 0 \end{aligned} \quad [IV.33]$$

On peut réécrire les équations et IV.33 sous la forme tensorielle suivante :

$$\mathbf{A} \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \mathbf{C}_w \underline{w} + \underline{F}_1 = 0 \quad [IV.34]$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} + \mathbf{C}_T \underline{T} + \underline{F}_2 = 0 \quad [IV.35]$$

avec  $\mathbf{A}$ , une matrice de masse,  $\mathbf{C}_w$ ,  $\mathbf{C}_T$ , des matrices d'amortissement et  $\underline{F}_1$ ,  $\underline{F}_2$ , des vecteurs forces, tels que :

$$\mathbf{A} = \int_{V^e} N_i N_j dV \quad [IV.36]$$

$$\mathbf{C}_w = \int_{V^e} (\underline{D}_w(w, T) \vec{\nabla} N_i) \cdot \vec{\nabla} N_j dV + \int_S B_w(w, T) N_j dS \quad [IV.37]$$

$$\mathbf{C}_T = \int_{V^e} (\underline{D}_T(w, T) \vec{\nabla} N_i) \cdot \vec{\nabla} N_j dV + \int_S B_T(w, T) N_i N_j dS \quad [IV.38]$$

$$\underline{F}_1 = - \int_S B_w(w, T) w_\infty N_j dS + \underline{T} \int_{V^e} (\underline{D}_{wT}(w, T) \vec{\nabla} N_i) \cdot \vec{\nabla} N_j dV \quad [IV.39]$$

$$\underline{F}_2 = \int_S (-B_T(w, T) T_\infty + B_{wT}(w, T) (w_{surf} - w_\infty)) N_j dS \quad [IV.40]$$

Les intégrales sur le domaine  $V$  sont calculées par sommation des intégrales sur les éléments  $V^e$  du maillage constituant les coefficient des matrices élémentaires. Ces matrices sont ensuite assemblées de façon à constituer les matrices globales de résolution.

### IV.3.3 Discrétisation temporelle

L'équation différentielle matricielle [IV.34] et [IV.35] est résolue pas à pas. La méthode de résolution, pour chaque pas de temps  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ , consiste à remplacer la valeur de teneur en eau et de la température par l'expression suivante :

$$\underline{w} = (1 - \theta) \underline{w}_n + \theta \underline{w}_{n-1} \quad \text{et} \quad \underline{T} = (1 - \theta) \underline{T}_n + \theta \underline{T}_{n-1} \quad [IV.41]$$

où  $\theta$  est le coefficient de relaxation compris entre 0 et 1.

On obtient :

$$\mathbf{A}^* \frac{(\underline{w}_n - \underline{w}_{n-1})}{\Delta t_n} + \mathbf{C}_w^* ((1 - \theta)\underline{w}_n + \theta\underline{w}_{n-1}) + \underline{F}_1^* = 0 \quad [\text{IV.42}]$$

et

$$\mathbf{A}^* \frac{(\underline{T}_n - \underline{T}_{n-1})}{\Delta t_n} + \mathbf{C}_T^* ((1 - \theta)\underline{T}_n + \theta\underline{T}_{n-1}) + \underline{F}_2^* = 0 \quad [\text{IV.43}]$$

La non linéarité provient du fait que les matrices  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{C}_w^*$ , et  $\mathbf{C}_T^*$  sont des fonctions de  $w_{n-1}$  et  $T_{n-1}$ . Nous optons pour un schéma d'intégration explicite en posant  $\theta=0$ . Il est stable si la condition de stabilité [IV.44] est vérifiée.

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \quad [\text{IV.44}]$$

A chaque itération, nous effectuons d'abord la procédure thermique avant la procédure hydrique. L'influence de la contrainte ou de la déformation sur le processus de transferts pourrait être introduite en faisant dépendre les matrices de la contrainte ou de la déformation.

## IV.4 Etude du comportement d'une poutre de structure

### IV.4.1 Essai de Bengtson

Dans cette partie, nous présentons la simulation d'un essai de fluage en flexion 4 points sur une poutre de dimensions (45 mm×45 mm×1100 mm) effectué par Bengtsson [BEN 92]. La poutre est soumise à une contrainte de flexion de 15,4 MPa durant 210 jours et à 5 cycles hygrométriques d'une périodicité de 14 jours entre 30% et 90% et à une température ambiante de 22°C constante.

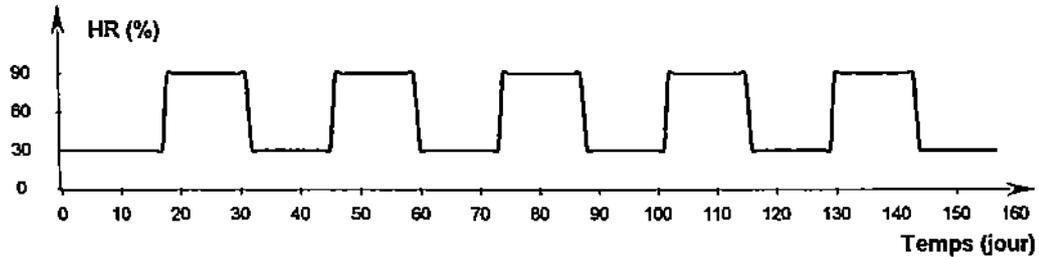


Figure IV.1 - Sollicitation hygrométrique.

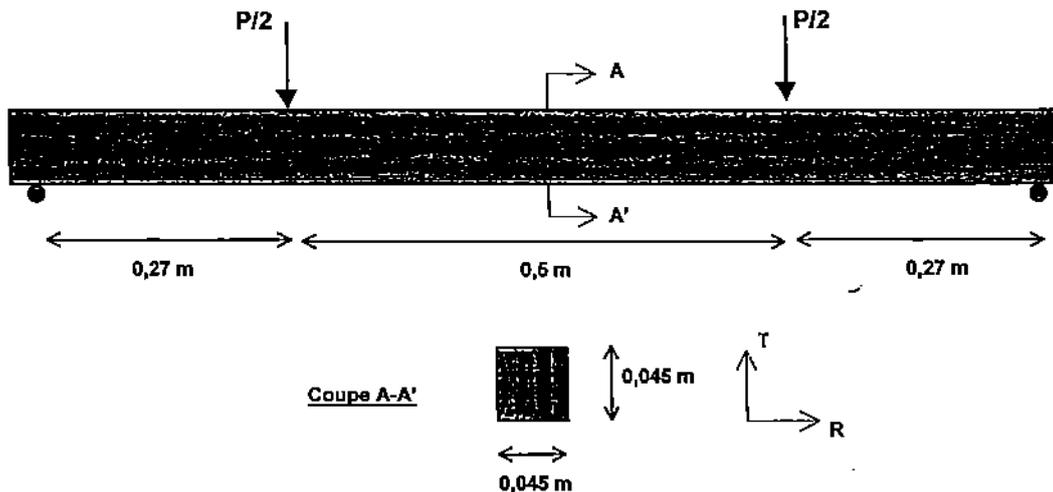


Figure IV.2 - Flexion 4 points.

L'évolution des déformations totales et corrigées de la déformation libre  $\varepsilon_{w0}$  à mi-portée (sur les faces extrêmes tendues et comprimées), est donnée à la figure IV.3. L'évolution de la flèche est présentée à la figure IV.4. On observe que le comportement en traction et en compression n'est pas symétrique, ce qui met en évidence un comportement non linéaire. Cependant, la différence reste faible en début d'essai.

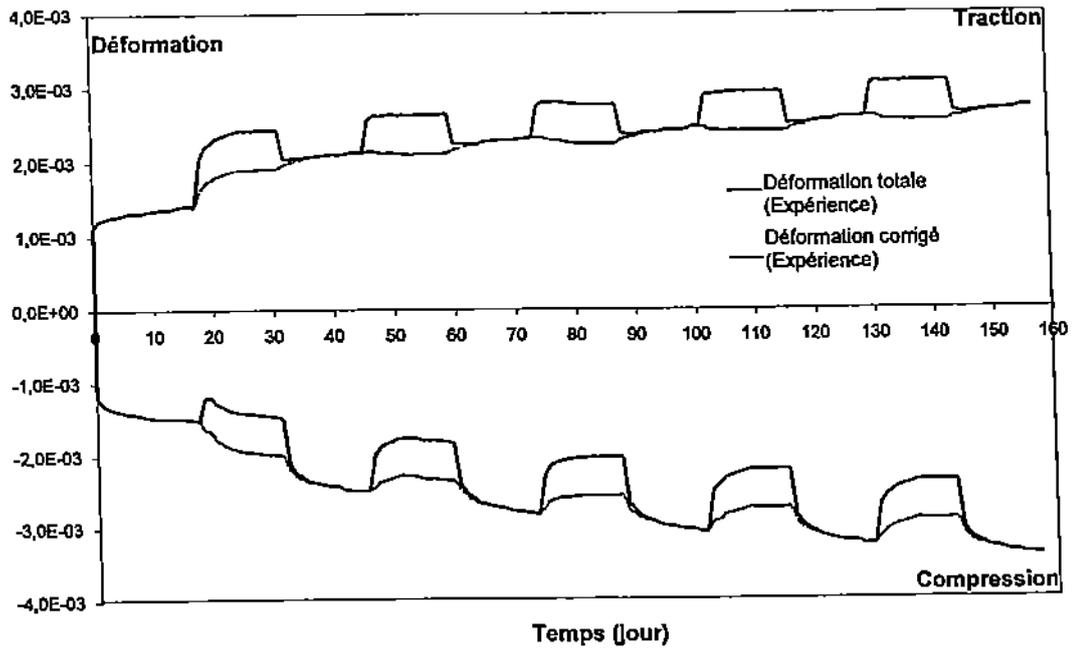


Figure IV.3 – Evolution expérimentale des déformations totales  $\epsilon$  et corrigées  $\epsilon_c = \epsilon - \epsilon_{w0}$  des faces extrêmes tendues et comprimées.

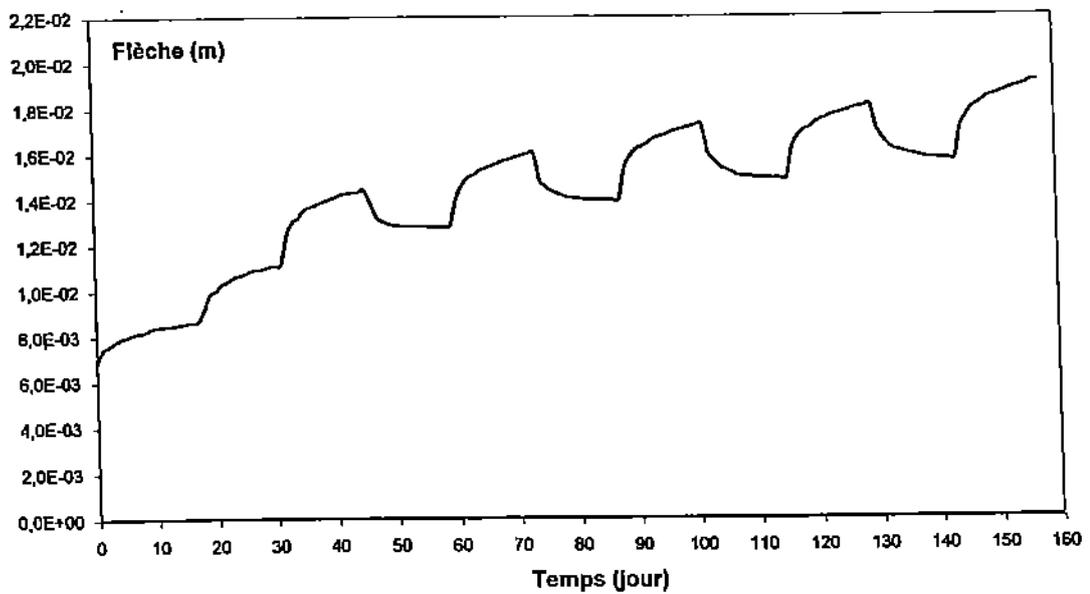


Figure IV.4 – Evolution expérimentale de la flèche.

#### IV.4.2 Simulation

Nous considérons une modélisation bi-dimensionnelle de la poutre en supposant un état plan de contrainte. La modélisation éléments finis nécessite seulement de mailler la moitié de la poutre avec les conditions limites décrites à la figure IV.5. La demi-poutre est maillée par des éléments triangulaires linéaires à trois noeuds (TRI3).

