UNIVERSITÉ DE LIMOGES
ÉCOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé
FACULTÉ des sciences et techniques

Laboratoire d'**A**rithmétique, de **C**alcul formel et d'**O**ptimisation

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue

par

Matthieu LE FLOC'H

le 15 décembre 2003 à 11 h en salle des séminaires
du bâtiment de mathématiques

Théorie d'Iwasawa : K-groupes étales et « co-capitulation »

Jury

Rapporteurs	Cornelius GREITHER Professeur, Universität der Bundeswehr München Christian MAIRE Professeur à l'université de Toulouse 2
Examinateurs	Bruno ANGLÈS Professeur à l'université de Caen François LAUBIE Professeur à l'université de Limoges Alain SALINIER Maître de conférences HDR à l'université de Limoges Thong NGUYEN QUANG DO Professeur à l'université de Franche-Comté
Directeur de thèse	Abbas MOVAHHEDI Professeur à l'université de Limoges

Both Gauss and lesser mathematicians may be justified in rejoicing that there is one science at any rate and that their own, whose very remoteness from ordinary human activities should keep it gentle and clean.

G. H. Hardy

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu mon directeur de thèse A. Movahhedi pour avoir encadré ce travail, aussi bien sur le plan scientifique qu'administratif, et cela malgré les responsabilités gourmandes en temps qui sont les siennes.

C'est ensuite avec grand plaisir que j'exprime ma gratitude envers Th. Nguyen Quang Do qui m'a suivi de près tout au long de la thèse et qui fut à l'initiative des deux sujets que j'ai étudiés. Sans lui, cette thèse n'aurait jamais abouti.

Mes remerciements vont ensuite aux deux rapporteurs C. Greither et Ch. Maire qui ont bien voulu, malgré les courts délais impartis, s'intéresser à ce travail et me formuler des remarques pertinentes qui ont amélioré mon manuscrit.

Je remercie les deux « locaux » F. Laubie et A. Salinier que j'ai cotoyés au séminaire de théorie des nombres de Limoges d'avoir accepté de prendre part à ce jury.

Enfin, je remercie B. Anglès d'avoir fait l'effort de se déplacer à Limoges pour siéger dans mon jury malgré un emploi du temps chargé cette semaine-là.

Il y a d'autres personnes, et non des moindres, que je voudrais remercier. Je remercie Jilali Assim de l'université de Meknès au Maroc pour les nombreuses discussions mathématiques et footballistiques que nous avons eues, Ralph Greenberg de l'université de Washington aux É.-U. pour m'y avoir accueilli au printemps 2003, Manfred Kolster de l'université de Mac Master au Canada avec qui j'ai eu plusieurs discussions fructueuses, notamment à l'IHÉS, et qui m'a donné l'autorisation d'utiliser son texte très bien écrit sur la théorie d'Iwasawa (cf. [K3]), enfin Jean-Robert Belliard de l'université de Franche-Comté qui m'a éclairé sur les χ-composantes au début de ma thèse.

Pendant les trois années qu'a duré cette thèse, j'ai partagé le « bureau vert » avec Thomas Cluzeau et Mikaël Lescop, désormais partis vers d'autres cieux (Paris 12 pour Thomas, UCD à Dublin pour Mikaël) ; je voudrais les remercier ici pour l'ambiance très agréable, de mon point de vue, que l'on trouvait au quotidien. Nous avons eu maintes discussions mathématiques et extra-mathématiques – parfois bruyantes, comme pourrait vous le confirmer P. Armand – qui ont animé agréablement nos semaines. Je les remercie aussi d'avoir supporté mes manies (voire lubies) variées comme, au hasard, poser de nombreux exercices farfelus ou les harceler avec mes remarques typographiques. Par ailleurs, je remercie Mikaël en particulier, dont le cursus géographique et mathématique fut si semblable au mien durant de longues années. Cela aurait pu se prolonger davantage encore si moi aussi j'étais parti en Irlande, ainsi que j'en avais la possibilité.

Je remercie le LACO et les doctorants dans leur ensemble, tout particulièrement les personnes suivantes :

Moulay Barkatou, Laurent Dubreuil, Martine Guerletin, Mériem Héraoua, Abdelkader Necer, Ayoub Otmani, Nadine Tchéfranoff, Yolande Vieceli, Jacques-Arthur Weil, et, parmi celles arrivées plus récemment, Alexandre Cabot, Sylvie Laval, Patricia Vareille et Stéphane Vinatier.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **7**

1 Théorie d'Iwasawa **13**
1.1 $\mathbb{Z}_p$-extensions . . . 13
1.2 Algèbre d'Iwasawa et Λ-modules . . . 15
1.3 Adjoints . . . 19
1.4 Quelques modules d'Iwasawa standard . . . 22
1.5 La conjecture principale . . . 25

2 Autour de la conjecture de Coates-Sinnott **27**
2.1 Invariants de Fitting . . . 27
2.1.1 Définition et premières propriétés . . . 27
2.1.2 Propriétés plus avancées et idéaux de Fitting de Λ-modules . . . 31
2.2 K-groupes de Quillen et K-groupes étales . . . 34
2.2.1 Les premiers groupes de K-théorie . . . 34
2.2.2 K-groupes supérieurs et construction de Quillen . . . 35
2.2.3 K-groupes étales . . . 37
2.3 χ-composantes . . . 40
2.3.1 Les caractères abéliens au-dessus de k . . . 40
2.3.2 Le cas semi-simple . . . 41
2.3.3 ϕ-quotients et ϕ-parties . . . 43
2.4 Le cas modéré . . . 46
2.5 Le cas sauvagement ramifié . . . 56

3 Sur les conoyaux de capitulation en théorie d'Iwasawa **59**
3.1 Résultats asymptotiques . . . 61
3.2 Dualité de Kummer et module de Bertrandias-Payan . . . 68
3.3 Dualité de Kummer et noyaux de Gross . . . 75
3.4 La vie sans Gross . . . 77
3.5 Formules explicites dans le cas abélien semi-simple ; exemples . . . 78
3.5.1 Le cas « non-décomposé » . . . 79

3.5.2 Le cas décomposé dans la partie « moins » 80
3.5.3 Le cas décomposé dans la partie « plus » 83
3.5.4 Exemples quadratiques 86

Bibliographie **91**

Introduction

Le contexte général de cette thèse est la théorie d'Iwasawa, *i. e.*, l'arithmétique des $\mathbb{Z}_p$-extensions, où $\mathbb{Z}_p$ désigne le groupe des entiers p-adiques. Nous nous intéressons à deux problèmes distincts.

Le premier concerne l'annulateur de la p-partie des K-groupes pairs d'anneaux des entiers de corps de nombres (chapitre 2), le lien avec la théorie d'Iwasawa étant que ces K-groupes peuvent s'exprimer à l'aide des co-invariants d'un certain module d'Iwasawa « tordu ».

Dans le second problème, nous abordons la question classique de la capitulation dans une $\mathbb{Z}_p$-extension. Plus précisément, nous étudions dans le chapitre 3 ce que l'on peut appeler – improprement – les « conoyaux de capitulation ».

Chapitre 1

On rappelle dans ce chapitre des résultats classiques de théorie d'Iwasawa, dont la matière est empruntée à [W], [NSW] et [K3]. On insiste en particulier sur la notion d'*adjoint* dont on se sert abondamment au chapitre 3. On énonce également la *conjecture principale* (théorème 1.25) qui est l'un des ingrédients-clefs du chapitre 2.

Chapitre 2

Soit F un corps de nombres abélien, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. À l'aide des fonctions zêta partielles ζ_F, on peut définir pour tout entier $i \geq 0$ un élément de $\mathbb{Q}[G]$ appelé i-ième élément de Stickelberger par

$$\Theta_i := \sum_{\sigma \in G} \zeta_F(\sigma, -i)\sigma^{-1},$$

et on lui associe un idéal I_i de $\mathbb{Z}[G]$, le i-ième idéal de Stickelberger.

Quand $i = 0$, un théorème classique de Stickelberger dit que $I_0(F)$ annule le groupe de classes de F. Coates et Sinnott ont prouvé dans [CS] que $I_1(F)$ annule $K_2(\mathcal{O}_F)$, à l'exception de sa 2-partie, où $K_2(\mathcal{O}_F)$ est le deuxième groupe de K-théorie de Milnor de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ (cf. §2.2.1). Une généralisation naturelle, formulée dans [CS], est que $I_i(F)$ annule $K_{2i}(\mathcal{O}_F)$, ces derniers groupes étant les groupes de K-théorie supérieurs définis par Quillen (cf. §2.2.2). C'est ce que l'on appelle la *conjecture de Coates-Sinnott* (cf. conjecture 2.23).

Une approche de ce problème consiste à essayer d'annuler la p-partie de $K_{2i}(\mathcal{O}_F)$ pour p premier impair, qui, selon la conjecture de Quillen-Lichtenbaum, s'identifie à

$$K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p]) = H^2(G_S^F, \mathbb{Z}_p(i+1)),$$

où S est l'ensemble des places p-adiques de F, G_S^F est le groupe de Galois sur F de l'extension algébrique S-ramifiée maximale de F et $\mathbb{Z}_p(i+1)$ est le groupe $\mathbb{Z}_p$ tordu $(i+1)$-fois par le caractère cyclotomique. On se ramène donc à annuler un certain module galoisien, ce qui va nous relier à la théorie d'Iwasawa. Signalons que la conjecture de Quillen-Lichtenbaum est désormais un théorème, si l'on en croit les travaux de Voevodsky & Rost (cf. théorème 2.16).

On s'intéresse en fait au chapitre 2 au (premier) *idéal de Fitting* de $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p])$; l'idéal de Fitting est un invariant associé aux modules de présentation finie qui est contenu dans l'annulateur du module (proposition 2.2) et a de bonnes propriétés fonctorielles. On expose quelques unes de ces propriétés au paragraphe 2.1, dont certaines ne semblent pas se trouver dans la littérature.

Le lien précis entre K-groupes étales et théorie d'Iwasawa est le suivant :

$$K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p]) \cong (\mathfrak{X}_\infty(-i)_\Gamma)^*,$$

où $\mathfrak{X}_\infty$ est le module standard d'Iwasawa (relativement à $E = F(\mu_p)$), i est pair, Γ est le groupe de Galois de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E et * est le dual de Pontrjagin.

Au lieu d'étudier le module $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p])$ dans son ensemble, on le décompose selon certaines composantes, appelées « χ-composantes » (cf. §2.1, où l'on rappelle la définition et où l'on donne certaines propriétés utiles).

Précisément, on se place dans une situation *semi-simple*, *i. e.*, on écrit $G = P \times \Delta$ où P est le p-sous-groupe de Sylow de G et on utilise la décomposition

$$\mathbb{Z}_p[G] \cong \oplus_\chi \mathbb{Z}_p[P](\chi),$$

où χ parcourt les caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles de Δ, $(.)(\chi)$ signifie $e_\chi(.)$, et e_χ est l'idempotent associé à χ.

Le point de départ de notre travail fut de généraliser le résultat de [CO] qui déterminent l'idéal de Fitting de $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p])(\chi)$ (avec certaines hypothèses de parité sur i et χ) dans le cas où le corps de base F est *abélien réel de conducteur une puissance d'un nombre premier*. Sous ces hypothèses, le module $\mathfrak{X}_\infty(\chi)$, $\chi \neq 1$, est de dimension projective inférieure ou égal à 1 sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!](\chi)[P]$, ce qui nous garantit que l'idéal de Fitting que l'on considère est *principal*. Son idéal de Fitting est alors donné par son idéal caractéristique (proposition 2.10) et la conjecture principale en théorie d'Iwasawa ([MW] et [Wi]) rentre ensuite en jeu pour relier l'idéal caractéristique aux fonctions L p-adiques, et par là, aux éléments de Stickelberger.

Dès que le corps F possède plus d'une place dans son conducteur, le module $\mathfrak{X}_\infty(\chi)$ n'est plus, en général, de dimension projective inférieure ou égale à 1. Dans [BB], les auteurs examinent le cas où F a 2 places dans son conducteur et ajoutent des hypothèses sur la décomposition de ces places pour maintenir une dimension projective inférieure ou égale à 1. En fait, pour le but qui est le nôtre, on peut traiter le cas d'un corps abélien F quelconque en considérant plutôt le module S-ramifié $\mathfrak{X}^S_\infty(\chi)$, où S est l'ensemble des places au-dessus de p ou ramifiées, et qui lui, est de dimension projective inférieure ou égale à un. Le résultat principal du chapitre 2 est formulé dans le théorème 2.24.

Signalons enfin que la conjecture principale classique impose une restriction supplémentaire sur les caractères χ utilisés : leur conducteur ne doit pas être divisible par p^2, ce qui ajoute quelques complications techniques (ce cas est traité au paragraphe 2.5).

Parallèlement à notre travail, M. Kurihara a obtenu au même moment des résultat analogues (cf. [Kur]). De plus, depuis la parution de [LF], Th. Nguyen Quang Do d'une part, et D. Burns et C. Greither d'autre part, ont prouvé, indépendamment, des versions cohomologiques de la conjecture de Coates-Sinnott ([N5], [BG]), en utilisant pour le premier la *conjecture principale équivariante* qui est un raffinement de la conjecture principale classique prenant en compte l'action de $G_\infty := \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ tout entier et pas seulement celle de $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Les idéaux de Fitting qui apparaissent alors ne sont plus principaux mais gardent suffisamment d'information arithmétique pour démontrer, par exemple, la conjecture de Coates-Sinnott. Dans [BG], les auteurs utilisent la théorie d'Iwasawa des complexes.

Chapitre 3

Soit F un corps de nombres et F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension, d'étages finis F_n. Le problème classique de la capitulation est l'étude du noyau des flèches naturelles $A^S_n \to A^S_m$ où $m \geq n$, S est un ensemble fini de places de F_n et A^S_n est la p-partie du S-groupe de classes de F_n. Notons A^S_∞ la limite inductive des A^S_n vis-à-vis des flèches naturelles. On sait ([Iw1]) que les ordres des groupes $\ker(A^S_n \to A^S_m)$ ou $\ker(A^S_n \to A^S_\infty)$ se stabilisent. On peut également montrer que le noyau de $A^S_n \to A^S_\infty$, pour n assez grand, s'identifie au sous-module fini maximal de X^S_∞, le module d'Iwasawa non-ramifié S-décomposé (cf. [Ku]). De plus, lorsque F est CM et que F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, les flèches $(A^S_n)^- \to (A^S_m)^-$ entre les parties « moins » des S-groupes de classes sont injectives (voir e.g. proposition 1.20).

Nous proposons dans le chapitre 3 une étude systématique des *conoyaux de capitulation*, menée en collaboration avec A. Movahhedi et Th. Nguyen Quang Do (les résultats se trouvent dans la pré-publication [LMN]) ; plus précisément, nous étudions le conoyau de $j_n : A'_n \to {A'}^{\Gamma_n}_\infty$, où l'on a noté $A'_n = A^{S_p}_n$, S_p est l'ensemble des p-places de F_n, p est impair et $\Gamma_n := \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$ est le groupe de Galois de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F_n.

Ces conoyaux ont été curieusement très peu étudiés, à l'exception des travaux de H. Sumida ([S]) et de H. Ichimura ([I1, I2, I3]) dont nous rappelons les résultats plus loin.

Pour mener à bien cette étude, nous faisons une hypothèse fondamentale : on suppose que la *conjecture de Gross* est vraie, *i. e.*, que le groupe ${A'}_{\infty}^{\Gamma_n}$ des invariants est fini, ce qui nous assure que les conoyaux le sont aussi. En général, lorsque le corps F n'est pas totalement réel (quand il l'est, $A'_\infty = A_\infty$ moyennant la conjecture de Leopoldt) le groupe $A_\infty^{\Gamma_n}$ n'est pas fini, c'est pourquoi on s'intéresse plutôt à ${A'}_{\infty}^{\Gamma_n}$.

Remarquons par ailleurs que la conjecture de Greenberg, qui prédit la trivialité de ${A'}_{\infty}^{\Gamma_n}$ dans le cas totalement réel, implique que les conoyaux $\operatorname{coker} j_n$ sont triviaux dans ce cas.

Au paragraphe 3.1, on commence par une étude asymptotique des conoyaux $\operatorname{coker} j_n$ au cours de laquelle on prouve, en supposant vraie la conjecture de Gross pour tout n assez grand (et p impair), que les conoyaux $\operatorname{coker}(A'_n \to {A'}_{\infty}^{\Gamma_n})$ se stabilisent pour n assez grand et sont isomorphes à $\Psi_\infty := \varinjlim \Psi_k$, où $\Psi_k = \ker((X'_\infty)_{\Gamma_k} \to A'_k)$ mesure la déviation entre le groupe de classes A'_k et le module de co-descente $(X'_\infty)_{\Gamma_k}$, où $X'_\infty := \varprojlim A'_k$ (théorème 3.6).

Ainsi, à l'instar des noyaux, les conoyaux de capitulation se stabilisent asymptotiquement (on montrera même mieux au paragraphe 3.2). En corollaire du théorème 3.6, on retrouve le résultat principal de [I3] qui est que $\operatorname{coker} j_n$ est trivial lorsque Ψ_N s'annule pour un certain N, mais sans les hypothèses supplémentaires d'Ichimura qui demande que F soit totalement réel et que p se décompose totalement. On retrouve également le résultat principal de [S].

Au cours du paragraphe 3.2, on améliore les résultats précédents en montrant que la stabilisation des conoyaux s'effectue dès le niveau n_0 (cf. corollaire 3.15), où n_0 est le plus petit entier n tel que toute place qui se ramifie dans F_∞/F_n se ramifie totalement. On suppose pour cela – mais ce n'est pas une restriction – que F contient μ_p, le groupe des racines p-ièmes de l'unité. En fait, on caractérise $\varinjlim \operatorname{coker} j_n$ comme le dual de Kummer d'un certain module d'Iwasawa lié aux problèmes de plongements en théorie d'Iwasawa (théorème 3.13). En corollaire, dans le cas particulier où F est CM, on généralise le résultat principal de [I1] et de [I2] (corollaire 3.16).

Dans le paragraphe 3.3, on explore une autre approche qui utilise les noyaux de Gross et donne une preuve directe de la dualité de Kummer précédente (théorème 3.18). Pour cela, on s'appuie essentiellement sur les résultats de [K2] et on met à profit la *suite exacte de Sinnott* qui est un ingrédient essentiel dans l'étude explicite du paragraphe 3.5. En sus, on obtient un dévissage complet du module $\operatorname{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$, la partie de torsion du module d'Iwasawa p-ramifié, qui n'était pas entièrement connue auparavant.

On examine ensuite dans le paragraphe 3.4 ce qu'il est encore possible de dire quand on se passe de la conjecture de Gross. Il se trouve notamment que le théorème 3.13 reste valable.

Enfin, dans le dernier paragraphe du chapitre 3, on donne des formules plus explicites pour l'ordre de coker j_0, dans le cas particulier où F est semi-simple (ce qui est le cas dans les articles [I1, I2]). On retrouve d'abord que la « χ-partie » de coker j_0 est triviale lorsque $\chi(p) \neq 1$ (ce qui est la « Proposition 2 » de [I1]) et on aborde ensuite le cas totalement décomposé (*i. e.*, $\chi(p) = 1$) en distinguant les cas pairs et impairs. Les formules que nous donnons (théorèmes 3.25, 3.26 et 3.29) font intervenir des valeurs de fonctions L p-adiques (on a pour cela utilisé la *conjecture principale*) et cachent des phénomènes de régulateur (de Gross ou de Leopoldt). Ces formules peuvent être vues comme une généralisation de celle donnée par Greenberg et Ferrero dans [FG]. Enfin, on s'en sert pour calculer l'ordre de $\operatorname{coker}(A'_0 \to {A'}_\infty^\Gamma)$ pour certains corps quadratiques (voir les tables 1 & 2).

Chapitre 1

Théorie d'Iwasawa

La matière de ce chapitre, qui ne contient que des résultats classiques, est empruntée à [W], [NSW] et [K3].

1.1 $\mathbb{Z}_p$-extensions

Dans cette section, nous exposons quelques résultats préliminaires sur les $\mathbb{Z}_p$-extensions, *i. e.*, les extensions de corps F_∞/F de groupe de Galois isomorphe à l'anneau des entiers p-adiques. Dans tout le chapitre, le nombre premier p est supposé *impair* (pour éviter des complications techniques).

Dans la section suivante, nous nous intéresserons à la structure des modules sur l'algèbre de groupe $\Lambda := \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$.

Soit donc un corps de nombres F et une extension F_∞/F telle que

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F) \cong \mathbb{Z}_p.$$

Comme les sous-groupes fermés de $\mathbb{Z}_p$ sont (0) et les $p^n\mathbb{Z}_p, n \geq 0$, on sait par correspondance galoisienne que pour tout n, il existe un unique corps intermédiaire F_n de F_∞/F tel que

$$\mathrm{Gal}(F_n/F) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Ces corps F_n sont les seuls corps intermédiaires de F_∞/F.

Un corps de nombre F étant donné, il existe toujours au moins une $\mathbb{Z}_p$-extension de F, la $\mathbb{Z}_p$-extension *cyclotomique*. En effet, soit $\mu_{p^{n+1}}$ le groupe des racines p^{n+1}-ièmes de l'unité. Comme le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})/\mathbb{Q})$ est cyclique de degré $(p-1)p^n$, il existe un unique sous-corps $\mathbb{Q}_n$ de $\mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ tel que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{Q}_\infty$ l'union sur n des corps $\mathbb{Q}_n$. Alors $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$. Il suffit ensuite de prendre $F_\infty := F.\mathbb{Q}_\infty$.

Compte tenu de la structure particulière du groupe $\mathbb{Z}_p$, les $\mathbb{Z}_p$-extensions suivent des règles de ramification très précises.

Proposition 1.1. *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension et $\mathfrak{l}$ une place (éventuellement infinie) de F ne divisant pas la place p. Alors F_∞/F est non-ramifiée en $\mathfrak{l}$. On dit que les $\mathbb{Z}_p$-extensions sont p-ramifiées pour signifier qu'elles sont non-ramifiées en dehors de p.*

Démonstration. Soit I le groupe d'inertie de $\mathfrak{l}$. Le groupe I étant fermé, il est soit trivial, soit de la forme $p^n\mathbb{Z}_p$. Dans le second cas, puisque I est infini, on peut supposer que $\mathfrak{l}$ est une place finie. Posons $\mathfrak{l}_\circ := \mathfrak{l}$ et pour tout n, soit $\mathfrak{l}_n$ une place de F_n divisant $\mathfrak{l}_{n-1}$. On appelle $F_{\mathfrak{l}_n}$ le complété en la place $\mathfrak{l}_n$ et on pose $F_{\mathfrak{l}_\infty} := \cup F_{\mathfrak{l}_n}$. Si U désigne les unités de $F_{\mathfrak{l}_\infty}$, la théorie du corps de classe locale fournit une surjection de U dans $I \cong p^n\mathbb{Z}_p$. Or le logarithme l-adique, où l est la place rationnelle que divise $\mathfrak{l}$, induit un isomorphisme

$$U \cong (\text{fini}) \times \mathbb{Z}_l^r,\ r \in \mathbb{Z}.$$

On aurait alors une surjection $\mathbb{Z}_l^r \to p^n\mathbb{Z}_p$, ce qui est impossible. □

Proposition 1.2. *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension. Alors il y a au moins une place ramifiée dans F_∞/F (nécessairement une p-place) et il existe un entier n tel que toute place ramifiée dans F_∞/F_n soit totalement ramifiée.*

Démonstration. Soit H_F la p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F. Alors l'extension H_F/F est finie (de groupe de Galois la p-partie du groupe de classes de F) et, puisque F_∞/F est infinie, il y a nécessairement au moins une place ramifiée. Soit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places de F qui se ramifient dans F_∞/F, et soit $I_1, \dots, I_s$ les groupes d'inertie correspondants. On a $\cap I_j = p^n\mathbb{Z}_p$ pour un certain n ; il s'en suit que l'extension correspondante F_∞/F_n est totalement ramifiée en les $\mathfrak{p}_j$. □

Dans la suite, on notera n_0 le plus petit entier n tel que l'extension F_∞/F_n est totalement ramifiée au dessus de p. Si $[F : \mathbb{Q}]$ est premier à p ou si p se décompose totalement dans $F/\mathbb{Q}$ et F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, on a $n_0 = 0$.

Soit D_F le *noyau de Leopoldt*, *i. e.*, le noyau de la flèche $U_F \otimes \mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p} \otimes \mathbb{Z}_p$ entre le complété des unités gobales et le produit des complétés des unités locales au-dessus de p. Alors D_F est un $\mathbb{Z}_p$-module libre, de rang δ_F. Une des formulations de la **conjecture de Leopoldt** s'énonce comme suit :

Conjecture 1.3 (Leopoldt). $\delta_F = 0$.

Soit M la pro-p-extension p-ramifiée abélienne maximale de F et H_F comme plus haut, le corps de Hilbert de F. La théorie du corps de classes (cf. [W], « Corollary 13.6 ») nous donne la suite exacte :

$$0 \to D_F \to U_F \otimes \mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p} \otimes \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Gal}(M/F) \to \mathrm{Gal}(H_F/F) \to 0. \qquad (1.1)$$

Soit $\widetilde{F}$ la composée de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F. Alors, la suite exacte (1.1) implique que $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F) = \mathbb{Z}_p^{1+r_2+\delta_F}$ où $2r_2$ est le nombre de plongements complexes de F. En particulier, lorsque F est totalement réel et qu'il vérifie la conjecture de Leopoldt, il n'a qu'une seule $\mathbb{Z}_p$-extension, la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

1.2 Algèbre d'Iwasawa et Λ-modules

Soit $\mathcal{O}$ un anneau nœthérien local, commutatif, d'idéal maximal π et de corps résiduel $k = \mathcal{O}/\pi$. On suppose également que $\mathcal{O}$ est complet vis-à-vis de sa topologie π-adique. Soit $\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$ l'algèbre des séries formelles en une variable sur l'anneau $\mathcal{O}$. L'algèbre Λ est appelée *algèbre d'Iwasawa*. Il est facile de voir que Λ est un anneau local nœthérien d'idéal maximal (π, T), de corps résiduel k et complet pour sa topologie (π, T)-adique.

Dans cette section, nous exposons brièvement le théorème de structure des Λ-modules de type fini ; pour cela nous aurons besoin de quelques lemmes techniques.

Lemme 1.4 (de division). *Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \Lambda = \mathcal{O}[\![T]\!]$ tel que $s := \inf\{n, a_n \notin \pi\}$ soit fini. On appelle s le* degré réduit *de f. Alors, tout élément $g \in \mathcal{O}[\![T]\!]$ peut s'écrire de façon unique*

$$g = fq + r,$$

où $q \in \mathcal{O}[\![T]\!]$ et r est un polynôme de $\mathcal{O}[T]$ de degré inférieur ou égal à $s - 1$.

Un polynôme $F \in \mathcal{O}[T]$ est dit de *Weierstraß* s'il est de la forme

$$F = T^s + a_{s-1}T^{s-1} + \cdots + a_1 T + a_0,$$

où les coefficients $a_0, \ldots, a_{s-1}$ appartiennent à π.

Théorème 1.5 (de préparation de Weierstraß). *Soit $f \in \mathcal{O}[\![T]\!]$ de degré réduit s. Alors il y a une décomposition unique*

$$f = g.u$$

en produit d'un polynôme de Weierstraß de degré s et d'une unité $u \in \mathcal{O}[\![T]\!]$. De plus, g est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme multiplication par T sur le $\mathcal{O}$-module libre $\mathcal{O}[\![T]\!]/(f)$.

Démonstration. Écrivons le lemme de division pour f et T^s : il existe un unique $v \in \mathcal{O}[\![T]\!]$ et un unique polynôme $g = \sum_{i=0}^{s-1} a_i T^i$ tel que $T^s = f.v - g$. Puisque f est de degré réduit s, on a

$$T^s = f.v \mod \pi,$$

donc $v \in \mathcal{O}[\![T]\!]^\times$ et $h := T^s + g$ est un polynôme de Weierstraß. Quant à la seconde assertion, elle découle des isomorphismes

$$\mathcal{O}[\![T]\!]/(f) = \mathcal{O}[\![T]\!]/(h) \cong \mathcal{O}[T]/(h).$$

□

Désormais, on suppose que la caractéristique du corps résiduel $k = \mathcal{O}/\pi$ est p et Γ désigne un pro-p-groupe isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_p$. Nous en fixons un générateur topologique noté γ.

Proposition 1.6. *L'application* $\mathcal{O}[\![T]\!] \to \mathcal{O}[\![\Gamma]\!]$, $T \mapsto \gamma - 1$ *est un isomorphisme topologique de* $\mathcal{O}$*-algèbres.*

Démonstration. Soit $n \geq 0$ et considérons les polynômes de Weierstraß $\omega_n := (1+T)^{p^n} - 1$; on note comme il est d'usage Γ_n le sous-groupe d'indice p^n de Γ. Comme précédemment, on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_n) \cong \mathcal{O}[T]/(\omega_n).$$

De plus, l'application $\mathcal{O}[T]/(\omega_n) \to \mathcal{O}[\Gamma/\Gamma_n]$, $\quad T \mod \omega_n \mapsto \gamma - 1 \mod \Gamma_n$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres. Comme ω_n divise ω_{n+1}, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_{n+1}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{O}[\Gamma/\Gamma_{n+1}] \arrow[d] \\
\mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_n) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{O}[\Gamma/\Gamma_n]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les restrictions est commutatif. En prenant la limite projective vis-à-vis de ces restrictions, on trouve un isomorphisme

$$\varprojlim \mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_n) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim \mathcal{O}[\Gamma/\Gamma_n] = \mathcal{O}[\![\Gamma]\!].$$

La proposition sera prouvée si l'on montre que l'application naturelle $\mathcal{O}[\![T]\!] \to \varprojlim \mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_n)$ est un isomorphisme. Or cette application est injective car son noyau $\cap_n \omega_n \mathcal{O}[\![T]\!]$ est contenu dans $\cap_n (\pi, T)^{n+1}$, donc est trivial.

Reste à montrer la surjectivité. Soit $(\ldots, f_n, \ldots, f_0) \in \varprojlim \mathcal{O}[\![T]\!]/(\omega_n)$. Pour $m \geq n \geq 0$, $f_m \equiv f_n \mod \omega_n$ donc aussi $\mod (\pi, T)^{n+1}$. Comme $\mathcal{O}[\![T]\!]$ est *complet*, il s'en suit que $f = \lim f_n$ existe dans $\mathcal{O}[\![T]\!]$. On vérifie alors que $f \mod \omega_n = f_n$ pour tout n et f est bien un antécédent de $(\ldots, f_n, \ldots, f_0)$. $\square$

Lemme 1.7. *Les idéaux premiers de* Λ *sont* (0), (π, T), (π) *et les* $(P(T))$ *où* P *est un polynôme de Weierstraß irréductible.*

Démonstration. Il est clair que les idéaux évoqués ci-dessus sont premiers.

Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de Λ. À l'aide du théorème de préparation de Weierstraß, on peut trouver dans $\mathfrak{p}$ un élément de la forme $\pi^m P(T)$, où $P(T)$ est un polynôme de Weirstraß de degré minimal. Si $P(T)$ n'est pas constant, il est nécessairement irréductible par minimalité. Comme l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier, il contient $f = \pi$ ou $f = P(T)$.

Dans le cas où $\mathfrak{p} \neq (f)$, il existe $g \in \mathfrak{p}$ premier à f ; il s'en suit alors que $\Lambda/(f, g)$ est fini donc $\Lambda/\mathfrak{p}$ l'est également (en effet, comme f et g sont premiers entre eux, on a $(f, g) \supseteq (\pi^r, f)$ pour un certain r et $\Lambda/(\pi^r, f)$ est fini). Comme $\Lambda/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre fini, c'est un corps, donc $\mathfrak{p}$ est maximal et nécessairement $\mathfrak{p} = (\pi, T)$, l'unique idéal maximal de Λ. $\square$

Soit A un anneau nœthérien commutatif intégralement clos. Un A-module M est dit *pseudo-nul* si les localisés $M_{\mathfrak{p}}$ en tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 sont nuls. Un morphisme $f : M \to N$ de A-modules de type fini est un *pseudo-isomorphisme* si $\ker f$ and $\operatorname{coker} f$ sont pseudo-nuls, ou de façon équivalente, si les morphismes localisés $M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ sont des isomorphismes. Lorsque $A = \Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$, les modules pseudo-nuls sont les modules finis car un Λ-module M est fini si et seulement si il existe un entier r tel que $(\pi, T)^r M = 0$, et (π, T) est de hauteur 2.

