

UNIVERSITE DE LIMOGES
ECOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2003

Thèse N° 47-2003

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LIMOGES

Discipline / Spécialité : « Electronique des Hautes Fréquences, Optoélectronique »

présentée et soutenue par

Yannick MERLE

le 20 novembre 2003

**Etude de la dispersion électromagnétique dans
les matériaux périodiques diélectriques
bidimensionnels.**

Thèse dirigée par Alain REINEIX

JURY :

Monsieur Jean-Claude VAREILLE	Président
Monsieur Jean-Marc LAHEURTE	Rapporteur
Madame Valérie VIGNERAS-LEFEBVRE	Rapporteur
Monsieur Alain REINEIX	Examineur
Monsieur Marc THEVENOT	Examineur

*A Frédérique,
A mes parents,*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été effectué au sein de l'Institut de Recherche en Communications Optiques et Microondes (IRCOM) de l'Université de Limoges. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur P. GUILLON de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je suis très reconnaissant à Monsieur J.C. VAREILLE, Professeur à l'Université de Limoges, et Directeur de l'Ecole Doctorale Science-Technologie-Santé, pour avoir accepté de présider ce jury.

J'exprime toute ma gratitude à Madame V. VIGNERAS-LEFEBVRE, Professeur à l'ENSCPB PIOM à Bordeaux, et Monsieur J.M. LAHEURTE, Professeur à l'Université de Marne-La-Vallée, pour avoir assuré la tâche de rapporteurs.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur A. REINEIX, Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Limoges, pour avoir dirigé cette thèse, et à Monsieur M. THEVENOT, Chargé de Recherche CNRS à l'Université de Limoges, pour avoir co-encadré ce travail de recherche.

Je tiens aussi à dire un grand merci à N. AYMARD pour sa bonne humeur et sa disponibilité tout au long de ce travail.

J'associe à mes remerciements l'ensemble des membres de l'équipe Diffraction Electromagnétique, des doctorants, secrétaires et personnels du laboratoire pour l'ambiance chaleureuse de travail et pour nos échanges qui n'ont pas toujours été scientifiques.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes qui me sont chères, en particulier mes parents, Marie-Christine et Jean-Christophe, pour l'aide, la confiance et le soutien dont ils ont fait preuve tout au long de ces dernières années.

Enfin, j'exprime ma dernière pensée à Frédérique qui m'a soutenu et encouragé durant ce travail, et à qui je dédicace ce travail.

SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	1
-------------------------------------	----------

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux à Bande Interdite Photonique et outils de simulation

Introduction	7
I- Historique et présentation des bips	8
I.1- Historique	8
I.2- Description et inventaires des matériaux à BIP	9
I.2.1- Description des matériaux périodiques	9
I.2.2- Inventaire des matériaux à BIP	11
I.2.2.1- La structure périodique unidimensionnelle	11
I.2.2.2- La structure périodique bidimensionnelle	11
I.2.2.3- La structure périodique tridimensionnelle	15
II- Analogie avec les semi-conducteurs	17
II.1- Etude d'une particule dans un puit de potentiel périodique : obtention de bandes permises et interdites	17
II.2- Analogie électron-photon – Etude électromagnétique	25
III- Bref état de l'art	30
III.1- Fréquences optiques	30
III.2- Fréquences micro-ondes	31
III.2.1- Dispositifs filtrants	31
III.2.2- Dispositifs rayonnants	33
IV- Les outils de simulation	34
IV.1- La méthode des différences finies temporelles	35
IV.2- La méthode des ondes planes	38
Conclusion	41

CHAPITRE II

Etude de matériaux BIP infinis à deux dimensions

Introduction	45
I- La méthode des ondes planes	46
I.1- Réseaux direct et réciproque à deux dimensions [43]	46
I.2- Zones de Brillouin	50
I.3- Condition de diffraction	52
II- Diagramme de bande	57
II.1- Etude électromagnétique pour un mode TM	58
II.2- Etude électromagnétique pour un mode TE	61
II.3- Exemple de diagramme de bande	63
II.3.1- Diagramme de bande pour une onde polarisée TM	63
II.3.2- Diagramme de bande pour une onde polarisée TE	67
III- Surface de dispersion	69
III.1- Calcul des contours de dispersion pour une onde polarisée TM	70
III.2- Calcul des contours de dispersion pour une onde polarisée TE	73
III.3- Représentation des contours de dispersion : exemple d'une onde polarisée TM	77
IV- Distribution du champ électromagnétique dans un cristal photonique	81
V- Notion de vitesse de phase et vitesse de groupe	83
VI- Matériaux BIP à défaut	84
VI.1- Principe de base	85
VI.2- Les différents types de défaut [46]	85
VI.2.1- Les types de défaut	87
VI.2.2- La nature des défauts	87
VI.2.2.1- Dimensions des motifs élémentaires	87
VI.2.2.2- Distance entre motifs élémentaires	88
VI.2.2.3- Valeur de la permittivité relative des motifs élémentaires	88
VI.2.2.4- Défaut par vacuité	89
VI.3- Diagramme de bande d'une structure BIP à défaut	89
VI.4- Cartographie de champ du matériau à défaut	95
Conclusion	97

CHAPITRE III

Interprétation des propriétés dispersives des matériaux périodiques

Introduction	101
I- Matériaux à une dimension	103
I.1- Equations utiles à l'étude	103
I.1.1- Equation de dispersion	103
I.1.2- Vitesse de phase et vitesse de groupe	105
I.1.3- Coefficients de transmission et de réflexion	109
I.1.4- Condition de résonance 1D	114
I.2- Etude de différentes structures périodiques à une dimension	119
I.2.1- Alternance de 2 lames diélectriques $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq 1$ de même longueur électrique	120
I.2.2- Alternance de deux lames diélectriques $\epsilon_a=1$ et $\epsilon_b=9$, de même longueur électrique	124
I.2.3- Alternance de deux lames de diélectrique de longueurs électriques différentes	128
I.2.4- Différentes façon de concevoir un matériau BIP borné avec une même cellule élémentaire.	135
II- Matériaux à deux dimensions	138
II.1- Calcul d'un bilan énergétique ramené dans l'espace des vecteurs phaseurs	138
II.1.1- Calculs du bilan énergétique	139
II.1.2- Mise en place de l'algorithme de calcul	144
II.2- Comparaison de structures finie et infinie	146
II.3- Superposition des distributions $2\delta w(\omega, k)$ et des contours de dispersion	149
II.3.1- Structure 8*8	150
II.3.2- Structure 18*18	151
Conclusion	155

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 157

ANNEXES :

Annexe 1 :

Calcul du potentiel électrique pour un électron dans un atome 165

Annexe 2 :

Résolution de l'équation de propagation dans un milieu diélectrique périodique 169

Annexe 3 :

Matrice de calcul de surface de dispersion pour une onde polarisée TM 175

Annexe 4 :

Matrice de calcul de surface de dispersion pour une onde polarisée TE 181

Annexe 5 :

Transformée de Fourier d'une structure photonique carrée 187

BIBLIOGRAPHIE 189

INTRODUCTION
GENERALE

La découverte des semi-conducteurs a permis un développement massif de l'électronique contemporaine. Le principe des semi-conducteurs a été décrit par la physique quantique. Il repose sur le fait qu'un électron voit son énergie quantifiée lorsqu'il se "déplace" au sein d'un arrangement périodique d'atomes. Il apparaît alors des bandes d'énergies interdites. C'est à partir de cette démonstration que les matériaux à bande interdite photonique, appelés plus simplement BIP, sont apparus il y a une vingtaine d'année [1]. Ces matériaux utilisent le phénomène de bandes d'énergie interdites.

Nous pouvons remarquer que dans le domaine de la physique, il existe diverses analogies comme par exemple, les oscillateurs harmoniques issus de l'électricité (circuits RLC) et de la mécanique (pendule). Le travail de doctorat présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la ressemblance qui existe entre l'électronique (comportement des électrons dans les semi-conducteurs) et l'optique ondulatoire (photons dans les structures macroscopiques).

D'un point de vue théorique, l'étude et le développement des propriétés des matériaux à bande interdite photonique reposent sur la forte similitude qui existe entre les équations de Schrödinger et de Maxwell.

La théorie de Maxwell date du XIX^{ème} siècle, tandis que celle du photon est plus récente. Il est bien connu de la communauté scientifique que les électrons d'un cristal semi-conducteur ne peuvent prendre n'importe quelle énergie : la périodicité du potentiel d'interaction entre électrons et atomes conduit à l'existence de bandes d'énergies interdites. De la même façon, un matériau dont l'indice de réfraction varie périodiquement suivant les différentes directions de l'espace pourra présenter des bandes d'énergies interdites pour les photons. Autrement dit, dans certains domaines de longueur d'onde de l'ordre de grandeur de la période du matériau, la lumière ne pourra s'y propager et sera réfléchi quelle que soit son incidence. E. Yablonovitch proposa de réaliser de tels matériaux. C'est ainsi qu'apparurent les concepts de bande interdite photonique et de cristaux photoniques.

La première fonction d'un BIP est d'être un miroir parfaitement réfléchissant (99,5 %) quel que soit l'angle ou la polarisation dans une ou plusieurs bandes de fréquence. Ceci est possible sans aucun apport d'énergie (ce qui n'est pas le cas des semi-conducteurs).

Ce manuscrit s'articule autour de trois chapitres.

Dans un premier chapitre, nous décrivons les généralités sur les BIP et les outils de simulation. Après avoir présenté un historique rappelant le principe des cristaux photoniques, nous exposerons ces matériaux périodiques. Nous rappellerons ensuite dans le détail l'analogie qui existe entre les électrons et les photons. Un bref état de l'art sera présenté suivi de applications développées avec des structures périodiques dans différents domaines tels que l'optique et les microondes. Pour permettre l'étude des BIP, nous présenterons deux outils électromagnétiques : la méthode rigoureuse des différences finies temporelles (FDTD) et l'analyse théorique par décomposition en ondes planes.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des matériaux infinis à deux dimensions (deux ordres de périodicité). Pour cela, nous proposerons une méthode basée sur un développement en ondes planes et nous présenterons les concepts utiles à cette décomposition. Grâce à cette méthode, nous pouvons tracer le diagramme de dispersion, représenter les contours de dispersion et les distributions du champ électromagnétique dans le cristal photonique. Pour élargir l'emploi de cette analyse, l'étude de matériaux BIP à défaut sera faite.

Dans un troisième et dernier chapitre, nous donnerons une interprétation des propriétés dispersives des matériaux périodiques de dimensions finies. Dans un premier temps, nous montrerons que ces propriétés dispersives se traduisent sous forme de filtrage fréquentiel. L'étude de quatre structures types monodimensionnelles permet de couvrir les différents cas qui peuvent être rencontrés et nous permet d'expliquer les propriétés électromagnétiques de n'importe quels matériaux à une dimension. Dans un deuxième temps, nous montrerons comment un matériau BIP à deux dimensions réalise un filtrage spatial sur les ondes électromagnétiques.

Enfin, nous effectuerons une synthèse des résultats obtenus au cours de ce travail de thèse et nous développerons les perspectives qui en découlent dans la conclusion générale.

CHAPITRE I

*Généralité sur les matériaux à bande interdite photonique et
outils de simulation*

Chapitre I

Introduction

Les matériaux à Bande Interdite Photonique, plus simplement appelés BIP (en anglais, Photonic Band Gap, PBG) sont composés d'un assemblage périodique de deux ou plusieurs matériaux diélectriques ou métalliques. Ils présentent des bandes de fréquence pour lesquelles la propagation des ondes électromagnétiques est interdite.

Nous débuterons ce chapitre par un historique retraçant l'origine des cristaux photoniques. Après avoir décrit les éléments permettant de caractériser ces cristaux, nous pourrons inventorier les matériaux à bande interdite photonique.

Nous présenterons ensuite l'analogie qui existe entre les semi-conducteurs, dont la périodicité atomique interdit la propagation des électrons dans certaines bandes d'énergie, et les photons piégés dans des structures diélectriques périodiques de dimensions environ 1000 fois supérieures aux cristaux atomiques.

Nous continuerons par un état de l'art et une présentation de quelques applications dans les domaines des fréquences optiques et micro-ondes.

Nous terminerons par une présentation des méthodes numériques utilisées pour effectuer ce travail.

I- Historique et présentation des bips

I.1- Historique

La naissance des structures photoniques provient de l'optique. C'est en 1915 que le physicien anglais Sir William Lawrence Bragg reçut le prix Nobel de physique en récompense de son travail effectué sur la diffraction des rayons X par les cristaux.

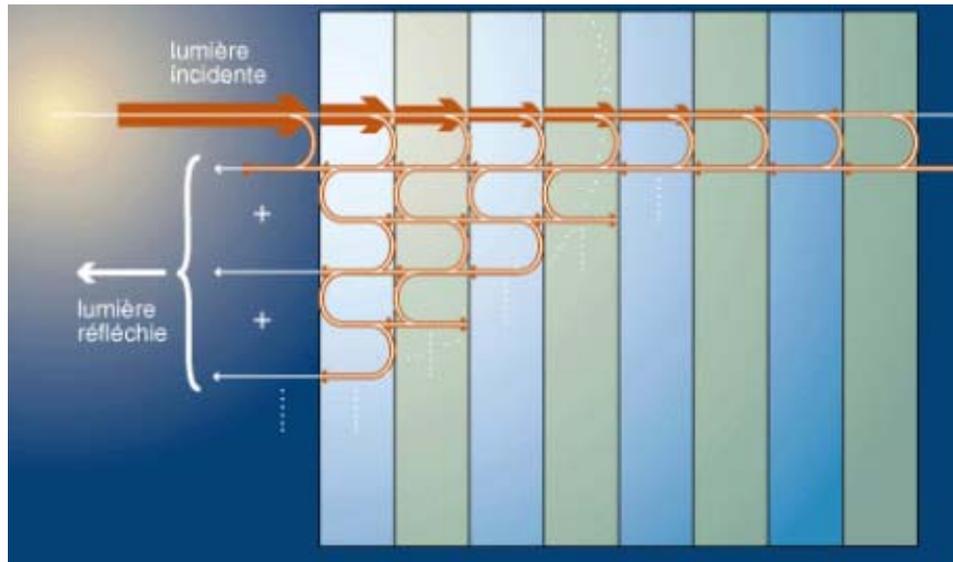


Figure I-1 : Miroir de Bragg

Bragg a développé le miroir de Bragg (figure I-1). Ce miroir est une succession de surfaces planes transparentes d'indices de réfraction différents. Il permet de réfléchir, grâce à des phénomènes d'interférences constructives, 99,5 % de l'énergie incidente. Ceci est possible à condition que l'onde incidente soit proche de l'incidence normale. Aucun autre miroir ne peut égaler ce résultat (les pertes diélectriques étant plus faible que les pertes métalliques pour les longueurs d'ondes optiques).

Ce n'est qu'en 1987 qu'Eli Yablonovitch [1] de l'Université de Los Angeles proposa d'étendre le concept des miroirs de Bragg aux fréquences micro-ondes et ce pour des incidences quelconques.

En 1991, Eli Yablonovitch réalisa le premier cristal photonique artificiel [2] [3] fonctionnant aux longueurs d'onde centimétriques. Ce cristal artificiel, réalisé dans un bloc de plexiglas usiné dans trois directions différentes de façon à reproduire la structure du diamant, est appelé Yablonovite (figure I-2).

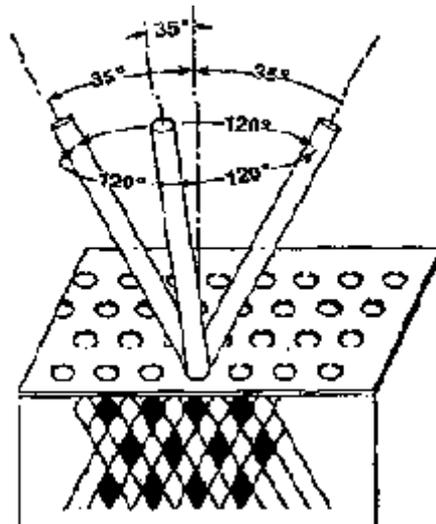


Figure I-2 : Yablonoite

Les exigences et les limitations technologiques dues à la taille de l'usinage ont dans un premier temps écarté les applications d'un tel cristal pour des fréquences optiques.

Dès lors, les recherches sur les BIPs se multiplient pour toutes les gammes de longueurs d'ondes et à partir de 1994, les premières réalisations à l'échelle optique apparaissent. Devant l'essor de ce nouveau thème, la recherche en France s'est structurée autour d'un Groupe de Recherche (GdR Ondes) conduit par le CNRS et créé par le département STIC en janvier 2002, qui regroupe aujourd'hui 58 équipes, 104 doctorants et 248 permanents travaillant dans le domaine des ondes électromagnétiques, optiques et acoustiques. L'un des différents axes de recherche est celui du domaine des BIPs (optique, circuits micro ondes, antennes, métamatériaux).

Dans la communauté internationale, la recherche sur le thème des cristaux photoniques évolue et il est possible de trouver des ouvrages relatant les caractéristiques de ces matériaux [4] [5].

I.2- Description et inventaires des matériaux à BIP

I.2.1- Description des matériaux périodiques

Avant de répertorier les différentes sortes de matériaux à BIP, il faut donner quelques définitions.

Le milieu diélectrique périodique peut s'apparenter à un milieu cristallin.

Cette organisation est constituée par :

- un *réseau* périodique défini par trois vecteurs de translation \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (ou vecteurs de base) de l'espace. Ce réseau définit des nœuds. Si \vec{r} désigne la position d'un nœud de ce réseau, l'ensemble des autres nœuds est localisé par le vecteur \vec{r}' tel que :

$$\vec{r}' = \vec{r} + u.\vec{a} + v.\vec{b} + w.\vec{c} \quad (\text{I-1})$$

où u , v , w sont des entiers.

- un *motif* élémentaire vient se positionner sur chaque nœud du réseau. Ce motif peut adopter des formes ou des volumes complexes.

Cette association *motif-réseau* est caractéristique de l'état cristallin (figure I-3).

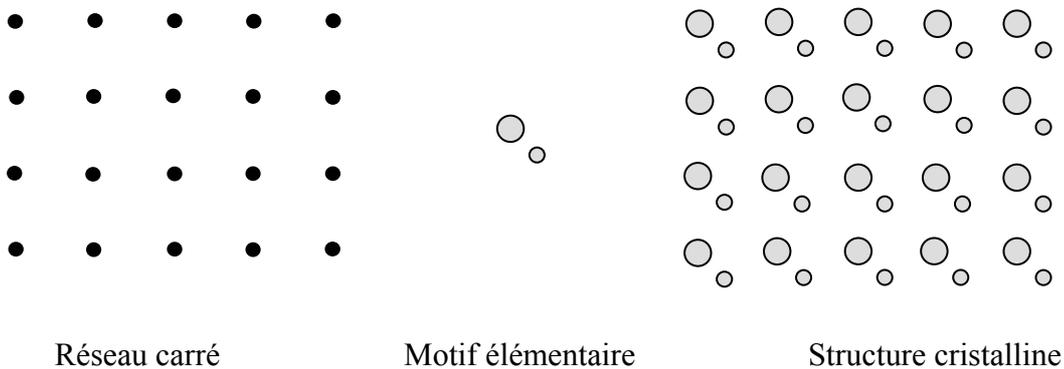


Figure I-3 : Structure cristalline formée d'un réseau et d'un motif élémentaire

Après avoir défini la structure cristalline, les matériaux à une, deux et trois dimensions vont être présentés.

I.2.2- Inventaire des matériaux à BIP

I.2.2.1- La structure périodique unidimensionnelle



Figure I-4 : Structure périodique unidimensionnelle

Cette structure est le dispositif périodique le plus simple. Il est connu sous le nom de « Miroir de Bragg ». Il consiste en une alternance de couches planes de diélectrique d'épaisseur $\lambda_g/4$ où λ_g représente la longueur d'onde guidée dans le matériau (figure I-4).

I.2.2.2- La structure périodique bidimensionnelle

Les structures périodiques bidimensionnelles [6], [7] sont périodiques suivant deux directions de l'espace et infinies suivant la troisième.

Ces structures périodiques sont composées de cylindres diélectriques. Elles présentent une relative simplicité géométrique qui facilitent les études théoriques et expérimentales.

Dans ces structures 2D, il existe deux polarisations possibles pour les ondes électromagnétiques. La polarisation électrique correspond au cas où le champ électrique \vec{E} est parallèle aux barreaux de la structure considérés de longueur infinie et la polarisation magnétique correspond lorsque le champ magnétique \vec{H} est parallèle aux cylindres infinies.

Il existe deux types de structures périodiques diélectriques :

- Les structures dites « connectées » (figure I-5) : les motifs élémentaires sont d'indice n_1 inférieur à l'indice n_2 de la matrice diélectrique.

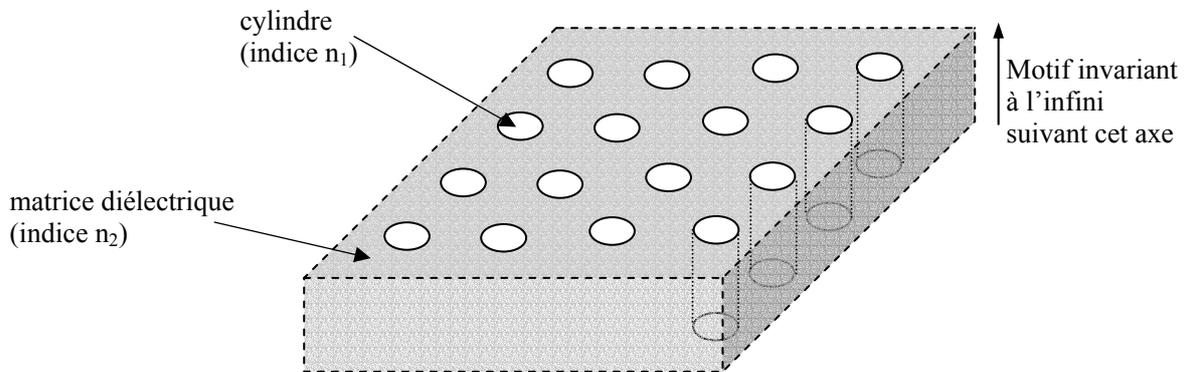


Figure I-5 : Structure périodique 2D connectée

- Les structures dites « déconnectées » (figure I-6) : les motifs élémentaires sont d'indice n_1 supérieur à l'indice n_2 de l'espace inter motifs. Elles sont constituées de tiges diélectriques ou métalliques alignées périodiquement dans l'air ou de la mousse [8].

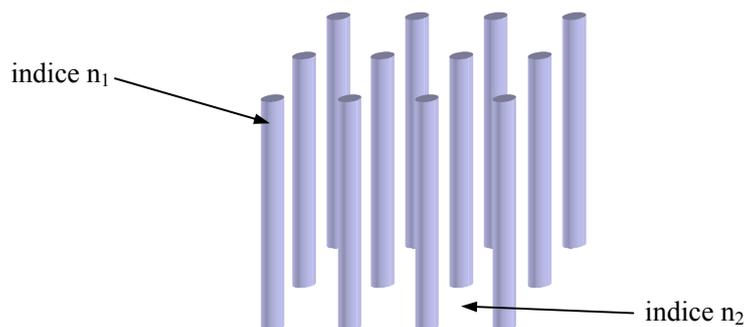


Figure I-6 : Structure périodique 2D déconnectée

Les réseaux périodiques à deux dimensions se regroupent principalement suivant trois familles :

- Le réseau carré [9]

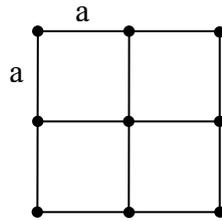


Figure I-7 : Réseau carré

Les nœuds du réseau sont situés sur un carré de côté “a” (figure I-7). Il a été montré que ce type de réseau est très sensible à l’angle d’incidence et à la polarisation de l’onde électromagnétique. Il est ainsi difficile d’obtenir une bande interdite totale, c’est-à-dire une bande interdite qui empêche la propagation quelle que soit la polarisation.

- Le réseau triangulaire [10]

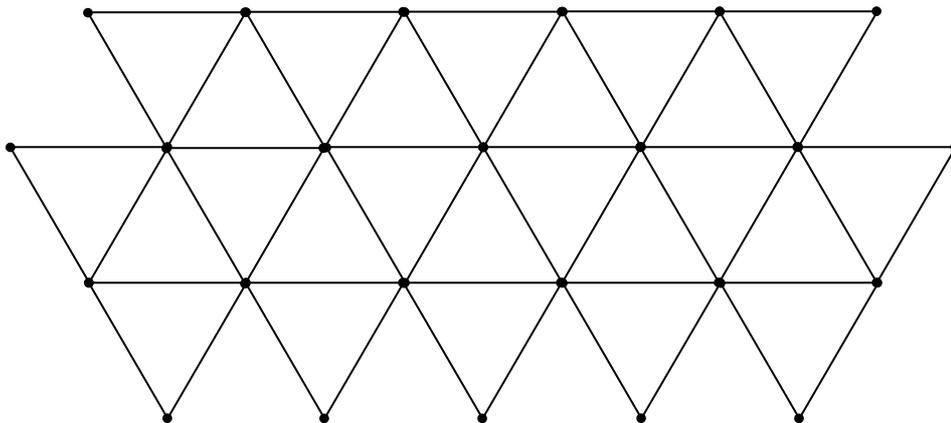


Figure I-8 : Réseau triangulaire

Chaque nœud du réseau est espacé de son proche voisin d’une même distance “a” (figure I-8). Cette structure est moins sensible à l’angle d’incidence que le réseau carré mais la bande interdite complète reste difficile à obtenir.

- Le réseau hexagonal [11]
 - La structure graphite :

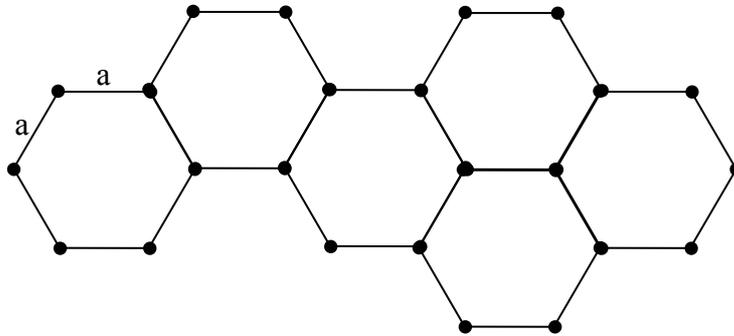


Figure I-9 : Structure graphite

Sur un réseau hexagonal, si tous les nœuds sont identiques et espacés de “a”, alors on appelle cette structure “graphite” car elle est similaire à la structure cristalline du graphite (figure I-9).

- La structure nitrure de Bore

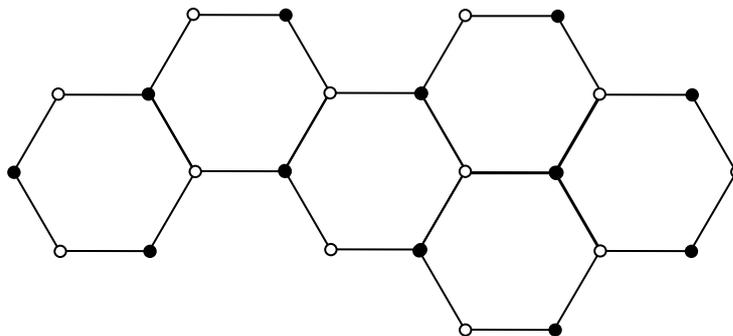


Figure I-10 : Structure Nitrure de Bore

Si un nœud diffère de son suivant par sa nature ou sa dimension, on obtient ainsi la structure cristalline du Nitrure de Bore (figure I-10). Celle-ci permet d’obtenir de larges bandes interdites ainsi que de nouvelles bandes interdites lorsqu’on les compare à celle obtenues avec la structure graphite précédente.

I.2.2.3- La structure périodique tridimensionnelle

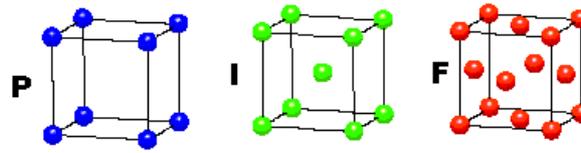
Dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, Auguste Bravais a établi un classement des différentes familles de cristaux. Il a montré que les cristaux peuvent se répartir en 7 types de mailles (7 systèmes cristallins) et 14 types de réseaux (figure I-11) [12]. Ceux-ci sont à la base des structures périodiques tridimensionnelles (tableau I-1). Il est ainsi possible d'obtenir des bandes interdites complètes, quel que soit l'angle d'incidence de l'onde électromagnétique sur certains matériaux périodiques.

Géométrie du cristal	Distances	Angles	Nature des réseaux
Cubique	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P, F, I
Tétragonal (Quadratique)	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P, I
Orthorhombique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P, F, I, C
Hexagonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	P
Trigonal (Rhomboédrique)	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma$ différents de 90°	P
Monoclinique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	P, C
Triclinique	$a \neq b \neq c$	α, β, γ différents	P

Tableau I-1 : 14 types de réseaux tridimensionnels

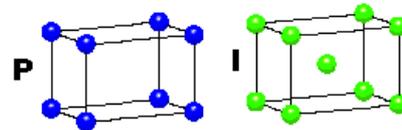
Cubique

$a = b = c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



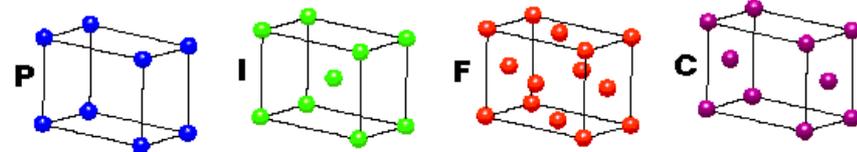
Quadratique

$a = b \neq c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



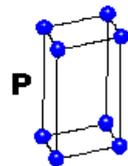
Orthorhombique

$a \neq b \neq c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



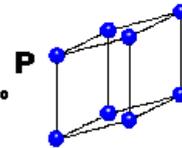
Hexagonal

$a = b \neq c$
 $\alpha = \beta = 90^\circ$
 $\gamma = 120^\circ$



Trigonal

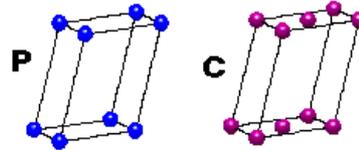
$a = b = c$
 $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$



4 types de réseau

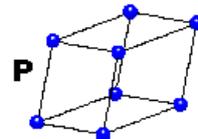
Monoclinique

$a \neq b \neq c$
 $\alpha = \gamma = 90^\circ$
 $\beta \neq 90^\circ$



Triclinique

$a \neq b \neq c$
 $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$



4 types de réseau

- P Primitif
- I centré
- F toutes faces centrées
- C 1 face centrée

**+ 7 systèmes cristallins
= 14 réseaux de BRAVAIS**

Figure I-11 : Les 14 mailles de Bravais

Les réseaux cubiques (simple [13], centré et faces centrées) sont les plus utilisés mais les autres réseaux n'ont pas fait, pour l'instant, l'objet de beaucoup d'études.

La structure dite « tas de bois » (figure I-13) est un exemple de matériau périodique à 3 dimensions [14]. On a cherché à copier la structure cfc, le motif élémentaire est composé de deux cylindres orthogonaux :

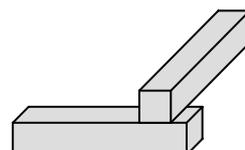


Figure I-12 : Motif élémentaire composé de 2 cylindres orthogonaux

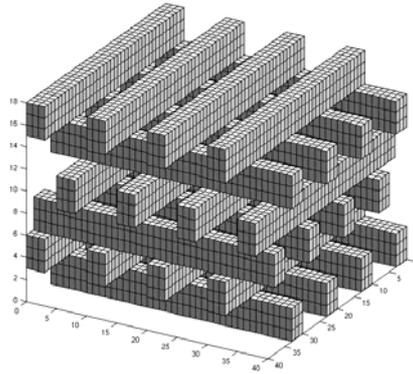


Figure I-13 : Structure tas de bois

Ce motif est alors périodisé grâce à la relation I-1 en utilisant les vecteurs de base du réseau cubique faces centrées [43].

Cette structure est relativement facile à réaliser et elle offre une bande interdite complète pour toutes les incidences de l'espace [15].

II- Analogie avec les semi-conducteurs

Nous savons, grâce à la physique du solide, que les électrons d'un cristal semi-conducteur ne peuvent pas prendre n'importe quelle énergie. La ressemblance qui existe entre l'équation de Schrödinger et l'équation de Helmholtz scalaire déduite des équations de Maxwell nous permet de supposer que pour un cristal photonique il peut exister des bandes de fréquences interdites.

Pour comprendre le rapprochement qui est fait entre les deux entités précédentes, nous allons rappeler que la périodicité du potentiel d'interaction entre électrons et atomes conduit à l'existence de bandes d'énergies interdites. Puis nous ferons le calcul de bandes de fréquences interdites pour un matériau photonique.

II.1- Etude d'une particule dans un puit de potentiel périodique : obtention de bandes permises et interdites

La périodicité du potentiel électrique est modulée par la répartition régulière des ions positifs. Sa périodicité correspond au pas “ d ” du réseau cristallin. Cette représentation est donnée par la figure I-14. La démonstration pour l’obtention d’une telle énergie est donnée en annexe 1.

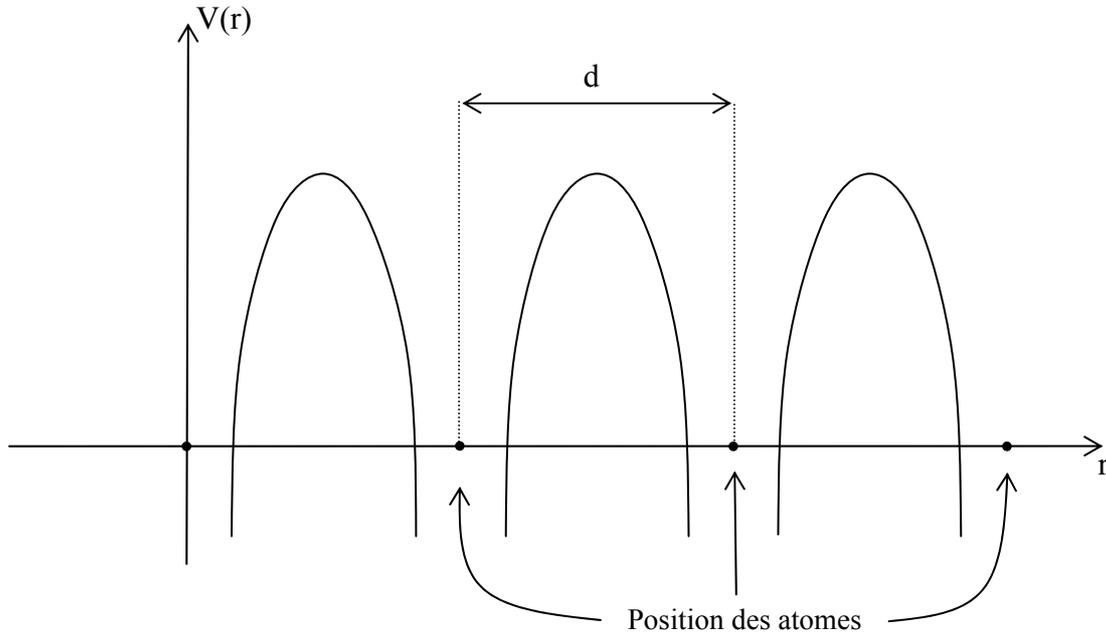


Figure I-14 : Potentiel électrique dans un cristal unidimensionnel

Il faut résoudre l’équation de Schrödinger pour déterminer la fonction d’onde de l’électron en utilisant cette forme de potentiel électrique.

L’équation d’onde de Schrödinger s’écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \Psi = 0 \quad (\text{I-2})$$

où m est la masse de l’électron et \hbar la constante de Planck divisée par 2π .

Ψ est la fonction d’onde, E est l’énergie de l’électron et $V(x)$ représente la distribution du potentiel électrique.

Cette résolution, très compliquée avec ce modèle de potentiel électrique, est résolue grâce au modèle de Kronig-Penney. Il est représenté par un puit de potentiel carré de hauteur de barrière V_0 et de largeur de barrière b .

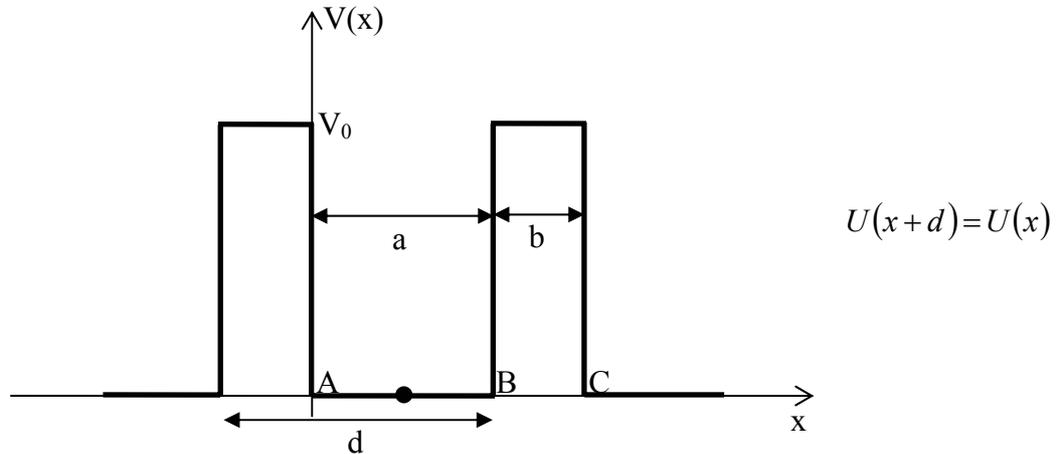


Figure I-15 : Puits de potentiel électrique carré périodique

La position des atomes est au centre de chaque puits de potentiel, et pour quitter l'atome, l'électron doit lutter contre la force d'attraction représentée par la barrière de potentiel (figure I-15).

Pour résoudre l'équation d'onde de Schrödinger, l'énergie totale E de la particule est supposée telle que $0 \leq E \leq V_0$.

Il faut alors résoudre l'équation d'onde de Schrödinger dans les deux régions suivantes, $A < x < B$ et $B < x < C$, puis appliquer aux fonctions d'ondes les conditions de continuité et de périodicité aux interfaces.

Sur le chemin A-B, on a $0 < x < a$ et $V = 0$ d'où l'équation (I-2) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_1(x) = 0 \quad (\text{I-3})$$

Sur le chemin B-C, on a $a < x < a+b$ et $V = V_0$ d'où l'équation (I-2) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi_2(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \Psi_2(x) = 0 \quad (\text{I-4})$$

(avec $E < V_0$ d'après les hypothèses)

Ainsi, la solution de l'équation (I-3) est donnée par :

$$\Psi_1(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \quad (\text{I-5})$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et la solution de (I-4) est donnée par :

$$\Psi_2(x) = C e^{-\beta x} + D e^{+\beta x} \quad (\text{I-6})$$

avec $\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$.

De plus, $\Psi(x)$ est la fonction d'onde solution relative à un motif du puit de potentiel périodique. La solution générale de l'équation d'onde est une fonction de Bloch [16] qui s'écrit :

$$u(x) = \Psi(x) e^{-jkx} \quad (\text{I-7})$$

(périodique de même période que le potentiel V), où k est le vecteur d'onde de la particule qui traduit le déplacement de la particule dans le puit de potentiel périodique.

Les conditions de continuités doivent être satisfaites au points B sur les fonctions $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ est sur leurs dérivées $\Psi_1'(x), \Psi_2'(x)$ [16]. Nous obtenons ainsi :

$$\Psi_1(x=a) = \Psi_2(x=a) \quad (\text{I-8})$$

$$\Psi_1'(x=a) = \Psi_2'(x=a) \quad (\text{I-9})$$

De plus, les conditions de périodicité sont appliquées. Ainsi, la fonction d'onde $u(x)$ (relation I-7) doit être identique en $x = A$ et en $x = C$ et impose d'avoir :

$$u(x=0) = u(x=a+b) \quad (\text{I-10})$$

$$u'(x=0) = u'(x=a+b) \quad (\text{I-11})$$

Il est donc nécessaire de résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x=a) = \Psi_2(x=a) \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(x=a) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(x=a) \\ u(x=0) = u(x=a+b) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x=a+b) \\ \Psi_1(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \\ \Psi_2(x) = C e^{-\beta x} + D e^{+\beta x} \\ u(x) = \Psi(x) e^{-jkx} \end{array} \right. \quad (\text{I-12})$$

afin de déterminer les coefficients A, B, C et D.

La résolution de ce système aboutit à la condition suivante :

$$\boxed{\cos(\alpha a) \operatorname{ch}(\beta b) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \sin(\alpha a) \operatorname{sh}(\beta b) = \cos[k(a+b)]} \quad (\text{I-13})$$

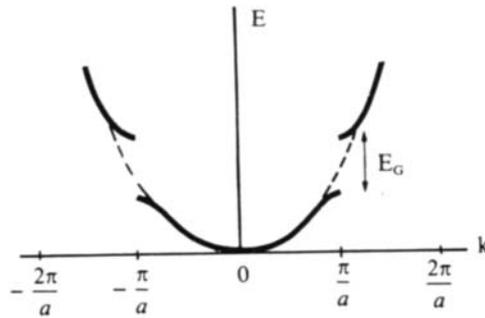


Figure I-16 : Diagramme de dispersion

Sur la figure I-16 apparaît en pointillés la parabole d'équation $E_0(k) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$. Cette parabole est obtenue dans l'équation (I-13) lorsque b tend vers zéro, c'est-à-dire quand la barrière de potentielle est transparente. Alors on considère que les électrons sont dans un volume infini. La courbe $E(k)$ ne s'éloigne de cette parabole qu'au voisinage des valeurs $k = n\frac{\pi}{a}$, en créant chaque fois une bande d'énergie interdite (souvent appelée gap). Cette bande a la largeur E_G pour $k = \pm\frac{\pi}{a}$. Le domaine de l'espace des k compris entre $-\frac{\pi}{a}$ et $+\frac{\pi}{a}$ s'appelle la première zone de Brillouin de la chaîne atomique. Le domaine constitué des deux segments $\left[-\frac{2\pi}{a}; -\frac{\pi}{a}\right]$ et $\left[+\frac{\pi}{a}; +\frac{2\pi}{a}\right]$ constitue la seconde zone de Brillouin, etc. [17]

En utilisant la simplification de Kronig et Penney, l'analyse de l'équation (I-13) est facilitée. Pour cela, on suppose que la largeur b de barrière de potentiel tend vers zéro tout en gardant le produit bV_0 constant.

Ainsi, $\text{ch}(\beta b)$ tend vers 1, $\frac{\text{sh}(\beta b)}{\beta b}$ tend vers 1, $\alpha^2 b$ tend vers 0 et $\beta^2 b$ tend vers

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}.$$

Dans ce cas précis, l'allure du résultat est inchangée et l'équation (I-13) est ainsi simplifiée sous la forme :

$$\cos(\alpha a) + \frac{mV_0 a}{\hbar^2} \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = \cos(ka) \quad (\text{I-14})$$

En posant $X = \alpha a$ et $P = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$, on obtient alors une réponse du type :

$$\cos X + P \frac{\sin X}{X} = \cos(ka) \quad (\text{I-15})$$

avec $X > 0$ et $P > 0$.

En faisant une simple représentation graphique, en prenant une valeur arbitraire pour P (P=4), il est possible de montrer que le membre de gauche de la relation (I-15) admet des valeurs de cette fonction supérieures à 1 et inférieures à -1. Or l'équation (I-15) n'admettra des solutions que lorsque le membre de gauche sera compris entre +1 et -1.

Ce comportement met en évidence la notion de bandes interdites et de bandes permises décrites par la figure I-17.

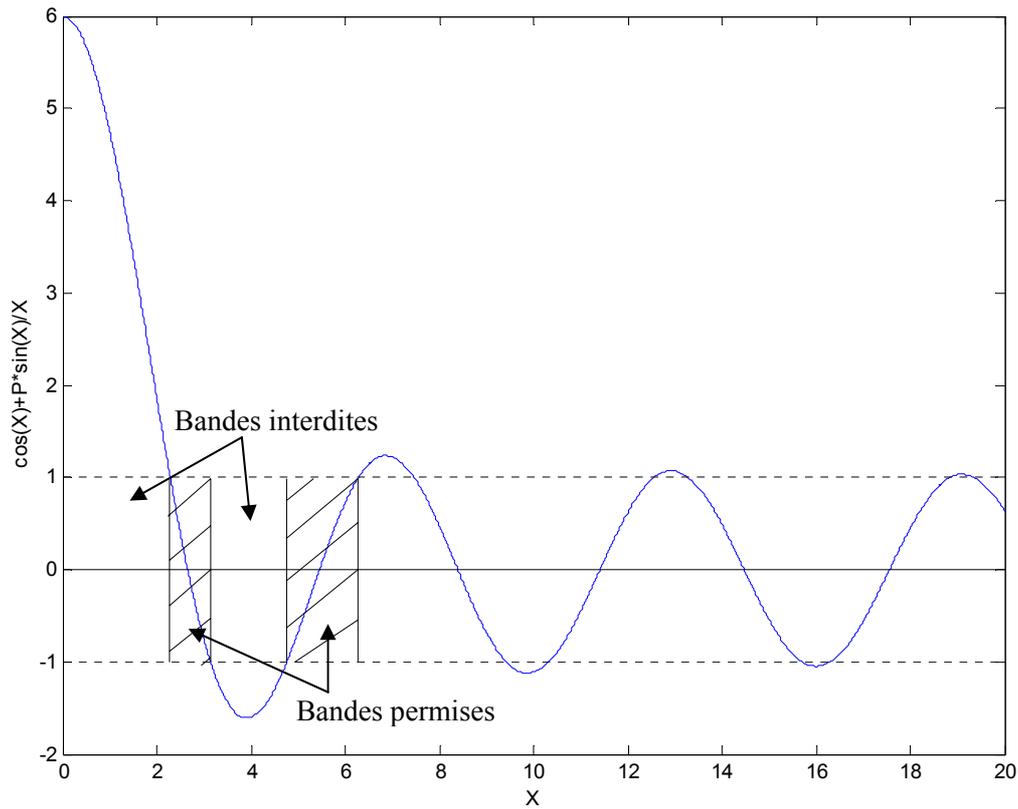


Figure I-17 : Bandes permises et bandes interdites

Une autre façon de visualiser les bandes interdites est d'exprimer l'énergie E en fonction de k telle que $E = f(k)$.

Ainsi, à l'intérieur d'une bande permise, l'énergie est une fonction périodique de périodicité $\frac{2\pi}{a}$.

Cette périodicité permet de limiter la représentation à la première zone de Brillouin, c'est-à-dire dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}\right]$.

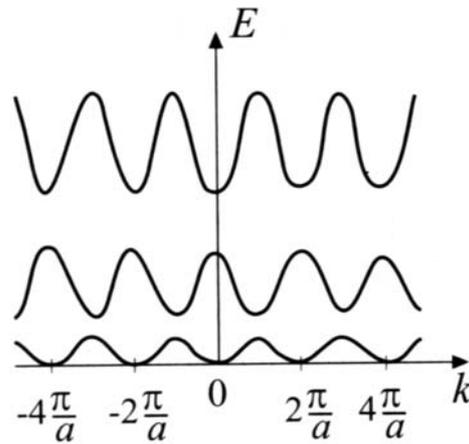


Figure I-18 : Diagramme de dispersion pour un cristal 1D

La figure I-18 montre une autre représentation du diagramme de dispersion d'un matériau périodique à une dimension [18].