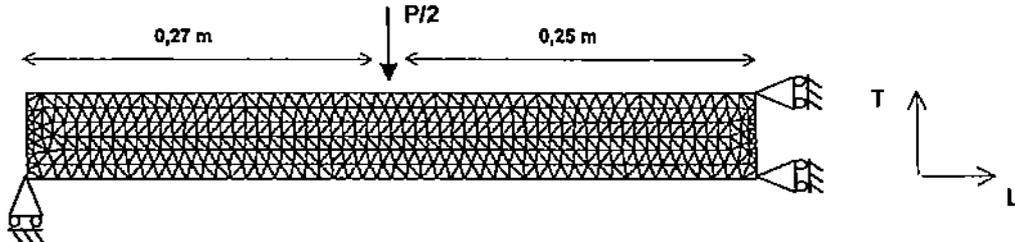


Figure IV.5 – Maillage et conditions aux limites pour le calcul mécanique

##### IV.4.2.1 Simulation du transfert hydrique

Le modèle mécanique est couplé au modèle de transfert pour connaître l'évolution de la teneur en eau dans la poutre. Pour une hygrométrie ambiante qui varie entre 30% et 95% et une température entre 0°C et 40°C, la teneur en eau du bois est constamment en dessous du point de saturation des fibres (domaine hygroscopique). A l'état sec (HR=30% et T=22°), la teneur en eau d'équilibre  $w_{eq}$  est 8,4%. A l'état humide (HR=90% et T=22°), la teneur en eau d'équilibre est 19,8%. En condition isothermique dans le domaine hygroscopique, le modèle complet de transfert hydrique se réduit à un modèle de diffusion défini par la loi de Fick non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{D}_b \nabla w) \\ - (\underline{D}_b \nabla w) \cdot \vec{n} = h_w (w_{surf} - w_{eq}) \end{cases} \quad [IV.45]$$

Le modèle de transfert employé suppose une direction privilégiée de la diffusion (la direction tangentielle dans notre cas). Pour modéliser la flèche d'une poutre en contrainte plane, nous simulons uniquement un transfert hydrique unidimensionnel dans la direction tangentielle, figure IV.6.

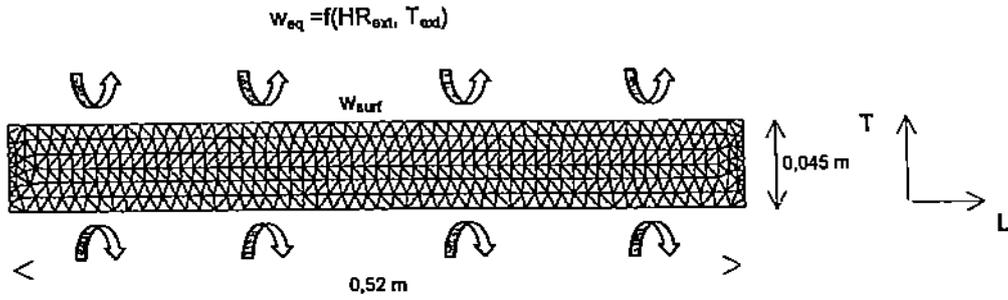


Figure IV.6 – Transfert hydrique unidimensionnel dans la direction tangentielle.

A partir de la teneur en eau d'équilibre du bois pour les humidité relatives 30%, 90% et 100%, nous identifions les coefficients de l'isotherme de sorption de Dent (figure IV.7).

$$w_{eq}(HR) = \frac{HR}{a HR^2 + b HR + c} \quad [IV.46]$$

avec  $a = -1,434 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 18,866 \cdot 10^{-2}$  et  $c = 7,885 \cdot 10^{-1}$ .

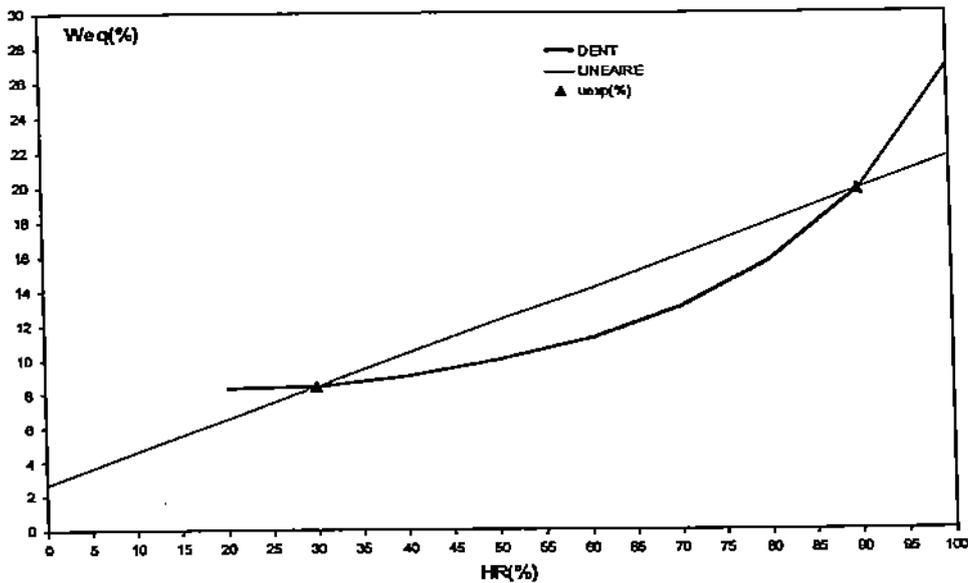


Figure IV.7 – Isotherme de sorption à T=22°C.

Pour des cycles hygrométriques compris entre HR=30% et HR=90%, nous utilisons une interpolation linéaire de l'isotherme de sorption,  $w_{eq}(HR) = 0,19 HR + 2,7$ . Elle permet un compromis entre l'équilibre obtenu lors d'une désorption et d'une sorption.

Par ailleurs, nous n'avons pas accès aux données expérimentales de l'évolution de la teneur en eau dans la poutre. Pour simuler le transfert hydrique, nous utilisons les paramètres donnés par Hanhijarvi [HAN 95], c'est à dire :

- Coefficient de diffusion  $D_b(w)$  ( $m^2 s^{-1}$ ) :

$$D_b(w) = 8 \cdot 10^{-10} e^{0,04 w} \quad [IV.47]$$

- Coefficient d'échange surfacique  $h_w(w)$  ( $m s^{-1}$ ) :

$$h_w(w) = 3,8 \cdot 10^{-7} e^{0,04 w} \quad [IV.48]$$

L'évolution de la teneur en eau en surface  $w_{surf}$ , au centre  $w_{centre}$  et moyenne  $w_{moy}$  pendant le premier cycle sont données à la figure IV.8.  $w_{moy}$  est mesurée en faisant la moyenne sur la section considérée.

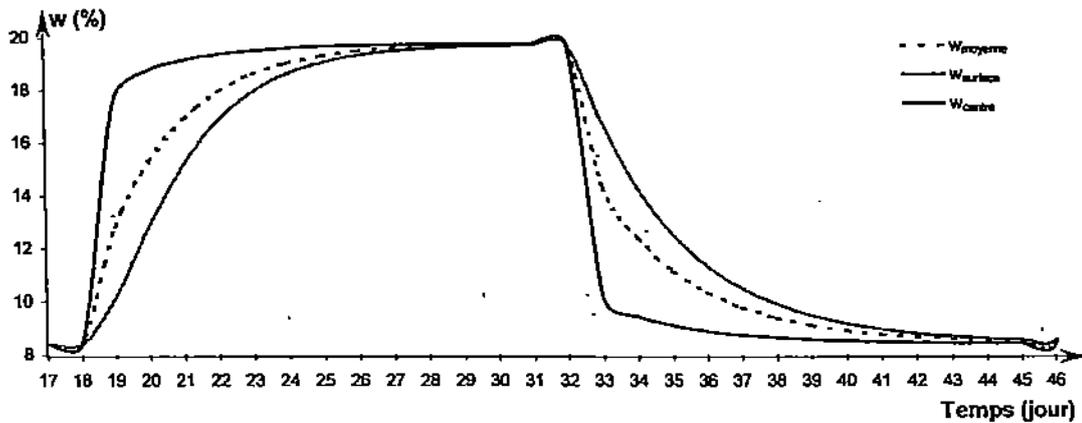


Figure IV.8 - Evolution de la teneur en eau en surface  $w_{surf}$ , au centre  $w_{centre}$  et la valeur moyenne  $w_{moy}$  pendant le premier cycle.

On remarque que la teneur en eau dans la poutre devient homogène 10 jours après une variation hygrométrique. Elle est stabilisée à  $w=19,8\%$  à l'humidification et à  $w=8,4\%$  au séchage. Au cours de l'essai, le profil de teneur en eau dans la poutre est présenté à la figure IV.9.

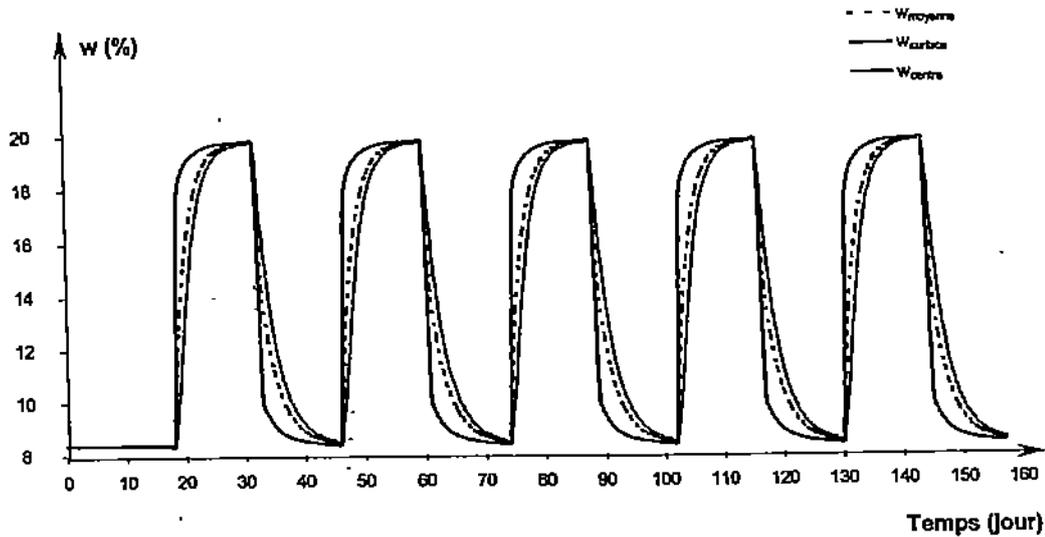


Figure IV.9 - Evolution de la teneur en eau en surface  $w_{surf}$ , au centre  $w_{centre}$  et moyenne  $w_{moy}$  pendant l'essai.

#### IV.4.2.2 Simulation du fluage

Dans un premier temps, on identifie les paramètres du modèle à l'aide de la déformation de traction de la face extrême tendue à l'état sec HR=30% et à l'état humide HR=90%. La courbe de fluage expérimentale est interpolée par 3 cellules de Kelvin-Voigt. L'état sec est pris comme état référence et correspond une teneur en eau  $w_{ref} = w_{30\%} = 8,4\%$ . Le tableau IV.1 précise les valeurs des rigidités et des viscosités à l'état de référence  $k_{ref}^{(p)}$ ,  $\eta_{ref}^{(q)}$  et à l'état humide  $k_{90\%}^{(p)}$ ,  $\eta_{90\%}^{(q)}$ .

Rigidité (MPa)		Viscosité (MPa s)	
Etat de référence $w_{ref} = 8,4\%$	Etat humide $w_{90\%} = 19,8\%$	Etat de référence $w_{ref} = 8,4\%$	Etat humide $w_{90\%} = 19,8\%$
$k_{ref}^{(0)} = 3,64 \cdot 10^4$	$k_{90\%}^{(0)} = 3,51 \cdot 10^4$	—	—
$k_{ref}^{(1)} = 3,20 \cdot 10^4$	$k_{90\%}^{(1)} = 1,10 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(1)} = 2,80 \cdot 10^{10}$	$\eta_{90\%}^{(1)} = 8,14 \cdot 10^9$
$k_{ref}^{(2)} = 26,33 \cdot 10^4$	$k_{90\%}^{(2)} = 27,47 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(2)} = 2,48 \cdot 10^9$	$\eta_{90\%}^{(2)} = 1,03 \cdot 10^9$
$k_{ref}^{(3)} = 44,98 \cdot 10^4$	$k_{90\%}^{(3)} = 23,35 \cdot 10^4$	$\eta_{ref}^{(3)} = 3,95 \cdot 10^7$	$\eta_{90\%}^{(3)} = 4,45 \cdot 10^6$

Tableau IV.1 - Caractéristiques du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à l'état sec et humide.