On notera $M \sim N$ pour signifier que M et N sont pseudo-isomorphes. En général, $\sim$ n'est pas une relation d'équivalence, mais le devient lorsque l'on considère des Λ-modules de torsion.

À présent, nous donnons le résultat clef de cette section, à savoir le théorème de structure des Λ-modules de type fini. La preuve étant assez longue, nous renvoyons le lecteur à [W] ou à [NSW].

Théorème 1.8. *Soit M un Λ-module de type fini. Alors il existe des entiers $r, m, s \geq 0$ et $m_i, n_i \geq 1$ tels que*

$$M \sim \Lambda^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/\pi^{n_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda/f_i(T)^{m_i},$$

où les $f_i(T)$ sont des polynômes de Weierstraß irréductibles.

Nous introduisons quelques notations utiles pour la suite.

$r := \mathrm{rg}_\Lambda M$	le Λ-*rang* de M ;
$\mu(M) := \sum_{i=1}^{s} n_i$	l'*invariant* μ de M ;
$\lambda(M) := \sum_{i=1}^{m} m_i \deg f_i$	l'*invariant* λ de M ;
$f_M(T) := \prod_{i=1}^{m} f_i(T)^{m_i}$	le *polynôme caractéristique* de M ;
$\mathrm{div}(M) := \sum_{i=1}^{m} m_i(f_i(T)) + \sum_{i=1}^{s} n_i(\pi)$	le *diviseur* de M.

De plus, pour un Λ-module M, notons M^Γ le sous-module de M des éléments invariants par Γ et M_Γ le module des co-invariants, *i. e.*, $M/(\gamma - 1)M$. La proposition suivante nous servira souvent :

Proposition 1.9. *Soit M un Λ-module de torsion de type fini et de polynôme caractéristique $f(T)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) M^Γ *est fini.*

(ii) M_Γ *est fini.*

(iii) $f(0) \neq 0$.

Si l'une des propositions est vérifiée, on a

$$\frac{|M^\Gamma|}{|M_\Gamma|} = |f(0)|_\pi = p^{-f_\pi v_\pi(f(0))},$$

où f_π est le degré résiduel.

Démonstration. Étant donnée une suite courte exacte

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

de Λ-modules, on déduit du lemme du serpent la suite exacte

$$0 \to A^\Gamma \to B^\Gamma \to C^\Gamma \to A_\Gamma \to B_\Gamma \to C_\Gamma \to 0.$$

Ceci montre qu'il suffit de prouver la proposition pour le Λ-module élémentaire E associé à M dans le théorème de structure. En décomposant E en somme directe, il reste alors deux cas à traiter : $E = \Lambda/\pi^i\Lambda$ et $E = \Lambda/(f(T))$ où $f(T)$ est un polynôme de Weierstraß. Comme $E^\Gamma = \ker(E \xrightarrow{\times T} E)$ et $E_\Gamma = \operatorname{coker}(E \xrightarrow{\times T} E)$, il vient dans le premier cas $E^\Gamma = 0$ et $E_\Gamma = \mathbb{Z}/p^{if_\pi}\mathbb{Z}$, d'où la proposition dans ce cas.

Supposons que $E = \Lambda/(f(T))$. Comme E est $\mathbb{Z}_p$-libre, E^Γ est fini si et seulement s'il est nul. Or $E^\Gamma = 0$ équivaut à $f(0) \neq 0$, ce que est aussi équivalent à la finitude de $E_\Gamma = E/TE$. Finalement, lorsque l'un des E^Γ ou E_Γ est fini, on a bien $E_\Gamma \cong \mathbb{Z}/f(0)\mathbb{Z}$, d'où la proposition. □

Rappelons que l'on a noté $\omega_n = (1+T)^{p^n} - 1$; comme on l'a vu, les ω_n sont des polynômes de Weierstraß et par l'isomorphisme de la proposition 1.6, ω_n est envoyé sur γ^{p^n}. Par conséquent, pour un Λ-module M, le quotient $M/\omega_n M$ correspond à M_{Γ_n}, où l'on a posé $\Gamma_n := \Gamma^{p^n}$. Lorsque les modules M_{Γ_n} sont finis, le comportement asymptotique de $|M_{\Gamma_n}|$ est donné par les invariants λ et μ associés à M (pour simplifier les notations, on suppose que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ dans la proposition suivante) :

Proposition 1.10. *Posons $\nu_{n,m} := \omega_m/\omega_n$ pour $m \geq n$ et soit M un Λ-module de type fini et de torsion, d'invariant λ et μ. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $M/\nu_{n_0,n}M$ soit fini pour tout $n \geq n_0$. Alors il existe une constante ν telle que*

$$|M/\nu_{n_0,n}M| = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}$$

pour tout n assez grand.

Démonstration. Nous examinons d'abord ce qu'il en est lorsque M est un module élémentaire. Supposons que $M = \Lambda/(p^m)$; alors $M/\nu_{n_0,n}M = \Lambda/(p^m, \nu_{n_0,n})$. Puisque $\nu_{n_0,n}$ est de Weierstraß, le module $\Lambda/\nu_{n_0,n}\Lambda$ est $\mathbb{Z}_p$-libre de rang $\deg \nu_{n_0,n} = p^{n-n_0}$. D'où

$$|M/\nu_{n_0,n}M| = p^{m(p^n - p^{n_0})},$$

qui est bien de la forme voulue en posant $\nu := -p^{m+n_0}$ puisqu'ici $\mu = m$ et $\lambda = 0$.

Supposons à présent que $M = \Lambda/(f(T))$ où $f(T)$ est un polynôme de Weiestraß. Alors $\deg f(T) = \lambda$ et $M \cong \mathbb{Z}_p^\lambda$. Choisissons un entier m_0 tel que $p^{m_0-1} \geq \lambda$. Pour tout $m \geq m_0$,

$$\omega_{m-1} \equiv 0 \mod (f(T), p),$$

soit, après élévation à la puissance p,

$$\omega_m \equiv 0 \mod (f(T), p^2).$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \nu_{m-1,m} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^{ip^m} \\ & \equiv & p + p^2 g(T) \mod f(T) \\ & \equiv & p(1 + pg(T)) \mod f(T) \end{array}$$

pour un certain polynôme $g(T)$. Puisque $(1 + pg(T))$ est inversible dans Λ, la multiplication par $\nu_{m-1,m}$ agit comme la multiplication par p sur M. Par conséquent, pour tout $n \geq m_0$, la multiplication par $\nu_{m_0,n}$ agit comme la multiplication par p^{n-m_0} sur M. Ainsi, $M/\nu_{m_0,n}$ est fini de cardinal $p^{\lambda(n-m_0)}$, qui est de la forme voulue en posant $\nu := -\lambda m_0$ puisqu'ici $\mu = 0$.

Passons au cas où M est un Λ-module de torsion quelconque, et considérons un pseudo-isomorphisme $f : M \to E$ entre M et son module élémentaire associé. Si m_0 est un entier tel que les $E/\nu_{m_0,n}E$ sont finis pour tout $n \geq m_0$, les $M/\nu_{m_0,n}M$ sont également finis. Quitte à choisir un plus grand m_0, on peut supposer que $\nu_{m_0,n}$ agit trivialement sur les modules finis $\ker f$ et $\operatorname{coker} f$. De plus, comme $E/\nu_{m_0,n}E$ est fini, la multiplication par $\nu_{m_0,n}$ est injective (son noyau est fini donc nul car un module élémentaire est infini). On vérifie alors que

$$|M/\nu_{m_0,n}M| = |E/\nu_{m_0,n}E| \cdot |\ker f|.$$

Ceci achève la preuve. □

1.3 Adjoints

Dans cette section, M désigne un Λ-module de type fini. On va associer à M deux modules construits fonctoriellement, l'*adjoint* noté $\alpha(M)$ et le *co-adjoint* noté $\beta(M)$. Ces nouveaux modules nous serons utiles pour l'étude de certains modules d'Iwasawa classiques dans la section suivante.

Il découle du théorème de structure que M est un Λ-module de torsion si et seulement si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1,

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{p} | \operatorname{div}(M).$$

Pour les Λ-modules de torsion on a donc une application naturelle

$$\Psi : M \to \bigoplus_{\mathfrak{p} | \operatorname{div}(M)} M_{\mathfrak{p}}.$$

On définit le co-adjoint comme $\beta(M) := \operatorname{coker} \Psi$. Il est clair avec cette définition que $\beta(M)$ est encore un Λ-module de type fini et de torsion. Comme on l'a vu, les Λ-modules pseudo-nuls sont les Λ-modules finis ; il s'en suit que $\ker \Psi$ est le sous-Λ-module fini maximal de M, noté M^0.

Considérons le Λ-module $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\beta(M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ où γ agit sur un élément du dual de Pontrjagin par $\gamma.f(y) = f(\gamma^{-1}.y)$ pour tout $y \in \beta(M)$. Alors, on définit l'adjoint $\alpha(M)$ par $\alpha(M) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\beta(M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Comme $\beta(M)$, $\alpha(M)$ est un Λ-module de torsion et de type fini.

Afin de décrire plus explicitement ces modules, nous aurons besoin de la notion de *suite admissible*. Une suite (π_n) d'éléments non-nuls de Λ est dite M-admissible si $\pi_0 \in \mathfrak{m}$, $\pi_{n+1} \in \pi_n \mathfrak{m}$ pour tout $n \geq 1$, et tous les π_n sont disjoints de $\operatorname{div}(M)$. Cette dernière condition est équivalente à la finitude de $M/\pi_n M$, comme on le voit en raisonnant sur les modules élémentaires.

Proposition 1.11. *Soit M un Λ-module de torsion et soit (π_n) une suite M-admissible. Alors*

$$\beta(M) \cong \varinjlim M/\pi_n M.$$

Démonstration. On a

$$M/\pi_n M \cong M \otimes (\Lambda/\pi_n \Lambda) \cong M \otimes (\frac{1}{\pi_n}\Lambda/\Lambda).$$

Les applications $M/\pi_n M \to M/\pi_{n+1} M$ sont induites par les inclusions

$$\frac{1}{\pi_n}\Lambda/\Lambda \hookrightarrow \frac{1}{\pi_{n+1}}\Lambda/\Lambda\,;$$

en prenant la limite inductive vis-à-vis de ces applications, il vient

$$\begin{aligned} \varinjlim M/\pi_n M &\cong \varinjlim M \otimes (\frac{1}{\pi_n}\Lambda/\Lambda) \\ &\cong M \otimes \varinjlim(\frac{1}{\pi_n}\Lambda/\Lambda) \\ &\cong M \otimes (\bigcup \frac{1}{\pi_n}\Lambda/\Lambda). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante donne deux propriétés importantes des adjoints (cf. [NSW]) :

Proposition 1.12. *Soit M un Λ-module de torsion. Notons $M^\sharp$ le même groupe que M mais où γ agit par γ^{-1}. Alors*

(i) $\alpha(M) \sim M^\sharp$;

(ii) $\alpha(M)$ *n'a pas de sous-Λ-module fini non-nul.*

Proposition 1.13. *Soit M un module de Λ-torsion et (π_n) une suite M-admissible. Alors, pour $m \gg n \gg 0$,* $\ker(M/\pi_n M \xrightarrow{\pi_m/\pi_n} M/\pi_m M) \cong M^0$.

Démonstration. Soit $x \in M$ tel que $\frac{\pi_m}{\pi_n} x \in \pi_m M$. Donc il existe $y \in M$ tel que $\pi_m x = \pi_m \pi_n y$, et ainsi, $x = \pi_n y$ dans $\frac{1}{\pi_m}\Lambda$. Or, $x - \pi_n y = 0$ dans $\frac{1}{\pi_m}\Lambda$ signifie, comme $\pi_m \notin \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} |\operatorname{div}(M)$, que

$$x - \pi_n y \in \ker(M \to \oplus_{\mathfrak{p}|\operatorname{div}(M)} M_{\mathfrak{p}}) = M^0.$$

Réciproquement, on a $\mathfrak{m}^n M^0 = 0$ pour $n \gg 0$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & M/M^0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M/M^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La flèche de gauche est triviale car $\pi_n \in \mathfrak{m}^n$ par définition d'une suite admissible et la flèche de droite est injective car $\pi_n x \in M^0$ implique $x \in M^0$. En réécrivant le diagramme pour la multiplication par π_m avec $m - n \gg 0$, et en appliquant deux fois le lemme du serpent, on obtient un autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
M^0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & M/\pi_n M \arrow[d, "\pi_m/\pi_n"] \\
M^0 \arrow[r, hook] & M/\pi_m M
\end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche est triviale, d'où l'inclusion

$$M^0 \subseteq \ker(M/\pi_n M \xrightarrow{\pi_m/\pi_n} M/\pi_m M).$$

□

Corollaire 1.14. *Soit M un Λ-module et N un sous-Λ-module d'indice fini. Si π_n est une suite N-admissible, on a* $\ker(M/\pi_n N \xrightarrow{\pi_m/\pi_n} M/\pi_m N) \cong M^0$.

1.4 Quelques modules d'Iwasawa standard

Dans cette section, nous passons en revue les propriétés de certains Λ-modules dont nous nous servons aux chapitres 2 & 3.

Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension. Soit K_∞ une pro-p-extension abélienne de F_∞ (dans la suite, K_∞ sera souvent l'extension abélienne non-ramifiée ou p-ramifiée ou non-ramifiée p-décomposée maximale de F_∞). Soit $X := \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$, et supposons que K_∞/F est également galoisienne (ce qui est le cas des extensions particulières pré-citées, par maximalité). Soit enfin $G_\infty := \mathrm{Gal}(K_\infty/F)$. On a la suite exacte de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$0 \to X \to G_\infty \to \Gamma \to 0.$$

Comme X est *abélien*, on peut faire agir Γ par conjugaison. Pour cela, on choisit un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ à G_∞ et l'action sur X ne dépend pas du relèvement. Cette action fait de X un Λ-module *compact*. Si K_n désigne l'extension abélienne maximale de F_n contenue dans K_∞, toute extension finie de F_∞ contenue dans K_∞ est laissée fixe par Γ_n pour un certain n, donc est incluse dans K_n ; il s'en suit que

$$K_\infty = \bigcup_n K_n.$$

Lemme 1.15. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\omega_n X = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n) \text{ et } X/\omega_n X = \mathrm{Gal}(K_n/F_\infty).$$

Démonstration. Comme $\mathrm{Gal}(K_n/F_n)$ est abélien, Γ_n agit trivialement sur le quotient $X/\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$. Donc, puisque $X/\omega_n X = X_{\Gamma_n}$, on a $\omega_n X \subseteq \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$.

Réciproquement, si l'on note $X/\omega_n X = \mathrm{Gal}(E/F_\infty)$ pour un certain sous-corps E de K_∞, le fait que Γ_n agisse trivialement sur $X/\omega_n X$ implique que $\mathrm{Gal}(E/F_n)$ est abélien donc $E \subseteq K_n$ et $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n) \subseteq \omega_n X$. $\square$

De ce lemme et de l'égalité $K_\infty = \bigcup_n K_n$, on déduit que $X = \varprojlim X/\omega_n X$ où la limite projective est prise pour les applications restrictions.

Soit S un ensemble fini de places de F. Une extension M/L contenant F est dite S-*décomposée* si toutes les places de L au-dessus de S sont totalement décomposées dans M. Comme il est d'usage, on notera L_∞^S la pro-p-extension S-décomposée non-ramifiée abélienne maximale de F_∞ (notée L'_∞ quand $S = S_p$, les places au-dessus de p, et L_∞ quand $S = \emptyset$). On pose

$$X_\infty^S := \mathrm{Gal}(L_\infty^S/F_\infty).$$

Soit L_n^* l'extension abélienne maximale de F_n contenue dans L_∞^S et L_n^S la p-extension S-décomposée non-ramifiée abélienne maximale de F_n. Enfin, A_n^S désigne la partie p-primaire du groupe des S-classes de F_n. La théorie du corps de classes donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(L_{n+1}^S/F_{n+1}) & \xrightarrow{\simeq} & A_{n+1}^S \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{norme}} \\ \mathrm{Gal}(L_n^S/F_n) & \xrightarrow{\simeq} & A_n^S \end{array}$$

On montre facilement que $L_\infty^S = \bigcup L_n^S F_\infty$, ce qui donne

$$X_\infty^S = \varprojlim A_n^S,$$

où la limite projective est prise pour la norme. On montre également que X_∞^S est un Λ-module de type fini et de torsion. Le théorème suivant est crucial dans l'étude des A_n^S. On rappelle que n_0 est le plus petit entier n tel que F_∞/F_n soit totalement ramifiée (cf. proposition 1.2).

Théorème 1.16. *Soit $Y_\infty^S := \mathrm{Gal}(L_\infty^S/L_{n_0}^S F_\infty)$; alors, pour tout $n \geq n_0$,*

$$A_n^S \cong X_\infty^S/\nu_{n_0,n} Y_\infty^S.$$

Corollaire 1.17. *Soit μ et λ les invariants du Λ-module X_∞^S. Alors il existe une constante ν telle que pour tout $n \gg 0$,*

$$|A_n^S| = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}.$$

Démonstration. Puisque $X_\infty^S/Y_\infty^S \cong A_{n_0}^S$, l'inclusion $Y_\infty^S \hookrightarrow X_\infty^S$ est un pseudo-isomorphisme. On conclut avec la proposition 1.10. $\square$

Corollaire 1.18. *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension dans laquelle une place exactement se ramifie. Supposons également que cette place est totalement ramifiée. Alors, pour tout $n \geq 0$,*

$$A_n^S \cong X_\infty^S/\omega_n X_\infty^S.$$

Démonstration. De manière générale, le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty^S/F)$ est engendré par son sous-groupe dérivé $\omega_0 X_\infty^S$ et les groupes d'inertie relatifs aux p-places. Ici, il n'y en a qu'un, notons-le I. On a clairement $Y_\infty^S \cap I = 0$, donc $I \cong \Gamma$ et $\mathrm{Gal}(L_\infty^S/L_n^S) = Y_\infty^S I$. Ainsi, $Y_\infty^S = \omega_0 X_\infty^S$ et $\nu_{n_0,n} Y_\infty^S = \omega_n X_\infty^S$ avec le théorème 1.16. $\square$

Corollaire 1.19. *On a $A_\infty \sim \beta(X_\infty)$.*

Quand $S = S_p$, les places au-dessus de p, en notera avec un « prime » les objets relatifs à S_p. Ainsi, A'_n désigne le (p)-groupe de classes de F_n.

Proposition 1.20. *Supposons que F est un corps CM et soit F_∞/F sa $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Pour tout $m \geq n \geq 0$, la flèche naturelle*

$$A'^{-}_n \to A'^{-}_m$$

est injective.

Démonstration. On sait (cf. [Iw1], « Theorem 12 ») que

$$\ker(A'_n \to A'_m) \cong H^1(\mathrm{Gal}(F_m/F_n), U'_m),$$

où U'_m désigne les (p)-unités de F_m. Or, comme F_m est CM, on a $(U'_m)^- = \mu(F_m)$; comme de manière générale, si $L = K(\mu(L))$, $\mu(L)$ est un $\mathrm{Gal}(L/K)$-module cohomologiquement trivial, on conclut. □

Remarque : la proposition 1.20 est également valable pour la partie moins A_n^- des groupes de classes : on a l'inclusion

$$\ker(A_n \to A_m) \hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(F_m/F_n), U_m)$$

et $U_m^- = \mu(F_m)$.

Notons $\mathfrak{X}_\infty$ le Λ-module $\mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$, où F_∞/F est une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque et M_∞ est la pro-p extension p-ramifiée abélienne maximale de F_∞. Si l'on note M_n l'extension abélienne maximale de F_n contenue dans M_∞, on a, d'après (1.1),

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Gal}(M_n/F_n) = 1 + r_2(F_n) + \delta_n$$

où δ_n est le défaut de Leopoldt pour le corps F_n. De là, il vient $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty/\omega_n\mathfrak{X}_\infty = r_2(F)p^n + \delta_n$. Soit $r := \mathrm{rg}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$; d'après le théorème de structure, $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty/\omega_n \mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)$ est borné par $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{X}_\infty)$ et comme $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \Lambda/\omega_n\Lambda = p^n$, on obtient

$$rp^n \leq \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty/\omega_n\mathfrak{X}_\infty \leq rp^n + \lambda;$$

d'où le théorème :

Théorème 1.21. *On a $\mathrm{rg}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \geq r_2(F)$ avec égalité si et seulement si les défauts de Leopoldt δ_n des corps F_n sont bornés indépendamment de n.*

Posons $\delta_\infty := \mathrm{rg}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty - r_2(F)$ (donc $\delta_\infty = 0$ si l'on admet la conjecture de Leopoldt, puisqu'alors on a $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty/\omega_0\mathfrak{X}_\infty = r_2$, donc $r_2 = \mathrm{rg}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$). On dit que F_∞/F satisfait la *conjecture faible de Leopoldt* si $\delta_\infty = 0$. On va montrer, en suivant fidèlement [K3], que la conjecture faible de Leopoldt est vraie pour la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Soit Ω_S l'extension algébrique p-ramifiée maximale de F et notons $G_{S,\infty}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\Omega_{S,\infty}/F_\infty)$.

Lemme 1.22. *L'extension F_∞/F vérifie la conjecture faible de Leopoldt si et seulement si $H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$.*

Démonstration. On a

$$H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0 \Leftrightarrow H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma = 0$$

car $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est un Γ-module discret. La suite spectrale de Hochschild-Serre en basse dimension (cf. [NSW], 2.1.5) plus le fait que la p-dimension cohomologique de Γ est 1 donne :

$$0 \to H^1(\Gamma, H^1(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \to H^2(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma \to 0,$$

où $G_S = \mathrm{Gal}(\Omega_S/F)$. Comme $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est un $G_{S,\infty}$-module trivial, que $\mathfrak{X}_\infty = G_{S,\infty}^{\mathrm{ab}}$ et que $D_F^* \cong H^2(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ par dualité de Poitou-Tate, il vient, en dualisant la suite exacte précédente :

$$0 \to (H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma)^* \to D_F \to \mathfrak{X}_\infty^\Gamma \to 0.$$

(On rappelle que D_F est le noyau de Leopoldt.) Comme D_F est $\mathbb{Z}_p$-libre, le module $(H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma)^*$ l'est aussi et

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\Gamma)^* = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} D_F - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty^\Gamma.$$

D'après le théorème de structure, $\mathrm{rg}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty^\Gamma$, donc $\delta_\infty = \delta_F - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_\infty^\Gamma$, et on conclut. □

Proposition 1.23. *La $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique vérifie la conjecture faible de Leopoldt.*

Démonstration. La conjecture faible de Leopoldt satisfait clairement la descente donc on peut supposer que F contient μ_p. Alors, d'après la proposition 4, Chap. 2 de [Se], la p-dimension cohomologique de $G_{S,\infty}$ est 1. On conclut avec le lemme précédent. □

Théorème 1.24. *Supposons que F_∞/F vérifie la conjecture faible de Leopoldt ; alors le module $\mathfrak{X}_\infty$ n'a pas de sous-Λ-module fini non-nul.*

Démonstration. D'après le lemme 1.22, $H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, on a donc

$$H^2(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\Gamma_n} = 0$$

pour tout n. Par conséquent, $D_{F_n} = \mathfrak{X}_\infty^{\Gamma_n}$ pour tout n. Soit A un sous-Λ-module fini de $\mathfrak{X}_\infty$; A est invariant par Γ_n pour n assez grand, donc s'identifie à un sous-groupe de D_{F_n}. Or D_{F_n} est sans torsion, ce qui conclut le théorème. □

1.5 La conjecture principale

Soit F un corps de nombres totalement réel et p un nombre premier impair. Notons $G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ où $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F, et soit χ un caractère *pair* de dimension 1 de G_F.

On désigne par F_χ le corps attaché à χ, *i. e.*, χ est le caractère d'une représentation fidèle de $\mathrm{Gal}(F_\chi/F)$. Soit $\omega : \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F) \to \mu_{p-1}$ le caractère de Teichmüller ; Deligne et Ribet ont montré qu'il existe une unique fonction L p-adique continue $L_p(s, \chi)$

définie sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ (et sur $\mathbb{Z}_p$ tout entier si χ n'est pas trivial) satisfaisant la propriété d'interpolation

$$L_p(1-n,\chi) = L(1-n,\chi\omega^{-n}) \prod_{\mathfrak{p}|p} (1-\chi\omega^{-n}(\mathfrak{p}))N\mathfrak{p}^{n-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$. La fonction $L(1-n,\chi)$ est la fonction L de Dirichlet habituelle définie par

$$L(1-n,\chi) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\chi/F)} \chi(\sigma)\zeta_F(\sigma, 1-n),$$

où $\zeta_F(\sigma, 1-n)$ est la fonction zêta partielle associée à F.

Soit γ un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ et notons κ le caractère cyclotomique. Définissons $H_\chi(T)$ par

$$(\chi(\gamma)(1+T)-1)$$

si $F_\chi \subset F_\infty$, et par 1 sinon. Alors il existe une unique série formelle $G_\chi(T) \in \mathbb{Z}_p(\chi)[\![T]\!]$ telle que

$$L_p(1-s,\chi) = G_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1)/H_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1).$$

La conjecture principale relie un objet de type analytique (comme la série $G_\chi(T)$) et un objet de type algébrique (un polynôme caractéristique). Il existe plusieurs énoncés équivalents de la conjecture principale, selon l'objet algébrique considéré. Nous nous intéressons particulièrement au module standard d'Iwasawa. Soit $H := F_\chi(\mu_p)$, H_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique et M_∞ la pro-p extension p-ramifiée abélienne maximale. Posons $\mathfrak{X}_\infty := \mathrm{Gal}(M_\infty/H_\infty)$ et soit $V := \mathfrak{X}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ l'espace vectoriel correspondant. Alors, pour tout caractère pair de $\Delta := \mathrm{Gal}(H/F)$, $W(\chi)$ est un espace vectoriel de dimension finie et on appelle $h_\chi(T)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme associé à $\gamma_0 - 1$. La conjecture principale, prouvée dans le cas absolu par [MW] et au-dessus d'un corps totalement réel par [Wi] peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1.25 (conjecture principale). *Pour un caractère pair χ tel que $F_\chi \cap F_\infty = F$ (on dit que χ est de* première espèce*),*

$$\mathrm{char}\, \mathfrak{X}_\infty = (h_\chi(T)) = (G_\chi(T))^*,$$

où l'on a écrit à l'aide du théorème de préparation de Weierstraß, $G_\chi = \pi^\mu G_\chi^* u$, π étant une uniformisante de $\mathbb{Z}_p(\chi)$ et u une série inversible.

Chapitre 2

Autour de la conjecture de Coates-Sinnott

2.1 Invariants de Fitting

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'idéal de Fitting et nous décrivons ses principales propriétés. Il n'existe pas vraiment de référence classique sur le sujet (à part peut-être [No]) et certaines des propriétés données ici ont été glanées dans l'appendice de [MW], dans les articles de Greither ou sont inédites (à tout le moins, leur preuve est inédite).

2.1.1 Définition et premières propriétés

Soit A un anneau commutatif unitaire et M un A-module de type fini. Alors, pour un certain $r \in \mathbb{N}$ et $B \subseteq A^r$, il existe une suite exacte

$$0 \to B \xrightarrow{\phi} A^r \xrightarrow{\psi} M \to 0.$$

Considérons les matrices $r \times r$ de la forme $\Phi = \begin{pmatrix} \phi(b_1) \\ \vdots \\ \phi(b_r) \end{pmatrix}$ où $(b_1, \ldots, b_r)$ parcourt les r-uplets formés d'éléments de B. *L'idéal de Fitting* $\mathrm{Fitt}_A(M)$ est l'idéal de A engendré par les $\det \Phi$.

Lemme 2.1. *L'idéal* $\mathrm{Fitt}_A(M)$ *est indépendant du choix de la résolution de* M *; c'est donc un invariant du* A*-module* M*.*

Démonstration. Étant données deux représentations $A^r \to M \to 0$ et $A^s \to M \to 0$ de M, notons $x = (x_1, \ldots, x_r)$ et $y = (y_1, \ldots, y_s)$ les images respectives des vecteurs unités de A^r et de A^s. Notons $I_r(x)$ l'idéal engendré par les déterminants des matrices de relations de x. Nous allons montrer que $I_r(x) = I_{r+s}(x,y) = I_s(y)$. Formons la matrice de relations

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sr} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det R = \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$, donc $I_r(x) \subseteq I_{r+s}(x,y)$.

Réciproquement, considérons la matrice de relations

$$Q = \begin{pmatrix} & & & C & & & \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sr} & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

où C est une matrice de relations entre les générateurs (x,y). Après des opérations élémentaires sur les colonnes conservant le déterminant, Q peut être transformée en

$$Q' = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ B & I_s \end{pmatrix},$$

où I_s est la matrice identité d'ordre s, C' est une matrice de relations pour x et $B = (b_{ij})$ avec $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq r$. Cette manipulation étant valable pour toute matrice de relations C entre x et y, on en déduit que $I_{r+s}(x,y) \subseteq I_r(x)$, d'où par symétrie, $I_r(x) = I_s(y)$. $\square$

Dorénavant dans cette section, tous les modules considérés sont de type fini sur A. Notons $\mathrm{Ann}(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}$ l'annulateur de M.