II.2- Analogie électron-photon – Étude électromagnétique

Nous allons à présent montrer la similitude qui existe entre le calcul des modes de propagation électromagnétique dans un matériau périodique et la résolution de l'équation de Schrödinger pour une particule dans un puit de potentiel périodique.

Mais avant de regarder les similitudes qui existent entre ces deux équations, établissons la relation de Helmholtz scalaire dérivée des équations de Maxwell.

Dans un milieu diélectrique parfait où il n'y a ni charges, ni courants, les équations de Maxwell se simplifient et s'écrivent dans le domaine temporel [19]:

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{I-16})$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I-17})$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (\text{I-18})$$

$$\text{div}\vec{H} = 0 \quad (\text{I-19})$$

Pour établir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} , nous pouvons écrire successivement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}) \quad (\text{I-20})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{I-21})$$

d'où :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I-22})$$

Le champ électrique \vec{E} peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}e^{j\omega t} \quad (\text{I-23})$$

avec ω : pulsation

Alors la relation de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique s'écrit, après simplification, de la manière suivante :

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(x, y, z) \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{I-24})$$

avec \vec{E} : champ électrique

ε_r : permittivité

c : célérité dans le vide

Dans un système unidimensionnel, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(x) E(x) = 0 \quad (\text{I-25})$$

La résolution de l'équation de propagation (I-25) dans un milieu diélectrique périodique est détaillé dans l'annexe 2.

Par analogie entre l'équation différentielle (I-25) et celle de Schrödinger (I-2), il est possible d'identifier le champ électrique \vec{E} à la fonction d'onde Ψ , et le terme $\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x)$ au terme $\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))$. En prenant comme hypothèse que la permittivité $\varepsilon(x)$ est périodique de période d , il est possible de mettre de nouveau en évidence la notion de bandes permises et de bandes interdites. Ainsi, l'équation (I-25) peut être résolue en considérant un réseau périodique unidimensionnel. L'allure de la permittivité $\varepsilon(x)$ est décrite sur la figure A2-124.

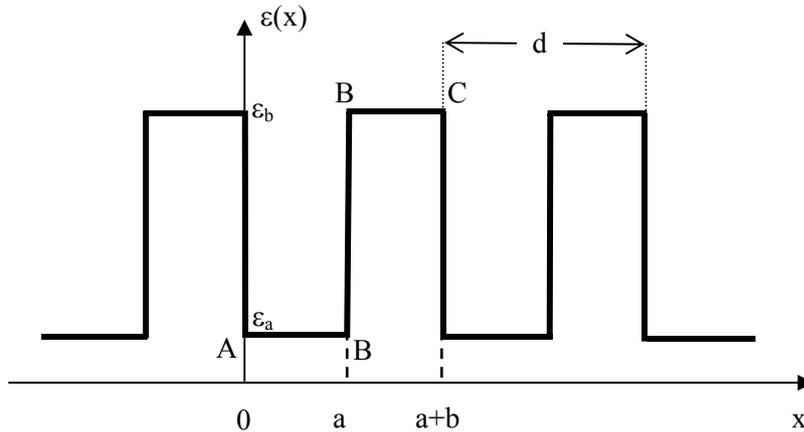


Figure I-19 : Constant diélectrique périodique

$$\varepsilon(x + d) = \varepsilon(x)$$

En reprenant la démarche vue au paragraphe précédent pour le calcul de bandes pour un électron dans un puit de potentiel périodique, nous pouvons faire la résolution de l'équation (I-25) dans les régions A-B et B-C (cf. figure A2-124).

$$\text{Si } 0 < x < a \text{ alors } \varepsilon(x) = \varepsilon_a = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 E_{AB}(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_{AB}(x) = 0 \quad (\text{I-26})$$

$$\text{Si } a < x < a+b \text{ alors } \varepsilon(x) = \varepsilon_b = \varepsilon_r \text{ et } \frac{\partial^2 E_{BC}(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r E_{BC}(x) = 0 \quad (\text{I-27})$$

Les solutions des équations différentielles (I-26) et (I-27) sont donc respectivement :

$$E_{AB}(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \quad (\text{I-28})$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\omega}{c}$$

$$\text{et } E_{BC}(x) = C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x) \quad (\text{I-29})$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$$

En utilisant les faits, qu'au point B la fonction $E(x)$ et sa dérivée $E'(x)$ sont continues, qu'au point C la fonction $\varepsilon(x)$ et sa dérivée $\varepsilon'(x)$ périodiques, et que le champ électrique $E(x)$ qui vérifie l'équation (I-25) admet une fonction de Bloch pour solution $E(x) = \mu_k(x) e^{jkx}$ (où $\mu_k(x)$ est une fonction périodique de même période d que la distribution de permittivité $\mu_k(x+d) = \mu_k(x)$), il est possible de montrer facilement que la solution à l'équation (I-25) est :

$$\boxed{\cos(\alpha a) \cos(\beta b) - \sin(\alpha a) \sin(\beta b) \frac{\varepsilon_r + 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} = \cos[k(a+b)]} \quad (\text{I-30})$$

Cette équation présente comme dans le cas des semi-conducteurs (équation (I-13)), la particularité de n'avoir de solution que lorsqu'elle est comprise entre -1 et +1.

Le membre de gauche de l'égalité (I-30) peut être supérieur à +1 ou inférieur à -1. Dans ce cas, il n'y a pas de vecteur d'onde k qui vérifie la relation de dispersion (I-30), donc aucune onde électromagnétique ne se propagera. Comme α et β dépendent tous deux de la pulsation ω , on parle alors de bandes de fréquences interdites.

Donc le matériau périodique unidimensionnel empêche les ondes électromagnétiques de se propager à ces fréquences considérées.

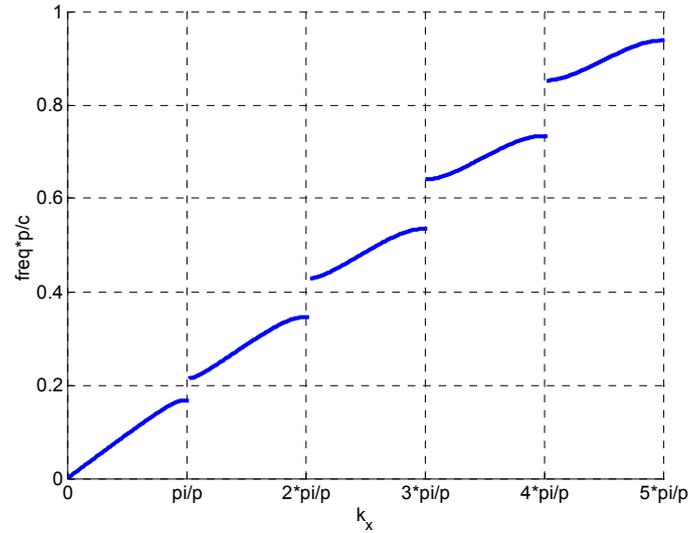


Figure I-20 : Diagramme de dispersion 1d

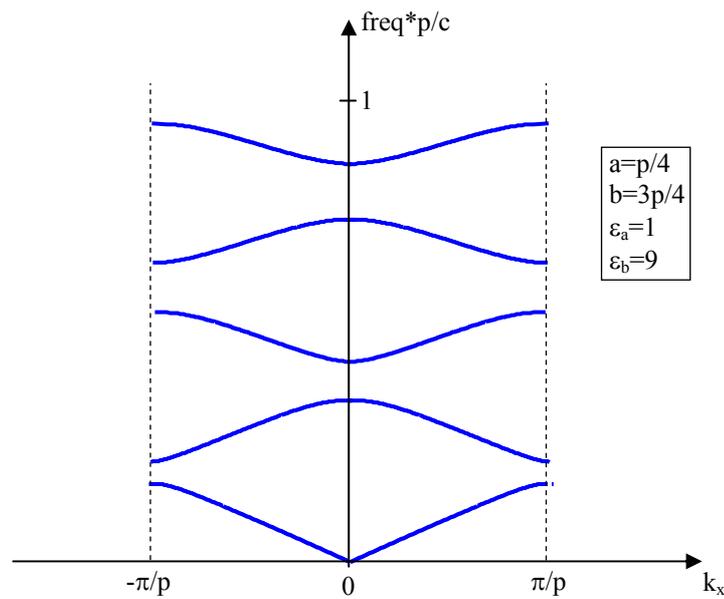


Figure I-21 : Diagramme de dispersion réduit

Ce paragraphe met en évidence que la périodicité de la permittivité diélectrique peut interdire la propagation des ondes sur une certaine bande de fréquences. Cette notion de périodicité peut être étendue à 2 ou 3 dimensions, mais la nature vectorielle de l'équation de propagation complique considérablement la résolution théorique du problème.

III- Bref état de l'art

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques applications de différentes structures périodiques, allant des fréquences optiques aux fréquences microondes.

III.1- Fréquences optiques

Les intérêts portés aux matériaux à bande interdite photonique ont tout d'abord été dans le domaine optique.

L'objectif était de réaliser des cavités parfaites, ceci afin de contrôler l'émission spontanée et donc d'obtenir des lasers sans seuil. Le confinement optique latéral a été obtenu par un cristal photonique 2D formé de trous constituant un réseau triangulaire et le confinement vertical a été réalisé en élaborant les structures dans une membranes suspendue en semi-conducteur III-V. Ainsi, des micro sources pompées optiques et dotées d'un facteur de qualité supérieur à 1000 ont été conçues en laboratoire [20].

Les fibres dites à « cristal photonique » sont apparues en 1996 aux universités de Bath et de Southampton [21]. Elles sont constituées d'un cœur de silice pure entouré d'un arrangement régulier de canaux d'air de dimensions microscopiques, disposés parallèlement à l'axe (figure I-22).



Figure I-22 : Exemple de fibre à cristal photonique

Cette fibre à cristal photonique a la faculté de guider un mode fondamental sur une très large bande spectrale.

Des fibres monomodes possédant un effet de bande interdite photonique grâce à une gaine optique périodique sont aussi étudiées pour annuler la dispersion chromatique [22]. Ces fibres sont capables de décaler la longueur d'onde d'annulation de la dispersion chromatique jusqu'à 0,85 micron. Ces fibres sont très intéressantes pour les communications optiques à haut débit et longue portée

Enfin, d'autres chercheurs ont montré qu'il était possible d'améliorer le comportement des diodes électroluminescentes en positionnant au cœur de ces dernières des cristaux photoniques qui empêchent les rayons lumineux de revenir se perdre à l'intérieur du composant [23].

III.2- Fréquences micro-ondes

Dans le domaine des micro-ondes [24], les matériaux à bande interdite photonique trouvent leurs applications aussi bien dans la conception des circuits que pour améliorer les performances des antennes [25].

III.2.1- Dispositifs filtrants

Parmi les dispositifs utilisant des structures périodiques dans le domaine du filtrage on trouve par exemple des filtres microondes, des guides d'onde et des structures planaires.

Au sein de l'IRCOM, dans l'équipe CDM (Circuits et Dispositifs Microondes), des études sont menées pour valider théoriquement et expérimentalement le principe de filtres microondes à structures périodiques [26].

Un nouveau type de guide d'onde quasi TEM utilisant des structures périodiques [27] a été développé par l'équipe de Tatsuo Itoh. Il est conçu à partir d'éléments plans (BIP imprimés) (figure I-23) disposés sur les parois latérales du guide. Ainsi, sur une plage de fréquences données, les parois du guide se comportent comme des courts-circuits de type magnétique (CCM). Il s'installe alors un mode quasi TEM dans le guide. Le guide n'a plus de fréquence de coupure et la propagation de l'onde se fait sur un mode unique.

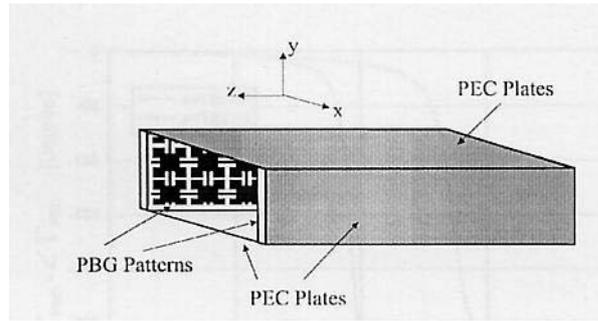


Figure I-23 : Schéma de guide à UC-PBG

En introduisant des éléments actifs dans des guides d'ondes [28], il est possible de réaliser l'accordabilité des structures périodiques. Les éléments actifs, du type diode varactor, sont placés dans une structure BIP métallique filaire.

Les BIP trouvent également des applications dans les circuits développés en technologie planaire.

Des trous espacés périodiquement et disposés de chaque côté d'une ligne microruban (figure I-24) permettent l'obtention d'une bande interdite [29]. Ce genre de filtre réalise une réponse stop bande large bande.

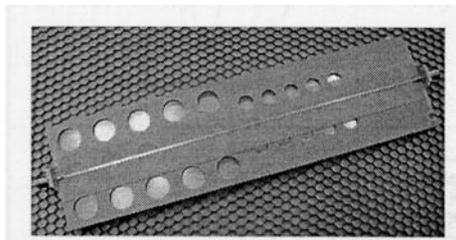


Figure I-24 : Trous périodiques de part et d'autre d'une ligne microruban

En réalisant des démétallisations partielles périodiquement dans le plan de masse, il est également possible d'obtenir des structures périodiques 2D métalliques [30]. Ce réseau périodique couplé à une ligne microruban réalise des sauts d'impédance et entraîne l'apparition d'une bande de fréquence où il n'y a pas de propagation. Le filtre réalisé est du type stop bande. Ce dispositif a la particularité d'être beaucoup plus compact qu'un dispositif BIP diélectrique à fréquence égale.

III.2.2- Dispositifs rayonnants

Une des voies les plus développées pour l'application des BIP aux fréquences microondes concerne le domaine des antennes et leurs effets sur le rayonnement. De nombreuses études ont été menées et montrent l'utilisation de matériaux BIP comme substrat d'antennes, comme réflecteur ou comme radôme dans le but d'augmenter la directivité des antennes, ou encore en utilisant des matériaux BIP actifs.

Il a été montré [31] que le fait de disposer un réflecteur BIP métallique planaire au-dessous d'un monopole permettait d'améliorer le fonctionnement du dispositif et ce alors que monopole et réflecteur sont très proche l'un de l'autre ($\ll \lambda/4$). La présence d'un substrat BIP diélectrique sous une antenne patch a pour principal effet de réduire les effets d'onde de surface [32] ainsi que le niveau des lobes secondaires.

Les propriétés des matériaux BIP ont des intérêts au point de vue de la discrétion. Il est possible de réduire la SER [33] d'un aérien en couplant ce dernier avec un BIP métallique possédant des caractéristiques de transparence durant le temps d'émission ou de réception et des caractéristiques d'opacité durant le reste du temps.

D'autres études ont permis de réaliser des réflecteurs. La faisabilité d'un réflecteur, de forme parabolique à bande interdite photonique a été démontré [34] [35] (figure I-25). Il est composé d'un empilement d'« assiettes » diélectrique espacé de gap d'air. C'est le principe du miroir de Bragg. Ce dispositif, simple à réaliser, présente une meilleure sélectivité en fréquence comparé au réflecteur métallique. Ce type de parabole présente aussi un intérêt pour des applications militaires (furtivité radar).

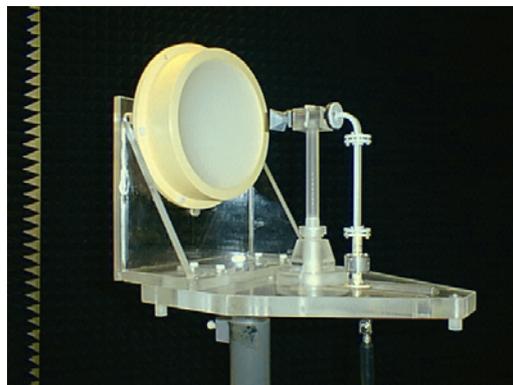


Figure I-25 : Réflecteur parabolique diélectrique en chambre de mesure

Des cristaux photoniques électriquement contrôlable peuvent être employés alternativement en tant que radômes actifs ou filtres spatiaux pour sélectionner des modèles de rayonnement des antennes. Des travaux ont été menés à bien en France dans cette direction.

A l'Université d'Orsay [36] un radome actif a été obtenu. Il est composé de deux plaques imprimées avec des diodes PIN soudées à intervalles réguliers le long de pistes métalliques parallèles. Le radôme est placé près de l'antenne planaire pour réduire les ondes de chaque côté de la structure et pour améliorer l'espacement entre le matériau BIP et de l'antenne. Quand les diodes sont passantes (cristal photonique en transmission), l'antenne est plus directive et un gain de 3 dB est obtenu vers l'avant. Quand les diodes sont non passantes (cristal photonique en réflexion), le rayonnement de l'antenne est atténué d'environ 30 dB dans la direction vers l'avant.

A l'Université de Rennes [37], des résultats expérimentaux ont été obtenus sur la commutation de faisceau. Une antenne dipolaire est directement implantée dans un matériau périodique 2D de tiges métalliques construit à partir d'un réseau carré. Des transistors à effet de champ (FET : Field Effect Transistor) sont utilisés. Suivant l'état des transistors (passants ou bloqués), le dipôle émet dans un ou deux guides d'ondes, changeant ainsi le rayonnement de la structure globale. Ces résultats sont très prometteurs pour le développement des antennes peu coûteuses.

IV- Les outils de simulation

Pour étudier les matériaux BIP, on trouve différents outils de simulation théorique basés sur différentes méthodes tels que : la méthode des moments, la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies dans le domaine temporel, la méthode des ondes planes, ...

Dans ce travail, nous nous restreignons à l'étude de deux méthodes pour analyser les matériaux à bande interdite photonique : la méthode des différences finies temporelles et la méthode des ondes planes. Nous rappelons alors le principe de ces deux méthodes.

IV.1- La méthode des différences finies temporelles

La méthode des différences finies temporelles (en anglais FDTD (Finite Difference in the Time Domain)) [38] est fondée sur le schéma explicite de Yee [39], présenté en 1966. Elle permet de calculer à chaque instant discret de l'espace, les composantes du champ électromagnétique dans chaque cellule parallélépipédique du volume tridimensionnel (figure I-26).

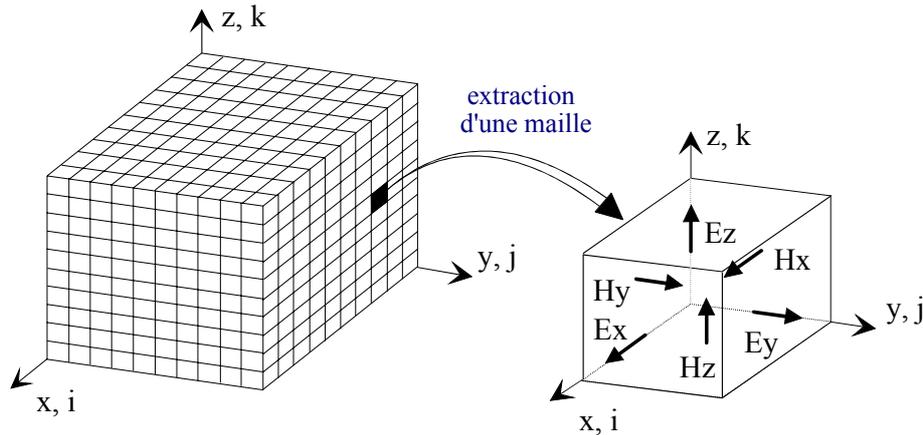


Figure I-26 : Décomposition spatiale du volume de calcul

Le principe fondamental de cette méthode est basé sur le principe des différences finies centrées. Il est schématisé sur la figure I-27 et explicité ci après dans le cas d'un phénomène unidimensionnel.

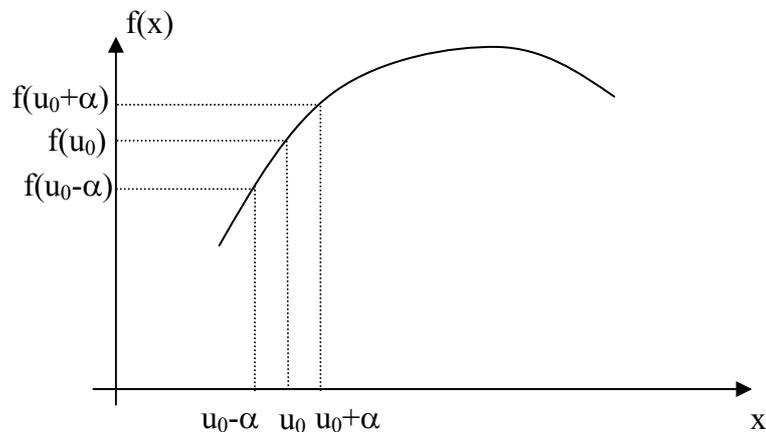


Figure I-27 : Calcul de la dérivée de $f(x)$ en u_0

Soit une fonction f continue et connue aux points $u_1=u_0-\alpha$ et $u_2=u_0+\alpha$, il est possible d'évaluer numériquement la dérivée de f en u_0 en utilisant les développements limités de Taylor aux points u_1 et u_2 .

$$f(u_0 - \alpha) = f(u_0) - \alpha \frac{\partial f}{\partial u}(u_0) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_0) - \dots + \frac{\alpha^i}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial u^i}(u_0) \quad (\text{I-31})$$

$$f(u_0 + \alpha) = f(u_0) + \alpha \frac{\partial f}{\partial u}(u_0) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_0) + \dots + \frac{\alpha^i}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial u^i}(u_0) \quad (\text{I-32})$$

En combinant ces développements limités de Taylor à droite (u_2) et à gauche (u_1) à l'ordre 2, la dérivée de f au point u_0 peut être approchée de manière centrée à l'ordre 2 comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0) = \frac{f(u_0 + \alpha) - f(u_0 - \alpha)}{2\alpha} + \theta(\alpha^2) \quad (\text{I-33})$$

Cette solution génère une erreur d'ordre 2 ($\theta(\alpha^2)$), beaucoup plus intéressante qu'une erreur d'ordre 1 (dans le cas d' « approximation à gauche » ou d' « approximation à droite »).

Cette méthode peut être appliquée à n'importe quel système physique et notamment à la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel qui font apparaître des différentiations à l'ordre 1 sur le temps et l'espace.

Les équations de Maxwell sont telles que :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{I-34})$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (\text{I-35})$$

Ainsi il est nécessaire de définir un pas d'incrémentation Δt pour discrétiser le temps et des pas spatiaux Δx , Δy et Δz pour réaliser un maillage de l'espace.

Le champ magnétique H est calculé au temps $(t+n.\Delta t)$, tandis que le champ électrique est calculé au temps $(t+1/2+n.\Delta t)$ (figure I-28). C'est-à-dire que les champs E sont calculés avec

un décalage d'une demi itération temporelle par rapport aux instants où sont calculés les champs H. Ainsi le principe des dérivées centrées est conservé.

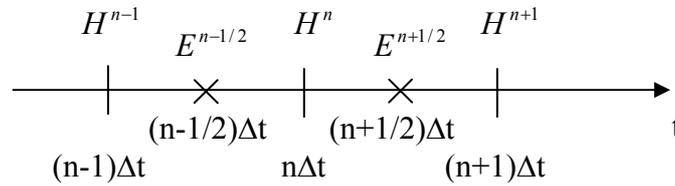


Figure I-28 : Décomposition numérique du calcul

Le calcul des composantes de champ est introduit dans un algorithme de calcul itératif temporel qui découle du schéma aux différences centrées. Les problèmes de stabilité des méthodes numériques explicites ont été analysés par Courant, Friedrich et Levy (CFL), à partir d'une approche mathématique rigoureuse. Taflove [40] a appliqué cette approche à la méthode FDTD.

Le critère CFL donné par l'inégalité I-36 permet de palier à la divergence des calculs engendré par l'approximation des dérivées.

$$\Delta t \leq \frac{1}{v \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (\text{I-36})$$

où $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ sont les dimensions de la maille FDTD

v est la vitesse de phase de l'onde dans le milieu

Δt est l'incrément temporel

Il est alors possible de donner l'algorithme de base du calcul FDTD qui se présente sous la forme indiquée à la figure I-29.

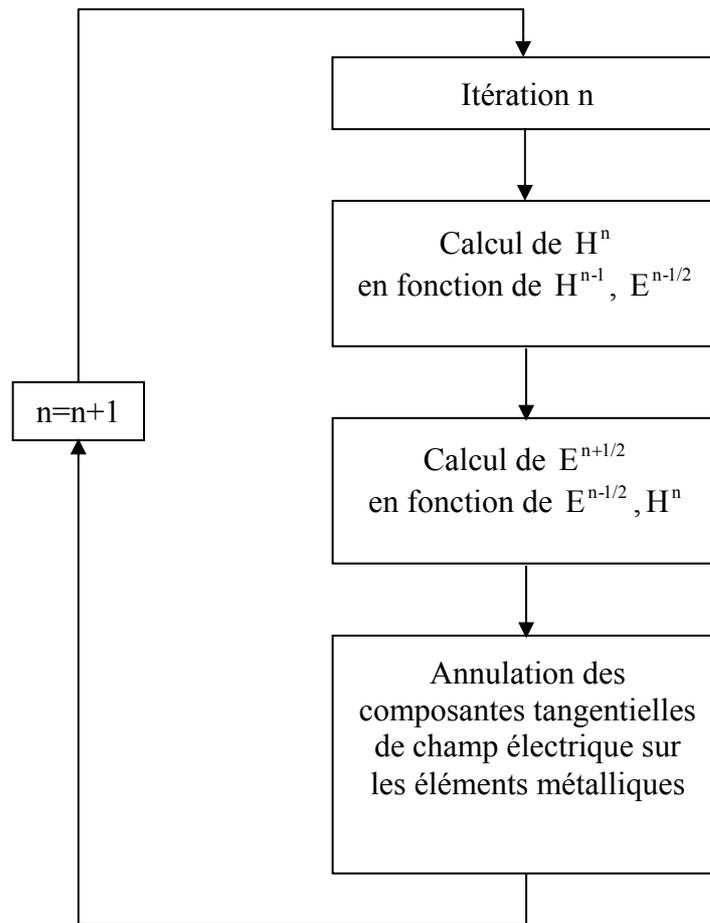


Figure I-29 : Algorithme de calcul des champs

Par la suite, des améliorations se sont rajoutés à cet algorithme de base, telles que des conditions absorbantes de types PML (Perfectly Matched Layer) [41] [42] permettant de simuler l'espace libre, l'intégration de sources de Huygens permettant de déduire le champ lointain dans une direction donnée pour l'étude des systèmes rayonnants.

IV.2- La méthode des ondes planes

La méthode des ondes planes est un outil numérique permettant de calculer les bandes de fréquences autorisées (ou interdites) des ondes électromagnétiques susceptibles de se propager dans le matériau considéré comme milieu propageant non borné et ceci pour n'importe quelle direction.

Cette méthode nous permet d'obtenir des diagrammes de dispersion comme présentée sur la figure I-30. Le cas utilisé est celui d'un cristal présentant deux ordres de périodicité. La structure est représentée en encadré sur la figure ci-dessous.

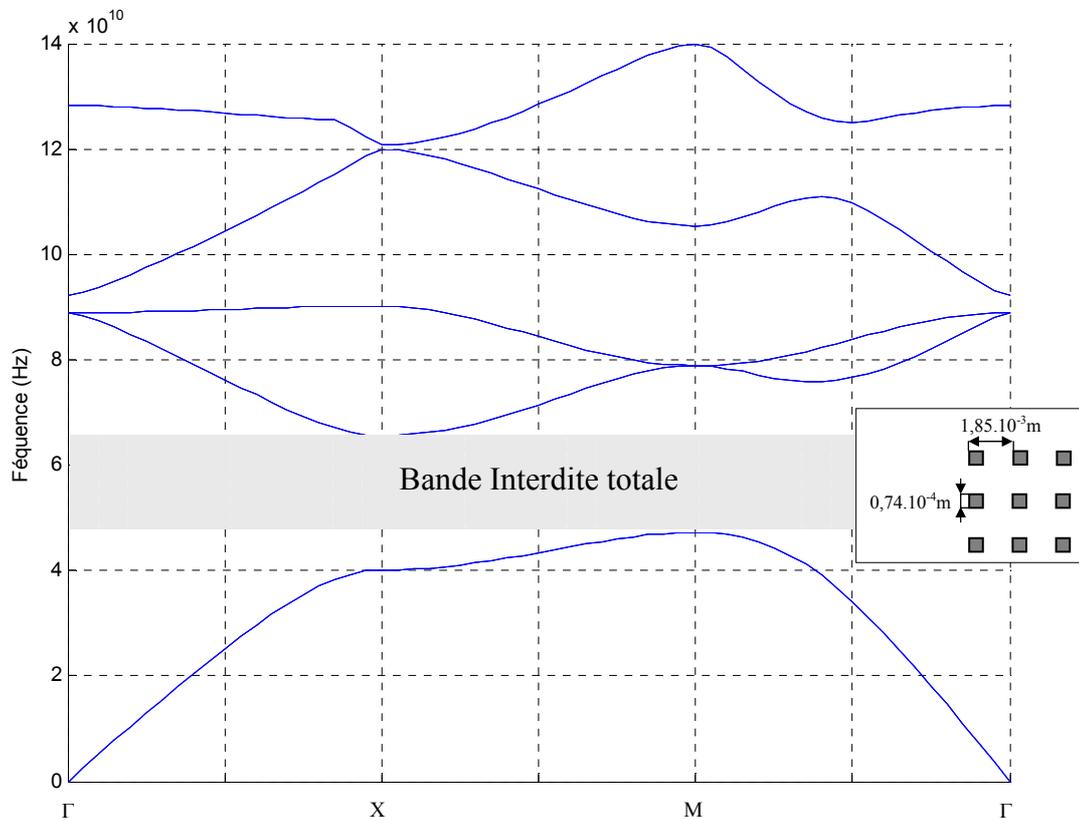


Figure I-30 : Diagramme de bande d'un cristal BIP 2D

Ce diagramme représente :

- en abscisse, le parcours fait par le vecteur d'onde lorsqu'il décrit le contour formé par les points de haute symétrie Γ , X, M de la première zone de Brillouin (figure I-31) [45]

- en ordonnée, la fréquence des modes calculés

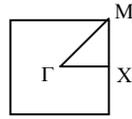


Figure I-31 : Première zone de Brillouin d'un réseau carré

Pour chaque vecteur d'onde du contour, il existe plusieurs fréquences correspondant aux différents modes de propagation susceptible de ce propager dans le cristal photonique. En fonction de ce calcul, nous pouvons alors déterminer la où les bandes interdites du matériau. En considérant toutes les directions possibles (définies par l'ensemble du contour de la première zone de Brillouin), nous pouvons alors avoir une bande interdite totale lorsque deux modes ne sont pas sécants (figure I-30). C'est cette bande de fréquence qui est caractéristique des matériaux à bande interdite photonique [43].

Cette méthode sera détaillée dans le chapitre II.

Conclusion

Les structures périodiques présentant des bandes interdites photoniques sont des matériaux récents. Un rappel historique, une description et un inventaire de ces matériaux périodiques ont permis une présentation de leurs différentes caractéristiques.

Grâce à l'étroite ressemblance entre l'équation de Schrödinger et l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans un espace à une ou deux dimensions, nous avons montré qu'un matériau diélectrique périodique peut posséder des bandes de fréquences qui interdisent la propagation des ondes électromagnétiques.

Ensuite, nous avons dressé un état de l'art et nous avons présenté des applications dans lesquelles sont utilisées les structures périodiques. Ceci nous a permis de mettre en évidence l'utilisation des matériaux à bande interdite photonique dans plusieurs domaines tels que l'optique, les circuits micro ondes, les antennes.

Finalement, deux méthodes numériques (méthode des différences finies temporelles et méthode des ondes planes) parmi plusieurs ont été décrites. Ce sont ces deux méthodes numériques qui ont permis l'obtention des divers résultats qui sont donnés dans la suite de cette thèse.

CHAPITRE II

Etude de matériaux BIP infinis à deux dimensions

Chapitre II

Introduction

Les réalisations utilisant des matériaux à bande interdite photonique sont des structures de dimensions finies. Pour déterminer les paramètres propres de ces cristaux périodiques, nous devons considérer ces structures comme ayant des dimensions infinies.

Dans ce chapitre, l'étude sera faite sur des matériaux à deux ordres de périodicité et infinis.

Dans un premier temps, la méthode des ondes planes est présentée. Cette méthode est utilisée pour analyser les propriétés dispersives des matériaux BIP. Le matériau est considéré non borné. Il est vu comme un milieu de propagation.

Grâce à cette méthode, il est possible de représenter le diagramme de bande.

Une décomposition en onde plane du problème électromagnétique peut également permettre de calculer les surfaces de dispersion des cristaux photoniques. Ces surfaces (pour les matériaux 3D), ou contours (pour les matériaux 2D) sont définis par la longueur du vecteur d'onde \vec{k} en fonction de la direction de propagation. Elles traduisent l'anisotropie électromagnétique du matériau et elles sont différentes pour chaque fréquence étudiée.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons également à l'étude des matériaux à bande interdite photonique à défauts.

I- La méthode des ondes planes

Le problème électromagnétique que nous considérons est construit sur un réseau à deux dimensions. Il est décrit par l'équation d'onde (II-1) d'un champ électromagnétique $\vec{E}(r)$ dans un milieu sans perte de permittivité électrique $\varepsilon(r)$.

$$\nabla^2 \vec{E}(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(r) \vec{E}(r) \quad (\text{II-1})$$

Compte tenu de la périodicité de $\varepsilon(r)$, l'équation (II-1) se résout en décomposant la norme complexe $E(r)$ et $\varepsilon(r)$ en ondes planes, c'est-à-dire en série de Fourier spatiale. Nous pouvons décomposer le problème en série de Fourier spatiale car le milieu est périodique. Grâce au théorème de Bloch, nous pouvons écrire que la permittivité diélectrique est le produit d'une onde plane $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ par une fonction $u_k(\vec{r})$ qui a la périodicité du réseau cristallin. L'indice \mathbf{k} signale que la fonction $u_k(\vec{r})$ dépend du vecteur d'onde \mathbf{k} . Cela est connu sous le nom de fonctions de Bloch.

Avant de réaliser cette décomposition, nous avons cependant besoin de définir les éléments nécessaires à cette analyse, tels que le réseau réciproque et ses vecteurs \vec{G} ainsi que les zones de Brillouin.

I.1- Réseaux direct et réciproque à deux dimensions [44]

Pour réaliser la décomposition en série de Fourier spatiale du problème électromagnétique, il est nécessaire de définir une base de vecteurs orthogonaux aux vecteurs de base qui portent la périodicité du problème.

Considérons la structure périodique à deux dimensions représentée sur la figure II-1. Elle est formée de motifs identiques, disposés à égales distances les uns des autres sur les intersections formées par des parallèles aux droites Δ_1 et Δ_2 faisant entre elles un angle θ . Ces droites forment ainsi le réseau de la structure considérée qui est invariante par translation suivant la direction orthogonale au plan du réseau (Oxy).

Ce réseau est caractérisé par ses vecteurs de base \vec{d}_1 et \vec{d}_2 formant le **réseau direct**. Un nœud du réseau constituera l'origine O de notre repère. Les normes de \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont égales à la longueur d_1 entre deux nœuds consécutifs (appartenant à une même parallèle à la droite Δ_1), et à la longueur d_2 entre deux nœuds consécutifs (appartenant à une même parallèle à la droite Δ_2). Les longueurs d_1 et d_2 peuvent ne pas être identiques.

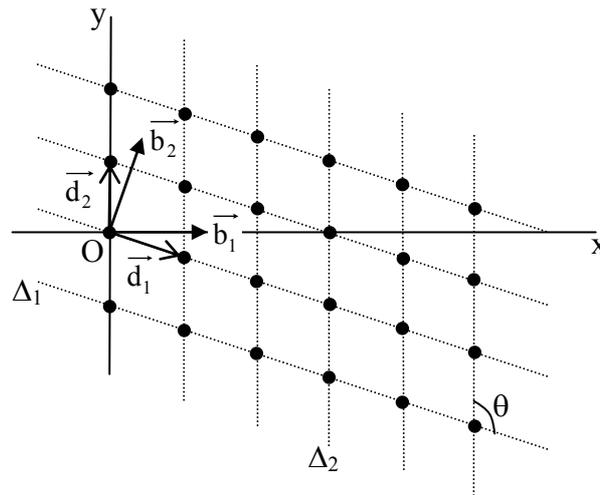


Figure II-1 : Structure périodique 2D, vecteurs de base des réseaux direct et réciproque

Tout nœud du réseau peut être défini et repéré par un vecteur $r_{l_1 l_2}$ ayant pour origine l'origine du réseau et pour extrémité le nœud considéré, ce vecteur a pour expression :

$$\vec{r}_{l_1 l_2} = l_1 \vec{d}_1 + l_2 \vec{d}_2 \quad (\text{II-2})$$

avec $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$

Tout l'espace direct peut être segmenté en mailles élémentaires. La maille élémentaire est obtenue grâce à la surface représentée par les vecteurs de base \vec{d}_1 et \vec{d}_2 ayant leurs origines en un même nœud.

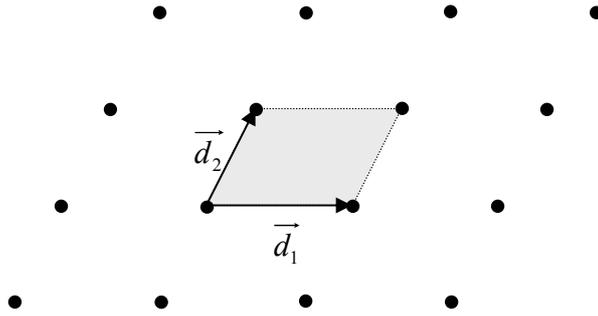


Figure II-2 : Maille élémentaire du réseau direct

Cette maille élémentaire n'est pas unique.

Nous pouvons aussi obtenir une maille élémentaire de même surface de la manière suivante : on trace les lignes qui relient un nœud donné à tous ses voisins, puis on trace les médiatrices de ces segments. Le plus petit volume enclos de cette façon est la maille élémentaire de Wigner-Seitz [45] comme le montre la figure II-3. Tout l'espace peut aussi être rempli par ces mailles.

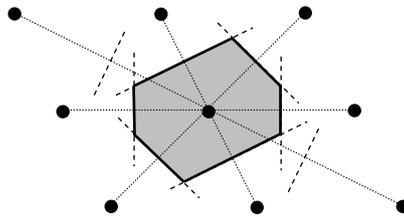


Figure II-3 : Maille élémentaire de Wigner-Seitz du réseau direct

A tout réseau direct, on peut faire correspondre un réseau réciproque ayant un système de base constitué par deux vecteurs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 définis par le produit scalaire suivant :

$$\left(\vec{b}_i \cdot \vec{d}_k\right) = \delta_{ik} \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

avec δ_{ik} représentant le symbole de Kronecker

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

Il est possible d'expliquer l'emploi du terme « réseau réciproque », par un calcul simple, en prenant deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy ayant comme origine l'origine O du réseau, alors les vecteurs \vec{d}_1 et \vec{d}_2 peuvent être définis sous forme matricielle par :

$$D = \begin{pmatrix} d_{1x} & d_{1y} \\ d_{2x} & d_{2y} \end{pmatrix} \quad (\text{II-5})$$

De même, le système de base du réseau réciproque peut être défini par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} b_{1x} & b_{2x} \\ b_{1y} & b_{2y} \end{pmatrix} \quad (\text{II-6})$$

Les indices des éléments de cette dernière devant être les transposés de ceux des éléments de la matrice D, puisque si \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont considérés comme des vecteurs lignes, \vec{b}_1 et \vec{b}_2 doivent être considérés comme des vecteurs colonnes en raison de la manière dont ils ont été définis par la relation II-3. Il apparaît alors immédiatement que les matrices D et B sont inverses, et on a alors :

$$D.B = \begin{pmatrix} (\vec{d}_1 \cdot \vec{b}_1) & (\vec{d}_1 \cdot \vec{b}_2) \\ (\vec{d}_2 \cdot \vec{b}_1) & (\vec{d}_2 \cdot \vec{b}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_d \quad (\text{II-7})$$

avec I_d représentant la matrice unité.

Ansî,

$$\boxed{B = D^{-1}} \quad (\text{II-8})$$

Telle est l'origine du terme **réseau réciproque**.

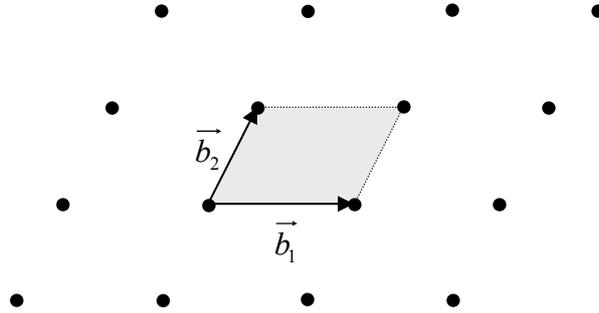


Figure II-4 : Maille élémentaire d'un réseau réciproque

I.2- Zones de Brillouin

Nous allons maintenant définir une notion de zones dans le réseau réciproque. Nous allons montrer que, grâce au réseau réciproque, la fréquence est une fonction périodique du nombre d'ondes.

Considérons une onde plane se propageant dans un milieu à deux dimensions défini dans un repère orthonormé (Oxy). Elle sera de la forme :

$$\begin{aligned}\Psi &= A e^{j(\omega t - 2\pi(\vec{a} \cdot \vec{r}))} \\ &= A e^{j(\omega t - 2\pi a_1 x - 2\pi a_2 y)}\end{aligned}\tag{II-9}$$

où $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne une position dans le réseau direct et $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ définit la direction de propagation, c'est un vecteur du réseau réciproque. La grandeur de $\|\vec{a}\|$ est inversement proportionnelle à la longueur d'onde ($\|\vec{a}\| = \frac{1}{\lambda}$).

Dans une structure cristalline, intéressons nous à la fonction Ψ en chaque nœud du réseau direct, c'est-à-dire aux points définis par le vecteur $\vec{r}_{l_1 l_2} = l_1 \vec{d}_1 + l_2 \vec{d}_2$. Ainsi, comme l_1 et l_2 sont des entiers, nous aurons :

$$\begin{aligned} 2\pi(\vec{a} \cdot \vec{r}_{l_1 l_2}) &= 2\pi(\vec{a} \cdot l_1 \vec{d}_1) + 2\pi(\vec{a} \cdot l_2 \vec{d}_2) \\ &= l_1 k_1 + l_2 k_2 \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

avec $k_1 = 2\pi(\vec{a} \cdot \vec{d}_1)$ et $k_2 = 2\pi(\vec{a} \cdot \vec{d}_2)$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

L'expression II-9 prend alors la forme :

$$\Psi = A e^{j(\omega t - k_1 l_1 - k_2 l_2)} \quad (\text{II-11})$$

Si on s'intéresse à présent à un autre vecteur du réseau réciproque :

$$\vec{a}' = \vec{a} + m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 \quad (\text{II-12})$$

\vec{a}' définit alors une direction de propagation différente de \vec{a} .

Alors on peut écrire :

$$\Psi' = A e^{j(\omega t - 2\pi(\vec{a}' \cdot \vec{r}))} = A e^{j(\omega t - k_1 l_1 - k_2 l_2 + (m_1 + m_2) 2\pi)} = \Psi \quad (\text{II-13})$$

Ce résultat montre que la fréquence des ondes dans un réseau à deux dimensions est une fonction périodique du vecteur \vec{a} dans le réseau réciproque rapporté aux vecteurs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 .

Nous pouvons mettre en évidence que la plus petite aire issue de ces vecteurs \vec{a} est une zone fondamentale qui s'appelle la *première zone de Brillouin*.

Pour construire cette zone, nous plaçons au centre de la cellule l'origine O du réseau réciproque. Nous traçons un nombre suffisant de vecteurs joignant l'origine aux noeuds voisins de ce même réseau. Nous construisons ensuite les médiatrices de ces vecteurs.

La plus petite aire interceptée par ces médiatrices est la première zone de Brillouin. La figure II-5 en donne un exemple.

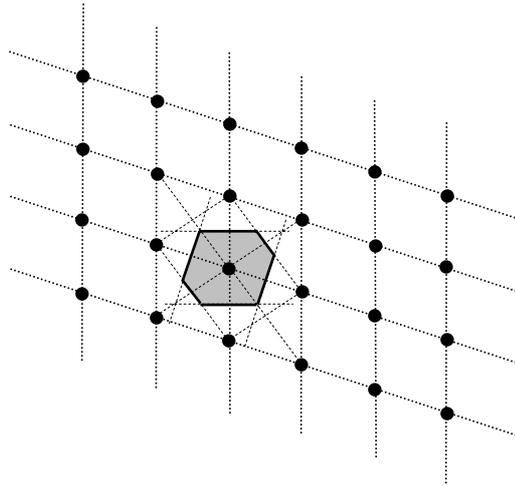


Figure II-5 : Construction de la première zone de Brillouin défini dans réseau réciproque

I.3- Condition de diffraction

Considérons la fonction d'espace $n(\vec{r})$ qui rend compte de la distribution diélectrique périodique du cristal BIP. Cette fonction est invariante par translation dans le matériau.

Les nœuds du réseau cristallin du réseau direct sont repérés par le vecteur position

$$\vec{r} = l_1 \vec{d}_1 + l_2 \vec{d}_2 .$$

Alors on peut écrire que :

$$n(\vec{r} + \vec{T}) = n(\vec{r}), \quad (\text{II-14})$$

avec $\vec{T} = \xi_1 \vec{d}_1 + \xi_2 \vec{d}_2$: vecteur translation cristalline

$n(\vec{r})$ est une fonction périodique alors il est possible de la décomposer en série de Fourier. On obtient :

$$n(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} n_{h_1 h_2} e^{2i\pi(h_1.l_1 + h_2.l_2)} \quad (\text{II-15})$$

où $\vec{h} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2$ dans le réseau réciproque avec $(h_1, h_2) \in N^2$.

Par commodité, on pose :

$$\vec{G}_{h_1 h_2} = 2\pi \vec{h} = 2\pi (h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2), \quad (\text{II-16})$$

et tout vecteur $\vec{G}_{h_1 h_2}$ défini par la relation II-16 est appelé vecteur du réseau réciproque.

L'ensemble des vecteurs $\vec{G}_{h_1 h_2}$ définit la base orthogonale des vecteurs utilisés pour la décomposition en série de Fourier.

Etant donné la définition des vecteurs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 du réseau réciproque (relation II-3), il vient :

$$n(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} n_{\vec{G}} e^{i \vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-17})$$

Considérons le cas d'une onde plane se propageant dans une direction \vec{k} . Cette onde rencontre deux volumes élémentaires distant de \vec{r} . Considérons une onde diffractée dans une direction \vec{k}' , comme le montre la figure II-6.

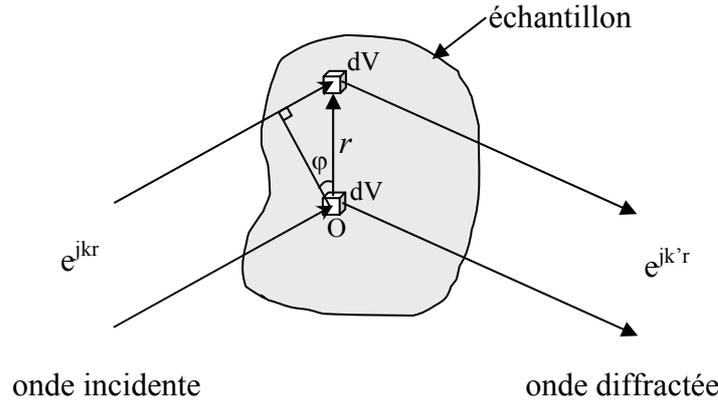


Figure II-6 : Diffraction d'une onde incidente sur deux volumes élémentaires

La différence de phase de l'onde diffusée par le volume dV situé en R a un facteur de phase $e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}$ par rapport à l'onde diffusée par le volume élémentaire situé à l'origine O .