A partir des valeurs des paramètres rhéologiques des deux états extrêmes, on calcule les fonctions de correction en humidité  $b^{(p)}(w)$  et  $a^{(q)}(w)$ , respectivement, des rigidités des ressorts et des viscosités des amortisseurs telles que  $k^{(p)}(w) = b^{(p)}(w) \cdot k_{ref}$  et  $\eta^{(q)}(w) = a^{(q)}(w) \cdot \eta_{ref}$ . Par soucis de simplification, les fonctions de correction par rapport à la teneur en eau  $w$  sont linéaires, tableau IV.2.

Fonctions de correction en humidité	
Rigidité	Viscosité
$b^{(0)} = 1 - 0,009 \cdot (w - w_{ref})$	-
$b^{(1)} = 1 - 0,164 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(1)} = 1 - 0,177 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(2)} = 1 - 0,007 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(2)} = 1 - 0,146 \cdot (w - w_{ref})$
$b^{(3)} = 1 - 0,120 \cdot (w - w_{ref})$	$a^{(3)} = 1 - 0,220 \cdot (w - w_{ref})$

Tableau IV.2 – Fonctions de correction en humidité des paramètres rhéologiques

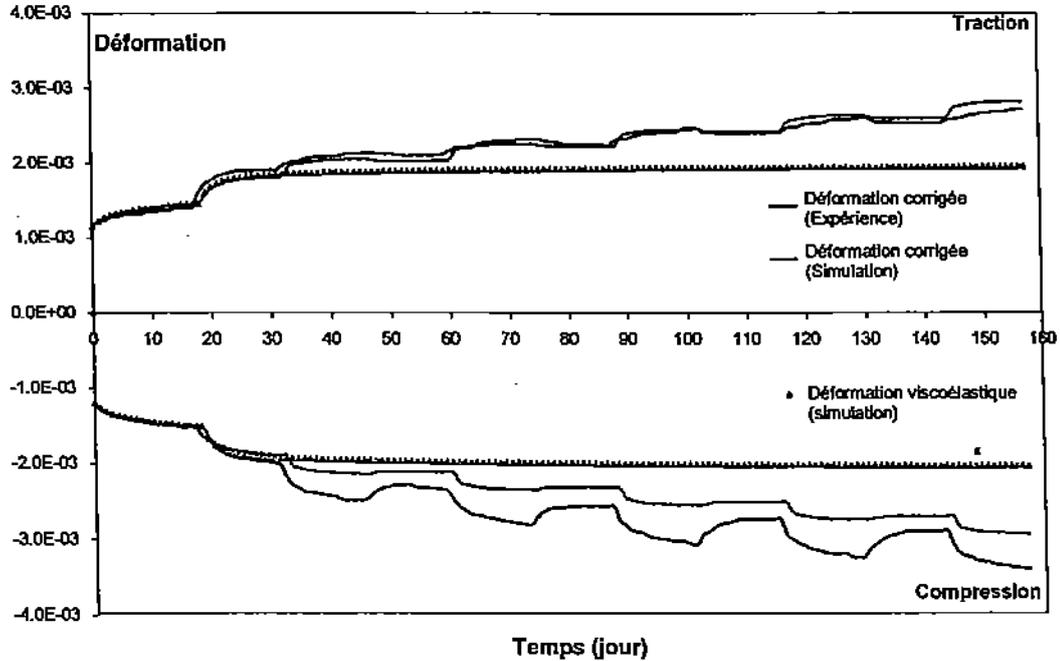


Figure IV.10 – Simulation des déformations corrigées et des déformations viscoélastiques sur les faces extrêmes tendues et comprimées.

Le coefficient de retrait-gonflement libre longitudinal est obtenu par Bengston sur une éprouvette jumelle et vaut  $\alpha_L = 4,65 \cdot 10^{-5}$ . En isolant la partie non viscoélastique sur la déformation de traction de la face tendue, on identifie les paramètres  $m_H = -1 \cdot 10^{-2}$  et  $m_S = -5 \cdot 10^{-3}$ . La figure IV.10 présente les résultats expérimentaux et numériques en terme de déformation corrigée. On observe un bon comportement du modèle en traction. On note par contre des différences visibles en compression laissant supposer une non linéarité matérielle. Cependant, l'évolution de la déformation viscoélastique donnée par le modèle paraît donner de bons résultats en regard de la phase de fluage initiale et à la première humidification. Il semblerait donc que la non linéarité se porterait plus sur le couplage hydro-mécanique que sur la viscoélasticité. La déformation totale simulée est présentée à la figure IV.11.

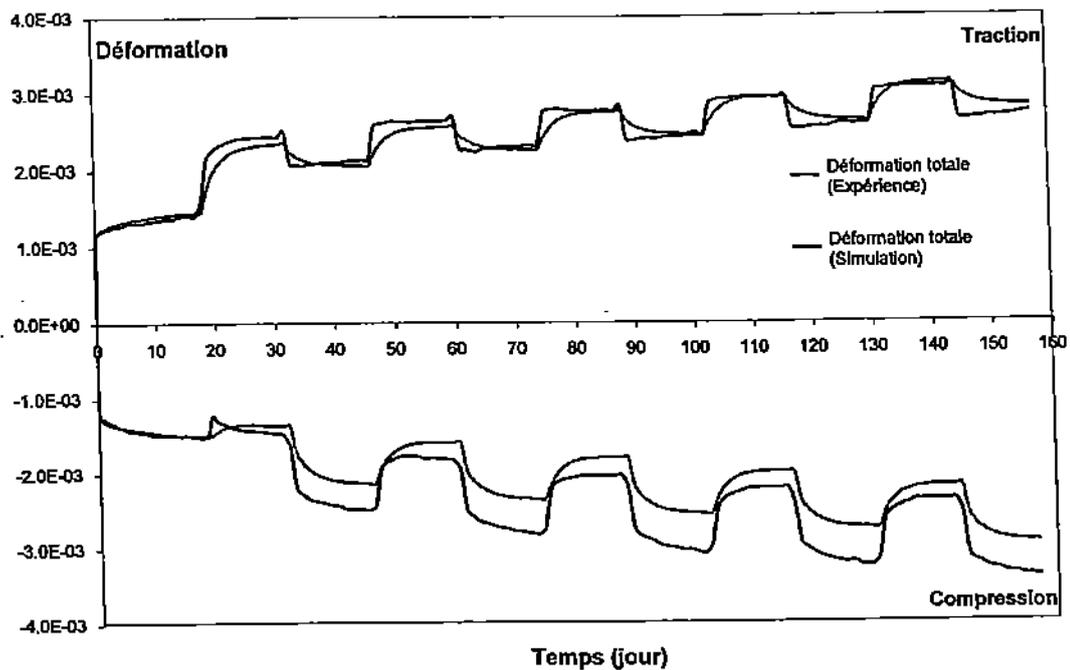


Figure IV.11 – Simulation des déformations totales sur les faces extrêmes tendues et comprimées.

On observe que la différence de comportement en traction et en compression se répercute naturellement sur la déformation totale. Egalement, que ce soit dans les zones tendues ou comprimées, on observe des variations expérimentales plus rapides que celles obtenues par le modèle. Ces variations induites principalement par le retrait-gonflement, peuvent provenir, d'une part, d'un coefficient de diffusion mal adapté et, d'une part, d'une instabilité moléculaire lors des cycles hydriques. Egalement, nous pouvons remettre en cause le modèle de diffusion unidirectionnel employé dans le plan de la poutre. En effet, nous ne considérons que les surfaces d'échange supérieures et inférieures. En réalité, les échanges hydriques se font également sur les faces avant et arrière. Enfin, le calcul de la flèche, figure IV.12 et montre naturellement un écart significatif avec l'expérience de l'ordre de 20% marqué essentiellement par le couplage mécano-sorptif.

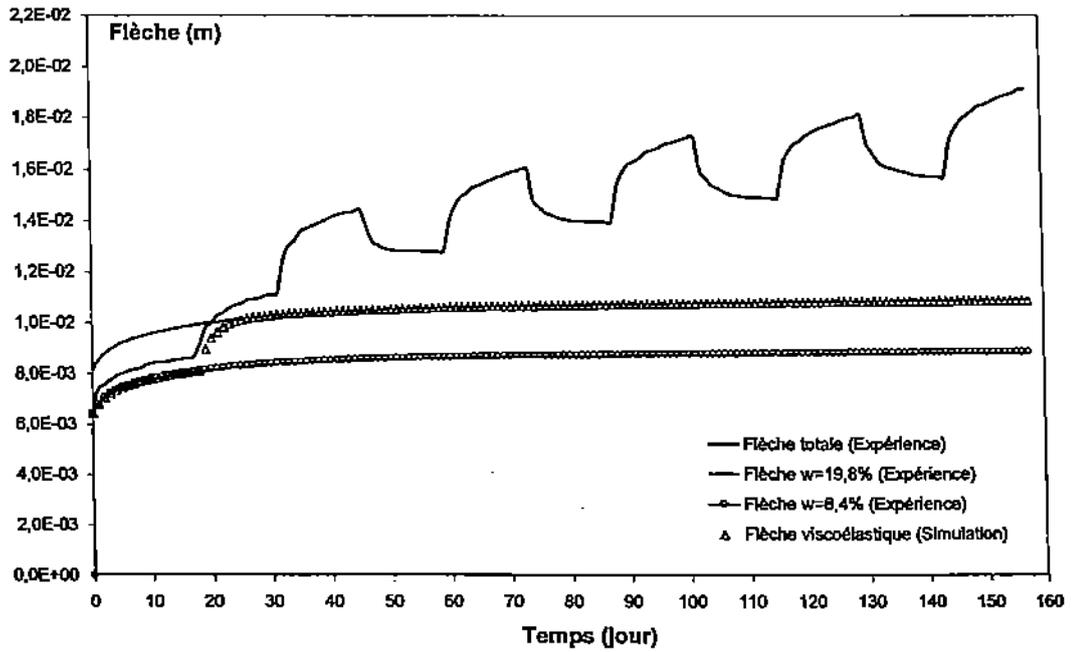


Figure IV.12 – Simulation de la partie viscoélastique de la flèche.

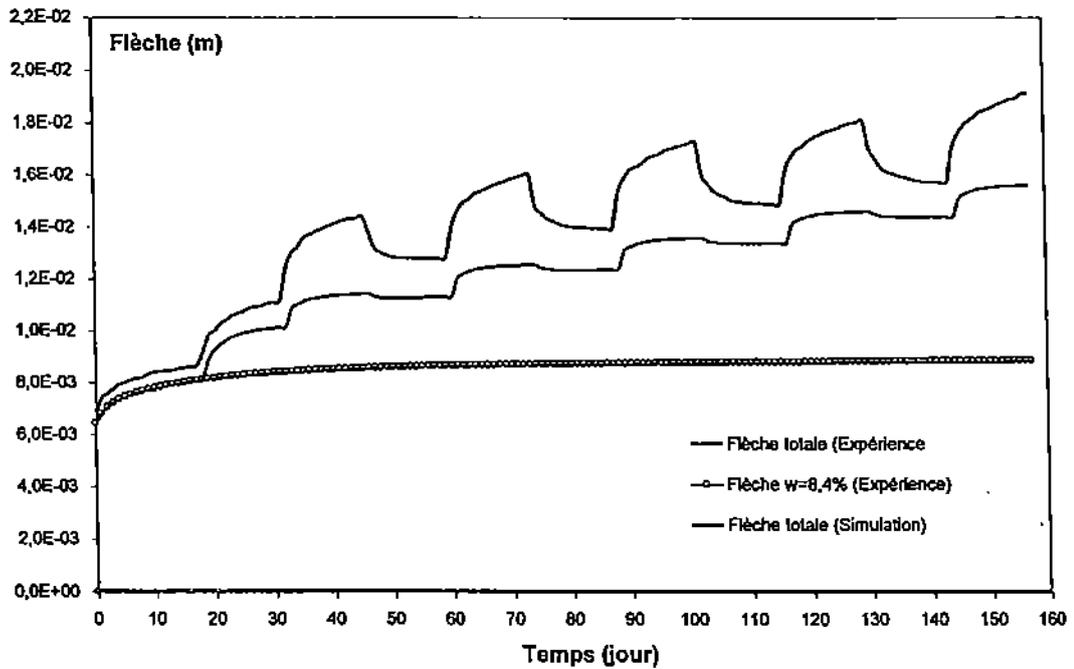


Figure IV.13 – Simulation de la flèche totale.