Proposition 2.2. *Si M peut être engendré par r générateurs, alors*

$$(\mathrm{Ann}(M))^r \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M) \subseteq \mathrm{Ann}(M).$$

Démonstration. Soit $x_1, \ldots, x_r$ des générateurs de M et $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathrm{Ann}(M)$. Alors la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux les $a_1, \ldots, a_r$ est une matrice de relations pour les x_i, d'où il vient

$$(\mathrm{Ann}(M))^r \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M).$$

Soit R une matrice de relations $r \times r$ pour les x_i. Notons $x = {}^t(x_1, \ldots, x_r)$; on a $R.x = 0$ et si $\tilde{R}$ désigne la co-matrice de R, l'égalité $\tilde{R}R = \det(R) I_r$ implique que $\det(R).x_i = 0$ pour tout i, d'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.3. *Soit $M \to M' \to 0$ une surjection de A-modules. Alors*

$$\mathrm{Fitt}_A(M) \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M').$$

Démonstration. Clair. □

Proposition 2.4. *Soit*

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{s} M'' \to 0$$

une suite exacte de A-modules. Alors

$$\mathrm{Fitt}_A(M')\,\mathrm{Fitt}_A(M'') \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M).$$

Démonstration. Considérons un système de générateurs $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de M' et un système de générateurs $(s(y_1), \ldots, s(y_q))$ de M''. Notons $y = (y_1, \ldots, y_q)$. Alors (x, y) engendre M. Soit P une matrice de relations de taille $q \times q$ pour les $s(y_i)$. Si $(a_1, \ldots, a_q)$ est une telle relation, $\sum_{1 \le i \le q} a_i s(y_i) = 0$, donc $\sum_{1 \le i \le q} a_i y_i \in \ker s = M'$; ainsi on peut trouver des $b_j \in A$ tels que

$$\sum_{1 \le i \le q} a_i y_i + \sum_{1 \le j \le q} b_j x_j = 0.$$

Il existe donc une matrice Q de taille $q \times p$ telle que (Q, P) soit une matrice de relations pour (x, y). On complète par une matrice de relations R de taille $p \times p$ pour x ; alors

$$S := \begin{pmatrix} Q & P \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de relations pour (x, y). Comme $\det(S) = \pm \det(R) \det(P)$, ceci termine la preuve. □

Proposition 2.5. *Si $M \cong M_1 \times M_2$ est un produit direct de A-modules, alors*

$$\mathrm{Fitt}_A(M) = \mathrm{Fitt}_A(M_1).\,\mathrm{Fitt}_A(M_2).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3, on a

$$\mathrm{Fitt}_A(M) \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M_1).\,\mathrm{Fitt}_A(M_2).$$

L'autre inclusion découle de la proposition 2.4. □

Proposition 2.6. *Si M est une somme directe de A-modules cycliques, $M \cong A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r)$, alors*

$$\mathrm{Fitt}_A(M) = \prod_{1 \le i \le r} a_i.$$

Démonstration. La suite exacte

$$0 \to (a_i) \to A \to A/(a_i) \to 0$$

donne $\mathrm{Fitt}_A(A/(a_i)) = (a_i)$ et la proposition 2.5 permet de conclure. □

Proposition 2.7. *Soit I un idéal de A. Alors*

$$\mathrm{Fitt}_{A/I}(M/IM) = \mathrm{Fitt}_A(M) \bmod I.$$

Démonstration. Soit $x_1, \ldots, x_r$ des générateurs de M. Notons $\bar{a} = a + I$ pour $a \in A$ et $\tilde{x} = x + IM$ pour $x \in M$. Les $\tilde{x}_i$ engendrent M/IM et une relation $\sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i = 0$ induit une relation $\sum_{1 \leq i \leq r} \bar{a}_i \tilde{x}_i = \tilde{0}$. Comme le déterminant et la classe modulo I commutent, on en déduit que

$$\mathrm{Fitt}_A(M) \bmod I \subseteq \mathrm{Fitt}_{A/I}(M/IM).$$

Réciproquement, considérons une relation $\sum_{1 \leq i \leq r} \bar{a}_i \tilde{x}_i = \tilde{0}$ entre les $\tilde{x}_i$. Cette relation se remonte en une relation de la forme $\sum_{1 \leq i \leq r} (a_i - c_i) x_i = 0$, où les $c_i \in I$. Toujours par commutation du déterminant et de la classe modulo I, on en déduit l'inclusion

$$\mathrm{Fitt}_{A/I}(M/IM) \subseteq \mathrm{Fitt}_A(M) \bmod I.$$

□

Proposition 2.8. *Soit S une partie multiplicative de A et M un A-module. Alors le localisé M_S est un A_S-module et*

$$\mathrm{Fitt}_{A_S}(M_S) = (\mathrm{Fitt}_A(M))_S.$$

Démonstration. Soit $\sum_i a_i x_i$ une relation de M. Alors pour tout $s \in S$, on a également $\sum_i (a_i/s) x_i = 0$ donc

$$(\mathrm{Fitt}_A(M))_S \subseteq \mathrm{Fitt}_{A_S}(M_S).$$

Réciproquement, soit $\sum_i (a_i/s_i) x_i$ une relation de M_S. On peut écrire cette relation sous la forme $\sum_i (b_i/s) x_i = 0$, où $b_i \in A$. Ceci signifie que $\exists s' \in S$, $s' \sum_i b_i x_i = 0$. On en déduit alors l'inclusion

$$\mathrm{Fitt}_{A_S}(M_S) \subseteq (\mathrm{Fitt}_A(M))_S.$$

□

2.1.2 Propriétés plus avancées et idéaux de Fitting de Λ-modules

Sot $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ l'algèbre d'Iwasawa et considérons une extension finie non-ramifiée $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Z}_p$. On désignera par Λ' l'algèbre $\mathcal{O}[[T]]$. Si π est une uniformisante de $\mathcal{O}$, on sait (cf. proposition 1.7) que les idéaux premiers de Λ' sont de la forme $0, (\pi, T), (\pi)$ et $P(T)$, où $P(T)$ est irréductible et distingué (*i. e.*, P s'écrit $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in (\pi)$ pour $0 \leq i \leq n-1$). L'idéal (π, T) est l'unique idéal maximal (donc Λ' est local) et c'est le seul idéal premier de hauteur 2. De plus, (π, T) est une suite régulière pour Λ'.

Nous allons avoir besoin d'un résultat d'algèbre commutative.

Lemme 2.9. *Si I et J sont deux idéaux principaux de Λ' dont les localisés aux idéaux premiers de hauteur 1 coincident, alors $I = J$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{m} := (\pi, T)$ l'idéal maximal de Λ' et introduisons l'ensemble $W := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\ \Lambda' : I_{\mathfrak{q}} = J_{\mathfrak{q}}\}$ qui est un ouvert pour la topologie de Zariski. Par suite, son complémentaire V est fermé et il existe par conséquent un idéal $\mathfrak{a}$ de Λ' tel que $V = V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\ \Lambda' : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}\}$.

Soit $\mathfrak{a} = \prod_{i \leq r} \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$ la décomposition primaire de $\mathfrak{a}$. Par hypothèse, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de hauteur 1, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}$, donc comme $\mathfrak{m}$ est le seul idéal premier qui ne soit pas de hauteur 1, $\mathfrak{a}$ est nécessairement une puissance de $\mathfrak{m}$, disons $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^e$. Ainsi, $x := \pi^e \in \mathfrak{a}$ et $y := T^e \in \mathfrak{a}$. Posons $S_x := \{x^i, i \in \mathbb{N}\}$ et $S_y := \{y^j, j \in \mathbb{N}\}$. Les localisés I_{S_x} et J_{S_x} coïncident car $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(x)$. De même, $I_{S_y} = J_{S_y}$.

Soit $I = (f)$ et $J = (g)$; les égalités précédentes se traduisent par l'existence de $i, j \in \mathbb{N}$ et de $r, s \in \Lambda'$ tels que $x^i f = rg$ et $y^j f = sg$. Ceci implique en particulier que $y^j r = x^i s$ car f n'est pas un diviseur de 0.

On a $y^j r = 0 \bmod x\Lambda'$ et l'image de y n'est pas un diviseur de 0 dans $\Lambda'/x\Lambda'$ car (x, y) est une suite régulière ; par conséquent $x \mid r$ et quitte à recommencer l'opération en posant $r = xr_1$, on peut prouver par récurrence sur i que $x^i \mid r$. Mais alors $f \in (g)$, et par symétrie, $(f) = (g)$. □

Rappelons en quelques mots ce qu'est la *dimension projective* d'un A-module M. On dit que la dimension projective de M est au plus n (que l'on notera $\mathrm{pd}_A\, M \leq n$) s'il existe une résolution projective

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Si n est le plus petit entier tel qu'il existe une telle résolution, on dit que la dimension projective de M est égale à n. Si aucune résolution projective finie n'existe, on conviendra que la dimension projective de M est infinie. Enfin, on a la caractérisation suivante : M est de dimension projective inférieure ou égale à 1 sur $\mathbb{Z}[G]$ si et seulement si M est G-cohomologiquement trivial (voir e.g. [CF]).

Si M est un Λ'-module de torsion et de type fini, on a par le théorème de structure 1.8 un pseudo-isomorphisme
$$M \sim \oplus_j \Lambda'/(f_j(T)),$$
où les f_j sont des polynômes de Λ'. On rappelle que l'on a défini l'idéal caractéristique de M par
$$\operatorname{char} M := (\prod_j f_j(T)).$$
L'idéal caractéristique est un invariant de M, principal par définition, et il est égal à l'idéal de Fitting de M lorsque celui-ci est de dimension projective inférieure ou égale à 1 :

Proposition 2.10 ([G1],« Lemma 3.5 »). *Soit M un Λ'-module de torsion et de dimension projective inférieure ou égale à 1. Alors*
$$\operatorname{Fitt}_{\Lambda'}(M) = \operatorname{char} M.$$

Démonstration. Le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau nœthérien intègre par un idéal premier principal $\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète, en particulier principal. Donc pour les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de Λ' de hauteur 1 (*i. e.*, $\mathfrak{p} = (\pi)$ ou $\mathfrak{p} = (P(T))$ avec P distingué), l'anneau local $\Lambda'_{\mathfrak{p}}$ est principal. La proposition 2.6 nous donne alors que
$$\operatorname{char}_{\Lambda'_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Fitt}_{\Lambda'_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}.$$
Or,
$$(\oplus_j \Lambda'/(f_j(T)))_{\mathfrak{p}} \cong \oplus \Lambda'_{\mathfrak{p}}/(f_j(T))_{\mathfrak{p}},$$
donc
$$\operatorname{char}_{\Lambda'_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{char}_{\Lambda'} M)_{\mathfrak{p}}.$$

De plus, en appliquant la proposition 2.8, il vient
$$\operatorname{char}_{\Lambda'_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Fitt}_{\Lambda'_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{Fitt}_{\Lambda'} M)_{\mathfrak{p}}.$$
Enfin, l'hypothèse sur la dimension projective de M implique que l'idéal $\operatorname{Fitt}_{\Lambda'}(M)$ est principal.

En effet, Λ' étant local, les modules projectifs sont les modules libres et on a une résolution de la forme
$$0 \to (\Lambda')^n \xrightarrow{f} (\Lambda')^m \to M \to 0,$$
et comme M est de torsion, nécessairement $m = n$, si bien que $\operatorname{Fitt}_{\Lambda'}(M) = (\det f)$.

On se retrouve ainsi en mesure d'appliquer le lemme 2.9 puisque les localisés des deux idéaux principaux $\operatorname{char} M$ et $\operatorname{Fitt}_{\Lambda'} M$ coïncident pour les idéaux premiers de hauteur 1 ; d'où le résultat. $\square$

Soit G un groupe abélien fini, $\mathcal{O}$ une extension d'anneau finie de $\mathbb{Z}_p$, et N un $\mathbb{Z}_p[G]$-module. Nous noterons N^* le *dual de Pontrjagin* de N, *i. e.*, le groupe $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ où l'action de $g \in G$ est définie par $(g.\theta)(n) := \theta(g^{-1}.n)$ pour tout $\theta \in \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et tout $n \in N$.

Proposition 2.11 ([LF], « Lemma 3 »). *Soit N un $\mathcal{O}[G]$-module fini de dimension projective inférieure ou égale à 1 sur $R := \mathcal{O}[G]$. Alors,* $\mathrm{Fitt}_R\, N = \mathrm{Fitt}(N^*)^\sharp$.

Démonstration. Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_R(., R)$ à une résolution

$$0 \to R^m \xrightarrow{f} R^m \to N \to 0.$$

Nous obtenons

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, R) \to \mathrm{Hom}_R(R^m, R) \xrightarrow{{}^t f} \mathrm{Hom}_R(R^m, R) \to \mathrm{Ext}^1_R(N, R) \to 0.$$

Puisque N est fini, on a $\mathrm{Hom}_R(N, R) = 0$, et $\mathrm{Hom}_R(R^m, R) \cong R^m$ car R^m est libre sur R. De plus, toujours à cause de la finitude de R, on a $\mathrm{Ext}^1_R(N, R) \cong (N^*)^\sharp$; en effet, $\mathrm{Ext}^1_R(N, R) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p}(N, \mathbb{Z}_p)$ par restriction, et il est bien connu que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p}(N, \mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(N^*)^\sharp$, d'où le résultat. $\square$

2.2 K-groupes de Quillen et K-groupes étales

Dans cette section, nous rappelons – sans démonstration – les principales définitions et propriétés des K-groupes et des K-groupes étales. Nous utilisons ces derniers dans les paragraphes 2.4 & 2.5 (sur la conjecture de Coates-Sinnott) et nous verrons le lien entre la K-théorie étale et la théorie d'Iwasawa au paragraphe 2.4. Notre principale référence pour la présente section est [K1] qui synthétise bien la situation et évoque les développements récents dus à Voevodsky et Rost sur les conjectures de Bloch-Kato.

2.2.1 Les premiers groupes de K-théorie

Soit R un anneau unitaire. Le *groupe de Grothendieck* $K_0(R)$ est par définition le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[P]$ des R-modules à gauche projectifs de type fini P, quotienté par le sous-groupe engendré par la relation

$$[P] + [Q] - [P \oplus Q].$$

Deux classes d'isomorphisme $[P]$ et $[Q]$ sont égales dans $K_0[R]$ si et seulement si P et Q sont stablement isomorphes, c'est-à-dire, $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$ pour un certain n. L'exemple le plus important en arithmétique est le cas des anneaux de Dedekind (les anneaux d'entier d'un corps de nombres, par exemple) puisqu'alors, $K_0(R)$ est « presque » le groupe de classes, comme le montre le théorème suivant (voir par exemple [Mi])

Théorème 2.12. *Soit R un anneau de Dedekind ; alors il y a un isomorphisme canonique*

$$K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus Cl(R),$$

où $Cl(R)$ est le groupe de classes de R.

Le groupe abélien $K_1(R)$ est défini comme l'abélianisé du groupe linéaire infini $GL(R) = \cup_{n \geq 1} GL_n(R)$, on a donc

$$K_1(R) := GL(R)/DGL(R),$$

où $DGL(R)$ est le groupe dérivé de $GL(R)$. On peut montrer que $E(R) := \cup_{n \geq 1} E_n(R)$, le groupe infini constitué de toutes les matrices $E_{ij}(a) := I_n + ae_{ij}$, où I_n est la matrice identité de taille n, les e_{ij} sont les matrices élémentaires habituelles et $a \in R$, est le sous-groupe dérivé de $GL(R)$ (ce résultat est connu sous le nom de « lemme de Whitehead ») et découle des relations

$$\begin{array}{rcll} E_{ij}(a)E_{ij}(b) & = & E_{ij}(a+b), & \\ [E_{ij}(a), E_{jk}(b)] & = & E_{ik}(ab) & \text{si } i \neq k, \\ [E_{ij}(a), E_{lk}(b)] & = & 1 & \text{si } i \neq k, j \neq l, \end{array} \tag{2.1}$$

où [,] désigne les commutateurs.

Supposons à présent que R est commutatif ; alors le déterminant induit une décomposition canonique

$$K_1(R) \cong R^\times \oplus SK_1(R),$$

où $SK_1(R) := SL(R)/E(R)$, et $SL(R)$ est le groupe spécial linéaire infini. Pour le cas qui intéresse l'arithmétique, on a le résultat non-trivial suivant, qui découle de la solution au problème du sous-groupe de congruence ([BMS]).

Théorème 2.13. *Si R est l'anneau des entiers d'un corps de nombres, alors $SK_1(R)$ est trivial donc*

$$K_1(R) \cong R^\times.$$

Soit $St(R)$ le groupe abélien libre de générateurs $x_{ij}(a), i \neq j, a \in R$, modulo les relations universelles 2.1. C'est le *groupe de Steinberg* ; comme $E(R)$ est un groupe parfait (*i. e.*, égal à son groupe dérivé), il admet une extension centrale universelle, et l'on peut montrer que $St(R)$ est l'extension centrale universelle de $E(R)$ (cf [Mi]). Milnor définit ensuite $K_2(R)$ comme le noyau de la surjection naturelle $St(R) \twoheadrightarrow E(R)$.

Cette définition implique en particulier que $K_2(R)$ est abélien puisque c'est le centre de $St(R)$. De plus, et cette formulation va servir à introduire les K-groupes supérieurs, la théorie des extensions centrales universelles nous fournit l'isomorphisme

$$K_2(R) \cong H_2(E(R), \mathbb{Z}).$$

Matsumoto a donné une expression explicite de $K_2(F)$ quand F est un corps, en terme de symboles universels.

$$K_2(F) = F^* \otimes F^* / < u \otimes (1-u) \, ; u \neq 1 > .$$

2.2.2 K-groupes supérieurs et construction de Quillen

Milnor a ensuite introduit à la suite de Matsumoto les K-groupes supérieurs $K_n^M(F)$ d'un corps F (voir [Mi]) – appelés *K-groupes de Milnor* – définis comme le quotient du n-ième produit tensoriel $F^* \otimes \cdots \otimes F^*$ par les $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ vérifiant $u_i + u_j = 0$ pour un certain $i \neq j$. Soit m un entier premier à la caractéristique de F. Alors le « cup-produit » induit un morphisme

$$g_{n,m} : K_n^M(F)/m \to H^n(F, \mu_m^{\otimes n}).$$

Milnor a conjecturé que pour $m = 2$, les flèches $g_{n,2}$ sont des isomorphismes ; Bloch et Kato ont étendu cette conjecture à toutes les valeurs de m. Mercuriev et Suslin ont prouvé les conjectures de Bloch-Kato pour $n = 2$ et F un corps quelconque ([MS]). Ensuite, Voevodsky a démontré la conjecture de Milnor pour des corps quelconques et a esquissé une approche générale des conjectures de Bloch-Kato. Voevodsky a annoncé récemment (2002)une preuve des conjectures de Bloch-Kato (en s'appuyant sur un résultat de Rost).

Nous nous intéressons maintenant à la définition qu'a donnée Quillen des groupes de K-théorie supérieurs. On a vu au cours de la section précédente que

$$K_1(R) \cong H_1(GL(R), \mathbb{Z})$$

et

$$K_2(R) \cong H_2(E(R), \mathbb{Z}) \to H_2(GL(R), \mathbb{Z}).$$

Ainsi, $K_1(R)$ et $K_2(R)$ sont intimement liés à l'homologie entière de $GL(R)$. C'est en partant de ce constat que Quillen s'est mis en quête d'un espace topologique dont l'homologie entière en tant qu'espace est proche de celle de $GL(R)$, pour ensuite définir les K-groupes supérieurs comme étant les groupes d'homotopie de cet espace. Dans une première étape, considérons l'espace classifiant $BGL(R)$ de $GL(R)$. À équivalence d'homotopie près, cet espace est caractérisé par le fait qu'il est connexe et que ses groupes d'homotopie sont

$$\pi_1(BGL(R)) \cong GL(R),$$
$$\pi_i(BGL(R)) = 0 \text{ pour } i \geq 2.$$

De plus,

$$H_n(BGL(R), \mathbb{Z}) \cong H_n(GL(R), \mathbb{Z})$$

pour tout $n \geq 0$. La construction « plus » de Quillen ajoute des 2-cellules et des 3-cellules à $BGL(R)$ de telle sorte que le nouvel espace, noté $BGL(R)^+$, possède la même homologie entière que $BGL(R)$ et l'inclusion $BGL(R) \to BGL(R)^+$ induit l'application quotient

$$\pi_1(BGL(R)) \cong GL(R) \to \pi_1(BGL(R)^+) \cong GL(R)/E(R).$$

Pour tout anneau R et tout entier $n \geq 1$, les groupes de K-théorie supérieurs $K_n(R)$ sont alors définis par

$$K_n(R) := \pi_n(BGL(R)^+).$$

On a donc un homomorphisme

$$K_n(R) \to H_n(BGL(R)^+, \mathbb{Z}) = H_n(GL(R), \mathbb{Z}),$$

appelé *morphisme d'Hurewicz*. Pour $n = 1$, on obtient comme auparavant

$$K_1(R) = H_1(GL(R), \mathbb{Z}) = GL(R)/E(R).$$

Dans le cas $n = 2$, comme $BE(R)^+$ est le revêtement universel de $BGL(R)^+$ et que $\pi_1(BE(R)^+)$ est trivial, il vient

$$K_2(R) = \pi_2(BGL(R)^+) = \pi_2(BE(R)^+) = H_2(BE(R)^+, \mathbb{Z}) = H_2(E(R), \mathbb{Z}),$$

donc la définition de Quillen de $K_2(R)$ coïncide avec celle de Milnor.

Soit $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers d'un corps global. On a l'important théorème suivant, dû à Quillen ([Qu]).

Théorème 2.14. *Pour tout $n \geq 0$, les groupes de K-théorie $K_n(\mathcal{O}_F)$ sont de type fini.*

Les rangs de ces groupes de type fini ont ensuite été déterminés par Borel ([Bo]). Soit r_1 le nombre de plongements réels de F et $2r_2$ le nombre de plongements complexes de F.

Théorème 2.15. *Pour $n \geq 1$, les groupes $K_{2n}(\mathcal{O}_F)$ sont finis et*

$$rg_{\mathbb{Z}}(K_{2n-1}(\mathcal{O}_F)) = \begin{cases} r_1 + r_2 & \textit{si } n \textit{ est impair supérieur à 1,} \\ r_2 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Les résultats de Borel indiquent que les K-groupes pairs sont l'analogue supérieur du groupe de classes et que les K-groupes impairs sont l'analogue supérieur du groupe des unités. Une des conséquences de la construction topologique des K-groupes est la suite exacte longue de localisation, qui fournit notamment dans le cas des anneaux d'entiers d'un corps global l'isomorphisme

$$K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \cong K_{2n-1}(F)$$

pour tout $n \geq 2$, et les suites courtes exactes

$$0 \to K_{2n}(\mathcal{O}_F) \to K_{2n}(F) \to \oplus_{\mathfrak{p}} K_{2n-1}(k_{\mathfrak{p}}) \to 0,$$

où $k_{\mathfrak{p}}$ est le corps résiduel en la place finie $\mathfrak{p}$.

2.2.3 K-groupes étales

Dans cette section, nous intoduisons les K-groupes étales qui sont définis à l'aide de la cohomologie étale. Pour les besoins qui seront les nôtres, c'est-à-dire quand R est l'anneau des entiers d'un corps global F, la cohomologie galoisienne suffit. Fixons un premier p différent de la caractéristique de F et soit S l'ensemble des places de F au-dessus de p ou infinies. Appelons G_F^S le groupe de Galois de l'extension algébrique maximale de F non-ramifiée en dehors de S. Les groupes de cohomologie étale $H^*_{\text{ét}}(\operatorname{spec} \mathcal{O}_F[1/p], \mu_{p^m}^{\otimes n})$ du schéma $\operatorname{spec} \mathcal{O}_F[1/p]$ à valeur dans le faisceau étale $\mu_{p^m}^{\otimes n}$ s'identifient aux groupes de cohomologie galoisienne $H^*(G_F^S, \mu_{p^m}^{\otimes n})$. Ici, le groupe de Galois G_F^S agit diagonalement sur le n-ième produit tensoriel $\mu_{p^n}^{\otimes n}$. Afin d'alléger les notations, nous noterons $H^*_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}/p^m(n))$ au lieu de $H^*_{\text{ét}}(\operatorname{spec} \mathcal{O}_F[1/p], \mu_{p^m}^{\otimes n})$. Nous adoptons également les notations suivantes :

$$H^*_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n)) := \varprojlim H^*_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}/p^m(n))$$

et

$$H^*_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) := \varinjlim H^*_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}/p^m(n)).$$

Soulé a établi les relations suivantes sur les groupes de cohomologie étale p-adiques des anneaux d'entiers de corps globaux ([Sou]).

1. $H^0_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n)) = 0$ quand $n \neq 0$.
2. Pour $k \geq 3$, $H^k_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n)) = 0$ si p est *impair*.
3. Pour $k \geq 3$, $H^k_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_2(n)) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_1(F)} & \text{si } k+n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La relation entre la K-théorie algébrique et les deux premiers groupes de cohomologie étale est donnée par les caractères de Chern étales définis par Soulé dans [Sou]. Dans cet article, il construit des morphismes

$$\mathrm{ch}_{i,n}^{(p)} : K_{2n-i}(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^i_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n))$$

pour $i = 1, 2, n \geq 2$, et p impair, dont il prouve la surjectivité. Dwyer et Frielander dans [DF] ont adopté une autre approche qui inclut le cas $p = 2$ et utilise la K-théorie étale. Ils ont également prouvé la surjectivité pour le nombre premier 2 lorsque $\sqrt{-1} \in F$. La conjecture de Quillen-Lichtenbaum affirme qu'en fait les $\mathrm{ch}_{i,n}^{(p)}$ sont des ismorphismes pour p impair ; elle serait désormais établie : c'est une conséquence des conjectures de Bloch-Kato dont la preuve a été annoncée récemment par Voevodsky et Rost. La preuve utilise le cadre de la cohomologie motivique. Énonçons cet important résultat.

Théorème 2.16. *Soit F un corps global. Les caractères de Chern étales*

$$ch_{i,n}^{(p)} : K_{2n-i}(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^i_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n))$$

sont des isomorphismes pour $n \geq 2$, $i = 1, 2$, sauf si $p = 2$ et F est un corps de nombres avec un plongement réel.

Pour $2n - i = 1$, *i. e.*, $n = i = 1$, il existe également un caractère de Chern

$$\mathrm{ch}_{1,1}^{(p)} : K_1(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(1)).$$

Les groupes de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mu_{p^n})$ apparaissent dans la suite exacte

$$0 \to (\mathcal{O}_F^S)^\times / p^n \to H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mu_{p^n}) \to {}_{p^n}\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F^S) \to 0,$$

où ${}_{p^n}\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F^S)$ désigne les éléments de $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F^S)$ tués par p^n, si bien qu'en prenant la limite projective il vient

$$H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(1)) \cong (\mathcal{O}_F^S)^\times \otimes \mathbb{Z}_p,$$

et le caractère de Chern $\mathrm{ch}_{1,1}^{(p)}$ n'est autre que le déterminant.

Des théorèmes 2.15 et 2.16, on déduit la structure des groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n))$ pour $i = 1, 2$ et $n \geq 2$.

Corollaire 2.17. *Le groupe $H^2_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n))$ est fini et même trivial pour presque tout p.*

$$rg_{\mathbb{Z}} H^1_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(n)) = \begin{cases} r_1 + r_2 & \textit{si } n \textit{ est impair strict. sup. à 1,} \\ r_2 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Notons pour conclure que

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = H^2_{\text{ét}}(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = 0$$

pour $n \geq 2$ et p impair (pour plus de détails, voir le début de la section 2.4).

Nous introduisons une dernière notation qui apparaît dans la section suivante. Nous appellerons $(2i-k)$-ième groupe de K-théorie étale et noterons $K^{\text{ét}}_{2i-k}(\mathcal{O}_F^S)$ le groupe $H^k_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i))$ pour $k = 1, 2$.

2.3 χ-composantes

Dans ce chapitre, nous traitons de certaines composantes canoniques associées à un $R[\Delta]$-module M, où R est un anneau commutatif intègre et Δ un groupe abélien fini. Ces composantes permettent de décomposer l'action de Δ sur M et ainsi d'en faciliter l'étude, comme on le verra aux paragraphes 2.4, 2.5 et 3.5 notamment. Les principales références que nous utiliserons sont [Gr], [So] et [Ts].

2.3.1 Les caractères abéliens au-dessus de k

Soit k un corps de nombres ; fixons également un nombre premier p. On désigne par G^{ab} le groupe $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$, où k^{ab} est l'extension abélienne maximale de k dans une clôture algébrique fixée de k. On se donne également une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Définissons alors les ensembles de caractères suivants :

Ψ = le groupe des caractères ψ de G^{ab} d'ordre fini g_ψ et de degré 1.
Donc ψ s'identifie à un caractère $\overline{\mathbb{Q}}_p$-irréductible du groupe fini $G_\psi := G^{\mathrm{ab}}/\ker\psi$, dont l'image est le groupe μ_{g_ψ} des racines de l'unité d'ordre g_ψ.

$\mathfrak{K}$ = l'ensemble des caractères χ de G^{ab} qui sont $\mathbb{Q}_p$-irréductibles ;
alors, on peut écrire $\chi = \sum_{u\in D_\psi} \psi^u$ (noté $\sum_{\psi|\chi}\psi$),
où $D_\psi \subseteq (\mathbb{Z}/g_\psi\mathbb{Z})^\times$ est le groupe de décomposition de p dans $\mathbb{Q}(\mu_{g_\psi})/\mathbb{Q}$.

Φ = l'ensemble des caractères ϕ de G^{ab} qui sont $\mathbb{Q}$-irréductibles ;
alors on peut écrire $\phi = \sum_{u\in(\mathbb{Z}/g_\psi\mathbb{Z})^\times} \psi^u = \sum_{\psi|\phi}\psi = \sum_{\chi|\phi}\chi$.

Le diagramme de corps suivant résume la situation, pour $\psi \in \Psi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\mu_{g_\psi}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "d_\psi"] \arrow[d, dash, bend right=60, "D_\psi"'] & \mathbb{Q}_p(\mu_{g_\psi}) \arrow[d, dash, "\cong D_\psi"] \\
\mathbb{Q}(\mu_{g_\psi}) \cap \mathbb{Q}_p \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "d_\psi"] & \mathbb{Q}_p \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Ici, d_ψ désigne l'ordre de D_ψ. On a $d_\psi = e_\psi f_\psi$, où e_ψ est l'indice de ramification de p dans $\mathbb{Q}(\mu_{g_\psi})/\mathbb{Q}$ et f_ψ son degré résiduel. Le quotient $|(\mathbb{Z}/g_\psi\mathbb{Z})^\times|/d_\psi$ donne le nombre de caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles χ divisant ϕ. Tous les objets indicés par ψ ne dépendent que du caractère rationnel ϕ au-dessus de ψ.

Soit à présent $\psi \in \Psi$ et $\phi \in \Phi$ au-dessus de ψ. Le noyau $\ker\psi$ correspond par Galois à un sous-corps K_ϕ ne dépendant que de ϕ, pour lequel

$$G_\phi := \mathrm{Gal}(K_\phi/k) \cong \mathrm{im}\,\psi = \mu_{g_\psi}$$

qui est un groupe cyclique d'ordre g_ψ.

Réciproquement, si K/k est une sous-extension cyclique de degré g de k^{ab}/k, il existe $\psi \in \Psi$ d'ordre g qui a pour noyau $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/K)$; on a donc $K = K_\phi$ pour ϕ au-dessus de ψ. D'où la proposition :

Proposition 2.18. *L'ensemble des extensions cycliques de k dans k^{ab} est en correspondance bijective et canonique avec Φ.*

2.3.2 Le cas semi-simple

Soit Δ un groupe fini commutatif et R un anneau commutatif intègre de caractéristique nulle, de corps des fractions K. Considérons l'algèbre de groupe $R[\Delta]$; il est connu que $R[\Delta]$ est un produit direct de n anneaux R_i (on parle alors de « décomposition semi-simple ») si et seulement si il existe un système fondamental de n idempotents orthogonaux $e_i \in R[\Delta]$ vérifiant :

$$\begin{cases} 1 = \sum_{i=1}^n e_i\,; \\ e_ie_j = 0 \text{ pour tout } i \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ces relations impliquent $e_i^2 = e_i$ (d'où le terme idempotent).

Posons $R_i := e_iR[\Delta]$; R_i est un anneau d'élément unité e_i et il vient, par le théorème chinois, $R[\Delta] \cong \prod_{i=1}^n R_i$. Ainsi, un module M sur un anneau semi-simple $R[\Delta]$ peut se décomposer en

$$M = \bigoplus_{i=1}^n e_iM. \tag{2.3}$$

Chaque $M_i := e_iM$ est canoniquement un R_i-module. Nous énonçons à présent une autre formulation de la semi-simplicité que nous privilégierons par la suite.