On note $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}'$ le vecteur de diffusion. Il mesure la variation du vecteur d'onde lors de la diffusion.

L'amplitude de l'onde diffusée dans la direction \vec{k}' est proportionnelle à l'intégrale étendue à tout le cristal de la quantité $n(\vec{r})dV$ multiplié par le facteur de phase $e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}$:

$$A = \int n(\vec{r}) e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}} dV \quad (\text{II-18})$$

Nous introduisons les composantes de Fourier de $n(\vec{r})$ dans l'équation précédente pour obtenir :

$$A = \sum_{\vec{G}_{h_1h_2}} \int n_{\vec{G}} e^{i(\vec{G}_{h_1h_2} - \Delta\vec{k})\cdot\vec{r}} dV \quad (\text{II-19})$$

Quand le vecteur de diffusion $\Delta\vec{k}$ est égal à un vecteur \vec{G} du réseau réciproque, l'argument de l'exponentielle s'annule et $A = V \cdot n_{\vec{G}}$.

Il peut être montré que A est négligeable quand $\Delta\vec{k}$ diffère de façon significative de tout vecteur \vec{G} du réseau réciproque [46] :

$$\Delta\vec{k} = \vec{G} \Rightarrow \vec{k}' + \vec{G} = \vec{k} \quad (\text{II-20})$$

Lors d'une diffusion élastique, les vecteurs \vec{k} et \vec{k}' ont des amplitudes égales. Alors :

$$\|\vec{k}'\|^2 = \|\vec{k}\|^2 \quad (\text{II-21})$$

De l'équation (II-20), nous pouvons écrire $(\vec{k}' + \vec{G})^2 = k^2$.

En associant l'équation (II-21) au résultat précédent, il vient :

$$\boxed{2\vec{k}' \cdot \vec{G} + \vec{G}^2 = 0} \quad (\text{II-22})$$

C'est le résultat central de la théorie de la diffusion élastique par un réseau périodique.

Remarquons que si \vec{G} est un vecteur du réseau réciproque, $-\vec{G}$ aussi ; nous pouvons également écrire l'équation II-22 sous la forme :

$$2\vec{k}' \cdot \vec{G} = -\vec{G}^2 \quad (\text{II-23})$$

Construisons le plan perpendiculaire au vecteur \vec{G} en son milieu ; tout vecteur \vec{k}' mené de l'origine à ce plan satisfera à la condition de diffraction. Le plan ainsi décrit forme une partie de la frontière de la zone de Brillouin (figure II-7).

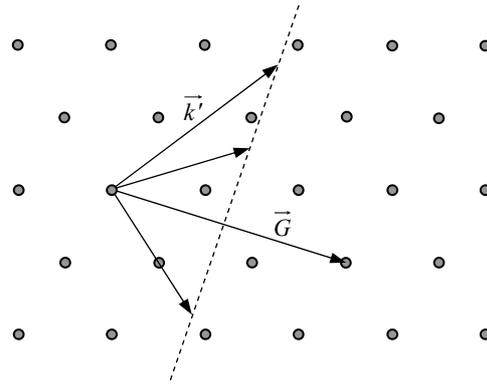


Figure II-7 : Interprétation géométrique dans l'espace réciproque de la condition de diffraction

Nous pouvons donner une interprétation géométrique claire de cette condition de diffraction. Nous allons nous appuyer sur la figure II-8. Cette figure s'obtient en considérant simultanément les relations (II-20), (II-21) et (II-23).

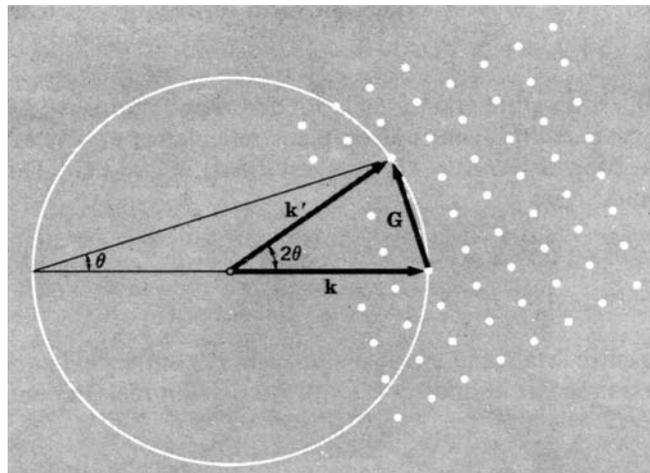


Figure II-8 : Construction géométrique de la condition de diffraction

Les points de la partie droite de la figure II-8 sont des nœuds du réseau réciproque du cristal photonique. Le vecteur k est tracé parallèlement au faisceau incident de rayon X et on place son extrémité en un point du réseau réciproque. On trace une sphère de rayon $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ centrée en l'origine de k . On obtiendra un rayon diffracté chaque fois que la sphère contiendra un autre point du réseau réciproque. La sphère tracée ici intercepte un point relié à l'extrémité de

k par le vecteur réciproque \vec{G} . Le faisceau diffracté est parallèle à $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{G}$. En translatant la sphère, celle-ci pourra intercepter deux autres nœuds du réseau réciproque, définissant ainsi un autre vecteur \vec{G} qui, associé à la relation (II-20) fournira un autre vecteur phaseur \vec{k}' . Ce second résultat précise une autre direction de diffraction, et ainsi de suite.

Cette construction est due à P.P. Ewald, d'où le nom de sphère d'Ewald [46].

II- Diagramme de bande

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les matériaux bip à deux dimensions, dans lesquels peuvent se propager les ondes électromagnétiques suivant deux polarisations (figure II-9) :

- polarisation TM lorsque le champ électrique est parallèle à l'axe des tiges
- polarisation TE lorsque le champ magnétique est parallèle à l'axe des tiges

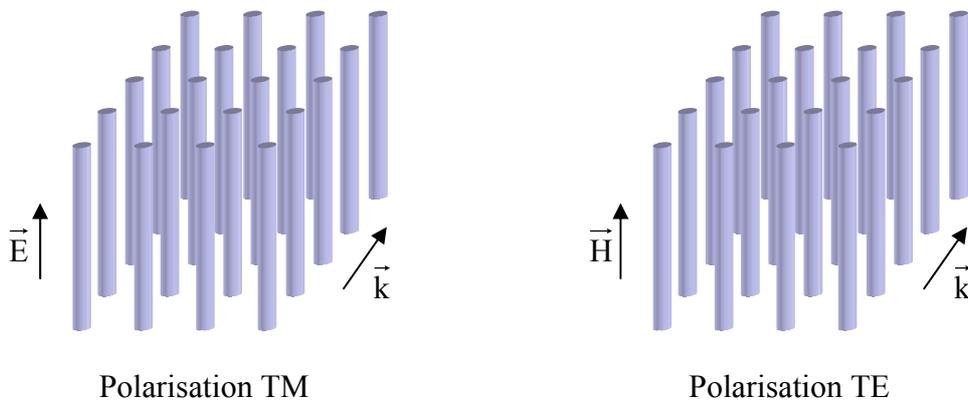


Figure II-9 : Polarisations possible dans une structure bip 2D : TM et TE

Dans un premier temps, nous allons faire l'étude théorique des deux polarisations précédemment citées, puis nous appliquerons la polarisation TM à un réseau carré et la polarisation TE à un réseau triangulaire en vue d'obtenir les diagrammes de bande respectifs. Nous considérons dans chacun des cas le champ défini suivant une seule composante dans un repère cartésien, à savoir la composante E_z pour le mode TM et H_z pour le mode TE.

II.1- Etude électromagnétique pour un mode TM

On considère une onde polarisée TM se propageant dans un plan (O,x,y) ayant comme champ électrique en un point $\vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la forme :

$$E_z(\vec{r}) = E_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-24})$$

L'équation II-24 peut aussi s'écrire :

$$E_z(x, y) = E_{k_x, k_y}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} \quad (\text{II-25})$$

où k_x et k_y sont les composantes suivant x et y du vecteur d'onde \vec{k} .

Pour une onde se propageant dans le matériau BIP, étant donnée la relation II-25 et la condition de Bloch, l'amplitude complexe $E_{k_x, k_y}(x, y)$ est une fonction périodique du plan. Nous avons vu à la partie précédente qu'il était intéressant de développer cette fonction en série de Fourier spatiale en utilisant les vecteurs du réseau réciproque comme base de développement.

Ainsi, si \vec{b}_1 et \vec{b}_2 constituent les vecteurs de base du réseau réciproque, on définit la famille \vec{G} des vecteurs d'onde dans ce même réseau par :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{G}_{h_1 h_2} = 2\pi \vec{h} \\ \vec{h} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2 \end{array} \right\} \vec{G}_{h_1 h_2} = 2\pi h_1 \vec{b}_1 + 2\pi h_2 \vec{b}_2 \quad (\text{II-26})$$

avec $(h_1, h_2) \in \mathbb{N}^2$

Ainsi toutes les fonctions spatialement périodiques du réseau plan sont décomposées en série de Fourier spatiale :

- Amplitude complexe de l'onde plane :

$$E_{k_x, k_y}(x, y) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} E_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{\vec{k}} e^{j \vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-27})$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{G}_{h_1 h_2} &= h_1 2\pi \vec{b}_1 + h_2 2\pi \vec{b}_2 \\ &= G_{x_{h_1 h_2}} \vec{i} + G_{y_{h_1 h_2}} \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$

où h_1 h_2 sont deux entiers, et \vec{i} et \vec{j} sont les vecteurs de base du plan $(0, x, y)$.

Cette décomposition est appelée « décomposition en ondes planes ».

- Distribution périodique de la permittivité :

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} e^{j \vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} + \varepsilon_f \quad (\text{II-29})$$

avec

$$\varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} = \frac{1}{S_d} \iint_{x, y} [\varepsilon(x, y) - \varepsilon_f] e^{-j \vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} \partial x \partial y \quad (\text{II-30})$$

où S_d représente l'aire de la cellule du réseau direct et ε_f est la permittivité du milieu diélectrique dans lesquels sont réparties les inhomogénéités diélectriques.

Cette décomposition est appliquée à chaque composante de champs et à la distribution de la permittivité pour résoudre le problème électromagnétique de la propagation des ondes dans les milieux périodiques.

Les relations de Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = j \omega \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II-31})$$

et de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j \omega \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II-32})$$

nous permettent d'écrire que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon(x, y) \vec{E} \quad (\text{II-33})$$

où ε_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide.

Or nous avons les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \quad (\text{II-34})$$

et l'équation de la divergence du champ \vec{E}

$$\text{div}\vec{E} = 0. \quad (\text{II-35})$$

Alors il est possible d'écrire que :

$$-\Delta\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(x, y) \vec{E} \quad (\text{II-36})$$

avec $\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$ (c : célérité du vide).

Nous pouvons alors écrire l'équation d'Helmholtz pour une onde polarisée TM dans le repère orthogonal (O,x,y) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon(x, y) - \varepsilon_f] E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_f E_z \quad (\text{II-37})$$

En décomposant en onde plane (comme indiqué dans le début du paragraphe) les termes de gauche et de droite de l'égalité II-37 et après simplification (suppression de la double somme en h_1 h_2 ainsi que l'exponentielle [43]), on obtient :

$$\left(\left| G_{x_{h_1 h_2}} + k_x \right|^2 + \left| G_{y_{h_1 h_2}} + k_y \right|^2 \right) E_{\bar{G}_{h_1 h_2}}^{k_x, k_y} \frac{c^2}{\omega^2} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\varepsilon_f \delta_{h_1 h'_1} \delta_{h_2 h'_2} + \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1 - h'_1), (h_2 - h'_2)}} E_{\bar{G}_{h_1 h'_2}}^{k_x, k_y} \right] \quad (\text{II-38})$$

$$\text{avec } \delta_{h_i h'_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i \neq h'_i \\ 1 & \text{si } h_i = h'_i \end{cases}.$$

Sous forme matricielle, cette relation devient :

$$\frac{c^2}{\omega^2} (I_d) \left(E_{\bar{G}_{h_1 h_2}} \right) = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_f \delta_{h_1 h'_1} \delta_{h_2 h'_2} + \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1 - h'_1), (h_2 - h'_2)}}}{\left| G_{x_{h_1 h_2}} + k_x \right|^2 + \left| G_{y_{h_1 h_2}} + k_y \right|^2} \right)}_A \left(E_{\bar{G}_{h_1 h_2}} \right) \quad (\text{II-39})$$

Ce résultat nous permet d'obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique en réalisant une recherche de valeurs propres de la matrice A de l'équation II-39.

II.2- Etude électromagnétique pour un mode TE

En considérant une onde polarisée TE se propageant dans un plan (O,x,y) et d'après les relations de Maxwell II-31 et II-32, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = j \omega \varepsilon_0 \varepsilon(x, y) \vec{E} \quad (\text{II-40})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\varepsilon(x, y)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \right) = j \omega \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II-41})$$

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\varepsilon(x, y)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \quad (\text{II-42})$$

$$\text{avec } \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0.$$

En posant $f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(x, y)}$, on a :

$$\overrightarrow{rot}[f(x, y)\overrightarrow{rot}\vec{H}] = f(x, y)\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{H}) + \overrightarrow{grad}(f(x, y)) \wedge \overrightarrow{rot}\vec{H} \quad (\text{II-43})$$

Or nous avons les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{H}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \\ \text{div}\vec{H} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{H}) = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} = \Delta \vec{H} \end{array} \right\} \text{ donc } \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{H}) = -\Delta \vec{H} \quad (\text{II-44})$$

D'où la relation II-42 devient :

$$-f(x, y)\Delta \vec{H} + \overrightarrow{grad}[f(x, y)] \wedge \overrightarrow{rot}\vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \quad (\text{II-45})$$

En prenant chaque terme de l'équation II-45, nous pouvons les développer en série de Fourier. Nous considérons toujours comme base de développement les vecteurs du réseau réciproque \vec{b}_1 et \vec{b}_2 .

Le champ H est défini suivant une seule composante, alors $\vec{H} = H_z \vec{u}$, il vient :

$$-f(x, y)\Delta \vec{H} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\sum_{h'_1} \sum_{h'_2} f_{\vec{G}(h_1 h_1), (h_2 - h'_2)} H_{\vec{G} h_1 h_2}^{k_x k_y} \left(|G_{x h_1 h_2} + k_x|^2 + |G_{y h_1 h_2} + k_y|^2 \right) \right] e^{j[(G_{x h_1 h_2} + k_x)x + (G_{y h_1 h_2} + k_y)y]} \quad (\text{II-46})$$

$$\overrightarrow{grad} f(x, y) \wedge \overrightarrow{rot}\vec{H} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\sum_{h'_1} \sum_{h'_2} f_{\vec{G}(h_1 - h'_1), (h_2 - h'_2)} H_{\vec{G} h_1 h_2}^{k_x k_y} \left((G_{x h_1 h_2} + k_x) G_{x(h_1 - h'_1), (h_2 - h'_2)} + (G_{y h_1 h_2} + k_y) G_{y(h_1 - h'_1), (h_2 - h'_2)} \right) \right] e^{j[(G_{x h_1 h_2} + k_x)x + (G_{y h_1 h_2} + k_y)y]} \quad (\text{II-47})$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{h_1} \sum_{h_2} H_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + (G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y]} \quad (\text{II-48})$$

La relation II-45 se simplifie en utilisant les équations II-46, II-47 et II-48, et en supprimant la double somme sur h_1 et h_2 ainsi que l'exponentielle dans chaque membre de l'équation II-45 [43].

Nous obtenons alors sous forme matricielle :

$$\frac{\omega^2}{c^2} (I_d) \left(H_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} \right) = f_{\vec{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} \underbrace{\left(k_x^2 + k_x \cdot G_{x_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} + G_{x_{h_1 h_2}} \cdot G_{x_{h_1 h_2}} + k_y^2 + k_y \cdot G_{y_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} + G_{y_{h_1 h_2}} \cdot G_{y_{h_1 h_2}} \right)}_{\text{B}} \left(H_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} \right) \quad (\text{II-49})$$

Une recherche de valeurs propres dans la matrice B de l'équation II-49 nous donne les valeurs $\frac{\omega^2}{c^2}$ possibles. Elles correspondent aux fréquences autorisées à se propager dans le matériau photonique pour un couple $(k_x; k_y)$ donné.

II.3- Exemple de diagramme de bande

II.3.1- Diagramme de bande pour une onde polarisée TM

Nous considérons le cas d'une onde polarisée TM. Nous avons démontré précédemment que l'équation de propagation décomposée en ondes planes dans une base de vecteurs du réseau réciproque était de la forme :

$$\frac{c^2}{\omega^2} (I_d) \left(E_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^- \right) = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_f \delta_{h_1 h'_1} \delta_{h_2 h'_2} + \varepsilon_{\vec{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}}^-}{|G_{x_{h_1 h_2}} + k_x|^2 + |G_{y_{h_1 h_2}} + k_y|^2} \right)}_{\text{A}} \left(E_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^- \right) \quad (\text{II-39})$$

L'équation II-39 est de la forme $\left(A - \frac{c^2}{\omega^2} I_d\right)E = 0$. Dire que $\frac{c^2}{\omega^2}$ est valeur propre de A signifie qu'il existe un vecteur E, non nul, tel que $\left(A - \frac{c^2}{\omega^2} I_d\right)E = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\det\left(A - \frac{c^2}{\omega^2} I_d\right) = 0 \quad (\text{II-50})$$

Pour obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique, on réalise une recherche des valeurs propres de la matrice A de l'équation II-39. Celles-ci nous permettront de fournir les valeurs $\frac{c^2}{\omega^2}$ possibles.

Le diagramme de bande sera obtenu en faisant balayer au vecteur phaseur $(k_x; k_y)$ l'ensemble des directions de l'espace et en résolvant II-39 pour chaque couple $(k_x; k_y)$. En théorie, il suffit que le vecteur \vec{k} balaye un secteur défini par le contour de la première zone de Brillouin pour obtenir toutes les informations nécessaires au tracé du diagramme de bandes.

- Exemple d'un réseau carré :

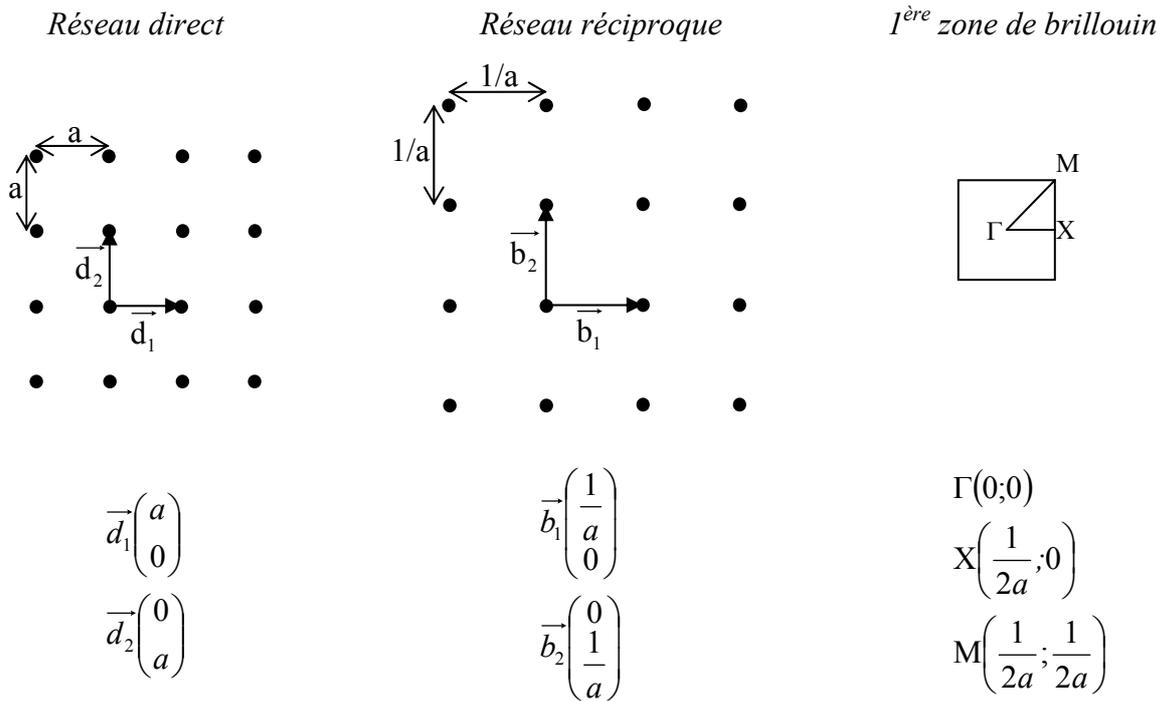


Figure II-10 : Représentation des réseaux direct et réciproque, et de la première zone de Brillouin d'une structure photonique 2D.

La première zone de Brillouin du réseau carré ci-dessus est définie dans le réseau réciproque. Elle est représentée sur la figure II-10. Les points remarquables de cette zone sont les points de haute symétrie Γ , X et M.

Pour obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique, nous faisons balayer au vecteur d'onde $(k_x; k_y)$, le contour défini par les points de haute symétrie de la première zone de Brillouin.

Les représentations des réseaux direct et réciproque sont schématisées sur la figure II-10.

Nous proposons l'étude d'un matériau infini structuré sur la base d'un réseau carré de tiges carrées présenté sur la figure II-11. Le pas a du réseau est de 1,85 mm et les tiges carrées ont un côté égal à 0,74 mm et une permittivité de $\epsilon_r=9,8$. Ces tiges sont entourées d'air ($\epsilon_{air}=1$).

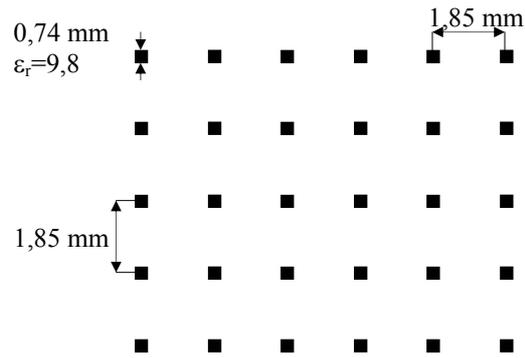


Figure II-11 : Structure photonique infinie étudiée

En théorie, la décomposition en ondes planes utilisant le principe de la série de Fourier fait intervenir une infinité de vecteurs \vec{G} . Dans le cas concret étudié, le problème est tronqué à un nombre fini de vecteurs \vec{G} et les valeurs propres fournissent les fréquences autorisées avec une précision qui dépend du nombre de coefficient de Fourier.

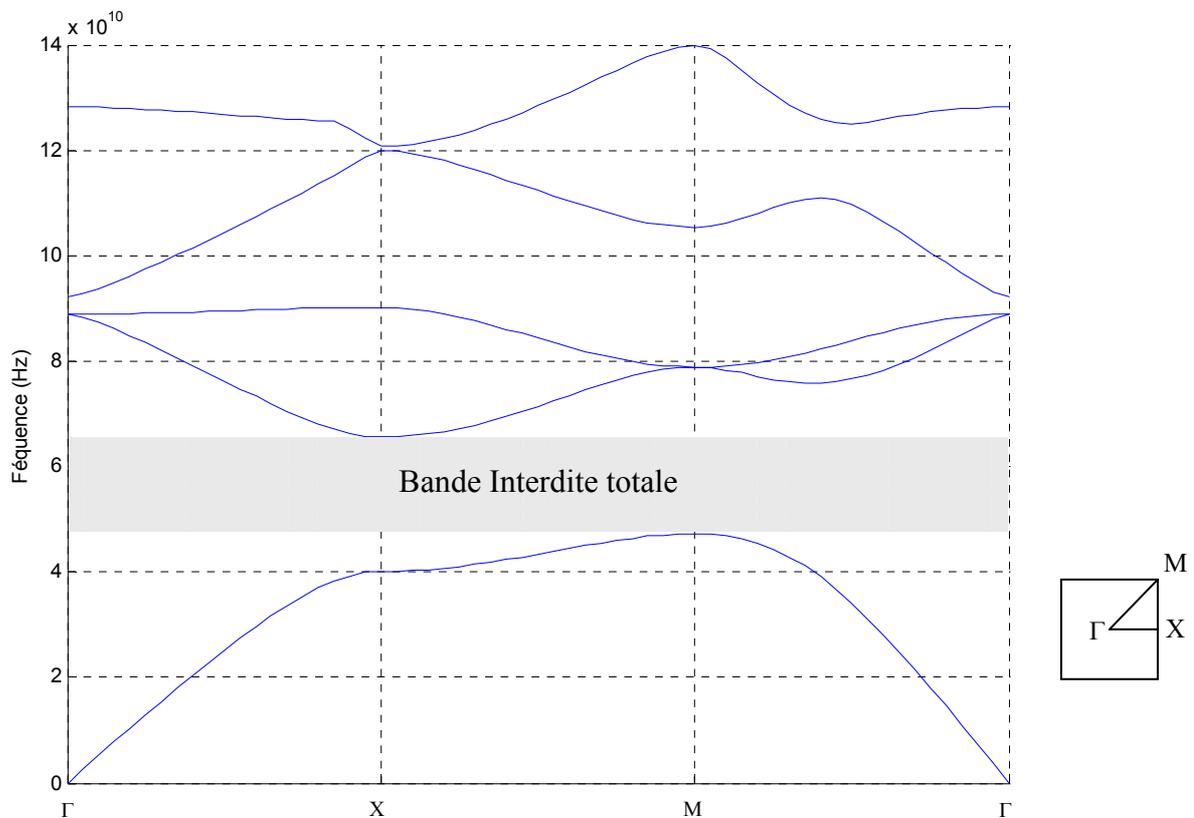


Figure II-12 : Diagramme de bande d'un matériau 2D excité par une onde polarisée TM

La structure de bande fait apparaître une bande interdite totale, c'est-à-dire pour une incidence quelconque de l'onde électromagnétique, aucune onde ne pourra se propager entre 47,1 GHz et 65,6 GHz.

II.3.2- Diagramme de bande pour une onde polarisée TE

Nous considérons le cas d'une onde polarisée TE. Nous avons démontré que l'équation de propagation décomposée en ondes planes dans une base de vecteurs du réseau réciproque était de la forme :

$$\frac{\omega^2}{c^2} (I_d) \left(H_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} \right) = f_{\vec{G}(h_1-h_1', h_2-h_2')} \left(\underbrace{\left(k_x^2 + k_x \cdot G_{x(h_1-h_1'), (h_2-h_2')} + G_{x_{h_1 h_2}} \cdot G_{x_{h_1 h_2}} + k_y^2 + k_y \cdot G_{y(h_1-h_1'), (h_2-h_2')} + G_{y_{h_1 h_2}} \cdot G_{y_{h_1 h_2}} \right)}_B \right) \left(H_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} \right) \quad (\text{II-49})$$

L'équation II-49 est de la forme $\left(B - \frac{\omega^2}{c^2} I_d \right) H = 0$. Dire que $\frac{\omega^2}{c^2}$ est valeur propre de

B signifie qu'il existe un vecteur H, non nul, tel que $\left(B - \frac{\omega^2}{c^2} I_d \right) H = 0$, ce qui est équivalent

à :

$$\det \left(B - \frac{\omega^2}{c^2} I_d \right) = 0 \quad (\text{II-51})$$

Pour obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique, on réalise une recherche des valeurs propres de la matrice B de l'équation II-49. Celles-ci nous permettront de fournir les valeurs $\frac{\omega^2}{c^2}$ possibles.

- Exemple d'un réseau triangulaire :

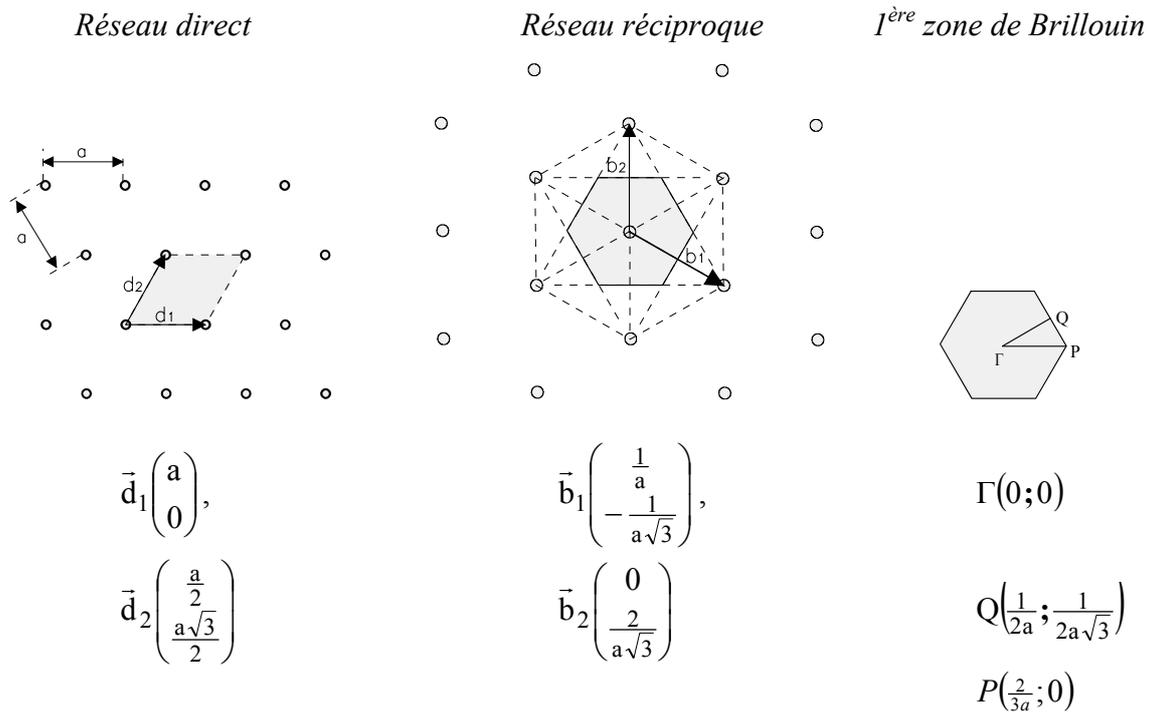


Figure II-13 : Réseaux direct et réciproque, et première zone de Brillouin d'une structure photonique 2D

La figure II-13 représente d'une part les réseaux direct et réciproque, et d'autre part la première zone de Brillouin du réseau triangulaire qui est définie dans le réseau réciproque. Les points remarquables de cette zone sont les points de haute symétrie Γ , P et Q.

Pour obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique, nous faisons balayer au vecteur d'onde $(k_x; k_y)$ le contour défini par les points de haute symétrie de la première zone de Brillouin.

La figure II-13 représente le matériau infini utilisé pour réaliser le diagramme de bande. Il est structuré sur la base d'un réseau triangulaire de tiges à section circulaire. Le pas a du réseau est de 1,85 mm et les tiges de section circulaire ont un rayon égal à 0,74 mm et une permittivité de $\epsilon_r=19$. Ces tiges sont entourées d'air ($\epsilon_{air}=1$).

Nous obtenons alors le diagramme de bande ci-dessous.

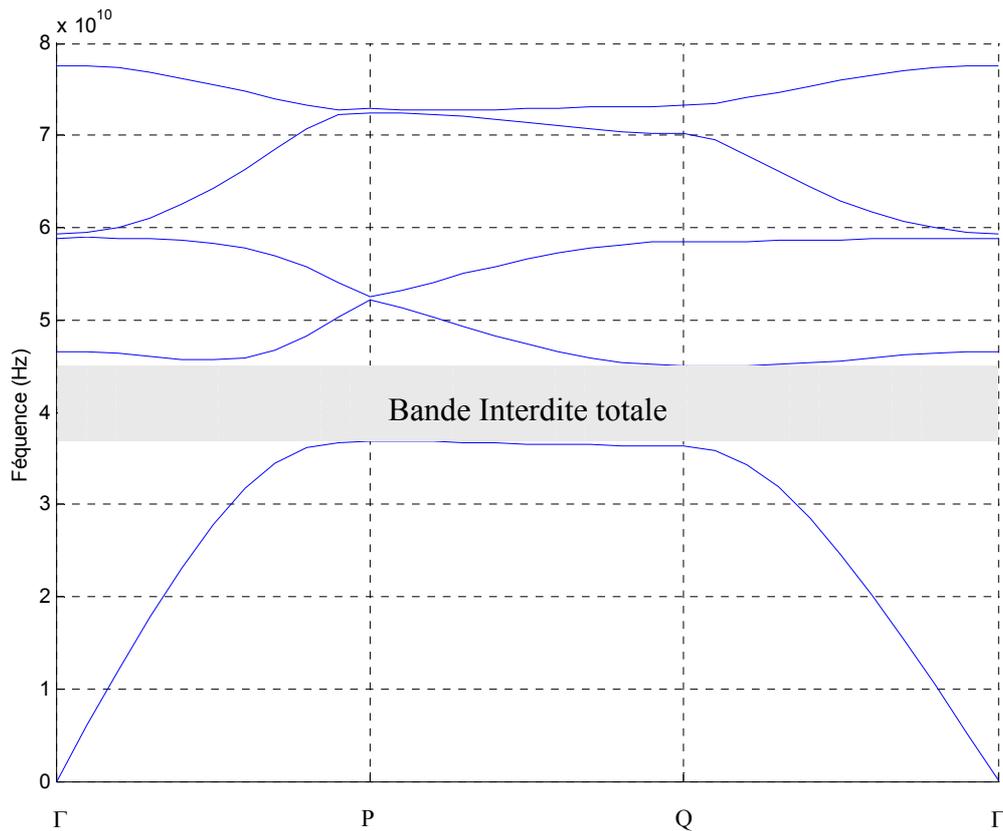


Figure II-14 : Diagramme de bande d'un matériau infini excité par une onde polarisée TE

La structure de bande fait apparaître une bande interdite totale, c'est-à-dire pour une incidence quelconque de l'onde électromagnétique, aucune onde ne pourra se propager entre 36,9 GHz et 45,01 GHz.

III- Surface de dispersion

Nous allons décrire une méthode dérivée de la méthode du calcul de diagramme de bande. Cette méthode permet de calculer l'ensemble des vecteurs d'onde qui existent dans un cristal photonique infini à deux dimensions à une fréquence donnée.

Comme dans le cas du calcul de fréquences permettant d'obtenir le diagramme de bande, nous allons faire l'étude d'une onde polarisée TM, puis celle d'une onde polarisée TE, et nous finirons par l'étude d'un réseau carré à deux dimensions pour des modes TM et pour plusieurs fréquences.

III.1- Calcul des contours de dispersion pour une onde polarisée TM

Nous considérons un cristal photonique ayant une permittivité $\varepsilon(x,y)$ périodique à deux dimensions. Alors les champs électrique et magnétique d'une onde se propageant dans un tel matériau peuvent être développés, à une fréquence ω donnée, en série de Fourier spatiale dans un repère cartésien (O; x, y, z).

Nous pouvons écrire :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{E}_{h_1 h_2}^k e^{j(\vec{G}_{h_1 h_2} + \vec{k}) \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-52})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{H}_{h_1 h_2}^k e^{j(\vec{G}_{h_1 h_2} + \vec{k}) \cdot \vec{r}}. \quad (\text{II-53})$$

Où $\vec{G}_{h_1 h_2} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2$ est un vecteur du réseau réciproque, \vec{b}_1 et \vec{b}_2 sont les vecteurs de bases du réseau réciproque à deux dimensions et $\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j}$ où k_x et k_y sont les coordonnées du vecteur phaseur \vec{k} dans le repère cartésien (O; \vec{i}, \vec{j}).

Dans la suite de la démonstration, on écrira $\vec{K}_{h_1 h_2}$ pour remplacer le terme général $\vec{G}_{h_1 h_2} + \vec{k}$.

La permittivité périodique $\varepsilon(x, y)$ peut aussi être décomposée par une somme de série de Fourier, telle que :

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} e^{j\vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-54})$$

avec

$$\varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} = \frac{1}{S_d} \iint_{x, y} \varepsilon(x, y) e^{-j\vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} dx dy \quad (\text{II-55})$$

où S_d est l'aire de la cellule élémentaire du réseau direct.

Le détail de la démonstration est donné en annexe (annexe 3).

L'équation de Maxwell-Ampere est résolue pour une onde polarisée TM dans une base d'ondes planes et on obtient la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{x_{h_1 h_2}} \\ K_{y_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H^k_{x_{h_1 h_2}} \\ H^k_{y_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} K_{y_{h_1 h_2}} \\ K_{x_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H^k_{y_{h_1 h_2}} \\ H^k_{x_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} = -\omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{\vec{G}(h_1-h_1), (h_2-h_2)} \right] \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-56})$$

où $\begin{bmatrix} K_{x_{h_1 h_2}} \\ K_{y_{h_1 h_2}} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} K_{y_{h_1 h_2}} \\ K_{x_{h_1 h_2}} \end{bmatrix}$ sont des matrices diagonales et la matrice $\left[\varepsilon_{\vec{G}(h_1-h_1), (h_2-h_2)} \right]$ est formée des coefficients de Fourier de la permittivité relative.

La résolution de l'équation de Maxwell-Faraday pour un mode TM nous donne les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} K_{y_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} = \omega \mu_0 \begin{pmatrix} H^k_{x_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-57})$$

$$-\begin{bmatrix} K_{x_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} = \omega \mu_0 \begin{pmatrix} H^k_{y_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-58})$$

Pour trouver la surface de dispersion à une fréquence ω donnée, nous devons rechercher les valeurs propres du système composé des équations II-56, II-57 et II-58.

$$\text{On peut écrire que } \vec{k} = \begin{cases} k_x = k \cdot \cos \theta \\ k_y = k \cdot \sin \theta \end{cases}$$

On a $\begin{bmatrix} \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{G} \end{bmatrix} + \vec{k}$, alors les équations II-56 à II-58 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} G_{x_{h_1 h_2}} \\ G_{y_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H^k_{x_{h_1 h_2}} \\ H^k_{y_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_{y_{h_1 h_2}} \\ G_{x_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H^k_{y_{h_1 h_2}} \\ H^k_{x_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} + \omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{\vec{G}(h_1-h_1), (h_2-h_2)} \right] \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} = k \cdot \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} H^k_{x_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} - k \cdot \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} H^k_{y_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-59})$$

$$\begin{bmatrix} G_{y_{h_1 h_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} - \omega \mu_0 \begin{pmatrix} H^k_{x_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} = -k \cdot \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} E^k_{z_{h_1 h_2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-60})$$

$$-\left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) - \omega \mu_0 \left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right) = k \cdot \cos \theta \cdot \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) \quad (\text{II-61})$$

L'équation II-60 mène à :

$$\left(H_{x_{h_1 h_2}}^k\right) = \frac{1}{\omega \mu_0} \left(\left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] + k \cdot \sin \theta \right) \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right), \quad (\text{II-62})$$

et l'équation II-61 mène à :

$$k \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) = \frac{-\left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) - \omega \mu_0 \left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right)}{\cos \theta}. \quad (\text{II-63})$$

En intégrant l'équation II-63 dans l'équation II-62, on obtient le champ H_x sans la norme de k , et cela nous donne :

$$\left(H_{x_{h_1 h_2}}^k\right) = -\tan \theta \left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right) + \frac{\left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] - \left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] \tan \theta}{\omega \mu_0} \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) \quad (\text{II-64})$$

Finalement, en remplaçant H_x de l'équation II-59 par l'expression II-64, on arrive à :

$$\left(\omega \varepsilon_0 \left[\mathcal{E}_{\vec{G}_{(h_1-h_1), (h_2-h_2)}} \right] + \frac{\left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] \left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] \tan \theta - \left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] \left[G_{x_{h_1 h_2}}\right]}{\omega \mu_0} \right) \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) + \left(\left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] + \left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] \tan \theta \right) \left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right) = k \left(\frac{\left[G_{y_{h_1 h_2}}\right] \sin \theta - \left[G_{x_{h_1 h_2}}\right] \tan \theta \sin \theta}{\omega \mu_0} \left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right) - \frac{1}{\cos \theta} \left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right) \right) \quad (\text{II-65})$$

Les vecteurs d'onde solutions peuvent être déduits à partir du système formé des équations II-63 et II-65. Ce système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{[I_d]}{\cos\theta} \quad \frac{[G_{y_{h_1h_2}}] \sin\theta - [G_{x_{h_1h_2}}] \tan\theta \sin\theta}{\omega\mu_0 \cos\theta [I_d]} \\ [0] \end{array} \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} [G_{x_{h_1h_2}}] + [G_{y_{h_1h_2}}] \tan\theta & \omega\varepsilon_0 [\varepsilon_{\bar{G}(h_1-h_1), (h_2-h_2)}^-] \\ -\omega\mu_0 [I_d] & -[G_{x_{h_1h_2}}] \end{array} \right] + \frac{[G_{x_{h_1h_2}}] [G_{y_{h_1h_2}}] \tan\theta - [G_{y_{h_1h_2}}] [G_{x_{h_1h_2}}]}{\omega\mu_0} \\ \left(\begin{array}{c} H^k \\ E^k \end{array} \right) = k \left(\begin{array}{cc} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H^k \\ E^k \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (\text{II-66})$$

On pose la matrice :

$$A = \left(\begin{array}{c} -\frac{[I_d]}{\cos\theta} \quad \frac{[G_{y_{h_1h_2}}] \sin\theta - [G_{x_{h_1h_2}}] \tan\theta \sin\theta}{\omega\mu_0 \cos\theta [I_d]} \\ [0] \end{array} \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} [G_{x_{h_1h_2}}] + [G_{y_{h_1h_2}}] \tan\theta & \omega\varepsilon_0 [\varepsilon_{\bar{G}(h_1-h_1), (h_2-h_2)}^-] \\ -\omega\mu_0 [I_d] & -[G_{x_{h_1h_2}}] \end{array} \right] + \frac{[G_{x_{h_1h_2}}] [G_{y_{h_1h_2}}] \tan\theta - [G_{y_{h_1h_2}}] [G_{x_{h_1h_2}}]}{\omega\mu_0} \end{array} \right) \quad (\text{II-67})$$

Une recherche des valeurs propres de la matrice A nous donne les vecteurs d'ondes solutions de la propagation dans une direction θ d'une onde plane à la fréquence ω . Pour tracer le contour de dispersion, il suffit de faire balayer θ de 0 à 360° (de 0 à 45° pour un réseau carré).

III.2- Calcul des contours de dispersion pour une onde polarisée TE

De même que pour le calcul des contours de dispersion associée à la polarisation électromagnétique TM, les champs électrique et magnétique sont en série de Fourier sur la même base de vecteurs \vec{G} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{E}_{h_1h_2}^k e^{j(\vec{G}_{h_1h_2} + \vec{k}) \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-68})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{H}_{h_1h_2}^k e^{j(\vec{G}_{h_1h_2} + \vec{k}) \cdot \vec{r}}, \quad (\text{II-69})$$

ainsi que la permittivité périodique $\varepsilon(x, y)$:

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} e^{j \vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-70})$$

avec

$$\varepsilon_{\vec{G}_{h_1 h_2}} = \frac{1}{S_d} \iint_{x, y} \varepsilon(x, y) e^{-j \vec{G}_{h_1 h_2} \cdot \vec{r}} \partial x \partial y \quad (\text{II-71})$$

Dans la suite de la démonstration, on pose :

$$\vec{K}_{h_1 h_2} = \vec{G}_{h_1 h_2} + \vec{k} \quad (\text{II-72})$$

Le détail de la démonstration est donné en annexe (annexe 4).

L'équation de Maxwell-Faraday est résolue pour une onde polarisée TE dans une base d'onde plane et on obtient la relation suivante :

$$\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right] \begin{pmatrix} E_{y_{h_1 h_2}}^k \\ E_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} - \left[K_{y_{h_1 h_2}} \right] \begin{pmatrix} E_{x_{h_1 h_2}}^k \\ E_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} = \omega \mu_0 \begin{pmatrix} H_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} \quad (\text{II-73})$$

où $\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right]$ et $\left[K_{y_{h_1 h_2}} \right]$ sont des matrices diagonales.

La résolution de l'équation de Maxwell-Ampere pour un mode TE nous donne les équations suivantes :

$$\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right] \begin{pmatrix} H_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} = -\omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{\vec{G}_{(h_1 - h_1), (h_2 - h_2)}} \right] \begin{pmatrix} E_{x_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} \quad (\text{II-74})$$

et

$$\left[K_{y_{h_1 h_2}} \right] \begin{pmatrix} H_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} = \omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{\vec{G}_{(h_1 - h_1), (h_2 - h_2)}} \right] \begin{pmatrix} E_{y_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix}. \quad (\text{II-75})$$

Pour déterminer la surface de dispersion à une fréquence ω donnée, nous devons rechercher les valeurs possibles du vecteur propagation \vec{k} dans le système composé des équations II-73, II-74 et II-75.

On peut écrire que $\vec{k} = \begin{cases} k_x = k \cdot \cos \theta \\ k_y = k \cdot \sin \theta \end{cases}$.

On a $[\vec{K}] = [\vec{G}] + \vec{k}$, alors les équations II-73 à II-75 peuvent s'écrire sous la forme :

$$[G_{y_{h_1 h_2}}] (E_{y_{h_1 h_2}}^k) - [G_{x_{h_1 h_2}}] (E_{x_{h_1 h_2}}^k) - \omega \mu_0 (H_{z_{h_1 h_2}}^k) = -k \cdot \cos \theta (E_{y_{h_1 h_2}}^k) + k \cdot \sin \theta (E_{x_{h_1 h_2}}^k) \quad (\text{II-76})$$

$$[G_{x_{h_1 h_2}}] (H_{z_{h_1 h_2}}^k) + \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G_{h_1 h_2}}^-] (E_{x_{h_1 h_2}}^k) = -k \cdot \cos \theta (H_{z_{h_1 h_2}}^k) \quad (\text{II-77})$$

$$[G_{y_{h_1 h_2}}] (H_{z_{h_1 h_2}}^k) - \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G_{h_1 h_2}}^-] (E_{y_{h_1 h_2}}^k) = -k \cdot \sin \theta (H_{z_{h_1 h_2}}^k). \quad (\text{II-78})$$

L'équation II-78 mène à :

$$(E_{y_{h_1 h_2}}^k) = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G_{h_1 h_2}}^-]} \left([G_{y_{h_1 h_2}}] + k \cdot \sin \theta \right) (H_{z_{h_1 h_2}}^k) \quad (\text{II-79})$$

L'équation II-77 mène à :

$$k (H_{z_{h_1 h_2}}^k) = \frac{-[G_{x_{h_1 h_2}}] (H_{z_{h_1 h_2}}^k) - \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G_{h_1 h_2}}^-] (E_{x_{h_1 h_2}}^k)}{\cos \theta} \quad (\text{II-80})$$

En intégrant l'équation II-80 dans l'équation II-79, on obtient le champ E_y sans la norme de k , et cela nous donne :

$$(E_{y_{h_1 h_2}}^k) = \frac{[G_{y_{h_1 h_2}}] - [G_{x_{h_1 h_2}}] \tan \theta}{\omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G_{h_1 h_2}}^-]} (H_{z_{h_1 h_2}}^k) - \tan \theta (E_{x_{h_1 h_2}}^k) \quad (\text{II-81})$$

Finalement, en remplaçant E_y de l'équation II-76 par l'expression II-81, on arrive à :

$$\left(-\omega\mu_0 + \frac{[G_{y_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}] - [G_{x_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{h_1h_2}}]} \right) (H_{z_{h_1h_2}}^k) - ([G_{x_{h_1h_2}}] + [G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta)(E_{x_{h_1h_2}}^k) =$$

$$k \left(\frac{\cos\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{h_1h_2}}]} ([G_{x_{h_1h_2}}]\tan\theta - [G_{y_{h_1h_2}}]) (H_{z_{h_1h_2}}^k) + 2.\sin\theta.(E_{x_{h_1h_2}}^k) \right) \quad (\text{II-82})$$

Les vecteurs d'onde qui existent dans le matériau peuvent être déduits à partir du système formé des équations II-80 et II-82. Ce système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c} -\sin\theta[I_d] \quad \frac{\cos\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]} ([G_{y_{h_1h_2}}] - [G_{x_{h_1h_2}}]\tan\theta) \\ [0] \quad \quad \quad -\cos\theta[I_d] \end{array} \right)^{-1} \times$$

$$\left(\begin{array}{c} -[G_{x_{h_1h_2}}] - [G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta \quad -\omega\mu_0[I_d] + \frac{[G_{y_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}] - [G_{x_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h_1),(h_2-h_2)}}]} \\ \omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h_1),(h_2-h_2)}}] \quad [G_x] \end{array} \right) \cdot \quad (\text{II-83})$$

$$\begin{pmatrix} E_{x_{h_1h_2}}^k \\ H_{z_{h_1h_2}}^k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x_{h_1h_2}}^k \\ H_{z_{h_1h_2}}^k \end{pmatrix}$$

On pose la matrice B égale à :

$$B = \left(\begin{array}{c} -\sin\theta[I_d] \quad \frac{\cos\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]} ([G_{y_{h_1h_2}}] - [G_{x_{h_1h_2}}]\tan\theta) \\ [0] \quad \quad \quad -\cos\theta[I_d] \end{array} \right)^{-1} \times$$

$$\left(\begin{array}{c} -[G_{x_{h_1h_2}}] - [G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta \quad -\omega\mu_0[I_d] + \frac{[G_{y_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}] - [G_{x_{h_1h_2}}][G_{y_{h_1h_2}}]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h_1),(h_2-h_2)}}]} \\ \omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h_1),(h_2-h_2)}}] \quad [G_x] \end{array} \right) \quad (\text{II-84})$$

Une recherche des valeurs propres de la matrice B nous donne les vecteurs d'ondes solutions de la propagation dans une direction θ d'une onde plane à la fréquence ω . Pour tracer le contour de dispersion, il suffit de faire balayer θ de 0 à 360° (de 0 à 45° pour un réseau carré).