## IV.5 Conclusion

Cette simulation est une première tentative du passage de l'échelle du matériau à un élément plus massif. Actuellement, le modèle n'intègre pas les effets d'échelle. De plus, il est observé, ce qui est généralement le cas, un comportement différent pour les fibres tendues et comprimées. Le modèle proposé ne permet pas d'introduire cette non-linéarité matérielle. Une solution intermédiaire pourrait être une simulation multicouche en effectuant une discrétisation distincte de la partie supérieure comprimée et inférieure tendue, en faisant l'hypothèse que la fibre neutre matérielle ne s'éloigne pas de trop de la fibre neutre géométrique. Dans ce cas, la procédure implantée dans CAST3M nous permettrait d'appliquer des propriétés mécaniques distinctes pour chaque sous domaine et il nous serait possible d'effectuer une simulation plus exacte dans les zones comprimées et tendues. De plus, nous avons employé un modèle de transfert uni-directionnel. La simulation pouvant être bi-directionnelle, il serait souhaitable d'effectuer une simulation de transfert dans la section transversale de la poutre et de généraliser l'histoire de son humidité interne sur toute la longueur de l'élément. Enfin, il est primordiale de coupler l'effet des champs mécaniques (la déformation par exemple) sur les coefficients de diffusion et sur les isothermes de sorption en prenant en compte les hystérésis observées lors des cycles d'humidité.



# Conclusions et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire une modélisation du fluage du bois en environnement variable. Elle s'appuie sur la modélisation du comportement viscoélastique linéaire vieillissant du bois par un modèle de Kelvin-Voigt généralisé dépendant de l'humidité, de son histoire et du comportement non viscoélastique (retrait-gonflement libre et accumulation des déformations à chaque cycle d'humidité) par le modèle de Ranta-Maunus.

Dans un premier temps, nous avons mis en place un modèle numérique du comportement viscoélastique vieillissant du bois en environnement variable en accord avec les principes de la thermodynamique. Nous avons alors isolé les déformations non viscoélastiques (retrait-gonflement et mécano-sorption) et utilisé un modèle de type Ranta-Maunus pour les représenter. Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé caractérisé, par des paramètres rhéologiques vieillissants et dépendants du niveau et de l'histoire de l'humidité, est associé au modèle de retrait-gonflement sous contrainte de Ranta-Maunus. Le modèle global est implanté dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M et vérifié numériquement.

Nous avons ensuite entrepris des validations expérimentales du modèle avec des essais de traction uniaxiaux à l'échelle mésoscopique du matériau sur des éprouvettes de petites dimensions. L'utilisation de ces éprouvettes a permis une variation homogène et une stabilité rapide de la teneur en eau.

Enfin, nous avons modélisé le fluage d'une poutre de structure soumise à des variations d'humidité relative ambiante à partir du modèle développé à l'échelle mésoscopique. Ce dernier est couplé à un modèle de transfert hydrique et thermique permettant de connaître les champs de teneur en eau et de température dans la poutre.

## I Modélisation à l'échelle mésoscopique

Le modèle décrit bien les faits caractéristiques du phénomène mécano-sorptif que sont les accélérations instantanées de la déformation lors du fluage et de la recouvrance à la première humidification ou lorsque l'humidité jamais atteinte est dépassée. Les variations brusques des déformations sont, en partie, prises en compte par le ressort isolé et par le modèle de retrait-gonflement. La partie non viscoélastique, modélisée par le modèle de type Ranta-Maunus, dépend du sens de variation de l'humidité (sorption ou désorption). Une partie des déformations non réversibles observées à la recouvrance est due, d'une part, à la non linéarité matérielle et, d'autre part, aux déformations non viscoélastiques accumulées lors des cycles d'humidité.

Le modèle de Kelvin-Voigt prend en compte le vieillissement par transfert hydrique (variations des propriétés mécaniques avec le niveau d'humidité) via les paramètres rhéologiques qui dépendent du niveau actuel de l'humidité, ce qui n'est pas le cas pour le vieillissement par relaxation structurale (influence du temps de vieillissement). En effet, le comportement ne dépend pas seulement du niveau d'humidité mais aussi du temps pendant lequel le matériau est resté dans un état donné [NAV 02]. Le modèle viscoélastique que nous avons développé tient compte de

l'effet de l'histoire de l'humidité à travers l'évolution des rigidités (humidité maximum, sorption, désorption).

Une difficulté de la modélisation est le découplage des différents phénomènes durant le processus de fluage. En effet, la partition des déformations généralement employée est basée sur une interprétation expérimentale qui peut quelquefois manquer d'objectivité. Dans notre travail, nous avons opté pour un faible couplage entre le comportement viscoélastique vieillissant et le retrait-gonflement. Dans ce cas, si il y a lieu de modéliser une relaxation hydrique apparente (influence d'un arrêt prolongé des cycles hydriques avant de nouveaux cycles) [NAV 02], il manque à notre modèle un couplage plus fort entre les propriétés de relaxation propres à la viscoélasticité et au retrait-gonflement sous contrainte.

Enfin, l'ensemble de la validation expérimentale suppose une connaissance totale de l'état hydrique dans le matériau tout le long de l'essai, et ce, à partir des cycles hydriques sur l'éprouvette non chargée. Avec cette approche, nous occultons totalement un couplage possible entre l'humidité interne et l'état mécanique. Or, il se pourrait que les propriétés de diffusion et surtout de l'équilibre hydrique soient dépendants de l'état de déformation. Afin de préciser ces incertitudes, il est nécessaire d'élaborer un dispositif expérimental permettant de suivre l'évolution de la teneur en eau dans l'éprouvette chargée. Le modèle peut être complété en introduisant les effets de l'instabilité moléculaire au début des phases de vieillissement après absorption ou désorption correspondant à des états de non équilibre. A l'instar des modélisations du fluage des polymères vieillissants, le temps de vieillissement serait donc un paramètre à considérer. Le modèle de Ranta-Maunus que nous avons employé considère seulement l'amplitude et le sens des variations de l'humidité (absorption ou désorption) sur l'accumulation des déformations, mais reste transparent sur l'influence du temps de vieillissement (ou du temps où le matériau est dans un état donnée). De plus, le développement d'un modèle non linéaire à la fois sur le comportement viscoélastique et mécano-sorptif est primordial dans la perspective de la simulation d'un essai de structure combinant plusieurs sollicitation.

## II Modélisation à l'échelle de la structure

Nous avons ensuite employé le modèle mécanique développé à l'échelle mésoscopique pour simuler le comportement en flexion d'une poutre de structure. Outre la question récurrente de l'hétérogénéité du matériau, le passage à l'échelle de la structure impose de prendre en considération le processus de diffusion hydrique. Nous avons donc implanté dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M, un modèle incrémental de transfert de masse et de chaleur [BON 91], [LAS 00] couplé au modèle mécanique. Le modèle permet de prendre en compte les effets représentatifs d'une diffusion orthotrope, le couplage mécanique sur les tenseurs de diffusivité, le couplage entre les transferts hydriques et thermiques et l'hystérésis de sorption au niveau des conditions aux limites de types convectives. Cependant, le manque d'information sur les propriétés de diffusion, propre à l'essai simulé, ne nous permet pas d'exploiter au maximum les capacités du modèle. Ainsi, les résultats obtenus montrent une différence entre l'expérience et la simulation du fait des hypothèses prises dans la modélisation (comportement linéaire, simulation mécanique bi-dimensionnelle, diffusion hydrique unidirectionnelle dans le sens tangentiel, effets mécaniques négligés sur la sorption). Egalement, les résultats expérimentaux mettent en évidence un comportement viscoélastique différent en compression et en traction. Cette différence est connue vis à vis des propriétés élastiques et est largement amplifiée lors de la phase de fluage. Cette différence remet donc en cause l'hypothèse de linéarité matérielle et oblige, dans un premier temps, de traiter par deux modèles distincts les zones tendues et comprimées en faisant abstraction du déplacement dans le temps de l'axe neutre mécanique. De plus, le modèle a été validé sous des

sollicitations de traction. Le passage à une sollicitation de flexion demanderait une validation intermédiaire en compression. Enfin, l'hypothèse simplificatrice d'une modélisation mécanique bi-dimensionnelle couplée à un modèle de diffusion dans le sens tangentielle est trop éloignée de la réalité. Il est nécessaire d'effectuer un calcul de diffusion sur la section transversale (plan R-T) de la poutre afin de calculer une humidité interne moyenne sur des sous-domaines découpés sur la hauteur et de reconstruire dans le plan (L-T) un gradient d'humidité équivalent, figure IV.14.

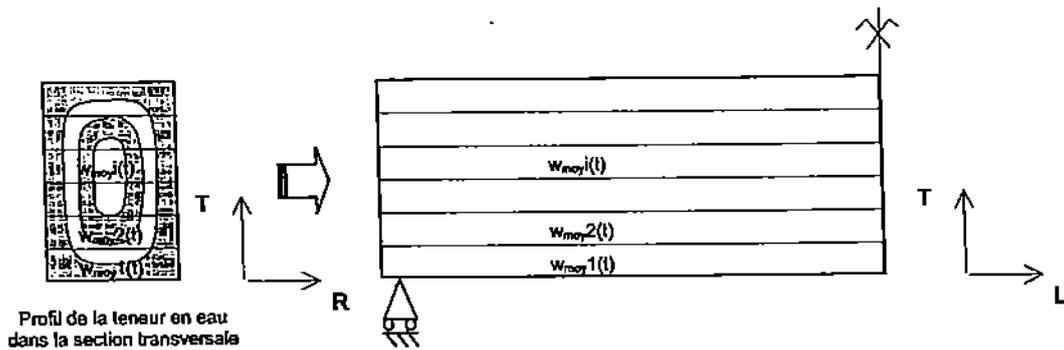


Figure IV.14 -- Prise en compte de la diffusion par une modélisation multi-couche bi-dimensionnelle.

Il serait ainsi possible de prendre mieux en considération l'orthotropie de la diffusion hydrique. Cependant, l'idéal serait de proposer une modélisation tri-dimensionnelle de la diffusion et du comportement mécanique. Celle-ci requiert une très grande capacité de calcul. Dans ce contexte, il est nécessaire de proposer une modélisation simplifiée afin d'être applicable à l'échelle de la structure. Ce modèle pourrait regrouper l'effet de diffusion et le comportement viscoélastique dans un "super-élément" afin d'être utilisé dans une discrétisation de type barre et plaque, par exemple.



## Annexe A

# Complément de vérifications numériques

Nous complétons ici les vérifications numériques du modèle viscoélastique vieillissant et du retrait-gonflement implanté dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M et présenté au chapitre 2.

### A.1 Fluage en humidité variable sans variation des caractéristiques mécaniques

Afin de vérifier le terme de retrait-gonflement dans la formulation incrémentale, on impose une contrainte de traction constante  $P_0=10$  MPa et une évolution linéaire de la teneur en eau telle que :

$$w(t) = 0,01 t + 0,12 \quad [\text{A.1}]$$

En outre, on suppose que les caractéristiques mécaniques ne varient pas dans le temps. Le vecteur colonne de la déformation totale est donnée par la relation [A.2] :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) + (\underline{\underline{\alpha}} + \mathbf{m} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.2}]$$

La forme tensorielle de la déformation totale  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{LL}(t) \\ \varepsilon_{TT}(t) \\ \gamma_{LT}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_L (w(t) - w(0)) \\ \alpha_T (w(t) - w(0)) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_L (w(t) - w(0)) & 0 & 0 \\ 0 & m_T (w(t) - w(0)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} \quad [\text{A.3}]$$

avec

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} = J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.4}]$$

et

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{1}{11000} + \frac{1}{10000} (1 - e^{-t}) \quad [\text{MPa}^{-1}] \quad [\text{A.5}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.1.