Proposition 2.19. *L'anneau $R[\Delta]$ est « semi-simple » si et seulement si $|\Delta|$ est inversible dans R.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $R[\Delta]$ est semi-simple si et seulement si $R[\Delta]$ est isomorphe à un produit d'anneaux *intègres*. Supposons que $|\Delta| \in R^\times$, et soit Φ_Δ l'ensemble des caractères K-irréductibles (K est le corps des fractions de R) de Δ. Les éléments

$$e_\phi := \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\delta\in\Delta}\phi(\delta^{-1})\delta,\ \phi \in \Phi_\Delta,$$

constituent un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $R[\Delta]$ car ils vérifient les relations (2.2) : nous allons calculer dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, qui contient donc $\mu_{|\Delta|}$. Comme précédemment, soit Ψ_Δ le groupe des caractères $\overline{K}$-irréductibles de degré 1 de Δ. On a

$$e_\phi = \sum_{\psi|\phi} e_\psi,\ \text{ avec } e_\psi = \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\delta\in\Delta}\psi(\delta^{-1})\delta,$$

et à l'aide des relations classiques

$$\begin{cases} \sum_{\psi\in\Psi_\Delta}\psi(\delta)=0\,(\text{resp. }|\Delta|)\text{ si }s\neq 1\,(\text{resp. }s=1),\\ \sum_{\delta\in\Delta}\psi'\psi^{-1}(\delta)=0\,(\text{resp. }|\Delta|)\text{ si }\psi'\neq\psi\,(\text{resp. }\psi'=\psi),\end{cases}$$

on obtient $\sum_{\psi\in\Psi_\Delta} e_\psi = 1$ et $e_\psi e_{\psi'} = 0$ pour $\psi \neq \psi'$. On a alors

$$R[\Delta] \cong \oplus_{\phi\in\Phi_\Delta} e_\phi R[\Delta].$$

Posons $R_\phi := R[\mu_{g_\psi}]$ pour un $\psi|\phi$ fixé. Cet anneau ne dépend pas du choix de $\psi|\phi$ et on peut en faire un Δ-module en le munissant de l'action $\delta.\alpha := \psi(\delta)\alpha$ pour $\delta \in \Delta$ et $\alpha \in R_\phi$. Ceci permet de définir un isomorphisme de Δ-modules

$$i_\psi : e_\phi R[\Delta] \to R_\phi,\ e_\phi\omega \mapsto \psi_\omega.$$

L'application i_ψ est bien définie car un peu d'attention montre que i_ψ n'est rien d'autre que la restriction à l'idéal $e_\phi R[\Delta]$ de l'homomorphisme induit par ψ :

$$\tilde{\psi} : R[\Delta] \to R_\phi,\ \sum a_\delta\delta \mapsto \sum a_\delta\psi(\delta).$$

L'homomorphisme i_ψ est surjectif par définition, reste à montrer l'injectivité. Si $i_\psi(\omega) = 0$, montrons que $e_\phi\omega = 0$ en calculant $e_{\psi'}\omega$ pour $\psi'|\phi$. Pour tout $s \in \Delta$, on a les égalités suivantes dans $\overline{K}[\Delta]$:

$$\begin{aligned} e_{\psi'}s &= \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\delta\in\Delta}\psi'(\delta^{-1})\delta s\\ &= \frac{1}{|\Delta|}\sum_{u\in\Delta}\psi'(u^{-1}s)u\\ &= \psi'(s)e_{\psi'}; \end{aligned}$$

ainsi, en écrivant $\omega = \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta\delta$ dans $R[\Delta]$, on obtient

$$e_{\psi'}\omega = e_{\psi'}\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta\psi'(\delta) = e_{\psi'}\psi'(\omega).$$

Or, par hypothèse, on a $\psi(\omega) = 0$, donc, pour tout élément σ_u du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K(\mu_{g_\psi}/K))$, on a $\sum_{\delta\in\Delta}\psi(\delta)^{\sigma_u}a_\delta = 0$. Mais

$$\{\psi^{\sigma_u}, \sigma_u \in \mathrm{Gal}(K(\mu_{g_\psi})/K)\} = \{\psi' \in \Psi_\Delta, \psi'|\phi\},$$

donc $\psi'(\omega) = 0$ pour tout $\psi'|\phi$, d'où l'injectivité de i_ψ. Il est alors clair que les $e_\phi R[\Delta]$ sont intègres puisqu'isomorphes à $R[\mu_{g_\psi}]$.

Réciproquement, on voit facilement que si $R[\Delta]$ est semi-simple, $|\Delta|$ est inversible dans R. □

Si M est un $R[\Delta]$-module, alors $M = \oplus_{\phi\in\Phi_\Delta} M_\phi$ où $M_\phi = e_\phi M$, qui est canoniquement un R_ϕ-module pour l'action

$$\psi(\delta).x = \delta.x,$$

pour tout $\delta \in \Delta$ et tout $x \in M_\phi$. Cette décomposition peut s'avèrer très pratique car la $R[\Delta]$-structure de M se lit alors sur la collection des R_ϕ-structures des M_ϕ, qui est en général plus simple puisque les R_ϕ sont souvent des anneaux de Dedekind. C'est le cas quand $R = \mathbb{Z}_p$, cas particulier que nous allons explorer plus en détails. Ici, $\Phi_\Delta = \mathfrak{K}_\Delta$ et la condition de semi-simplicité équivaut à $p \nmid |\Delta|$. Les anneaux $R_\chi = \mathbb{Z}_p[\mu_{g_\psi}]$ sont locaux, d'unique idéal maximal pR_χ. Prenons $\Delta := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ et $M := A$, le p-sous-groupe de Sylow du groupe de classe de $\mathbb{Q}(\mu_p)$. Alors, A est un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module et l'on a une décomposition

$$A = \bigoplus_{i=0}^{p-2} A_i,$$

où l'on a noté $A_i = e_{\omega^i} A$ et ω est le caractère de Teichmüller.

2.3.3 ϕ-quotients et ϕ-parties

Quand l'anneau $R[\Delta]$ n'est pas supposé semi-simple, on peut tout de même définir d'autres composantes qui redonnent les M_ϕ dans le cas semi-simple et vérifient certaines propriétés fonctorielles (voir [So] et [Ts]). Nous ne traitons que le cas $R = \mathbb{Z}_p$.

Comme dans la section précédente, soit Δ un groupe abélien fini et soit $\phi \in \Phi_\Delta$ un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible de Δ. On continue de noter $\mathbb{Z}_p(\phi)$ l'anneau $\mathbb{Z}_p[\mu_{g_\psi}]$ pour un $\psi|\phi$, dont on fait un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module comme auparavant par

$$\delta.\alpha := \psi(\delta).\alpha,$$

pour tout $\delta \in \Delta$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}_p(\phi)$. Soit M un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module ; nous introduisons les notations suivantes :

$$M^\phi := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\Delta]}(\mathbb{Z}_p(\phi), M), \quad M_\phi := M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathbb{Z}_p(\phi).$$

On appelle M^ϕ et M_ϕ respectivement la *ϕ-partie* et le *ϕ-quotient* de M. Soit I_ϕ l'idéal de $\mathbb{Z}_p(\phi)[\Delta]$ engendré par les $\delta - \psi(\delta), \delta \in \Delta$.

Lemme 2.20. *Il y a des isomorphismes naturels de $\mathbb{Z}_p(\phi)$-modules*

$$M^\phi \cong \{m \in M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi), \forall\delta \in \Delta,\, \delta.m = \psi(\delta).m\}$$

et

$$M_\phi \cong \{(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi))/I_\phi(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi))\}.$$

Ainsi, M^ϕ (resp. M_ϕ) s'identifie au plus grand sous-module (resp. plus grand sous-quotient) de $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi)$ sur lequel Δ agit par ψ.

Démonstration. Pour le premier isomorphisme, il suffit de remarquer qu'il est obtenu en envoyant $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\Delta]}(\mathbb{Z}_p(\phi), M)$ sur $\sum_{\delta\in\Delta} f(\psi(\delta))\otimes 1$. Quant au second, il découle du passsage au quotient par $I_\phi(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi))$ dans la flèche naturelle $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi) \to M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathbb{Z}_p(\phi)$. □

Donnons à présent quelques propriétés de ces ϕ-quotients et ϕ-parties.

Proposition 2.21. *(i) Le foncteur $M \mapsto M^\phi$ (resp. $M \mapsto M_\phi$) est exact à gauche (resp. à droite). Si $p \nmid |\Delta|$, les deux foncteurs sont exacts.*

(ii) Si $p \nmid |\Delta|$, on a $M^\phi \cong M_\phi$, et ces deux composantes sont des facteurs directs de M isomorphes à $e_\phi M$.

(iii) De manière générale, $M^\phi \otimes \mathbb{Q}_p$ et $M_\phi \otimes \mathbb{Q}_p$ sont isomorphes à $e_\phi(M \otimes \mathbb{Q}_p)$. En particulier, $M^\phi \otimes \mathbb{Q}_p \cong M_\phi \otimes \mathbb{Q}_p$.

(iv) Supposons que l'on ait une décomposition en produit direct $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. En posant $\phi_i := \phi|_{\Delta_i}$ pour $i = 1, 2$, M^{ϕ_1} et M_{ϕ_1} sont des $\mathbb{Z}_p(\phi_1)[\Delta_2]$-modules ; de plus, $M^\phi = (M^{\phi_1})^{\phi_2}$ et $M_\phi = (M_{\phi_1})_{\phi_2}$. Soit H un sous-groupe de Δ contenu dans $\ker\phi$. On peut considérer ϕ comme un caractère du groupe quotient Δ/H ; alors $M^\phi = (M^H)^\phi$ et $M_\phi = (M_H)_\phi$.

Démonstration. Ces propriétés sont à peu près évidentes ; signalons simplement que lorsque $p \nmid |\Delta|$, l'idempotent $e_\phi = \sum_{\psi|\phi} e_\psi$ où $e_\psi = \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\delta\in\Delta}\psi(\delta^{-1})\delta$ est un élément de $\mathbb{Z}_p(\phi)[\Delta]$ et la multiplication par e_ϕ dans $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi)$ induit l'isomorphisme voulu entre M^ϕ et M_ϕ. □

Remarquons que lorsque p divise $|\Delta|$, les composantes M^ϕ et M_ϕ ne sont pas nécessairement isomorphes. Par exemple, si l'on prend $\Delta := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $M := \mathbb{Z}_p$ avec action triviale et ϕ un caractère non-trivial de Δ, il vient $M^\phi = 0$, tandis que

$$M_\phi \cong \mathbb{Z}_p(\phi)/(\zeta_p - 1)\mathbb{Z}_p(\phi),$$

où ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité.

Soit $\epsilon_\phi := \sum_{\delta\in\Delta}\psi(\delta^{-1})\delta \in \mathbb{Z}_p(\phi)[\Delta]$; la multiplication par ϵ_ϕ définit un endormorphisme (encore noté ϵ_ϕ) de $M \otimes \mathbb{Z}_p(\phi)$ dans $M \otimes \mathbb{Z}_p(\phi)$ et l'on a clairement $I_\phi(M \otimes \mathbb{Z}_p(\phi)) \subseteq \ker\epsilon_\phi$ et $\mathrm{im}\,\epsilon_\phi \subseteq M^\phi$ en utilisant le lemme 2.20. Par conséquent, la multiplication par ϵ_ϕ induit un $\mathbb{Z}_p(\phi)$-homomorphisme

$$\epsilon_\phi : M_\phi \to M^\phi,$$

dont le noyau et le conoyau sont tués par $|\Delta|$. Si en plus M est un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module libre, ϵ_ϕ est un isomorphisme.

Nous donnons une dernière propriété fonctorielle reliant M^ϕ et M_ϕ lorsque le groupe Δ est *cyclique*.

Lemme 2.22. *Supposons que Δ est un groupe cyclique et soit* $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ *une suite exacte courte de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-modules. Alors la suite*

$$0 \to M_1^{\phi} \to M_2^{\phi} \to M_3^{\phi} \to (M_1)_{\phi} \to (M_2)_{\phi} \to (M_3)_{\phi} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Par extension des scalaires, la suite

$$0 \to M_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi) \to M_2 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi) \to M_3 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi) \to 0$$

est exacte (ici on considère $\mathbb{Z}_p(\phi)$ comme extension d'anneau de $\mathbb{Z}_p$, sans action de Δ). Ensuite, par analogie avec la preuve de la suite exacte de Herbrand, on s'intéresse à l'application $M_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi) \to M_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi)$ qui à $m \in M_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\phi)$ associe $(\delta_0 - \psi(\delta_0))m$, où δ_0 est un générateur de Δ et $i = 1, 2, 3$. Son noyau est M_i^{ϕ} et son conoyau est $(M_i)_{\phi}$, d'où le résultat, après application du lemme du serpent. $\square$

2.4 Le cas modéré

Cette section est une version détaillée de [LF]. Soit F un corps de nombres abélien, p un nombre premier impair et S l'ensemble des places de F qui sont ou ramifiées, ou au-dessus de p. Le résultat principal de [LF] est le calcul du (premier) idéal de Fitting de $K_{2i-2}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)(\phi)$ pour $i \geq 2$, où $\mathcal{O}_F^S$ désigne l'anneau des S-entiers de F et ϕ est un caractère de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ d'ordre premier à p distinct de la i-ème puissance du caractère de Teichmüller (noté ω). Cet idéal de Fitting s'avère être principal et engendré par un élément de Stickelberger.

Soit F/k une extension abélienne de groupe de Galois G et S un ensemble fini de places de F contenant les places ramifiées de l'extension F/k. *Via* l'application d'Artin $\mathfrak{a} \mapsto \sigma_{\mathfrak{a}} \in G$, on peut définir les applications zêta partielles pour $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta_{F,S}(\sigma, s) := \sum_{\substack{\sigma_{\mathfrak{a}}=\sigma \\ (\mathfrak{a},S)=1}} N\mathfrak{a}^{-s}.$$

On définit alors le i-ième élément de Stickelberger par

$$\Theta_{i,S} := \sum_{\sigma \in G} \zeta_{F,S}(\sigma, -i)\sigma^{-1}.$$

L'élément de Stickelberger est relié à la fonction L privée des facteurs eulériens en S, *i. e.*, $L_S(s,\chi) := \prod_{(\mathfrak{p},S)=1}(1-\chi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ par l'égalité

$$\Theta_{i,S} = \sum_{\chi \in \hat{G}} L_S(-i, \chi^{-1})e_\chi,$$

où e_χ est l'idempotent habituel (voir section 1.2).

Quand $k = \mathbb{Q}$, et $S = \emptyset$, on a, en notant f le conducteur de F,

$$\Theta_i := \sum_{\substack{1 \leq a < f \\ (a,f)=1}} \zeta_f(a, -i)\sigma_a^{-1},$$

où σ_a est la restriction de F à l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\mu_f)$ (μ_f est le groupe des racines f-ièmes de l'unité) qui élève une racine primitive f-ième de l'unité à la puissance a-ième ; le théorème classique de Stickelberger (voir e.g. [W]) dit qu'un certain multiple de Θ_0 annule le groupe de classes de F.

Inspirés par le théorème de Stickelberger, Coates et Sinnott ont formulé des conjectures analogues au sujet des annulateurs des K-groupes pairs. Plus précisément, ils ont conjecturé dans [CS] que le i-ième élément de Stickelberger « tordu » annule $K_{2i}(\mathcal{O}_F)$, ce que l'on peut reformuler en

Conjecture 2.23 (Coates-Sinnott). *Soit F/k une extension abélienne de corps totalement réels, de groupe de Galois G. Pour tout $i \geq 2$, pair,*

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}}\, K_{2i-1}(F)) \cdot \Theta_{i-1} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(K_{2i-2}(\mathcal{O}_F)).$$

En adoptant une approche p-adique, on peut essayer d'annuler $K_{2i}(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Z}_p$, où p est un nombre premier *impair* fixé. La conjecture de Quillen-Lichtenbaum, qui serait désormais un théorème d'après un résultat annoncé par Voedvosky (cf. théorème 2.16) dit que $K_{2i}(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Z}_p$ est canoniquement isomorphe au groupe de K-théorie étale $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F[1/p])$. Ce groupe s'injecte dans $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)$ où S est l'ensemble des places de F qui sont ou ramifiées, ou au-dessus de p, et $\mathcal{O}_F^S$ est l'anneau des S-entiers de F. La théorie d'Iwasawa fournit une autre expression de $K_{2i}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)$ et on peut utiliser la conjecture principale pour l'annuler (cf. [N3]).

Déterminer l'annulateur d'un module galoisien est en général un problème difficile. On peut dans un premier temps calculer l'idéal de Fitting du module en question puisqu'il est contenu dans l'annulateur (proposition 2.2).

Depuis la parution de [LF], la conjecture de Coates-Sinnott a été (presque) entièrement résolue par Th. Nguyen Quang Do dans [N5], et, indépendamment, par D. Burns et C. Greither dans [BG]. Nous y revenons à la fin du chapitre.

Soit G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ que l'on décompose en $G = \Delta \times P$ où P est la p-partie de G. Nous supposerons que le corps F est linéairement disjoint de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty$ de $\mathbb{Q}$, ceci afin que le groupe G tout entier agisse sur le groupe de cohomologie étale

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i)) \cong K_{2i-2}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)$$

qui devient donc un $\mathbb{Z}_p[G]$-module. Pour étudier sa structure de $\mathbb{Z}_p[G]$-module, nous utiliserons la décomposition

$$\mathbb{Z}_p[G] \cong \oplus_\phi \mathbb{Z}_p(\phi)[P],$$

où ϕ parcourt les caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles de Δ (cf. §2.3).

Dans ce chapitre nous calculons le (premier) idéal de Fitting de $K_{2i-2}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)(\phi)$, où $(.)(\phi)$ signifie $e_\phi(.)$ et e_ϕ est l'idempotent orthogonal habituel. Quand S est exactement l'ensemble des p-places de F, le calcul coïncide avec le résultat principal obtenu par [CO] dans le cas des corps totalement réels de conducteur une puissance d'un nombre premier.

Nous énonçons à présent le résultat principal dans le cas où $F/\mathbb{Q}$ est *modérément ramifié* au-dessus de p. Soit f le conducteur de F et définissons le i-ième élément de Brumer-Stickelberger $\Theta_{i,S}$ par

$$\Theta_{i,S} := \sum_{\substack{1 \le a < f \\ (a,f)=1}} \zeta_{f,S}(-i, a)\sigma_a^{-1},$$

où la fonction zêta partielle $\zeta_{f,S}(a, s)$ est donnée par

$$\zeta_{f,S}(a, s) := \sum_{\substack{k \equiv a \bmod f \\ (k,S)=1}} k^{-s}.$$

Théorème 2.24. *Soit ϕ un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible de Δ, ψ un caractère de degré 1 de Δ divisant ϕ (au sens du paragraphe 2.3) et soit i un entier supérieur ou égal à 2 vérifiant $\psi(-1) = (-1)^i$. On demande également que $\phi^{-1}\omega^i$ soit un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible non-trivial de Δ', la non-p-partie de $G' := \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/\mathbb{Q})$. Alors,*

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]}\, K_{2i-2}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)(\phi) = (\Theta_{i-1,S}(\psi)),$$

où $\Theta_{i,S}(\psi) := \sum_{\substack{1\leq a<f \\ (a,f)=1}} \zeta_{f,S}(-i,a)\psi(\delta_a)^{-1}\rho_a^{-1}$ *et* $\sigma_a = \delta_a\rho_a$ *dans la décomposition* $G = \Delta \times P$.

On formulera un énoncé légèrement différent dans la section suivante pour le cas *sauvagement ramifié* (voir théorème 2.29). Remarquons que pour le caractère exclu $\phi = \omega^i$, l'idéal de Fitting correspondant n'est probablement pas principal.

Le groupe abélien $G' = \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/\mathbb{Q})$ se décompose en $\Delta' \times P'$ avec $P' \cong P$, le p-Sylow de G. Dans la suite, nous identifierons P et P'. Soit $\mu_{p^\infty} := \cup_{n\geq 1}\mu_{p^n}$ l'union de toutes les racines p-ièmes de l'unité ; comme au chapitre 1, nous appellerons $\mathfrak{X}_\infty$ (resp. $\mathfrak{X}_\infty^S$) le groupe de Galois au-dessus de $F(\mu_{p^\infty})$ de la pro-p-extension p-ramifiée (resp. S-ramifiée) abélienne maximale de $F(\mu_{p^\infty})$. Nous supposerons dans toute cette section que l'extension $F/\mathbb{Q}$ est *modérément ramifiée* en p. Ceci implique en particulier que $F \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$, par conséquent $\Gamma := \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_p))$ s'identifie par restriction à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ et nous avons une décomposition

$$\mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) = \Gamma \times \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/\mathbb{Q}).$$

Ainsi, $\mathfrak{X}_\infty^S$ est un $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]][G']$-module.

Comme d'habitude, Λ désignera l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ qui s'identifie à $\mathbb{Z}_p[[T]]$ en envoyant un générateur topologique γ_0 de Γ sur $1 + T$ (cf. proposition 1.6). Nous noterons κ la restriction à F_∞ du caractère cyclotomique de $G_\infty := \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ qui donne l'action sur les racines p-ièmes de l'unité et nous noterons ω (le caractère de Teichmüller) sa restriction à $F(\mu_p)$.

Considérons la limite projective $\varprojlim \mu_{p^n}$ et notons la $\mathbb{Z}_p(1)$; en tant que groupe abstrait, $\mathbb{Z}_p(1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ mais l'action de Γ sur $\mathbb{Z}_p(1)$ est non-triviale : pour $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{Z}_p(1)$, on a $\gamma.z = \kappa(\gamma)z$. Ensuite, on définit

$$\mathbb{Z}_p(i) := \mathbb{Z}_p(1) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{i \text{ facteurs}} \mathbb{Z}_p(1).$$

Pour un Γ-module M, $M(i) := M \otimes \mathbb{Z}_p(i)$ signifiera M « tordu » i-fois à la Tate. L'action de Γ sur M est comme suit : soit $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M(i)$. Désignons par $\widetilde{m}$ l'image de m par le foncteur d'oubli $M(i) \to M$; on a $\gamma.m = \kappa(\gamma)^i\gamma.\tilde{m}$.

Le lemme suivant nous sera utile dans ce chapitre et dans le chapitre 3 :

Lemme 2.25 (de Tate). *Pour tout $n \neq 0$, le groupe de cohomologie*

$$H^1(G_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))$$

est nul.

Démonstration. On a

$$H^1(G_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)_{G_\infty},$$

et le dual de ce dernier module est

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)_{G_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{G_\infty} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(-n)^{G_\infty} \\ &\cong \mathbb{Z}_p(-n)^{G_\infty}.\end{aligned}$$

Il reste à voir que $\mathbb{Z}_p(-n)^{G_\infty} = \mathbb{Z}_p(-n)^\Gamma$ est fini (donc nul). D'après la proposition 1.9, ceci est équivalent à ce que $f(0) \neq 0$, où f est le polynôme caractéristique du Γ-module $\mathbb{Z}_p(-n)$. Comme le polynôme caractéristique de $\mathbb{Z}_p$ est T (action triviale), celui de $\mathbb{Z}_p(-n)$ est $\kappa(\gamma)^n(1+T)-1$ puisque l'action de Γ est remplacée par celle de $\kappa^{-n}(\gamma)\gamma$. On conclut alors puisque l'on ne peut avoir $\kappa(\gamma)^n = 1$ avec $n \neq 0$. □

En particulier, puisque $\mu_{p^\infty} \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$, on a $H^1(G_\infty, \mu_{p^\infty}) = 0$.

L'annulation du groupe $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H^2(G_F^S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est équivalente à la conjecture de Leopoldt ; celle de $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ peut être vue comme un analogue supérieur de la conjecture de Leopoldt. Pour tout entier $i \geq 2$, on a effectivement

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0,$$

essentiellement parce que les groupes $K_{2i-2}(\mathcal{O}_F)$ (et donc les $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i))$) sont finis (cf. théorème 2.15) : en effet, les groupes $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ étant p-divisibles (cf. [Sc]), on a pour tout $n \geq 1$ une suite exacte :

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(i)) \to H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{p^n} H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to 0,$$

et la finitude de $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i))$ pour $i \geq 2$ implique que l'ordre des $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(i))$ est borné indépendamment de n, donc, pour n assez grand, la multiplication par p^n est un isomorphisme, ce qui force $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0$.

Le lemme suivant fait le lien entre les objets arithmétiques qui nous intéressent, *i. e.*, les $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i))$, et un certain module d'Iwasawa, à savoir $\mathfrak{X}_\infty^S(-i)_\Gamma$.

Reprenant les notations du §2.1, soit ϕ un caractère p-adique de Ψ_Δ, *i. e.*, un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible de Δ de *même parité* que $i \geq 2$.

Lemme 2.26.
$$((\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma)^* \cong H^2_{\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i))(\phi),$$
où * désigne le dual de Pontrjagin.

Démonstration. Notons Ω_S l'extension algébrique S-ramifiée maximale de F, $G_S :=$ $\mathrm{Gal}(\Omega_S/F)$ et $G_{S,\infty} := \mathrm{Gal}(\Omega_S, F_{\mu_{p^\infty}})$. On a donc la suite exacte

$$0 \to G_{S,\infty} \to G_S \to G_\infty \to 0,$$

d'où l'on tire, en appliquant la suite spectrale de Hochschild-Serre en basse dimension (cf. [Se]) :

$$0 \to H^1(G_\infty, H^0(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) \to H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to H^1(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{G_\infty} \to 0$$

car la p-dimension cohomologique de G_∞ est égale à 1.

Le groupe $G_{S,\infty}$ agit trivialement sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)$ donc $H^0(G^E_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)$, et on a
$$H^1(G_\infty, H^0(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) = H^1(G_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0$$
par le lemme 2.25. On en tire

$$H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \cong H^1(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{G_\infty}. \tag{2.4}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma)^* &\cong (\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_{G_\infty})^* \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_\infty^S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))(\phi)^{G_\infty} \\ &\cong H^1(G_{S,\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))(\phi)^{G_\infty}.\end{aligned}$$

La première égalité provient du fait que le module

$$\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1}) = \mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)(-i)$$

est invariant par $G' = \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/\mathbb{Q})$ car, vues nos hypothèses, $\phi^{-1}\omega^i$ est un caractère pair de G' ; la dernière du fait que $G_{S,\infty}$ agit trivialement sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)$ et $\mathfrak{X}_\infty^S$ est le pro-p abélianisé de $G_{S,\infty}$. En se servant de (2.4), il vient

$$((\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma)^* \cong H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))(\phi).$$

Puis, de la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}(i) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \xrightarrow{p^k} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \to 0,$$

on déduit par la cohomologie :

$$\cdots \xrightarrow{p^k} H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to H^2(G_S, \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}(i)) \to H^2(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

et, comme $i \geq 2$, le groupe $H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est fini et le groupe $H^2(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est nul, comme rappelé plus haut (analogue en K-théorie de la conjecture de Leopoldt). En prenant la limite projective sur k, on obtient finalement que

$$H^1(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \cong H^2(G_S, \mathbb{Z}_p(i)) = H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i)),$$

d'où le lemme. $\square$

Comme $\phi^{-1}\omega^i$ est *pair*, le module $\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1}) = \mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)(-i)$ n'a pas de sous-module fini non-trivial (cf. théorème 1.24). Une autre propriété importante de $\mathfrak{X}_\infty^S$, qui est cruciale pour notre calcul, est que, si $\phi^{-1}\omega^i$ est non-trivial, $\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)$ est un $\Lambda(\phi^{-1})[P]$-module *cohomologiquement trivial* ou, de manière équivalente, que sa dimension projective sur $\Lambda(\phi^{-1})[P]$ est inférieure ou égale à 1. Nous redémontrons ce résultat important qui se trouve dans [BN] et [N2].

Lemme 2.27. *Supposons que $\phi^{-1}\omega^i$ est un caractère non-trivial de $\Psi_{\Delta'}$. Alors*

$$\mathrm{pd}(\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)) \leq 1$$

sur l'algèbre $\Lambda(\phi^{-1}\omega^i)[P]$.

Démonstration. Posons $\xi := \phi^{-1}\omega^i$. Un résultat de Greither (« Theorem 2.2 » dans [G1]) dit que, si un $\Lambda(\xi)[P]$-module M est cohomologiquement trivial pour P et n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion, alors $\mathrm{pd}(M) \leq 1$ sur $\Lambda(\xi)[P]$. Puisque $\mathfrak{X}_\infty^S$ n'a pas de sous-Λ-module fini non-nul et que son invariant μ est nul (Ferrero-Washington), il est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion ; par conséquent, il reste à montrer que $\mathfrak{X}_\infty^S(\xi) = \varprojlim \mathfrak{X}_n^S(\xi)$ est cohomologiquement trivial sur $\mathbb{Z}_p(\xi)[P]$, et pour cela, il suffit de prouver cette propriété pour chaque $\mathfrak{X}_n^S(\xi)$, $n \geq 0$. La proposition 1.7 de [N2] fournit une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[P]$-modules

$$0 \to \mathfrak{X}_n^S \to Y_n^S \to I(P) \to 0,$$

où $I(P)$ est le noyau de la flèche d'augmentation $\mathbb{Z}_p[P] \to \mathbb{Z}_p$ et Y_n^S est un certain module cohomologiquement trivial si la conjecture de Leopoldt est vraie pour F_n. Ainsi, $\hat{H}^i(P, \mathfrak{X}_n^S) \cong \hat{H}^{i-2}(P, \mathbb{Z}_p)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ensuite, comme $\hat{H}^{-1}(P, \mathbb{Z}_p) = 0$ et $\hat{H}^0(P, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p/|P|\mathbb{Z}_p$, on déduit que pour ξ caractère non-trivial, $\hat{H}^i(P, \mathfrak{X}_n^S(\xi)) = \hat{H}^i(P, \mathfrak{X}_n^S)(\xi) = 0$ pour $i = 1, 2$, ce qui achève la preuve. $\square$

Après ces lemmes, nous passons à présent au calcul de l'idéal de Fitting de

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i))(\phi) \cong ((\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma)^*$$

d'après le lemme 2.26. Comme $R := \Lambda(\phi^{-1})[P]$ est un anneau local et que $\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)$ est un module de torsion, le lemme 2.27 fournit une résolution libre

$$0 \longrightarrow R^m \longrightarrow R^m \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i) \longrightarrow 0$$

dont on déduit que $\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\phi^{-1})[P]}(\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i))$ est *principal*. Afin d'exhiber un générateur de cet idéal de Fitting, nous allons utiliser la conjecture principale d'Iwasawa, telle que rappelée dans la section 1.5.

Pour tout caractère pair primitif de Dirichlet, $\tilde{\xi}$ (associé à un corps abélien) de première espèce, *i. e.*, dont le conducteur n'est pas divisible par p^2, il existe une unique série formelle $G_{S,\tilde{\xi}}(T) \in \mathbb{Z}_p(\tilde{\xi})[\![T]\!]$ telle que

$$L_{p,S}(1-s,\tilde{\xi}) = G_{S,\tilde{\xi}}(u^s - 1),$$

où $u := \kappa(\gamma_0)$ et $L_{p,S}(s,\tilde{\xi})$ est la fonction L p-adique associée à S et $\tilde{\xi}$.

Dans cette section, nous avons supposé que $F/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée en p, donc tout caractère de $\mathcal{D}_{G'}$, vu comme un caractère de Dirichlet, est de première espèce. De plus, $\tilde{\xi}$ étant pair, le résultat de Ferrero-Washington sur l'invariant μ nous garantit que

$$W(\tilde{\xi}) := (\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} \otimes_{\mathbb{Z}_p(\tilde{\xi})} \overline{\mathbb{Q}}_p$$

est un espace vectoriel de dimension *finie*. L'idéal caractéristique de $(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$ sur $\Lambda(\tilde{\xi})$ (noté $\mathrm{char}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$) est défini comme l'idéal engendré par le polynôme caractéristique de l'endomorphisme associé à $(\gamma_0 - 1)$ sur cet espace. Par le théorème de structure des $\Lambda(\tilde{\xi})$-modules de torsion de type fini (théorème 1.8), il existe un pseudo-isomorphisme

$$(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} \sim \Lambda(\tilde{\xi})/(f_1) \oplus \cdots \oplus \Lambda(\tilde{\xi})/(f_r)$$

pour un certain entier r, où chaque $f_i \in \Lambda(\tilde{\xi})$. L'idéal $(f_1 \cdots f_r)$ est un invariant de $(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$ et est égal à $\mathrm{char}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$. La conjecture principale (cf. théorème 1.25) affirme que

$$\mathrm{char}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = (G_{S,\tilde{\xi}}(T)).$$

Désignons par H_ϕ un générateur de $\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\phi^{-1})[P]}(\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i))$. Appelons ξ le $\mathbb{Q}_p$-caractère de G' induit par $\phi^{-1}\omega^i$ (*i. e.*, ξ est la trace de la représentation linéaire de G' obtenue à partir de $e_{\phi^{-1}\omega^i}\mathbb{Q}_p[G']$; voir à ce propos les sections 2.3.1 & 2.3.2) et considérons un caractère $\tilde{\xi} \in \mathcal{D}_{G'}$ divisant ξ. Notons que $\tilde{\xi}$ est pair puisque p est impair.

Le « Lemma 3.5 » de [G1] dit que $\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\tilde{\xi})}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = \mathrm{char}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$. De plus, si l'on prend la résolution

$$0 \longrightarrow R^m \xrightarrow{\ f\ } R^m \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i) \longrightarrow 0$$

et que l'on tensorise par $\Lambda(\tilde{\xi})$, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow \Lambda(\tilde{\xi})^m \xrightarrow{f \otimes_{\Lambda G} 1_{\Lambda(\tilde{\xi})}} \Lambda(\tilde{\xi})^m \longrightarrow (\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} \longrightarrow 0,$$

et, puisque $(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}}$ est un $\Lambda(\tilde{\xi})$-module de torsion, il en est de même pour Q ; or $Q \subseteq \Lambda(\tilde{\xi})$, donc Q est trivial. En conséquence, $\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\tilde{\xi})}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = \tilde{\xi}(\det f)$.