III.3- Représentation des contours de dispersion : exemple d'une onde polarisée TM

Dans les deux paragraphes précédents, il a été montré que pour les deux polarisations susceptible de se propager dans un cristal photonique à deux dimensions, TM et TE, il était possible de mettre en évidence deux systèmes d'équations permettant le calcul de surface de dispersion par application de la méthode des ondes planes.

Dans ce paragraphe, on considérera le cas d'une onde polarisée TM.

La matrice de calcul de la surface de dispersion est :

$$\left(\begin{array}{c} [I_d] \\ \cos \theta \\ [0] \end{array} \frac{[G_{y_{h_1 h_2}}] \sin \theta - [G_{x_{h_1 h_2}}] \tan \theta \sin \theta}{\omega \mu_0 \cos \theta [I_d]} \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c} [G_{x_{h_1 h_2}}] + [G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta \quad \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{\bar{G}(h_1-h_1, h_2-h_2)}^-] + \frac{[G_{x_{h_1 h_2}}][G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta - [G_{y_{h_1 h_2}}][G_{x_{h_1 h_2}}]}{\omega \mu_0} \\ -\omega \mu_0 [I_d] \quad \quad \quad -[G_{x_{h_1 h_2}}] \end{array} \right) \quad (\text{II-85})$$

$$\left(\begin{array}{c} H^k \\ E^k \end{array} \right)_{z_{h_1 h_2}} = k \left(\begin{array}{c} [I_d] \\ [0] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} [0] \\ [I_d] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H^k \\ E^k \end{array} \right)_{z_{h_1 h_2}}$$

Pour une direction de propagation θ donnée, les valeurs propres du système ci-dessus fournissent les renseignements nécessaires portant sur les vecteurs d'onde k permis.

Ainsi il devient facile de tracer la surface de dispersion d'un matériau périodique quand θ varie entre les directions de symétrie du cristal.

Le cristal photonique considéré afin d'appliquer cette méthode est un réseau carré infini de tiges carrées d'alumine dont la permittivité relative est $\varepsilon_r=9,8$. La largeur des barreaux appelé p est obtenu en divisant la pas du réseau appelé a par un facteur 2,5.

La figure II-15 nous une représentation de cette structure. Son diagramme de bande est présenté sur la figure II-16.

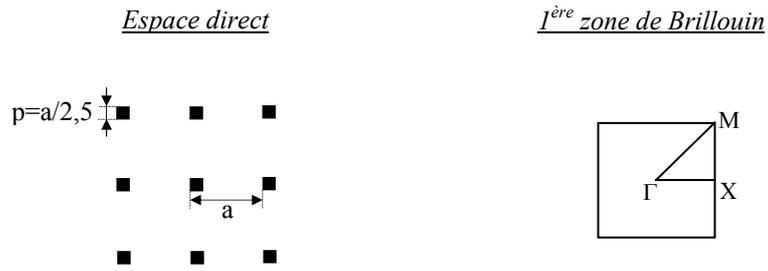


Figure II-15 : Dimension du cristal photonique 2D et 1^{ère} zone de Brillouin

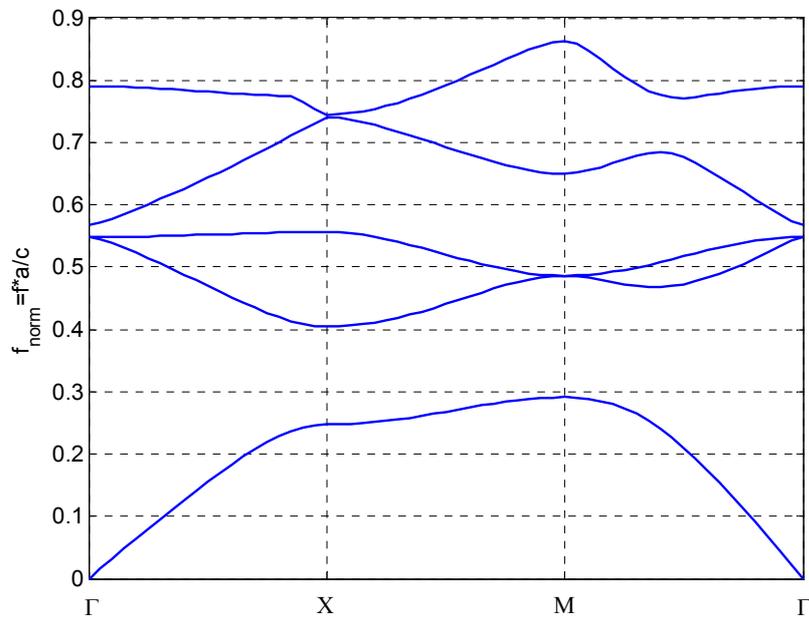


Figure II-16 : Diagramme de bande de la structure à réseau carré

En représentant les contours de dispersion dans la première zone de Brillouin ($-\pi/a < k_x < \pi/a$ et $-\pi/a < k_y < \pi/a$), on obtient les graphiques suivants pour le premier mode de propagation.

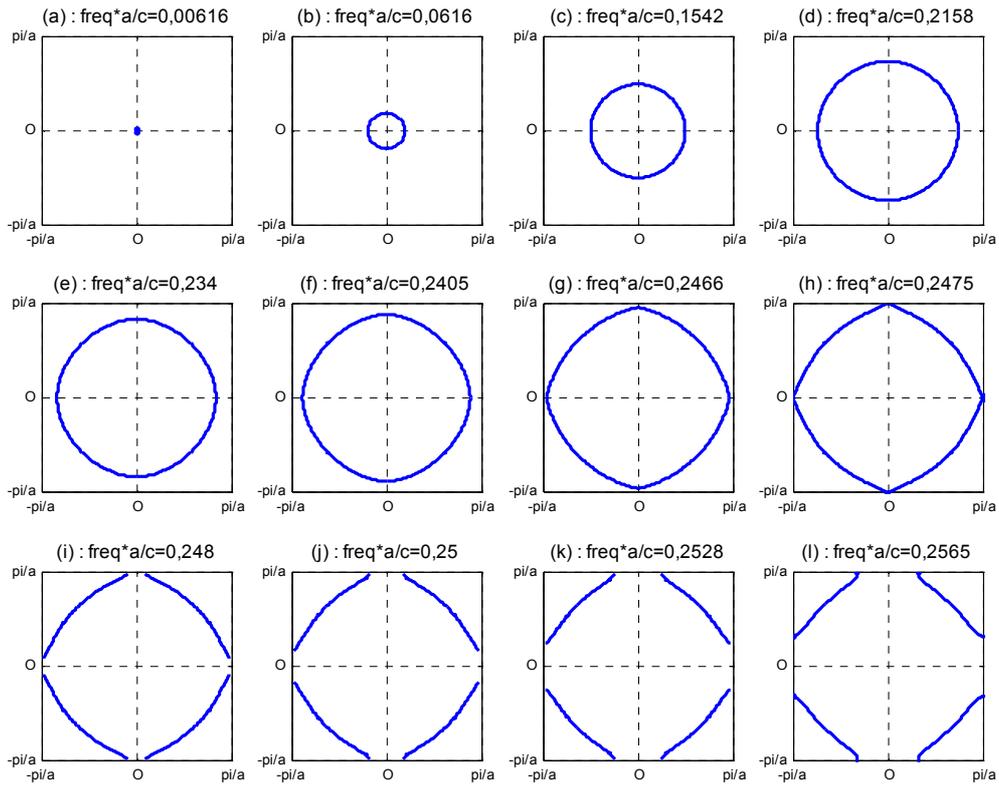
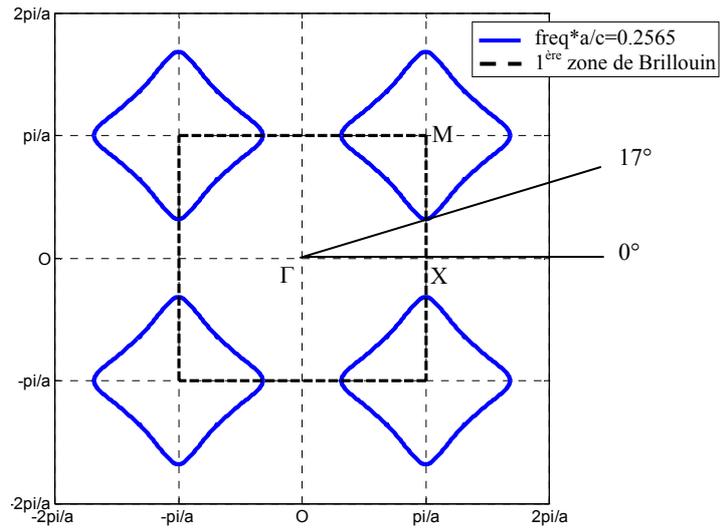


Figure II-17 : Surfaces de dispersion du 1^{er} mode pour 12 fréquences différentes

On s'aperçoit que plus la fréquence augmente, plus la surface augmente et change de forme. Elle s'ouvre en bord de zone pour se refermer sur les zones contiguës à la première zone de Brillouin (figure II-18).



**Figure II-18 : $\text{freq}^*a/c=0.2565$
et 1^{ère} zone de Brillouin**

La fréquence $f.a/c=0,2565$ se trouve en bande interdite pour les angles de propagation compris dans l'intervalle $n * 90^\circ - 17^\circ < \theta < n * 90 + 17^\circ$.

La figure II-19 est une représentation condensée des contours de dispersion pour plusieurs fréquences.

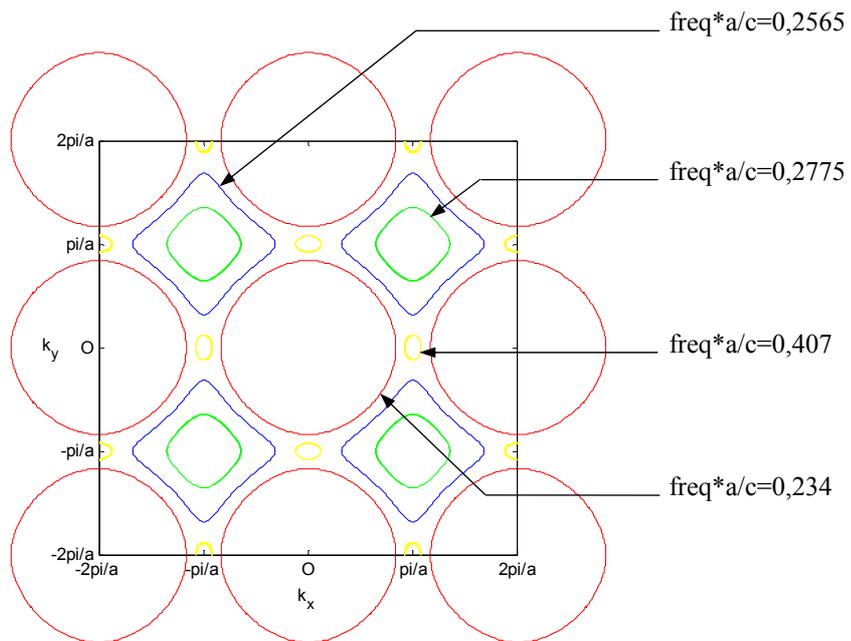


Figure II-19 : Surface de dispersion pour le 1^{er} mode pour 4 fréquences

Ces représentations montrent que l'anisotropie dans le matériau est dépendante de la fréquence. Pour certaines fréquences ($\text{freq} \cdot a/c = 0.407$), les directions du vecteur d'onde \vec{k} autorisées sont comprises dans un très petit angle.

Ces résultats mettent en évidence les propriétés de dispersion et d'anisotropie électromagnétique des cristaux photoniques.

IV- Distribution du champ électromagnétique dans un cristal photonique

Comme pour représenter les contours de dispersion d'un cristal photonique à deux dimensions, les systèmes de base sont :

- pour une onde polarisée TM :

$$\left(\begin{array}{c} [I_d] \\ \cos \theta \\ [0] \end{array} \frac{[G_{y_{h_1 h_2}}] \sin \theta - [G_{x_{h_1 h_2}}] \tan \theta \sin \theta}{\omega \mu_0 \cos \theta [I_d]} \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c} [G_{x_{h_1 h_2}}] + [G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta \\ -\omega \mu_0 [I_d] \end{array} \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G(h_1-h_1), (h_2-h_2)}^-] + \frac{[G_{x_{h_1 h_2}}] [G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta - [G_{y_{h_1 h_2}}] [G_{x_{h_1 h_2}}]}{\omega \mu_0} \right) \quad (\text{II-86})$$

$$\left(\begin{array}{c} H^k \\ y_{h_1 h_2} \\ E^k \\ z_{h_1 h_2} \end{array} \right) = k \left(\begin{array}{cc} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H^k \\ y_{h_1 h_2} \\ E^k \\ z_{h_1 h_2} \end{array} \right)$$

- pour une onde polarisée TE :

$$\left(\begin{array}{c} -\sin \theta [I_d] \\ [0] \end{array} \frac{\cos \theta}{\omega \varepsilon_0 [\varepsilon_G]} \left([G_{y_{h_1 h_2}}] - [G_{x_{h_1 h_2}}] \tan \theta \right) \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c} -[G_{x_{h_1 h_2}}] - [G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta \\ \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G(h_1-h_1), (h_2-h_2)}^-] \end{array} -\omega \mu_0 [I_d] + \frac{[G_{y_{h_1 h_2}}] [G_{y_{h_1 h_2}}] - [G_{x_{h_1 h_2}}] [G_{y_{h_1 h_2}}] \tan \theta}{\omega \varepsilon_0 [\varepsilon_{G(h_1-h_1), (h_2-h_2)}^-]} \right) \quad (\text{II-87})$$

$$\left(\begin{array}{c} E^k \\ x_{h_1 h_2} \\ H^k \\ z_{h_1 h_2} \end{array} \right) = k \left(\begin{array}{cc} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} E^k \\ x_{h_1 h_2} \\ H^k \\ z_{h_1 h_2} \end{array} \right)$$

Dans le paragraphe précédent, une recherche des valeurs propres permettait d'obtenir les valeurs k permises.

Une recherche dans les équations II-66 et II-83 des vecteurs propres associés aux valeurs propres précédemment recherchées nous permet de représenter les champs électromagnétiques dans les cristaux photoniques.

Considérons le même matériau que dans le paragraphe précédent (figure II-15). En réalisant une transformée de Fourier inverse dans l'espace des vecteurs \vec{k} , nous obtenons pour une onde polarisée TM la cartographie du module du champ électrique représentée sur la figure II-20 pour $f.a/c = 0,234$ et $\theta = 0^\circ$.

Pour obtenir les cartographies de champ, il faut au préalable trier les valeurs propres suivant chaque mode. Ensuite nous recherchons les vecteurs propres associés à ses valeurs propres. Puis nous réalisons une transformée de Fourier spatiale inverse (équation II-88).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{E}_{\vec{G}_{h_1 h_2}}^{\vec{k}} e^{j(\vec{G}_{h_1 h_2} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-88})$$

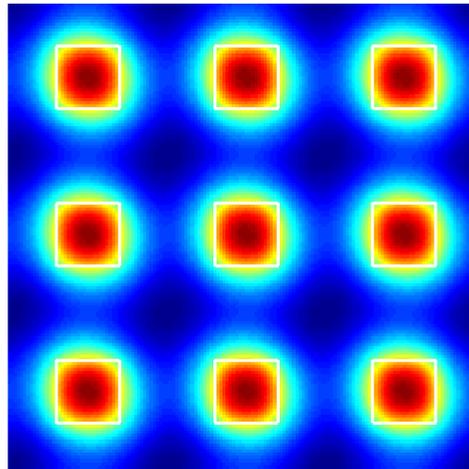


Figure II-20 : Module du champ électrique
($f.a/c = 0,234$; $\theta = 0^\circ$)

On s'aperçoit que l'énergie est localisée dans les barreaux c'est-à-dire dans le diélectrique de plus forte permittivité ($(\epsilon_r = 9.8) > (\epsilon_{\text{air}} = 1)$).

V- Notion de vitesse de phase et vitesse de groupe

Nous avons établi dans les paragraphes précédents les équations de propagation pour des ondes polarisées TM et TE. De ces équations, en décomposant les champs électromagnétiques et la permittivité relative périodique en séries de Fourier, nous avons obtenus les relations de dispersion pour ces deux ondes. Elles permettent d'établir la relation qui existe entre la fréquence et le vecteur d'onde.

A partir de ces équations, nous pouvons établir les notions de :

- *vitesse de phase*, définie par la relation suivante :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (\text{II-89})$$

La vitesse de phase est définie comme la vitesse de propagation d'une surface équiphase. Cette vitesse a une signification bien définie, comme par exemple, pour les ondes planes et les ondes sphériques pour lesquelles la surface équiphase peut être déterminée sans ambiguïté.

Pour une onde d'amplitude constante, cela traduit la vitesse de déplacement du point où le champ électrique associé à l'onde a la même amplitude. Cette notion peut être élargie car pour une onde d'amplitude constante une valeur du champ électrique peut être associée à une phase, c'est-à-dire à une position particulière dans une période de la sinusoïde. Dans ce schéma, la vitesse de phase devient la vitesse de déplacement d'un point de phase constante.

Cependant, dans le cas du cristal photonique, la surface d'équiphase ne peut pas être définie rigoureusement, puisque sa fonction propre est une superposition d'ondes planes. Ceci signifie que la vitesse de phase ne peut pas être définie convenablement dans le cristal photonique [5].

- *vitesse de groupe*, définie par la relation suivante :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (\text{II-90})$$

Cette vitesse est la vitesse de propagation d'un paquet d'onde. La notion de vitesse de groupe d'une onde décrit la dispersion par l'existence de vitesses de propagation différentes selon la longueur d'onde.

Nous avons vu que les cristaux photoniques sont des milieux dispersifs.

Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase v_ϕ dépend de la fréquence des oscillations. En physique classique, les problèmes de propagation ne présentent pas cette particularité. Car les équations de Maxwell relatives à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide conduisent à une vitesse de propagation constante, en rendant pratiquement la vitesse indépendante de la fréquence. Il est facile de définir la vitesse de propagation de l'énergie ; c'est tout simplement la vitesse de phase.

Mais, par contre, si le milieu est dispersif, la définition de la vitesse de propagation de l'énergie diffère de la vitesse de phase. Ceci résulte du fait que les ondes sinusoïdales s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$ sont les seules qui peuvent se propager sans déformation dans le milieu. Par contre, un court signal ou une brève impulsion sont déformés durant la propagation, alors la vitesse moyenne de ces derniers est difficile à définir. C'est alors qu'on définit la vitesse de groupe, c'est la vitesse de l'énergie. Un groupe d'ondes est un signal de longueur finie comprenant seulement un nombre limité de longueurs d'onde [44].

VI- Matériaux BIP à défaut

Les matériaux à bande interdite photonique sont la succession d'éléments diélectriques ou métalliques élémentaires périodiques au sein d'une structure globale [47].

La création de défaut dans ces structures est engendrée par la rupture de la périodicité ou le changement de nature d'éléments périodiques.

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux différentes possibilités pour créer ces défauts, puis nous représenterons la répartition des champs électromagnétiques à l'intérieur d'une structure périodique à deux dimensions.

VI.1- Principe de base

Dans un cristal photonique, la création d'un défaut est causée par la rupture de la périodicité diélectriques ϵ . Cette rupture va engendrer l'ouverture d'une bande de fréquence autorisée à l'intérieur de la bande interdite photonique. La largeur et la position de cette bande autorisée sont gérées par les caractéristiques du défaut [49] [50].

VI.2- Les différents types de défaut [47]

Il existe différents types de défaut occasionnant une rupture de la périodicité des cristaux photoniques. Cette rupture crée une résonance étroite au sein de la bande interdite. Pour un échantillon de matériau illuminé par une onde plane, un pic de transmission apparaît dans la bande interdite à la fréquence du mode de défaut. A cette fréquence, le matériau devient transparent (figure II-21).

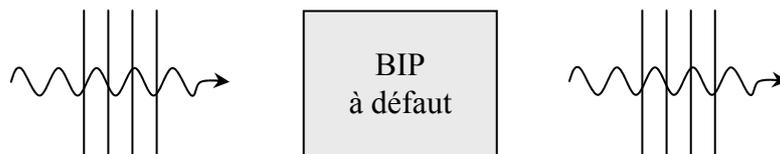


Figure II-21 : Structure BIP à défaut illuminée par une onde plane et transparente à la fréquence du défaut

Sur la figure II-22 sont représentés les coefficients de transmission d'un cristal sans défaut et d'un cristal avec défaut. Un coefficient de transmission τ correspond au rapport entre l'amplitude de l'onde transmise et de l'onde incidente.

$$\tau = \frac{E_{transmis}}{E_{incident}} \quad (\text{II-91})$$

Ces études sont réalisées sur des matériaux finis longitudinalement et infinis transversalement. Ces matériaux sont soumis à une agression électromagnétique de type onde plane provenant de l'extérieur. L'algorithme de calcul donnant les résultats électromagnétiques est un code FDTD (méthode expliquée au chapitre I).

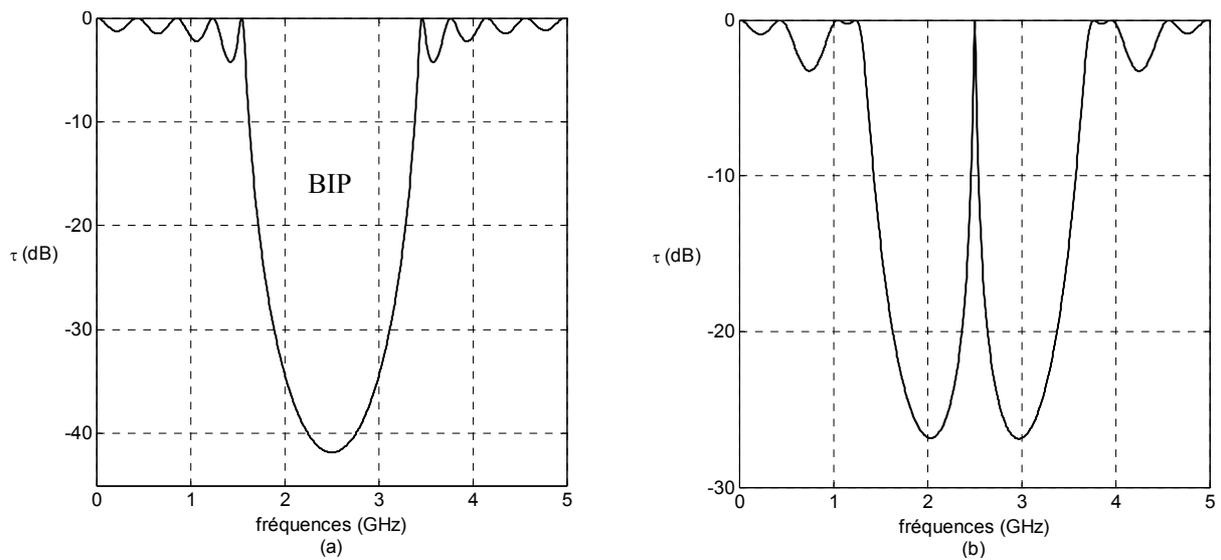


Figure II-22 : Coefficients de transmission d'une structure BIP 1D avec (b) et sans (a) défaut.

L'étude des cristaux photoniques à défaut sera réalisée sur un modèle à deux dimensions mais il est toujours possible de la généraliser aux cristaux à une ou trois dimensions.

Considérons la structure à deux dimensions représentée sur la figure II-23. Elle servira de structure de référence.

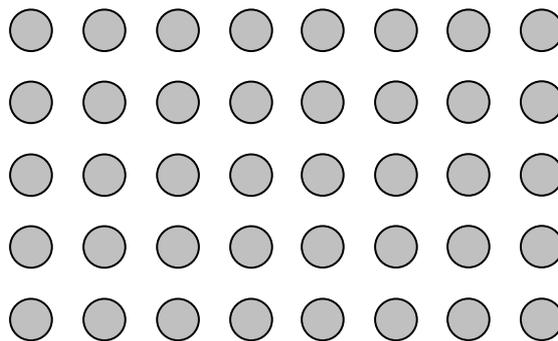


Figure II-23 : Structure BIP 2D

VI.2.1- Les types de défaut

Les structures photoniques à défaut sont faites d'un assemblage de matériaux diélectriques comportant une ou plusieurs ruptures de périodicité.

Ces ruptures sont de deux types :

- les mono défauts dont la localisation à l'intérieur de la structure BIP n'est qu'à un seul et même endroit. Ces mono défauts créent une bande autorisée à l'intérieur de la bande interdite (figure II-22).

- les multi défauts, où le défaut est répété à plusieurs endroits à l'intérieur de la structure BIP, créent plusieurs bandes autorisées engendrées par chaque défaut dans la même bande interdite. Grâce aux multi défauts, il est possible de coupler leurs effets pour élargir la bande autorisée dans la bande interdite, ou remonter le niveau du coefficient de transmission à la fréquence de travail.

VI.2.2- La nature des défauts

VI.2.2.4- Dimensions des motifs élémentaires

Pour rompre la périodicité d'une structure BIP, on peut modifier la taille du motif élémentaire (figure II-24) qui compose le cristal photonique.

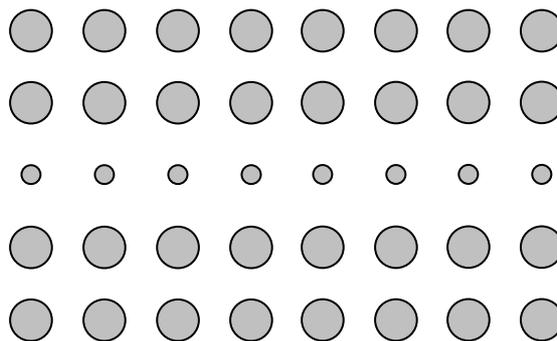


Figure II-24 : Défaut de dimension du motif élémentaire

Sur la figure II-24, la dimension des motifs élémentaires de la troisième rangée a été réduite.

VI.2.2.5- Distance entre motifs élémentaires

On peut aussi jouer sur l'espace qui existe entre les motifs élémentaires des réseaux cristallins (figure II-25).

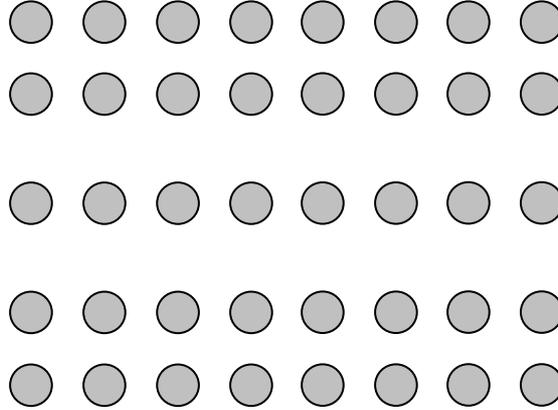


Figure II-25 : Défaut de distance entre motifs élémentaires

Sur la figure II-25, l'écart entre la deuxième et la troisième rangée et l'écart entre la troisième et la quatrième rangée ont été augmentés pour former le défaut.

VI.2.2.6- Valeur de la permittivité relative des motifs élémentaires

Il est possible de changer localement la nature du matériau et plus concrètement, changer la valeur de la permittivité relative (figure II-26).

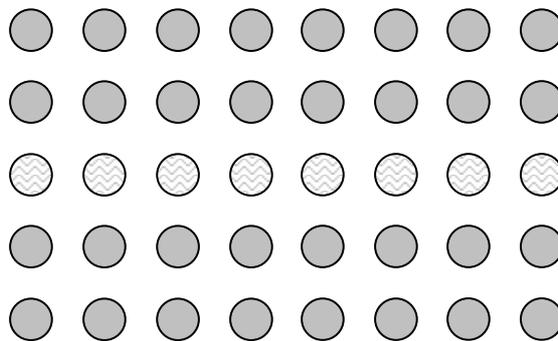


Figure II-26 : Défaut sur la permittivité relative ϵ

Sur la figure II-26, la permittivité des motifs élémentaires de la rangée du milieu a été changée.

VI.2.2.7- Défaut par vacuité

Le défaut par vacuité correspond à l'élimination de motifs élémentaires qui se trouvent remplacés par la permittivité de fond (dans notre cas $\varepsilon_{r_{fond}} = 1$) (figure II-27).

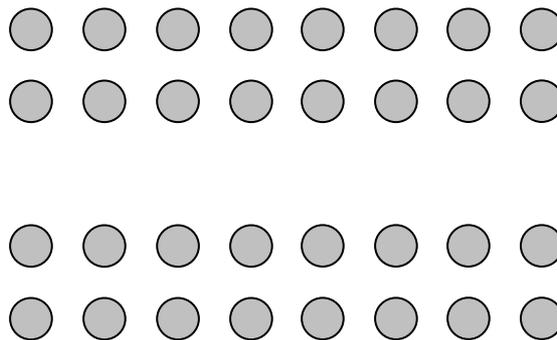


Figure II-27 : Défaut par vacuité

Les motifs élémentaires de la rangée du milieu de la figure II-27 ont été enlevés.

VI.3- Diagramme de bande d'une structure BIP à défaut

Le diagramme de bande d'une structure BIP sans défaut a été présenté dans ce chapitre. Il permet d'observer la fréquence en fonction de la constante de propagation β . Ce diagramme s'obtient en faisant varier le vecteur \vec{k} le long du contour défini par les points de hautes symétries de la première zone de Brillouin du réseau réciproque.

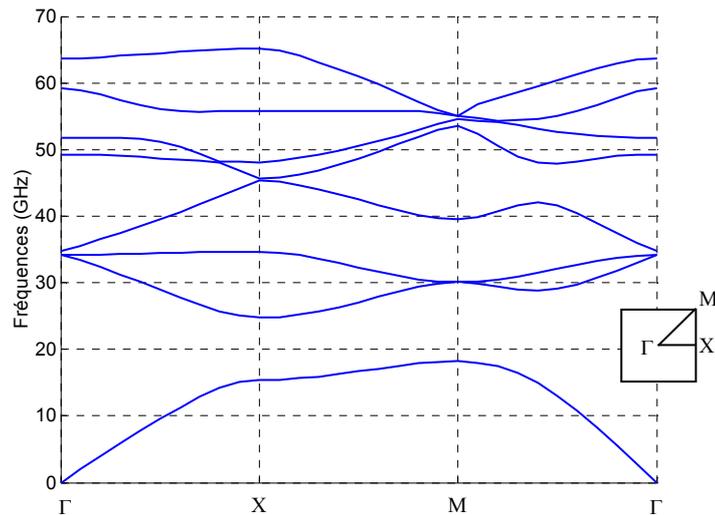


Figure II-28 : Diagramme de bande d'une cellule

Pour obtenir ce diagramme de bande par la méthode des ondes planes, cela nécessite d'avoir un matériau infini périodique suivant deux directions.

Cette méthode peut être utilisée pour rechercher un mode de défaut lorsque l'on rompt la périodicité du matériau. Il faut périodiser le matériau à l'infini. On utilise alors le concept de macro cellule [51]. Une macro cellule est constituée de plusieurs cellules primitives. Dans le cas présent, on a une macro cellule composée de 3*3 cellules primitives. Elle est périodisée [52] à l'infini pour appliquer la méthode des ondes planes.

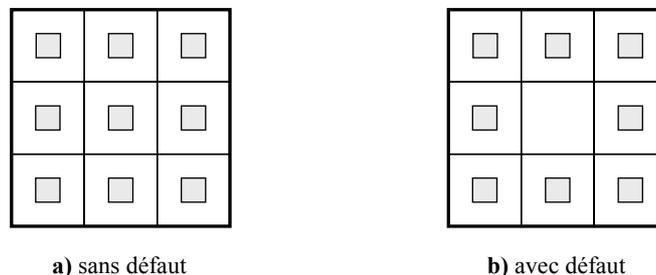


Figure II-29 : Macro cellule 3*3

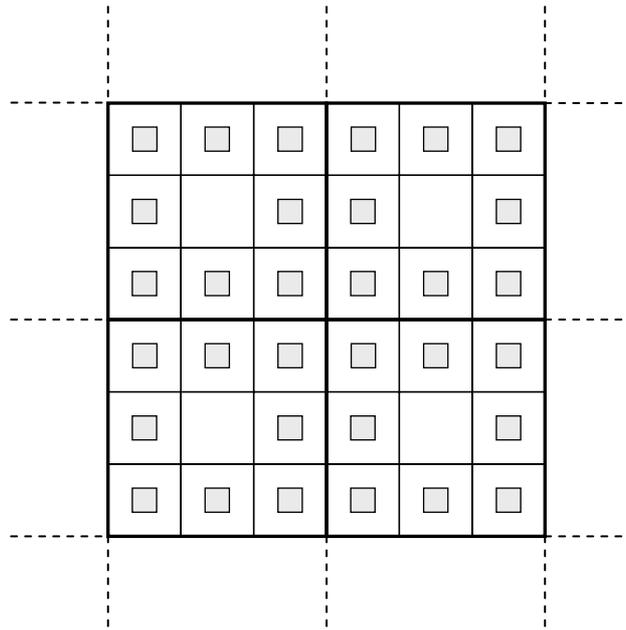


Figure II-30 : Macro cellule avec défaut 3*3 périodisée à l’infini

En utilisant une macro cellule sans défaut (figure II-29 a)), nous obtenons le diagramme de bande de la figure II-31.

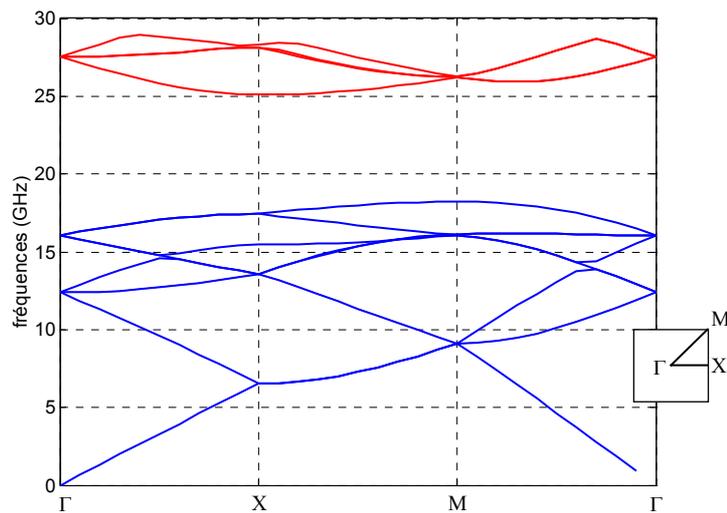


Figure II-31 : Diagramme de bande d’une macro cellule sans défaut

On s'aperçoit que la bande interdite est conservée entre 18 et 25 GHz.

Sous la bande interdite :

- dans le cas d'une cellule élémentaire, il existe un seul mode (figure II-28)
- dans le cas d'une macro cellule, le calcul fournit plusieurs modes (9 dans le cas d'une macro cellule de 3*3) car la macro cellule regroupe plusieurs cellules élémentaires (figure II-31).

Maintenant, la macro cellule est composée de plusieurs cellules primitives avec une cellule différente formant le défaut, puis cette macro cellule est périodisée.

On obtient ainsi le diagramme de bande de la figure II-32.

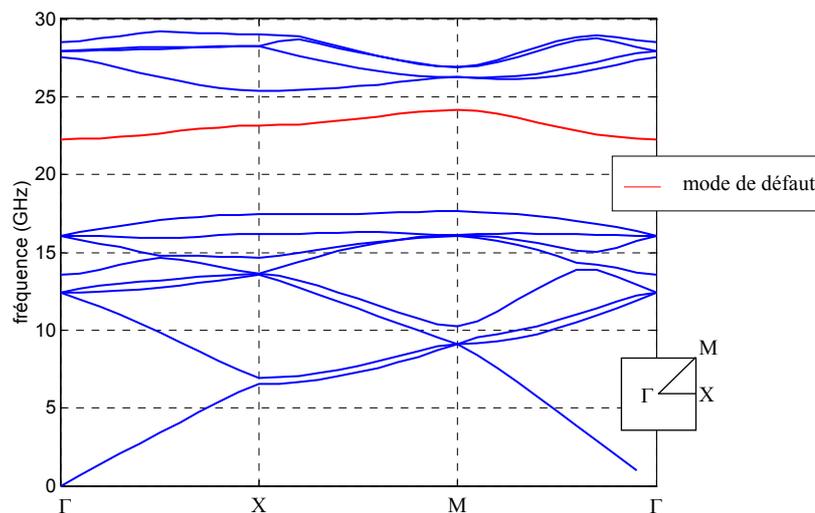


Figure II-32 : Diagramme de bande d'une macro cellule avec défaut centré

On remarque que le mode de défaut est venu se loger dans la bande interdite. Mais ce mode de défaut n'est pas plat, c'est-à-dire que pour n'importe quelle direction de propagation la fréquence n'est pas constante.

Pour remédier à ce fait, nous pouvons augmenter le nombre de cellules élémentaires dans la macro cellule afin de limiter les couplages entre défauts et d'avoir une fréquence quasiment

constante quelque soit la direction de propagation dans le matériau. Cette fréquence correspond à la fréquence propre de résonance de la microcavité.

Dans un premier temps, étudions le cas d'une macro cellule formée de 5*5 cellules primitives (macro cellule avec et sans défaut).

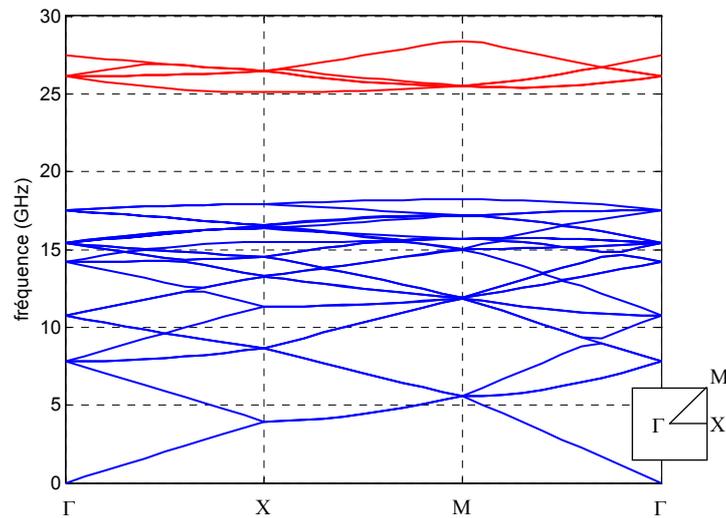


Figure II-33 : Diagramme de dispersion d'une macro cellule 5*5 sans défaut

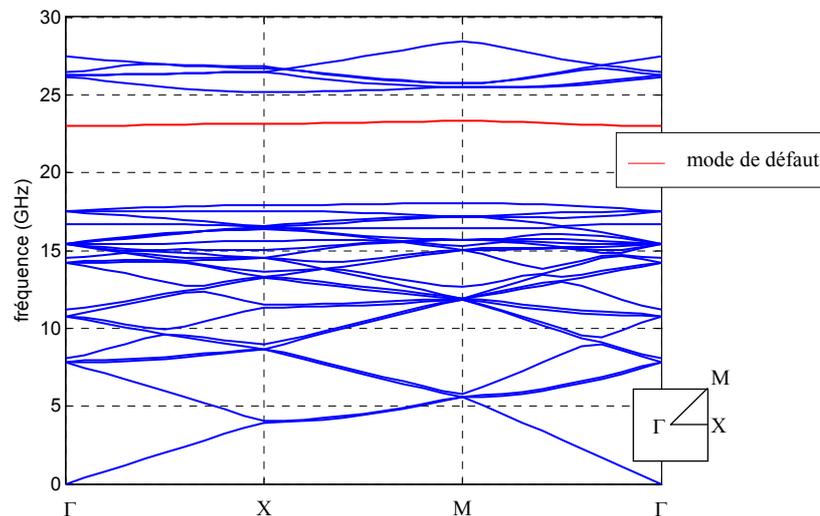


Figure II-34 : Diagramme de dispersion d'une macro cellule 5*5 avec défaut

La bande interdite a un peu augmenté car plus on a un nombre de modes important, plus ces modes s'aplanissent. Cela se vérifie avec le mode de défaut qui lui aussi devient plus plat.

Pour conforter cette remarque, nous pouvons faire l'étude d'une macro cellule composée de 7*7 cellules élémentaires (macro cellule avec et sans défaut).

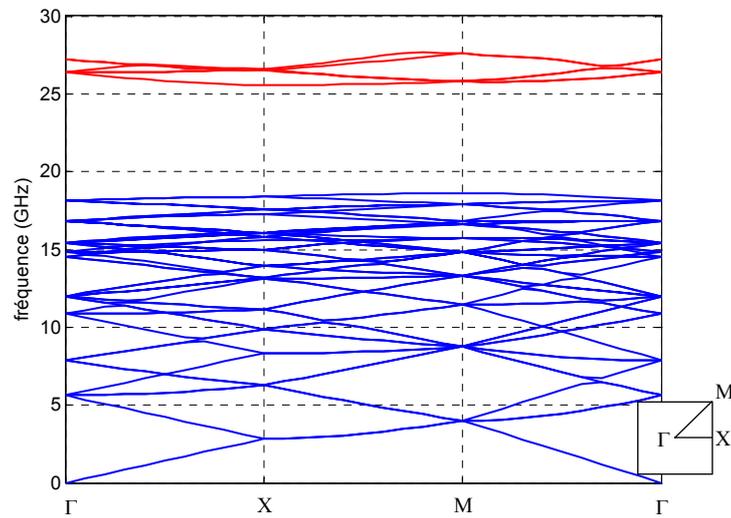


Figure II-35 : Diagramme de dispersion d'une macro cellule 7*7 sans défaut

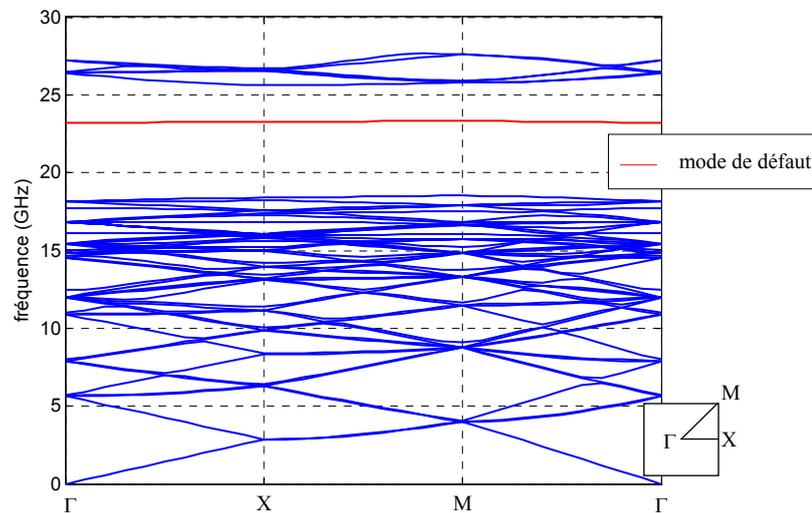


Figure II-36 : Diagramme de dispersion d'une macro cellule 7*7 avec défaut

Sur la figure II-36, nous pouvons observer que le mode de défaut est toujours situé dans la bande interdite et qu'il devient de plus en plus plat quelle que soit la direction de propagation.

Le diagramme de dispersion de la macro cellule sans défaut n'a pas de vrai sens physique car le vecteur d'onde \vec{k} ne parcourt pas la zone de Brillouin d'une cellule élémentaire. Par contre, celui obtenu avec la macro cellule à défaut a un sens physique. Cela permet de voir quel mode se déplace dans la bande interdite.

VI.4- Cartographie de champ du matériau à défaut

En repartant de la macro cellule précédente (avec défaut) et en faisant une recherche des vecteurs propres associés aux valeurs propres qui ont permis de déterminer le diagramme de dispersion, nous pouvons représenter le module du champ E_z pour une direction θ (car notre étude s'est faite avec une excitation TM) et une fréquence ω données. La fréquence est celle du mode de défaut et la direction est celle du point de haute symétrie X (figure II-37). Pour obtenir les cartographies, on réalise une transformée de Fourier spatiale inverse (équation II-92).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \vec{E}_{\vec{G}_{h_1 h_2}} e^{j(\vec{G}_{h_1 h_2} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \quad (\text{II-92})$$

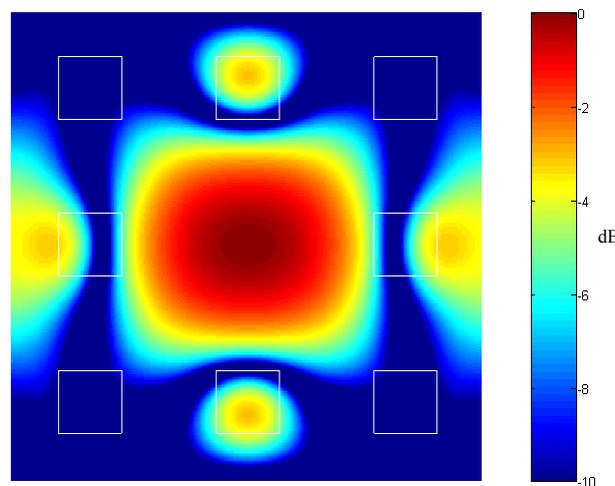


Figure II-37 : Module du champ E_z pour une macro cellule 3*3

On constate ici que le champ n'est pas atténué en bordure de la macro cellule. Ceci engendre un fort couplage entre chaque microcavité adjacente.