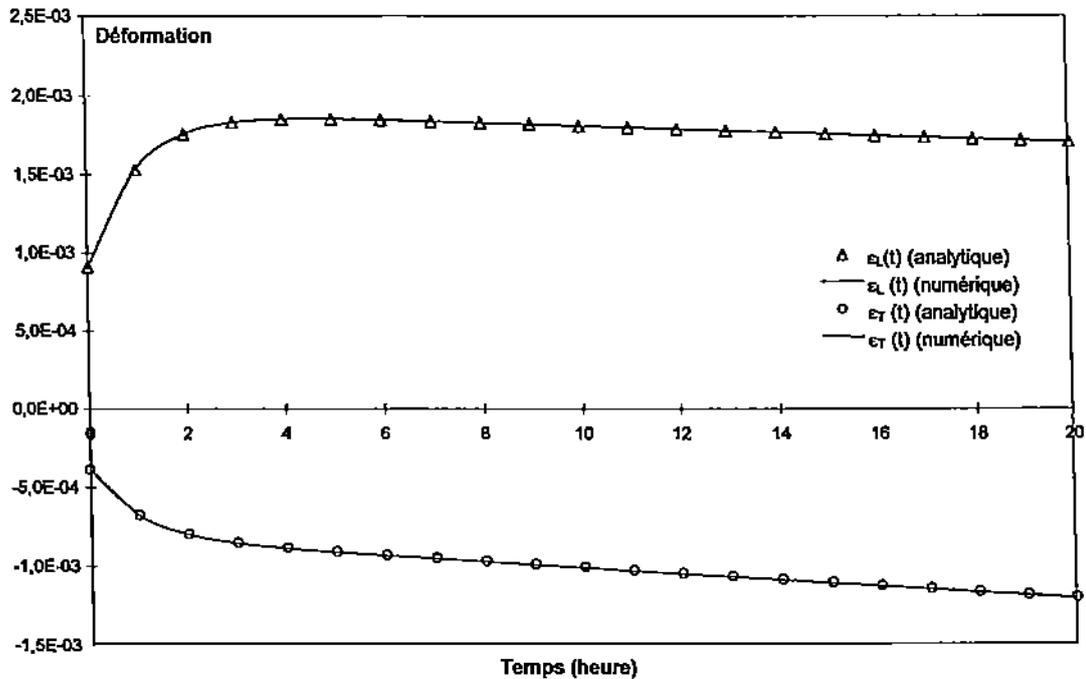


Figure A.1 – Fluage sous une humidité variable.

## A.2 Fluage assouplissant sans temps réduit et humidité croissante

Afin de vérifier le terme  $\bar{\varepsilon}$  dans le cas d'un matériau assouplissant où  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_a$ , on impose une évolution linéaire et croissante de  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  telle que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = 0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.6}]$$

Par ailleurs, on veut que le temps réduit soit égal au temps réel. On pose alors  $a(t) = \frac{1}{b(t)}$ . Dans le cas du bois, une humidification entraîne un assouplissement. On impose donc une variation linéaire et croissante de la teneur en eau telle que :

$$w(t) = 0,01 t + 0,12 \quad [\text{A.7}]$$

La déformation totale est donnée par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) + \left( \underline{\underline{\alpha}} + m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) \right) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.8}]$$

avec

$$\underline{\varepsilon}_{ve}(t) = \mathbf{J}(t, 0) : \underline{\sigma}_0 = \mathbf{J}_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.9}]$$

Dans le cas d'un comportement assouplissant, la fonction de fluage s'écrit :

$$\mathbf{J}_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(t)k_{refLL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{\theta}^t \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu} \frac{1}{a(\theta)\eta_{refLL}^{(1)}} d\theta \quad [\text{A.10}]$$

On en déduit  $\mathbf{J}_{LL}(t, 0)$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{LL}(t, 0) &= \frac{0,001 t + 1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{\eta_{refLL}^{(1)}} \int_0^t (0,001\theta + 1) e^{-\lambda_{refLL}^{(1)}(t-\theta)} d\theta \\ \mathbf{J}_{LL}(t, 0) &= \frac{0,001 t + 1}{11000} + \frac{0,001 t}{10000} + \frac{1 - 0,001 t}{10000} (1 - e^{-t}) \end{aligned} \quad [\text{A.11}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$ , obtenues par une résolution analytique et celles données par la procédure, sont représentées à la figure A.2.

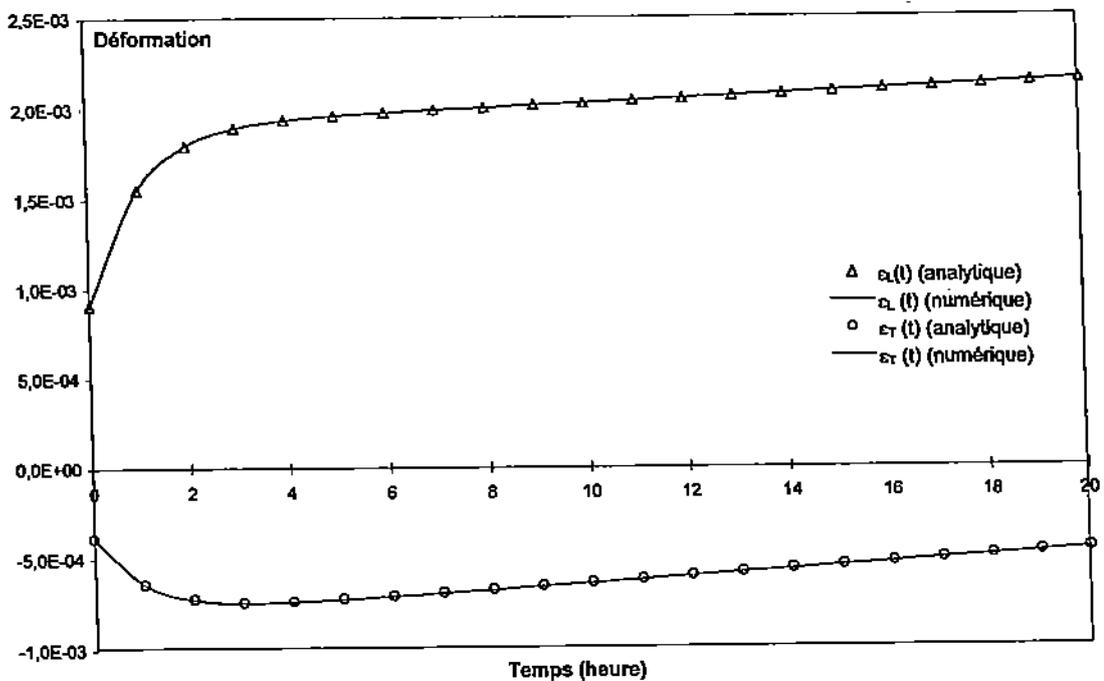


Figure A.2 - Fluage assouplissant sans temps réduit.

### A.3 Fluage rigidifiant sans temps réduit sous une humidité décroissante

On vérifie le terme  $\bar{\varepsilon}$  dans le cas d'un matériau rigidifiant où  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$ . On impose ainsi une évolution linéaire et décroissante de  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  telle que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = -0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.12}]$$

On veut toujours un temps réduit égal au temps réel alors on pose  $a(t) = \frac{1}{b(t)}$ . Une diminution de la teneur en eau du bois entraîne un gain de rigidité du matériau. On impose ainsi un champ uniforme de la teneur en eau présentant une évolution linéaire et décroissante telle que :

$$w(t) = -0,01t + 0,3 \quad [\text{A.13}]$$

La déformation totale est donnée par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) + (\underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.14}]$$

avec

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) = \mathbf{J}(t, 0) : \underline{\underline{\sigma}}_0 = \mathbf{J}_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.15}]$$

Dans le cas d'un comportement rigidifiant, la fonction de fluage est définie par :

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(\tau)k_{refLL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu} \frac{1}{a(\vartheta)\eta_{refLL}^{(1)}} d\vartheta \quad [\text{A.16}]$$

D'où,

$$J_{LL}(t, 0) = \frac{1}{11000} - \frac{0,001 t}{10000} + \frac{1 - 0,001 t}{10000} (1 - e^{-t}) \quad [\text{MPa}^{-1}] \quad [\text{A.17}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.3.

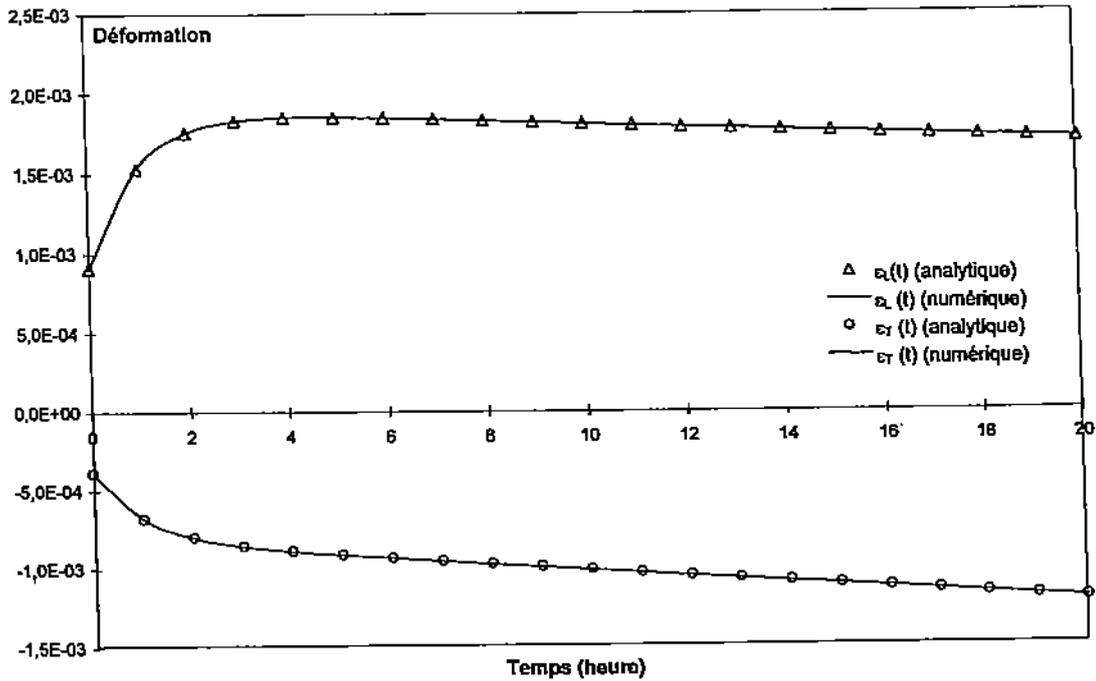


Figure A.3 – Fluage rigidifiant sans temps réduit.

#### A.4 Essai sous une contrainte et une humidité variables et sans variation des caractéristiques mécaniques

On vérifie maintenant les termes de retrait-gonflement dans la formulation incrémentale en imposant une variation linéaire du chargement et de la teneur en eau telle que :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [\text{A.18}]$$

Le champ de teneur en eau est uniforme et présente une évolution linéaire et croissante telle que :

$$w(t) = 0,01 t + 0,12 \quad [\text{A.19}]$$

De plus, les caractéristiques mécaniques sont prises constantes dans le temps. Donc, on obtient le vecteur colonne de la déformation totale de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(t) = \underline{\underline{\epsilon}}_{ve}(t) + \left( \underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{ve}(t) \right) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.20}]$$

Ou encore

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{LL}(t) \\ \epsilon_{TT}(t) \\ \gamma_{LT}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{veLL}(t) \\ \epsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_L (w(t) - w(0)) \\ \alpha_T (w(t) - w(0)) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} m_L \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} & 0 & 0 \\ 0 & m_T \frac{\partial w(\tau)}{\partial \tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{veLL}(\tau) \\ \epsilon_{veTT}(\tau) \\ \gamma_{veLT}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad [\text{A.21}]$$

avec

$$\underline{\varepsilon}_{ve}(t) = \int_{0+}^t \mathbf{J}(t, \tau) : \frac{\partial \underline{\sigma}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \mathbf{J}(t, 0) : \underline{\sigma}(0) \quad [\text{A.22}]$$

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{ve}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \mathbf{J}_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &+ \mathbf{J}_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [\text{A.23}]$$