À l'aide de la conjecture principale, on peut ensuite établir les égalités suivantes

$$(\tilde{\xi}(H_\phi)) = \mathrm{Fitt}_{\Lambda(\tilde{\xi})}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = \mathrm{char}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = (G_{S,\tilde{\xi}}). \tag{2.5}$$

Avant d'aller plus loin, formulons encore une remarque.
Puisque $(\Lambda(\phi^{-1})[P])_\Gamma \cong \mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]$, on déduit de la proposition 2.7 que

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma = \left(\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})\right)_\Gamma .$$

Cette dernière quantité est encore égale à

$$\left(\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)(-i)\right)_\Gamma.$$

Ainsi, $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma$ est principal. Ici, l'action est « tordue » $(-i)$ fois, par conséquent nous devons remplacer l'action de γ_0 par celle de $\kappa(\gamma_0)^{-i}\gamma_0$, *i. e.*, T est remplacé par $\kappa(\gamma_0)^i(1+T)-1$, et, en prenant les co-invariants, *i. e.*, en faisant $T=0$, on trouve que

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma = (H_\phi(\kappa(\gamma_0)^i(1+T)-1)_{|T=0}) = (H_\phi(\kappa(\gamma_0)^i - 1).$$

Notons par α_ϕ le générateur $H_\phi(\kappa(\gamma_0)^i-1)$. Nous énonçons à présent une proposition qui fournit une première évaluation de l'élément α_ϕ (rappelons que l'élément $\Theta_{i-1,S}(\psi)$ est défini dans l'énoncé du théorème 2.24).

Proposition 2.28. *Pour tout caractère $\tilde{\xi}$ de G' divisant ξ, le caractère induit de $\phi^{-1}\omega^i$ sur G', on a*

$$\tilde{\xi}(\alpha_\phi) = (\tilde{\xi}\omega^{-i})^{-1}(u_\phi\Theta_{i-1,S}(\psi)),$$

où u_ϕ est une unité de $\mathbb{Z}_p(\phi)[P]$.

Démonstration. De l'égalité (2.5), on tire

$$(\tilde{\xi}(H_\phi)) = (G_{S,\tilde{\xi}}(T)).$$

Par ailleurs, on sait par [Wi] (voir aussi [G2]) qu'il existe une série formelle $\tilde{G}_{\psi^{-1}\omega^i}(T) \in \Lambda(\phi^{-1}\omega^i)[P]$ telle que

$$\tilde{\xi}(\tilde{G}_{\psi^{-1}\omega^i}(T)) = G_{S,\tilde{\xi}}(T).$$

Donc, pour tout $\tilde{\xi}$ divisant le caractère induit de $\phi^{-1}\omega^i$, on a

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda(\tilde{\xi})}(\mathfrak{X}_\infty^S)_{\tilde{\xi}} = (\tilde{\xi}(H_\phi(T))) = (\tilde{\xi}(\tilde{G}_{\psi^{-1}\omega^i}(T))),$$

et en appliquant le « Lemma 3.7 » de [G1] au $\Lambda(\phi^{-1}\omega^i)[P]$-module $\mathfrak{X}_\infty^S(\phi^{-1}\omega^i)$, nous obtenons l'égalité

$$(H_\phi(T)) = (\tilde{G}_{\psi^{-1}\omega^i}(T))$$

d'idéaux de $\Lambda(\phi^{-1}\omega^i)[P]$. Par suite, il existe une unité $U_\phi(T) \in (\Lambda(\phi^{-1}\omega^i)[P])^\times$ telle que

$$H_\phi(T) = U_\phi(T)\tilde{G}_{\psi^{-1}\omega^i}(T).$$

Rappelons que nous souhaitons évaluer $(\alpha_\phi) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]} \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma$. On trouve successivement

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\alpha_\phi) &= \tilde{\xi}(H_\phi(\kappa(\gamma_0)^i - 1)) \\ &= \tilde{\xi}(U_\phi(\kappa(\gamma_0)^i - 1))G_{S,\tilde{\xi}}(\kappa(\gamma_0)^i - 1) \\ &= \tilde{\xi}(U_\phi(\kappa(\gamma_0)^i - 1))L_{p,S}(1-i,\tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Ensuite, comme $L_S(1-i,\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}^{-1}(\Theta_{i-1,S})$ (cf. par exemple [CS], « Lemma 1.7 »), et en notant $u_\phi := U_\phi(\kappa(\gamma_0)^i - 1)^{-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\alpha_\phi) &= \tilde{\xi}^{-1}\omega^i(u_\phi\Theta_{i-1,S}) \\ &= (\tilde{\xi}\omega^{-i})^{-1}(u_\phi\Theta_{i-1,S}(\psi)), \end{aligned}$$

car $(\tilde{\xi}\omega^{-i})^{-1}$ étend ψ. □

Nous rappelons l'énoncé du résultat principal.

Théorème 5.1. *Soit ϕ un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible de Δ, ψ un caractère de degré un de Δ divisant ϕ et i un entier supérieur ou égal à 2 tel que $\psi(-1) = (-1)^i$. On demande également que $\phi^{-1}\omega^i$ soit un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible non-trivial de Δ', la non-p-partie de $G' := \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/\mathbb{Q})$. Alors,*

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]} K_{2i-2}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)(\phi) = (\Theta_{i-1,S}(\psi)),$$

où $\Theta_{i,S}(\psi) := \sum_{\substack{1\leq a<f \\ (a,f)=1}} \zeta_{f,S}(-i,a)\psi(\delta_a)^{-1}\rho_a^{-1}$ et $\sigma_a = \delta_a\rho_a$ dans la décomposition $G = \Delta \times P$.

Avant de donner la preuve du théorème 2.24, nous rappelons un résultat du paragraphe 2.1.2 qui compare sous des hypothèses bien précises l'idéal de Fitting d'un module et celui de son dual de Pontrjagin.

Pour un $\mathbb{Z}_p[G]$-module M, on a noté M^* le dual de Pontrjagin de M, *i. e.*, le groupe $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ où l'action de $g \in G$ s'effectue *via* $(g.\theta)(m) := \theta(g^{-1}.m)$ avec $m \in M$ et $\theta \in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Nous aurons aussi besoin dans la suite du groupe $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ où l'action de G se fait par $(g.\theta)(m) := \theta(g.m)$. Nous appelons ce module $(M^*)^\sharp$.

Soit N un $\mathcal{O}[P]$-module fini, où $\mathcal{O}$ est une extension finie d'anneau de $\mathbb{Z}_p$, de dimension projective inférieure ou égale à 1 sur $R := \mathcal{O}[P]$. Alors,

$$\mathrm{Fitt}_R N = \mathrm{Fitt}_R (N^*)^\sharp.$$

Ce résultat est la proposition 2.11.

Démonstration du théorème 2.24. Afin d'appliquer la proposition 2.11 à

$$N := \mathfrak{X}_{\infty}^{S}(\phi^{-1}\omega^{i})(-i)_{\Gamma},$$

nous devons vérifier que $\mathrm{pd}(\mathfrak{X}_{\infty}^{S}(\phi^{-1}\omega^{i})(-i)_{\Gamma}) \leq 1$ sur $R := \mathbb{Z}_p(\phi^{-1}\omega^{i})[P]$. En prenant les co-invariants dans une résolution projective de $\mathfrak{X}_{\infty}^{S}(\phi^{-1}\omega^{i})(-i)$, on obtient une suite exacte

$$0 \to Q \to R^m \to R^m \to \mathfrak{X}_{\infty}^{S}(\phi^{-1}\omega^{i})(-i)_{\Gamma} \to 0.$$

Comme $\mathfrak{X}_{\infty}^{S}(\phi^{-1}\omega^{i})(-i)_{\Gamma}$ est fini, le $\mathbb{Z}_p$-rang de Q est nul, d'où $Q = 0$.

La proposition 2.11 nous donne

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]} N = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}(N^*)^{\sharp}.$$

Nous voulons calculer l'idéal de Fitting de

$$K_{2i-2}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S)(\phi) \cong H_{\text{ét}}^2(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i))(\phi) \cong N^*$$

d'après le lemme 2.26. De manière générale, étant donné un G-module A, notons $A^{\sharp}$ le même groupe que A mais où l'action de G se fait *via* g^{-1}.

Si A est un $\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]$-module et si $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]} A = (\alpha)$, alors $A^{\sharp}$ est un $\mathbb{Z}_p(\phi)[P]$-module et $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]} A^{\sharp} = (\alpha^{\sharp})$, où $\alpha^{\sharp}$ est un élément de $\mathbb{Z}_p(\phi)[P]$ tel que $\chi(\alpha^{\sharp}) = \chi^{-1}(\alpha)$ pour tout caractère χ de $\mathcal{D}_G$ divisant le caractère induit de ϕ.
Par conséquent, en gardant à l'esprit que $(\alpha_{\phi}) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]} \mathfrak{X}_{\infty}^{S}(-i)(\phi^{-1})_{\Gamma}$, il s'ensuit que

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]} N^* = (\alpha_{\phi}^{\sharp}).$$

Les caractères χ de $\mathcal{D}_G$ divisant le caractère induit de ϕ peuvent s'écrire sous la forme $(\tilde{\xi}\omega^{-i})^{-1}$, où $\tilde{\xi}$ désigne toujours un caractère divisant le caractère induit de $\xi = \phi^{-1}\omega^{i}$. Or,

$$\tilde{\xi}(\alpha_{\phi}) = (\tilde{\xi}\omega^{-i})^{-1}(u_{\phi}\Theta_{i-1,S}(\psi)),$$

d'après la proposition 2.28 ; mais $\tilde{\xi}(\alpha_{\phi}) = (\tilde{\xi}\omega^{-i})(\alpha_{\phi})$ puisque α_{ϕ} est un élément de $\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]$.

D'où $\chi^{-1}(\alpha_{\phi}) = \chi(u_{\phi}\Theta_{i-1,S}(\psi))$ pour tout caractère χ de $\mathcal{D}_G$ divisant le caractère induit de ϕ. Finalement, l'élément $\alpha_{\phi}^{\sharp}$ que nous voulons calculer (*i. e.*, un générateur de $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{O}_F^S; \mathbb{Z}_p(i))(\phi))$) vérifie l'égalité

$$\chi(\alpha_{\phi}^{\sharp}) = \chi(u_{\phi}\Theta_{i-1,S}(\psi)),$$

pour tout caractère χ de $\mathcal{D}_G$ divisant le caractère induit de ϕ.

En utilisant le fait que $\mathbb{Q}_p(\phi)[P]$ se décompose en $\oplus_{\chi|\phi}\mathbb{Q}_p(\chi)$, on conclut que $\alpha_{\phi}^{\sharp} = u_{\phi}\Theta_{i-1,S}(\psi)$, de sorte que

$$(\alpha_{\phi}^{\sharp}) = (\Theta_{i-1,S}(\psi)).$$

$\square$

2.5 Le cas sauvagement ramifié

Dans cette section, on ne suppose plus que p est modérément ramifié dans $F/\mathbb{Q}$, mais on suppose toujours que F est linéairement disjoint de $\mathbb{Q}_\infty$, de sorte que le groupe G tout entier agisse sur $\mathfrak{X}_\infty^S$.

Afin de pouvoir utiliser à nouveau la conjecture principale, qui n'est valide que pour les caractères de Dirichlet de première espèce, nous recourons à une construction évoquée dans [So] et construisons un corps $\tilde{F}$ modérément ramifié en p tel que $F.\mathbb{Q}_\infty = \tilde{F}.\mathbb{Q}_\infty$, ce qui nous permet de réutiliser les résultats de la section précédente.

Définissons $\tilde{F}$ comme le corps d'inertie sauvage de $F_\infty/\mathbb{Q}$. Nous prouvons dans la suite que ce corps est le seul à vérifier les deux conditions ci-dessus.

Écrivons le conducteur de F sous la forme $f = p^{r+1}m$, où p et m sont premiers entre eux, et appelons E le corps d'inertie sauvage de $F/\mathbb{Q}$. On a $[F : E] = p^e$, avec $e \leq r$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_\infty \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & F_\infty \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{Q}_r \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & F_r \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\zeta_{p^{r+1}m}) \\
\mathbb{Q}_e \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & F_e \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & \tilde{F} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & & \\
\mathbb{Q} \arrow[r, dash] & E \arrow[r, dash] & F &
\end{tikzcd}$$

Comme F_r/F est une extension cyclique de degré une puissance d'un nombre premier, elle est non-ramifiée au début et totalement ramifiée ensuite. Par ailleurs, l'indice de ramification sauvage de p dans cette extension est p^{r-e} ; ceci implique que F_e/F est non-ramifiée et que F_∞/F_e est totalement ramifiée. Par conséquent, $\tilde{F} \subsetneq F_e$ et en considérant les degrés des extensions, on déduit que $\tilde{F}.\mathbb{Q}_e = F_e$. Ainsi, $(\tilde{F})_\infty = F_\infty$. Remarquons que $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\tilde{F}/\mathbb{Q}) =: \tilde{G}$. Soit $\tilde{P}$ le p-sous-groupe de Sylow de $\tilde{G}$. Puisque $E \subseteq \tilde{F}$, nous avons $G/P = \tilde{G}/\tilde{P}$.

Il reste à montrer l'unicité de $\tilde{F}$. Supposons que K est un corps modérément ramifié en p vérifiant de plus $F_\infty = K_\infty$. On a clairement $K \subset \tilde{F}$ car $K/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée. Or,

$$[K : \mathbb{Q}] = [K_\infty : \mathbb{Q}_\infty] = [F_\infty : \mathbb{Q}_\infty] = [\tilde{F} : \mathbb{Q}],$$

d'où $K = \tilde{F}$.

Introduisons quelques notations supplémentaires : $\tilde{\Gamma}$ désigne le groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/\tilde{F})$, R l'anneau $\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[\![\Gamma]\!][P]$, $\tilde{R}$ l'anneau $\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[[\tilde{\Gamma}]][\tilde{P}]$, et $\tilde{f}$ est le conducteur de $\tilde{F}$. Les restrictions de $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ à F et à $\tilde{F}$ donnent un isomorphisme canonique entre P et $\tilde{P}$. L'action de P ou de $\tilde{P}$ sur $\mathfrak{X}_\infty^S$ se fait *via* le p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et deux éléments qui se correspondent par cet isomorphisme ont la même action sur

$\mathfrak{X}_\infty^S$. De plus, Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont isomorphes par la restriction à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ et on appelle τ l'isomorphisme entre $\tilde{R}$ et R obtenu à partir de ces applications restrictions.

Comme dans la première section, soit ϕ un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible de Δ et i un entier vérifiant les hypothèses du théorème 2.24.

Comme $\tilde{F}/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée, on sait par le théorème 2.24 que

$$\tilde{\alpha}_\phi := \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[\tilde{P}]}(\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_{\tilde{\Gamma}})^* = (\tilde{\Theta}_{i-1,S}(\psi)),$$

où

$$\tilde{\Theta}_{i-1,S}(\psi) = \sum_{\substack{1\leq a<\tilde{f} \\ (a,\tilde{f})=1}} \zeta_{\tilde{f},S}(-n,a)\psi(\delta_a)^{-1}\tilde{\rho}_a^{-1}.$$

Il existe une suite exacte de $\tilde{R}$-modules

$$0 \to \tilde{R}^n \xrightarrow{f} \tilde{R}^n \to \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1}) \to 0.$$

L'isomorphisme τ induit une suite exacte de R-modules

$$0 \to R^n \xrightarrow{\tau f \tau^{-1}} R^n \to \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1}) \to 0,$$

de sorte que

$$\mathrm{Fitt}_R\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1}) = \tau(\mathrm{Fitt}_{\tilde{R}}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})).$$

Considérons un générateur topologique $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Gamma}$. Alors $\gamma := \tau(\tilde{\gamma})$ est un générateur topologique de Γ, et c'est précisément celui que l'on choisit d'envoyer sur $1+T$. Par conséquent, en utilisant à nouveau la proposition 2.7, il vient

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma = \tau(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[\tilde{P}]}\, \mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_{\tilde{\Gamma}}),$$

et on obtient finalement que

$$\begin{aligned} \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi^{-1})[P]}(\mathfrak{X}_\infty^S(-i)(\phi^{-1})_\Gamma)^* &= \tau(\tilde{\alpha}_\phi) \\ &= \sum_{\substack{1\leq a<\tilde{f} \\ (a,\tilde{f})=1}} \zeta_{\tilde{f},S}(-n,a)\psi(\delta_a)^{-1}\tau(\tilde{\rho}_a^{-1}). \end{aligned}$$

On a donc prouvé le

Théorème 2.29. *Soit F un corps de nombres abélien et soit $\tilde{F}$ l'unique corps tel que $\tilde{F}/\mathbb{Q}$ soit modérément ramifiée en p et tel que $\tilde{F}.\mathbb{Q}_\infty = F.\mathbb{Q}_\infty$. Soit $\tilde{f}$ le conducteur de $\tilde{F}$ et soit τ l'isomorphisme canonique décrit plus haut qui envoie $\tilde{\Gamma}\times\tilde{P}$ sur $\Gamma\times P$, où $\tilde{\Gamma} = \mathrm{Gal}((\tilde{F})_\infty/\tilde{F})$ et $\tilde{P}$ est la p-partie de $\mathrm{Gal}(\tilde{F}/\mathbb{Q})$. Soit ϕ un caractère de Ψ_Δ vérifiant les hypothèses du théorème 2.24. Alors*

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p(\phi)[P]}\, K_{2i-2}^{ét}(\mathcal{O}_F^S)(\phi) = (\tilde{\Theta}_{i-1,S}(\psi)),$$

où $\tilde{\Theta}_{n,S}(\psi) = \sum_{\substack{1\leq a<\tilde{f} \\ (a,\tilde{f})=1}} \zeta_{\tilde{f},S}(-n,a)\psi(\delta_a)^{-1}\tau(\tilde{\rho}_a^{-1})$ et $\tilde{\sigma_a} = \delta_a\tilde{\rho}_a$ dans la décomposition $\tilde{G} = \Delta\times\tilde{P}$.

Nous revenons à présent sur les résultats de [N5], qui, à la 2-partie près et modulo les conjectures de Quillen-Lichtenbaum (maintenant démontrées, voir le théorème 2.16) prouvent la conjecture de Coates-Sinnott.

L'ingrédient principal utilisé dans [N5] est une version raffinée de la conjecture principale, la *conjecture principale équivariante* qui prend en compte l'action de G. Il en existe plusieurs énoncés, nous donnons celui le plus directement utile dans notre optique (c'est le théorème 3.1.2 de [N5]).

Soit K/k une extension abélienne de corps totalement réels telle que $\mu_p = 0$. On note $G_\infty := \mathrm{Gal}(K_\infty/k)$, où K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K. On suppose que G_∞ est abélien, si bien que l'on peut écrire $G_\infty = H \times \widetilde{\Gamma}$, où $\widetilde{\Gamma}$ est un relèvement de $\Gamma := \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ dans G_∞. Soit $\theta_S := \Theta_S/b_\infty$, avec $\Theta_S = \sum_{\psi\in\widehat{H}} G_{\psi,S}(T)e_\psi$, $T := \tilde{\gamma} - 1$ et $b_\infty = Te_1 + (1 - e_1)$. Enfin, soit ΔG_∞ l'idéal d'augmentation de G_∞ et $\mathbb{A}$ l'algèbre $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$.

Théorème 2.30.
$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{A}}(\alpha(\mathfrak{X}_\infty^S)^*) = (\Delta G_\infty.\theta_S)^\sharp,$$
où $\sharp$ signifie que l'on a inversé l'action galoisienne.

En appliquant la co-descente au théorème 2.30, T. Nguyen Quang Do montre, sous les mêmes hypothèses que précédemment le théorème suivant.

Théorème 2.31. *Soit K/k une extension de corps totalement réels et de groupe de Galois G. Supposons que $\mu_p = 0$ pour tout premier impair p, et notons $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z}[1/2]$. Alors, pour tout entier (pair) $i \geq 2$, on a*
$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}'[G]}\,\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}'}(K_{2i-1}(\mathcal{O}_K)\otimes\mathbb{Z}').\Theta_{i-1}(K/k) \subseteq \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}'[G]}(K_{2i-2}(\mathcal{O}_K)\otimes\mathbb{Z}').$$

Chapitre 3

Sur les conoyaux de capitulation en théorie d'Iwasawa

Ce chapitre est une traduction (légèrement) augmentée de l'article [LMN] dont on peut résumer le contenu de la manière suivante.

Soit F un corps de nombres et p un nombre premier *impair*. Nous étudions les « conoyaux de capitulations » $\operatorname{coker}(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n})$ associés aux (p)-groupes de classes de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F. Nous prouvons que ces conoyaux se stabilisent et nous caractérisons leur limite inductive au moyen de la théorie d'Iwasawa, ce qui généralise les résultats partiels obtenus précédemment par H. Ichimura.

Soit F_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, dont on note F_n, $n \geq 0$, les différents étages ; notons comme d'habitude Γ_n le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(F_\infty/F_n)$. Par un léger abus de langage, nous appellerons *flèches de capitulation* les applications naturelles $A_n \to A_\infty^{\Gamma_n}$ et $A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n}$ entre la partie p-primaire du groupe de classes (resp. du (p)-groupe de classes, *i. e.*, le groupe de classes quotienté par les places au-dessus de p) de F_n et les éléments laissés fixes par Γ_n de $A_\infty := \varinjlim A_n$ (resp. de $A'_\infty := \varinjlim A'_n$).

L'étude de ces flèches est un problème intéressant en théorie d'Iwasawa, en particulier au regard de la conjecture de Greenberg, qui prédit la nullité de A_∞ et de A'_∞ dans le cas totalement réel.

Les noyaux de capitulation ont été étudiés en détail ([Gr1], [GJ], [Iw1], [Ku], etc.) mais, curieusement, il n'en est pas de même des conoyaux. À notre connaissance, les conoyaux de capitulation ont été abordés par Iwasawa dans [Iw2], p. 198, mais la quasi-totalité des résultats significatifs obtenus jusqu'à présent se trouve dans les articles d'Ichimura ([I1, I2, I3] ; voir également [S]), qui traite seulement des corps totalement réels abéliens de degré premier à p (donc semi-simples), ou des corps totalement réels vérifiant la conjecture de Leopoldt et dans lesquels p se décompose totalement.

Dans cet article, nous considérerons seulement les flèches de capitulation $j_n : A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n}$, en supposant la finitude de ${A'}_\infty^{\Gamma_n}$ (c'est la conjecture de Gross, cf. p. 64). Une bonne raison pour faire cette hypothèse est que, en dehors du cas totalement réel (où $A_\infty = A'_\infty$ modulo la conjecture de Leopoldt), le groupe $A_\infty^{\Gamma_n}$ n'est généralement pas fini.

Nous résolvons complètement le problème de la description du comportement asymptotique des conoyaux de capitulation dans le cas général (et ce faisant, nous retrouvons bien entendu tous les résultats connus antérieurement).

Plus précisément, dans un premier paragraphe, nous montrons que les conoyaux de capitulation se stabilisent et que leur limite inductive mesure l'écart asymptotique entre les groupes de classes A'_n et les modules de co-descente $(X'_\infty)_{\Gamma_n}$, où $X'_\infty = \varprojlim A'_n$ (théorème 3.6).

Dans le deuxième paragraphe, nous montrons que la stabilisation s'effectue à partir du niveau n_0, où n_0 est le plus petit entier n tel que l'application naturelle $(X'_\infty)_{\Gamma_n} \to A'_n$ devient surjective ; en supposant (pour simplifier) que F contient une racine primitive p-ième de l'unité, on caractérise $\varinjlim \operatorname{coker} j_n$ comme étant le dual kummérien d'un certain module galoisien qui intervient dans les problèmes de plongement en théorie d'Iwasawa (théorème 3.13).

Dans le troisième paragraphe, nous réinterprétons ce module à l'aide des noyaux de Gross (théorème 3.18).

Ensuite, au cours du quatrième paragraphe, nous passons en revue les résultats précédents et indiquons ce qu'ils deviennent lorque l'on ne suppose plus vraie la conjecture de Gross.

Enfin, nous étudions en détail le cas semi-simple dans le cinquième et dernier paragraphe. Nous donnons des formules explicites (notamment en termes de fonctions L p-adiques) que l'on illustre par des tables de valeurs numériques.

Tout d'abord, nous fixons quelques notations.

Notations

F_∞	$\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, avec étages F_n ;
$\lvert\ \rvert_p$	valuation p-adique ;
γ	générateur topologique de Γ ;
$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cong \mathbb{Z}_p[[T]]$	l'algèbre d'Iwasawa, l'isomorphisme ci-dessus étant obtenu en envoyant γ sur $1+T$;
Σ, S	places de F au-dessus de p (resp. au-dessus de p et de ∞) ;
A'_n	partie p-primaire du (p)-groupe de classes de F_n ;
$A'_\infty = \varinjlim A'_n$	partie p-primaire du (p)-groupe de classes de F_∞ ;
M_n, M_∞	pro-p-extension abélienne p-ramifiée maximale de F_n (resp. de F_∞) ;
L_∞	pro-p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F_∞ ;
L'_n, L'_∞	pro-p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F_n (resp. de F_∞) dans laquelle les p-places se décomposent totalement ;

U'_n	groupe des (p)-unités de F_n ;
$U'_\infty = \varinjlim U'_n$	groupe des (p)-unités de F_∞ ;
N'_∞	corps engendré sur F_∞ par les racines p^n-ièmes des $\varepsilon \in U'_\infty$ pour tout $n \geq 0$;
F_n^{BP}, F_∞^{BP}	corps de Bertrandias-Payan sur F_n (resp. F_∞), *i. e.*, la composée de toutes les p-extensions de F_n (resp. F_∞) qui sont infiniment plongeables dans des p-extensions cycliques ;
$G_S(F_n)$	groupe de Galois de l'extension S-ramifiée maximale de F_n ;
$\mathfrak{X}_{F_n} = G_S(F_n)^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}_p$	groupe de Galois de la prop-p-extension abélienne S-ramifiée maximale de F_n ;
$\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$;	
$X_\infty = \mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty)$;	
$X'_\infty = \mathrm{Gal}(L'_\infty/F_\infty)$;	
$N''_\infty = N'_\infty \cap F_\infty^{BP}$;	
$Z'_\infty = \mathrm{Gal}(N'_\infty/F_\infty)$;	
$BP_\infty = \mathrm{Gal}(F_\infty^{BP}/F_\infty)$;	
$W_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty^{BP})$;	
T_∞	corps fixe de $\mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$;

De plus, n_0 désignera dans tout le texte le plus petit entier n à partir duquel toutes les places p-adiques sont totalement ramifiées dans F_∞/F_n (voir à ce propos les propositions 1.1 et 1.2).

On peut faire figurer certains des corps évoqués dans les notations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
N'_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\infty \arrow[d, dash] \\
N''_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & F_\infty^{BP} \\
T_\infty \arrow[d, dash] & \\
F_\infty &
\end{tikzcd}$$

3.1 Résultats asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous utilisons la théorie de l'adjoint (et du co-adjoint) afin d'obtenir une description asymptotique des conoyaux $\operatorname{coker} j_n$. Pour plus de détails sur les modules adjoints, voir le paragraphe 2.3 et surtout le chapitre 15 de [W].

Tout au long de ce chapitre, nous ne manipulerons que des Λ-modules de type fini. Soit Z un Λ-module de torsion (et de type fini). Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de Λ, soit $Z_{\mathfrak{p}} := Z \otimes_\Lambda \Lambda_{\mathfrak{p}}$, où $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est le localisé de Λ en $\mathfrak{p}$. On rappelle que le noyau de la flèche canonique $Z \to \oplus_{\mathfrak{p}} Z_{\mathfrak{p}}$ est le sous-Λ-module fini maximal de Z, que nous noterons Z^0 comme dans le chapitre 1, et le conoyau est par définition le co-adjoint de Z, noté $\beta(Z)$.

Soit $\alpha(Z) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\beta(Z), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dont on fait un Λ-module avec l'action $(\sigma.f)(y) := f(\sigma^{-1}.y)$ pour $\sigma \in \Lambda$, $y \in \beta(Z)$ et $f \in \alpha(Z)$. On sait alors que $\alpha(Z)$ est un Λ-module de torsion et de type fini, appelé l'adjoint de Z.

Nous rappelons les deux faits importants concernant les adjoints que nous utiliserons par la suite : un adjoint n'a pas de sous-module fini non-nul et $\alpha(Z)$ est pseudo-isomorphe à $Z^\sharp$, où $\sharp$ signifie que l'on a inversé l'action galoisienne (proposition 1.12). Si l'on note comme d'habitude $\omega_n := \gamma^{p^n} - 1$, on a les morphismes naturels

$$Z/\omega_n Z \to Z/\omega_m Z, \quad x \mod \omega_n Z \mapsto (\omega_m/\omega_n)x \mod \omega_m Z,$$

pour tout $m \geq n \geq 0$.

Si l'on suppose de plus que les ω_n sont disjoints du diviseur de Z, alors $\beta(Z)$ est obtenu en prenant la limite inductive des $Z/\omega_n Z$ par rapport aux morphismes ci-dessus (proposition 1.11).

Nous pouvons à présent énoncer un lemme algébrique intéressant en lui-même :

Lemme 3.1. *Soit Z un Λ-module de torsion tel que les diviseurs principaux ω_n soient disjoints du diviseur de Z (*i. e.*, $Z/\omega_n Z$ est fini) pour tout n suffisamment grand. Alors, pour n assez grand, on a l'égalité*

$$|\beta(Z)^{\Gamma_n}| = |Z_{\Gamma_n}|/|Z^{\Gamma_n}|,$$

et les morphismes naturels $Z/\omega_n Z \xrightarrow{i_n} \beta(Z)^{\Gamma_n}$ sont surjectifs.

Démonstration. Sous nos hypothèses, le co-adjoint $\beta(Z)$ est isomorphe à $\varinjlim Z/\omega_n Z$. Comme Z et $\alpha(Z)^\sharp$ ont le même polynôme caractéristique en tant que $\Lambda_n := \mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]$-modules, disons $f_n(T)$ (ceci découlant de la proposition 1.12), ces deux Λ_n-modules ont le même quotient de herbrand relativement à Γ_n (cf. proposition 1.9) ; de plus, les polynômes caractéristiques de $\alpha(Z)$ et de $\alpha(Z)^\sharp$ ont le même terme constant. En rassemblant ces informations, on obtient l'égalité

$$|f_n(0)|_p^{-1} = |Z_{\Gamma_n}|/|Z^{\Gamma_n}| = |\alpha(Z)_{\Gamma_n}|/|\alpha(Z)^{\Gamma_n}| = |\alpha(Z)_{\Gamma_n}|$$

car $\alpha(Z)^{\Gamma_n}$ est fini, donc trivial en appliquant encore la proposition 1.12.

Par dualité, il vient $|Z_{\Gamma_n}|/|Z^{\Gamma_n}| = |\beta(Z)^{\Gamma_n}|$. La surjectivité de l'application i_n : $Z_{\Gamma_n} \to \beta(Z)^{\Gamma_n}$ est alors équivalente à l'égalité des cardinaux $|Z^{\Gamma_n}| = |\ker i_n|$. Mais l'on sait (cf. [Ku] où il n'est pas supposé que Z^{Γ_n} est fini) que pour n assez grand, les noyaux $\ker i_n$ se stabilisent et sont canoniquement isomorphes au sous-module fini maximal Z^0 de Z.

Dans le cas particulier où Z^{Γ_n} est fini, la preuve est bien plus simple : c'est la proposition 1.13 et le corollaire 1.14. Ceci conclut la preuve du lemme 3.1. $\square$

Faisons une digression pour comparer, dans la situation du lemme 3.1, le comportement des noyaux sauvages et celui des (p)-groupes de classes.