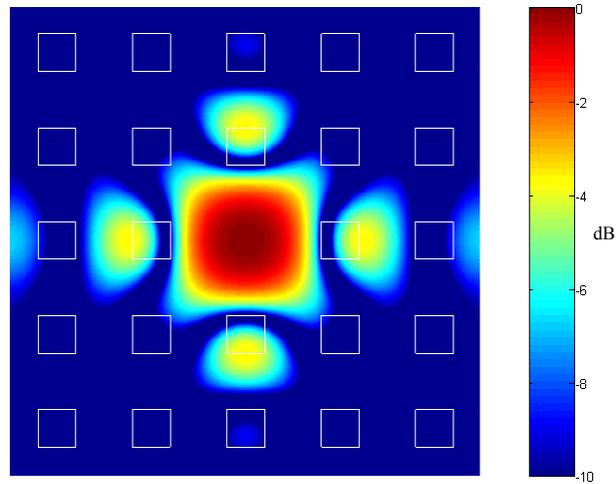


Figure II-38 : Module du champ E_z pour une macro cellule 5*5

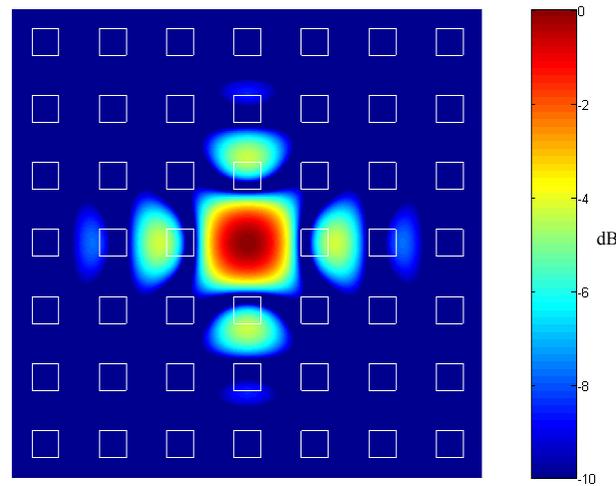


Figure II-39 : Module du champ E_z pour une macro cellule 7*7

Le défaut de la structure cristalline crée une micro cavité qui piège l'énergie. Plus le nombre de cellule augmente dans la macro cellule, plus le champ E_z est atténué aux frontières de la super cellule. Ceci a pour effet de limiter les couplages entre microcavité.

Ainsi, chaque microcavité résonne à sa fréquence propre. C'est ceci qui explique que le mode de défaut est quasiment plat sur le diagramme de la figure II-36.

Conclusion

Dans cette partie, la méthode des ondes planes a été étudiée et utilisée pour appréhender différentes structures. Elle est bien adaptée aux cristaux photoniques à deux dimensions infinis.

Dans un premier temps, elle nous a permis de représenter le diagramme de bande (appelé aussi diagramme de dispersion) de structures photoniques infinies.

La méthode des ondes planes a été adaptée pour calculer les contours de dispersion des matériaux diélectriques périodiques à deux dimensions. Ces contours de dispersion permettent de mettre en évidence l'anisotropie électromagnétique de ces matériaux.

Cette méthode est applicable à l'étude de matériaux à bande interdite photonique à défaut. Elle permet également de calculer la distribution des champs électromagnétiques dans les matériaux avec et sans défauts.

CHAPITRE III

*Interprétation des propriétés dispersives des matériaux
périodiques*

Chapitre III

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons fait l'étude de structures infinies à bande interdite photonique. Nous avons pu déterminer les propriétés électromagnétiques de ces cristaux.

Dans ce chapitre III, le comportement électromagnétique de matériaux de dimensions finies construits sur la base d'un réseau périodique va être étudiée. Pour ceci, les matériaux sont mis en interaction avec une perturbation électromagnétique qui peut venir de l'extérieur ou de l'intérieur même du matériau.

Nous allons montrer que les études menées autour des matériaux périodisés à l'infini ne suffisent pas à expliquer le comportement électromagnétique des structures de dimensions finies.

Notre étude débutera par l'analyse de matériaux périodiques monodimensionnels en interaction avec une onde plane incidente. Nous expliquerons le comportement de ce matériau en terme de coefficient de transmission (coefficient de réflexion). Un inventaire des différentes structures qui peuvent être rencontrées est proposé à travers l'étude de quatre exemples de matériaux 1D. Ces quatre exemples suffisent à expliquer les propriétés électromagnétiques de n'importe quels matériaux 1D.

Dans un second temps, nous présenterons la manière dont un matériau à bande interdite photonique à deux dimensions réalise un filtrage spatial sur les ondes électromagnétiques.

Pour étudier ces propriétés de filtrage spatial, nous développerons une méthode d'analyse qui permet de calculer des densités d'énergie électromagnétique dans l'espace conjugué des vecteurs phaseurs. Nous montrerons que les informations obtenues par cette méthode d'analyse sont complémentaires avec la connaissance des propriétés dispersives des matériaux

à deux dimensions infinis et notamment avec les surfaces de dispersion. Cette étude mettra en évidence le filtrage spatial exercé par un matériau 2D.

I- Matériaux à une dimension

Les cristaux photoniques à une dimension sont les matériaux à bande interdite photonique les plus simples. Du fait de leur mono périodicité, ils permettent d'aborder simplement les problèmes.

Ces matériaux constituent la première étape dans notre démarche de compréhension des phénomènes de résonances dans les cristaux photoniques de dimensions finies.

I.1- Equations utiles à l'étude

I.1.1- Equation de dispersion

Dans le premier chapitre, nous avons vu que pour un cristal photonique à une dimension (x par exemple), l'équation de propagation s'écrit :

$$\cos[k(a+b)] = \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \sin(\alpha a)\sin(\beta b) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \quad (\text{III-1})$$

avec $\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_a}$ et $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_b}$

La permittivité périodique $\epsilon(x)$ est représentée sur la figure III-1.

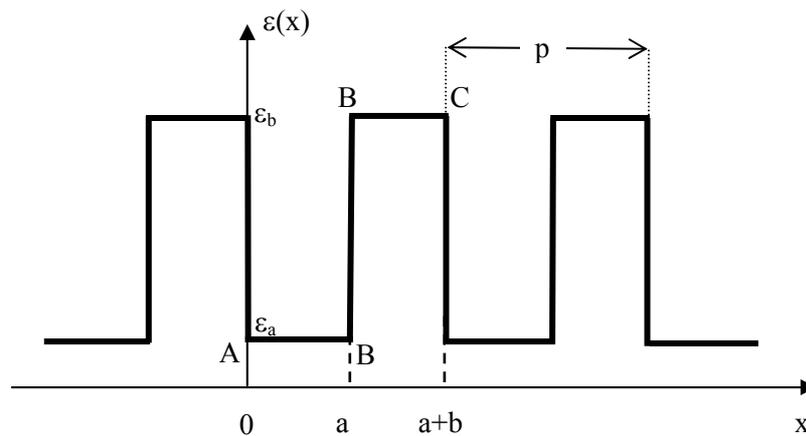


Figure III-1 : Constante diélectrique périodique d'un cristal photonique 1D

Les structures périodiques étudiées dans ce chapitre sont des plaques de diélectrique de permittivité relative ϵ_r entourées par un autre diélectrique qui peut être de l'air ($\epsilon_{\text{air}}=1$).

En prenant en compte ces valeurs, l'équation III-1 devient :

$$\cos[k(a+b)] = \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \sin(\alpha a)\sin(\beta b)\frac{\epsilon_r + 1}{2\sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{III-2})$$

avec $\alpha = \frac{\omega}{c}$ et $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}$

Pour illustrer la relation III-2, nous proposons l'étude d'une structure à une dimension dont les dimensions des plaques diélectriques sont $a = 10^{-3}$ m, de permittivité $\epsilon_r = 9$, espacées d'air de dimension $b = 3 \cdot 10^{-3}$ m (figure III-2).

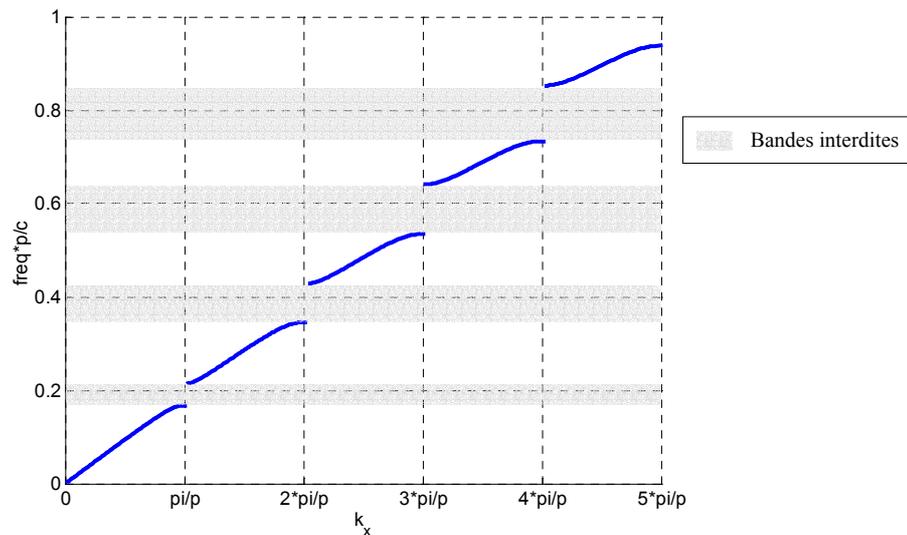


Figure III-2 : Diagramme de dispersion d'une structure périodique 1D

Ce diagramme représente la fréquence normalisée égale à la fréquence multipliée par le pas du réseau p ($p = a + b$) divisé par la célérité c ($\text{freq} \cdot a/c$), en fonction du nombre d'onde k_x .

Nous utiliserons dans la suite de la rédaction des valeurs normalisées pour représenter les résultats obtenus.

Nous pouvons observer les bandes interdites (zones grisées) et les bandes autorisées (zones blanches) sur la figure III-2.

I.1.2- Vitesse de phase et vitesse de groupe

Dans le chapitre II, nous avons présenté les notions de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

Les équations de ces vitesses sont :

- pour la vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{III-3})$$

- pour la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (\text{III-4})$$

En utilisant l'exemple présenté précédemment, et à partir du diagramme de dispersion (figure III-2), nous calculons ces vitesses. Elles peuvent être représentée en fonction du nombre d'onde ou de la fréquence.

Les figures III-3, III-4 et III-5 présentent la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde, la vitesse de phase en fonction de la fréquence, et la superposition de la vitesse de phase et du diagramme de dispersion en fonction du nombre d'onde (toutes les valeurs sont normalisées).

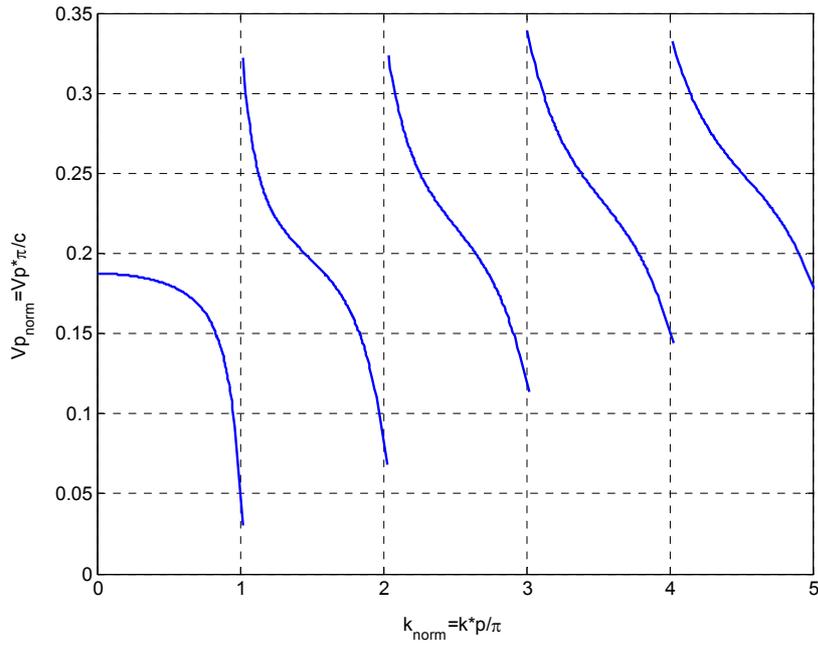


Figure III-3 : Vitesse de phase normalisée en fonction du nombre d'onde normalisé

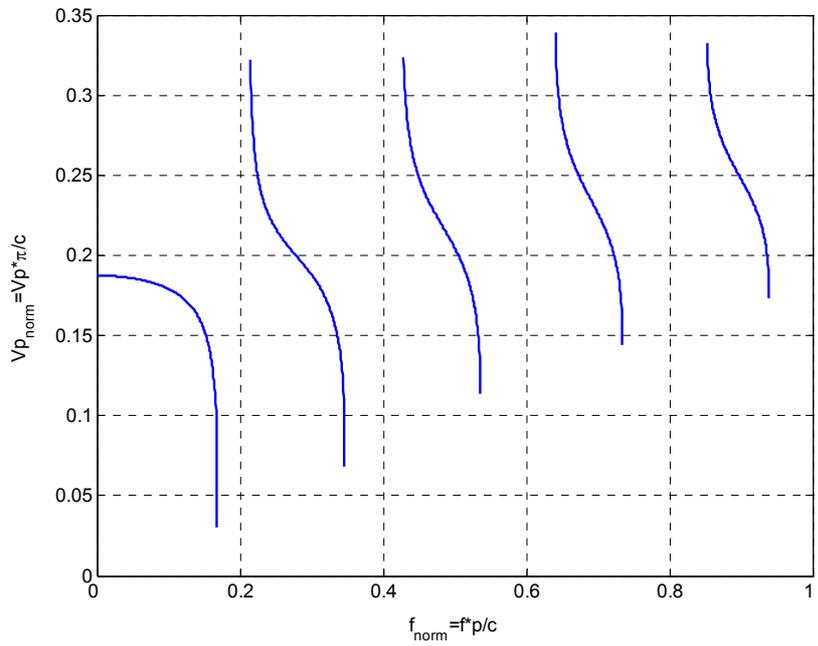


Figure III-4 : Vitesse de phase normalisée en fonction de la fréquence normalisée

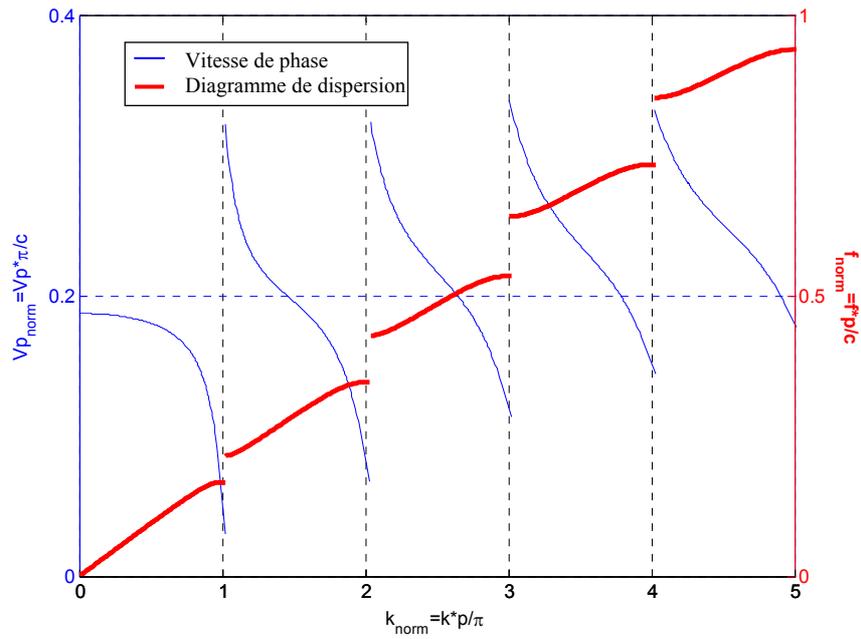


Figure III-5 : Vitesse de phase normalisée en fonction du nombre d’onde et diagramme de dispersion

Les figures III-6 et III-7 illustrent respectivement la vitesse de groupe en fonction du nombre d’onde et la vitesse de groupe en fonction de la fréquence (toutes les valeurs sont normalisées).

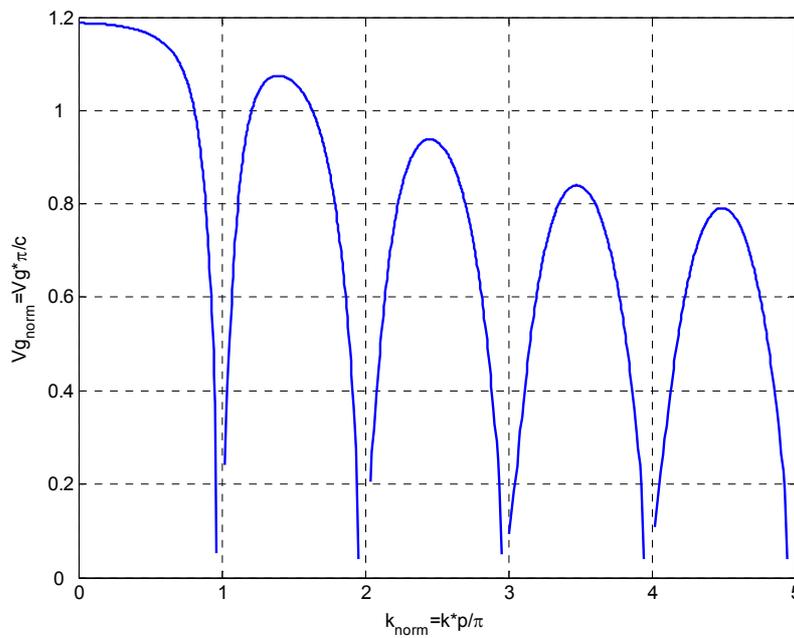


Figure III-6 : Vitesse de groupe normalisée en fonction du nombre d’onde normalisé

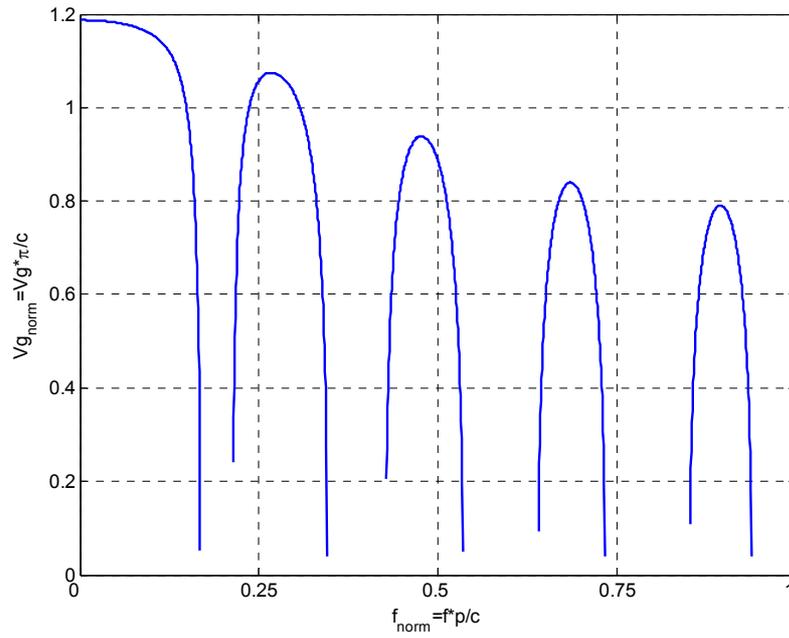


Figure III-7 : Vitesse de groupe normalisée en fonction de la fréquence normalisée

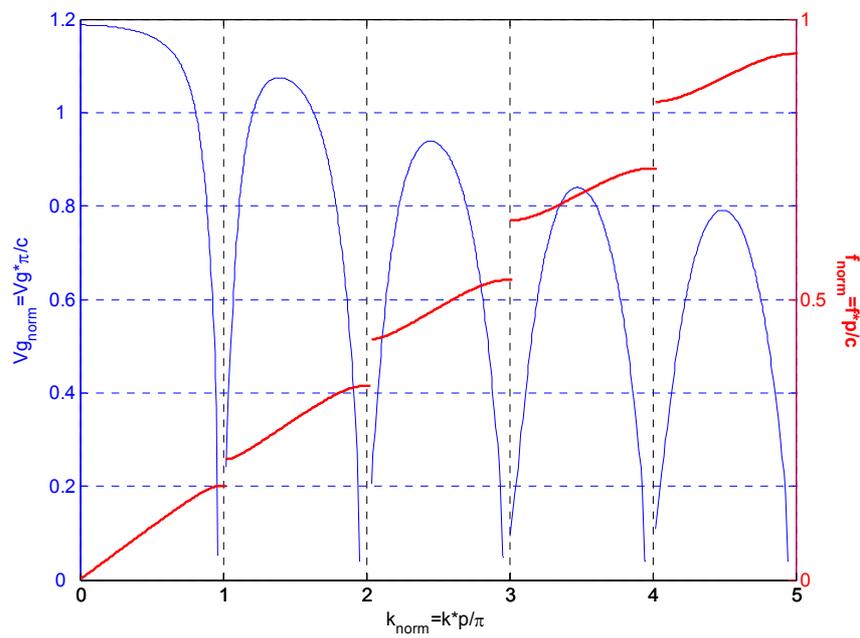


Figure III-8 : Vitesse de groupe et diagramme de dispersion

La figure III-8 représente la superposition de la vitesse de groupe normalisée en fonction du nombre d'onde normalisé et du diagramme de dispersion. La vitesse de groupe

tend vers zéro lorsque le diagramme de dispersion admet une tangente horizontale. Nous verrons ultérieurement l'intérêt de ces points singuliers lors de l'analyse de l'interaction des ondes électromagnétiques avec ces matériaux.

I.1.3- Coefficients de transmission et de réflexion

Dans le chapitre précédent, nous avons fait l'étude de structures photoniques de dimensions infinies. C'est-à-dire que l'axe supportant la périodicité du cristal était infini. Pour illustrer le problème, considérons le cas d'un matériau 1D comme présenté sur la figure III-9.

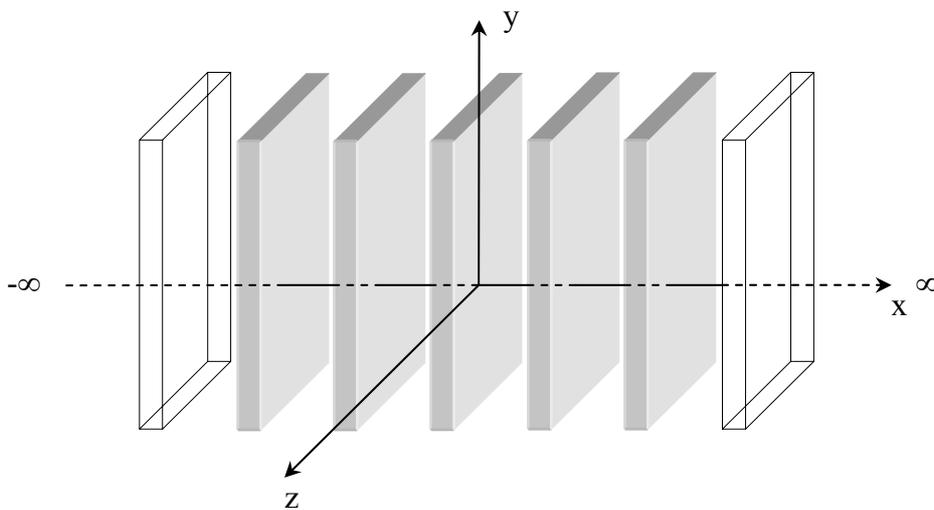


Figure III-9 : Cristal photonique 1D infini

Ce matériau 1D est de dimension finie longitudinalement suivant l'axe x . C'est-à-dire qu'on a un nombre fini de plaques suivant l'axe supportant la périodicité du matériau, les plaques étant infinies suivant leurs dimensions transversales, c'est-à-dire suivant les axes y et z . La figure III-10 illustre cette structure.

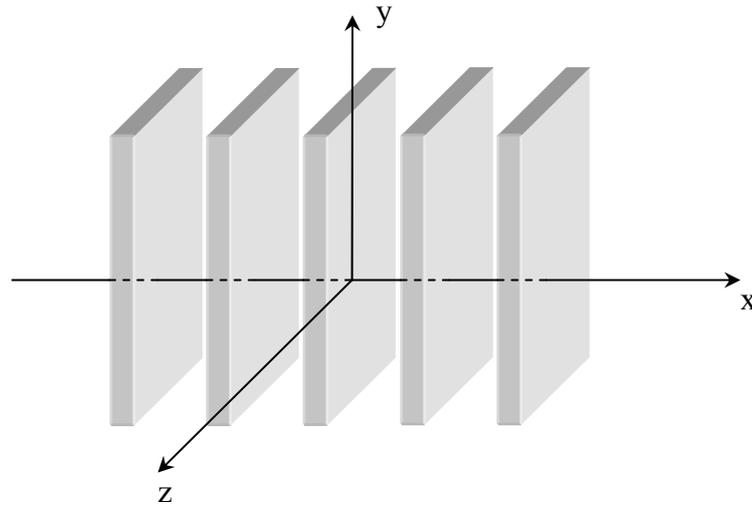


Figure III-10 : Cristal photonique 1D fini constitué de 5 plaques de diélectrique

Ce type de structure va pouvoir interagir avec une agression électromagnétique extérieure. Cette interaction doit alors garder le caractère unidimensionnel du problème électromagnétique. Il ne peut donc s'agir que de l'interaction avec une onde plane incidente se propageant suivant l'axe (Ox). Cette interaction se traduit par un spectre électromagnétique diffracté dans le sens Ox positif, et par une onde diffractée dans le sens Ox négatif. Les contenus spectraux de ces ondes diffractées sont respectivement caractérisés par le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion.

L'étude électromagnétique de ce genre de problème est réalisée par un code FDTD.

La figure III-11 schématise la méthode utilisée pour calculer les coefficients de transmission et de réflexion.

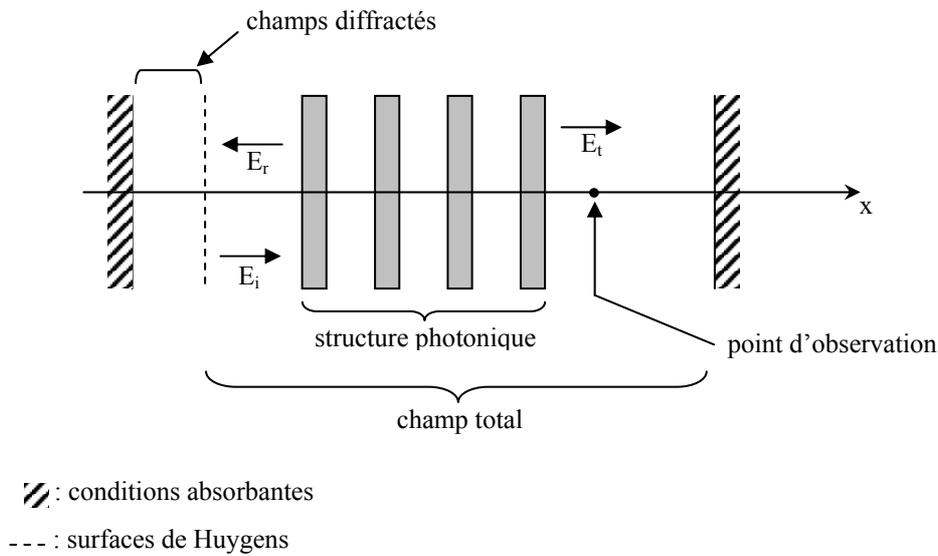


Figure III-11 : Schéma de calcul des coefficients de transmission et de réflexion

Le coefficient de transmission τ d'une structure périodique présentant ou non des défauts, correspond au rapport entre les amplitudes de l'onde transmise et de l'onde incidente :

$$\tau = \frac{E_{transmis}}{E_{incident}}, \quad (\text{III-5})$$

et le coefficient de réflexion ρ est le rapport entre les amplitudes de l'onde réfléchie et de l'onde incidente :

$$\rho = \frac{E_{réfléchi}}{E_{incident}}. \quad (\text{III-6})$$

La surface de Huygens génère une onde plane se propageant dans le sens des x positifs. Cette onde illumine ainsi la surface plane de la structure. La surface de Huygens permet surtout de scinder le volume de calcul en une zone de champ total et une zone de champ diffracté. Dans la zone de champ total règne tous les champs (incident, réfléchi, transmis) et dans la zone de champ diffracté ne règne que le champ réfléchi.

Les conditions absorbantes de part et d'autre de la structure sont des conditions aux limites absorbantes du type Engquist-Majda [1].

Pour le calcul du coefficient de transmission τ , le point d'observation est situé derrière la structure photonique comme représenté sur la figure III-12. Il est situé dans une zone de champ total.

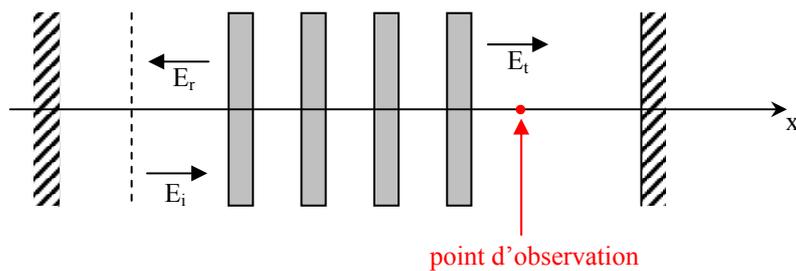


Figure III-12 : Position du point d'observation pour le calcul du coefficient de transmission

Pour obtenir le coefficient de réflexion ρ , le point d'observation est situé entre la couche absorbante et la surface de Huygens comme l'indique la figure III-13. Il est situé dans la zone de champ diffracté.

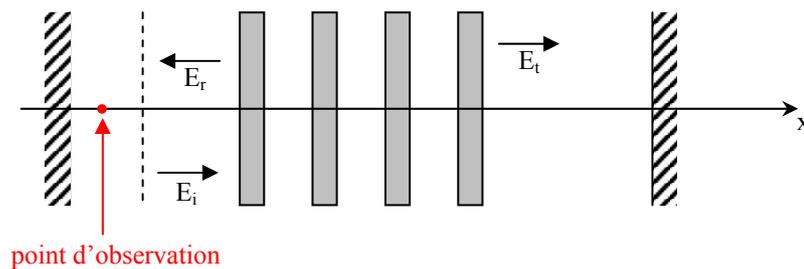


Figure III-13 : Position du point d'observation pour le calcul du coefficient de réflexion

Pour illustrer ces coefficients, nous étudions la structure périodique formée de plaque de diélectrique $\varepsilon_b = 9$ d'épaisseur $b = 25 \cdot 10^{-4}$ m espacées par des gaps d'air ($\varepsilon_a = 1$) d'épaisseur $a = 75 \cdot 10^{-4}$ m. La propagation des ondes se fait alors en $\lambda/4$. Les deux coefficients ainsi calculés sont représentés sur les figures suivantes.

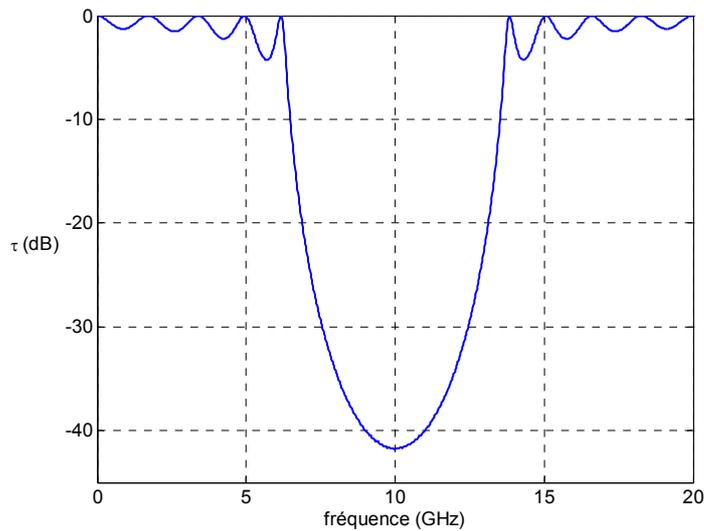


Figure III-14 : Coefficient de transmission

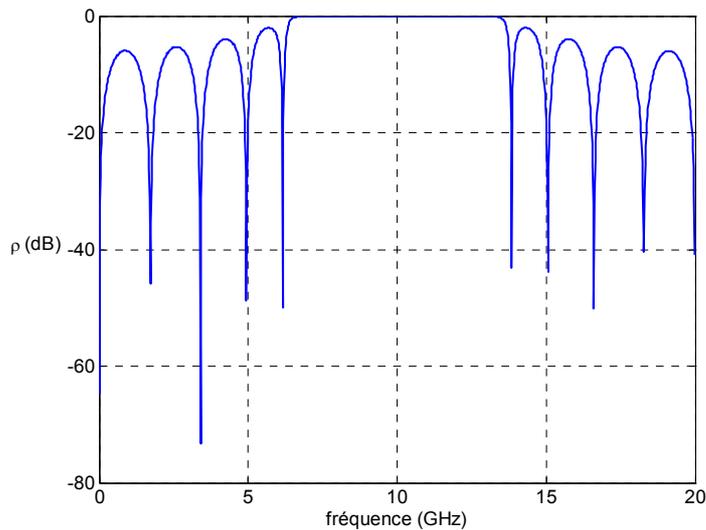


Figure III-15 : Coefficient de réflexion

Pour notre étude, on ne s'intéressera qu'aux conditions de résonance du cristal. Ces conditions traduisent une transparence parfaite de la structure. Ainsi, les zéros (dB) du coefficient de transmission traduisent les phénomènes de résonance. Les fréquences peuvent également être extraites des pics de réflexion nuls (-40 dB) du coefficient de réflexion.

On extrait donc les fréquences de résonances des coefficients de réflexion ρ ou de transmission τ puis on les injecte dans l'équation III-2 écrite sous la forme de l'équation III-7 :

$$k = \frac{1}{a+b} \arccos \left[\cos(\alpha a) \cos(\beta b) - \sin(\alpha a) \sin(\beta b) \frac{\varepsilon_r + 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \right] \quad (\text{III-7})$$

avec $\alpha = \frac{\omega}{c}$, $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$, et $\omega = 2\pi \cdot f$ (f : fréquence correspondante aux zéro (dB) du coefficient de transmission)

Nous appelons cette valeur théorique du nombre d'onde k_{disp} (relative à l'équation de dispersion).

I.1.4- Condition de résonance 1D

Par analogie avec n'importe quelle autre structure résonante, les fréquences de résonances sont liées à la vitesse de phase dans le matériau. Cette vitesse dépend de la fréquence. Elle est connue grâce aux courbes de dispersion $k = f(freq)$ (figure III-17). Ainsi, les différentes fréquences de résonances de la structure 1D de dimension d (figure III-16) sont données par la relation III-8 :

$$\boxed{k(\omega) \cdot d = n \cdot \pi} \quad (\text{III-8})$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, et où $k(\omega)$ représente le nombre d'onde dans le matériau périodique infini.

En utilisant une structure photonique finie à une dimension constituée, par exemple, de quatre lames de diélectrique ϵ_a , alternées de quatre plaques de diélectrique ϵ_b , la longueur d de la relation III-8 représente un nombre entier de période p du réseau ($p=a+b$). Cette distance est représentée sur la figure III-16.

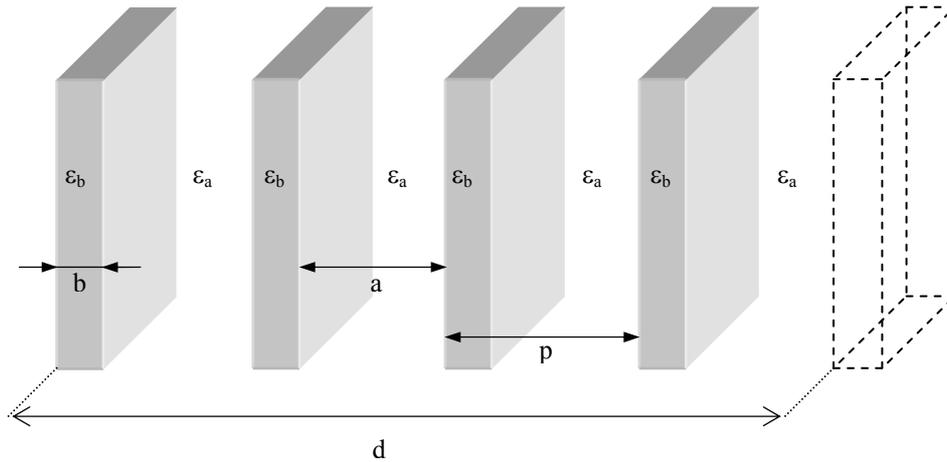


Figure III-16 : Dimension de la structure photonique

$k(\omega)$ est donné par la courbe de dispersion (figure III-17).

Les variables du graphique III-17 sont des valeurs normalisées :

- pour le nombre d'onde :

$$k_{norm} = \frac{k \cdot p}{\pi} \quad (\text{III-9})$$

- pour la fréquence du diagramme de dispersion :

$$f_{norm} = \frac{f \cdot p}{c} \quad (\text{III-10})$$

avec $p = a + b$ (pas du réseau)

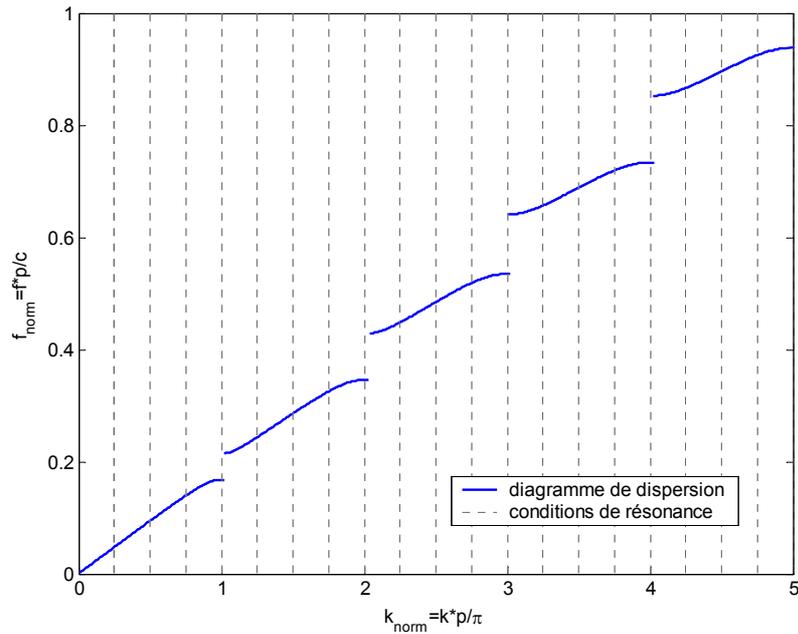


Figure III-17 : Diagramme de dispersion et conditions de résonance

On a représenté sur la figure III-17 le diagramme de bande superposé avec les conditions de résonances sur le nombre d'onde k (en traits discontinus verticaux). Ces conditions de résonances correspondent à un cristal composé de quatre “cellules élémentaires” (4 lames de permittivité ε_a alternées par 4 lames de permittivité ε_b).

La valeur n de la relation III-8 représente le nombre d'alternance de la distribution de phase du champ électrique dans la structure photonique.

Nous considérons une structure basée sur le modèle précédemment citée ($a = 75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $b = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\varepsilon_b = 9$, $\varepsilon_a = 1$) mais composée de cinq lames de diélectrique $\varepsilon_b = 9$. Nous représentons alors les modules et phases de la transformée de Fourier du champ électrique pour trois fréquences (f_1 , f_2 , f_3) correspondant à trois zéros (dB) du coefficient de transmission (figure III-18).

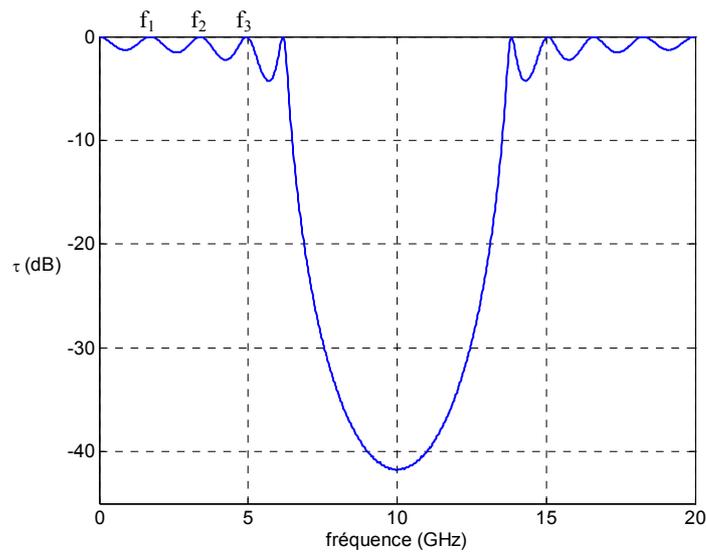
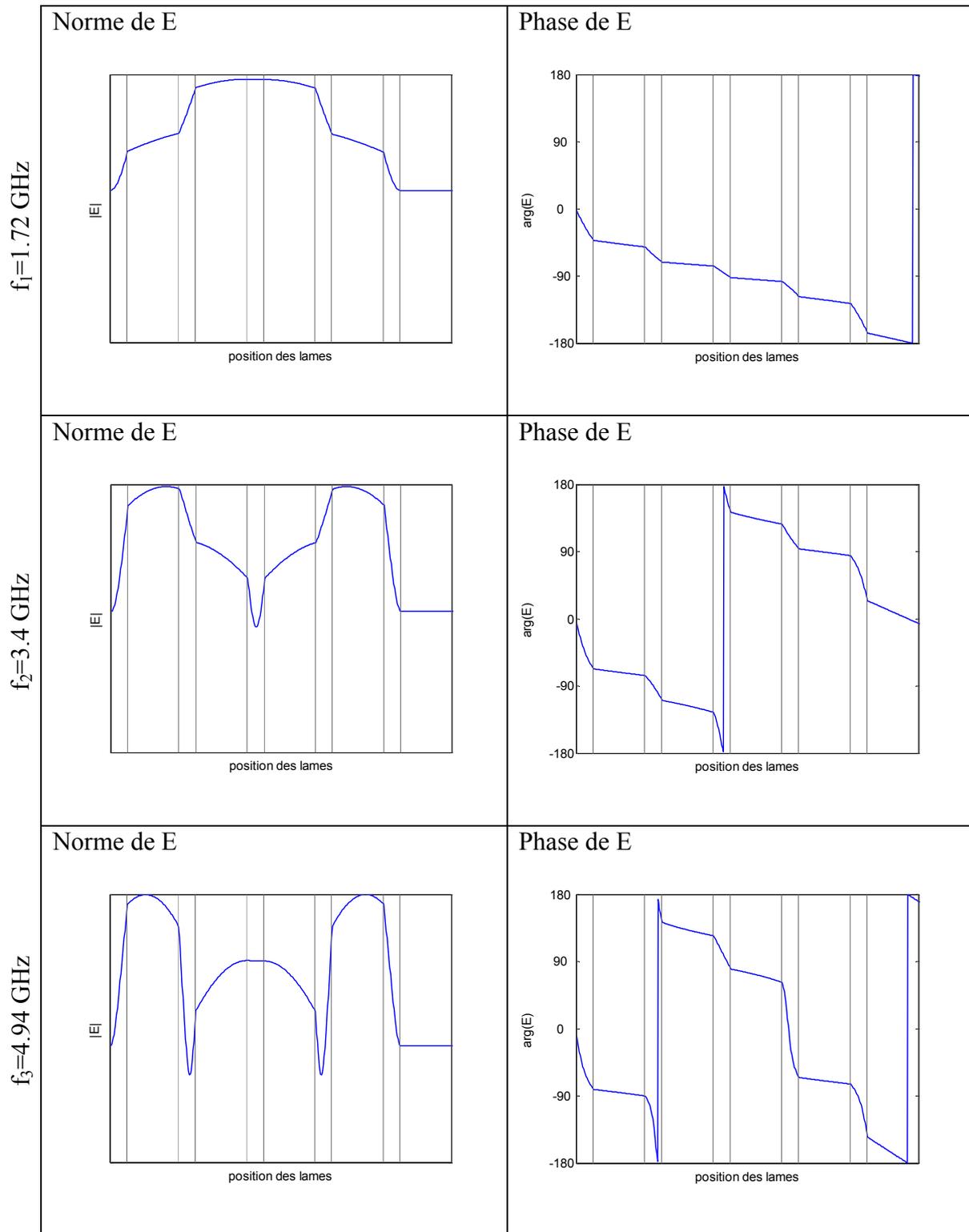


Figure III-18 : Coefficient de transmission avec indication des zéros (dB)

Le tableau III-1 présente la distribution du champ électrique dans le matériau en module et en phase pour les trois premières fréquences de résonance f_1 , f_2 et f_3 visibles sur la figure III-18.



**Tableau III-1 : Module et phase du champ électrique pour
3 fréquences (1.72, 3.4 et 4.94 GHz)**

Les courbes représentant les normes de la transformée de Fourier du champ électrique montrent que le niveau du champ est le même en entrée et en sortie de la structure, ceci indique que l'on a une transmission de 100%.

Les courbes illustrant la phase permettent de vérifier que pour la fréquence f_1 le champ E est déphasé de π entre l'entrée et la sortie du matériau, pour la fréquence f_2 nous avons un déphasage de $\pi + \pi = 2\pi$, et pour la fréquence f_3 nous avons un déphasage de $\pi + \pi + \pi = 3\pi$.

La relation III-8 est équivalente à :

$$k(\omega) = \frac{n \cdot \pi}{d}$$

Nous notons $k_{\text{réso}}$ la valeur du nombre d'onde spécifiée par cette condition de résonance.

I.2- Etude de différentes structures périodiques à une dimension

Nous allons identifier les valeurs de k_{disp} et de $k_{\text{réso}}$ pour des matériaux photoniques. Nous rappelons que k_{disp} est la valeur théorique fournie par la relation de dispersion III-7.

Les structures photoniques étudiées sont des plaques d'épaisseur b et de permittivité diélectrique ϵ_b espacées de la distance a de diélectrique ϵ_a . Le pas du réseau est égal à $p = a + b$.

Ces structures sont schématisées sur la figure suivante.

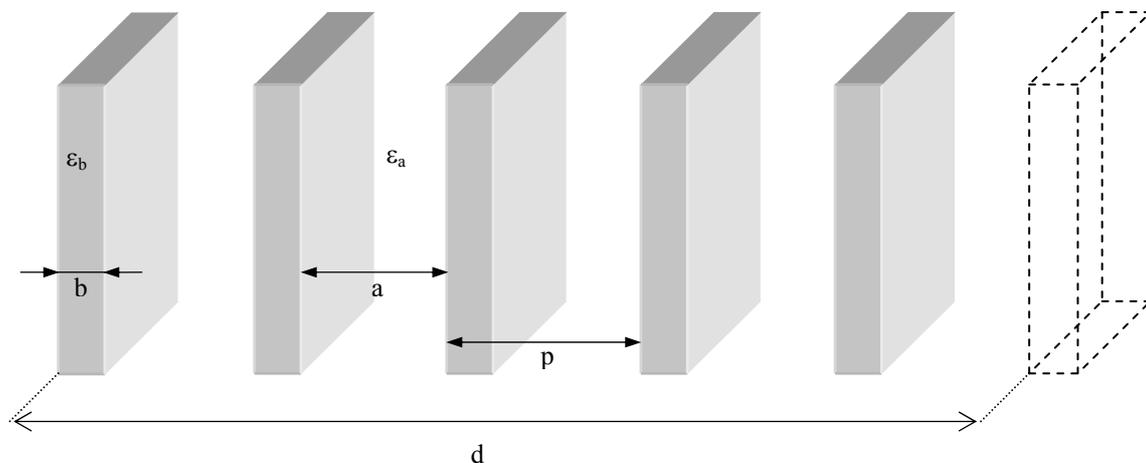


Figure III-19 : Structure photonique sans défaut étudiée

Nous allons considérer trois structures différentes dont les lames sont de longueurs électriques et des permittivités diélectriques différentes.