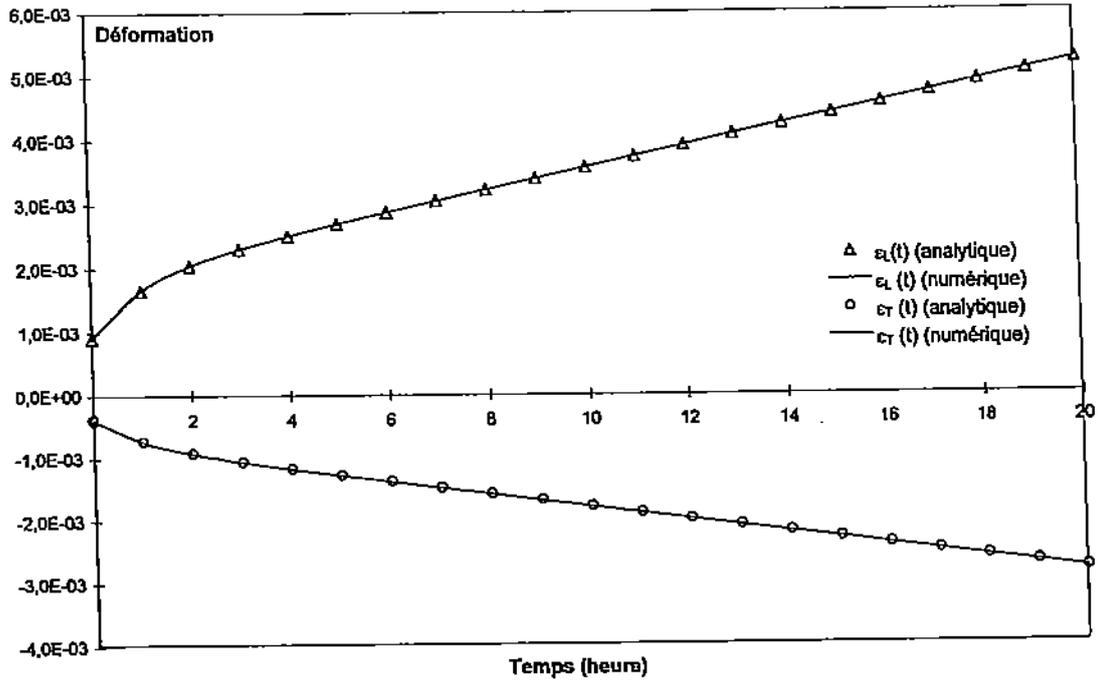
et

$$\mathbf{J}_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)}(t-\tau)} \right) \quad [\text{A.24}]$$

On en déduit l'expression analytique de  $\varepsilon_{veLL}(t)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{LL}(t) &= P_1 \left[ \frac{t}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{t}{k_{refLL}^{(1)}} - \frac{1}{\lambda_{refLL}^{(1)} k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t} \right) \right] \\ &+ P_0 \left[ \frac{1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{refLL}^{(1)}} \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t} \right) \right] \end{aligned} \quad [\text{A.25}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.4.

Figure A.4 – Essai à contrainte  $\sigma(t)$  linéaire et humidité variable.

### A.5 Essai à contrainte variable et humidité croissante avec un assouplissement sans temps réduit

Afin de vérifier le terme  $M$  dans le cas d'un matériau assouplissant où  $M = M_a$ , on prend une évolution linéaire et croissante de  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  telle que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = 0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.26}]$$

On pose  $a(t) = \frac{1}{b(t)}$  afin d'éliminer le temps réduit. Par ailleurs, le chargement et la teneur en eau varient linéairement de la façon suivante :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [\text{A.27}]$$

et

$$w(t) = 0,01t + 0.12 \quad [\text{A.28}]$$

La déformation totale est donnée par la relation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) + (\underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.29}]$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &+ J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [\text{A.30}]$$

et

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(t)k_{refLL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t \frac{e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{\vartheta}^t \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu}}{a(\vartheta)\eta_{refLL}^{(1)}} d\vartheta \quad [A.31]$$

On en déduit l'expression analytique de  $\varepsilon_{veLL}(t)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{veLL}(t) = & \left(1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t}\right) \left[ -\frac{(P_1 c_0 + P_0 c_1)}{\lambda_{refLL}^{(1)} k_{refLL}^{(1)}} + \frac{2P_1 c_1}{k_{refLL}^{(1)} (\lambda_{refLL}^{(1)})^2} + \frac{P_0 c_0}{k_{refLL}^{(1)}} \right] \\ & + \frac{P_0 c_0}{k_{refLL}^{(0)}} - \frac{2P_1 c_1 t}{k_{refLL}^{(1)}} + \left( \frac{1}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{1}{k_{refLL}^{(1)}} \right) \left[ (P_1 c_0 + P_0 c_1) t + (P_1 c_1) t^2 \right] \end{aligned} \quad [A.32]$$

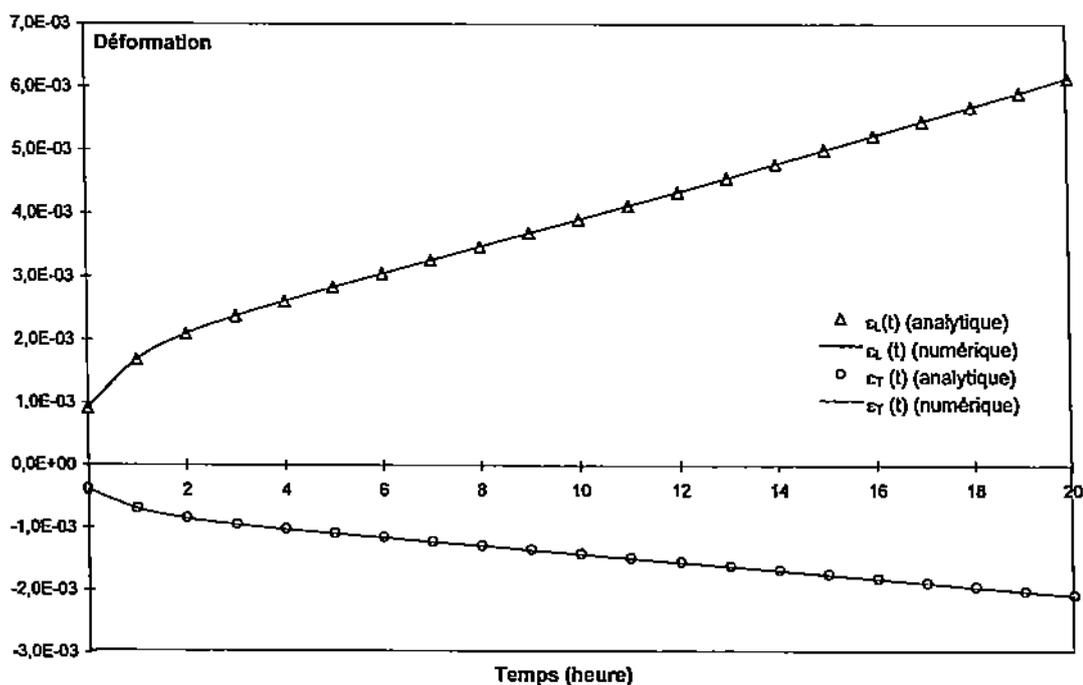
Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.5 :

Figure A.5 – Essai à contrainte linéaire et un assouplissement sans temps réduit.

## A.6 Essai à contrainte variable et humidité décroissante avec une rigidification sans temps réduit

Comme ci-dessus, pour vérifier le calcul de  $M$  dans le cas d'un matériau rigidifiant avec  $M = M_r$ , on prend une évolution linéaire et décroissante de  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  telle que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = -0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.33}]$$

Le temps réduit étant égal au temps réel, on pose  $a(t) = \frac{1}{b(t)}$ . Par ailleurs, on impose une variation linéaire du chargement et de la teneur en eau telle que :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [\text{A.34}]$$

et

$$w(t) = -0,01t + 0,3 \quad [\text{A.35}]$$

On obtient la déformation totale suivante :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{\varepsilon}_{ve}(t) + (\underline{\alpha} + \mathbf{m} : \underline{\varepsilon}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.36}]$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{ve}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &+ J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [\text{A.37}]$$

et

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(\tau)k_{refLL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t \frac{e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu}}{a(\vartheta)\eta_{refLL}^{(1)}} d\vartheta \quad [\text{A.38}]$$

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{c_1 \tau + c_0}{11000} + \frac{1}{10000} \int_{\tau}^t e^{-(\vartheta - \tau)} (c_1 \vartheta + c_0) d\vartheta \quad [\text{A.39}]$$

On en déduit l'expression analytique de  $\varepsilon_{veLL}(t)$  telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{veLL}(t) &= \left[ \frac{(P_0 c_1 - P_1 c_0)}{\lambda_{refLL}^{(1)} k_{refLL}^{(1)}} + P_1 c_1 \left( -\frac{t}{k_{refLL}^{(1)} \lambda_{refLL}^{(1)}} - \frac{1}{k_{refLL}^{(1)} (\lambda_{refLL}^{(1)})^2} \right) + \frac{P_0 c_0}{k_{refLL}^{(1)}} \right] \\ &\times \left( 1 - e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t} \right) - P_0 c_1 \left( \frac{t e^{-\lambda_{refLL}^{(1)} t}}{k_{refLL}^{(1)}} \right) \\ &+ \frac{P_1 c_1 t^2}{2k_{refLL}^{(0)}} + \frac{P_0 c_0}{k_{refLL}^{(0)}} + P_1 c_1 \left( \frac{t^2}{2k_{refLL}^{(1)}} + \frac{t}{k_{refLL}^{(1)} \lambda_{refLL}^{(1)}} \right) + P_1 c_0 \left( \frac{t}{k_{refLL}^{(0)}} + \frac{t}{k_{refLL}^{(1)}} \right) \end{aligned} \quad [\text{A.40}]$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.6.

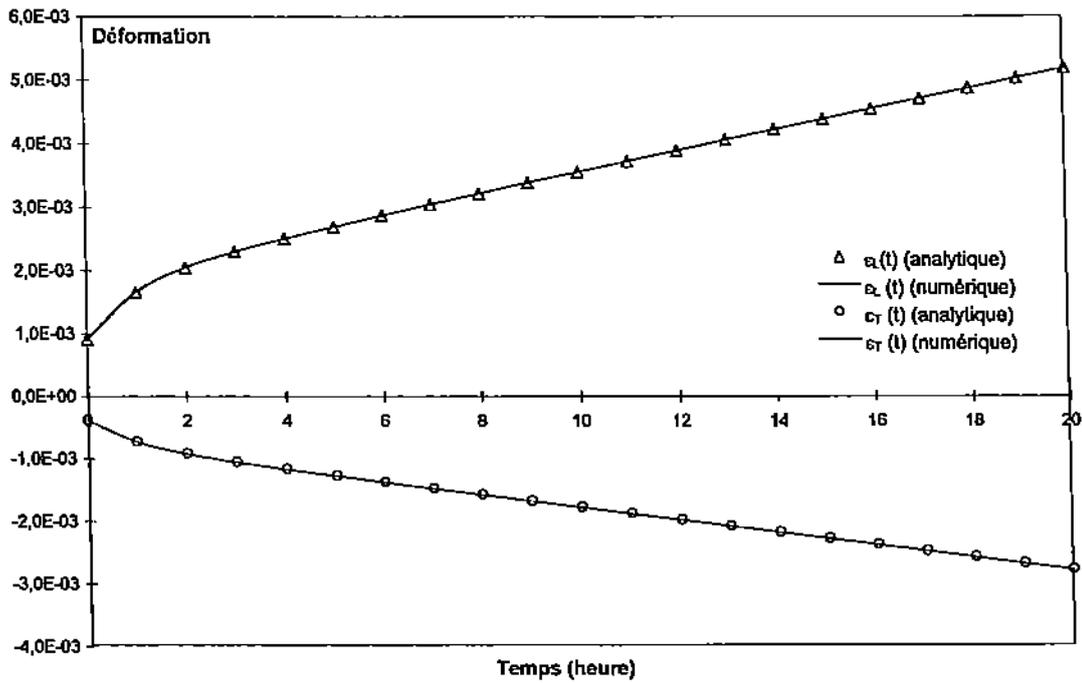


Figure A.6 – Essai à contrainte linéaire et une rigidification sans temps réduit.