Par définition, le *noyau sauvage supérieur* $WK_{2i}^{\text{ét}}(F_n)$ de F_n, $i \geq 1$, est le noyau de l'application

$$H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i+1)) \to \oplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i+1)),$$

où, pour un Γ_n-module M, $M(i)$ signifie « tordu » i-fois à la Tate et F_v est le complété de F en la place v.

Les noyaux sauvages étales jouent un rôle analogue à celui des (p)-groupes de classes en cohomologie étale, K-théorie étale et en théorie d'Iwasawa. Par exemple, concernant les noyaux de capitulation des (p)-groupes de classes, le théorème 1.16 et le corollaire 1.14 montrent la

Proposition 3.2. *Pour n assez grand, on a l'isomorphisme*

$$\ker(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n}) \cong (X'_\infty)^0.$$

(rappelons que $X'_\infty = \mathrm{Gal}(L'_\infty/F_\infty)$, voir les notations p. 60). Ce résultat classique est implicitement contenu dans [Iw1] et explicitement dans [Ku] ; les arguments du corollaire 1.14 sont une simple clarification de la preuve de Kuz'min ([Ku], « Theorem 3.1 »). Voir aussi [GJ].

Si l'on définit par analogie

$$WK_{2i}^{\text{ét}}(F_\infty) := \varinjlim WK_{2i}^{\text{ét}}(F_n),$$

la « Proposition 3.8 » de [KM] nous offre la comparaison suivante :

$$\ker(WK_{2i}^{\text{ét}}(F_n) \to WK_{2i}^{\text{ét}}(F_\infty)^{\Gamma_n}) \cong (X'_\infty)^0(i-1)$$

pour $i \geq 2$ et n assez grand.

Cependant les noyaux sauvages se comportent, en général, de meilleure façon (voir notamment la co-descente dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions dans [KM]). À la différence notable des groupes de classes (cf. théorèmes 3.6, 3.13 et 3.18 ci-dessous), on a le résultat suivant concernant les conoyaux des applications analogues à j_n :

Proposition 3.3. *Pour n assez grand, les applications canoniques*

$$WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_n) \to WK_{2i}^{\acute{e}t}(F_\infty)^{\Gamma_n}$$

sont surjectives.

Démonstration. Puisque $p \neq 2$, on peut clairement supposer que F contient une racine primitive p-ième de l'unité. On sait alors ([Sc], §6, « Lemma 1 ») que

$$WK_{2i}^{\text{ét}}(F_n) \cong X'_\infty(i)_{\Gamma_n}$$

de façon canonique. Puisque les noyaux sauvages sont finis (car les $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{O}_F^S, \mathbb{Z}_p(i))$ le sont, ce qui découle par exemple du théorème 2.15), on peut appliquer le lemme 3.1. □

Revenons aux groupes de classes ; pour appliquer le lemme 3.1, nous avons besoin d'une hypothèse de finitude. Ce sera la

Conjecture de Gross (voir [FGS, J], ou « hypothesis 3 » de [Ku])
Un corps de nombres vérifie la conjecture de Gross (généralisée) en p si les propriétés suivantes, qui sont équivalentes, sont vérifiées :

(i) ${X'}_\infty^\Gamma$ est fini ;

(ii) $(X'_\infty)_\Gamma$ est fini ;

(iii) ${A'}_\infty^\Gamma$ est fini ;

(iv) $(A'_\infty)_\Gamma$ est trivial.

N.B. : hormis dans le cas totalement réel, il n'y a pas d'analogue à cette conjecture pour X_∞ ou A_∞, pour lesquels il existe des contre-exemples. La conjecture de Gross est vraie pour les corps abéliens (cf. [Ja]). Dans le cas totalement réel, elle découle de la conjecture de Leopoldt : notons $\tilde{L}_F$ l'extension abélienne maximale de F, p-ramifiée, p-décomposée et contenant F_∞. Alors, si L_F est la pro-p-extension maximale de F contenue dans $\tilde{L}_F$, on a $\mathrm{Gal}(L_F/F_\infty) \cong (X'_\infty)_\Gamma$. La conjecture de Gross dit que ce dernier groupe est fini, et si ce n'était pas le cas, on aurait $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Gal}(L_F/F_\infty) > 1$, si bien que l'on pourait exhiber une autre $\mathbb{Z}_p$-extension que la cyclotomique, contrairement à ce qu'indique la conjecture de Leopoldt dans le cas totalement réel.

Dans la suite, on supposera souvent que la conjecture de Gross est vraie pour tous les étages $F_n, n \gg 0$, dans la tour cyclotomique de F. En bref, « la conjecture de Gross pour tout n assez grand ».

On peut déduire du lemme 3.1 la formule asymptotique suivante.

Lemme 3.4. *Supposons que la conjecture de Gross pour tout n assez grand est vraie. Alors,*

$$|{A'}_\infty^{\Gamma_n}| = |(X'_\infty)_{\Gamma_n}|/|(X'_\infty)^{\Gamma_n}| = |f_n(0)|_p^{-1}, \tag{3.1}$$

où $f_n(T)$ est la série caractéristique de X'_∞ en tant que $\mathbb{Z}_p[\![\Gamma_n]\!]$-module.

Démonstration. Avec les notations d'Iwasawa, soit L'_{n_0} l'extension p-décomposée maximale contenue dans le p-corps de classes de F_{n_0}, soit $Y'_\infty := \mathrm{Gal}(L'_\infty/F_\infty L'_{n_0})$, et

$\nu_{n,n_0} = \omega_n/\omega_{n_0}$. Alors on a $A'_n \cong X'_\infty/\nu_{n,n_0}Y'_\infty$ pour tout $n \geq n_0$ (théorème 1.16). De là, on déduit que $A'_\infty \cong \beta(Y'_\infty)$ et que $\beta(X'_\infty) \sim A'_\infty$, d'où le lemme.

Cette preuve indique également pourquoi les propriétés (iii) et (iv) sont équivalentes : $(A'_\infty)_\Gamma$ est isomorphe au dual de Pontrjagin de $\alpha(Y'_\infty)^\Gamma$, donc est trivial quand il est fini. □

Vu le lemme 3.4, il est intéressant d'exprimer l'écart entre $(X'_\infty)_{\Gamma_n}$ et A'_n.

Lemme 3.5 (définition). *Pour $n \geq 0$, appelons Ψ_n le noyau de l'application $(X'_\infty)_{\Gamma_n} \to A'_n$ (qui est surjective pour $n \geq n_0$). Si l'on suppose que la conjecture de Gross pour n assez grand est vraie, ces noyaux sont finis et se stabilisent,* i. e., *$\Psi_n \cong \varinjlim \Psi_k =: \Psi_\infty$ pour $n \gg 0$.*

Démonstration. La théorie du corps de classes fournit un diagramme commutatif (cf. [Iw1], §4.3)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Psi_m \arrow[r] & (X'_\infty)_{\Gamma_m} \arrow[r] & A'_m \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi_n \arrow[r] \arrow[u, "\omega_m/\omega_n"] & (X'_\infty)_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[u, "\omega_m/\omega_n"] & A'_n \arrow[r] \arrow[u, "\text{nat.}"] & 0
\end{tikzcd}$$

pour $m \geq n \geq n_0$. Si $m \gg n \gg 0$, on a

$$\ker(\Psi_n \to \Psi_m) \subseteq \ker((X'_\infty)_{\Gamma_n} \to (X'_\infty)_{\Gamma_m}) \cong (X'_\infty)^0,$$

où comme auparavant $(X'_\infty)^0$ désigne le sous-module fini maximal de X'_∞ et l'isomorphisme est comme expliqué dans la preuve du lemme 3.1.

Or, remarquons que l'intersection $(X'_\infty)^0 \cap \mathrm{Gal}(L'_\infty/F_\infty L'_n)$ est triviale pour $n \gg 0$. En effet, soit F^0_∞ le corps fixe de $(X'_\infty)^0$. Alors, comme L'_∞/F^0_∞ est fini et que $L'_\infty = \cup L'_n$, la suite des degrés $[L'_n.F_\infty.F^0_\infty : F^0_\infty]$ est croissante et bornée, donc stationnaire pour $n \gg 0$, de sorte que $L'_\infty = L'_n.F_\infty.F^0_\infty$ pour n grand.

En identifiant $(X'_\infty)^0$ et $\mathrm{Gal}(L'_nF_\infty/F^0_\infty \cap L'_nF_\infty)$, on peut injecter $(X'_\infty)^0$ dans $\mathrm{Gal}(L'_nF_\infty/F_\infty) \cong A'_n$. Ceci prouve que $\Psi_n \to \Psi_m$ devient injective pour tout $m \geq n \gg 0$ (voir le diagramme).

De plus, comme $A'_\infty \sim \beta(X'_\infty)$, les formules asymptotiques d'Iwasawa (cf. proposition 1.10) pour $(X'_\infty)_{\Gamma_n}$ et A'_n s'écrivent

$$\forall n \gg 0,\ |(X'_\infty)_{\Gamma_n}| = p^{\lambda' n + \mu' p^n + \nu_1} \text{ et } |A'_n| = p^{\lambda' n + \mu' p^n + \nu_2},$$

ce qui implique que l'ordre de Ψ_n est borné *indépendamment* de $n \gg 0$.

On en conclut que $\Psi_\infty = \varinjlim \Psi_n$ est fini et que $\Psi_n \xrightarrow{\cong} \Psi_m$ for $m \geq n \gg 0$. Notons au passage cette formule asymptotique supplémentaire :

$$|\Psi_\infty| = p^{\nu_1 - \nu_2}.$$

□

En prenant la limite inductive dans les suites exactes

$$0 \to \Psi_n \to (X'_\infty)_{\Gamma_n} \to A'_n \to 0,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \to \Psi_\infty \to \beta(X'_\infty) \to A'_\infty \to 0$$

d'où l'on tire, après application du lemme du serpent, le diagramme commutatif suivant pour n assez grand :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Psi_\infty^{\Gamma_n} = \Psi_\infty \arrow[r] & \beta(X'_\infty)^{\Gamma_n} \arrow[r] & {A'}_\infty^{\Gamma_n} \arrow[r] & (\Psi_\infty)_{\Gamma_n} = \Psi_\infty \arrow[r] & \beta(X'_\infty)_{\Gamma_n} \arrow[d, equal] \\
 & & & & & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi_n \arrow[r] \arrow[uu, "\wr"] & (X'_\infty)_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[uu, two heads] & A'_n \arrow[r] \arrow[uu] & 0 &
\end{tikzcd}$$

(remarquer que $\beta(X'_\infty)_{\Gamma_n}$ est le dual de $\alpha(X'_\infty)^{\Gamma_n}$, donc est trivial). Une chasse dans le diagramme donne

$$\operatorname{coker}(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n}) \cong \Psi_\infty,$$

d'où le

Théorème 3.6. *Soit F un corps de nombres et soit F_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique (p impair). Supposons que la conjecture de Gross pour tout $n \gg 0$ est vraie ; alors, pour tout n assez grand, les conoyaux $\operatorname{coker}(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n})$ se stabilisent et sont isomorphes à $\Psi_\infty := \varinjlim \Psi_k$, où $\Psi_k = \ker((X'_\infty)_{\Gamma_k} \to A'_k)$.*

En utilisant les résultats de [K2], on peut donner une preuve alternative du théorème 3.6 et retrouver le lien avec $\ker((X'_\infty)_{\Gamma_n} \to A'_n)$.

Dans la suite, k est un entier supérieur ou égal à 1. Soit

$$\Delta_{F_n}^{(k)} := \{z \in F_n^*, v_{\mathfrak{p}}(z) \equiv 0\,(p^k) \text{ pour tout } \mathfrak{p} \nmid p\}$$

et

$$D_{F_n}^{(k)} = p^{-k}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \widehat{F}_{n,v}^\times {F_{n,v}^\times}^{p^k}.$$

Soit C_{F_n} le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\tilde{L}_{F_n}/F_n)$. Pour un groupe abélien G, ${}_{p^k}G$ désignera les éléments d'exposant p^k et $G(p)$ la partie de p-torsion. Alors, pour tout $k \geq 1$, on a le diagramme commutatif suivant (cf. [K2] p. 15) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^{-k}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker g_{F_n} \arrow[r] \arrow[d] & D_{F_n}^{(k)} \arrow[r] \arrow[d] & {}_{p^k}C_{F_n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & p^{-k}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U'_n \arrow[r] & \Delta_{F_n}^{(k)} \arrow[r] & {}_{p^k}A'_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En prenant la limite inductive sur k et n successivement, on obtient un autre diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker g_\infty & \longrightarrow & D_\infty & \longrightarrow & C_\infty(p) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U'_\infty & \longrightarrow & \Delta_\infty & \longrightarrow & A'_\infty & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où l'on déduit l'isomorphisme

$$\ker(C_\infty(p) \to A'_\infty) \cong (D_\infty \cap \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U'_\infty)/(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker g_\infty).$$

Comme le radical kummérien de $\mathrm{Gal}(T_\infty/F_\infty)$ est $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker g_\infty$ (« Theorem 2.3 » de [K2]), et que celui de $\mathrm{Gal}(N'_\infty/F_\infty)$ est $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes U'_\infty$, il vient

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F_\infty^{BP} \cap N'_\infty/T_\infty), \mu_{p^\infty}) \cong \varinjlim \ker(C_{F_n}(p) \to A'_n).$$

En fait, $\ker(C_{F_n}(p) \to A'_n) = \ker((X'_\infty)_{\Gamma_n} \to A'_n) =: \Psi_n$ donc on retrouve bien le théorème 3.6.

Corollaire 3.7. *Supposons que* $(X'_\infty)_{\Gamma_N} \xrightarrow{\simeq} A'_N$ *pour un certain* $N \geq n_0$ *(ceci se produit e.g. lorsqu'il n'y a qu'une seule* p*-place dans* F_∞*, cf. corollaire 1.18). Alors, pour tout* $n \geq N$*, l'application naturelle* $A'_n \longrightarrow {A'}_\infty^{\Gamma_n}$ *est* surjective.

Démonstration. En reprenant les notations d'Iwasawa, on a $A'_n \cong X'_\infty/\nu_{n,n_0}Y'_\infty$ pour tout $n \geq n_0$ (théorème 1.16), où $Y'_\infty = \mathrm{Gal}(L'_\infty/F_\infty L'_{n_0})$, et $\nu_{n,n_0} = \omega_n/\omega_{n_0}$. L'hypothèse du corollaire signifie que $\nu_{N,n_0}Y'_\infty = \omega_N X'_\infty$. De là, on tire

$$(X'_\infty)_{\Gamma_n} = X'_\infty/\omega_n X'_\infty = X'_\infty/\nu_{N,n}\omega_N X'_\infty \cong A'_n$$

pour $n \geq N$.

Ainsi, $\forall n \geq N$, $\Psi_n = 0$, donc $\Psi_\infty = 0$. □

Remarquons que :

(i) Ce corollaire est le « Theorem 3 » de [I3], mais ici on ne suppose pas comme dans [I3] que p se décompose totalement ni que F est réel ;

(ii) Bien entendu, la condition $(X'_\infty)_{\Gamma_{n_0}} \cong A'_{n_0}$ n'est pas en général nécessaire pour que l'application $A'_n \longrightarrow {A'}_\infty^{\Gamma_n}$ soit surjective (mais voir à ce propos la section 5.2) comme le montrent les exemples de $\mathbb{Q}(\sqrt{67})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{103})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{106})$, etc. dans la table 2 p. 88. Pour ces corps, la conjecture de Greenberg est vraie (*i. e.*, $A'_\infty = 0$), donc le conoyau est trivial, tandis que $n_0 = 0$ et $(X'_\infty)_\Gamma$ n'est pas isomorphe à A'_0 (en effet, il y a isomorphisme si et seulement si $\Psi_0 = 0$).

Nous verrons dans le prochain paragraphe qu'à la différence des Ψ_k, les conoyaux $\mathrm{coker}\, j_n$ se stabilisent dès le niveau n_0.

De plus, on retrouve le « Theorem 1 » de [S] (tous les résultats du paragraphe 1 restent valables pour *toute* $\mathbb{Z}_p$-extension modulo l'hypothèse de finitude dans la conjecture de Gross) :

Corollaire 3.8. *Supposons que la conjecture de Gross pour tout $n \gg 0$ est vraie. Alors,*

$$A'_\infty = 0 \Leftrightarrow \exists n \gg 0, \ker j_n = A'_n \textit{ et } \Psi_n = 0.$$

3.2 Dualité de Kummer et module de Bertrandias-Payan

Dans ce paragraphe, notre but est de démontrer une version non-asymptotique du théorème 3.6 en utilisant la théorie de Kummer et des techniques issues des problèmes de plongements en théorie d'Iwasawa.

À cet effet, on fait l'hypothèse que F contient le groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque l'on peut toujours prendre les co-invariants par $\Delta := \mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F)$ pour redescendre au corps F ($p \neq 2$).

Nous énonçons d'abord un lemme qui généralise le « Lemma 7 » de [I1]. Soit $\mathcal{E}'_\infty = U'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ le dual kummérien de $\mathrm{Gal}(N'_\infty/F_\infty)$ et soit $\mathcal{V}_\infty = H^1(G_S(F_\infty), \mu_{p^\infty})$ celui de $\mathfrak{X}_\infty$, où $G_S(F_\infty)$ est le groupe de Galois au-dessus de F_∞ de l'extension S-ramifiée maximale de F_∞. Enfin, soit

$$\mathcal{V}_n := H^1(G_S(F_n), \mu_{p^\infty}) \text{ et } \mathcal{E}'_n := U'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

Lemme 3.9.

$$\forall n \geq 0, \ker(A'_n \xrightarrow{j_n} {A'}^{\Gamma_n}_\infty) \cong {\mathcal{E}'}^{\Gamma_n}_\infty/\mathcal{E}'_n,$$

et

$$\mathrm{coker}(A'_n \xrightarrow{j_n} {A'}^{\Gamma_n}_\infty) \cong (\mathcal{E}'_\infty \cap (\gamma^{p^n}-1)\mathcal{V}_\infty)/(\gamma^{p^n}-1)\mathcal{E}'_\infty.$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutative suivant, issu de la théorie de Kummer :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{E}'_\infty & \to & \mathcal{V}_\infty & \to & A'_\infty & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{E}'_n & \to & \mathcal{V}_n & \to & A'_n & \to & 0 \end{array}$$

Il est bien connu que $\mathcal{V}_n \cong \mathcal{V}_\infty^{\Gamma_n}$; ceci découle du lemme de Tate (cf. lemme 2.25) et de la suite d'inflation-restriction.

Avec le lemme du serpent, on obtient donc un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {\mathcal{E}'}^{\Gamma_n}_\infty \arrow[r] & \mathcal{V}^{\Gamma_n}_\infty \arrow[r] & {A'}^{\Gamma_n}_\infty \arrow[r] & (\mathcal{E}'_\infty)_{\Gamma_n} \arrow[r, "f_n"] & (\mathcal{V}_\infty)_{\Gamma_n} \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}'_n \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathcal{V}_n \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & A'_n \arrow[r] \arrow[u, "j_n"] & 0 & \end{tikzcd}$$

et une chasse dans le diagramme donne

$$\ker j_n \cong \mathrm{coker}(\mathcal{E}'_n \to \mathcal{E}'^{\Gamma_n}_\infty) = \mathcal{E}'^{\Gamma_n}_\infty / \mathcal{E}'_n,$$

et

$$\mathrm{coker}\, j_n \cong \ker f_n = (\mathcal{E}'_\infty \cap (\gamma^{p^n} - 1)\mathcal{V}_\infty)/(\gamma^{p^n} - 1)\mathcal{E}'_\infty.$$

□

Le but à présent est de donner une description plus exploitable du radical kummérien introduit dans le lemme 3.9. Dans les cas particuliers étudiés dans les articles [I1, I2], ceci est développé longuement et de façon assez technique.

Ici, nous résolvons le problème général en introduisant ce que l'on appelle le « corps de Bertrandias-Payan » (en référence à [BP]).

Définition 3.10. *Pour un corps K, le corps de Bertrandias-Payan sur K est la composée de toutes les p-extensions de K qui sont plongeables dans des extensions cycliques de degré p^m pour tout $m \geq 1$. En d'autres termes, ce corps est la composée de toutes les extensions de K qui sont localement $\mathbb{Z}_p$-plongeables pour toute place finie (cf. [BP], §1.4).*

On notera F_n^{BP} (resp. F_∞^{BP}) le corps de Bertandias-Payan sur F_n (resp. sur F_∞) et BP_n (resp. BP_∞) le groupe de Galois de F_n^{BP} sur F_n (resp. de F_∞^{BP} sur F_∞).

On montre facilement que $T_\infty \subseteq F_\infty^{BP} \subseteq M_\infty$, où T_∞ est le corps fixe de $\mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$, si bien que $\mathrm{tor}_\Lambda BP_\infty = \mathrm{Gal}(F_\infty^{BP}/T_\infty)$.

La proposition suivante est une étape cruciale en vue de la preuve du théorème principal de ce paragraphe (théorème 3.13) :

Proposition 3.11. *Supposons vraie la conjecture de Gross pour tout $n \geq n_0$. Soit N''_∞ l'intersection de N'_∞ et de F_∞^{BP}. Alors,* $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$ *est fini et*

$$\mathrm{Gal}(M_\infty/N''_\infty) \cong \mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty) \times \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty^{BP}).$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{X}_n := \mathrm{Gal}(M_n/F_n)$ et $W_n := \mathrm{Gal}(M_n/F_n^{BP})$. Dans [N2], §1, l'auteur montre, à l'aide de techniques de plongements, qu'il y a une suite exacte canonique

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{F_n} \arrow[r] & \oplus_{v|p}\mu_{F_{n,v}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{X}_n \arrow[r] & BP_n \arrow[r] & 0. \\
& & & W_n \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Pour $v|p$, appelons Γ_v son groupe de décomposition (relativement à F_∞/F) et posons $\Lambda_v := \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$. Alors, le module *induit* d'un Λ_v-module M est défini comme $\mathrm{Ind}_v M := M \otimes_{\Lambda_v} \Lambda$. En prenant la limite projective, on obtient une suite exacte de Λ-modules

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p(1) \arrow[r] & \oplus_{v|p}\mathrm{Ind}_v\mathbb{Z}_p(1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{X}_\infty \arrow[r] & BP_\infty \arrow[r] & 0, \\ & & & W_\infty \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

(on rappelle que pour un Λ-module M et un entier i, la notation $M(i)$ signifie M « tordu » i-fois à la Tate) de laquelle on déduit une autre suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to W_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty^{BP}) \to \mathrm{tor}_\Lambda\, \mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/T_\infty) \to \mathrm{Gal}(F_\infty^{BP}/T_\infty) \to 0.$$

Or, $\mathrm{Gal}(T_\infty/F_\infty) = \mathrm{fr}_\Lambda\, \mathfrak{X}_\infty$ est le quotient sans Λ-torsion maximal de $\mathfrak{X}_\infty$, donc également celui de BP_∞ et $\mathrm{Gal}(F_\infty^{BP}/T_\infty) = \mathrm{tor}_\Lambda\, BP_\infty$, comme rappelé à la page précédente.

À présent, montrons tout d'abord que l'intersection $I := W_\infty \cap \mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty)$ est triviale. La description explicite de W_∞ entraîne $W_\infty(-1)^{\Gamma_n} = W_\infty(-1)$ pour $n \geq n_0$. De plus, la suite exacte de Kummer du lemme 3.9 implique que

$$\mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty) = \mathrm{Hom}(A'_\infty, \mu_{p^\infty}) = \mathrm{Hom}(A'_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1),$$

et, d'après la théorie d'Iwasawa des adjoints, on sait que $A'_\infty \sim \beta(X'_\infty)$ (cf. corollaire 1.19), par conséquent $\mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty)(-1) \sim \alpha(X'_\infty)$, et $\mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty)(-1)^{\Gamma_n}$ est fini (conjecture de Gross).

Ceci signifie que $I(-1)$ est fini, donc trivial, puisque $\mathfrak{X}_\infty$ n'a pas de sous-module fini non-nul. La trivialité de l'intersection I démontre la seconde assertion de la proposition.

Quant à la première assertion, il suffit de se rappeler que $\mathrm{Gal}(N'_\infty/T_\infty)$ est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}_p$-module à $\mathbb{Z}_p^{s_\infty - 1}$, où s_∞ désigne le nombre de places au-dessus de p dans F_∞ (cf. [Iw1], [Ku]), et que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} W_\infty = s_\infty - 1$, d'après la suite exacte (3.2). $\square$

En fait, la preuve de la proposition 3.11 fournit des informations supplémentaires. En premier lieu, elle donne cette description du module de Bertrandias-Payan (qui apparaît déjà dans [N2], mais avec la conjecture de Leopoldt) :

Corollaire 3.12. *Supposons vraie la conjecture de Gross pour tout $n \geq n_0$. Alors*

$$\mathrm{tor}_\Lambda\, BP_\infty \sim \alpha(X'_\infty(-1)).$$

Démonstration. D'après la proposition 3.11,

$$\alpha(X'_\infty)(-1) \sim \mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty) \cong \mathrm{Gal}(F_\infty^{BP}/N''_\infty) \sim \mathrm{tor}_\Lambda\, BP_\infty.$$

$\square$

Ensuite, elle donne la Λ-structure précise de $\mathrm{Gal}(N'_\infty/T_\infty)$, voir le corollaire 3.14 ci-dessous (on connaissait seulement le module élémentaire associé ; cf. [Iw1] ou [Ku]).

Nous sommes en mesure désormais d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe. On rappelle que T_∞ est le corps fixe de $\mathrm{tor}_\Lambda\,\mathfrak{X}_\infty$ dans M_∞ (ou celui de $\mathrm{tor}_\Lambda\,BP_\infty$ dans M_∞) et N''_∞ est l'intersection de F_∞^{BP} et de N'_∞.

Théorème 3.13. *Supposons vraie la conjecture de Gross pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$,*

$$\begin{aligned}\mathrm{coker}(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n}) &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty), \mu_{p^\infty}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty), \mu_{p^\infty}).\end{aligned}$$

Démonstration. Considérons la suite exacte $0 \to \ker f_n \to (\mathcal{E}'_\infty)_{\Gamma_n} \to (\mathcal{V}_\infty)_{\Gamma_n} \to 0$ et prenons les duals de Kummer (repérés par un chapeau) :

$$0 \to \widehat{(\mathcal{V}_\infty)_{\Gamma_n}} \to \widehat{(\mathcal{E}'_\infty)_{\Gamma_n}} \to \widehat{\ker f_n} \to 0.$$

On a

$$\widehat{(\mathcal{V}_\infty)_{\Gamma_n}} \cong \mathfrak{X}_\infty(-1)^{\Gamma_n} = (\mathrm{tor}_\Lambda\,\mathfrak{X}_\infty)(-1)^{\Gamma_n},$$

(la dernière égalité provient du fait que les points fixes par Γ_n d'un Λ-module sont dans son sous-module de Λ-torsion) et, de même,

$$\widehat{(\mathcal{E}'_\infty)_{\Gamma_n}} \cong Z'_\infty(-1)^{\Gamma_n} = (\mathrm{tor}_\Lambda\,Z'_\infty)(-1)^{\Gamma_n},$$

où $Z'_\infty = \mathrm{Gal}(N'_\infty/F_\infty)$.

Il est connu (cf. [Iw1], « Theorem 15 ») que

$$(\mathrm{tor}_\Lambda\,Z'_\infty)(-1) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda/\xi_{n_i}\Lambda$$

avec conoyau fini, où $\xi_{n_i} = \omega_{n_i}/\omega_{n_i-1}$ et $\sum_{i=1}^t n_i = s_\infty - 1$; de là on déduit que

$$\mathrm{tor}_\Lambda\,Z'_\infty(-1) \cong \mathbb{Z}_p^{s_\infty - 1}$$

comme groupes abstraits, où, comme auparavant, s_∞ est le nombre de places au-dessus de p dans F_∞, et on déduit aussi que $\mathrm{tor}_\Lambda\,Z'_\infty(-1)$ est invariant par Γ_n pour $n \gg 0$.

Mais nous voulons un résultat non-asymptotique et pour cela nous devons prouver que $\mathrm{tor}_\Lambda\,Z'_\infty(-1)$ est invariant par Γ_n pour tout $n \geq n_0$. Ce résultat peut être déduit de l'article [Ku] si on l'examine assez attentivement. Voici les détails.

Soit $\overline{E}'_\infty := \varprojlim \overline{U}'_n$; alors, $\overline{E}'_\infty/\,\mathrm{tor}_\Lambda\,\overline{E}'_\infty$ est un Λ-module libre de rang $r_1 + r_2$ (c'est le « Theorem 7.2 » de [Ku] ; comme d'habitude, r_1 est le nombre de plongements réels de F et $2r_2$ est le nombre de plongements complexes). Par les co-invariants, $(\overline{E}'_\infty)_{\Gamma_n}$

s'injecte dans $\overline{U}'_n$ (« Theorem 7.3 » de [Ku]). Si l'on note $\widetilde{U}'_n$ ($\cong (\overline{E}'_\infty)_{\Gamma_n}$) son image, on obtient ce que l'on appellera la *suite exacte de Kuz'min*

$$0 \to \widetilde{U}'_n \to \overline{U}'_n \to V_n \to 0,$$

où V_n est défini de manière tautologique (le groupe V_n est noté $F_{\mathbb{Z}_l}(U(k_n) \otimes \mathbb{Z}_l)/\operatorname{im}\kappa_n$ dans [Ku]).

Supposons à présent que $\mu_p \subset F$; alors, $\operatorname{tor}_\Lambda \overline{E}'_\infty = \mathbb{Z}_p(1)$ et $\operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \widetilde{U}'_n = \mu(F_n)$, par suite $\widetilde{U}'_n/\operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \widetilde{U}'_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]^{r_2}$. Dans sa preuve de la « Proposition 8.2 », Kuz'min montre que les V_n se stabilisent à partir de n_0 et il prouve au passage que $\operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} V_n \cong \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} {X'}_\infty^{\Gamma_n}$ (qui est écrit $T_{\mathbb{Z}_l}(T_l(k))^{\Gamma_n}$ dans le texte de Kuz'min). En tensorisant par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Z}_p$, il vient

$$0 \to \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} V_n = \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} {X'}_\infty^{\Gamma_n} \to \widetilde{U}'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to U'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to V_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0.$$

On déduit de cette suite exacte que l'image de $\varinjlim(\widetilde{U}'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dans $U'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est le dual de Kummer de $\operatorname{fr}_\Lambda Z'_\infty = \operatorname{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$, par conséquent, $\varinjlim V_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est le dual kummérien de $\operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty$. Il s'ensuit en particulier que $\operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty(-1)$ est laissé fixe par Γ_n pour $n \geq n_0$, ce que l'on voulait démontrer.

Remarquons que nous n'avons pas recouru à la conjecture de Gross pour établir que $\operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty(-1)$ est invariant par Γ_n pour $n \geq n_0$ (voir à ce propos les paragraphes 3 & 4, où l'on ne se sert pas de la conjecture de Gross).

Revenons à la preuve du théorème 3.13 ; il vient finalement

$$\begin{aligned} \widehat{\operatorname{coker} j_n} \cong \widehat{\ker f_n} &\cong \operatorname{coker}(W_\infty(-1)^{\Gamma_n} \to (\operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty)(-1)^{\Gamma_n}) \\ &\cong \operatorname{coker}(W_\infty(-1) \to (\operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty)(-1)) \end{aligned}$$

pour $n \geq n_0$. Le premier isomorphisme découle de la proposition 3.11 et le second de la digression précédente. Ceci démontre la première assertion du théorème.

Quant à la seconde, notons que le morphisme canonique $\theta_\infty : \operatorname{tor}_\Lambda BP_\infty \to X'_\infty$ surjecte $\operatorname{tor}_\Lambda BP_\infty$ sur $\operatorname{Gal}(L'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty)$ et $\operatorname{Gal}(F_\infty^{BP}/N''_\infty)$ sur

$$\operatorname{Gal}(L'_\infty/(L'_\infty T_\infty \cap N'_\infty \cap L'_\infty)) = \operatorname{Gal}(L'_\infty/N'_\infty \cap L'_\infty).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{tor}_\Lambda BP_\infty/\operatorname{Gal}(F_\infty^{BP}/N''_\infty) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Gal}(N'_\infty \cap L'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty),$$

ce qui termine la preuve.