I.2.1- Alternance de 2 lames diélectriques $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq 1$ de même longueur électrique

Nous considérons la structure ayant les dimensions et les permittivités suivantes :

$$\epsilon_a = 4$$

$$\epsilon_b = 9$$

$$a = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$b = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Les longueurs électriques sont identiques pour les matériaux de permittivité ϵ_a et ϵ_b . La dimension totale de la structure est $d = 312,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Nous obtenons le coefficient de transmission représenté sur la figure III-20.

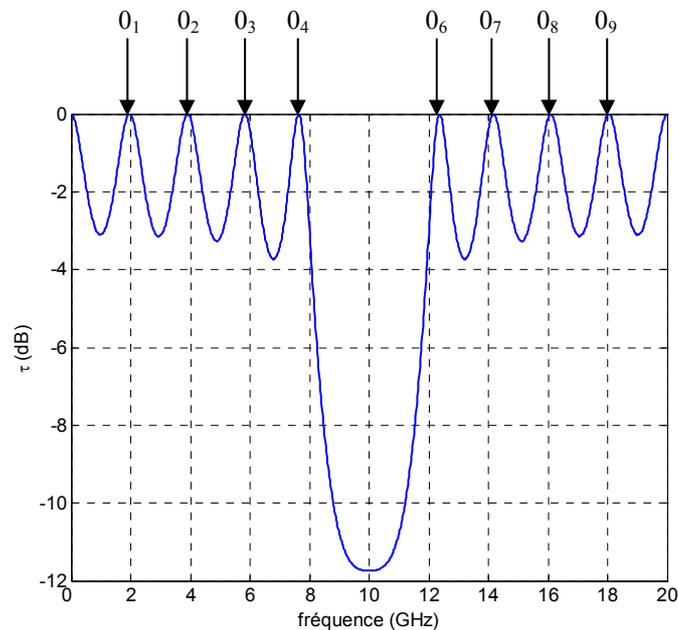


Figure III-20 : Coefficient de transmission

Nous avons la condition de résonance $k_{réso} \cdot d = n \cdot \pi$. Nous recherchons les valeurs des fréquences correspondantes ($f_{dispersion}$) grâce à la relation de dispersion III-1 en y injectant $k_{réso}$. Pour chaque valeur de n , on compare alors les fréquences obtenues avec les fréquences ($f_{résonance}$) des points 0_1 à 0_9 .

Nous rassemblons alors les valeurs déterminées dans le tableau III-2.

	$k_{réso}$	f_{disp} (GHz) relation III-1	$f_{réso}$ (GHz) figure III-20
0_1 (n=1)	100.53	1.96	1.96
0_2 (n=2)	201.06	3.9	3.9
0_3 (n=3)	301.59	5.82	5.82
0_4 (n=4)	402.12	7.64	7.64
(n=5)	502.65	11.28	? ? ?
0_6 (n=6)	603.18	12.36	12.36
0_7 (n=7)	703.72	14.17	14.18
0_8 (n=8)	804.25	16.09	16.1
0_9 (n=9)	904.78	18.04	18.04

Tableau III-2 : Comparaison entre f_{disp} et $f_{réso}$

Les valeurs de f_{disp} obtenues par la relation de dispersion et de $f_{réso}$ données par le coefficient de transmission (figure III-20) obtenues sont identiques chaque fois que la condition de résonance III-8 est satisfaite. On doit néanmoins remarquer que la condition de résonance $k \cdot d = 5\pi$ n'est pas vérifiée par le coefficient de transmission de la figure III-20. Cette valeur de n correspond à une annulation de la vitesse de groupe (figure III-21). Donc l'énergie ne peut rentrer dans le matériau.

Les valeurs présentées en abscisse et en ordonnée du graphique III-21 sont des valeurs normalisées. Pour le nombre d'onde k_{norm} (en abscisse), nous multiplions la valeur calculée de ce nombre d'onde par le pas p du réseau puis en divisant ce produit par π . Pour la fréquence normalisée f_{norm} (en ordonnée), la fréquence est multipliée par le pas p du réseau puis divisé par la célérité c ($c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$). Nous obtenons ainsi des nombres sans dimension.

Cette figure III-21 représente la superposition de diagramme de dispersion (f_{norm} en fonction de k_{norm}), des conditions de résonance $k.d = n.\pi$, du coefficient de transmission en faisant correspondre ses fréquences normalisées à celles du diagramme de dispersion, et de la vitesse de groupe ($V_{g_{\text{norm}}}$ en fonction de k_{norm}).

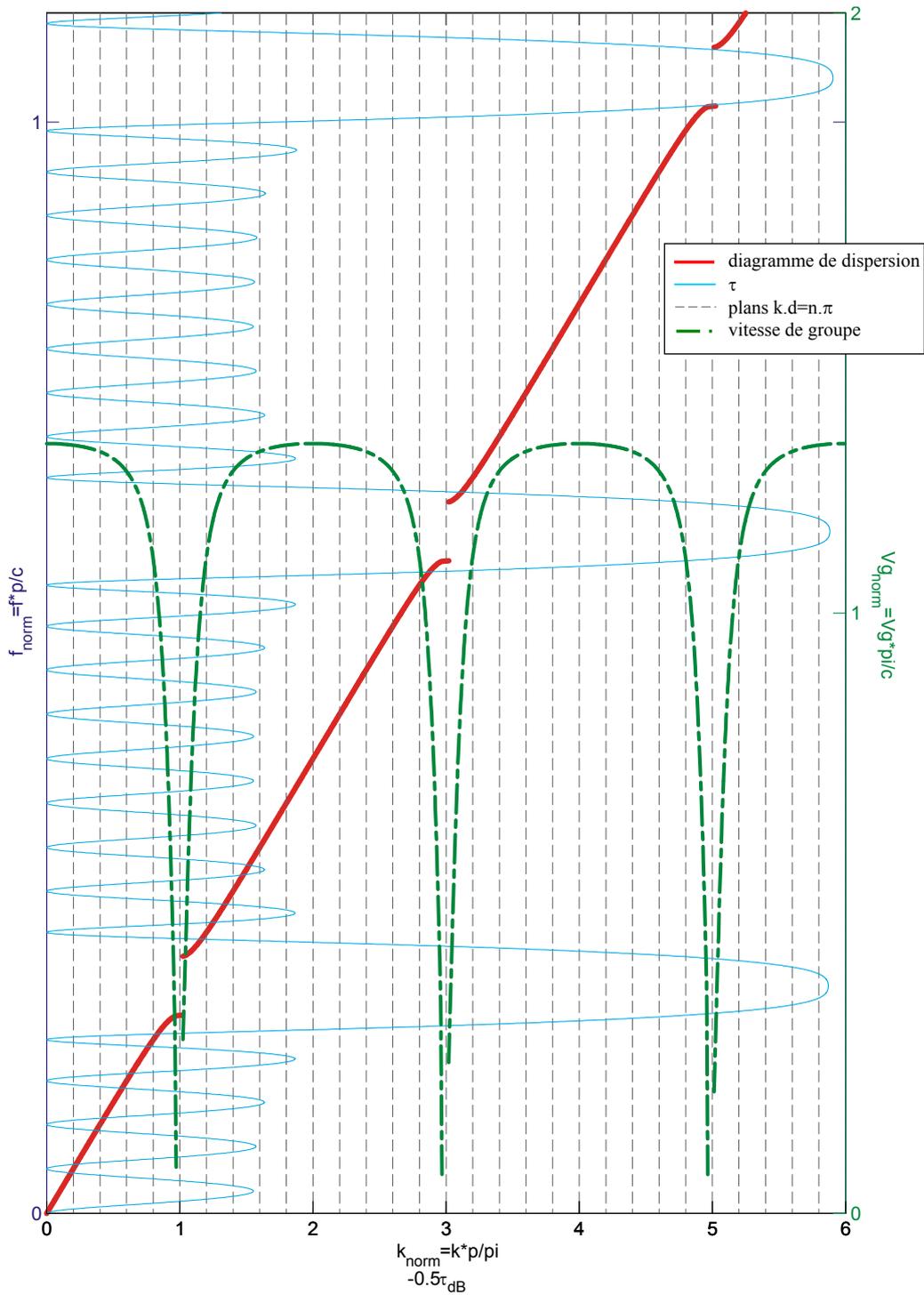


Figure III-21 : Superposition du diagramme de dispersion, du coefficient de transmission, de la vitesse de groupe et du nombre d'onde $k.d=n.\pi$

La vitesse de groupe du matériau considérée ainsi que le coefficient de réflexion sont représentés sur la figure III-22.

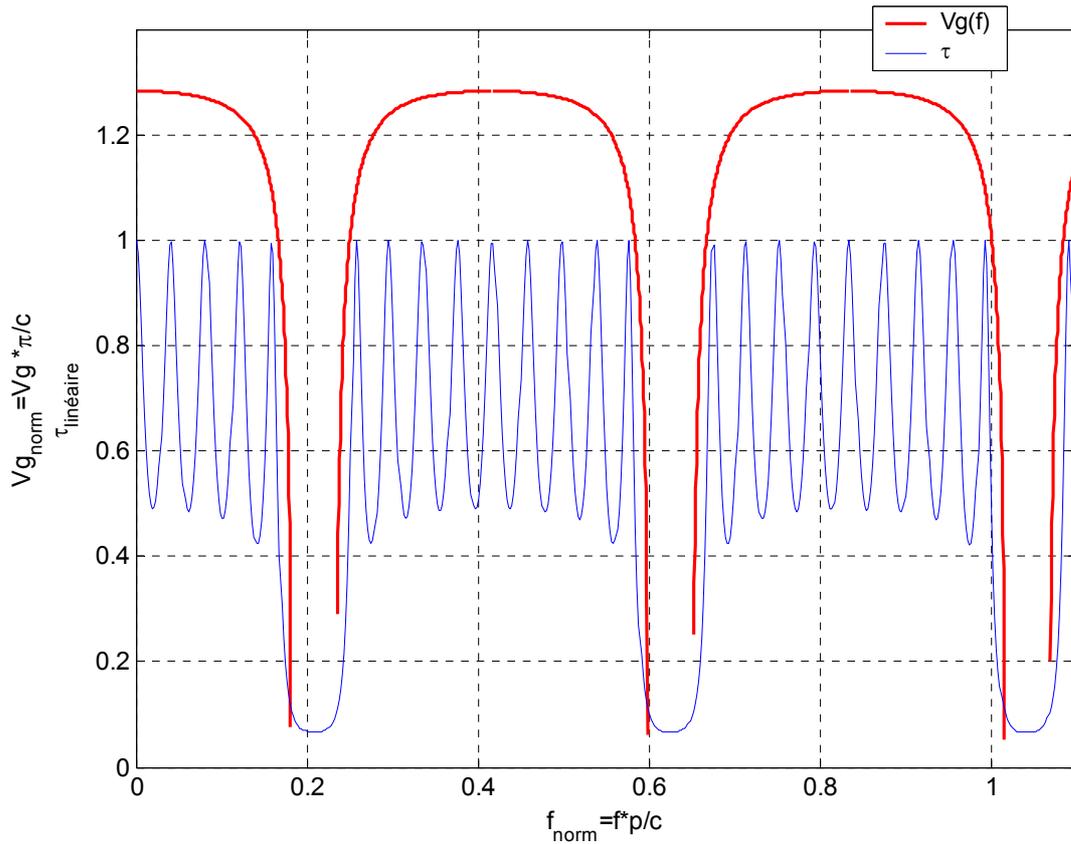


Figure III-22 : Superposition de la vitesse de groupe $Vg(f)$ en fonction de la fréquence, et coefficient de réflexion linéaire

La vitesse de groupe tend à s'annuler en bord de bande interdite. Cela montre qu'aucune énergie ne peut pénétrer dans le matériau.

I.2.2- Alternance de deux lames diélectriques $\epsilon_a=1$ et $\epsilon_b=9$, de même longueur électrique

Nous considérons maintenant le cas de la structure périodique présentée ci-dessous.

$$\epsilon_a = \epsilon_0 = 1$$

$$\epsilon_b = \epsilon_r = 9$$

$$a = 75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$b = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Les longueurs électriques de chaque matériau diélectrique sont identiques. La dimension totale de la structure est $d = 50.10^{-3}$ m.

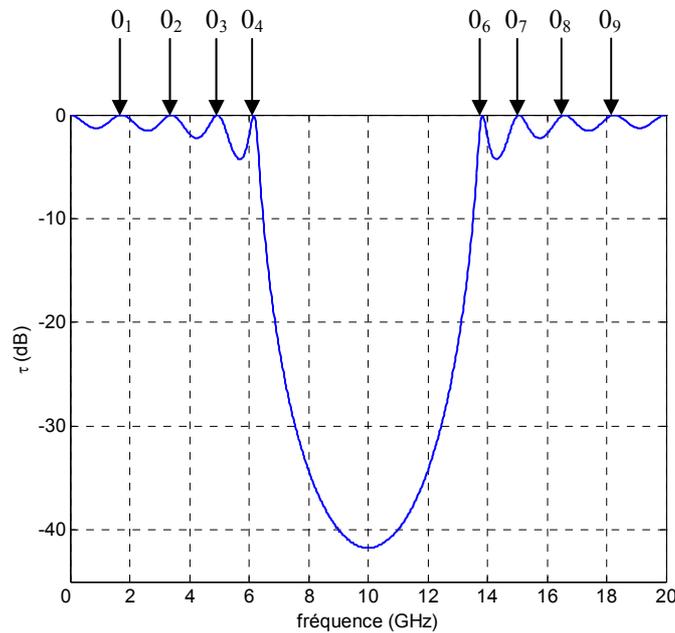


Figure III-23 : Coefficient de transmission

	$k_{\text{réso}}$	f_{disp} (GHz) relation III-1	$f_{\text{réso}}$ (GHz) figure III-20
0_1 (n=1)	62.83	1.725	1.72
0_2 (n=2)	125.66	3.4	3.4
0_3 (n=3)	188.49	4.94	4.94
0_4 (n=4)	251.33	6.16	6.16
(n=5)	314.16	13.33	? ? ?
0_6 (n=6)	376.99	13.84	13.84
0_7 (n=7)	439.82	15.05	15.06
0_8 (n=8)	502.65	16.59	16.6
0_9 (n=9)	565.49	18.27	18.28

Tableau III-3 : Comparaison entre f_{disp} et $f_{\text{réso}}$

Les fréquences f_{disp} obtenues par la relation de dispersion III-1 lorsque le nombre d'onde satisfait les conditions de résonance (relation III-8) ne trouvent pas toutes une fréquence $f_{\text{réso}}$ dans le coefficient de transmission (figure III-23). La condition de résonance $k.d = 5\pi$ n'est pas satisfaite car la vitesse de groupe tend vers zéro (figure III-24). L'onde électromagnétique ne peut pas entrer dans le matériau.

La figure III-24 superpose les représentations du diagramme de dispersion (f_{norm} en fonction de k_{norm}), les coefficients de transmission pour cinq lames de diélectrique, les conditions de résonance ($k.d = n.\pi$), et de la vitesse de groupe (Vg_{norm} en fonction de k_{norm}).

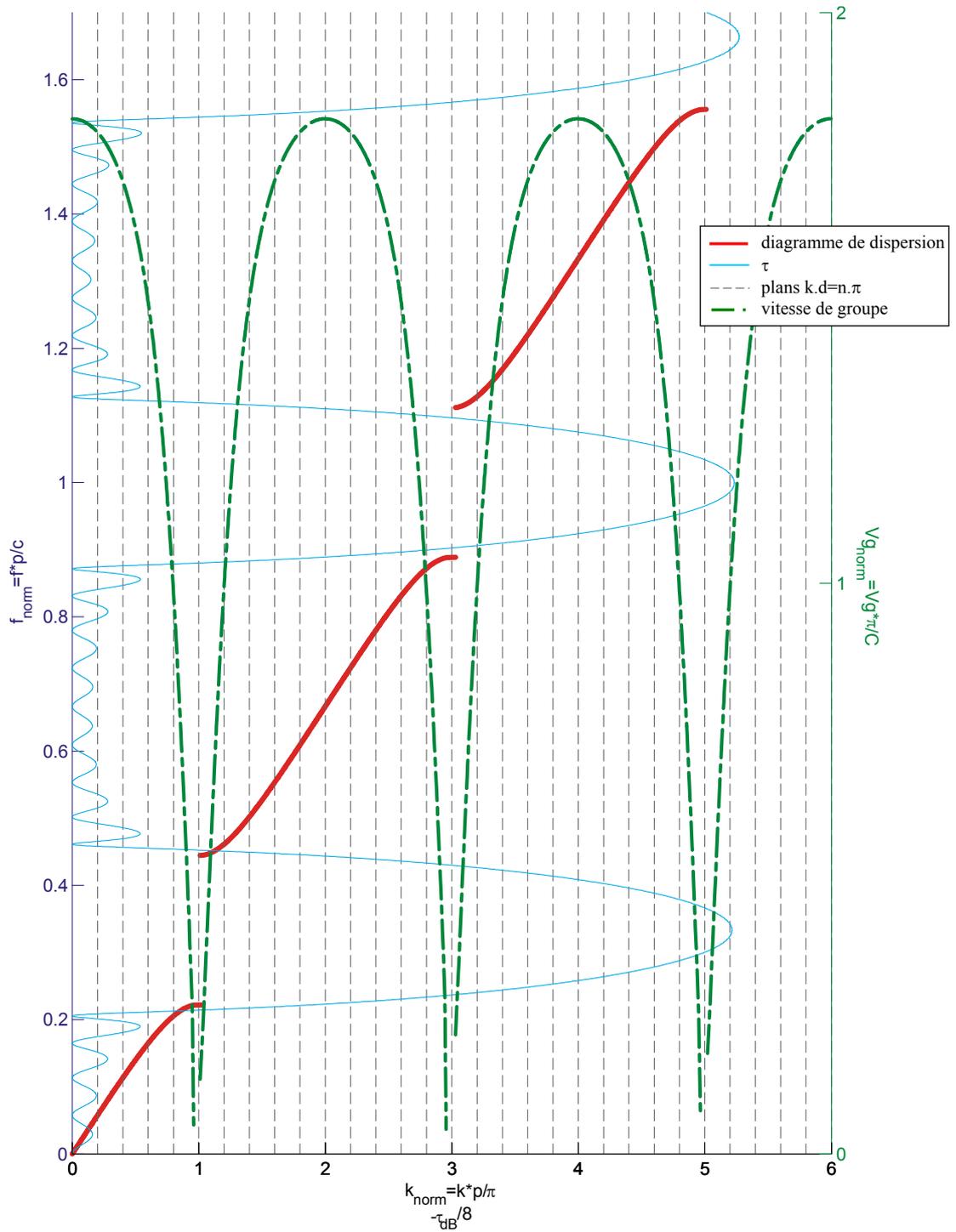


Figure III-24 : Superposition du diagramme de dispersion, du coefficient de transmission, de la vitesse de groupe et du nombre d'onde $k \cdot d = n \cdot \pi$

Nous représentons sur la figure III-25 la vitesse de groupe normalisée en fonction de la fréquence normalisée ainsi que le coefficient de transmission en linéaire.

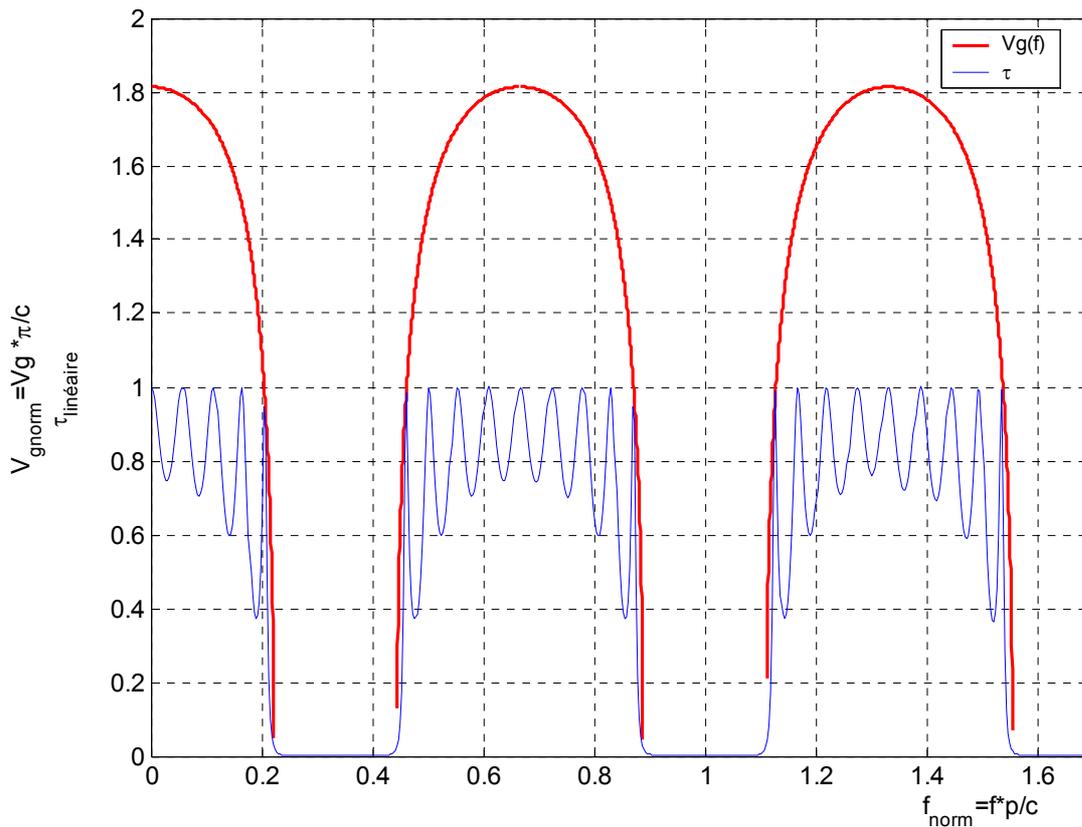


Figure III-25 : Superposition de la vitesse de groupe $V_g(f)$ en fonction de la fréquence, et coefficient de transmission linéaire

Les résultats obtenus sont similaires à ceux calculés avec $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq 1$. C'est-à-dire qu'en bord de bande interdite, la vitesse de groupe tend à s'annuler empêchant ainsi toutes ondes électromagnétiques à se propager dans le matériau. Le coefficient de réflexion est égal à 1 (en linéaire).

On observe aussi que la dynamique entre deux pics de transmission (condition de résonance) est liée à la vitesse de groupe. Autrement dit, les oscillations au sein d'une bande passante du matériau sont moindres lorsque la vitesse de groupe est maximum.

I.2.3- Alternance de deux lames de diélectrique de longueurs électriques différentes

Pour cette structure étudiée, nous avons les dimensions et valeurs des permittivités ci-dessous :

$$\epsilon_a = \epsilon_0 = 1$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_r = 9$$

$$a = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$b = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

La dimension totale de la structure est $d = 60 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Nous pouvons représenter le coefficient de transmission de la structure considérée sur une bande de fréquences de 60 GHz (figure III-26).

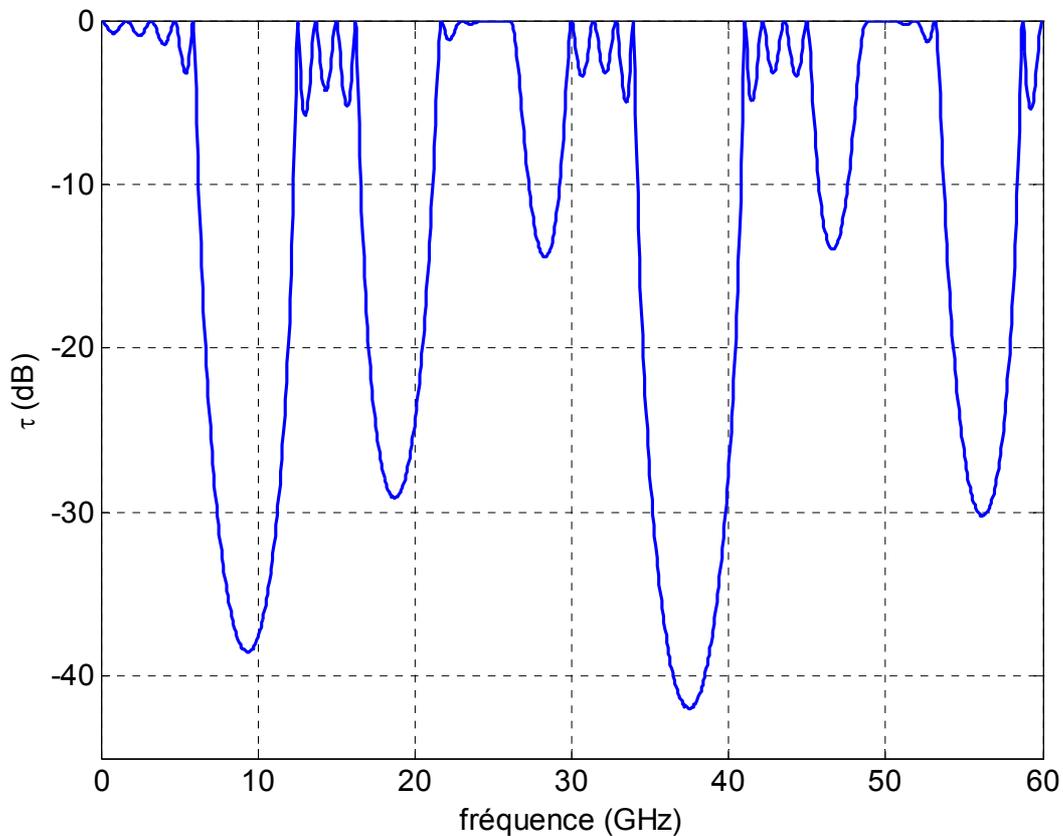


Figure III-26 : Coefficient de transmission sur une bande passante de 60 GHz

Pour calculer les nombres d'onde $k_{\text{réso}}$ et k_{disp} , nous limitons l'étude aux trois premières bandes passantes (figure III-27).

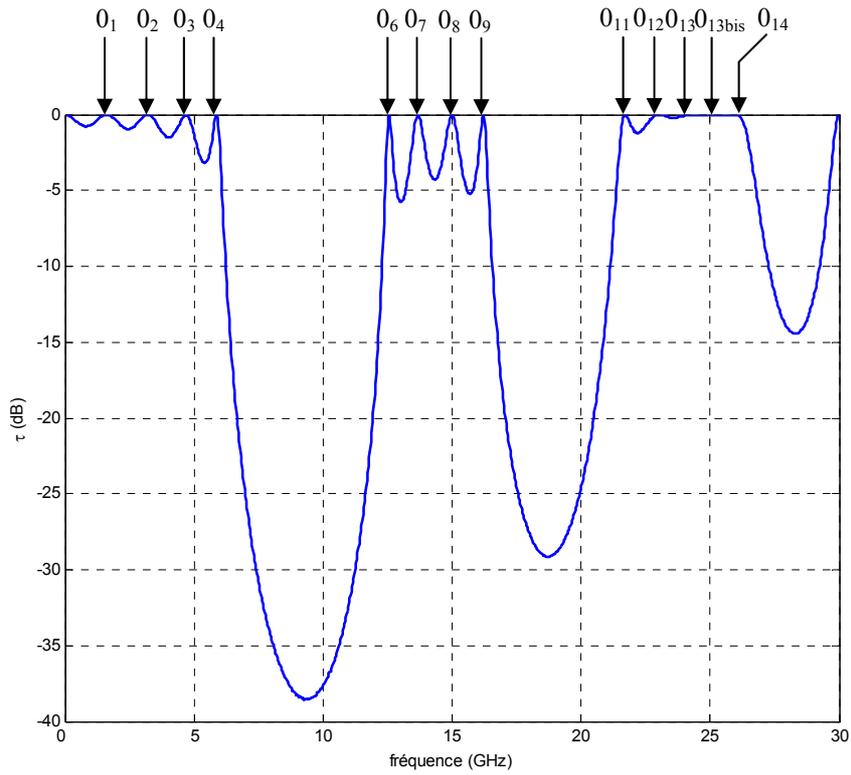


Figure III-27 : Coefficient de transmission sur une bande passante de 30 GHz

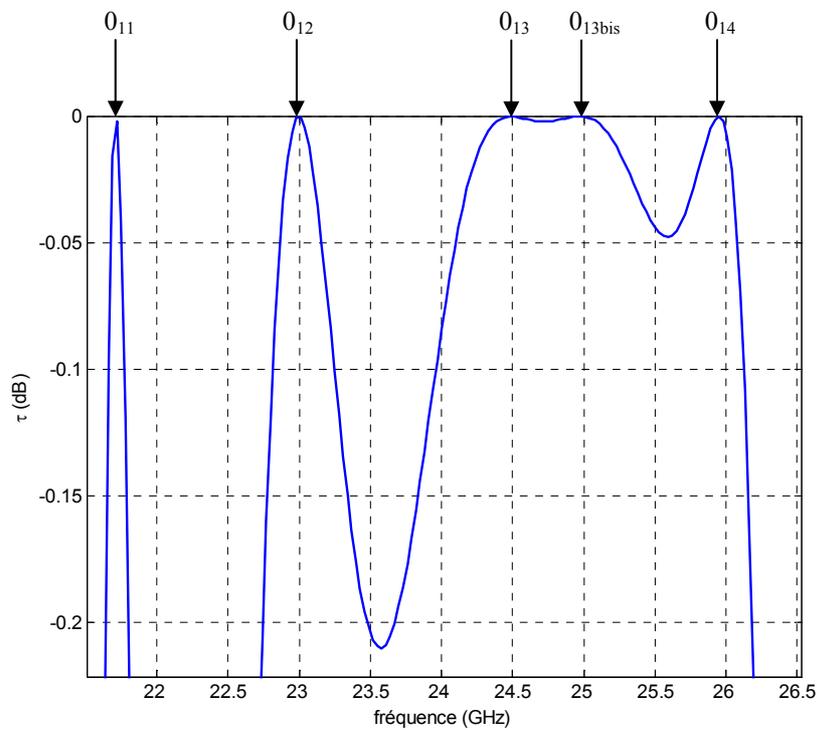


Figure III-28 : Zoom sur le coefficient de transmission au niveau de la troisième bande passante

	$k_{\text{réso}}$	f_{disp} (GHz) (relation III-1)	$f_{\text{réso}}$ (GHz) (figure III-20)
0_1 (n=1)	52.36	1.63	1.64
0_2 (n=2)	104.72	3.22	3.22
0_3 (n=3)	157.08	4.69	4.7
0_4 (n=4)	209.44	5.87	5.86
0_5 (n=5)	261.80	12.08	? ? ?
0_6 (n=6)	314.16	12.56	12.56
0_7 (n=7)	366.52	13.67	13.68
0_8 (n=8)	418.88	15	15
0_9 (n=9)	471.24	16.22	16.22
0_{10} (n=10)	523.60	16.79	? ? ?
0_{11} (n=11)	575.96	21.71	21.72
0_{12} (n=12)	628.32	23	22.98
0_{13} (n=13)	680.68	24.49	24.48
$0_{13\text{bis}}$? ? ? ?	? ? ? ?	25.02
0_{14} (n=14)	733.04	25.97	25.96

Tableau III-4 : Comparaison entre f_{disp} et $f_{\text{réso}}$

Les fréquences f_{disp} des conditions de résonance 0_5 et 0_{10} admettent les mêmes remarques que les deux paragraphes précédents, c'est-à-dire que la vitesse de groupe tend vers zéro et l'onde ne peut pas pénétrer dans le matériau.

Par contre, le point $0_{13\text{bis}}$ ne correspond à aucune fréquence de résonance donnée par la relation III-8 et pourtant le coefficient de transmission est à 0 dB pour la fréquence $f_{\text{réso}}=25.02$ GHz.

Pour expliquer ce phénomène, nous représentons les coefficients de transmission des structures composées de une et cinq lames, le diagramme de dispersion et les conditions de résonance $k.d = n.\pi$ sur la figure III-29. Nous réalisons un zoom sur la zone autour de $f.a/c = 1$ (figure III-30).

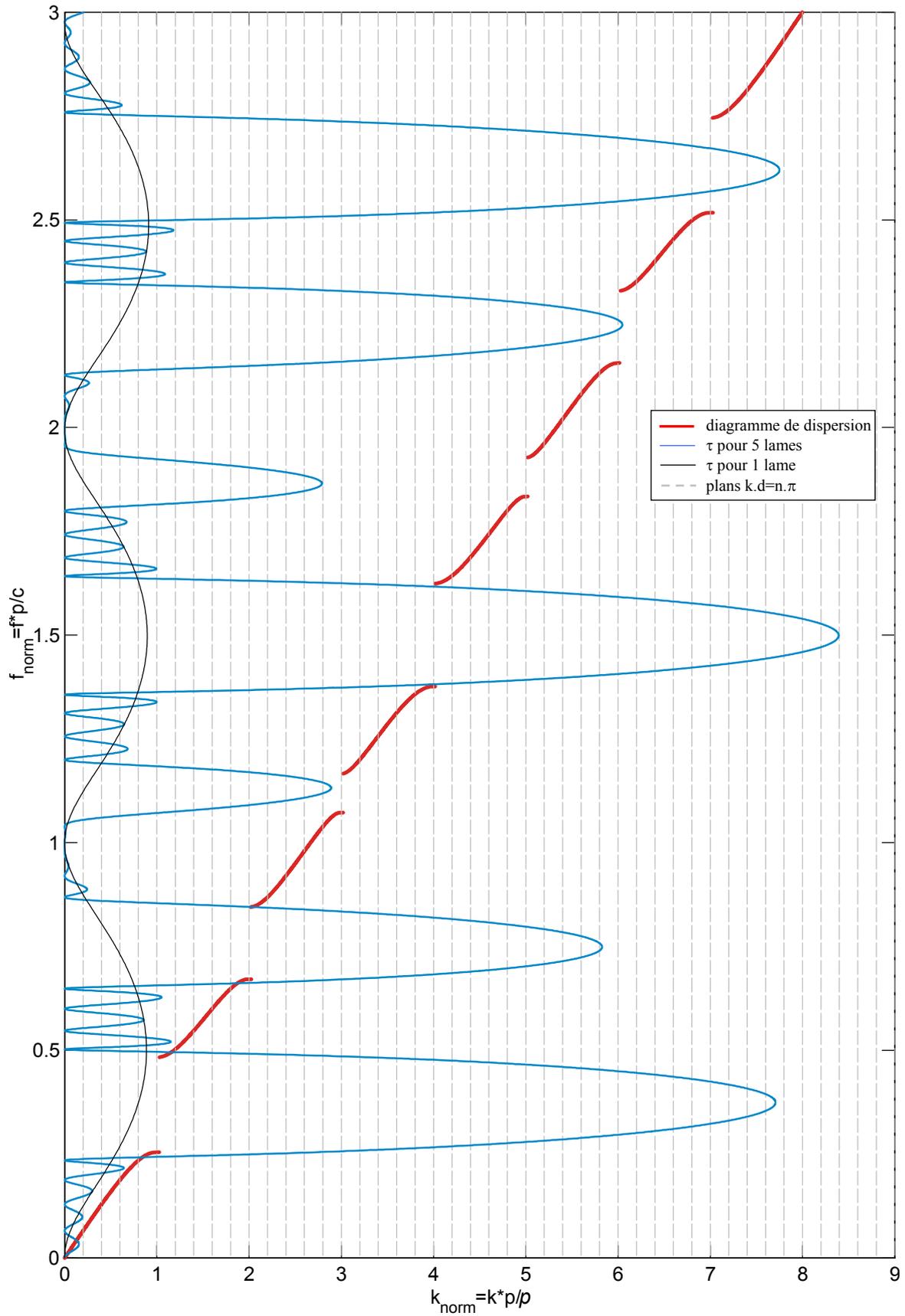


Figure III-29 : Superposition du diagramme de dispersion, du coefficient de transmission et du nombre d'onde $k \cdot d = n \cdot \pi$

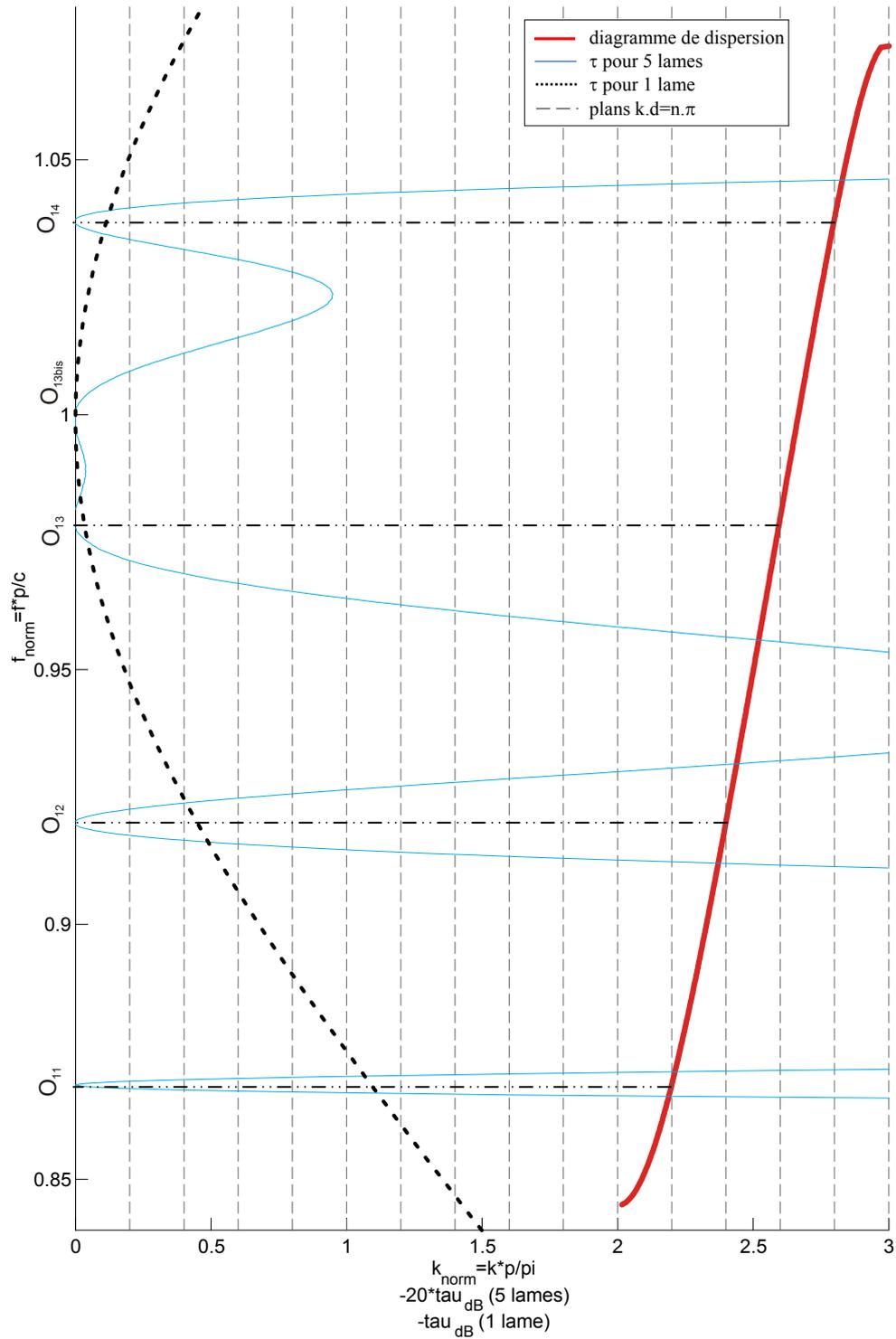


Figure III-30 : Zoom autour de $f \cdot a / c = 1$

Nous représentons sur la figure III-30 par des traits interrompus fins les concordances entre les points issus des intersections entre les conditions de résonance ($k \cdot d = n \cdot \pi$) et le diagramme de dispersion et les points à zéro dB du coefficient de transmission pour cinq

lames. Entre $f.a/c = 0,95$ et $f.a/c = 1$, il existe deux points de fréquence O_{13} et O_{13bis} (figure III-30). La superposition du coefficient de transmission d'une seule lame met en évidence l'origine du point O_{13bis} . Cette condition de résonance est liée aux propriétés de la cellule élémentaire. Celle-ci, lorsqu'elle est isolée dans l'air, résonne pour la fréquence O_{13bis} . L'association de cinq cellules identiques conserve cette fréquence de résonance.

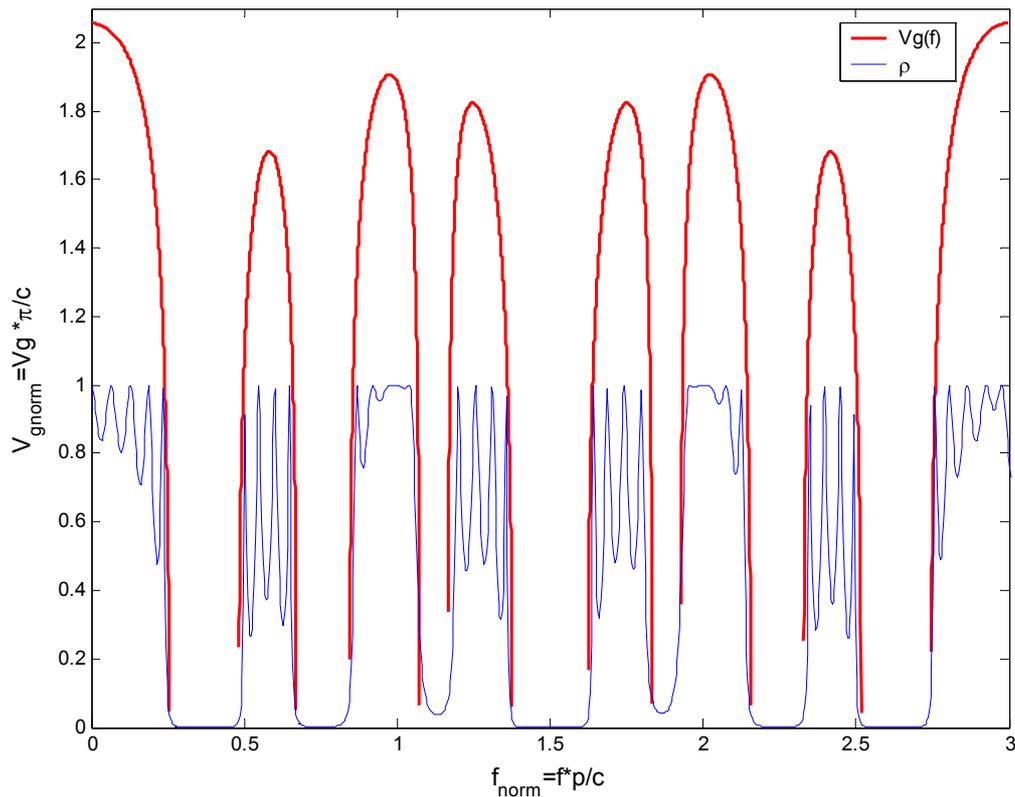


Figure III-31 : Superposition de la vitesse de groupe $Vg(f)$ en fonction de la fréquence, et coefficient de réflexion linéaire

Nous constatons que les résultats obtenus ne sont pas semblables aux résultats des deux paragraphes précédents car les longueurs électriques ne sont pas les mêmes dans les diélectriques ϵ_a et ϵ_b .

I.2.4- Différentes façon de concevoir un matériau BIP borné avec une même cellule élémentaire.

Les matériaux périodiques que nous venons d'étudier étaient formés à partir d'une répétition périodique d'une cellule élémentaire telle que présentée sur la figure III-32.

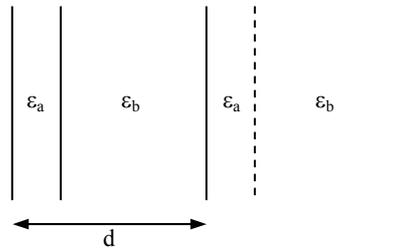


Figure III-32 : Maille élémentaire de dimension d

Cette cellule élémentaire peut être représentée en ne considérant plus une répétition périodique de lame de deux diélectriques différents mais en la schématisant comme indiquée sur la figure III-33.

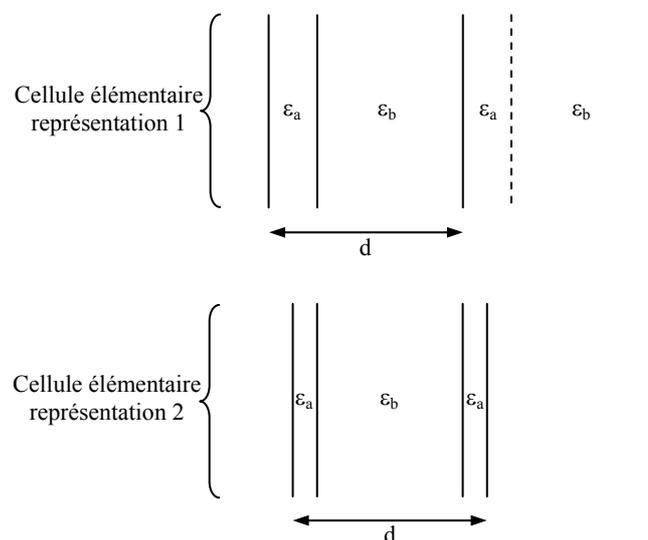


Figure III-33 : Cellules élémentaires de dimension d

Lorsque nous étudions un matériau infini (cf. chapitre II), la deuxième représentation de la cellule élémentaire n'a pas d'influence sur les propriétés dispersives de la structure périodique infinie. Mais pour un matériau de dimensions finies, nous n'obtenons pas les mêmes résultats si nous considérons les deux représentations de cellules élémentaires et que nous les périodisons.

Pour illustrer ce phénomène, nous allons étudier les structures suivantes :

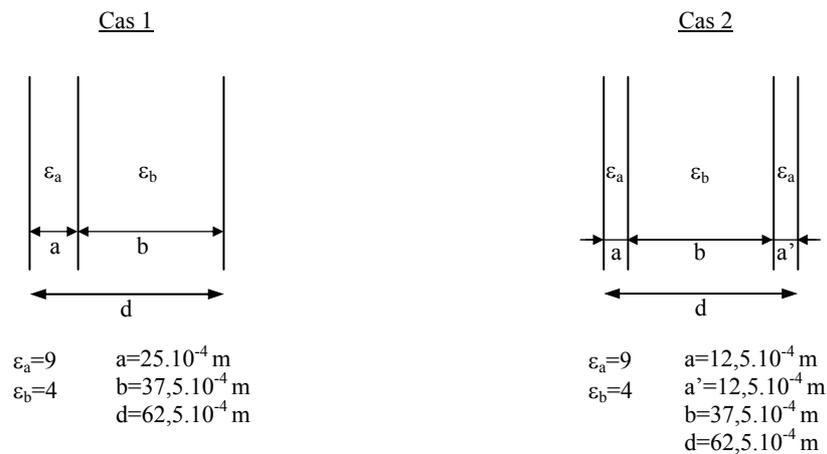


Figure III-34 : Structures étudiées

Nous pouvons alors calculer les coefficients de transmission dans les deux cas en considérant les structures formées d'une seule cellule et de cinq cellules.