### A.7 Essai à contrainte variable et humidité croissante avec un assouplissement et un temps réduit

On complète la vérification de  $M = M_a$  dans le cas d'un matériau assouplissant en faisant varier le temps réduit en posant  $a(t) = 1$  et  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  tel que :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = 0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.41}]$$

Le chargement et la teneur en eau varient linéairement tels que :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [\text{A.42}]$$

et

$$w(t) = 0,01t + 0,12 \quad [\text{A.43}]$$

La déformation totale est donné par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) + (\underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{m}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.44}]$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_{ve}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &+ J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [\text{A.45}]$$

et

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(t)k_{\text{refLL}}^{(0)}} + \int_{\tau}^t \frac{e^{-\lambda_{\text{refLL}}^{(1)} \int_{\vartheta}^t \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu}}{a(\vartheta)\eta_{\text{refLL}}^{(1)}} d\vartheta \quad [\text{A.46}]$$

L'expression analytique de  $\varepsilon_{\text{veLL}}(t)$  est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{veLL}}(t) = & \left\{ \frac{t}{k_{\text{refLL}}^{(0)}} + \frac{t}{k_{\text{refLL}}^{(1)}} - \frac{(c_1 t + c_0)^{-\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1}}}{c_1 k_{\text{refLL}}^{(1)} \left( \frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1 \right)} \left[ (c_1 t + c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1} - (c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1} \right] \right\} \\ & \times (P_1 c_0 + P_0 c_1) + P_0 c_0 \left\{ \frac{1}{k_{\text{refLL}}^{(0)}} + \frac{1}{k_{\text{refLL}}^{(1)}} \left[ 1 - \left( \frac{c_1 t + c_0}{c_0} \right)^{-\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1}} \right] \right\} \\ & + 2P_1 c_1 \left\{ \frac{\frac{t^2}{2k_{\text{refLL}}^{(0)}} + \frac{t^2}{2k_{\text{refLL}}^{(1)}} - \frac{(c_1 t + c_0)^{-\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1}}}{c_1^2 k_{\text{refLL}}^{(1)} \left( \frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 2 \right)} \left[ (c_1 t + c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 2} - (c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 2} \right]}{\right.} \\ & \left. + \frac{c_0(c_1 t + c_0)^{-\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1}}}{c_1^2 k_{\text{refLL}}^{(1)} \left( \frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1 \right)} \left[ (c_1 t + c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1} - (c_0)^{\frac{\lambda_{\text{refLL}}^{(1)}}{c_1} + 1} \right] \right\} \quad [\text{A.47}] \end{aligned}$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.7.

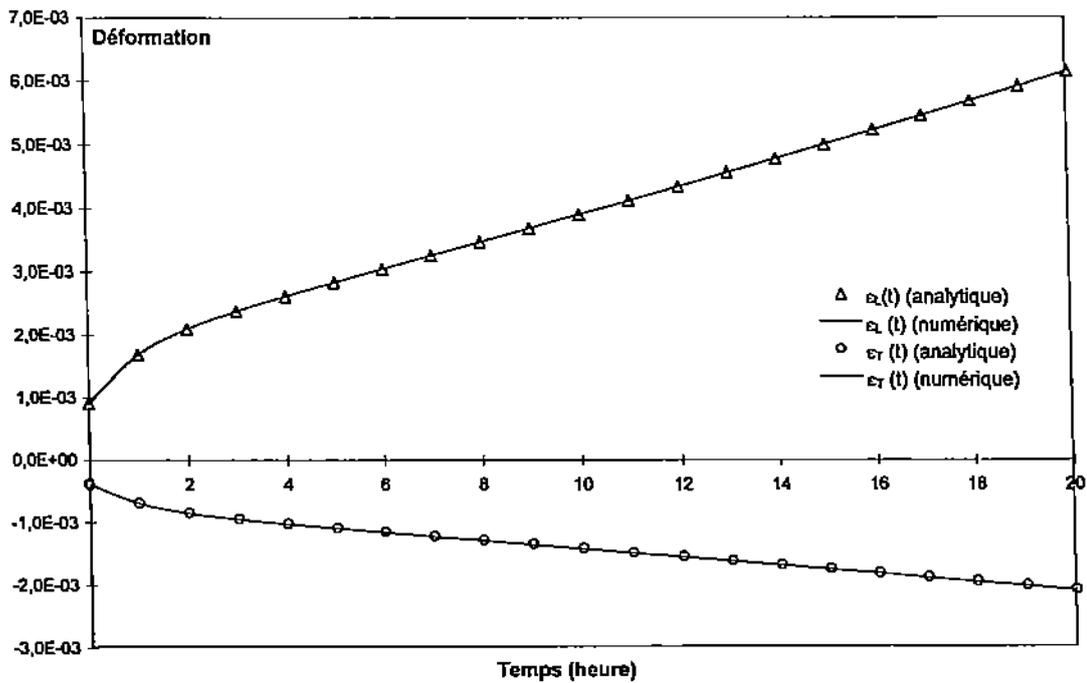


Figure A.7 – Essai à contrainte linéaire et un assouplissement avec temps réduit.

### A.8 Essai à contrainte variable et humidité décroissante avec une rigidification avec temps réduit

On vérifie  $M = M_r$  dans le cas d'un matériau rigidifiant avec un temps réduit en posant  $a(t) = 1$  et en faisant évoluer  $c(t) = \frac{1}{b(t)}$  de la façon suivante :

$$c(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{avec} \quad c_1 = -0,001 \quad \text{et} \quad c_0 = 1 \quad [\text{A.48}]$$

Par ailleurs, on impose une variation linéaire du chargement et de la teneur en eau, telle que :

$$P(t) = P_1 t + P_0 \quad \text{avec} \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = 10 \quad [\text{A.49}]$$

et

$$w(t) = -0,01t + 0,3 \quad [\text{A.50}]$$

La déformation totale est donnée par la relation :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{\varepsilon}_{ve}(t) + (\underline{\alpha} + \mathbf{m} : \underline{\varepsilon}_{ve}(t)) (w(t) - w(0)) \quad [\text{A.51}]$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{ve}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{veLL}(t) \\ \varepsilon_{veTT}(t) \\ \gamma_{veLT}(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t J_{LL}(t, \tau) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ &+ J_{LL}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{LT} & 0 \\ -\nu_{LT} & \frac{E_{LL}}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{LL}}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{A.52}] \end{aligned}$$

et

$$J_{LL}(t, \tau) = \frac{1}{b(\tau)k_{re\text{f}LL}^{(0)}} + \int_{\tau}^t \frac{e^{-\lambda_{re\text{f}LL}^{(1)} \int_{\tau}^{\vartheta} \frac{b(\mu)}{a(\mu)} d\mu}}{a(\vartheta)\eta_{re\text{f}LL}^{(1)}} d\vartheta \quad [\text{A.53}]$$

On en déduit les expressions analytiques de  $\varepsilon_{veLL}(t)$ , telle que :

$$\varepsilon_{veLL}(t) = P_1 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1 t^2}{2k_{LL}^{(0)}} + \frac{c_0 t}{2k_{LL}^{(0)}} \\ & + \frac{1}{c_1 \eta_{LL}^{(1)} \left( -\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1 \right)} \left( \frac{(c_1 t + c_0)^{-\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1}}{c_1 k_{LL}^{(1)} \left( \frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1 \right)} \left( (c_1 t + c_0)^{\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1} - (c_0)^{\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1} \right) \right) \right\} \\ & + P_0 \left\{ \frac{c_0}{k_{LL}^{(0)}} + \frac{(c_0)^{\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1}}}{c_1 \eta_{LL}^{(1)} \left( -\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1 \right)} \left( (c_1 t + c_0)^{-\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1} - (c_0)^{-\frac{\lambda_{LL}^{(1)}}{c_1} + 1} \right) \right\} \quad [\text{A.54}] \end{aligned} \right.$$

Les déformations  $\varepsilon_{LL}(t)$  et  $\varepsilon_{TT}(t)$  sont représentées à la figure A.8.

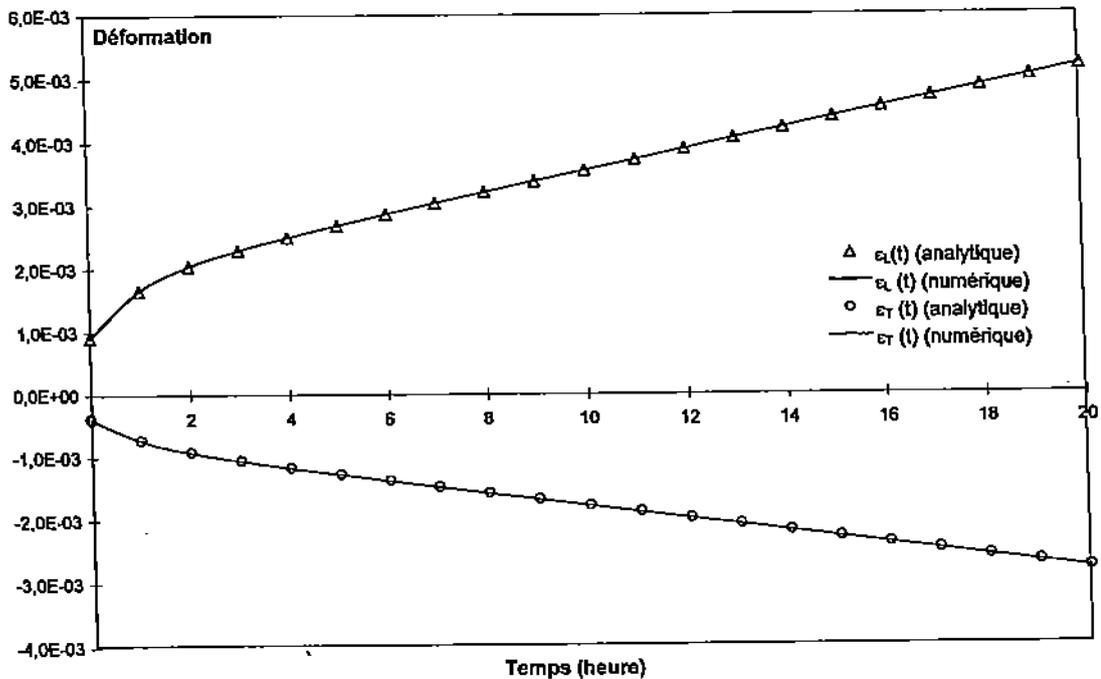


Figure A.8 – Essai à contrainte linéaire et une rigidification avec temps réduit.



# Bibliographie

- [AND 88] ANDRIAMITANTSOA L., « Approche ultrastructurale de la mécano-sorption sur le pin maritime », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1988.
- [ARM 60] ARMSTRONG L. D., KINGSTON R. S. T., « Effect of moisture changes on creep in wood », *Nature*, vol. 185, 1960, p. 862-863.
- [ARM 62] ARMSTRONG L. D., KINGSTON R. S. T., « Effect of moisture changes on the deformation of wood under stress », *Australian Journal of Applied Science*, vol. 13, n° 4, 1962, p. 257-276.
- [BAC 82] BACK E. L., SALMEN L., « Glass transitions of wood components hold implications for molding and pulping processes », *Tappi Journal*, vol. 65, n° 7, 1982.
- [BAZ 79] BAZANT Z. P., « Thermodynamics of solidifying or melting viscoelastic material », *Journal of The Engineering Mechanics Division*, vol. 105, n° EM6, 1979, p. 933-952.
- [BAZ 84] BAZANT Z. P., CHERN J. C., « Rate type concrete creep law with reduced time », *Journal of The Engineering Mechanics Division*, vol. 110, 1984, p. 329-340.
- [BAZ 85] BAZANT Z. P., « Constitutive equation of wood at variable humidity and temperature », *Wood Science and Technology*, vol. 19, 1985, p. 159-177.
- [BAZ 93] BAZANT Z. P., CAROL I., « Viscoelasticity with aging caused by solidifying of nonaging constituent », *Journal of The Engineering Mechanics Division*, vol. 119, n° 11, 1993, p. 2252-2269.
- [BAZ 99] BAZANT Z. P., HUET C., « Thermodynamic functions for ageing viscoelasticity : integral form without internal variables », *International Journal of Solids and Structures*, , n° 36, 1999, p. 3993-4016.
- [BEN 92] BENGTTSSON C., « Mechano-sorptive creep in wood- Experimental studies of the influence of material properties », PhD Thesis, Chalmers University - Göteborg, Sweden, 1992.
- [BON 91] BONNEAU P., « Modélisation du séchage d'un matériau hétérogène : application à un bois résineux », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1991.
- [CAR 87] CARIOU J. L., « Caractérisation d'un matériau viscoélastique anisotrope : le bois », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1987.
- [CAS 87] CASTERA P., « Modélisation du comportement d'une pièce de bois soumise à des gradients évolutifs d'humidité », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1987.
- [CHR 62] CHRISTENSEN G., « The use of small specimens for studying the effect of moisture content changes on the deformation of wood under load », *Australian Journal*