La situation peut être illustrée par le diagramme de corps suivant :

$$\begin{tikzcd}
N'_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_\infty \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, bend left, "W_\infty"] \\
N''_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & F_\infty^{BP} \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, bend left, "\ker\theta_\infty"] \\
T_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L'_\infty T_\infty \arrow[d, dash] \\
L'_\infty \cap T_\infty \arrow[r, dash] \arrow[r, dash, bend right, "\operatorname{im}\theta_\infty"'] \arrow[d, dash] & L'_\infty \\
F_\infty &
\end{tikzcd}$$

□

La preuve du premier isomorphisme dans le théorème 3.13 montre en fait l'existence d'une suite exacte naturelle de modules galoisiens

$$0 \to W_\infty \to \operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty \to \operatorname{Hom}(\operatorname{coker} j_n, \mu_{p^\infty}) \to 0 \quad (\forall n \geq n_0)$$

qui mène à cette description de $Z'_\infty = \operatorname{Gal}(N'_\infty/F_\infty)$:

Corollaire 3.14. *On a la suite exacte*

$$0 \to W_\infty \to \operatorname{tor}_\Lambda Z'_\infty \to \operatorname{Hom}(\Psi_\infty, \mu_{p^\infty}) \to 0.$$

Remarquons qu'à la différence des résultats du paragraphe précédent, nous obtenons ici des formulations non-asymptotiques.

Corollaire 3.15. *Dans la situation du théorème 3.13, les conoyaux* $\operatorname{coker} j_n$ *se stabilisent pour* $n \geq n_0$ *et sont isomorphes à* $\Psi_\infty = \varinjlim \Psi_k$.

Démonstration. Cela découle immédiatement des théorèmes 3.6 et 3.13. □

N.B. : ce corollaire ne signifie *pas* que les noyaux Ψ_n se stabilisent dès le niveau n_0 (pour un contre-exemple, cf. la remarque (ii) qui suit le corollaire 3.7).

Nous supposons à présent que F est un corps CM ; alors, si M est un $\mathbb{Z}_p[\operatorname{Gal}(F/\mathbb{Q})]$-module, la partie « plus » est définie par $M^+ := \frac{1+j}{2}M$ et la partie « moins » par $M^- := \frac{1-j}{2}$, où j est la conjugaison complexe.

Corollaire 3.16. *Supposons que F est un corps CM. Alors, pour $n \geq n_0$,* $(\operatorname{coker} j_n)^\pm$ *est le dual de Kummer du sous-module fini maximal de* $\operatorname{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/F_\infty)^\mp$.

N.B. : cet énoncé généralise le résultat principal d'Ichimura ([I1], « Theorem 2 » ; [I2], « Theorem 2 »).

Démonstration. Intéressons-nous d'abord à $(\operatorname{coker} j_n)^-$: son dual kummérien est

$$\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty / L'_\infty \cap T_\infty)^+,$$

qui est donc un sous-module fini de $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/F_\infty)^+$. Mais la *conjecture faible de Leopoldt* (qui est valable pour toute $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, cf. proposition 1.23, et dont un énoncé possible est : le Λ-rang de $\mathfrak{X}_\infty$ est r_2) implique que $\mathrm{Gal}(T_\infty/F_\infty)$ est réduit à sa partie « moins », par conséquent

$$\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap T_\infty/F_\infty) = \mathrm{Gal}(L'_\infty \cap T_\infty/F_\infty)^-,$$

et $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty)^+$ est le sous-module fini maximal de $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/F_\infty)^+$.

Les choses se compliquent pour $(\operatorname{coker} j_n)^+$: son dual de Kummer est $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty)^-$, et l'on doit prouver que $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap T_\infty/F_\infty)$ n'a pas de sous-module fini non-nul. Ce résultat figure dans [B], et nous le redémontrons pour la commodité du lecteur.

Nous adoptons certaines des notations figurant dans [N2]. Posons $\mathcal{D}_\infty := \mathrm{Gal}(M_\infty/L'_\infty)$; comme auparavant, $W_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty^{BP})$ et θ_∞ est le morphisme canonique de $\mathrm{tor}_\Lambda BP_\infty$ vers X'_∞. Ces groupes de Galois prennent place dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_\infty \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{tor}_\Lambda BP_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\theta_\infty"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_\infty \arrow[r] & \mathfrak{X}_\infty \arrow[r] & X'_\infty \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui, avec le lemme du serpent, donne la suite exacte

$$0 \to \ker \theta_\infty \to \mathcal{D}_\infty/W_\infty \to \mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \to \operatorname{coker} \theta_\infty \to 0. \tag{3.3}$$

On montre dans [N2] que $\mathrm{tor}_\Lambda BP_\infty$ n'a pas de sous-module fini non-nul. Il s'en suit d'après (3.3) que $\mathcal{D}_\infty/W_\infty$ jouit également de cette propriété.

Rappelons ensuite quelques propriétés utiles des modules $\overline{E}'_\infty := \varprojlim U'_n \otimes \mathbb{Z}_p$ et $H_\infty := \oplus_{v|p} \mathfrak{X}_{v,\infty}$, où $\mathfrak{X}_{v,\infty}$ est la pro-p-extension abélienne maximale du corps local $F_{v,\infty}$.

La conjecture faible de Leopoldt affirme que $\mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \sim \Lambda^{r_2}$ et Kuz'min a montré que $\mathrm{fr}_\Lambda \overline{E}'_\infty \cong \Lambda^{r_2}$ ([Ku], « Theorem 7.2 ») et que $\mathrm{fr}_\Lambda H_\infty \cong \Lambda^{2r_2}$ ([Ku], « Proposition 7.3 »).

Concentrons-nous à présent sur le cas CM. En invoquant à nouveau la conjecture faible de Leopoldt, il vient $\mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty^+ = 0$, donc on a aussi $(\operatorname{coker} \theta_\infty)^+ = 0$. En sus, on montre dans [N2] que $\ker \theta_\infty$ et $\operatorname{coker} \theta_\infty$ sont pseudo-duals (*i. e.*, dualité à valeur dans $\mathbb{Z}_p(1)$), donc la partie « moins » de la suite exacte (3.3) s'écrit :

$$0 \to (\mathcal{D}_\infty/W_\infty)^- \to \mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \to \operatorname{coker} \theta_\infty \to 0. \tag{3.4}$$

Comme les U'^-_n se stabilisent modulo les racines de l'unité, $\mathrm{fr}_\Lambda(\overline{E}'_\infty)^- = 0$ et $\mathrm{fr}_\Lambda(H_\infty)^- \cong (\mathcal{D}_\infty/W_\infty)^-$. Il s'ensuit en particulier que $(\mathcal{D}_\infty/W_\infty)^-$ est un facteur direct de Λ^{2r_2}, par conséquent il est Λ-libre, de rang r_2 d'après (3.4). De plus, le théorème de structure des Λ-modules (cf. théorème 1.8) fournit une injection $\mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \hookrightarrow \Lambda^{r_2}$ avec conoyau fini.

En rassemblant ces résultats, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathcal{D}_\infty/W_\infty)^- \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{coker}\theta_\infty \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ & \Lambda^{r_2} \arrow[r, "f"] & \Lambda^{r_2} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où l'application f est telle que le carré de gauche commute et le module M est induit par la partie droite du diagramme.

Ceci prouve que la dimension projective de M sur Λ est au plus 1, donc M (et par conséquent $\operatorname{coker}\theta_\infty$) n'a pas de sous-module fini non-nul. Ceci achève la preuve du corollaire. $\square$

3.3 Dualité de Kummer et noyaux de Gross

Nous avons vu dans le § 2 que les théorèmes 3.6 et 3.13 ensemble donnent le radical kummérien de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$. Dans ce paragraphe, nous exposons une preuve directe qui est intéressante en elle-même.

Désignons par $\overline{(.)}$ la complétion p-adique, et par $\widehat{F}^\times_{n,v}$ le groupe des normes universelles dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $F_{n,v}$, le complété de F_n en la place v. Alors, ce qu'on appelle la *suite exacte de Sinnott* pour F_n s'écrit (cf. [FGS], [K2], [J], etc.) :

$$0 \to \ker g_n \to \overline{U}'_n \xrightarrow{g_n} \oplus_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v} \to \mathrm{Gal}(\tilde{L}_{F_n}/F_n) \to A'_n,$$

pour tout $n \geq 0$. Ici, $\tilde{L}_{F_n}$ désigne l'extension abélienne maximale de F_n contenue dans L'_∞. Les $\ker g_n$ sont appelés *noyaux de Gross* dans [K2]. D'après la formule du produit, $\operatorname{im} g_n$ est contenue dans $\widetilde{\oplus}_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v}$, les éléments dont la somme des composantes est nulle. La suite modifiée s'écrit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker g_n \arrow[r] & \overline{U}'_n \arrow[r] & \widetilde{\oplus}_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v} \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X'_\infty)_{\Gamma_n} \arrow[r] & A'_n \arrow[r] & 0, \\ & & & & \Psi_n \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

pour tout $n \geq n_0$. À la suite de Kolster, écrivons $\ker g_\infty := \varinjlim \ker g_n$.

Théorème 3.17 ([K2, Ku]). *Supposons que la conjecture de Gross pour tout $n \gg 0$ est vraie. Alors,*

$$\mathrm{Gal}(T_\infty/F_\infty) = \mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \cong \mathrm{Hom}(\ker g_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}).$$

En d'autres mots, le radical kummérien de $\mathrm{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$ est $\ker g_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Nous partons de ce résultat pour déterminer le dual de Kummer de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$, qui est *a priori* un sous-groupe de

$$(U'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)/(\ker g_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varinjlim(\overline{U}'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \,/ \varinjlim(\ker g_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

(on a utilisé que les limites inductives commutent avec le produit tensoriel).

Pour un élément $a \otimes 1/p^k \in U'_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, où l'on peut prendre $a \in U'_n$ pour $n \geq k$, l'extension kummérienne $F_n(a^{1/p^k})/F_n$ avec $k \leq n$ est infiniment plongeable dans des p-extensions cycliques si et seulement si $F_{n,v}(a_v^{1/p^k})/F_{n,v}$ est $\mathbb{Z}_p$-plongeable pour toute place $v|p$ et non-ramifiée pour $v \nmid p$, où a_v est l'image de a dans $F_{n,v}$.

À son tour, cette dernière condition est équivalente à $a_v \in {F^\times_{n,v}}^{p^k} \widehat{F}^\times_{n,v}$ pour tout $v|p$ (cf. [BP], exemple p. 526). Le dual de Kummer de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$ est donc $\varinjlim \Phi_n$, où Φ_n est le noyau de l'application naturelle

$$(\overline{U}'_n/\ker g_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \oplus_{v|p}(\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

Or, après tensorisation par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, la suite exacte de Sinnott modifiée devient

$$0 \to \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \Psi_n = \Psi_n \to (\overline{U}'_n/\ker g_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow (\widetilde{\oplus}_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0, \quad (3.5)$$

l'exactitude à droite (resp. à gauche) étant due à la finitude de Ψ_n (resp. la $\mathbb{Z}_p$-liberté de $(\widetilde{\oplus}_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v})$). Il s'en suit que $\Phi_n = \Psi_n$, donc :

Théorème 3.18. *Sous les hypothèses du théorème 3.17 :*

– *le dual de Kummer de* $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$ *est* $\Psi_\infty := \varinjlim \Psi_k$ *;*

– *le dual de Kummer de* $\mathrm{Gal}(N'_\infty/N''_\infty)$ *est* $\varinjlim(\widetilde{\oplus}_{v|p}\overline{F}^\times_{n,v}/\widehat{F}^\times_{n,v}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

On peut noter que la proposition 3.11, le corollaire 3.14 et le théorème 3.18 réunis fournissent un dévissage complet du module $\mathrm{Gal}(M_\infty/T_\infty) = \mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$.

Pour être complet, comparons les suites exactes de Kuz'min et de Sinnott. Notons comme plus haut g_n l'application définie dans la suite exacte de Sinnott. Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{U}'_n & \longrightarrow & \overline{U}'_n & \longrightarrow & V_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker g_n & \longrightarrow & \overline{U}'_n & \longrightarrow & \mathrm{im}\, g_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Or $\ker g_n/\widetilde{U}'_n \cong {X'}^{\Gamma_n}_\infty$ d'après la « Proposition 7.5 » de [Ku], de sorte que l'on a la suite exacte

$$0 \to {X'}^{\Gamma_n}_\infty \to V_n \to \mathrm{im}\, g_n \to 0.$$

Par la conjecture de Gross, on en déduit que $V_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \mathrm{im}\, g_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et on retrouve le fait que ce dernier module est le dual de Kummer de $\mathrm{tor}_\Lambda Z'_\infty$, ainsi qu'on l'a montré dans ce paragraphe.

3.4 La vie sans Gross

On peut se demander quels résultats subsistent lorsque l'on se passe de la conjecture de Gross. Passons en revue les paragraphes précédents :

– dans le § 1, on ne peut plus appliquer le lemme 3.1, donc on n'a plus le théorème 3.6 ;

– dans le § 2, la proposition 3.11 n'est plus valable telle qu'elle est énoncée. On doit la modifier de la manière suivante : sans Gross, appelons $\delta_n := \mathbb{Z}_p$-rang de $(X'_\infty)_{\Gamma_n}$ le *défaut de Gross* au niveau n ; les δ_n sont clairement majorés par $s_\infty - 1$ (on rappelle que s_∞ est le nombre de p-places dans F_∞), par conséquent ils se stabilisent à partir d'un certain entier n_1, et $\delta_\infty := \max \delta_n = \delta_{n_1} \leq s_\infty - 1$.

Proposition 3.19. *Soit* $N := \max(n_0, n_1)$. *Alors*

$$\mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty F_\infty^{BP}) \cong \mathbb{Z}_p(1)^{\delta_\infty} \sim \mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$$

en tant que Γ_N*-modules.*

Démonstration. En revenant à la preuve de la proposition 3.11, on a

$$\begin{aligned} V_\infty := \mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty F_\infty^{BP}) &= \mathrm{Gal}(M_\infty/N'_\infty) \cap \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty^{BP}) \\ &\sim \alpha(X'_\infty(-1)) \cap W_\infty. \end{aligned}$$

Comme $W_\infty(-1) = W_\infty(-1)^{\Gamma_N}$, il vient $V_\infty(-1) \sim {X'}_\infty^{\Gamma_N} \cap W_\infty(-1)^{\Gamma_N}$, donc $V_\infty \sim \mathbb{Z}_p(1)^{\delta_\infty}$. Puisque V_∞ n'a pas de sous-module fini non-nul, le premier isomorphisme de la proposition est prouvé (notons que c'est seulement un isomorphisme « abstrait »).

Une conséquence directe est que le λ-invariant de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$ est égal à δ_∞, et, connaissant la structure de $\mathrm{Gal}(N'_\infty/T_\infty)$, on peut conclure à pseudo-isomorphisme près. □

Une description plus précise de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$ est donnée plus bas (corollaire 3.22).

Venons-en au théorème 3.13 ; on remarque que le point-clef de la preuve est la détermination de $\widehat{\ker f_n}$ comme conoyau de $W_\infty(-1)^{\Gamma_n} \to (\mathrm{tor}_\Lambda Z'_\infty)(-1)^{\Gamma_n})$. Mais on sait en toute généralité (sans la conjecture de Gross) que $\mathrm{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty(-1)^{\Gamma_n} \cong W_\infty(-1)$ pour $n \geq n_0$ ([Ku], 7-1 ; [Wg], 7-13), de sorte que notre théorème demeure valide.

Théorème 3.20. *Pour tout* $n \geq n_0$, *les conoyaux* $\mathrm{coker}(A'_n \to {A'}_\infty^{\Gamma_n})$ *se stabilisent et sont isomorphes à* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty), \mu_{p^\infty})$. *Pour* $n \geq N$, *ils sont pseudo-isomorphes à* $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\delta_\infty}$ *comme* Γ_N*-modules.*

– dans le § 3, seule une partie de la description kummérienne de $\mathrm{coker}\, j_n$ qui utilise les noyaux de Gross reste disponible.

Tout d'abord, en comparant les suites exacte de Kuz'min et de Sinnott comme on l'a fait au § 3, on peut rempacer le théorème 3.13 par le

Théorème 3.21 (voir aussi [K2], 2.7). *Soit T'_∞ l'extension de F_∞ telle que $\mathrm{Gal}(T'_\infty/F_\infty)$ soit le dual de Kummer de $\ker g_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Alors T'_∞ contient T_∞, et on a un isomorphisme de Γ_N-modules :*

$$\mathrm{Gal}(T'_\infty/T_\infty) \cong \mathbb{Z}_p(1)^{\delta_\infty}.$$

Ensuite, dans la suite exacte (3.5), on n'a plus $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \Psi_n = \Psi_n$. En prenant les limites inductives et en appliquant les théorèmes 3.20 et 3.21, on obtient immédiatement le

Corollaire 3.22. *Le dual de Kummer de $\varinjlim(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \Psi_n)$ est $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T'_\infty)$, qui est le sous-module fini maximal de $\mathrm{Gal}(N''_\infty/T_\infty)$.*

3.5 Formules explicites dans le cas abélien semi-simple ; exemples

Dans ce paragraphe, nous étudions en détail le cas abélien semi-simple, *i. e.*, le cas où $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ est abélien d'ordre premier à p.

Pour tout caractère p-adique de dimension un de $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \overline{\mathbb{Q}}_p^*)$, soit $e_\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} \chi^{-1}(\sigma)\sigma$ l'idempotent habituel, qui vit dans $\mathcal{O}_\chi[G]$, où $\mathcal{O}_\chi$ désigne l'anneau engendré sur $\mathbb{Z}_p$ par les valeurs de χ. La χ-partie d'un $\mathbb{Z}_p[G]$-module M est le $\mathcal{O}_\chi[G]$-module défini par $M(\chi) := e_\chi(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_\chi)$ (voir au sujet des χ-composantes la section 2.3).

Dans le cas semi-simple, l'invariant n_0 des paragraphes précédents est visiblement *nul*. Notant l'image $j_0(A'_0)$ par $\widetilde{A}'_0$, notre but est de donner des formules explicites pour les ordres des χ-parties $({A'}^\Gamma_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)$. Si F contient μ_p, le corollaire 3.16 nous dit que $({A'}^\Gamma_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)$ est le dual de Kummer du sous-module fini maximal de $\mathrm{Gal}(L'_\infty \cap N'_\infty/F_\infty)(\chi^{-1}\omega)$, où ω est le caractère de Teichmüller (cf. [I2], « Theorem 2 »). Notons tout de suite que pour le caractère trivial χ_{triv}, on a clairement $A'_\infty(\chi_{\mathrm{triv}}) = (0) = A'_0(\chi_{\mathrm{triv}})$, car l'idempotent $e_{\chi_{\mathrm{triv}}}$ n'est autre que la norme, à une unité p-adique près.

Dans le cas général, le point de départ est une « χ-version » immédiate du lemme 3.4 :

$$|({A'}^\Gamma_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)| = \frac{|{X'}_\infty(\chi)_\Gamma|}{|A'_0(\chi)|}\cdot\frac{|(\ker j_0)(\chi)|}{|{X'}_\infty(\chi)^\Gamma|}.$$

En adoptant les notations supplémentaires $|A'_0(\chi)| = |A'_F(\chi)| \sim_p h'_\chi$, $\ker j_0 = \mathrm{cap'}(F_\infty/F)$, $(X'_\infty)^0 = \mathrm{cap'}(F_\infty)$, et

$$\varepsilon'_F(\chi) := |\,\mathrm{cap}'(F_\infty/F)(\chi)|/|\,\mathrm{cap}'(F_\infty)(\chi)^\Gamma|,$$

il vient

$$|({A'}^\Gamma_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)| = |\Psi_0(\chi)|\cdot\varepsilon'_F(\chi) \sim_p \frac{|X'_\infty(\chi)_\Gamma|}{h'_\chi}\cdot\varepsilon'_F(\chi). \tag{3.6}$$

Pour un caractère non-trivial χ, notre objectif est de calculer l'ordre de $\Psi_0(\chi)$, qui prend place dans la « χ-partie » de la suite exacte de Sinnott :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & \widehat{U}'_F(\chi) \arrow[r] & \overline{U}'_F(\chi) \arrow[r, "g_\chi"] & (\oplus_{v|p}\overline{F}_v^\times/\widehat{F}_v^\times)(\chi) \arrow[rr, "\text{Artin}"] \arrow[dr] & & X'_\infty(\chi)_\Gamma \arrow[r] & A'_F(\chi) \arrow[r] & 0 \\ & & & & \Psi_0(\chi) \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd} \qquad (3.7)$$

où par définition, on a noté $\widehat{U}'_F(\chi) := \ker g_\chi$ (la somme est directe car $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ a été éliminé du fait que χ n'est pas trivial).

Nous examinerons séparemment le cas « décomposé » ($\chi(p) = 1$) et le cas « non-décomposé » ($\chi(p) \neq 1$).

3.5.1 Le cas « non-décomposé »

On montre la « Proposition 2 » de [I1], c'est-à-dire

Proposition 3.23. *Pour tout caractère χ tel que $\chi(p) \neq 1$, $({A'}^{\Gamma}_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)$ et $\Psi_0(\chi)$ sont triviaux.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.7, il suffit de montrer la trivialité de $\Psi_0(\chi)$, *i. e.*, la surjectivité de l'application « diag » dans (3.7).

En fait, on peut dire bien plus. Soit Σ l'ensemble des p-places de F et soit $\mathcal{O}_\chi[\Sigma]$ le $\mathcal{O}_\chi$-module libre sur Σ. Le troisième terme de la suite exacte (3.7) est clairement isomorphe à $\mathcal{O}_\chi[\Sigma](\chi)$; mais le choix d'un place $v \in \Sigma$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_\chi[\Sigma] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_\chi[G/D]$ défini par $w \in \Sigma \mapsto \tau_w \in G/D$, où D est le groupe de décomposition de v et τ_w est l'unique élément de G/D qui envoie v sur w.

De surcroît, $\chi(p) = 1$ si et seulement si χ se factorise à travers G/D, en conséquence $\mathcal{O}_\chi[\Sigma](\chi) = (0)$ si $\chi(p) \neq 1$. Ceci prouve la proposition 3.23. $\square$

Remarque :
La démonstration ci-dessus montre en fait que si $\chi(p) = 1$, alors

$$\mathcal{O}_\chi[\Sigma](\chi) \cong \mathcal{O}_\chi[G/D](\chi) \cong \mathcal{O}_\chi \cdot e_\chi$$

(en voyant χ comme un caractère de G/D). Il découle alors de (3.7) que pour $\chi \neq \chi_{\mathrm{triv}}$ et $\chi(p) = 1$, $(\overline{U}'_F/\widehat{U}'_F)(\chi)$ est de $\mathcal{O}_\chi$-rang 1.

Avant de poursuivre, donnons une autre interprétation de la suite exacte (3.7), plus proche de celle de Sinnott dans [FGS], « Proposition 6.5 ».

Pour $w|p$, notons $N_w = N_{F_w/\mathbb{Q}_p}$ l'application norme locale. En composant l'application g_F avec $\log_p \circ N_w$, on obtient une application

$$\lambda : \overline{U}'_F/\widehat{U}'_F \to N_F := \oplus_{w\in\Sigma} \log_p(N_w(F_w^\times))w.$$

Mais F est linéairement disjoint de F_∞, et il en est de même des complétions en toutes les places $w|p$ car $[F:\mathbb{Q}]$ est premier à p. La théorie du corps de classes locale fournit alors une chaîne d'isomorphismes

$$(\overline{F}_w^\times/\widehat{F}_w^\times) \xrightarrow[\simeq]{N_w} \overline{\mathbb{Q}}_p^\times/\widehat{\mathbb{Q}}_p^\times \cong 1+p\mathbb{Z}_p \xrightarrow[\simeq]{\log_p} p\mathbb{Z}_p,$$

en conséquence, la suite exacte (3.7) devient, pour tout $\chi \neq \chi_{\text{triv}}$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{U}'_F(\chi)/\widehat{U}'_F(\chi) \arrow[r, "\lambda_\chi"] & N_F(\chi) = (\oplus_{w\in\Sigma} p\mathbb{Z}_p)(\chi) \arrow[rr] \arrow[dr] & & X'_\infty(\chi)_\Gamma \arrow[r] & A'_F(\chi) \arrow[r] & 0. \\ & & & \Psi_0(\chi) \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

On traite à présent le cas décomposé, en examinant séparément les parties « plus » et « moins ».

3.5.2 Le cas décomposé dans la partie « moins »

Si χ est un caractère *impair*, les noyaux de capitulation sont triviaux (cf. proposition 1.20), donc $|\Psi_0(\chi)| = |(A'^{\Gamma}_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)|$. En particulier, l'application $A'_0(\chi) \to A'^{\Gamma}_\infty(\chi)$ est surjective si et seulement si $X'_\infty(\chi)_\Gamma \to A'_F(\chi)$ est injective (à comparer avec le corollaire 3.7). De plus, grâce à la remarque suivant la proposition 3.23, on peut appréhender $\overline{U}'_F(\chi)$:

Lemme 3.24. *Pour χ impair tel que $\chi(p)=1$, $\overline{U}'_F(\chi)$ est de $\mathcal{O}_\chi$-rank 1 et sa torsion est $\widehat{U}'_F(\chi)$.*

Démonstration. Comme F est galoisien sur $\mathbb{Q}$, on a une suite exacte (cf. [BN], §1.1 par exemple)

$$0 \to \overline{U}_F \to \overline{U}'_F \xrightarrow{\text{val}} \mathbb{Z}_p[\Sigma] \to A_F \xrightarrow{\text{nat}} A'_F \to 0, \tag{3.9}$$

où l'application « val » est induite par les valuations p-adiques.

Pour un caractère impair χ, $\overline{U}_F(\chi)$ est fini, donc $\overline{U}'_F(\chi)$ et $\mathcal{O}_\chi[\Sigma](\chi)$ ont le même $\mathcal{O}_\chi$-rang, et on conclut avec la remarque qui suit la proposition 3.23. □

On est maintenant en mesure d'évaluer $|\Psi_0(\chi)|$:

Théorème 3.25. *Soit χ un caractère impair tel que $\chi(p)=1$. Choisissons $u' \in \overline{U}'_F$ tel que $e_\chi \otimes u'$ induit une $\mathcal{O}_\chi$-base de $\overline{U}'_F(\chi)$ modulo torsion. Fixons une p-place v de F et soit $L'_p(.)$ la dérivée de la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt, $m'_\chi = \mathrm{ord}_p(\log_p(N_v(u'))) - 1$, et $d_\chi = [\mathcal{O}_\chi : \mathbb{Z}_p]$. Alors,*

$$|\Psi_0(\chi)| = |(A'^{\Gamma}_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)| \sim_p p^{m'_\chi d_\chi} \sim_p h'^{-1}_\chi (L'_p(\chi^{-1}\omega, 0)/w_{F(\mu_p)})^{d_\chi}.$$

(Ici, w_k désigne comme d'habitude le nombre de racines de l'unité contenue dans un corps k.)

Démonstration. Nous cherchons à calculer le conoyau de l'application

$$\lambda_\chi : \overline{U}'_F(\chi)/\widehat{U}'_F(\chi) \to N_F(\chi)$$

dans la suite exacte (3.8). Comme dans la preuve de la proposition 3.23, le choix de la p-place v nous permet d'identifier $\mathcal{O}_\chi[\Sigma]$ et $\mathcal{O}_\chi[G/D]$, et χ peut être vu comme un caractère de G/D puisque $\chi(p) = 1$. On a $\operatorname{coker} \lambda_\chi \cong \mathcal{O}_\chi e_\chi / \operatorname{im} \lambda_\chi$, le « dénominateur » étant $\mathcal{O}_\chi$-libre de rang 1 (puisque $\Psi_0(\chi)$ est fini), engendré par

$$\sum_{w|p} \log_p(N_w(u'))\chi(\tau_w)^{-1}\tau_w = |G|(\log_p(N_v(u')))e_\chi$$

(rappelons que τ_w est caractérisé par $\tau_w(v) = w$). Ceci prouve la première formule du théorème 3.25.

La seconde formule est une conséquence de la conjecture principale : soit $f_\chi(T)$ et $g_\chi(T)$ resp. la série caractéristique de $X'_\infty(\chi)$ et de $X_\infty(\chi)$ sur $\mathcal{O}_\chi[\![T]\!]$. Sous nos hypothèses de décomposition ($\chi(p) = 1$) et de parité (χ est impair), on a d'après [FGS], formule 3.10 :

$$g_\chi(T) = T f_\chi(T)$$

(la condition de [FGS] sur l'exposant du groupe $\operatorname{Gal}(F/\mathbb{Q})$ est simplement une commodité pour que les caractères soient à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$ mais elle n'est pas nécessaire). Comme χ est impair, $|X'_\infty(\chi)_\Gamma| \sim_p f_\chi(0)^{d_\chi}$ (proposition 1.9) et, d'après la conjecture principale (cf. théorème 1.25),

$$f_\chi(0) = \lim_{T\to 0} \frac{g_\chi(T)}{T} \sim_p \lim_{T\to 0} \frac{G_{\chi^{-1}\omega}(T)}{T},$$

où la série $G_{\chi^{-1}\omega}(T)$ est construite par interpolation de la fonction $L_p(\chi^{-1}\omega, s)$. Précisément, on a (pour $\chi \neq \omega$)

$$L_p(\chi^{-1}\omega, s) = G_{\chi^{-1}\omega}(u^s - 1) \text{ pour } s \in \mathbb{Z}_p,$$

où $u = \kappa(\gamma)$, κ étant le caractère cyclotomique et γ un générateur topologique de $\Gamma = \operatorname{Gal}(F_\infty/F)$. Notons que par nos hypothèses, $\chi^{-1}\omega$ est bien un caractère pair non-trivial de première espèce, de sorte que l'on peut effectivement appliquer la conjecture principale. Il vient ensuite

$$\begin{aligned} \lim_{T\to 0} \frac{G_{\chi^{-1}\omega}(T)}{T} &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{u^s - 1} \frac{L_p(\chi^{-1}\omega, s)}{s} \\ &= L'_p(\chi^{-1}\omega, 0)/\log_p(u). \end{aligned}$$

Comme $\log_p u \sim_p w_{F(\mu_p)}$, on obtient finalement

$$f_\chi(0) \sim_p L'_p(\chi^{-1}\omega, 0)/w_{F(\mu_p)},$$

d'où le théorème. Remarquons ici que puisque $[F : \mathbb{Q}]$ est premier à p, on a

$$w_{F(\mu_p)} \sim_p p.$$

$\square$

Nous faisons ici une digression sur les régulateurs. En fait, on a essentiellement calculé plus haut la χ-partie du *régulateur de Gross*. Rappelons la définition de ce dernier, telle qu'elle figure dans [FGS]. Soit

$$\phi : U^- \to \mathbb{Z}[\Sigma]^-, \varepsilon \mapsto \sum_{w|p} v_p(N_{F_w/\mathbb{Q}_p}\varepsilon)w$$

et

$$\tilde{\lambda} : \mathbb{Q}_p U^- \to \mathbb{Q}_p[\Sigma]^-, \varepsilon \mapsto \sum_{w|p} \log_p(N_{F_w/\mathbb{Q}_p}\varepsilon)w.$$

Ces deux applications sont des isomorphismes et le régulateur de Gross est par définition

$$R_F^{\mathrm{Gross}} := \det(\tilde{\lambda}\phi^{-1}).$$

Or d'après [FGS], formule (3.10),

$$f_\chi(0) \sim_p h_\chi R_F^{\mathrm{Gross}}(\chi)/w_{F(\mu_p)}.$$

On obtient donc

$$|\Psi_0(\chi)| \sim_p h'^{-1}_\chi (h_\chi p^{-1} R_F^{\mathrm{Gross}}(\chi))^{d_\chi},$$

puisque $w_{F(\mu_p)} \sim_p p$ car $[F : \mathbb{Q}]$ est premier à p. Si l'on définit le régulateur de Gross « modifié » par

$$R_F^G(\chi) := \det \lambda_\chi \sim_p \text{covolume de } \operatorname{im}\lambda_\chi \text{ dans } \oplus_{w\in\Sigma}\, p\mathbb{Z}_p(\chi)$$

(cf. la suite exacte (3.8)), on a $|\Psi_0(\chi)| = R_F^G(\chi) \cdot p^{1-d_\chi}$, et dans le cas particulier où $d_\chi = 1$, la relation entre les deux régulateurs est :

$$R_F^G(\chi) = \frac{h_\chi}{h'_\chi} p^{-1} R_F^{\mathrm{Gross}}(\chi).$$

Signalons également qu'une expression analytique de $L'_p(\chi^{-1}\omega, 0)$ en termes de Γ-fonctions p-adiques et de nombres de Bernoulli est disponible dans [FG], « Proposition 1 ».