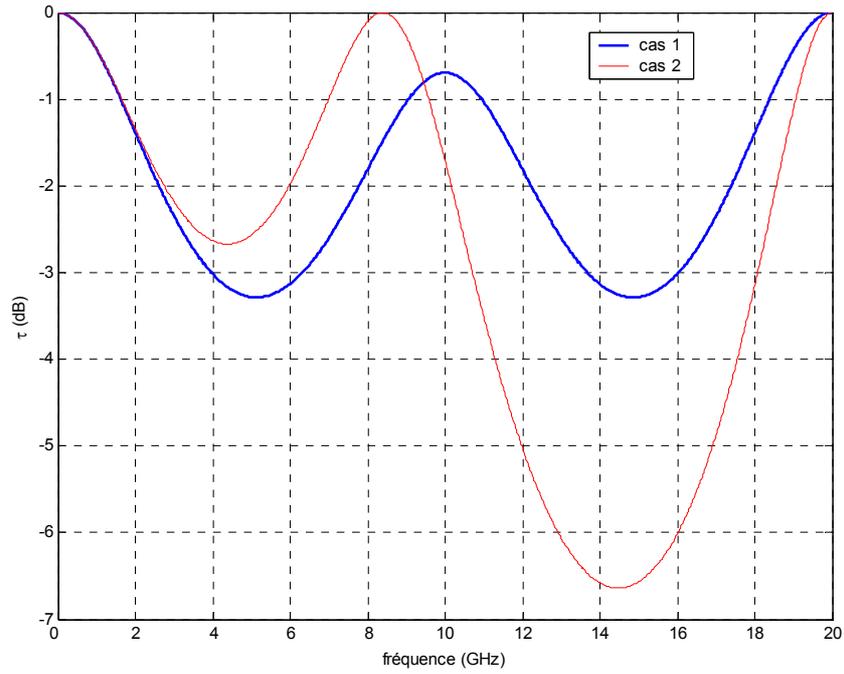


Figure III-35 : Coefficients de transmission pour une seule cellule

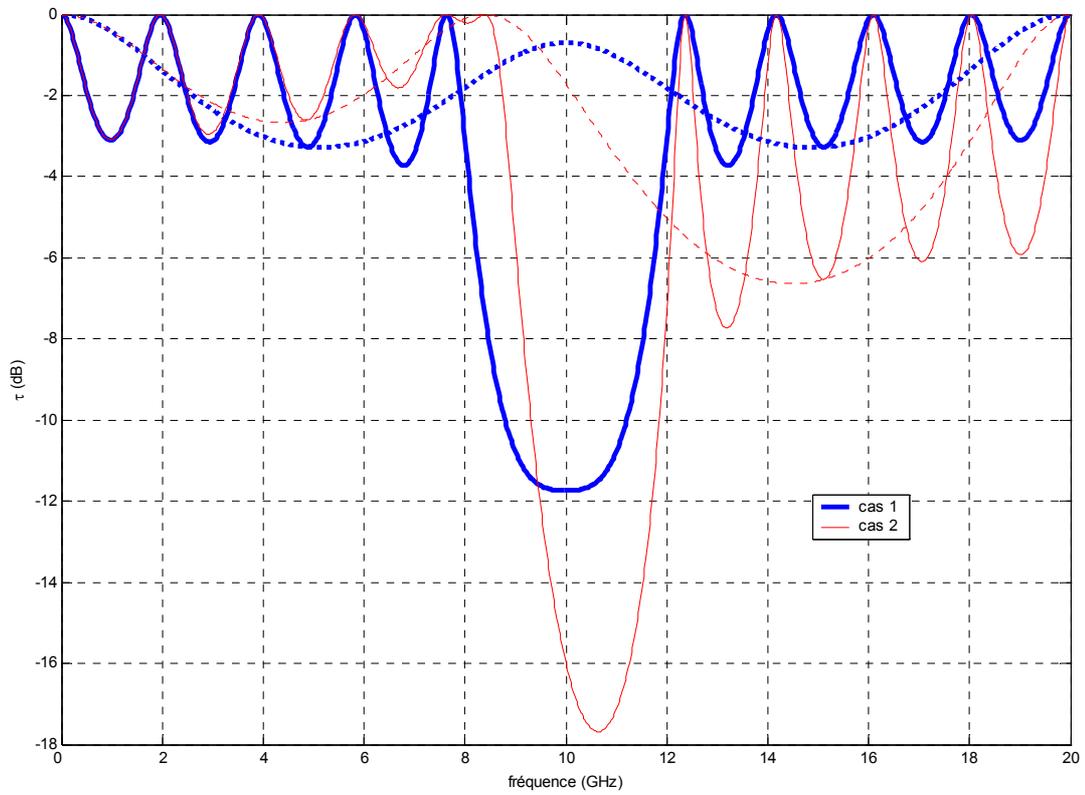


Figure III-36 : Superposition de coefficients de transmission pour cinq cellules et pour une cellule

Le coefficient de transmission calculé pour cinq lames dans le cas 2 fait apparaître un nouveau pic après 8 GHz. Ce pic n'existe pas sur le coefficient de transmission de la structure à cinq lames du cas 1. L'expression de la présence de ce pic se trouve dans la figure III-35. L'étude de la transmission de la maille élémentaire montre une résonance à 8,2 GHz. Pour cette fréquence, la maille élémentaire est totalement transparente. Si une cellule est transparente à 8,2 GHz alors cinq cellules le seront aussi.

II- Matériaux à deux dimensions

Dans le paragraphe précédent, nous avons conclu que les conditions de résonance des cristaux 1D de dimension finie dépendent directement des lois de dispersion du même matériau considéré infini.

Ayant travaillé à partir de matériau à une dimension, nous allons étudier les matériaux à deux dimensions pour constater si ce phénomène se reproduit.

Nous allons montrer comment la finitude du matériau associé à la condition de résonance et aux courbes de dispersions permet de définir des propriétés de filtrage spatiale.

Pour mener à bien cette étude, nous utiliserons une technique originale qui consiste à analyser l'interaction des champs électromagnétiques avec la structure à deux dimensions dans l'espace des vecteurs d'onde.

II.1- Calcul d'un bilan énergétique ramené dans l'espace des vecteurs phaseurs

Nous allons définir une densité d'énergie par unité de volume $d\vec{k}^3$ où \vec{k} représente un vecteur phaseur. L'étude de l'interaction électromagnétique est tout d'abord réalisée par différences finies temporelles. Le problème une fois résolu est transposé dans l'espace des vecteurs d'onde. Nous proposons ici une finalité aux études menées dans [54], [55] et [56].

Nous représentons les étapes de la décomposition en ondes planes du volume de calcul FDTD dans la figure III-37 et nous détaillons par la suite chaque étape.

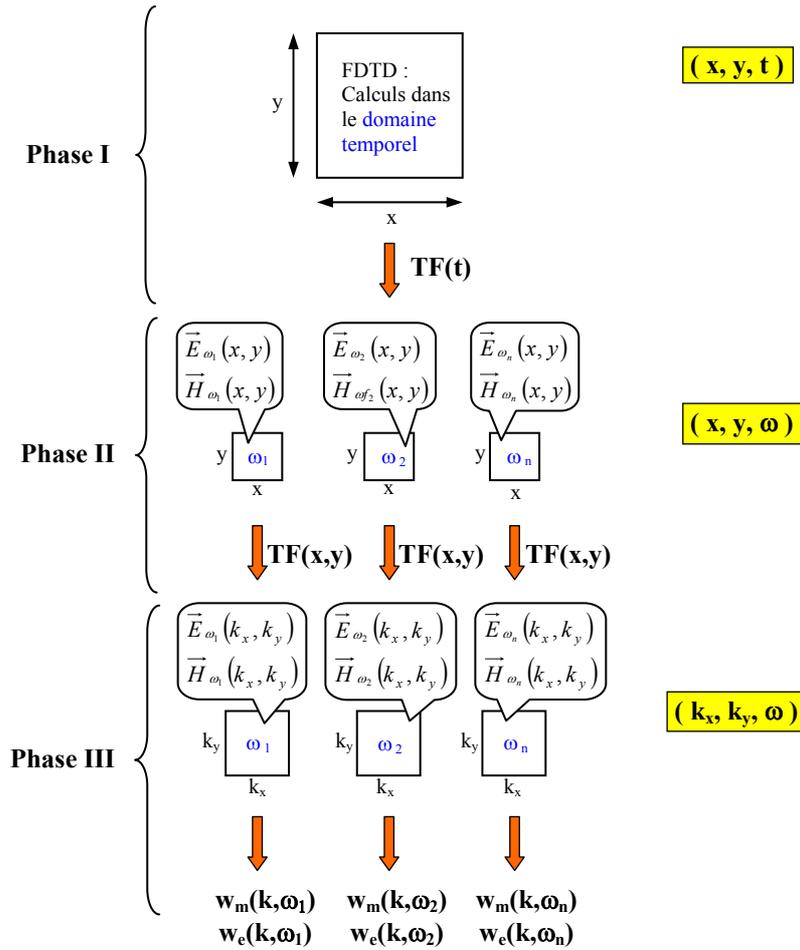


Figure III-37 : Décomposition des différentes phases de calcul du code 2D

II.1.1- Calculs du bilan énergétique

Commençons par quelques rappels d'électromagnétisme et précisons le sens des densités d'énergie w_m et w_e .

De la forme transitoire des équations de Maxwell, on extrait :

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (V \cdot A / m^3) \quad (III-11)$$

soit

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (III-12)$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ a la dimension d'une puissance instantanée par unité de surface (V.A/m²).
C'est le vecteur de Poynting.

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w_m}{\partial t} \quad (V.A/m^3) \quad (\text{III-13})$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial w_e}{\partial t} \quad (V.A/m^3) \quad (\text{III-14})$$

$\vec{E} \cdot \vec{J}$ représente la densité de puissance transformée en une autre énergie.

On réalise l'intégrale sur un volume V de la relation III-12, et grâce au théorème d'Ostrogradsky, on peut écrire :

$$\oiint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_m + w_e) dV - \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV \quad (\text{III-15})$$

w_m et w_e sont les densités volumiques d'énergie magnétique et électrique.

Pour transposer cette relation en régime harmonique, il suffit d'écrire :

$$E(t) = \frac{\underline{E} e^{j\omega t} + \underline{E}^* e^{-j\omega t}}{2} \quad (\text{III-16})$$

On fait de même pour $D(t)$, $H(t)$ et $B(t)$.

$$S(t) = \left(\frac{\underline{E} e^{j\omega t} + \underline{E}^* e^{-j\omega t}}{2} \right) \times \left(\frac{\underline{H} e^{j\omega t} + \underline{H}^* e^{-j\omega t}}{2} \right) \quad (\text{III-17})$$

On définit la valeur moyenne de $S(t)$:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \Re(\underline{E} \times \underline{H}^*) \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

C'est le vecteur de Poynting \underline{P} .

De façon plus générale, il est commun de définir le vecteur radiant complexe par :

$$\underline{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*) = P + jQ \quad (\text{III-19})$$

avec $P = \frac{\underline{\mathfrak{S}} + \underline{\mathfrak{S}}^*}{2}$ et $Q = \frac{\underline{\mathfrak{S}} - \underline{\mathfrak{S}}^*}{2}$.

On réalise le bilan énergétique en régime harmonique :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\underline{E} \times \underline{H}^*}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left[\underline{H}^* \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}^*) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\underline{H}^* \cdot (-j\omega \underline{B}) - \underline{E} \cdot (-j\omega \underline{D}^* + \underline{J}^*) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

$$\boxed{\iint_S \frac{\underline{E} \times \underline{H}^*}{2} dS = -j\omega \iiint_V \left[\frac{\underline{H}^* \cdot \underline{B}}{2} - \frac{\underline{E} \cdot \underline{D}^*}{2} \right] dV - \iiint_V \frac{\underline{E} \cdot \underline{J}^*}{2} dV} \quad (\text{III-21})$$

La partie réelle de cette expression représente le bilan d'énergie rayonnée hors de la surface S et d'énergie dissipée dans le volume V.

La partie imaginaire correspond à l'énergie emmagasinée.

Le bilan de l'énergie emmagasinée est donné par :

$$W = \frac{1}{2} \Re \iiint_V \left[\underline{H}^* \cdot \underline{B} - \underline{E} \cdot \underline{D}^* \right] dV \quad (\text{III-22})$$

Pour un milieu linéaire sans pertes à tenseurs de permittivité et de perméabilité diagonaux, \underline{H} et \underline{B} sont en phase ainsi que \underline{E} et \underline{D} .

Donc

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \iiint_V [\underline{H}^* \cdot \underline{B} - \underline{E} \cdot \underline{D}^*] dV \\
&= \iiint_V (\delta w_e(\vec{r}) - \delta w_m(\vec{r})) dV \\
&= W_e - W_m
\end{aligned} \tag{III-23}$$

δw_e et δw_m représentent les densités d'énergie électrique et magnétique moyenne par unité de volume.

Nous allons à présent exprimer W_e et W_m par une décomposition des champs en série de Fourier spatiale.

$$\begin{aligned}
W_m(\omega) &= \iiint_V \frac{\underline{H}^* \cdot \underline{B}}{2} dV \\
&= \iiint_V \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m \underline{H}^*(\omega, k) e^{-jkr} \right) \left(\sum_{l=1}^m \underline{B}(\omega, l) e^{+jlr} \right) dV \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, l) \underbrace{\iiint_V e^{-j(k-l)r} dV}_{\lambda_{kl}}
\end{aligned} \tag{III-24}$$

$$\text{Or} \quad \lambda_{kl} = \begin{cases} V & \text{si } l = k \\ \neq 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{III-25}$$

Alors :

$$W_m(\omega) \# \frac{V}{2} \sum_{k=1}^m \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, k) \tag{III-26}$$

Si m tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
W_m(\omega) &= \frac{V}{2} \int_{k^3} \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, k) d^3k \\
&= V \int_{k^3} \delta w_m(k) d^3k
\end{aligned} \tag{III-27}$$

avec $\delta w_m(k) = \frac{1}{2} \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, k)$.

$\delta w_m(k)$ représente une densité d'énergie emmagasinée dans les champs magnétiques définie dans l'espace des vecteurs phaseurs.

De même, nous pouvons écrire :

$$W_m(\omega) = V \int_{k^3} \delta w_m(k) d^3 k \quad (\text{III-28})$$

$$\text{avec } \delta w_e(k) = \frac{1}{2} \underline{E}(\omega, k) \cdot \underline{D}^*(\omega, k)$$

$\delta w_e(k)$ représente une densité d'énergie emmagasinée dans les champs électriques définie dans l'espace des vecteurs phaseurs.

A titre de vérification, ces relations peuvent également être déduites de l'identité de Parseval.

$$\iiint_V \delta w_m(\vec{r}) d\vec{r} dV = \lambda_k \int_{k^3} \delta w_m(k) d^3 k \quad (\text{III-29})$$

$$\text{avec } \lambda_k = \left\langle (e^{jkr}), (e^{jkr})^* \right\rangle = \iiint_V e^{jkr} \cdot e^{-jkr} dV = V$$

$$\iiint_V \delta w_m(\vec{r}) dV = V \int_{k^3} \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, k) d^3 k \quad (\text{III-30})$$

Nous allons donc calculer $\delta w_e(\omega, k)$ et $\delta w_m(\omega, k)$.

Nous représenterons la somme de ces 2 distributions pour mettre en évidence le filtrage spatial exercé par le matériau.

II.1.2- Mise en place de l'algorithme de calcul

L'algorithme est implanté dans un problème à deux dimensions. Le volume d'intégration des expressions précédentes se transforme en une surface S.

Phase I :

Nous calculons dans le domaine temporel et dans l'espace direct les distributions des champs électrique $\vec{E}(x, y, t)$ et magnétique $\vec{H}(x, y, t)$. Nous réalisons ensuite une transformée de Fourier temporelle pour obtenir ces champs dans le domaine fréquentiel.

$$\vec{E}_{\omega_i}(x, y) = \int_t \vec{E}(x, y, t) e^{j\omega_i t} dt \quad (\text{III-31})$$

$$\vec{H}_{\omega_i}(x, y) = \int_t \vec{H}(x, y, t) e^{j\omega_i t} dt \quad (\text{III-32})$$

Phase II :

Nous avons obtenu les composantes de champs électrique $\vec{E}_{\omega_i}(x, y)$ et magnétique $\vec{H}_{\omega_i}(x, y)$ dans le domaine fréquentiel. Nous pouvons à présent transposer ces résultats dans l'espace réciproque. Cette transposition est effectuée grâce à des transformées de Fourier spatiales de chaque composante de champ connue dans chacune des cellules du maillage FDTD.

$$\vec{E}_{\omega_i}(\vec{k}) = \begin{cases} e_{x_{\omega_i}}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \iint_{x, y} e_{x_{\omega_i}}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} \partial x \partial y \\ e_{y_{\omega_i}}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \iint_{x, y} e_{y_{\omega_i}}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} \partial x \partial y \end{cases} \quad (\text{III-33})$$

$$\vec{H}_{\omega_i}(\vec{k}) = \begin{cases} h_{x_{\omega_i}}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \iint_{x, y} h_{x_{\omega_i}}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} \partial x \partial y \\ h_{y_{\omega_i}}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \iint_{x, y} h_{y_{\omega_i}}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} \partial x \partial y \end{cases} \quad (\text{III-34})$$

où S représente la surface d'intégration du problème 2D.

Ce calcul est réalisé à des fréquences f_0 préalablement choisies.

Phase III :

Les intégrales de Fourier deviennent des sommes discrètes car le matériau photonique est maillé, alors nous ne travaillons plus sur un échantillon infini mais sur un volume de dimension fini. Les équations ainsi obtenues sont :

$$\vec{E}_{\omega_i}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \sum_x \sum_y \vec{E}_{\omega_i}(m, n) e^{j(k_x \cdot m \cdot \Delta x + k_y \cdot n \cdot \Delta y)} \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III-35})$$

$$\vec{H}_{\omega_i}(k_x, k_y) = \frac{1}{S} \sum_x \sum_y \vec{H}_{\omega_i}(m, n) e^{j(k_x \cdot m \cdot \Delta x + k_y \cdot n \cdot \Delta y)} \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III-36})$$

m et n sont des entiers qui définissent les indices des mailles FDTD.

Δx , Δy et Δz sont les dimensions des mailles suivant les axes x , y et z du repère cartésien orthogonal.

Bilan énergétique :

Pour une pulsation ω_0 donnée, et en fixant k_x et k_y , la transformée de Fourier nous donne l'intensité des composantes de champs électrique et magnétique dans l'espace des vecteurs d'ondes \vec{k} . On peut alors calculer $\delta w_m(\omega, k)$ et $\delta w_e(\omega, k)$:

$$\delta w_m(k) = \frac{1}{2} \underline{H}^*(\omega, k) \cdot \underline{B}(\omega, k) \quad (\text{III-37})$$

$$\delta w_e(k) = \frac{1}{2} \underline{E}(\omega, k) \cdot \underline{D}^*(\omega, k) \quad (\text{III-38})$$

De manière plus générale, nous mettrons le filtrage spatial en évidence en traçant la distribution $2\delta w(\omega, k) = \langle \delta w_e(\omega, k) + \delta w_m(\omega, k) \rangle$.

Cette distribution fournit une indication sur les lieux de l'espace réciproque où est emmagasinée l'énergie réactive.

II.2- Comparaison de structures finie et infinie

Afin d'illustrer ce résultat et de valider cette méthode de calcul par FDTD, nous allons superposer la distribution $\langle \delta w_e(\omega, k) + \delta w_m(\omega, k) \rangle$ associée à une structure de dimension finie avec la surface de dispersion obtenue analytiquement pour un cristal photonique infini.

Pour calculer la densité d'énergie $2\delta w(\omega, k)$ dans l'espace réciproque, nous considérons, pour le calcul des intégrales de Fourier, une surface S représentative de la section de la structure supposée invariante par translation suivant l'axe orthogonal au plan d'étude.

Nous considérons le cas d'un réseau carré de tiges d'alumine ($\epsilon_r=9,8$) de section carrée égale à 0,47 mm représentée sur la figure III-38. Le pas du réseau est de 1,85 mm. La structure photonique se compose d'un carré de 64 tiges (8*8) excitée en son centre par un fil infini orthogonal au plan d'étude et parcouru par un courant. Cette étude est faite pour la polarisation TM.

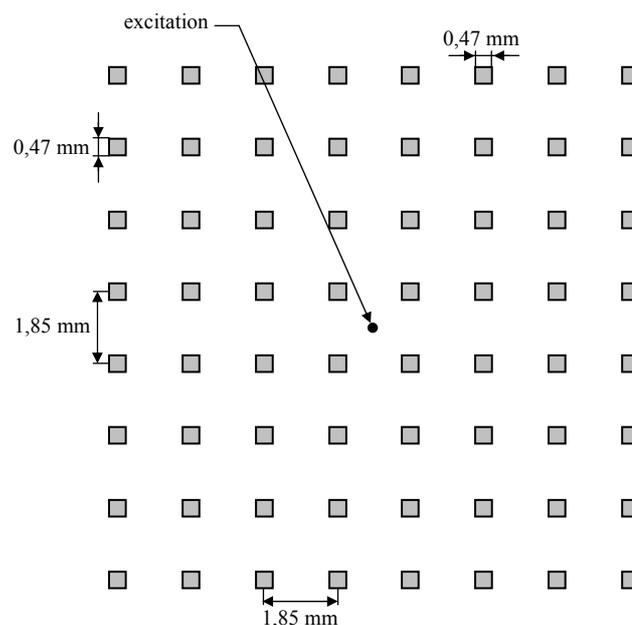


Figure III-38 : Structure photonique 2D avec son excitation

Les résultats donnés dans la suite seront calculés pour des fréquences normalisées. C'est-à-dire que cette fréquence est un nombre sans dimension et égale à :

$$f_{norm} = \frac{f_0 \cdot a}{c} \quad (\text{III-39})$$

où f_0 est la fréquence de travail, a est le pas du réseau (réseau carré donc le pas est le même en x et y) et c est la célérité dans le vide.

L'étude est réalisée pour trois fréquences normalisées ($f_0=0,234$; $f_0=0,2565$; $f_0=0,407$). Les figures III-39, III-40 et III-41 représentent les distributions de densité d'énergie $2\delta w(\omega, k)$ pour ces trois fréquences.

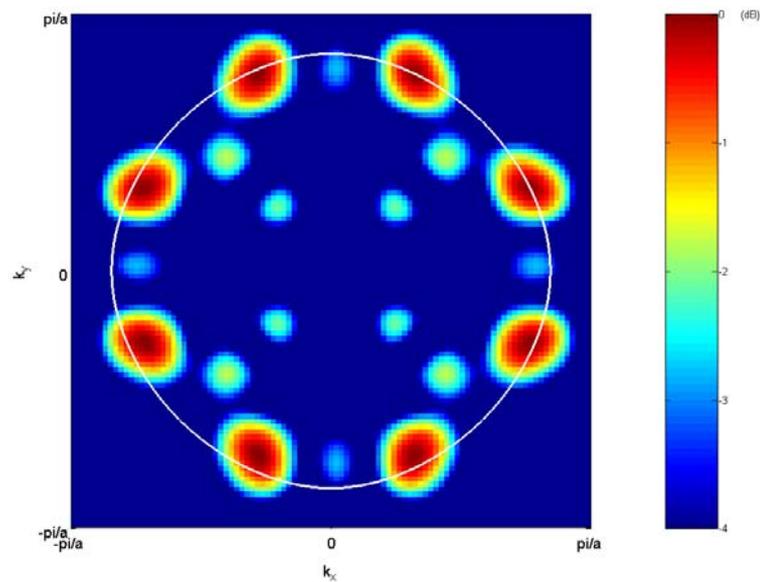
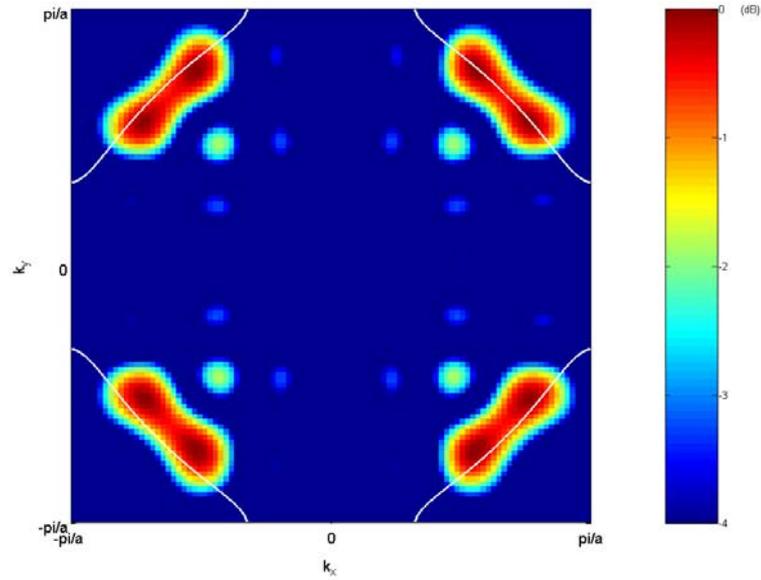
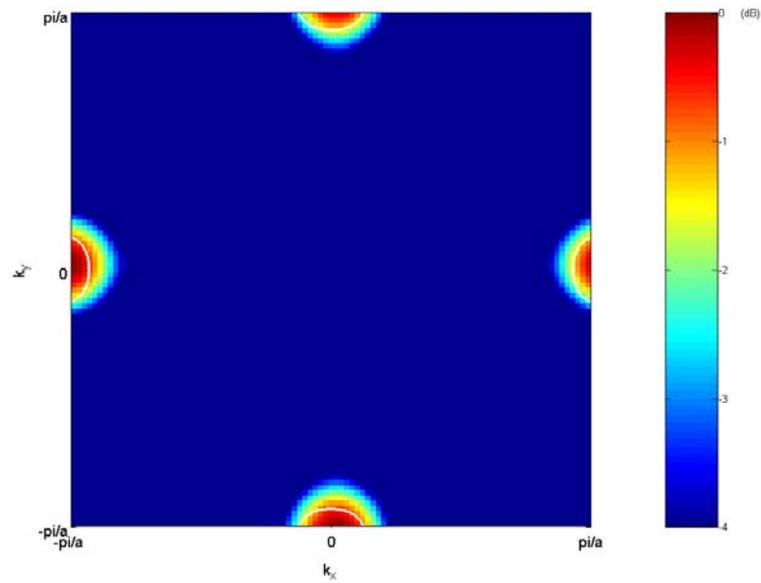


Figure III-39 : $2\delta w(\omega, k)$ en dB pour $f_0 \cdot a / c = 0,234$ et contour de dispersion



**Figure III-40 : $2\delta w(\omega, k)$ en dB pour $f_2.a/c = 0,2565$
et contour de dispersion**



**Figure III-41 : $2\delta w(\omega, k)$ en dB pour $f_3.a/c = 0,407$
et contour de dispersion**

Les contours de dispersion sont représentés sur les trois cartographies de champs précédentes par les contours blancs.

En conclusion, nous pouvons dire que les densité d'énergie $2\delta w(\omega, k)$ obtenues par la décomposition du problème FDTD en ondes planes pour le matériau 2D fini excité en son centre sont des solutions discrètes du contours de dispersion (définis pour un matériau 2D infini).

II.3- Superposition des distributions $2\delta w(\omega, k)$ et des contours de dispersion

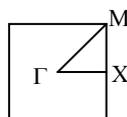
Dans ce paragraphe, nous allons étudier deux structures périodiques 2D de dimensions finies.

Pour ces deux structures, nous allons dissocier le problème à deux dimensions en deux problèmes à une dimension, c'est-à-dire que nous allons traiter les cas unidimensionnels suivant les axes x et y.

Pour le deuxième matériau photonique, nous présenterons une autre manière de calculer les distributions de densité d'énergie $2\delta w(\omega, k)$.

Pour réaliser cette étude, nous considérons la même structure périodique que celle utilisée précédemment. C'est-à-dire une structure construite à partir d'un réseau carré de pas égale à $p = 1,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Les éléments périodiques sont des tiges de longueur infinie à section carrée de $a = 0,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ de côté et de permittivité diélectrique $\epsilon_r = 9$, entourée d'air ($\epsilon_{\text{air}} = 1$). La première structure est formée de $8 \cdot 8$ tiges (64 tiges) et la deuxième de $18 \cdot 18$ tiges (324 tiges).

Les contours de dispersion sont calculés pour le vecteur d'onde se déplaçant sur le contour défini par les points de haute symétrie Γ , X, M de la première zone de Brillouin (figure III-42) et grâce aux symétries du cristal, nous reconstruisons tout le contour de dispersion. Ces contours sont superposés aux distributions de densité d'énergie $2\delta w(\omega, k)$.



**Figure III-42 : Première zone de Brillouin
d'un réseau carré**

Comme pour le cas unidimensionnel, nous superposerons les plans définis par les nombres d'ondes k_x et k_y grâce à la relation $k.d = n.\pi$ aux cartographies représentant les distributions $2\delta\omega(\omega, k)$.

II.3.1- Structure 8*8

La figure III-43 représente les distributions $2\delta\omega(\omega, k)$ pour $f.a/c=0.234$, ainsi que la surface de dispersion et les plans définis par les nombres d'ondes k_x et k_y grâce à la relation $k.d = n.\pi$.

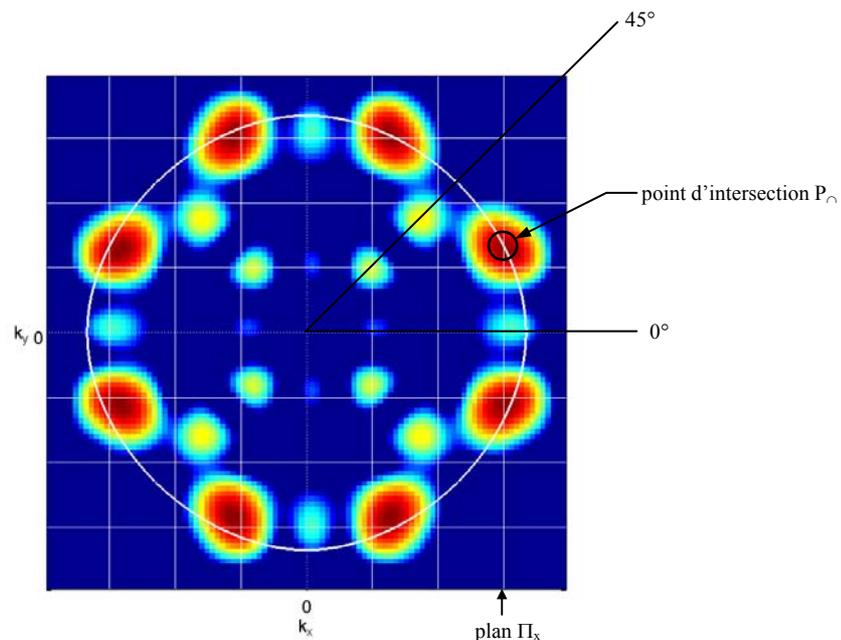


Figure III-43 : Distribution $2\delta\omega(\omega, k)$ dans l'espace réciproque pour une structure 8*8 à $f.a/c=0.234$

Nous avons montré que les distributions $2\delta\omega(\omega, k)$ sont des solutions discrètes du contour de dispersion.

Nous scindons le problème à deux dimensions en deux problèmes à une dimension. Nous raisonnons sur l'axe k_x et le problème portant sur l'axe k_y se déduira de la même manière.

Dans la zone définie par l'ouverture d'angle $[0^\circ ; 45^\circ]$, nous observons qu'il n'existe qu'un seul plan, noté Π_x sur le figure III-43, qui coupe le contour de dispersion au point d'intersection noté P_{\cap} . Dans cette zone, nous avons une distribution $2\delta\omega(\omega, k)$ qui indique un maximum.

Donc nous pouvons dire que le matériau entre en résonance quand les intersections entre le contour de dispersion et les plans définis dans l'espace réciproque coïncident avec les distributions de densité de puissance obtenues lors de la décomposition du problème FDTD en ondes planes.

II.3.2- Structure 18*18

La superposition des distributions $2\delta\omega(\omega, k)$, du contour de dispersion et des plans définis par la relation de résonance 1D ($k.d=n.\pi$) est donnée par la figure III-44.

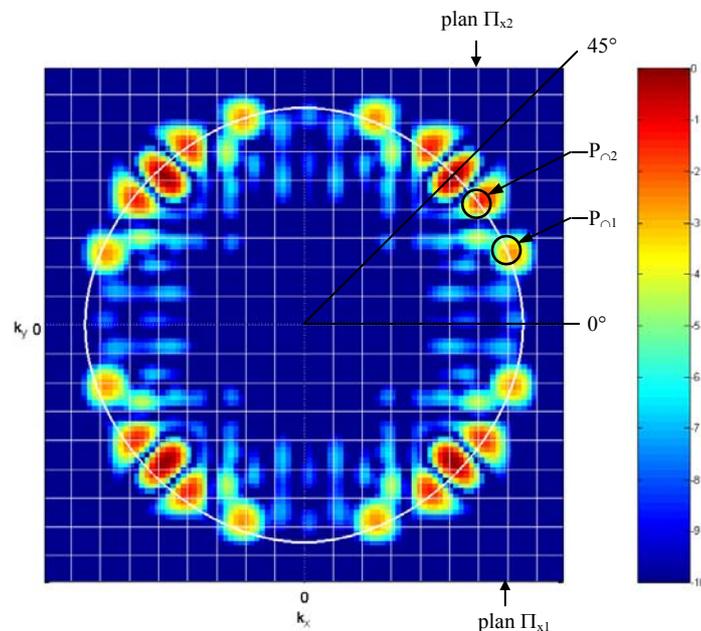
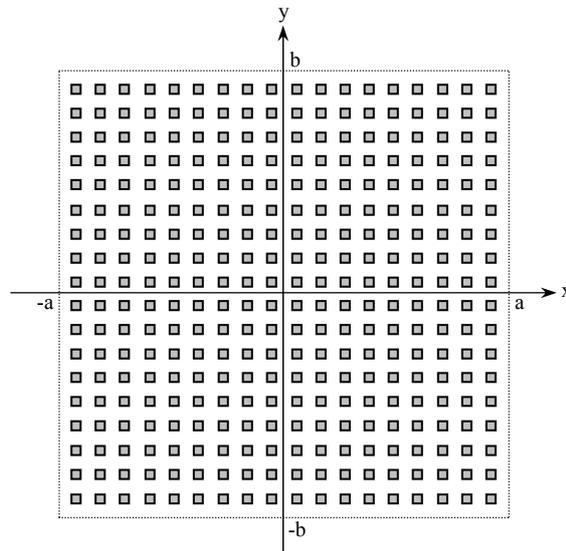


Figure III-44 : Distribution de $2\delta\omega(\omega, k)$ dans l'espace réciproque pour une structure 18*18 à $f.a/c=0.234$

En suivant le même raisonnement que pour la structure 8*8 tiges de diélectrique, dans le secteur $[0^\circ ; 45^\circ]$ et suivant la direction k_x , nous obtenons deux plans, notés Π_{x1} et Π_{x2} , qui coupent le contour de dispersion aux points notés $P_{\cap 1}$ et $P_{\cap 2}$. Ils correspondent tous deux à des distributions de densité de puissance.

Pour expliquer la présence d'un maximum à 45° pour la distribution $2\delta\omega(\omega, k)$, nous pouvons approximer et recomposer ce phénomène en écrivant une fonction $\Psi(k_x, k_y)$ dans l'espace des vecteurs d'onde.

Cette fonction $\Psi(k_x, k_y)$ est bornée, alors nous représentons le matériau périodique utilisé dans l'espace direct pour donner les variables qui dimensionnent cette structure (figure III-45).



**Figure III-45 : Structure photonique étudiée
avec bornes d'intégration**

Nous considérons l'enveloppe de la structure de largeur $2a$ en x et $2b$ en y . Cette enveloppe peut être approximée par une fonction rectangle en x et en y . Tout comme nous avons scindé le problème 2D en deux problèmes 1D, nous pouvons alors dire que les variables x et y sont indépendantes.

Alors nous pouvons écrire :

$$\Psi(k_x, k_y) = \int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b \text{rect}_{2a}(x) \cdot \text{rect}_{2b}(y) \cdot e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{III-40})$$

D'où $\Psi(k_x, k_y) = 4 \cdot a \cdot b \cdot \text{sinc}(2k_x a) \cdot \text{sinc}(2k_y b)$ (III-41)

Le détail de ce calcul est donné dans l'annexe 4.

Or nous avons une structure carrée dans l'espace direct alors $a = b$, et nous pouvons écrire :

$$\Psi(k_x, k_y) = 4 \cdot a^2 \cdot \text{sinc}(2k_x a) \cdot \text{sinc}(2k_y a) \quad (\text{III-42})$$

En utilisant cette approximation, nous obtenons les distributions de la densité $2\delta\omega(\omega, k)$ représentées sur la figure suivante :

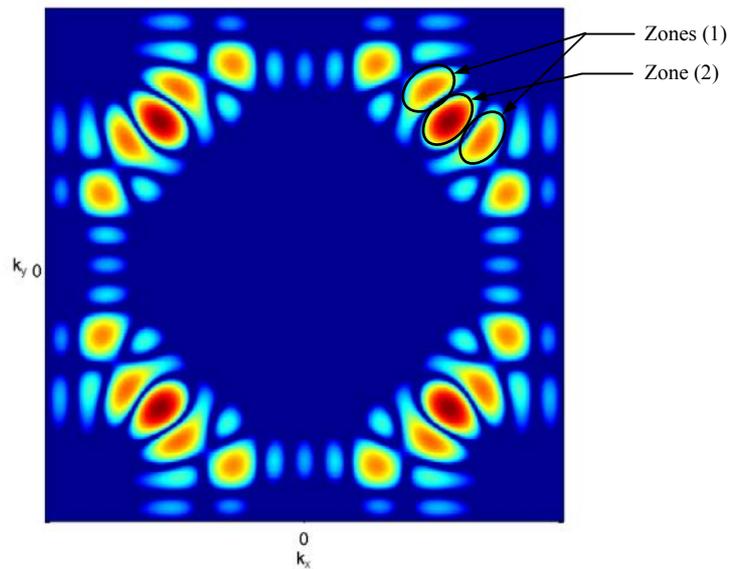


Figure III-46 : Distribution de $2\delta\omega(\omega, k)$ avec approximation par des sinus cardinaux

Les fonctions $\Psi(k_x, k_y)$ sont situées aux intersections entre les plans Π qui définissent les conditions de résonance et le contour de dispersion. Ils sont alors pondérés. L'exemple ci-dessus a été obtenu en pondérant les zones (1) par le coefficient -1 et la zone (2) par le coefficient 2. Il se produit alors des phénomènes constructifs et destructifs pour obtenir le résultat de la figure III-46.

Ce résultat approche sensiblement celui obtenu à la figure III-44.

Nous pouvons dire que les distributions $\Psi(k_x, k_y)$ des zones (1) et (2) (figure III-46) et les distributions $2\delta\omega(\omega, k)$ obtenues avec la méthode FDTD décomposée en ondes planes (figure III-44) montrent un certain degré de ressemblance. Ainsi, les distributions $2\delta\omega(\omega, k)$ sont proches et il se crée une distribution dans le plan 45° .

Conclusion

Dans ce troisième chapitre, nous avons présenté les conditions de résonance des matériaux à bande interdite photonique. C'est-à-dire qu'à certaines fréquences le matériau est totalement transparent tandis qu'à d'autre il réfléchit l'onde.

Pour analyser cette transparence, nous avons tout d'abord étudié le cas de cristaux photoniques à une dimension. Après avoir donné les différentes équations utiles à l'étude, nous nous sommes intéressés à des structures sans défauts.

En confrontant l'équation de propagation permettant d'obtenir le diagramme de dispersion, le coefficient de transmission et la condition de résonance $k.d = n.\pi$, nous avons mis en évidence que pour des nombres d'ondes précis (donc des fréquences précises), la structure était transparente aux ondes électromagnétiques.

Ensuite, nous avons considéré le cas d'un cristal photonique à deux dimensions. Pour ce faire, nous avons défini des densités d'énergie électrique et magnétique dans l'espace des vecteurs phaseurs. Nous avons montré que l'interaction entre un matériau périodique de dimensions finies et une perturbation électromagnétique crée un filtrage spatial. En superposant le contour de dispersion (calculé pour des matériaux de dimensions infinies) avec les distributions des densités d'énergie calculées dans l'espace des vecteurs d'onde, nous avons pu mettre en évidence que l'énergie électromagnétique est emmagasinée dans des lieux très localisés de l'espace des vecteurs d'onde.

En d'autres termes, nous avons tenté de fournir une explication cohérente à l'existence de ces filtrages spatiaux.

**CONCLUSION
GENERALE**

Ce travail de thèse, qui a duré pendant trois ans, a été consacré à l'étude des matériaux diélectriques à bande interdite photonique à plusieurs dimensions (1D et 2D). Les matériaux monodimensionnels ont permis une compréhension plus approfondie des phénomènes.

Pour ce faire, le premier chapitre a présenté les cristaux photoniques en commençant par un historique, une description et un inventaire des formes les plus communes accompagné des propriétés qui leurs sont propres. Grâce à l'analogie qui existe entre les électrons et les photons, la communauté scientifique a un potentiel d'étude large car ces matériaux sont récents. Nous avons pu aussi dresser un état de l'art actuel montrant les différents domaines qui utilisent ces structures périodiques. La présentation de deux outils numériques a été proposée permettant la caractérisation des cristaux photoniques dans la suite de ce travail.

Le second chapitre décrit l'étude des matériaux à bande interdite photonique infinis à deux dimensions. Pour ce faire, l'utilisation de notions non triviales telles que le réseau réciproque, la première zone de Brillouin a été faite pour permettre l'utilisation de la méthode des ondes planes. Cette méthode consiste à décomposer l'équation de propagation en série de Fourier spatiale pour rechercher les bandes de fréquences interdites des matériaux diélectriques périodiques. Elle nous a permis de déterminer les diagrammes de dispersion et les contours de dispersion pour ces matériaux à deux dimensions qui sont des courbes essentielles à l'étude des BIP. L'extension des résultats obtenus pour des cristaux sans défauts a permis d'appréhender le comportement des structures présentant des défauts localisés.

Dans le troisième chapitre, nous avons porté toute notre attention à l'étude de matériaux photoniques à un seul ordre de périodicité. En confrontant les calculs du nombre d'onde donné par l'équation de dispersion et par la condition de résonance, nous avons pu montrer pourquoi il se formait des bandes interdites épaulé par la vitesse de groupe et le calcul du coefficient de transmission.

Nous avons généralisés cette étude à des cristaux périodiques à deux dimensions mais par rapport au cas mono dimensionnel, nous avons introduit un deuxième ordre de périodicité qui complique la recherche.

Cette étude offre de nombreuses perspectives telles que :

- la réalisation d'un filtrage fréquentiel pour des applications CEM (Compatibilité ElectroMagnétique). Ainsi ces matériaux périodiques peuvent représenter un plan de masse sous une ligne microruban déposée sur un substrat diélectrique (figure 1), ou représenter des trous métallisés périodiques le long d'une ligne microruban (figure 2) pour rejeter des modes parasites grâce à la présence d'une bande interdite.

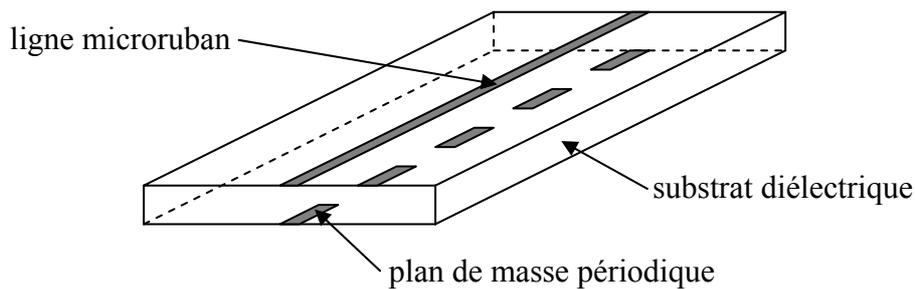


Figure 47 : Ligne microruban sur plan de masse périodique

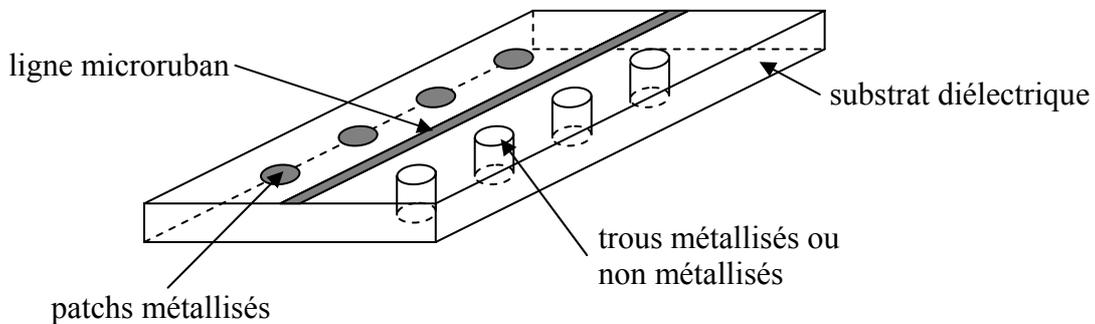


Figure 48 : Eléments périodiques de part et d'autre d'une ligne microruban

- la réalisation d'un filtrage spatial dont le matériau possède des surfaces de dispersion quasi planes permettant ainsi un guidage de l'onde dans le matériau (figure 3). Cette réalisation peut servir de radôme pour sélectionner une onde en fonction de sa direction de polarisation (figure 4).

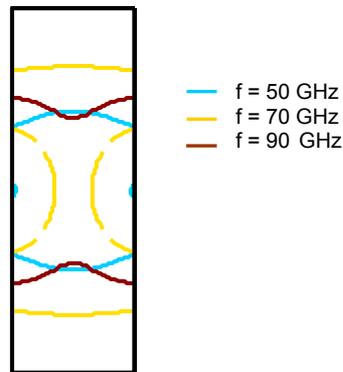


Figure 49 : Surfaces de dispersion pour 3 fréquences d'un matériau 2D construit sur un réseau rectangulaire

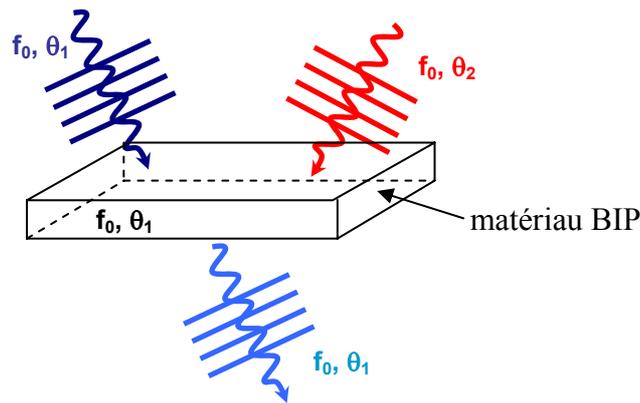


Figure 50 : Filtrage spatial (dans la direction θ_1) par un matériau BIP

- l'intégrant de MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) de manière massive pour former un matériau aux propriétés électromagnétiques artificielles pilotables. Il est possible d'envisager la formation de faisceau d'antennes, dont la structure serait fabriquée de manière monolithique. Ainsi, les MEMS permettent de donner de l'agilité à une structure qui reste passive, à faibles pertes.

ANNEXES

Annexe 1

Calcul du potentiel électrique pour un électron dans un atome

Un atome peut être schématisé par la figure suivante (figure A1-51).