- of *Applied Science*, vol. 13, 1962, p. 242-256.
- [DUB 97] DUBOIS F., « Modélisation du comportement mécanique des milieux visco-élastiques fissurés : Application au matériau bois », Thèse de doctorat, Université de Limoges, 1997.
- [EUR 99] EUROCODES, *Eurocode 5*, CDROM AFNOR, 1999.
- [FRI 89] FRIDLEY K. J., TANG R. C., SOLTIS L. A., « Thermal effects on load duration behavior of lumber. Part I : effect of constant temperature », *Wood Fiber Science*, vol. 21, n° 4, 1989, p. 420-431.
- [FRI 90] FRIDLEY K. J., TANG R. C., SOLTIS L. A., « Thermal effects on load duration behavior of lumber. Part II : effect of cyclic temperature », *Wood Fiber Science*, vol. 22, n° 2, 1990, p. 240-216.
- [GEN 88] GENEVAUX J. M., GUITARD D., « Anisotropie du comportement différé : essai de fluage à température croissante d'un bois de peuplier », *Actes du Colloque Scientifique Européen du Groupement Scientifique Rhéologie du Bois*, Bordeaux, 8-9 juin 1988, Edition Morlier, p. 155-166.
- [GHA 95] GHAZLAN G., CAPERAA S., PETIT C., « An incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables », *International Journal of Numerical Method of Engineering*, vol. 38, 1995, p. 3315-3333.
- [GIB 65] GIBSON E. J., « Creep of wood : role of water and effect of a changing moisture content », *Nature*, vol. 4980, 1965, p. 213-215.
- [GRI 88] GRIL J., « Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure », Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1988.
- [GRO 76] GROSSMAN P. U. A., « Requirments of models that exhibits mechano-sorptive behaviour », *Wood Science and Technology*, vol. 10, 1976, p. 163-168.
- [HAB 01] HABEGER C. C., COFFIN D. W., HOJJATIE B., « Influence of humidity cycling parameters on the moisture-accelerated of polymeric fibers », *Journal of Polymer Science*, vol. 39, 2001, p. 2018-2062.
- [HAN 95] HANHIJARVI A., « Modelling of creep deformation mechanism in wood », Dissertation for the degree of technology, Espoo University, 1995.
- [HAN 98] HANHIJARVI A., HUNT D., « Experimental indication of interaction between viscoelastic and mechano-sorptive creep », *Wood Science and Technology*, vol. 32, 1998, p. 57-70.
- [HAN 00] HANHIJARVI A., « Advances in the knowledge of the influence of moisture changes on the long-term mechanical performance of timber structures », *Materials and Structures*, vol. 33, 2000, p. 43-49.
- [HAS 94] HASLACH H. W., « The mechanics of moisture accelarated tensile creep in paper », *Tappi Journal*, vol. 77, n° 10, 1994, p. 179-186.
- [HEA 64] HEARMON R., J. P., « Moisture content changes and creep of wood », *Forest Product Journal*, vol. 14, n° 8, 1964, p. 357-379.
- [HUE 88] HUET C., « Quelques aspects du comportement thermo-hygro-viscoélasticité du bois », *Actes du Colloque Scientifique Européen du Groupement Scientifique Rhéologie du Bois*, Bordeaux, 8-9 juin 1988, Edition Morlier, p. 103-118.
- [HUN 84] HUNT D., « Creep trajectories for beech during moisture changes under load »,

- Journal of Materials Science*, vol. 19, 1984, p. 1456-1467.
- [HUN 86] HUNT D., « The mechano-sorptive creep susceptibility of two softwoods and its relation to some other material properties », *Journal of Materials Science*, vol. 21, 1986, p. 2088-2096.
- [HUN 88] HUNT D., SHELTON C. F., « Linearity and non-linearity in mechano-sorptive creep of softwood in compression and its relation to some other material properties », *Wood Science and Technology*, vol. 22, 1988, p. 199-210.
- [HUN 89] HUNT D., SHELTON C. F., « Longitudinal moisture-shrinkage coefficients of softwood at the mechano-sorptive creep limit », *Journal of Materials Science*, vol. 23, 1989, p. 323-333.
- [HUN 94] HUNT D., « Present knowledge of mechano-sorptive creep of wood », *RILEM 8, Creep in timber structures*, Edition Morlier, 1994, p. 73-97.
- [HUN 96] HUNT D., GRIL J., « Evidence of physical ageing phenomenon in wood », *Journal of Materials Science Letters*, vol. 15, 1996, p. 80-82.
- [HUN 99] HUNT D., « A unified approach to creep of wood », *The Royal Society of London Academy*, vol. 455, 1999, p. 4077-4095.
- [IRU 90] IRUDAYARAJ J., K. H., I. S. R., « Non linear finite element analysis of coupled heat and mass transfer problems with an application to timber drying », *Drying Technology*, vol. 8, 1990, p. 731-749.
- [KEL 87] KELLEY S. S., RIALS T. G., GLASSER W. G., « Relaxation behaviour of the amorphous components of wood », *Journal of Materials Science*, vol. 22, 1987, p. 617-624.
- [LAS 00] LASSERRE B., « Modélisation thermo-hygro-mécanique du comportement différé de poutres de structure en bois », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2000.
- [LEB 97] LEBATTEUX M., « Durées de vie de poutres en bois reconstitué soumises à un environnement naturel », Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1997.
- [LEG 88] LE GOVIC C., ROUGER F., FELIX B., « Approche d'un modèle multitransitions paraboliques pour le fluage du bois », *Actes du Colloque Scientifique Européen du Groupement Scientifique Rhéologie du Bois*, Bordeaux, 8-9 juin 1988, Edition Morlier, p. 120-130.
- [LEI 71] LEICESTER R. H., « A rheological model for mechano-sorptive deflections of beams », *Wood Science and Technology*, vol. 5, 1971, p. 211-220.
- [LIB 67] LIBBY T. B., HAYGREEN J. G., « Moisture content change induced by tensile stress in whole wood », *Journal of the Institute of Wood Science*, vol. 19, 1967, p. 54-60.
- [LU 97] LU J. C., LEICESTER R. H., « Mechano-sorptive effects on timber structures », *Wood Science and Technology*, vol. 31, 1997, p. 331-337.
- [MAR 92] MARTENSSON A., « Mechanical behaviour of wood exposed to humidity variation », PhD Thesis - Report TVBK-1006, Lund University, Sweden, 1992.
- [MAR 97] MARTENSSON A., SVENSSON S., « Stress-strain relationship of drying wood. Part 1 : Development of constitutive model », *Holtzforchung*, vol. 51, 1997, p. 472-478.
- [MEY 72] MEYLAN B., « The influence of microfibril angle on the longitudinal shrinkage

- moisture content relationship », *Wood Science and Technology*, vol. 6, 1972, p. 293-301.
- [MOH 93] MOHAGER S., TORATTI T., « Long term bending creep of wood in cyclic relative humidity », *Wood Science and Technology*, vol. 27, 1993, p. 49-89.
- [MUK 86] MUKUDAY S., YATA S., « Modelling and simulation of viscoelastic behaviour (tensile strain) of wood under moisture change », *Wood Science and Technology*, vol. 20, 1986, p. 335-348.
- [NAV 02] NAVI P., V. P., PLUMMER C. J. G., « Transient moisture effect on wood creep », *Wood Science and Technology*, vol. 36, 2002, p. 447-462.
- [PAD 93] PADANYI Z. V., « Physical aging and glass transition : effects on the mechanical properties of paper and board », *Transactions of the Tenth Fundamental Research Symposium*, Oxford, 1993, Editions Baker, Vol. 1, p. 521-545.
- [PER 90] PERRÉ P., DÉGIOVANNI A., « Simulation par volumes finis des transferts couplés en milieu poreux anisotropes : séchage du bois à basse et à haute température », *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol. 33, n° 11, 1990, p. 2463-2478.
- [PER 92] PEREZ J., *Physique et mécanique des polymères amorphes*, Lavoisier, 1992.
- [PIT 96] PITTET V., « Etude expérimentale des couplages mécano-sorptifs dans le bois soumis à des variations hygrométriques contrôlées sous chargements de longue durée », Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, 1996.
- [RAN 75] RANTA-MAUNUS A., « The viscoelasticity of wood at varying moisture content », *Wood Science and Technology*, vol. 9, 1975, p. 189-205.
- [RAN 88] RANTA-MAUNUS A., « Analysis of the state of stress in timber caused by moisture gradient », *IUFRO, Timber Engineering Meeting*, Turku, 1988, p. 113-116.
- [RAN 01a] RANDRIAMBOLOLONA H., DUBOIS F., « Modélisation numérique du comportement viscoélastique linéaire assouplissant et rigidifiant : Application au bois. », Rapport de Recherche n° 10, septembre 2001, L3MsGC.
- [RAN 01b] RANDRIAMBOLOLONA H., DUBOIS F., PETIT C., « Modelling of viscoelastic behaviour of wood material subjected to environmental variation », *Actes du First International Conference of the European Society for Wood Mechanics ESWM'01*, Lausanne, 19-21 avril 2001, Edition Navi, p. 271-279.
- [RAN 01c] RANDRIAMBOLOLONA H., DUBOIS F., PETIT C., « Modélisation du comportement viscoélastique du matériau bois dans un environnement variable », *Actes du Colloque Ouvrages et Systèmes en Service, 15èmes rencontres universitaires de Génie Civil COSS'01*, Lille, 3-4 mai 2001, p. 250-255.
- [RAN 02] RANDRIAMBOLOLONA H., DUBOIS F., PETIT C., « Modélisation du comportement mécanique différé du bois en environnement variable », *Revue Française de Génie Civil*, vol. 6, n° 7-8, 2002, p. 1347-1371.
- [SAL 77] SALMEN N. L., BACK E. L., « The influence of water on the glass transition temperature of cellulose », *Tappi Journal*, vol. 60, 1977, p. 137-140.
- [SAL 92] SALIN J. G., « Numerical prediction of checking timber drying and a new mechano-sorptive creep model », *Hotz als Roh- und werkstoff*, vol. 50, 1992, p. 195-200.
- [SCH 68] SCHNIEWIND A. P., « A recent progress in the study of the rheology of wood », *Wood Science and Technology*, vol. 2, 1968, p. 188-206.

- [SCH 72] SCHAFFER E. L., « Modelling the creep of wood in a changing moisture environment », *Wood and Fiber*, vol. 3, 1972, p. 232-235.
- [SIM 71] SIMPSON W. T., « Moisture change induced in red oak by transverse stress », *Wood and Fiber*, vol. 3, 1971, p. 13-21.
- [SKA 88] SKAAR C., *Wood-water relations*, Springer-Verlag, 1988.
- [STR 78] STRUIK L. C. E., *Physical ageing in amorphous polymers and others materials*, Elsevier, 1978.
- [SVE 99] SVENSSON S., A. M., « Simulation of drying stresses in wood. Part I : comparion between one and two dimensional model », *Hotz als Roh- und werkstoff*, vol. 57, 1999, p. 129-136.
- [THE 94] THELANDERSSON S., « Variations of moisture content in timber structures », *RILEM 8, Creep in timber structures*, 1994, p. 117-127.
- [TIS 96] TISSAOUI J., « Effect of long term creep on the integrity of modern wood structures », PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University - Blacksburg, 1996.
- [TOR 92] TORATTI T., « Creep of timber beams in variable environment », PhD Thesis, Helsinki University of Technology, 1992.
- [VAN 89] VAN DER PUT T. C. A. M., « Deformation and damage processes in wood », PhD Thesis, Delft University, Netherlands, 1989.
- [VER 00] VERDU J., « Effets du vieillissement sur les propriétés mécaniques des polymères », *Echanges Physique-Industrie - EDP Sciences*, vol. 5, 2000, p. 19-32.
- [WAN 93] WANG J. Z., DAVÉ V., GLASSER W., DILLARD D. A., « The effects of moisture sorption on the creep behavior of fibers », *High Temperature and Environmental Effects on Polymeric Composites, ASTM STP 1174*, Philadelphia, 1993, Edition Harris and Gates, p. 186-200.
- [YAH 91] YAHIAOUI K., « A rheological model to account for mechano-sorptive behaviour », *COST 508, Wood Mechanics : Fundamental aspects on creep in wood*, Lund, 1991.
- [ZIE 68] ZIENKIEWICZ O. C., WATSON M., KING I. P., « A numerical method of viscoelastic stress analysis », *International Journal of Mechanical Science*, vol. 10, 1968, p. 807-827.