Remarquons enfin que pour χ impair quadratique, la formule concernant $L'_p(\chi^{-1}\omega, 0)$ (ou $|A'^{\Gamma}_\infty(\chi)|$) donnée à la p. 100 de [FG] peut être considérée comme un cas particulier du théorème 3.25 (pour s'en convaincre, voir les calculs du sous-paragraphe 3.5.4).

3.5.3 Le cas décomposé dans la partie « plus »

Soit χ un caractère *pair* non-trivial. D'après la remarque qui suit la proposition 3.23, $\overline{U}'_F(\chi)/\widehat{U}'_F(\chi)$ est d'$\mathcal{O}_\chi$-rang 1 si $\chi(p) = 1$. Alors les arguments de la première partie du théorème 3.25 se transposent entièrement et on a

Théorème 3.26. *Soit χ un caractère pair non-trivial tel que $\chi(p) = 1$. Choisissons $u' \in \overline{U}'_F$ tel que $e_\chi \otimes u'$ donne une $\mathcal{O}_\chi$-base de $\overline{U}'_F(\chi)/\widehat{U}'_F(\chi)$. Alors,*

$$|({A'}^{\Gamma}_{\infty}/\widetilde{A}'_0)(\chi)| \sim_p p^{m'_\chi d_\chi} \cdot \varepsilon'_F(\chi),$$

avec m'_χ, d_χ comme au théorème 3.25.

Ce résultat n'est pas entièrement satisfaisant, pour plusieurs raisons :

(i) Pour un caractère pair, les noyaux de capitulation ne sont pas triviaux en général, d'où le facteur parasite $\varepsilon'_F(\chi)$, qui n'est pas entièrement sous contrôle (mais voir la proposition 3.32 plus loin).

(ii) On ne controle pas non plus le groupe $\widehat{U}'_F$ des normes universelles locales. Cependant, on peut montrer (cf. lemme 3.28) que $\overline{U}'_F(\chi)$ est de rang 2, de sorte qu'*en pratique*, cela ne devrait pas être difficile d'exhiber la (p)-unité u du théorème 3.26.

(iii) L'expression en terme de fonctions L p-adiques n'est *a priori* pas disponible, car la conjecture principale ne s'applique pas à $X_\infty(\chi)$ pour χ pair. Heureusement, on peut surmonter cette difficulté grâce à un lemme d'Ozaki & Taya :

Lemme 3.27 ([T1], « Lemma 2 »). *Soit k un corps totalement réel vérifiant la conjecture de Leopoldt. Si p se décompose totalement dans k, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_k \cong (X_\infty)_\Gamma$$

(voir les notations en début de chapitre).

De plus, $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_k$ est un groupe fini dont l'ordre est donné par la formule p-adique de Coates en terme de régulateurs ([Co], appendice) :

$$|\,\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_k| = v_p((w(k(\mu_p))h_k R_p \prod_{v|p}(1-(Nv)^{-1})/\sqrt(D))^{-1}),$$

(D est le dicriminant de k et R_p son régulateur p-adique) ou par la conjecture principale en terme de fonctions L p-adiques.

Pour les χ pairs, comme la conjecture de Leopoldt est vraie tout le long de la tour cyclotomique, on a $A_\infty(\chi) \cong A'_\infty(\chi)$, $\widetilde{A}_0(\chi) \cong \widetilde{A}'_0(\chi)$, par conséquent dans notre problème, on peut remplacer $A'_\infty(\chi)$, X'_∞ etc. par A_∞, X_∞ etc., et l'analogue de la formule (3.6) s'écrit :

$$|(A^{\Gamma}_{\infty}/\widetilde{A}_0)(\chi)| \sim_p \frac{|X_\infty(\chi)_\Gamma|}{h_(\chi)} \cdot \varepsilon_F(\chi) \text{ (avec des notations évidentes).}$$

De plus, si $\chi(p) = 1$, le lemme 3.27 nous permet de remplacer $X_\infty(\chi)_\Gamma$ par $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_F(\chi)$, qui prend place dans la suite exacte du corps de classes relative à l'inertie ($\chi \neq \chi_{\mathrm{triv}}$) :

$$0 \to \overline{U}'_F(\chi) \to \mathcal{U}_F(\chi) := (\oplus_{v|p} U_v^1)(\chi) \xrightarrow{\text{Artin}} \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_F(\chi) \to A_F(\chi) \to 0. \tag{3.10}$$

Avec (3.10), on constate que $\overline{U}_F(\chi)$ et $\mathcal{U}_F(\chi)$ ont le même $\mathcal{O}_\chi$-rang (puisque $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}_k$ est fini) ; mais il est bien connu que $\mathcal{U}(\chi)$ est de rang 1 (voir e.g. [Ki], p. 3). Alors $\overline{U}'_F(\chi)$ est de rang 2 par (3.9). D'où le

Lemme 3.28. *Pour tout caractère pair non-trivial χ, $\overline{U}_F(\chi)$ est de $\mathcal{O}_\chi$-rang* 1 *(donc $\overline{U}'_F(\chi)$ est de $\mathcal{O}_\chi$-rang* 2*).*

On peut maintenant donner le « réel » analogue du théorème 3.25 :

Théorème 3.29. *Soit χ un caractère pair non-trivial tel que $\chi(p) = 1$. Choisissons $u \in \overline{U}_F$ tel que $e_\chi \otimes u$ donne une $\mathcal{O}_\chi$-base de $\overline{U}_F(\chi)$ modulo torsion. Fixons une p-place v de F et définissons m_χ, d_χ comme au théorème 3.25. Alors*

$$|(A'^{\Gamma}_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)| = |(A^\Gamma_\infty/\widetilde{A}_0)(\chi)| = p^{m_\chi d_\chi} \cdot \varepsilon_F(\chi) \sim_p h_\chi^{-1} L_p(\chi, 1)^{d_\chi} \cdot \varepsilon_F(\chi).$$

Démonstration. Comme $\chi(p) = 1$, il est facile de voir que $\overline{U}_F(\chi) \cap \widehat{U}_F(\chi) = (1)$ à l'intérieur de $\overline{U}'_F(\chi)$ (pour de plus amples détails, cf. [BN], « Lemma 1.1 »). En prenant l'application λ_χ dans la suite exacte (3.8), on obtient alors un isomorphisme

$$\mathcal{U}_F(\chi)/\overline{U}_F(\chi) \cong N_F(\chi)/\lambda_\chi(u)\mathcal{O}_\chi,$$

et on poursuit exactement comme dans la preuve de la première partie du théorème 3.25 pour obtenir la première formule du théorème 3.29.

Quant à la seconde formule, elle découle directement de la conjecture principale appliquée à la série caractéristique h_χ de $\mathfrak{X}_\infty(\chi)$ pour χ pair, non-trivial :

$$(h_\chi(T)) = (G_\chi(\frac{u}{1+T} - 1))$$

donc

$$\mathfrak{X}_\infty(\chi)_\Gamma \sim_p h_\chi(0)^{d_\chi} = L_p(\chi, 1)^{d_\chi}.$$

□

Remarque : à cet endroit du texte, il est intéressant dans la perspective des exemples détaillés dans le prochain paragraphe de comparer les formules données respectivement par le théorème 3.26 et le théorème 3.29.

Comme les facteurs parasites $\varepsilon_F(\chi)$ et $\varepsilon'_F(\chi)$ ne sont pas facilement accessibles, en pratique, on calculera seulement $\Psi_0(\chi)$ ou son analogue $X_\infty(\chi)_\Gamma/A_0(\chi)$. Visiblement, si ce dernier est trivial, $\Psi_0(\chi)$ l'est aussi mais l'inverse n'est pas vrai. Par conséquent, pour les applications, il est plus efficace de tester la trivialité de $\Psi_0(\chi)$ et donc d'appliquer plutôt le théorème 3.26.

En fait, la preuve du théorème 3.29 associée à celle du théorème 3.26, donne également le

Corollaire 3.30 (cf. [BN], « Theorem 3.7 »).

$$[\overline{U}'_F(\chi) : \overline{U}_F(\chi) \oplus \widehat{U}'_F(\chi)] \sim_p \varepsilon_F(\chi)/\varepsilon'_F(\chi).$$

Le lecteur averti aura encore noté que l'on a essentiellement calculé la « χ-partie » du régulateur de Leopoldt.

Dans l'énoncé du théorème 3.29, on peut aller un petit peu plus loin et donner une expression du facteur parasite

$$\varepsilon_F(\chi) = |\operatorname{cap}(F_\infty/F)(\chi)|/|\operatorname{cap}(F_\infty)^\Gamma(\chi)|$$

où ne figure que le noyau de capitulation $\operatorname{cap}(F_\infty/F)$ (ou $\operatorname{cap}'(F_\infty/F)$). Dans le quotient

$$\varepsilon_F(\chi) = |\operatorname{cap}(F_\infty/F)(\chi)|/|\operatorname{cap}(F_\infty)^\Gamma(\chi)|,$$

le dénominateur est habituellement difficile à calculer car c'est un invariant asymptotique. On peut tenter de l'enlever en utilisant des sous-groupes de décomposition.

Définissons D_F, la décomposition en p, par la suite exacte

$$0 \to D_F \to A_F \to A'_F \to 0.$$

En prenant la limite projective le long de la tour cyclotomique, on obtient la suite exacte

$$0 \to D_\infty \to X_\infty \to X'_\infty \to 0.$$

Par définition, D_∞ est invariant par Γ, et on sait que $D_\infty(\chi)$ est fini quand χ est pair (voir e.g. [Gr1]).

Remarquons que la « χ-partie » de la conjecture de Greenberg est équivalente à $D_\infty(\chi) \cong X_\infty(\chi)_\Gamma$. Citons l'énoncé plus faible suivant :

Lemme 3.31 (cf. [B]). *Pour tout caractère χ pair tel que $\chi(p) = 1$, $D_\infty(\chi) \cong X_\infty^\Gamma(\chi)$.*

Puisque $A_\infty(\chi) \cong A'_\infty(\chi)$ pour les caractères pairs, une autre application aisée du lemme du serpent fournit la suite exacte

$$0 \to D_F(\chi) \to \operatorname{cap}(F_\infty/F)(\chi) \to \operatorname{cap}'(F_\infty/F)(\chi) \to 0.$$

On obtient au bout du compte l'expression suivante de $\varepsilon_F(\chi)$:

Proposition 3.32. *Pour un caractère pair χ tel que $\chi(p) = 1$,*

$$\varepsilon_F(\chi) = |\operatorname{cap}'(F_\infty/F)(\chi)| \cdot h_\chi/h'_\chi \cdot |D_\infty(\chi)|^{-1}.$$

Remarque : la conjecture de Greenberg équivaut à la nullité de $A'_\infty(\chi)^\Gamma$ pour tous les χ pairs. Une conjecture plus faible serait la nullité de $({A'}^\Gamma_\infty/\widetilde{A}'_0)(\chi)$ pour tous les χ pairs ; numériquement, cela nécessite de calculer le facteur parasite $\varepsilon_F(\chi)$. Dans la formule de la proposition 3.32, seul le facteur $|\operatorname{cap}'(F_\infty/F)(\chi)|$ n'est pas facilement accessible (la même difficulté survient lorsque l'on veut vérifier la conjecture de Greenberg).

3.5.4 Exemples quadratiques

Dans ce paragraphe, on étudie la nullité de $\operatorname{coker} j_0 = A'^{\Gamma}_{\infty}/\widetilde{A}'_0$ dans le cas le plus simple : on prend pour F un corps quadratique dans lequel p se décompose (lorsqu'il n'y a qu'une seule place au-dessus de p, on sait déjà que l'application j_0 est surjective). On écrira $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, où d est un entier sans facteur carré. De plus, χ désignera le caractère non-trivial de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

Supposons d'abord que F est un corps quadratique *imaginaire*. Comme expliqué au paragraphe 3.5.2 et puisque $A'_\infty(\chi_{\mathrm{triv}})$ est nul, la surjectivité de l'application $A'_0 \to A'^{\Gamma}_{\infty}$ est équivalente à la trivialité de $\Psi_0(\chi)$. D'après le théorème 3.25, on a $|\Psi_0(\chi)| \sim_p p^{m'_\chi d_\chi}$ avec ici $d_\chi = 1$. Il reste à exhiber un élément $u' \in \overline{U}'_F$ qui engendre $\overline{U}'_F(\chi)$ modulo torsion.

Soit $\mathfrak{p}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$ les deux places au-dessus de p et soit n l'ordre de $\mathfrak{p}$ dans le groupe de classes $\mathrm{Cl}(F)$; alors $\mathfrak{p}^n$ est principal et on en choisit un générateur α. Alors, on voit facilement que $\overline{U}'_F/\mu(F) = \overline{\langle \alpha, p\rangle}$. En effet, une (p)-unité engendre un idéal principal de la forme $\mathfrak{p}^m\bar{\mathfrak{p}}^{m'} = p^{m'}\mathfrak{p}^{m-m'}$, par conséquent $m-m'$ est divisible par n, et $\mathfrak{p}^{m-m'}$ est une puissance de (α).

Ainsi, $\overline{U}'(\chi)$ modulo torsion est engendré par α et on peut prendre $u' := \alpha$.

L'élément u', quand on le plonge dans $F_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}_p$, s'écrit $u' = p^n u_1$ avec $u_1 \in \mathbb{Z}_p^\times$. Alors il découle de la définition de m'_χ que

$$|\Psi_0(\chi)| \sim_p p^{v_p(\log_p(u_1))-1}.$$

Dans les exemples ci-dessous, on fixe le nombre premier $p = 3$ et on donne une table calculée à l'aide du logiciel PARI qui donne la valeur de $|\Psi_0(\chi)| = 3^{v_3(\log_3(u_1))-1}$ (donc de $\operatorname{coker} j_0$), pour différentes valeurs de d (cf. table 1).

Tournons-nous vers le cas où F est un corps quadratique *réel* dans lequel p se décompose ; on note $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ les deux places au-dessus de p. Les (p)-unités $\overline{U}'_F$ sont de rang 3 et, avec les mêmes arguments que plus haut, on peut écrire $\overline{U}'_F = \overline{\langle \epsilon_0, \alpha, p\rangle}$ où ϵ_0 est l'unité fondamentale et α est un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{p}_1^n$ (n est l'ordre de $\mathfrak{p}_1$ dans $\mathrm{Cl}(F)$).

Le théorème 3.26 nous dit que $|\Psi_0(\chi)| = p^{m'_\chi}$, où $m'_\chi = v_p(\log_p(u')) - 1$ et $u' \in \overline{U}'_F$ est tel que $\lambda_\chi(u')$ engendre $\operatorname{im}\lambda_\chi$. Les éléments ϵ_0 et α, quand on les plonge dans $F_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}_p$, peuvent s'écrire $\epsilon_0 = \zeta_1 u_1$ et $\alpha = p^n\zeta_2 u_2$ respectivement, avec $\zeta_1, \zeta_2 \in \mu_{p-1}$ et $u_1, u_2 \in U_p^{(1)}$, les unités principales de $\mathbb{Z}_p$. Comme $\widehat{\mathbb{Q}}_p^\times = \mu_{p-1} \times p^{\mathbb{Z}}$, on a $\lambda_\chi(\alpha) = u_2 - 1$ et $\lambda_\chi(\epsilon_0) = u_1 - 1$ si bien que $\operatorname{im}\lambda_\chi$ est engendrée par $u_2 - 1$ *ou* par $u_1 - 1$, selon que $v_p(u_2-1) \le v_p(u_1-1)$ ou non. Selon les cas, on prendra $u := \alpha$ ou $u := \epsilon_0$. Notons que $v_p(u'-1) = v_p(\log_p(u'))$, donc $|\Psi_0| = p^{v_p(u'-1)-1}$.

Dans la table 2, on fournit, pour $p = 3$ et diverses valeurs de d la valuation 3-adique de $u_1 - 1$ (notée k_1) et celle de $u_2 - 1$ (notée k_2). La troisième colonne donne l'ordre de $|\Psi_0|$.

d	h'	$\|\Psi_0\|$
-2	1	1
-5	1	1
-11	1	1
-14	1	3
-17	1	1
-23	1	1
-26	2	1
-29	1	1
-35	1	3
-38	1	1
-41	1	27
-47	1	9
-53	1	1
-59	1	1
-62	1	1
-65	2	3
-71	1	1
-74	2	9
-77	2	1
-83	1	1
-86	1	3
-89	1	1
-95	1	1
-101	1	9
-107	1	9
-110	2	1
-113	1	3
-119	1	1
-122	2	1
-131	1	1
-134	1	1

d	h'	$\|\Psi_0\|$
-137	1	1
-143	2	1
-146	2	1
-149	1	9
-155	1	1
-158	1	3
-161	2	1
-167	1	1
-170	2	1
-173	1	3
-179	1	1
-182	2	1
-185	2	1
-191	1	1
-194	4	1
-197	1	1
-203	1	1
-206	1	1
-209	2	1
-215	1	1
-218	2	3
-221	2	1
-227	1	3
-230	2	9
-233	1	1
-239	3	1
...	...	...
-461	3	1
...	...	...
-629	6	1

Tab. 3.1 – Corps quadratiques imaginaires

d	k_1	k_2	$\|\Psi_0\|$
7	1	1	1
10	1	1	1
13	1	1	1
19	1	1	1
22	1	1	1
31	1	1	1
34	1	2	1
37	1	1	1
43	2	1	1
46	1	2	1
55	1	1	1
58	2	1	1
61	1	2	1
67	3	2	3
70	1	1	1
73	1	2	1
79	2	1	1
82	2	1	1
85	2	1	1
91	1	2	1
94	1	2	1
97	1	1	1
103	2	2	3
106	2	3	3
109	2	1	1
115	1	1	1
118	1	2	1
127	1	1	1
130	1	1	1
133	1	2	1
139	2	2	3
142	1	3	1

d	k_1	k_2	$\|\Psi_0\|$
145	1	1	1
151	2	1	1
154	1	1	1
157	1	2	1
163	1	1	1
166	1	1	1
178	1	2	1
181	2	1	1
187	1	2	1
190	1	2	1
193	1	1	1
202	2	1	1
205	1	2	1
211	1	1	1
214	1	1	1
217	1	1	1
223	1	1	1
229	1	1	1
235	1	3	1
238	3	2	3
241	1	1	1
247	4	1	1
253	2	2	3
259	1	1	1
262	1	1	1
265	1	1	1
271	3	1	1
274	1	1	1
277	1	1	1
283	1	2	1
286	1	1	1
295	2	3	3
298	1	1	1

Tab. 3.2 – Corps quadratiques réels

Une famille infinie de corps quadratiques réels

Dans ce paragraphe, pour $p = 3$, on donne une famille infinie de corps quadratiques réels pour lesquels l'application $A'_0 \to A'^{\Gamma}_{\infty}$ est surjective.

Soit a un entier positif et F le corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{4^a - 1})$. Alors on vérifie facilement que $\epsilon_a := 2^a + \sqrt{4^a - 1}$ est l'unité fondamentale de F (cf. e.g. [BS]). Dans la suite, nous calculerons la valuation 3-adique de $\epsilon_a^2 - 1$ (ce faisant, on calcule ce que l'on a appelé k_1 dans la table 2, car l'élévation au carré élimine les racines de l'unité).

Pour l'instant, on ne suppose pas nécessairement que $p = 3$. Nous montrons que s'il en existe, il y a une infinité de a pour lesquels $4^a - 1$ est un carré dans $\mathbb{Z}_p$, où p est un premier impair fixé. Supposons qu'il existe a_0 tel que $4^{a_0} - 1$ est un carré dans $\mathbb{Z}_p$.

Écrivons $4^{a_0} - 1 = p^{2r}v^2$, $v \in \mathbb{Z}_p^{\times}$. Comme 4 est premier à p, il existe un t vérifiant $4^t \equiv 1 \mod p^{2r+1}$. Nous prétendons que $4^{a_0+kt} - 1$ est un carré dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout entier $k \geq 0$.

En effet, par le lemme de Hensel, $P(X) := X^2 - (4^{a_0+kt} - 1)$ a une racine dans $\mathbb{Z}_p$ si

$$\exists y \in \mathbb{Z}_p, v_p\left(\frac{P(y)}{P'(y)^2}\right) > 0.$$

Prenons $y := p^r v$; alors $P'(y) = 2p^r v$ et $P(y) = 4^{a_0}(1 - 4^{kt})$. Mais

$$v_p(P(y)) \geq v_p(4^t - 1) > 2r = 2v_p(P'(y)).$$

Maintenant, regardons l'exemple $p = 3$. Alors 3 est une valeur convenable pour a_0 et on trouve $r = 1$. L'ordre de 4 dans $(\mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z})^{\times}$ est $t = 9$. On en déduit que tous les $4^{3+9k} - 1$, $k \geq 0$ sont des carrés dans $\mathbb{Z}_3$.

On souhaite calculer la valuation 3-adique de $\epsilon_k^2 - 1 = (2^{3+9k} + \sqrt{4^{3+9k} - 1})^2 - 1$. Un calcul rapide montre que le début du développement 3-adique de $\epsilon_k^2 - 1$ est $\epsilon_k^2 - 1 = 2(-1)^{3k+1}3 + \cdots$, de sorte que $v_3(\epsilon_k^2 - 1) = 1$.

Il s'en suit, comme expliqué dans les exemples quadratiques précédents, que pour chaque k, le ϵ_k est un choix convenable pour l'élément u' du théorème 3.26 (ou de l'élément u du théorème 3.29), *i. e.*, il engendre $\operatorname{im} \lambda_{\chi}$, et $|\Psi_0| = 3^{v_3(u'-1)-1} = 1$.

Par conséquent, pour tout $k \geq 0$ et $p = 3$, l'application $A'_0 \to A'^{\Gamma}_{\infty}$ associée au corps $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{4^{3+9k} - 1})$ est *surjective*.

Bibliographie

[B] R. Badino, *Sur les égalités du miroir en théorie d'Iwasawa*, thèse, Besançon, 2003.

[BB] W. Bley et D. Burns, *Equivariant Tamagawa numbers, Fitting ideals and Iwasawa theory*, pré-publication, 1999.

[BG] D. Burns et C. Greither, *Equivariant Weierstrass preparation and values of L-functions at negative integers*, à paraître dans Documenta Math., 2003.

[BN] J.-R. Belliard et Th. Nguyen Quang Do, *On modified circular units and annihilation of real classes*, à paraître dans Nagoya Math. J., 2003.

[BMS] H. Bass, J. Milnor et J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n \geq 3)$ and $Sp_{2n}(n \geq 2)$*, Pub. Math. I.H.É.S., **33** : 59-137, 1967.

[Bo] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **7** : 613-636, 1977.

[BP] F. Bertrandias et J.-J. Payan, *Γ-extensions et invariants cyclotomiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **5** : 517-543, 1972.

[BS] J. Browkin et A. Schinzel, *On Sylow 2-subgroups of $K_2\mathcal{O}_F$ for quadratic number fields F*, J. Reine Angew. Math., **331** : 104-113, 1982.

[CF] J. W. S. Cassels et A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London-New york, 1967.

[CO] P. Cornacchia et P.A. Østvær, *On the Coates-Sinnott Conjecture*, K-theory, **19** : 195-209, 2000.

[Co] J. Coates, *p-adic L-functions and Iwasawa's theory*, in Algebraic Number Fields, edited by A. Fröhlich, Academic press, 1977.

[CS] J. Coates et W. Sinnott, *An analogue of Stickelberger's theorem for the higher K-groups*, Invent. Math., **24** : 149-161, 1974.

[DF] W. Dwyer et E. Frielander, *Algebraic and étale K-theory*, Trans. A.M.S., **292** : 247-280, 1985.

[FG] B. Ferrero et R. Greenberg, *On the behavior of p-adic L-functions at $s = 0$*, Invent. Math. **50** : 91-102, 1978.

[FGS] L. Federer et B. H. Gross (with an appendix by W. Sinnott), *Regulators and Iwasawa modules*, Invent. Math. **62** : 443-457, 1981.

[G1] C. Greither, *The structure of some minus class groups, and Chinburg's third conjecture for abelian fields*, Math. Z., **229**(1) : 107-136, 1998.

[G2] C. Greither, *Some cases of Brumer's Conjecture for abelian CM extensions of totally real fields,* Math. Z. **233** : 515-534, 2000.

[Gr] G. Gras, *χ-composantes*, GROTA, Besançon, 1992.

[Gr1] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math., **98** : 263-284, 1976.

[Gr2] R. Greenberg, *On a certain ℓ-adic representation*, Invent. Math. **21** : 117-124, 1973.

[Gi] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_l$-extensions II*, Ann. Inst. Fourier, **29** : 49-79, 1979.

[GJ] M. Grandet et J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation dans une $\mathbb{Z}_l$-extension*, J. reine angew. math., **362** : 213-217, 1985.

[I1] H. Ichimura, *On a quotient of the unramified Iwasawa module over an abelian number field*, J. of Num. Th., **88** : 175-190, 2001.

[I2] H. Ichimura, *On a quotient of the unramified Iwasawa module over an abelian number field, II*, Pac. J. of Math., **206** : 129-137, 2002.

[I3] H. Ichimura, *A note on the ideal classgroup of the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of a totally real number field*, Acta Arithm., **105** : 29-34, 2002.

[Iw1] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math., **98** : 246-326, 1973.

[Iw2] K. Iwasawa, *On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. Math., **105** : 189-200, 1982.

[J] U. Jannsen, *Iwasawa modules up to isomorphism*, Adv. Studies in Pure Math., **17** : 171-207, 1989.

[Ja] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, J. Arithm. de Besançon (1985), Astérisque, **147-148** : 107-120, 1987.

[Ki] H. Kisilevsky, *On Iwasawa's λ-invariant for certain $\mathbb{Z}_l$-extensions*, Acta Arithm., **XL** : 1-8, 1981.

[K1] M. Kolster, *K-theory and arithmetic*, notes de la conférence « Summer school on algebraic K-theory and its applications », Trieste, juillet 2002.

[K2] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** : 9-24, 1991.

[K3] M. Kolster, *Iwasawa Theory*, Chap. 1, monographie en cours d'écriture.

[KM] M. Kolster et A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, **50** : 35-65, 2000.

[KNF] M. Kolster, Th. Nguyen Quang Do et V. Fleckinger, *Twisted S-units, p-adic class number formulas and the Lichtenbaum conjecture*, Duke Math. J., **84** : 679-717, 1996.

[Kur] M. Kurihara, *Iwasawa theory and Fitting ideals*, pré-publication, 2002.

[Ku] L. V. Kuz'min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math. USSR Izv., **6-2** : 263-321, 1972.

[LF] M. Le Floc'h, *On Fitting ideals of certain étale K-groups*, K-theory, **27** : 281-292, 2002.

[LMN] M. Le Floc'h, A. Movahhedi et Th. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa theory*, pré-publication, 2003.

[Mi] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Ann. of Math. Studies, **72**, Princeton University Press, New Jersey, 1971.

[Mo] C. C. Moore, *Group extensions of p-adic and adelic linear groups*, Pub. Math. I.H.É.S., **35** : 5-70, 1968.

[MS] A. S. Merkuriev et A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Math. USSR **21** : 307-340, 1983.

[MW] B. Mazur et A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math., **76** : 179-331, 1984.

[N1] Th. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens*, Ann. Inst. Fourier, **36-2** : 27-46, 1986.

[N2] Th. Nguyen Quang Do, *Sur la torsion de certains modules galoisiens II*, Sémin. Théorie des Nombres de Paris, 271-297, 1986-87.

[N3] Th. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieurs du noyau sauvage*, Sémin. théorie des nombres de Bordeaux, **5** : 263-271, 1992.

[N4] Th. Nguyen Quang Do, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*, in Number Theory, Noordwijkerhout 1983, 167-185. Springer, Berlin, 1984.

[N5] Th. Nguyen Quang Do, *Conjecture principale équivariante, idéaux de Fitting et annulateurs en théorie d'Iwasawa*, pré-publication du lab. de math. de Besançon, 2003.

[No] D. G. Northcott, *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1976.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren **323**, Springer, 2000.

[Qu] D. Quillen, *Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers*, Lecture Notes in Math., **341** : 179-183, Springer-Verlag, 1973.

[Se] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math., **5**, Springer-Verlag, Berlin, 5[e] édition, 1997.

[So] D. Solomon, *On the class-groups of imaginary abelian fields*, Ann. Inst. Fourier, **40** : 467-492, 1990.

[Sou] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math., **55** : 251-295, 1979.

[S] H. Sumida-Takahashi, *On capitulation of S-ideals in* $\mathbb{Z}_p$*-extensions*, J. Number Th., **86** : 163-174, 2001.

[Sc] P. Schneider, *Über gewisse Galoiskohomologiegruppen*, Math. Z., **168** : 181-205, 1979.

[T1] H. Taya, *On p-adic L functions and* $\mathbb{Z}_p$*-extensions of certain totally real fields*, J. Number Th., **75** : 170-184, 1999.

[T2] H. Taya, *On p-adic zeta functions and* $\mathbb{Z}_p$*-extensions of certain totally real fields*, Tohoku Math. J., **51** : 21-33, 1999.

[Ts] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units*, J. Number Theory, **78**(1) : 1-26, 1999.

[W] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Springer-Verlag, New York, seconde édition, 1997.

[Wi] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Maths, **131** : 493-540, 1990.

[Wg] K. Wingberg, *Duality theorems for* Γ*-extensions of algebraic number fields*, Compos. Math., **55** : 333-381, 1985.

Théorie d'Iwasawa : K-groupes étales et « co-capitulation »

Résumé : cette thèse traite de deux problèmes distincts en théorie d'Iwasawa. Le premier concerne l'annulateur des K-groupes pairs des anneaux d'entiers de corps de nombres. La conjecture de Coates-Sinnott prédit qu'un certain élément de Stickelberger est contenu dans l'annulateur ; nous le vérifions pour certaines composantes dans la situation abélienne semi-simple, ce qui généralise les résultats connus jusqu'à présent. Le second problème est l'étude du conoyau des flèches de capitulation pour les (p)-groupes de classes associées à la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres, où p est un premier impair. Dans le cadre de la conjecture de Gross, nous montrons par des méthodes variées que ces conoyaux se stabilisent à partir d'un certain entier n_0 et nous déterminons le dual de Kummer de la limite inductive des conoyaux. Ces résultats améliorent notablement ceux d'Hichimura.

Mots-clefs : théorie algébrique des nombres, théorie d'Iwasawa, K-théorie étale, éléments de Stickelberger, conoyaux de capitulation, module de Bertrandias-Payan.

Iwasawa theory : étale K-groups and "co-capitulation"

Abstract : this thesis tackles two different problems in Iwasawa theory. The first one deals with the annihilator of even K-groups of number fields' rings of integers. The Coates-Sinnott conjecture predicts that a certain Stickelberger element is contained in the annihilator ; we check this property for some components in the abelian semi-simple case. This generalizes the previously known results. The second problem is the study of the cokernel of the capitulation maps associated with the (p)-classgroups in the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of a number field, where p is an odd prime. Under Gross's Conjecture, we prove by various methods that these cokernels stabilize from a certain integer n_0 et we determine the Kummer dual of their inductive limit. These results noticeably improve upon Ichimura's.

Keywords : algebraic number theory, Iwasawa theory, étale K-theory, Stickelberger elements, capitulation cokernels, module of Bertrandias-Payan.