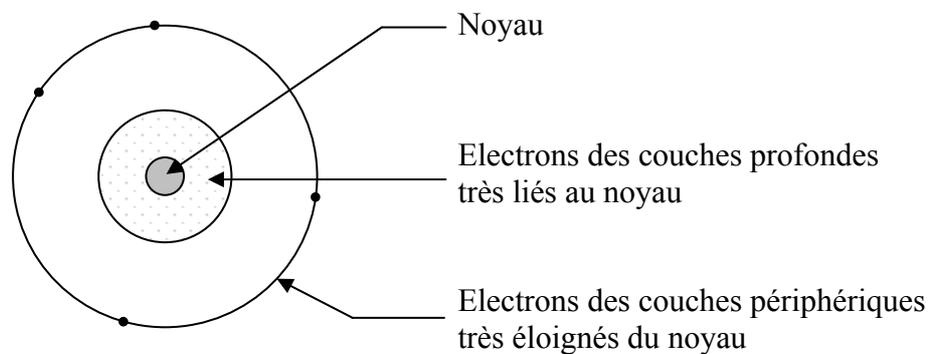


Figure A1-51 : Représentation d'un atome

Un atome présente deux parties :

- la première est constituée du noyau et des électrons des couches profondes constituant un ion de charge positive
- la deuxième est constituée de l'électron ou des électrons des couches périphériques de charge négative

La charge totale de l'atome est nulle.

On s'intéresse au déplacement des électrons des couches périphériques.

Les électrons des couches périphériques sont soumis à deux forces :

- l'une due au champ produit par les ions de charges positives, donnant lieu à une force d'attraction

• l'autre due au champ produit par les autres électrons des couches périphériques, donnant lieu à une force de répulsion

Pour définir le modèle, nous ne tiendrons compte que des effets de l'ion positif sur l'électron. L'interaction entre les électrons est négligée.

On se place dans le cas où il existe un atome avec Z électrons périphériques. Alors nous avons la charge de « l'ion » égale à Zq et la charge des Z électrons périphériques égale à $-Zq$ (où q est la charge élémentaire $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

D'après les lois de l'électrostatique, le champ électrique créé par l'ion cristallin positif de charge Zq sur l'électron est donné par :

$$\vec{E} = \frac{Zq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{A1-1})$$

où r est la distance entre l'ion positif et l'électron, et ϵ_0 représente la permittivité du vide ($\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$).

La force d'attraction exercée sur l'électron périphérique est telle que :

$$\vec{F} = -q\vec{E} = -\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{A1-2})$$

Cette force d'attraction peut s'écrire en fonction de l'énergie potentielle par :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r \quad (\text{A1-3})$$

A partir de l'équation précédente, l'énergie potentielle U qui existe entre l'ion positif et l'électron est de la forme :

$$U(r) = \int \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + cste \quad (\text{A1-4})$$

Donc l'énergie potentielle $U(r)$ s'écrit :

$$U(r) = -\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste \quad (A1-5)$$

L'énergie potentielle varie suivant l'inverse de la distance r entre l'électron périphérique et le noyau.

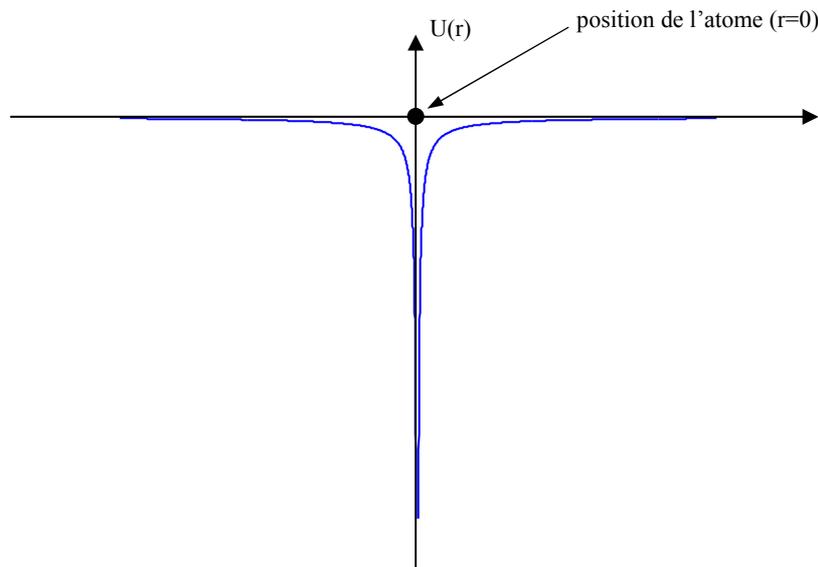


Figure A1-52 : Energie potentielle

Pour deux atomes identiques, il se produit un couplage. Le puit de potentiel s'élargit progressivement.

Alors pour plusieurs atomes, l'énergie potentielle aura la même période que la position des atomes.

Le potentiel électrique peut être déduit de l'énergie potentielle grâce à :

$$V(r) = \frac{U(r)}{q} \quad (A1-6)$$

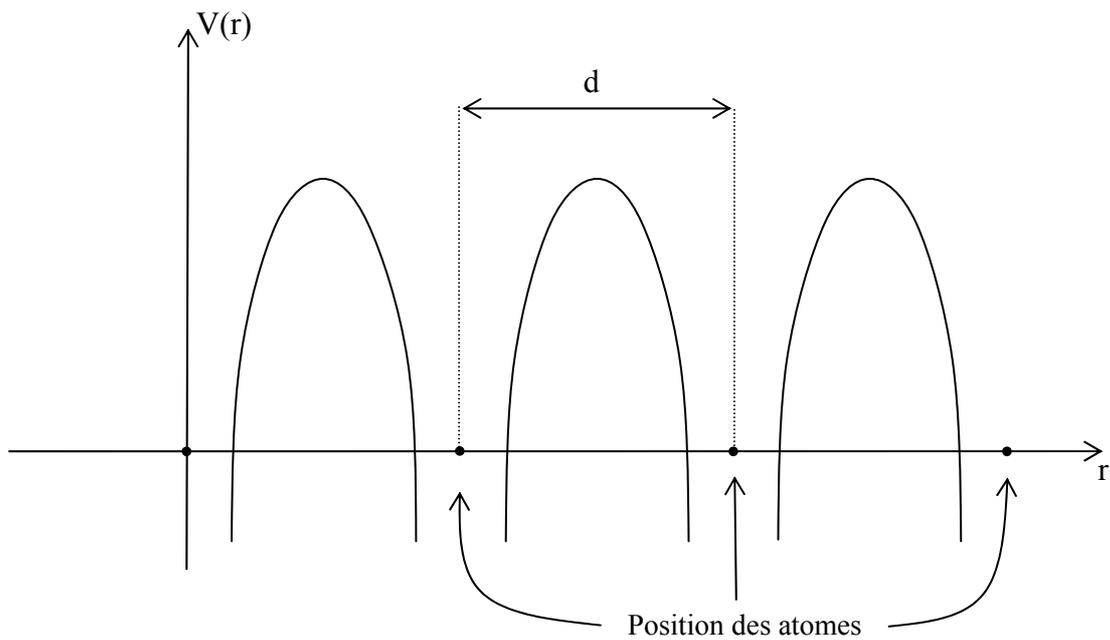


Figure A1-53 : Potentiel électrique dans un cristal unidimensionnel

La périodicité du potentiel électrique est modulée par la répartition régulière des ions positifs. Sa périodicité correspond au pas " d " du réseau cristallin. Cette représentation est donnée par la figure A1-53.

Annexe 2

Résolution de l'équation de propagation dans un milieu diélectrique périodique

Considérons le cas d'un milieu périodique diélectrique ayant la forme suivante :

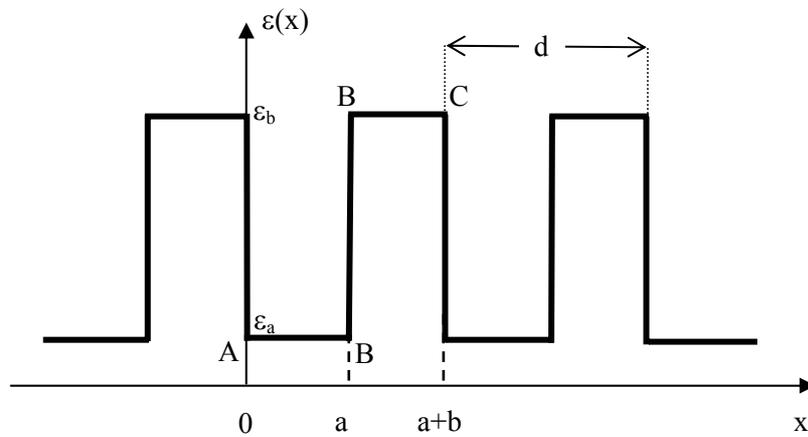


Figure A2-124 : Constante diélectrique périodique

Dans ce système unidimensionnel, la relation de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E(x) = 0 \quad (\text{A2-7})$$

On réalise la résolution de l'équation A2-7 dans les régions A-B et B-C (figure A2-124).

- Pour $0 < x < a$, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon_a$,

alors

$$\frac{\partial^2 E_{AB}(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_a E_{AB}(x) = 0, \quad (\text{A2-8})$$

ou bien
$$\frac{\partial^2 E_{AB}(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 E_{AB}(x) = 0 . \quad (\text{A2-9})$$

L'équation caractéristique de l'équation A2-9 s'écrit :

$$r^2 + \alpha^2 = 0 , \quad (\text{A2-10})$$

donc
$$r = \pm i\alpha . \quad (\text{A2-11})$$

D'où
$$E_{AB}(x) = A_0 \sin(\alpha x) + B_0 \cos(\alpha x) \quad (\text{A2-12})$$

avec
$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_a} . \quad (\text{A2-13})$$

- Pour $a < x < a + b$, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon_b$:

alors
$$\frac{\partial^2 E_{BC}(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_b E_{BC}(x) = 0 , \quad (\text{A2-14})$$

ou bien
$$\frac{\partial^2 E_{BC}(x)}{\partial x^2} + \beta^2 E_{BC}(x) = 0 . \quad (\text{A2-15})$$

D'où
$$E_{BC}(x) = C_0 \sin(\beta x) + D_0 \cos(\beta x) \quad (\text{A2-16})$$

avec
$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_b} . \quad (\text{A2-17})$$

- Au point B, la fonction $E(x)$ et sa dérivée $E'(x)$ sont continues.

Alors
$$E_{AB}(x = x_B) = E_{BC}(x = x_B) \quad (\text{A2-18})$$

et
$$E'_{AB}(x = x_B) = E'_{BC}(x = x_B) \quad (\text{A2-19})$$

- Au point C : la fonction $\varepsilon(x)$ et sa dérivée $\varepsilon'(x)$ sont périodiques.

Alors
$$\varepsilon(x = 0) = \varepsilon(x = a + b) \quad (\text{A2-20})$$

et
$$\varepsilon'(x = 0) = \varepsilon'(x = a + b) \quad (\text{A2-21})$$

La méthode appliquée dans cette annexe est une méthode de résolution par système.

Dans la région A-B, on peut écrire :

$$\begin{cases} E(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \\ E'(x) = A \alpha \cos(\alpha x) - B \alpha \sin(\alpha x) \end{cases} \quad (\text{A2-22})$$

Au point A, on a :

$$\begin{cases} E_0 = E(x=0) = B \\ E'_0 = E'(x=0) = A \alpha \end{cases} \quad (\text{A2-23})$$

et au point B, on a :

$$\begin{cases} E_1 = E(x=a) = A \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha a) \\ E'_1 = E'(x=a) = A \alpha \cos(\alpha a) - B \alpha \sin(\alpha a) \end{cases} \quad (\text{A2-24})$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha a) & \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha} \\ -\alpha \sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-25})$$

Dans la région B-C, on a :

$$\begin{cases} E(x) = C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x) \\ E'(x) = C \beta \cos(\beta x) - D \beta \sin(\beta x) \end{cases} \quad (\text{A2-26})$$

Au point B, on a :

$$\begin{cases} E_1 = E(x=a) = C \sin(\beta a) + D \cos(\beta a) \\ E'_1 = E'(x=a) = C \beta \cos(\beta a) - D \beta \sin(\beta a) \end{cases} \quad (\text{A2-27})$$

alors :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta a) & \cos(\beta a) \\ -\beta \cos(\beta a) & -\beta \sin(\beta a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-28})$$

On obtient en inversant la matrice, l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta a) & \cos(\beta a) \\ -\beta \cos(\beta a) & -\beta \sin(\beta a) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta a) & \frac{\cos(\beta a)}{\beta} \\ \cos(\beta a) & -\frac{\sin(\beta a)}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-29})$$

Et au point C, on a :

$$\begin{cases} E_2 = E(x = a + b) = C \sin \beta(a + b) + D \cos \beta(a + b) \\ E'_2 = E'(x = a + b) = C\beta \cos \beta(a + b) - D\beta \sin \beta(a + b) \end{cases} \quad (\text{A2-30})$$

En utilisant l'équation A2-29, on arrive à :

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta b) & \frac{\sin(\beta b)}{\beta} \\ -\beta \sin(\beta b) & \cos(\beta b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-31})$$

On souhaite avoir :

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-32})$$

Alors

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-33})$$

D'où

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-34})$$

Donc

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha a)\sin(\beta b) & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha a)\cos(\beta b) + \frac{1}{\beta} \cos(\alpha a)\sin(\beta b) \\ -\beta \cos(\alpha a)\sin(\beta b) - \alpha \sin(\alpha a)\cos(\beta b) & -\frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha a)\sin(\beta b) + \cos(\alpha a)\cos(\beta b) \end{pmatrix} \quad (\text{A2-35})$$

avec

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 * 1 = 1. \quad (\text{A2-36})$$

On considère maintenant un puit de potentiel périodique.

La fonction d'onde s'écrit alors sous la forme d'une fonction de Bloch :

$$u(x) = E(x)e^{-jkx} \quad (\text{A2-37})$$

où k est le vecteur d'onde qui traduit le déplacement de l'onde dans la structure périodique

$u(x)$ est périodique de même période que la permittivité ε

$E(x)$ est l'énergie relative à un motif de la structure périodique

On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(x) = E(x)e^{-jkx} \\ u'(x) = [E'(x) - jkE(x)]e^{-jkx} \end{cases} \quad (\text{A2-38})$$

$$\begin{cases} u_0 = u(x=0) = E_0 \\ u'_0 = u'(x=0) = E'_0 - jkE_0 \end{cases} \quad (\text{A2-39})$$

$$\begin{cases} u_2 = u(x=a+b) = E_2e^{-jk(a+b)} \\ u'_2 = u'(x=a+b) = [E'_2 - jkE_2]e^{-jk(a+b)} \end{cases} \quad (\text{A2-40})$$

On a alors les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} E_0 = u_0 \\ E'_0 = u'_0 + jku_0 \end{cases} \quad (\text{A2-41})$$

$$\begin{cases} E_2 = AE_0 + BE'_0 \\ E'_2 = CE_0 + DE'_0 \end{cases} \quad (\text{A2-42})$$

Grâce aux deux systèmes ci-dessus et aux équations A2-40, on peut écrire les expressions de u_2 et u'_2 .

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [A + jkB]e^{-jk(a+b)} & Be^{-jk(a+b)} \\ [(C + k^2B) + jk(D - A)]e^{-jk(a+b)} & [D - jkB]e^{-jk(a+b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A2-43})$$

La fonction d'onde est périodique de période $(a+b)$ alors : $\begin{cases} u_2 = u_0 \\ u'_2 = u'_0 \end{cases}$,

$$\text{d'où} \quad \begin{pmatrix} [A + jkB]e^{-jk(a+b)} - 1 & Be^{-jk(a+b)} \\ [(C + k^2B) + jk(D - A)]e^{-jk(a+b)} & [D - jkB]e^{-jk(a+b)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2-44})$$

avec u_0 et $u'_0 \neq 0$.

Les solutions au système A2-44 existent si :

$$\begin{vmatrix} [A + jkB]e^{-jk(a+b)} - 1 & Be^{-jk(a+b)} \\ [(C + k^2B) + jk(D - A)]e^{-jk(a+b)} & [D - jkB]e^{-jk(a+b)} - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2-45})$$

Enfin la relation de dispersion suivante est :

$$\boxed{\cos[k(a+b)] = \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \sin(\alpha a)\sin(\beta b)\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta}} \quad (\text{A2-46})$$

où $\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_a}$ et $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_b}$.

Annexe 3

Matrice de calcul de surface de dispersion pour une onde polarisée TM

Dans la suite de la démonstration, les champs électrique et magnétique seront développés en série de Fourier dans la base du réseau réciproque, ainsi que la permittivité diélectrique.

- Résolution de l'équation de Maxwell-Ampere :

L'équation de Maxwell-Ampere s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (\text{A3-1})$$

avec $\vec{E} = \vec{E}_k e^{j\omega t}$ et $\vec{E}_k = \|\vec{E}_k\| e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \vec{u}$.

Le rotationnel du champ magnétique \vec{H} s'exprime par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (\text{A3-2})$$

Or il n'existe pas de composantes en H_z et la structure est infinie en z ,

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \quad (\text{A3-3})$$

$$\text{Or} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{h_1} \sum_{h_2} H_{y_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A3-4})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) H_{y_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A3-5})$$

et

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) H_{x_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right], \quad (\text{A3-6})$$

alors le rotationnel du champ magnétique s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) - (G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) \right] H_{h_1 h_2}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{A3-7})$$

On décompose de la même manière le terme à gauche de l'égalité de l'équation de Maxwell-Ampere :

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x, y) E = \omega \varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\bar{G}_{h_1 h_2}} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} E_{\bar{G}_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \quad (\text{A3-8})$$

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x, y) E = \omega \varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\sum_{h'_1} \sum_{h'_2} \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} E_{\bar{G}_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A3-9})$$

On a alors l'équation A3-1 qui se simplifie en éliminant les doubles sommes sur h_1 et h_2 , ainsi que les exponentielles, et on obtient :

$$\left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) - (G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) \right] H_{h_1 h_2}^{k_x k_y} = -\omega \varepsilon_0 \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} E_{\bar{G}_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} \quad (\text{A3-10})$$

Sous forme matricielle, cette équation devient :

$$\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right] \left[H_{y_{h_1 h_2}}^k \right] - \left[K_{y_{h_1 h_2}} \right] \left[H_{x_{h_1 h_2}}^k \right] = -\omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} \right] \left[E_{z_{h'_1 h'_2}}^k \right] \quad (\text{A3-11})$$

avec $\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right]$ et $\left[K_{y_{h_1 h_2}} \right]$: matrices diagonales

$\left[\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}} \right]$: matrice formée par les coefficients de Fourier de la permittivité relative

- Résolution de l'équation de Maxwell-Faraday :

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous la forme :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = j\omega\mu_0\vec{H} \quad (\text{A3-12})$$

On peut écrire le rotationnel du champ électrique tel que :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Ez \end{vmatrix} = j\omega\mu_0 \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -\begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} = j\omega\mu_0 \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A3-13})$$

Les dérivées du champ électrique en y et en x du membre de gauche de l'égalité précédente sont décomposables en onde plane, alors on obtient :

$$\frac{\partial Ez}{\partial y} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) E_{z_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \quad (\text{A3-14})$$

et

$$\frac{\partial Ez}{\partial x} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) E_{z_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \quad (\text{A3-15})$$

D'autre part, à droite de l'égalité A3-13, les composantes du champ magnétique sont aussi développables en onde plane et on peut alors écrire :

$$\omega\mu_0 H_x = \omega\mu_0 \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} H_{x_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \quad (\text{A3-16})$$

et

$$\omega\mu_0 H_y = \omega\mu_0 \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} H_{y_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \quad (\text{A3-17})$$

Alors sous forme matricielle, en écrivant pour la composante x $[G_{x_{h_1 h_2}}] + k_x = [K_{x_{h_1 h_2}}]$, et pour la composante y $[G_{y_{h_1 h_2}}] + k_y = [K_{y_{h_1 h_2}}]$, on a :

$$[K_{y_{h_1 h_2}}] \begin{pmatrix} E_{z_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} = \omega\mu_0 \begin{pmatrix} H_{x_{h_1 h_2}}^k \end{pmatrix} \quad (\text{A3-18})$$

et
$$-\left[K_{x_{h_1 h_2}}\right]\left(E_{z_{h_1 h_2}}^k\right)=\omega\mu_0\left(H_{y_{h_1 h_2}}^k\right). \quad (\text{A3-19})$$

• Calcul de $|k|$ en fonction des composantes des champs :

En repartant des écritures des équations A3-11, A3-18 et A3-19, et en simplifiant l'écriture, on peut écrire :

$$\left[K_x\right]\left(H_y\right)-\left[K_y\right]\left(H_x\right)=-\omega\varepsilon_0\left[\varepsilon_{\vec{G}}\right]\left(E_z\right) \quad (\text{A3-20})$$

$$\left[K_y\right]\left(E_z\right)=\omega\mu_0\left(H_x\right) \quad (\text{A3-21})$$

$$-\left[K_x\right]\left(E_z\right)=\omega\mu_0\left(H_y\right). \quad (\text{A3-22})$$

On peut décomposer le vecteur propagation \vec{k} dans le repère cartésien (O; x, y) par :

$$\vec{k}=\begin{cases} k_x=k\cos\theta \\ k_y=k\sin\theta \end{cases} \quad (\text{A3-23})$$

Les équations A3-11, A3-18 et A3-19 peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\left[G_x\right]\left(H_y\right)-\left[G_y\right]\left(H_x\right)+\omega\varepsilon_0\left[\varepsilon_{\vec{G}}\right]\left(E_z\right)=-k\cos\theta\left(H_y\right)+k\sin\theta\left(H_x\right) \quad (\text{A3-24})$$

$$\left[G_y\right]\left(E_z\right)-\omega\mu_0\left(H_x\right)=-k\sin\theta\left(E_z\right) \quad (\text{A3-25})$$

$$-\left[G_x\right]\left(E_z\right)-\omega\mu_0\left(H_y\right)=k\cos\theta\left(E_z\right). \quad (\text{A3-26})$$

Sous forme matricielle, on a le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega\varepsilon_0\left[\varepsilon_{\vec{G}}\right] & -\left[G_y\right] & \left[G_x\right] \\ \left[G_y\right] & -\omega\mu_0\left[I_d\right] & \left[0\right] \\ -\left[G_x\right] & \left[0\right] & -\omega\mu_0\left[I_d\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \left[0\right] & \sin\theta\left[I_d\right] & -\cos\theta\left[I_d\right] \\ -\sin\theta\left[I_d\right] & \left[0\right] & \left[0\right] \\ \cos\theta\left[I_d\right] & \left[0\right] & \left[0\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (\text{A3-27})$$

L'expression ci-dessus peut être simplifiée pour ne garder que deux composantes de champ sur trois. Pour cela, on exprime une composante en fonction des autres.

En partant de l'équation A3-26, il est possible d'écrire que :

$$k(E_z) = \frac{-[G_y](E_z) - \omega\mu_0(H_y)}{\cos\theta} \quad (\text{A3-28})$$

En reportant l'expression ci-dessus dans l'équation A3-25, nous obtenons :

$$[G_y](E_z) - \omega\mu_0(H_x) = -k(E_z)\sin\theta = [G_x]\tan\theta(E_z) + \omega\mu_0 \tan\theta(H_y) \quad (\text{A3-29})$$

et après factorisation :

$$([G_y] - [G_x]\tan\theta)(E_z) = \omega\mu_0(H_x) + \omega\mu_0 \tan\theta(H_y). \quad (\text{A3-30})$$

D'où

$$(H_x) = \frac{[G_y] - [G_x]\tan\theta}{\omega\mu_0}(E_z) - \tan\theta(H_y) \quad (\text{A3-31})$$

En reportant l'expression de la composante de champ magnétique ci-dessus dans la matrice non simplifiée A3-27, et en réalisant des factorisations, on obtient la matrice finale :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \omega\epsilon_0[\epsilon_G^-] - \frac{[G_y][G_y] - [G_x][G_y]\tan\theta}{\omega\mu_0} & [G_x] + [G_y]\tan\theta \\ -[G_x] & -\omega\mu_0[I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_y \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\omega\mu_0}([G_y] - [G_x]\tan\theta) & -\cos\theta[I_d] - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}[I_d] \\ \cos\theta[I_d] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_y \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\omega\mu_0}([G_y] - [G_x]\tan\theta) & -\frac{1}{\cos\theta}[I_d] \\ \cos\theta[I_d] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3-32})$$

Donc la norme du vecteur propagation \vec{k} peut donc être déduit de la matrice suivante pour une onde polarisée TM :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{\cos\theta}[I_d] & \frac{\sin\theta}{\omega\mu_0}([G_y]-[G_x]\tan\theta) \\ [0] & \cos\theta[I_d] \end{array} \right)^{-1} \times \\
& \left(\begin{array}{cc} [G_x]+[G_y]\tan\theta & \omega\varepsilon_0[\varepsilon_{\bar{G}}]-\frac{[G_y][G_y]-[G_x][G_y]\tan\theta}{\omega\mu_0} \\ -\omega\mu_0[I_d] & -[G_x] \end{array} \right) \begin{pmatrix} H_y \\ E_z \end{pmatrix} \\
& = k \begin{pmatrix} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_y \\ E_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A3-33}$$

Annexe 4

Matrice de calcul de surface de dispersion pour une onde polarisée TE

Comme pour le cas d'un mode TM, les champs électrique et magnétique seront développés en série de Fourier dans la base du réseau réciproque, ainsi que la permittivité diélectrique.

- Résolution de l'équation de Maxwell-Faraday :

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (\text{A4-1})$$

avec $\vec{H} = \vec{H}_k e^{-j\omega t}$ et $\vec{H}_k = \|\vec{H}_k\| e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \vec{u}$.

Le rotationnel du champ électrique \vec{E} s'exprime par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (\text{A4-2})$$

Or il n'existe pas de composante E_z et la structure est infinie en z ,

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \quad (\text{A4-3})$$

$$\text{Or} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{h_1} \sum_{h_2} E_{y_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A4-4})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) E_{y_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A4-5})$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) E_{x_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \right], \quad (\text{A4-6})$$

alors le rotationnel du champ électrique s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j \left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) - (G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) \right] E_{h_1 h_2}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \cdot \vec{e}_z. \quad (\text{A4-7})$$

On décompose de la même manière le terme à gauche de l'égalité de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\omega \mu_0 H = \omega \mu_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} H_{h_1 h_2}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y}. \quad (\text{A4-8})$$

On a alors l'équation A4-1 qui se simplifie en éliminant les doubles sommes sur h_1 et h_2 , ainsi que les exponentielles, et on obtient :

$$\left[(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) - (G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) \right] E_{h_1 h_2}^{k_x k_y} = \omega \mu_0 H_{h_1 h_2}^{k_x k_y}. \quad (\text{A4-9})$$

Sous forme matricielle, cette équation devient :

$$\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right] \left(E_{y_{h_1 h_2}}^k \right) - \left[K_{y_{h_1 h_2}} \right] \left(E_{x_{h_1 h_2}}^k \right) = \omega \mu_0 \left(H_{z_{h_1 h_2}}^k \right) \quad (\text{A4-10})$$

avec $\left[K_{x_{h_1 h_2}} \right]$ et $\left[K_{y_{h_1 h_2}} \right]$: matrices diagonales

- Résolution de l'équation de Maxwell-Ampere :

L'équation de Maxwell-Ampere s'écrit sous la forme :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -j \omega \varepsilon \vec{E} \quad (\text{A4-11})$$

On peut écrire le rotationnel du champ magnétique sous la forme :

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Hz & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\varepsilon \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -\frac{\partial Hz}{\partial x} = -j\omega\varepsilon \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A4-12})$$

Les dérivées du champ magnétique en y et en x du membre de gauche de l'égalité précédente sont décomposable en onde plane, alors on obtient :

$$\frac{\partial Hz}{\partial y} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y) H_{z_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \quad (\text{A4-13})$$

et

$$\frac{\partial Hz}{\partial x} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x) H_{z_{h_1 h_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \quad (\text{A4-14})$$

D'autre part, à droite de l'égalité A4-12, les composantes du champ électrique sont aussi développables en onde plane et on peut écrire :

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon(x,y)E_x = \omega\varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\bar{G}_{h_1 h_2}}^- e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} E_{x_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \quad (\text{A4-15})$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon(x,y)E_x = \omega\varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\sum_{h'_1} \sum_{h'_2} \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}}^- E_{x_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \right] \quad (\text{A4-16})$$

et

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon(x,y)E_y = \omega\varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \varepsilon_{\bar{G}_{h_1 h_2}}^- e^{j(G_{x_{h_1 h_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h_1 h_2}} + k_y)y} \sum_{h'_1} \sum_{h'_2} E_{y_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \quad (\text{A4-17})$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon(x,y)E_y = \omega\varepsilon_0 \sum_{h_1} \sum_{h_2} \left[\sum_{h'_1} \sum_{h'_2} \varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h'_1), (h_2-h'_2)}}^- E_{y_{h'_1 h'_2}}^{k_x k_y} e^{j(G_{x_{h'_1 h'_2}} + k_x)x + j(G_{y_{h'_1 h'_2}} + k_y)y} \right]. \quad (\text{A4-18})$$

Alors sous forme matricielle, en écrivant pour la composante x $[G_{x_{h_1 h_2}}] + k_x = [K_{x_{h_1 h_2}}]$, et pour la composante y $[G_{y_{h_1 h_2}}] + k_y = [K_{y_{h_1 h_2}}]$, on a :

$$[K_{x_{h_1 h_2}}] [H_{z_{h_1 h_2}}] = -\omega\varepsilon_0 [\varepsilon_{\bar{G}_{(h_1-h_1), (h_2-h_2)}}^-] [E_{x_{h_1 h_2}}] \quad (\text{A4-19})$$

et

$$\begin{bmatrix} K_y \\ K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} = \omega \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-20})$$

- Calcul de |k| en fonction des composantes de champs :

En repartant des écritures des équations A4-10, A4-19 et A4-20, et en simplifiant les écritures, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} K_y \\ K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \omega \mu_0 \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (\text{A4-21})$$

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} = -\omega \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A4-22})$$

$$\begin{bmatrix} K_y \\ K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} = \omega \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-23})$$

On peut décomposer le vecteur propagation \vec{k} dans le repère cartésien (O ; x, y) par :

$$\vec{k} = \begin{cases} k_x = k \cdot \cos \theta \\ k_y = k \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A4-24})$$

Les équations A4-10, A4-19 et A4-20 peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} G_y \\ G_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} - \omega \mu_0 \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} = -k \sin \theta \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix} + k \cos \theta \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A4-25})$$

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} + \omega \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = -k \cos \theta \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (\text{A4-26})$$

$$\begin{bmatrix} G_y \\ G_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix} - \omega \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix} = -k \sin \theta \begin{bmatrix} H_z \\ H_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-27})$$

Sous forme matricielle, on a le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -\omega \mu_0 [I_d] & -[G_x] & [G_y] \\ [G_x] & \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_G] & [0] \\ [G_y] & [0] & -\omega \varepsilon_0 [\varepsilon_G] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} [0] & \cos \theta [I_d] & -\sin \theta [I_d] \\ -\cos \theta [I_d] & [0] & [0] \\ -\sin \theta [I_d] & [0] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (\text{A4-28})$$

L'expression ci-dessus peut être simplifiée pour ne garder que deux composantes de champ sur trois. Pour cela, on exprime une des composantes en fonction des autres.

En partant de l'équation A4-26, il est possible d'écrire que :

$$k(H_z) = \frac{-[G_x](H_z) - \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G](E_x)}{\cos\theta} \quad (\text{A4-29})$$

En reportant l'expression ci-dessus dans l'équation A4-27, nous obtenons :

$$[G_y](H_z) - \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G](E_y) = [G_x]\tan\theta(H_z) + \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]\tan\theta(E_x). \quad (\text{A4-30})$$

Et après factorisation :

$$([G_y] - [G_x]\tan\theta)(H_z) = \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]\tan\theta(E_x) + \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G](E_y). \quad (\text{A4-31})$$

D'où

$$(E_y) = \frac{[G_y] - [G_x]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]}(H_z) - \tan\theta(E_x). \quad (\text{A4-32})$$

En reportant l'expression de la composante de champ électrique ci-dessus dans la matrice non simplifiée A4-28, et en réalisant des factorisations, on obtient la matrice finale :

$$\begin{pmatrix} -\omega\mu_0[I_d] + \frac{[G_y][G_y] - [G_x][G_y]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]} & -[G_x] - [G_y]\tan\theta \\ [G_x] & \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z \\ E_x \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]}([G_y] - [G_x]\tan\theta) & \frac{1}{\cos\theta}[I_d] \\ -\cos\theta[I_d] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z \\ E_x \end{pmatrix} \quad (\text{A4-33})$$

Donc la norme du vecteur propagation \vec{k} peut donc être déduit de la matrice suivante pour une onde polarisée TE :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\theta}[I_d] & \frac{\sin\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]}([G_y] - [G_x]\tan\theta) \\ [0] & -\cos\theta[I_d] \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -[G_x] - [G_y]\tan\theta & -\omega\mu_0[I_d] + \frac{[G_y][G_y] - [G_x][G_y]\tan\theta}{\omega\varepsilon_0[\varepsilon_G]} \\ \omega\varepsilon_0[\varepsilon_G] & [G_x] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ H_z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} [I_d] & [0] \\ [0] & [I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ H_z \end{pmatrix} \quad (\text{A4-34})$$

Annexe 5

Transformée de Fourier d'une structure photonique carrée

Soit la structure photonique carrée présentée ci-après dont l'origine du repère est au centre du matériau.

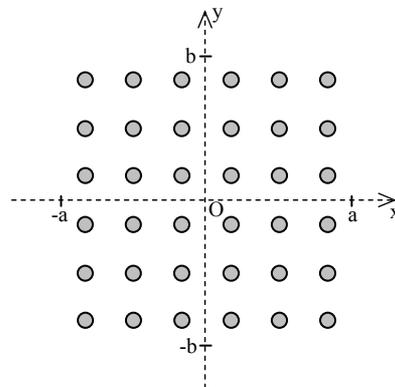


Figure A5-1 : Structure photonique avec bornes d'intégration

La structure globale peut être représentée par une fonction rectangulaire de largeur $2a$ en x et $2b$ en y .

Nous pouvons alors écrire :

$$G(k_x, k_y) = \int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b \text{rect}_{2a}(x) \text{rect}_{2b}(y) e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{A5-1})$$

Les fonctions rectangulaires sont des fonctions indépendantes donc nous pouvons les séparer.

$$G(k_x, k_y) = \underbrace{\int_{-a}^a \text{rect}_{2a}(x) e^{-j2\pi k_x x} dx}_I \cdot \underbrace{\int_{-b}^b \text{rect}_{2b}(y) e^{-j2\pi k_y y} dy}_J \quad (\text{A5-2})$$

Le calcul de l'intégrale I est tel que :

$$I = \int_{-a}^a e^{-j2\pi k_x x} dx = \frac{1}{\pi k_x} \frac{e^{j2\pi k_x a} - e^{-j2\pi k_x a}}{2j} \quad (\text{A5-3})$$

alors
$$I = \frac{1}{\pi k_x} \frac{\sin(2\pi k_x a)}{2a} 2a = 2a \frac{\sin(2\pi k_x a)}{2\pi k_x a}. \quad (\text{A5-4})$$

Donc
$$I = 2.a.\text{sinc}(2k_x a) \quad (\text{A5-5})$$

Il en est de même pour l'intégrale J, alors :

$$J = 2.b.\text{sinc}(2k_y b). \quad (\text{A5-6})$$

Nous avons alors le résultat suivant :

$$\boxed{G(k_x, k_y) = 4.a.b.\text{sinc}(2k_x a).\text{sinc}(2k_y b)} \quad (\text{A5-7})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **E. YABLONOVITCH**
“Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics”
Physical Review Letter, Vol. 58, N°20, 18 May 1987, pp. 2059-2062
- [2] **E. YABLONOVITCH**
“Photonic Ban-Gap structure”
J. Opt. Society, Vol 10, February 1993, pp.283-293
- [3] **E. YABLONOVITCH, T.J. GMITTER**
“Photonic Band Structure”
J. Opt. Society, Vol 9, September 1990, pp.1792-1800
- [4] **J.D. JOANNOPOULOS, R.D. MEADE, and J.N. WINN**
“Photonic crystals: Modelling the flows of light”
Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995
- [5] **K.SAKODA**
“Optical Properties of Photonic Crystals”
Optical Sciences, Springer, 2001
- [6] **H. ROUSSEL, V. VIGNERAS, W. TABBARA, J.P. PARNEIX**
“Etude théorique et expérimentale de structures à Bande Photonique Interdite bidimensionnelle”
JNM 99, Arcachon, 5-7 Mai 1999
- [7] **G. TAYEB, D. MAYSTRE**
“Rigorous theoretical study of finite size two dimensional photonic crystal doped by microcavites”
J. Opt. Soc. Am. A 14, p.3323-3332, 1997
- [8] **V. VIGNERAS, H. ROUSSEL, J.P. PARNEIX, W. TABBARA**
“Modélisation et mesure de la réponse électromagnétique de structures BIP bidimensionnelles”
JNM 2001, Poitiers, 16-18 mai 2001

- [9] **P.R. VILLENEUVE, M. PICHE**
“Photonic band gap in two-dimensional square lattices: Square and Circular rods”
Physical Review B, Vol. 46, 1992, pp. 4673
- [10] **M. PLIHAL, A.A. MARADUDIN**
“Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice”
Physical Review B, Vol. 44, October 1991, pp. 8565-8571
- [11] **D. CASSAGNE, C. JOUANIN, D. BERTHO**
“Hexagonal photonic band gap structures”
Physical Review B, Vol. 53, March 1996, pp. 7134-7141
- [12] **<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/chimie/01/deug/sem2/bravais.html>**
- [13] **F. DEMONTOUX, V. VIGNERAS**
“Multidiffusion des ondes électromagnétiques dans les structures BIP. Etude paramétrique de réseaux tridimensionnels”
JNM 2003, Lille, 21-23 mai 2003
- [14] **K.M. HO, C.T. CHAN, C.M. SOUKOULIS, R. BISWAS, M. SIGALAS**
“Photonic band gaps in three dimensions : new layer-by-layer periodic structures”
Phys. Rev. Lett., Vol 67, pp.413, 1994
- [15] **A. CHELNOKOV, S. ROWSON, J.-M. LOURTIOZ, L. DUVILLARET, J.-L. COUTAZ**
"Terahertz characterisation of mechanically machined 3D photonic crystal"
Electronics Letters, v. 33, No. 23, pp. 1981-1983, 1997
- [16] **J.M. ZIMAN**
“Principles of the theory of solids”
University press of Cambridge (1965)

[17] Y. QUERE

« Physique des matériaux »

Ellipses (1988)

[18] C. et H. NGO

“Introduction à la physique des semi-conducteurs”

Dunod (1998)

[19] P. F. COMBES

Micro-ondes

2- Circuits passifs, propagation, antennes

Cours et exercices

Dunod (1997)

**[20] P. POTTIER, C. SEASSAL, S. LETERTRE, J.L. LECLERCQ, P. VIK
TOROWITCH, D. CASSAGNE, C. JOUANIN**

“Triangular and hexagonal high Q factor 2D photonic bandgap cavities on III-V
suspended membranes “

IEEE, Lightwave Technology, Journal of, November 1999, pp. 2058-2062

[21] J.C.KNIGHT, T.A. BIRKS, P.St.J. RUSSELL, D.M. ATKIN

“All silica single mode optical fiber with photonic crystal cladding”

Optics Letters, vol. 21, n°19, 1996, pp. 1547-1549

[22] J. MARCOU, F. BRECHET

« Conception de fibres à bande interdite photonique pour le contrôle de la dispersion »

NUMELEC' 2000, pp. 38-39

[23] H. HIRAYAMA, T. HAMANO, and Y. AOYAGI

“Novel surface emitting laser diode using PBG crystal cavity”

Appl. Phys. Letters, Vol 69, n°6, Aug. 1996, pp.791-793

- [24] **A. de LUSTRAC, F. GADOT, S. GABARET, J.M. LOURTIOZ, T. BRILLAT, A. PRIOU, E. AKMANSOY**
“Experimental demonstration of electrically controllable photonic crystals at centimetres wavelengths”
Appl. Phys. Letters, Vol 75, September 1999, pp.1625-1627
- [25] **G. POISLANE**
“Antennes et matériaux à BIP”
Thèse de Doctorat n°2194, Université de Rennes I, Juillet 1999
- [26] **B. LENOIR**
“Applications de structures périodiques diélectriques et métalliques à la conception de dispositifs microondes volumiques et planaires”
Thèse de Doctorat n°14-2001, Université de Limoges, 23 Mars 2001
- [27] **F.R. YANG, K.P. MA, Y. QIAN, T. ITOH**
“A novel TEM waveguide using uniplanar compact photonic band gap (UC-PBG) structure”
IEEE Transactions on Microwave Technology, vol. 47, n°11, November 1999
- [28] **O. VANBESIEN, J. DANGLLOT, D. LIPPENS**
“A smart K-band resonant switch based on photonic band gap structure engineering”
EuMC 1999, vol. 1, October 3-5, 1999, pp. 57-60
- [29] **I. RUMSEY, M.P. MAY, P.K. KELLY**
“Photonic bandgap structures used as filter in microstrip circuits”
IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 8, n°10, October 1998
- [30] **V. RADISIC, Y. QIAN, T. ITOH**
“Novel 2D photonic bandgap structure for microstrip lines”
IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 8, February 1998

[31] Y. QIAN, T. ITOH

“Novel planar Photonic Band Gap structures for Antenna Applications”

Congrès AP2000 Davos, April 9-14 2000

[32] R. GONZALO, B. MARTINEZ, P. DE MAAGT

“Improvements in Antennas Using Photonic Bandgap Structures as Substrates”

Congrès AP2000 Davos, April 9-14 2000

[33] S. COLLARDEY and al

“Metallic Photonic Band Gap Propagation Modes characterization”

Microwave and optical technology letters, 28, pp.434-440, MAR 20 2001

[34] M. THEVENOT, A. REINEIX, B. JECKO

“Radôme en matériau à bande interdite photonique pour améliorer la directivité des antennes”

JNM 1999, Arcachon, 5-7 Mai 1999

[35] M. THEVENOT, C. CHEYPE, A. REINEIX, B. JECKO

“Directive Photonic Band Gap Antenna”

IEEE Transactions on microwaves Theory and Tech., Vol 47, November 1999

[36] T. BRILLAT, A. de LUSTRAC, F. GADOT, E. AKMANSOY, J.M. LOURTIOZ

“Electrically controllable photonic bandgaps in the microwave domain: variable conductances versus variable capacitances”

PECS, Sendai, Japan, March 8-10, 2000

[37] G. POILASNE, P. POULIGUEN, K. MAHDJOURI, et al.

“Study of beam splitting using aperiodic metallic photonic bandgap materials”

Microwave Opt. Tech. Lett. 25, 36, 2000

[38] C. GUIFFAUT

« Contribution à la méthode FDTD pour l'étude d'antennes et de la diffraction d'objets enfouis »

Thèse 2401, Université de Rennes 1, 25 octobre 2001

[39] K. S. YEE

« Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media »

IEEE Transaction Antennas and Propagation, vol.14, 1966, pp. 302-307

[40] A. TAFLOVE, M.E. BRODWIN

« Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations »

IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, Vol. 23, n°8, août 1975

[41] J.P. BERENGER

« A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves »

J. Comp. Phys., Vol. 114, n°2, October 1994, pp. 185-200

[42] J.P. BERENGER

« Perfectly Matched Layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems »

IEEE A&P, Vol. 44, n°1, January 1996, pp. 110-117

[43] M. THEVENOT

« Analyse comportementale et conception des matériaux diélectriques à Bande Interdite Photonique. Application à l'étude et à la conception de nouveaux types d'antennes »

Thèse de doctorat n°34-1999, Université de Limoges, 18 novembre 1999

[44] L. BRILLOUIN, M. PARODI

« Propagation des ondes dans les milieux périodiques »

Masson et C^{te}, Dunod, 1956

[45] N.W. ASHCROFT, N.D. MERMIN

« Solid State Physics »

Saunders College Publishing, 1976

[46] C. KITTEL

«Introduction to solid state physics»

John Willey & Sons, New York, 1976

[47] C. CHEYPE

“Etude et utilisation des propriétés des matériaux BIPs à défaut pour la conception d’antennes”

Thèse de doctorat n°34-2001, Université de Limoges, 25 septembre 2001

[48] P. YEH

“Optical Waves in Layered Media”

N. York, John Wiley & sons, 1988

[49] C. SOUKOULIS

“Photonic Band Gap and Localisations”

Plenum 1993

[50] K.M. HO, C.T. CHAN, C.M. SOUKOULIS

“Existence of a photonic Gap in periodic dielectric structures”

Physical Review Letters Vol 65, pp. 3152, 1999

[51] L. MERCIER

“Etude des cristaux photoniques à défauts pour la conception de substrats d’antennes imprimées”

Rapport de stage de DEA, Université de Limoges, 3 juillet 2002

[52] D. CASSAGNE

“Matériaux à bandes interdites photoniques”

Annales de physique, Vol. 23, n° 4, 1998

[53] B. ENGQUIST, A. MAJDA

“Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”

Mathematics of Computation, Vol 31, pp. 629-651, 1977

[54] M. THEVENOT, A. REINEIX, B. JECKO

“FDTD approach for modelling PBG structure”

Special issue of Pure and Applied Optics on Electromagnetic Optics. J. Opt. A: Pure Appl. 1 (July 1999) pp.495-500

[55] S. COLLARDEY, A.C. TAROT, P. POULIGUEN, K. MADHDJHOUBI

“Analyse numérique des matériaux à bande interdite photonique métalliques dans l’espace des vecteurs d’onde”

12^{ème} Journées Nationales Micro-ondes, 16-18 mai 2001, Poitiers

[56] M. THEVENOT, A. REINEIX, B. JECKO

“FDTD to analyse complex PBG structures in the reciprocal space”

Microwave and Optical Technology Letters, Vol 21, n°1, April 2 1999, pp.25-28

COMMUNICATION PERSONNELLE :

Y. MERLE, M. THEVENOT, A. REINEIX

“Surfaces de dispersion et distributions de champ électromagnétique dans un cristal BIP 2D”

NUMELEC’2003, Toulouse, 28-30 Octobre 2003, Session Orale 8, pp. 241-242

RESUME

Depuis une vingtaine d'années, les matériaux à Bande Interdite Photonique (arrangement périodique de structure métalliques ou diélectriques) font l'objet de nombreuses études. Ils ont pour propriété d'interdire la propagation d'ondes électromagnétiques dans une certaine bande de fréquence. De telles structures peuvent aussi être utilisées pour réaliser un filtrage spatial.

Ce mémoire présente une étude de matériaux à Bande Interdite Photonique infinis à deux dimensions. Ils permettent le calcul de contour de dispersion donnant accès aux différentes directions que peut prendre le vecteur d'onde dans le matériau.

Puis, nous nous sommes intéressés à donner une interprétation des propriétés dispersives des matériaux périodiques. Grâce aux conditions de résonance, aux vitesses de phase et aux coefficients de transmission, nous avons montré pourquoi à certaines fréquences le matériau est totalement transparent tandis qu'à d'autres il réfléchit les ondes.

ABSTRACT

Since two decades, the Photonic Band Gap materials (periodic arrangement of metallic or dielectric structure) have been the subject of many studies. The so called materials have the property of forbidding the propagation of electromagnetic waves in a certain frequency bandwidth. They can also be used to carry out a spatial filtering as well.

This dissertation presents a study of two dimensions infinite Photonic Band Gap material. They allow the calculation of dispersion contour giving access to the various directions which the wave vector can take into the material.

Then, we have presented an interpretation of the dispersive properties of periodic materials. That made it possible to present the conditions of resonance of the photonic structures. Thanks to the resonance conditions, the phase velocity and the transmission factor, it is shown why at certain frequencies the material is totally transparent while in other frequencies it reflects the waves.

Mots clés :

Bande Interdite Photonique

Filtrage spatial

Contour de dispersion

Condition de résonance

Propriétés dispersives

Matériaux anisotropes

